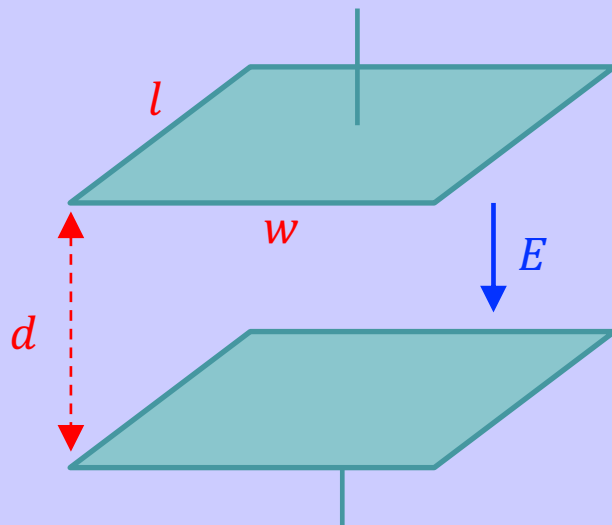


3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

- ◆ Las líneas de transmisión son el subconjunto de las guías de onda que permiten la propagación en el modo **TEM**
- ◆ No obstante, como guías de onda que son las líneas de transmisión **TLs** también permiten la propagación de ondas electromagnéticas en los modos **TE** y **TM**.
- ◆ Como hemos visto en el Tema 2, el análisis de la propagación **TEM** se puede realizar mediante la resolución de problemas de electrostática y magnetostática. Esto permite modelizar las **TLs** utilizando elementos de circuito.
- ◆ En las líneas de transmisión la propagación de la onda electromagnética se analiza en términos de una onda de tensión **$V(x,t)$** y una onda de corriente **$I(x,t)$** ; y no en términos del campo eléctrico y magnético.

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

- ◆ La energía vinculada al campo eléctrico de la onda la modelizaremos mediante **condensadores**, la energía vinculada al campo magnético la modelizaremos mediante **inductores** y las pérdidas las modelizaremos mediante **resistores**.
- ◆ Vamos a analizar un poco más en detalle estos conceptos. En primer lugar consideremos un condensador plano:



$$U_e = \frac{1}{2} CV^2$$

$$V = Ed$$

$$C = \epsilon \frac{wl}{d}$$

$$U_e = wld$$

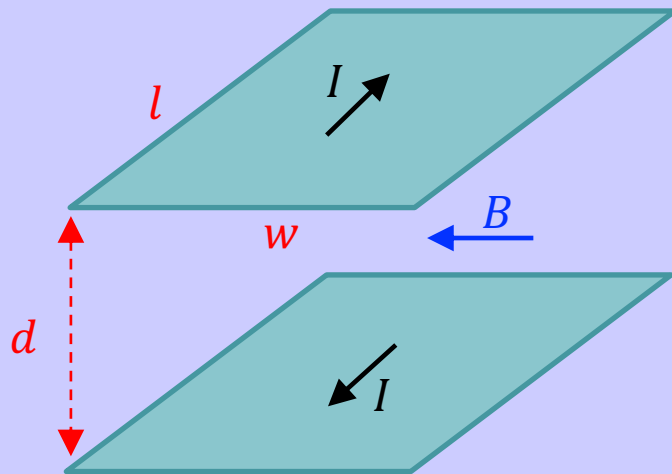
$$\frac{1}{2} \epsilon E^2$$

Volumen

Energía eléctrica por
unidad de volumen

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

- ◆ Consideremos ahora dos tiras metálicas sobre las que circulan dos corrientes en sentidos opuestos:



$$U_m = \frac{1}{2} LI^2$$

$$H = \frac{I}{w}$$

$$B = \mu H$$

$$\Phi = B l d = LI$$

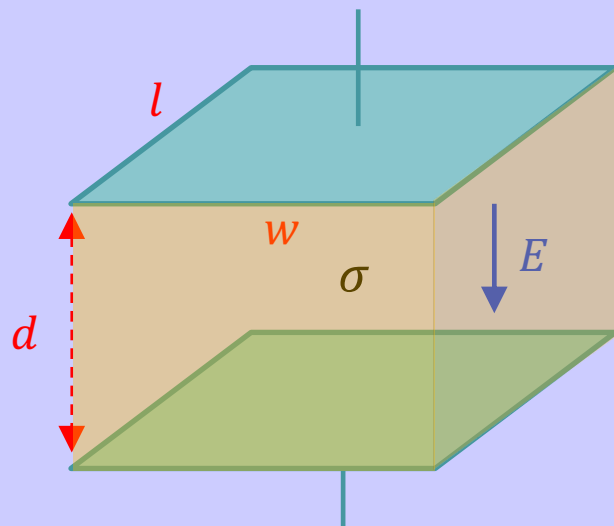
$$U_m = w l d \left(\frac{1}{2} \mu H^2 \right)$$

Volumen

Energía magnética por
unidad de volumen

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

- Consideremos ahora que entre las armaduras del condensador plano tenemos un dieléctrico con pérdidas que identificamos por una conductividad, σ



$$P_d = IV = GV^2$$

$$V = Ed$$

$$j = \sigma E$$

$$I = wlj$$

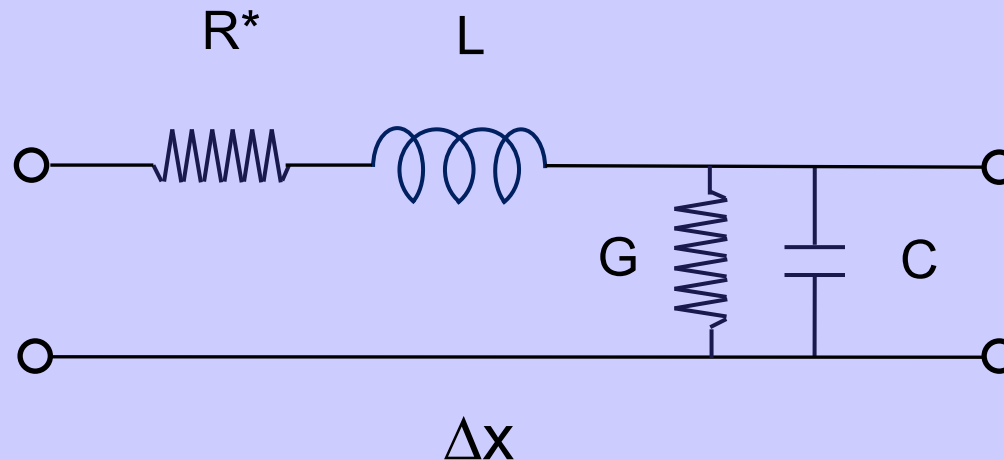
$$P_d = wld \sigma E^2$$

Volumen

Potencia disipada por
unidad de volumen

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

- ◆ Teniendo en cuenta estas relaciones modelizaremos el comportamiento de la línea utilizando **condensadores**, **inductores** y **resistores**.



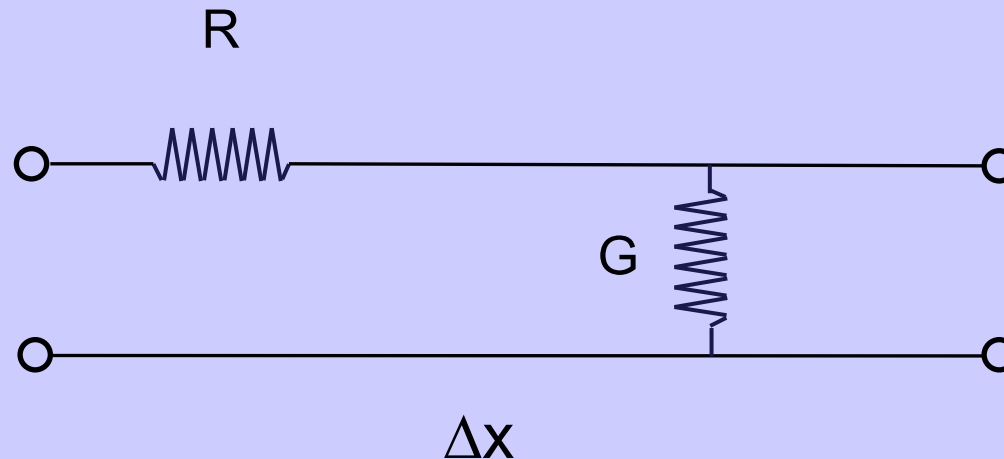
Celda básica de una línea de transmisión

- * R modeliza las pérdidas en el conductor. Si hay pérdidas habrá un campo en la dirección de propagación y E dejara de ser perpendicular. **Modos cuasi-TEM**

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.1 Regímenes de propagación

Régimen DC: Las variaciones de la tensión y de la corriente son muy lentas. El único efecto importante son las pérdidas, que están modelizadas con los elementos resistivos

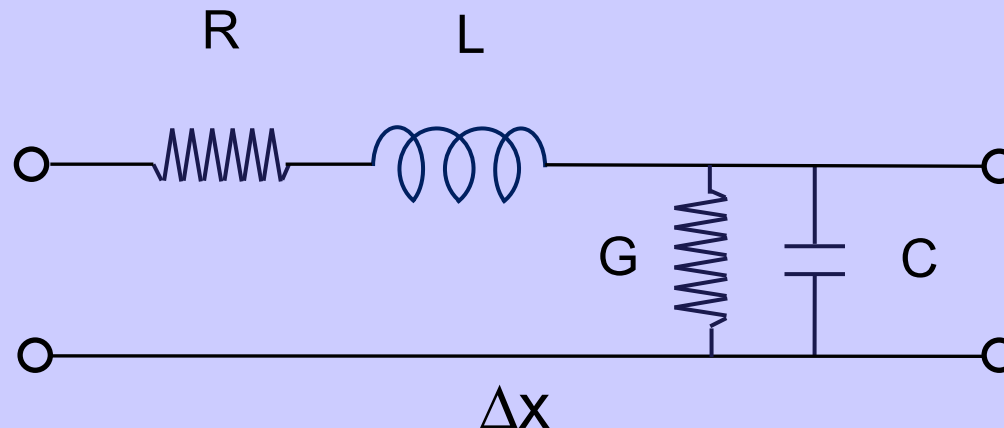


Celda básica de una línea de transmisión en régimen DC

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.1 Regímenes de propagación

Régimen de elementos discretos AC: Las variaciones de la tensión y de la corriente son lentas. Además de las pérdidas, que están modelizadas con los elementos resistivos, tenemos desfases entre la entrada y la salida de la línea, que se modelizan con los elementos reactivos, L y C .

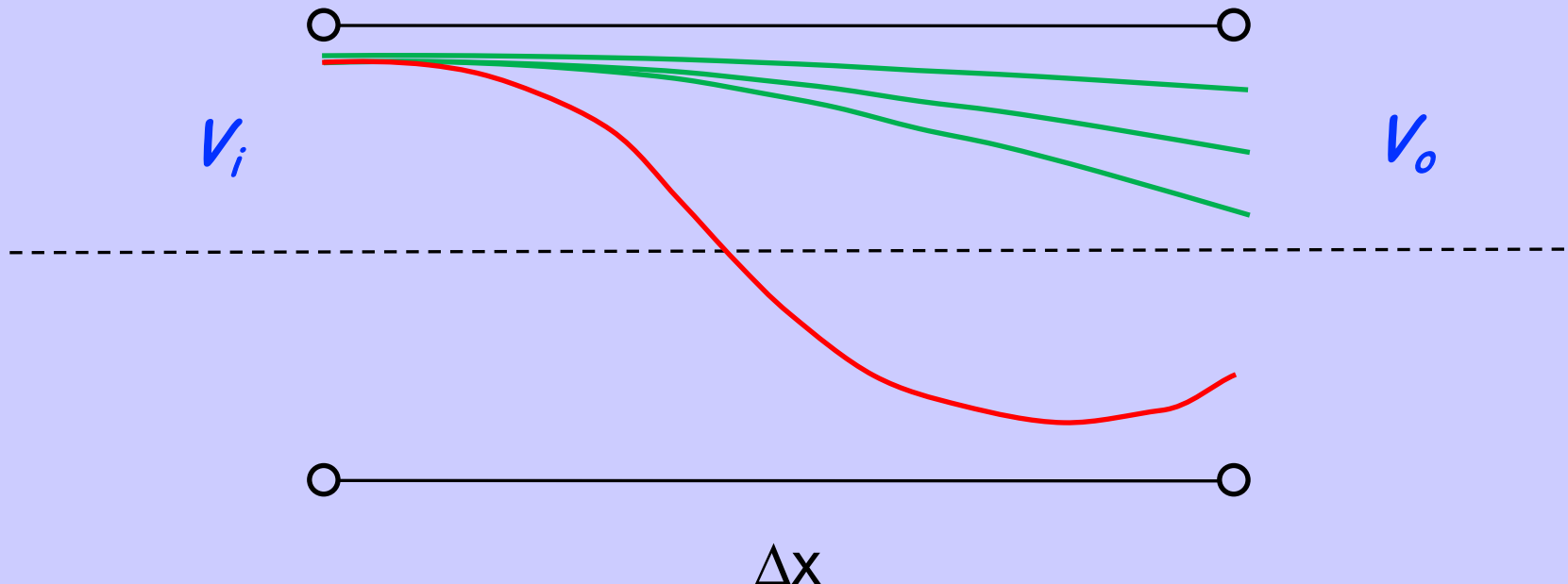


Celda básica de una línea de transmisión en régimen de elementos discretos, AC

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.1 Regímenes de propagación

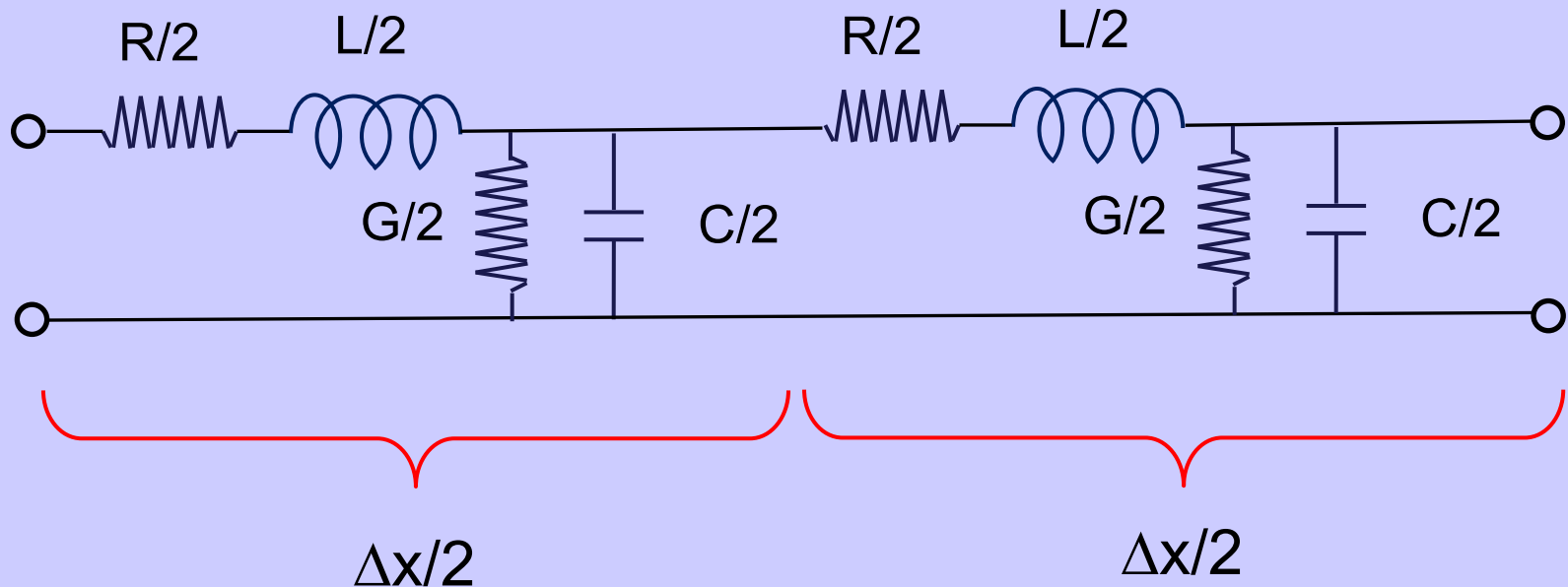
- ◆ La celda básica AC permite modelizar un desfase máximo de $\pm \pi/2$ ($\Delta x \approx \lambda/4$)



3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.1 Regímenes de propagación

- ◆ Si el desfase es mayor tendremos que añadir más celdas



Celda doble desfase máximo $\pm \pi$ ($\Delta x \approx \lambda/2$)

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.1 Regímenes de propagación

- ◆ En general el número de celdas, n , que necesitaremos para modelizar un cierto desfase, ϕ , será:

$$n = 2 \frac{\phi}{\pi}$$



$$n = 1 + 4 \frac{\phi}{\pi}$$

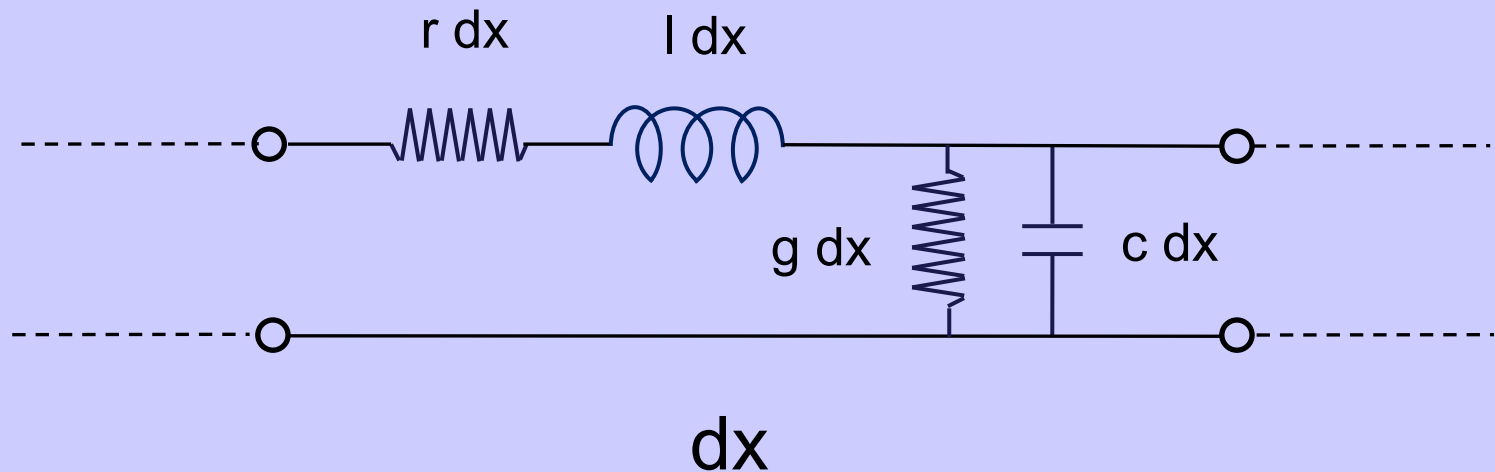
- ◆ Que en términos de la longitud de la línea, Δx , y de la longitud de onda, λ , podremos expresar como:

$$n = 1 + 8 \frac{\Delta x}{\lambda}$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.1 Regímenes de propagación

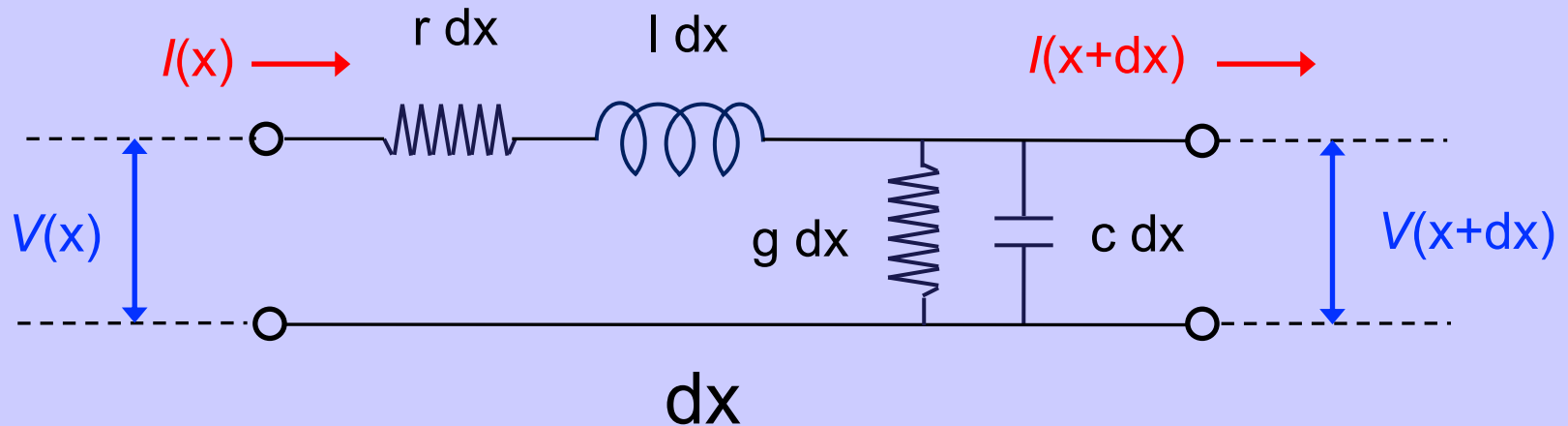
- ◆ Si $\lambda \rightarrow 0$, ($f \rightarrow \infty$), entonces $n \rightarrow \infty$ Tendremos que pasar al continuo
Régimen de elementos distribuidos RF- μ W



Celda básica en el régimen de elementos distribuidos, RF- μ W

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.2 Ecuación de propagación de ondas en una TL.



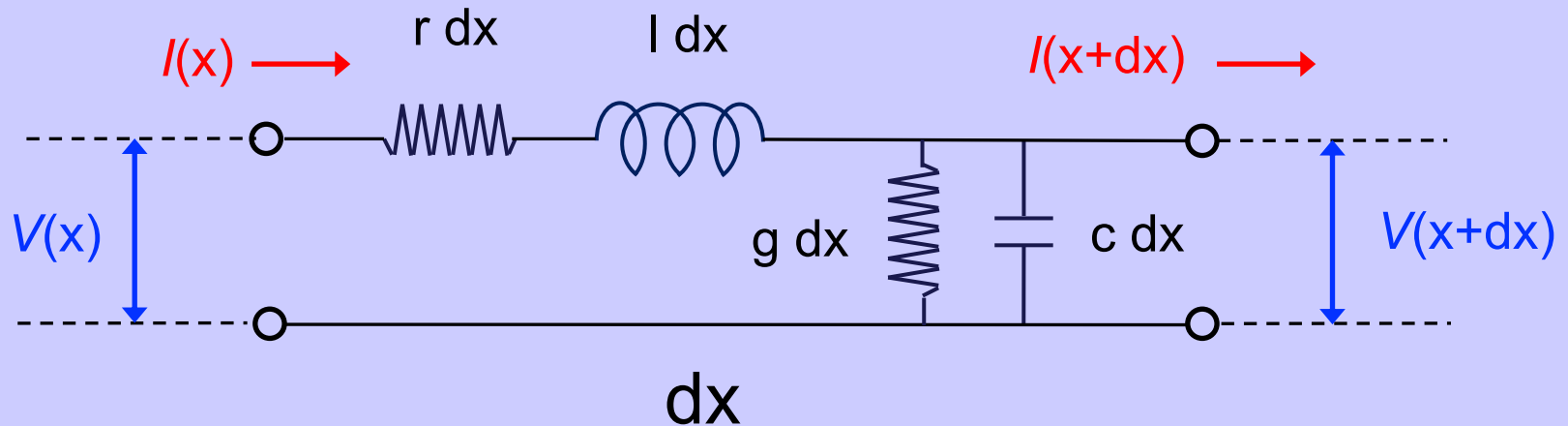
$$I(x + dx) - I(x) = -V(x + dx)[g + j\omega c] dx$$

$$I(x + dx) - I(x) = - \left[V(x) + \frac{dV(x)}{dx} dx \right] [g + j\omega c] dx$$

$$I(x + dx) - I(x) = -V(x)[g + j\omega c] dx$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.2 Ecuación de propagación de ondas en una TL.

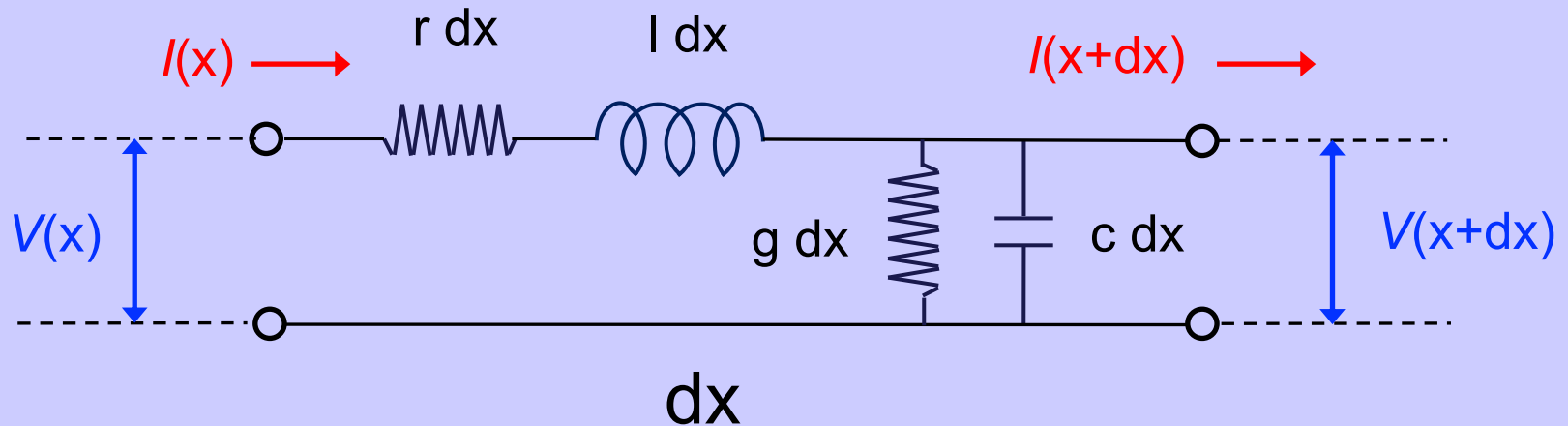


$$I(x + dx) - I(x) = -V(x)[g + j\omega c] dx$$

$$V(x + dx) - V(x) = -I(x)[r + j\omega l] dx$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.2 Ecuación de propagación de ondas en una TL.



$$\frac{dI(x)}{dx} = -V(x)[g + j\omega c]$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -I(x)[r + j\omega l]$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.2 Ecuación de propagación de ondas en una TL.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI(x)}{dx} &= -V(x)[g + jwc] \\ \frac{dV(x)}{dx} &= -I(x)[r + jwl] \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 I(x)}{dx^2} &= \gamma^2 I(x) \\ \frac{d^2 V(x)}{dx^2} &= \gamma^2 V(x) \end{aligned} \right.$$

$$\gamma = \sqrt{[r + jwl][g + jwc]} = \alpha + j\beta$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.2 Ecuación de propagación de ondas en una TL.

◆ Solución de la ecuación de ondas:

$$I(x) = I_+ e^{-\gamma x} + I_- e^{\gamma x}$$

$$V(x) = V_+ e^{-\gamma x} + V_- e^{\gamma x}$$

◆ Substituyendo estas expresiones en $\frac{dV(x)}{dx}$ y en $\frac{dI(x)}{dx}$ obtenemos:

$$\frac{V_+}{I_+} = -\frac{V_-}{I_-} = Z_o$$



$$Z_o = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.2 Ecuación de propagación de ondas en una TL.

- ◆ Solución completa de la ecuación de ondas: Superposición de una onda progresiva en, x , con una onda regresiva

$$V(x, t) = V_+ e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + V_- e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)}$$

$$I(x, t) = \frac{V_+}{Z_o} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} - \frac{V_-}{Z_o} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)}$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.2 Ecuación de propagación de ondas en una TL.

- ◆ Consideremos un rango de frecuencias para las cuales las pérdidas son despreciables. $r \ll \omega l$, $g \ll \omega c$

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left(r \sqrt{\frac{c}{l}} + g \sqrt{\frac{l}{c}} \right)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{lc}$$

$$Z_o \approx \sqrt{\frac{l}{c}}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{lc}}$$



$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Importante

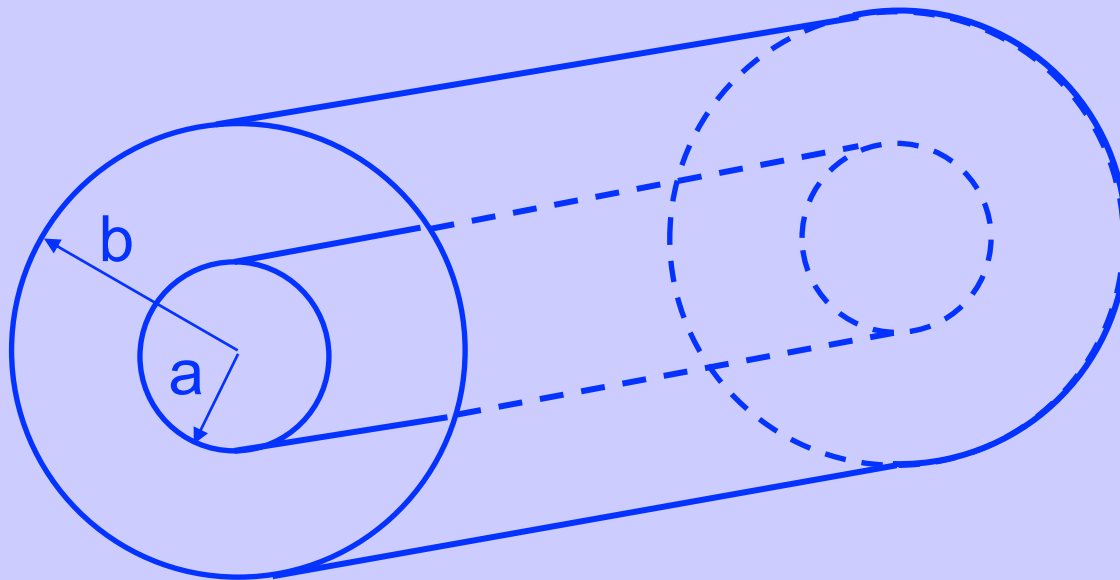
3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.3 Línea de transmisión Coaxial.

- ◆ Como ejemplo de cálculo vamos a considerar una TL coaxial, en el supuesto de pérdidas despreciables.

$$Z_o \approx \sqrt{\frac{l}{c}}$$

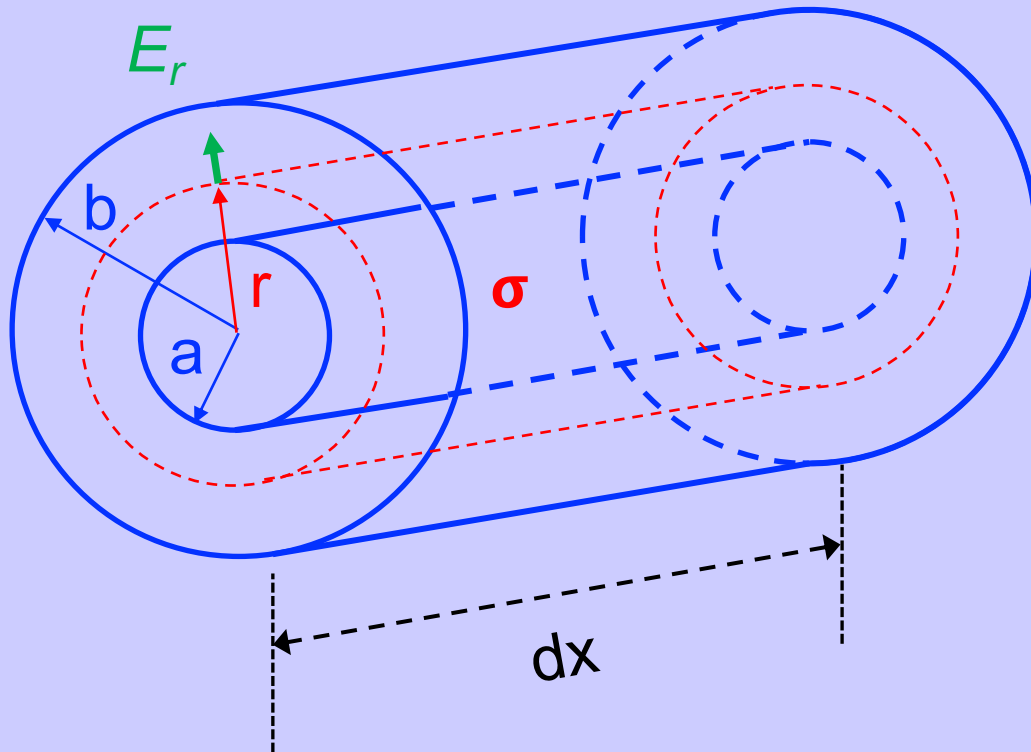
Para calcular la impedancia característica tenemos que conocer l, c



3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.3 Línea de transmisión Coaxial.

- ◆ Cálculo de la capacidad por unidad de longitud: C



$$E_r 2\pi r dx = \frac{dQ}{\epsilon}$$

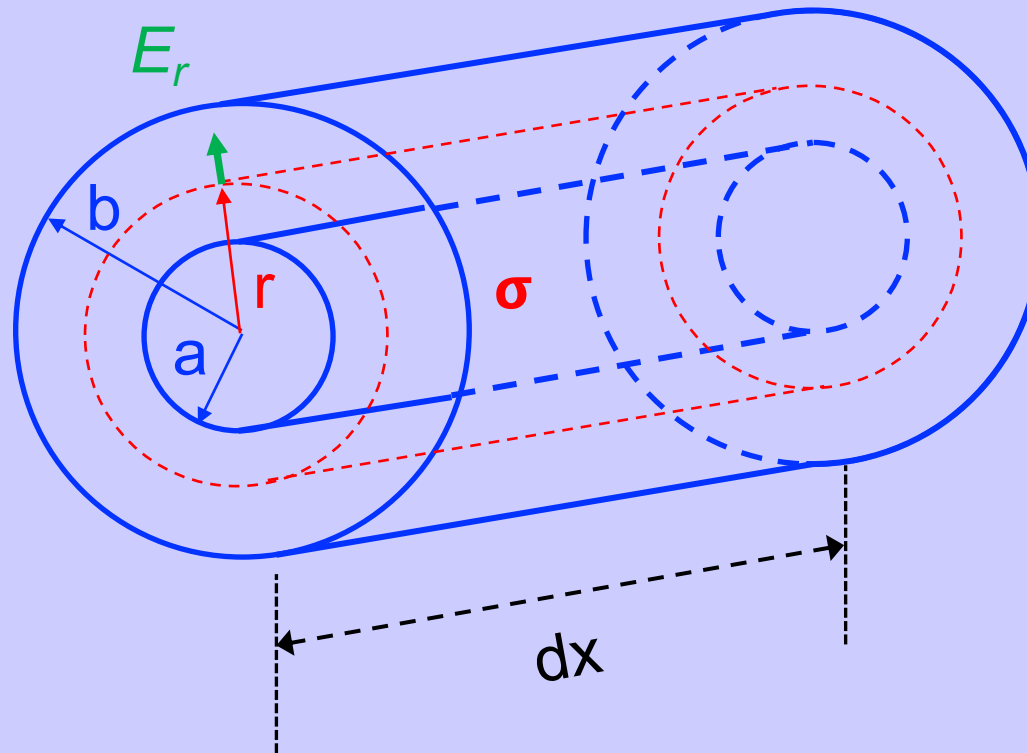
$$dQ = 2\pi a \sigma dx$$



$$E_r = \frac{a \sigma}{\epsilon r}$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.3 Línea de transmisión Coaxial.



$$V_a - V_b = V = \int_a^b E_r dr = \frac{a \sigma}{\varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{a \sigma}{\varepsilon} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.3 Línea de transmisión Coaxial.

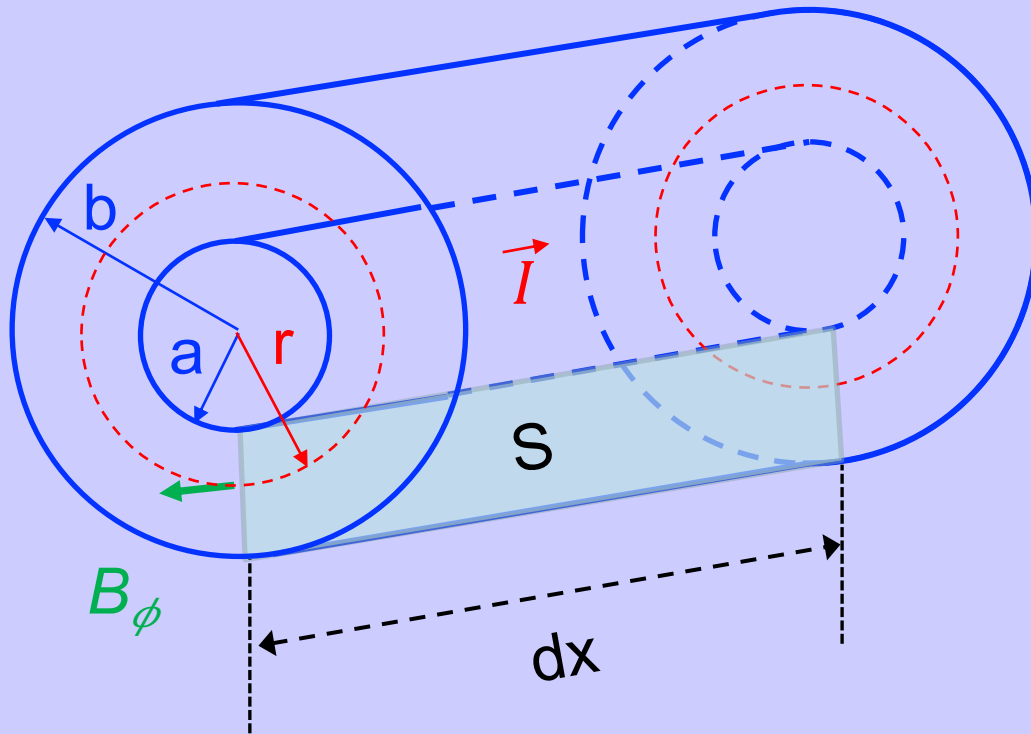
$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{a \sigma}{\varepsilon} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\ dQ &= 2\pi a \sigma dx \end{aligned} \right\} \rightarrow V = \frac{dQ}{dx} \frac{1}{2\pi \varepsilon} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{d^2 Q}{dx dV} \frac{1}{2\pi \varepsilon} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\ c &= \frac{d^2 Q}{dx dV} \end{aligned} \right\} \rightarrow c = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.3 Línea de transmisión Coaxial.

- ◆ Cálculo de la inductancia por unidad de longitud: l



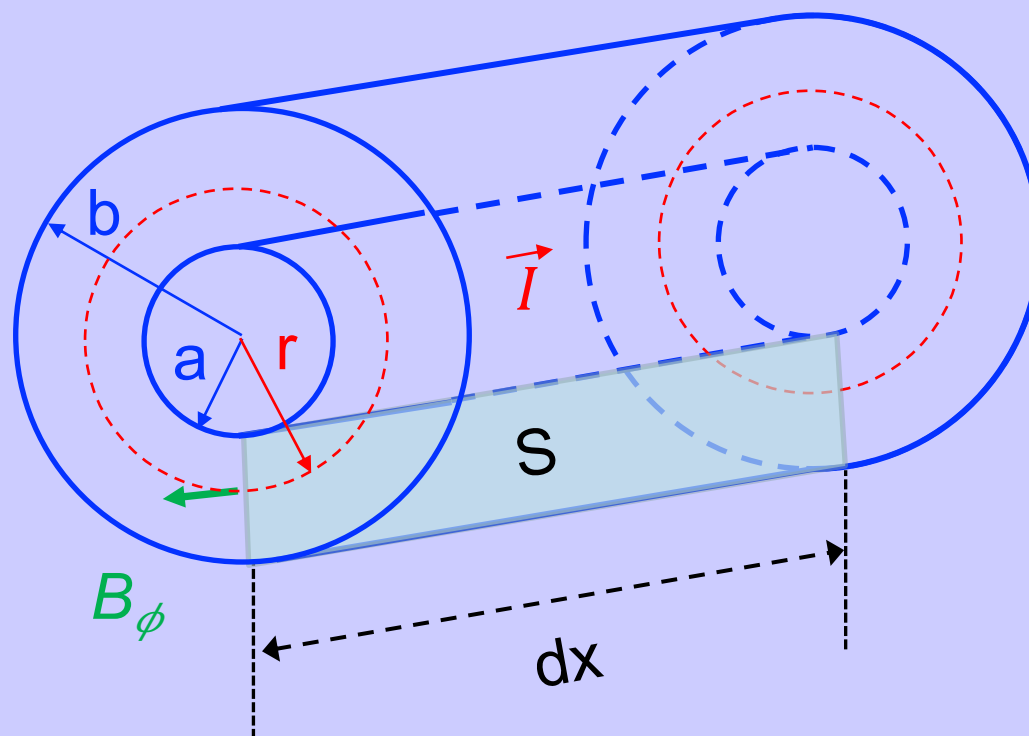
$$B_\phi 2\pi r = \mu I$$



$$B_\phi = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.3 Línea de transmisión Coaxial.



$$d\Phi = \int_a^b B_\phi ds = \frac{\mu I dx}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) dx$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.3 Línea de transmisión Coaxial.

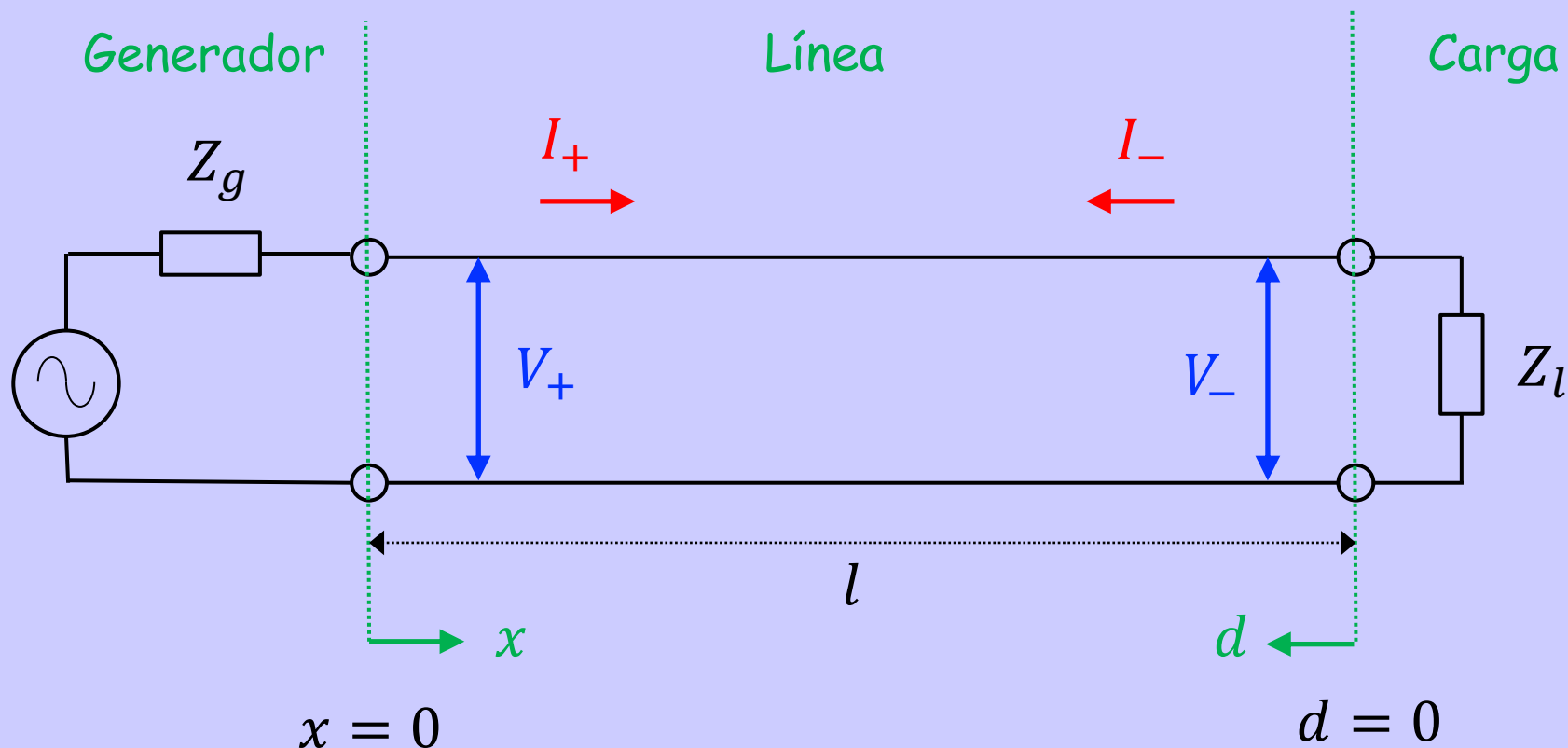
$$\left. \begin{aligned} d\Phi &= \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) dx \\ d\Phi &= I l dx \end{aligned} \right\} \rightarrow l = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

◆ Impedancia característica: $Z_o \approx \sqrt{\frac{l}{c}} \rightarrow Z_o = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

◆ Velocidad de propagación: $v_p \approx \frac{1}{\sqrt{lc}} \rightarrow v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.4 Coeficiente de Reflexión.



$$d = l - x$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.4 Coeficiente de Reflexión.

$$V(x) = V_+ e^{-\gamma x} + V_- e^{\gamma x}$$

- ◆ Se define el coeficiente de reflexión, Γ , como el cociente entre la onda de tensión regresiva y la progresiva en una determinada posición, x (d).

$$\Gamma(x) = \frac{V_- e^{\gamma x}}{V_+ e^{-\gamma x}} = \frac{V_-}{V_+} e^{2\gamma x}$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.4 Coeficiente de Reflexión.

$$V(x) = V_+ e^{-\gamma x} (1 + \Gamma(x))$$

$$I(x) = \frac{V_+}{Z_o} e^{-\gamma x} (1 - \Gamma(x))$$

◆ Veamos que ocurre en la posición, $x = l$ ($d = 0$)

$$V(x = l) = V_l$$

$$I(x = l) = I_l$$

$$\Gamma(x = l) = \Gamma_l$$



$$\frac{V_l}{I_l} = Z_o \frac{1 + \Gamma_l}{1 - \Gamma_l} = Z_l$$



$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_o}{Z_l + Z_o}$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.4 Coeficiente de Reflexión.

Importante

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_o}{Z_l + Z_o}$$

Si

$$Z_l = Z_o$$



$$\Gamma_l = 0$$

- ◆ Si $Z_l = Z_o$ no hay onda regresiva. La onda progresiva que se propaga por la línea se disipa en la carga y no hay reflexiones.

$$Z_l \rightarrow \infty$$



$$\Gamma_l = 1$$

$$Z_l = 0$$



$$\Gamma_l = -1$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.4 Coeficiente de Reflexión.

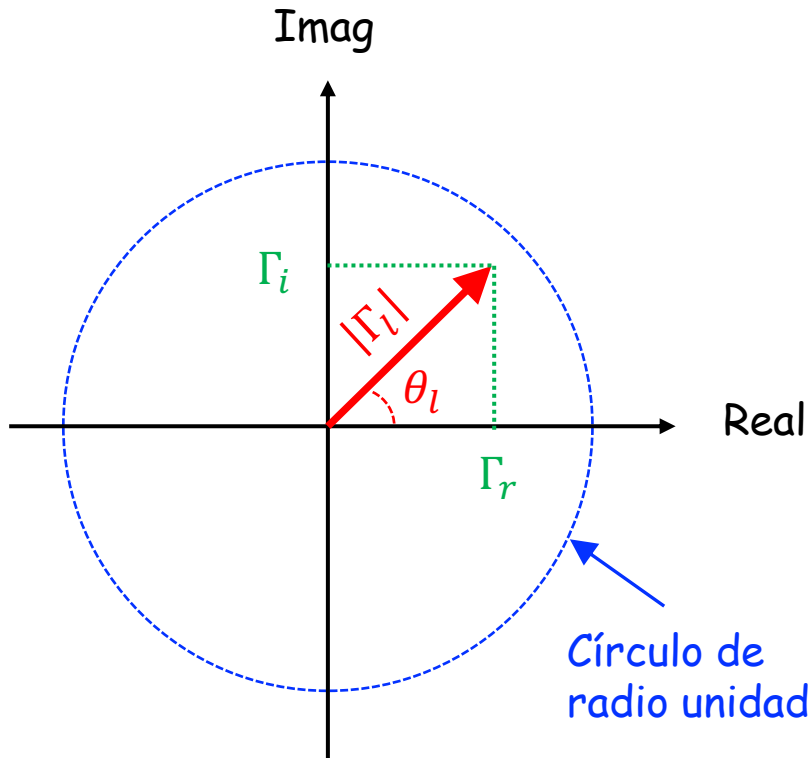
◇ En general:

$$Z_l = R + jX$$



$$\Gamma_l = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

$$\Gamma_l = |\Gamma_l|e^{j\theta_l}$$



$$0 \leq \theta_l \leq 2\pi$$

$$|\Gamma_l| \leq 1$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.4 Coeficiente de Reflexión.

- ◆ Veamos que sucede si nos desplazamos por la línea. Tomaremos como referencia la posición de la carga ($d=0$), ($x=l$).

$$\Gamma(x) = \frac{V_-}{V_+} e^{2\gamma x}$$



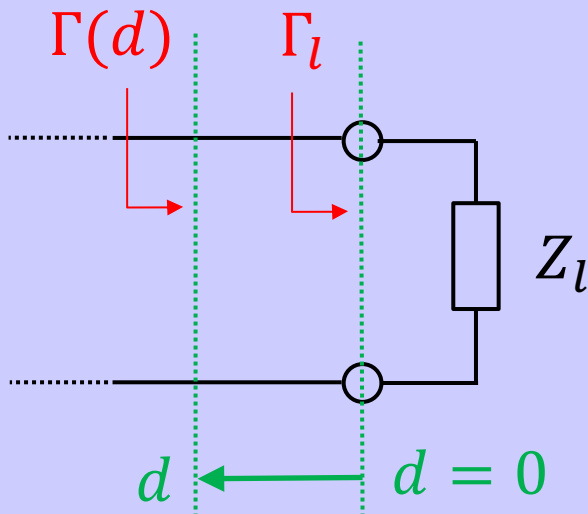
$$\Gamma(x = l) = \Gamma_l = \frac{V_-}{V_+} e^{2\gamma l}$$

$$x = l - d$$

$$\Gamma(d) = \frac{V_-}{V_+} e^{2\gamma(l-d)}$$



$$\Gamma(d) = \Gamma_l e^{-2\gamma d}$$



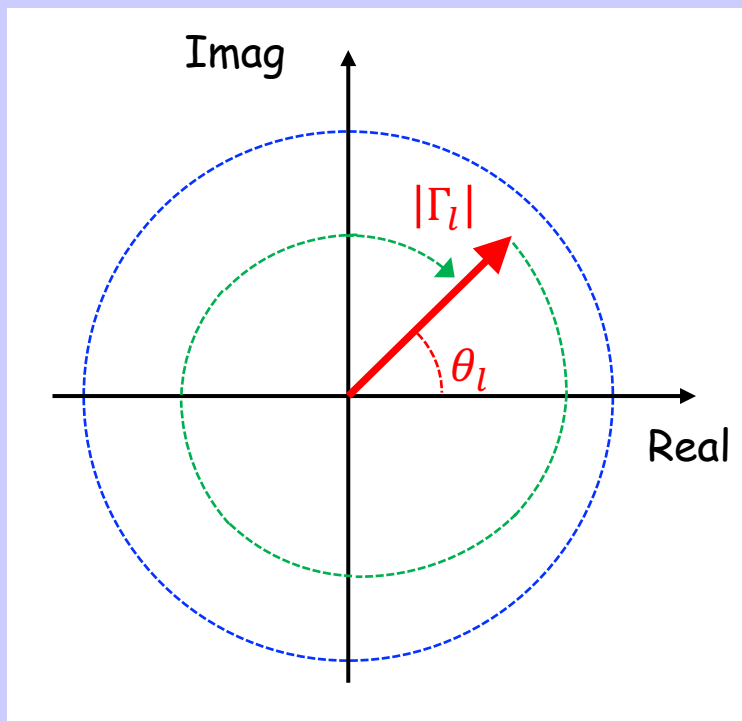
3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.4 Coeficiente de Reflexión.

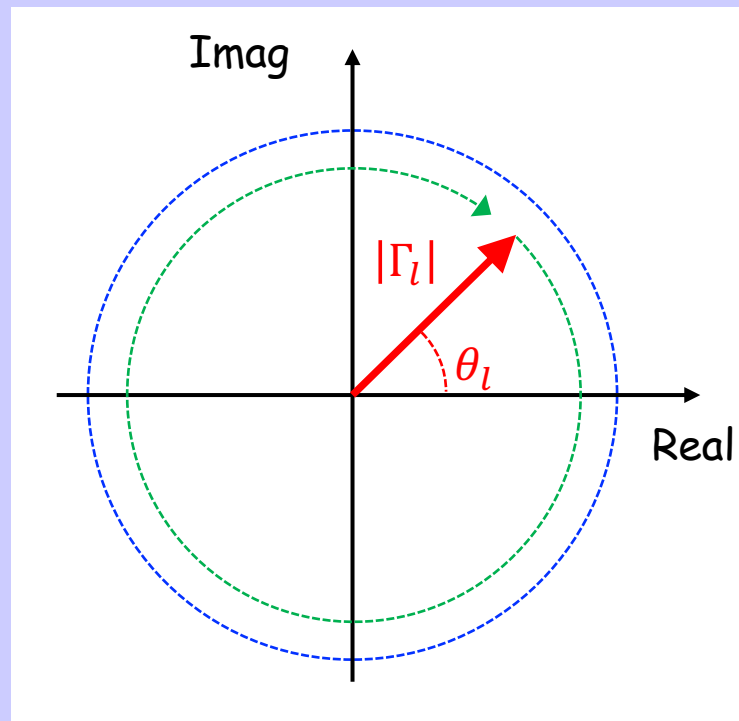
$$\left. \begin{aligned} \Gamma(d) &= \Gamma_l e^{-2\gamma d} \\ \gamma &= \alpha + j\beta \end{aligned} \right\}$$



$$\Gamma(d) = |\Gamma_l| e^{-2\alpha d} e^{j(\theta_l - 2\beta d)}$$



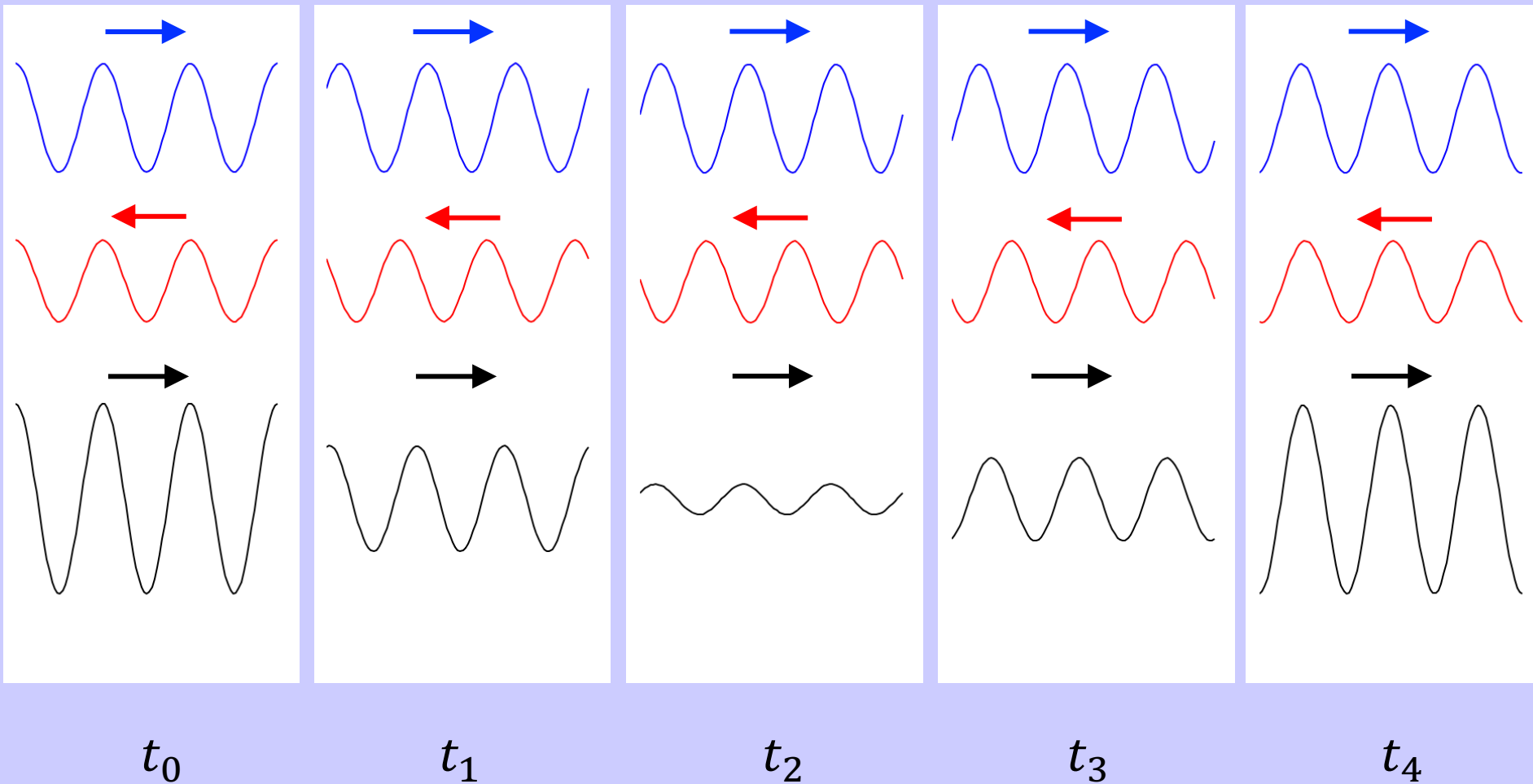
Línea con pérdidas



Línea sin pérdidas

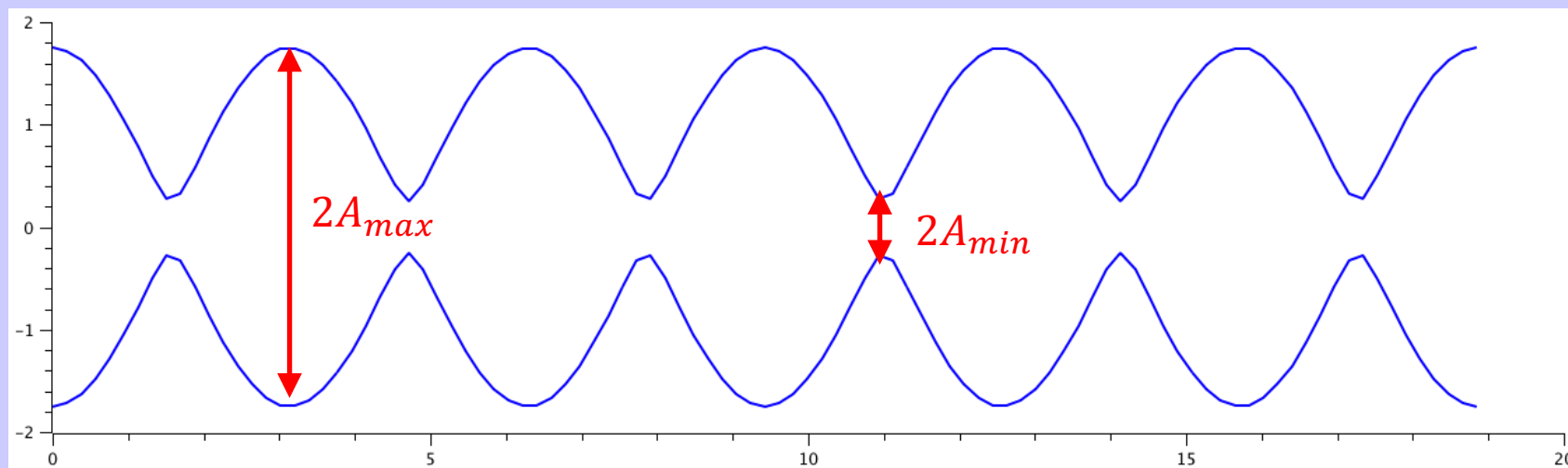
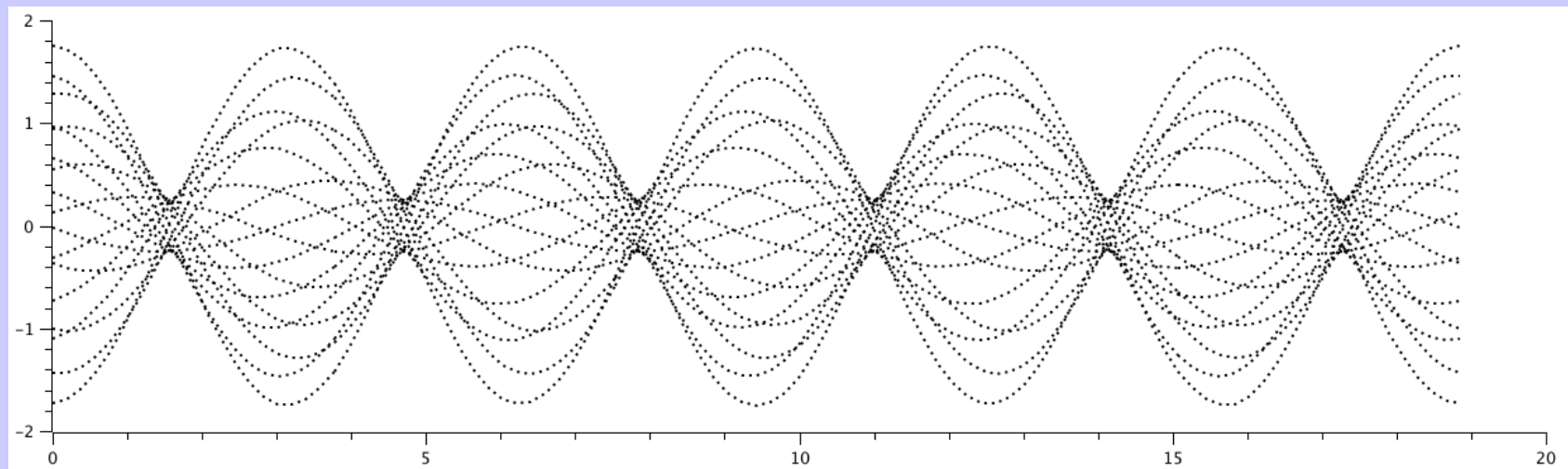
3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.



3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.



Envolvente

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

- ◆ Se define la relación de ondas estacionarias (ROE) como: *

$$\rho = \frac{A_{max}}{A_{min}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \geq 1 \\ \rho = 1 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \text{No hay interferencias} \\ \text{(No hay onda regresiva)} \end{array}$$

- ◆ La relación de ondas estacionarias es un parámetro en cierto modo obsoleto. Se utilizó sobre todo antes de disponer de analizadores de redes vectoriales de altas prestaciones (VNA).
- ◆ Existe una relación directa entre ρ y $|\Gamma_l|$ que vamos a ver a continuación

* (SWR) Stationary Wave Ratio.

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

- ◆ Como punto de partida vamos a considerar la tensión y la corriente en una posición cualquiera de una línea.

$$V(x) = V_+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} (1 + \Gamma(x))$$

$$I(x) = \frac{V_+}{Z_o} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} (1 - \Gamma(x))$$

- ◆ Que podemos reescribir como:

$$V(x) = [V_+ e^{-\alpha x} (1 + \Gamma(x))] e^{-j\beta x}$$

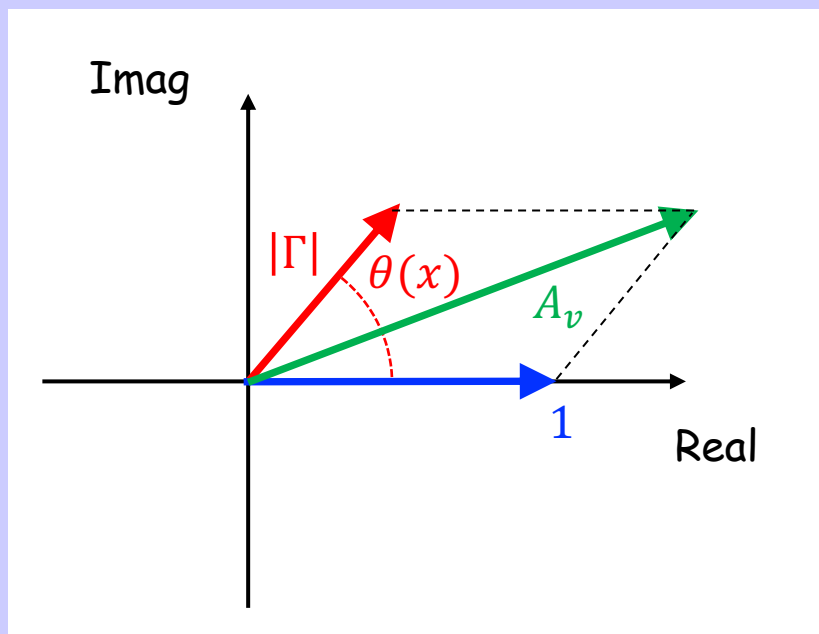
$$I(x) = \left[\frac{V_+ e^{-\alpha x}}{Z_o} (1 - \Gamma(x)) \right] e^{-j\beta x}$$

- ◆ En ambos casos el término que acompaña al fasor es la amplitud de superposición de las ondas progresiva y regresiva.

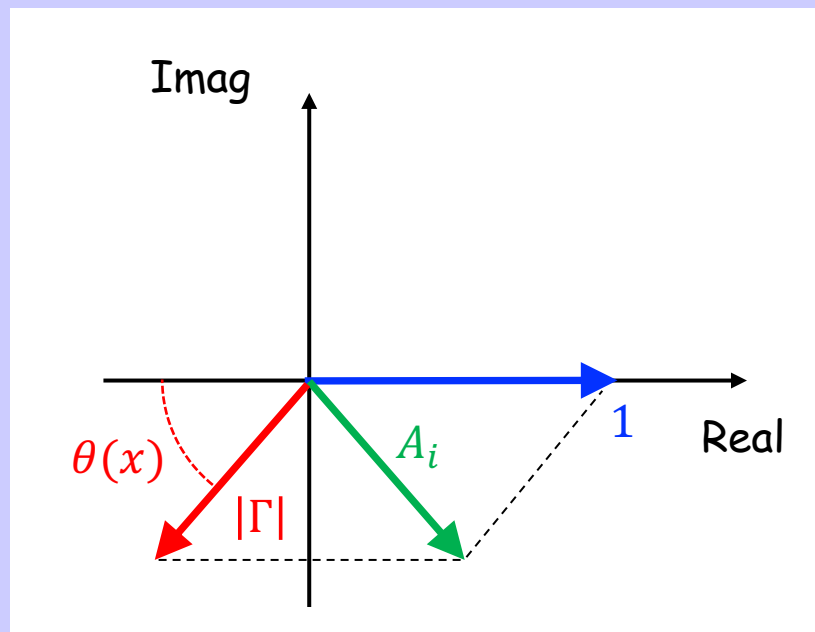
3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

Tensión



Corriente



$$A_v = |V_+|e^{-\alpha x} \sqrt{1 + 2|\Gamma|\cos(\theta) + |\Gamma|^2}$$

$$A_i = \frac{|V_+|e^{-\alpha x}}{Z_o} \sqrt{1 - 2|\Gamma|\cos(\theta) + |\Gamma|^2}$$

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

- ◆ La **amplitud** de la superposición de la onda progresiva con la regresiva será **máxima** cuando haya **interferencia constructiva**. Si consideramos las ondas de tensión esto ocurre en las posiciones para las cuales $\theta(x) = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$
- ◆ La **amplitud** de la superposición de la onda progresiva con la regresiva será **mínima** cuando haya **interferencia destructiva**. Si consideramos las ondas de tensión esto ocurre en las posiciones para las cuales $\theta(x) = (2n + 1)\pi$
- ◆ Si consideramos las ondas de corriente las posiciones de superposición máxima y mínima se intercambian.

$$A_v \Big|_{max} = |V_+| e^{-\alpha x} (1 + |\Gamma|)$$

$$A_v \Big|_{min} = |V_+| e^{-\alpha x} (1 - |\Gamma|)$$

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

Línea sin pérdidas

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

- ◆ Condiciones de máximo de la onda de tensión: $\theta(x) = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\Gamma(x) = |\Gamma(x)| e^{j\theta(x)} \quad \rightarrow \quad \Gamma(x) = |\Gamma| e^{j\theta(x)}$$

Línea sin pérdidas

- ◆ En lugar de referir las coordenadas relativas a la posición del generador, x , las referiremos a la posición de la carga, d

$$\Gamma(d) = |\Gamma(d)| e^{j\theta(d)} \quad \rightarrow \quad \Gamma(d) = |\Gamma_l| e^{j(\theta_l - 2\beta d)}$$

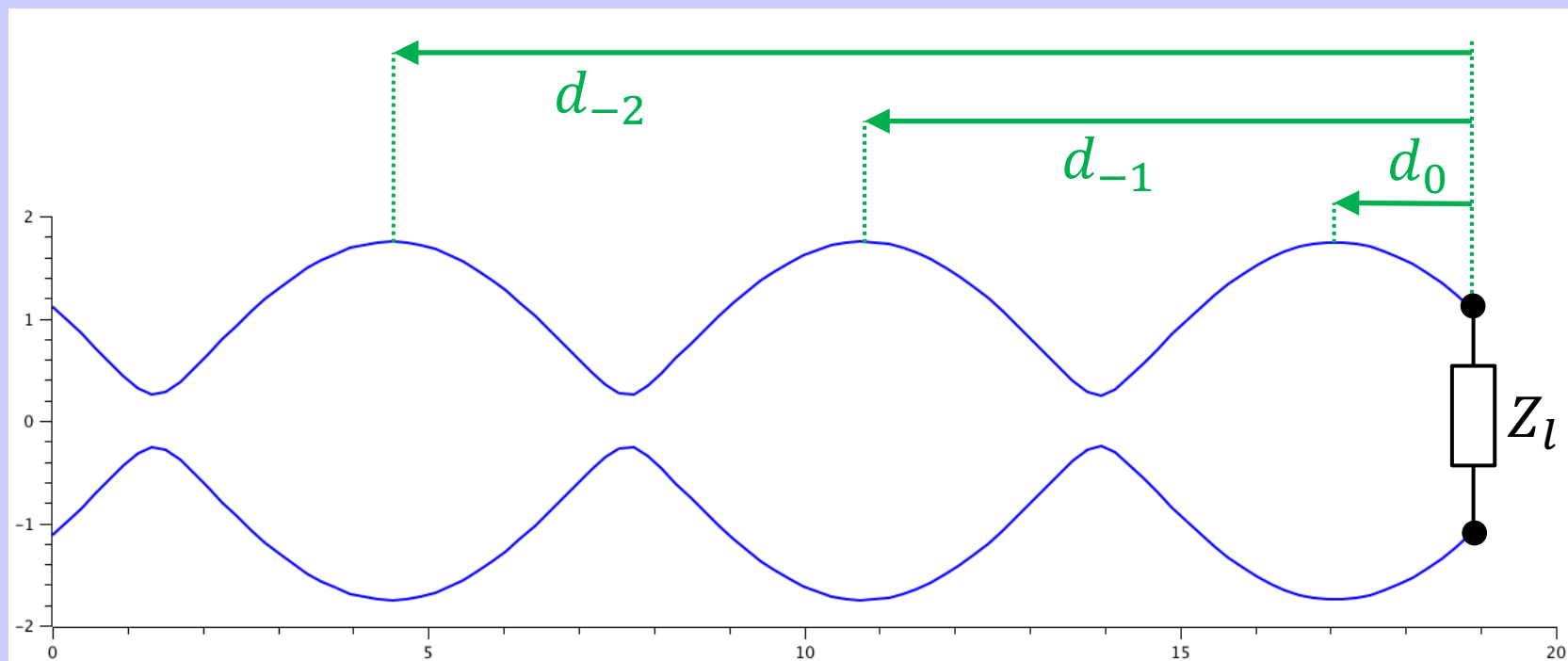
Línea sin pérdidas

3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

◆ Condiciones de máximo de la onda de tensión: $\theta(d) = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\theta(d) = \theta_l - 2\beta d = 2n\pi$$



3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

- ◆ Condiciones de máximo de la onda de tensión: $\theta(d) = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\theta(d) = \theta_l - 2\beta d = 2n\pi$$

- ◆ Distancia entre máximos consecutivos

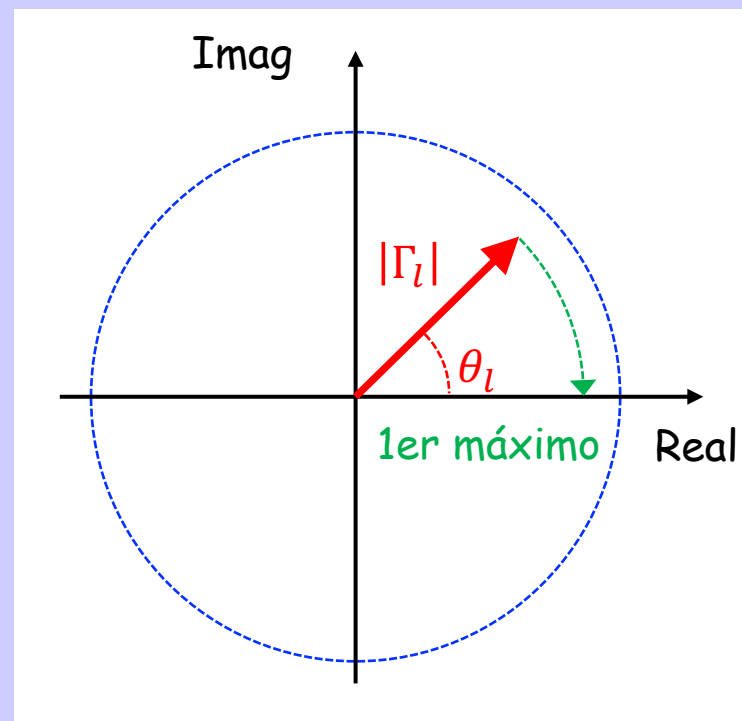
$$\theta_l - 2\beta d_{-n} = -2n\pi$$

$$\theta_l - 2\beta d_{-(n+1)} = -2(n+1)\pi$$

$$d_{-(n+1)} - d_{-n} = \frac{\pi}{\beta}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Delta d|_{\max} = \frac{\lambda}{2}$$

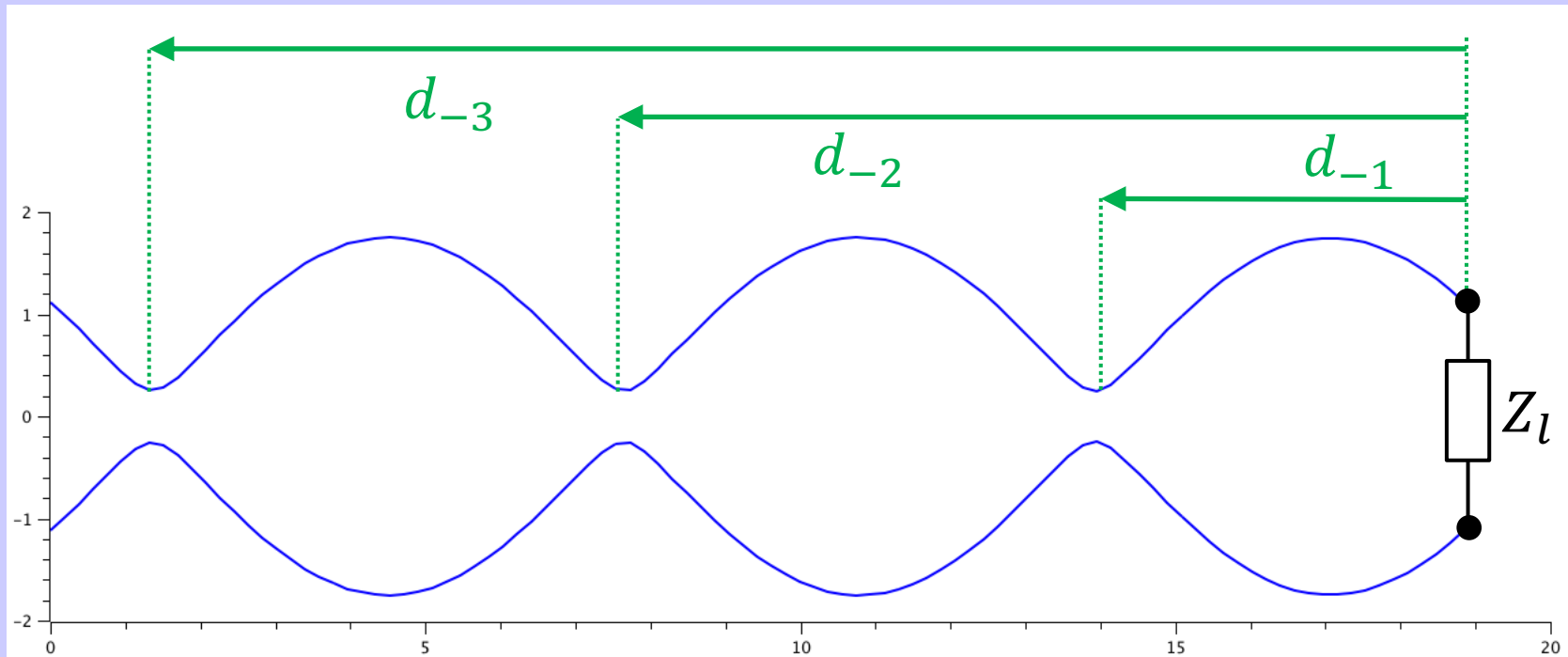


3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

◆ Condiciones de mínimo de la onda de tensión: $\theta(d) = (2n + 1) \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\theta(d) = \theta_l - 2\beta d = (2n + 1) \pi$$



3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

- ◆ Condiciones de mínimo de la onda de tensión: $\theta(d) = (2n + 1) \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\theta(d) = \theta_l - 2\beta d = (2n + 1) \pi$$

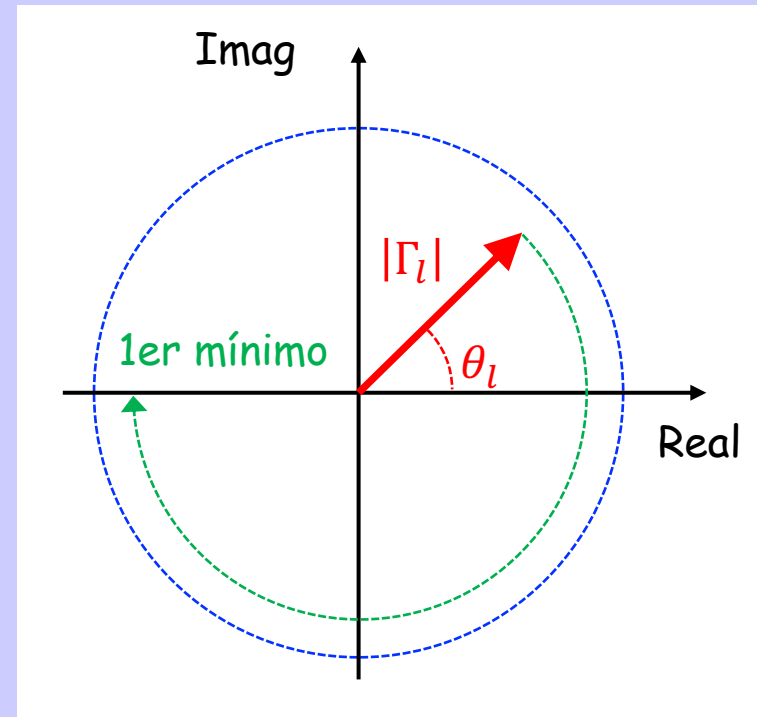


- ◆ Distancia entre mínimos consecutivos

$$\Delta d|_{min} = \frac{\lambda}{2}$$

- ◆ Distancia entre máximos y mínimos consecutivos

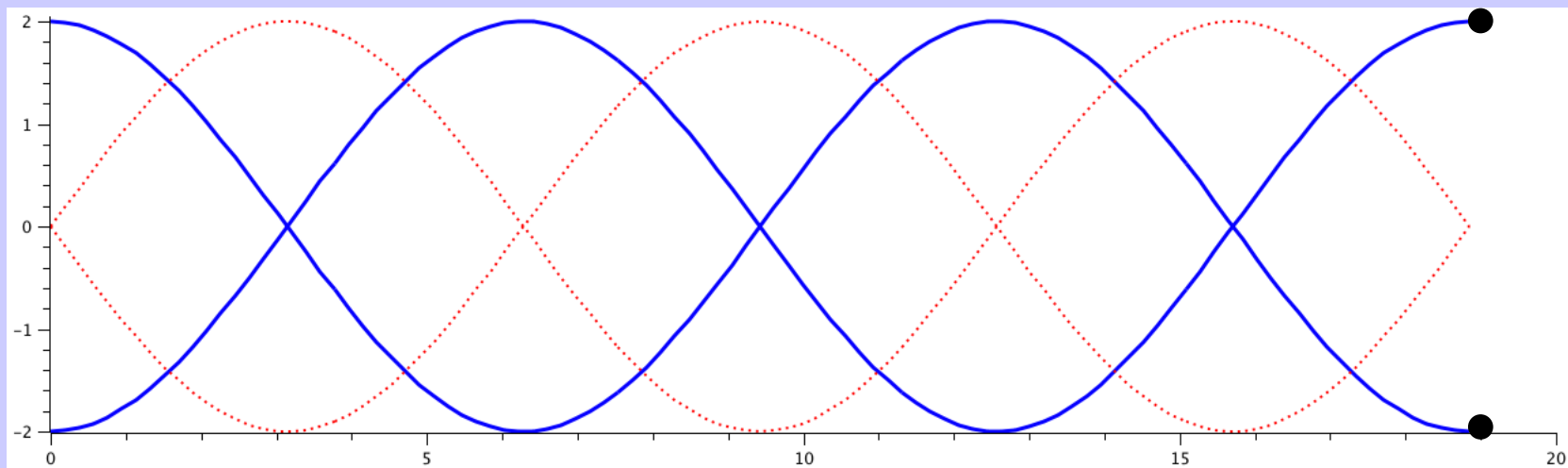
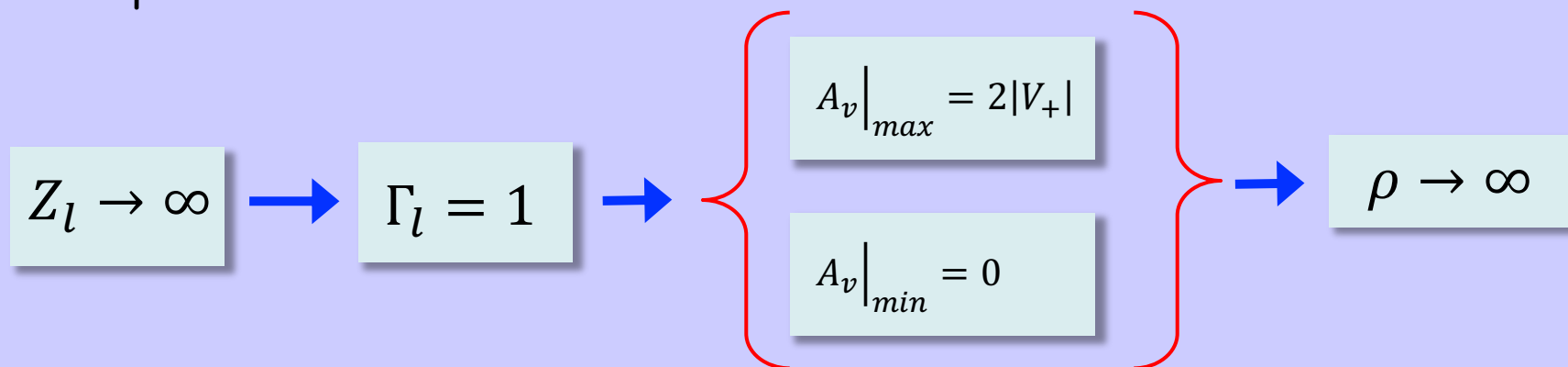
$$\Delta d|_{min/max} = \frac{\lambda}{4}$$



3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

◇ Caso particular circuito abierto:



3 TEORÍA DE LÍNIAS DE TRANSMISIÓN

3.5 Superposición de ondas en TLs: relación de ondas estacionarias.

◇ Caso particular corto circuito:

