

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

**Ús de recursos manipulatiu i
TAC de geometria a Batxillerat**

Autor: Hajar ESSAMADI

Director: Dr. Sergi Múria Maldonado

Realitzat a: Universitat de Barcelona

(Departament Matemàtiques i Informàtica)

Barcelona, 29 de juny de 2017

Resum

Donats els baixos resultats de les diferents proves d'avaluació de competències matemàtiques en els darrers anys en el bloc de geometria, el que volem aconseguir amb aquest treball és proposar activitats que ens permeten introduir recursos manipulatius i TAC (Tecnologies per a l'aprenentatge i el coneixement) a les aules del Batxillerat, com una eina per arribar d'una forma natural als conceptes més abstractes, i per tal d'aconseguir una millor comprensió dels continguts treballats.

Abstract

Given the low results of the different tests of evaluation of mathematical competences in the last years in the block of geometry, our aim with this project is to propose different activities like introducing manipulating resources and TAK (Technologies for the learning and the knowledge) into the classroom of the baccalaureate. We consider these tools as a natural way to arrive the most abstract concepts. In this way the students can achieve better understanding of the work contents .

Agraïments

En primer lloc vull agrair al meu tutor Sergi Múria Maldonado, que hagi confiat en mi en aquest treball, i també per la seva generositat i orientació.

Gràcies també als professors Anna Ametlla i Domingo Rambla, que m'han ofert l'oportunitat de provar algunes de les meves propostes al seu centre, l'Institut Collblanc en dos grups de 1r i 2n de Batxillerat, que m'ha servit per veure que tenia raó quant pensava que la docència és la millor sortida professional.

També vull agrair a l'Anton Aubanell la seva motivació i passió, durant el curs de Didàctica, que va augmentar el meu desig de ser professora de matemàtiques.

Índex

1	INTRODUCCIÓ	1
2	MOTIVACIÓ I OBJECTIUS	2
3	DESENVOLUPAMENT DEL TREBALL	3
3.1	Tria del treball	3
3.2	Recerca de informació	3
3.3	Planificació de les línies generals	4
3.4	Continguts matemàtics a 4t l'ESO	4
3.5	Continguts matemàtics a Batxillerat	6
3.6	Contacte amb el centre i l'alumnat	7
3.7	Preparació de les sessions	8
3.8	Implementació a l'aula	9
3.9	Anàlisi de sessions a l'aula	12
4	Propostes de millora	15
4.1	SECCIONS DEL CON	16
4.2	CONSTRUÏM LA HIPÈRBOLA	21
4.3	CONSTRUÏM L'EL·LIPSE	26
4.4	CONSTRUÏM LA PARÀBOLA	30
4.5	LES PROPIETATS FOCALS DEL EL·LIPSE I DE LA PARÀBOLA	34
4.6	LA HIPÈRBOLA COM A ENVOLUPANTS DE FAMÍLIA DE REC- TES	38
4.7	TOREMA DE GULDIN	42
4.8	CÒNIQUES AMB LA DISTÀNCIA DEL TAXISTA	45
4.9	TRIANGLE DE REULEAUX	49
4.10	VARIACIÓ D'ÀREA I PERÍMETRE	52
5	Conclusions	56

1 INTRODUCCIÓ

Tot i que la geometria és una de les branques més presents de les matemàtiques a la vida quotidiana, els resultats de les proves d'avaluació de l'Educació Secundària Obligatòria de Catalunya, mostren que els alumnes tenen una gran dificultat a l'hora d'estudiar-la i aquest resultat van ser una de les motivacions del nostre treball.

La motivació inicial va ser el meu desig de ser professora de matemàtiques, ja que des de que estudiava a primària sabia que m'agradaven les matemàtiques, i cada vegada que augmentava de nivell en els meus estudis, augmentava el meu desig d'aconseguir aquest objectiu.

Quan vaig cursar l'assignatura de Didàctica vaig confirmar que m'agrada la docència, sobre tot, el fet d'utilitzar recursos didàctics que a l'institut mai van ser utilitzats, va ser el gran impuls per triar aquest treball. Vaig notar que realment hi ha una necessitat d'evolucionar des d'una metodologia tradicional cap a una metodologia innovadora.

Durant el desenvolupament del treball, vaig tenir l'oportunitat de fer diverses sessions pràctiques en l'Institut Collblanc a alumnes de Batxillerat. Mentre preparava el contingut de les sessions amb els professors de 1r i 2n de Batxillerat, em van dir que un dels continguts que no treballaven a l'aula eren les còniques, pel fet que no formen part del temari de selectivitat, i a més el professor de 1r de Batxillerat em va dir que les còniques no són gaire importants, ja que només es tracta de saber les seves equacions i aplicar-les.

Així l'objectiu d'aquest treball és proposar activitats per treballar la geometria des de les còniques, demostrant que són molt riques matemàticament. També volem fer que la geometria a Batxillerat tingui un enfocament més pràctic i implicar l'alumne en el seu procés de formació.

Tot això ho podem aconseguir només canviant la forma de treballar el currículum a l'aula sense canviar la seva estructura.

2 MOTIVACIÓ I OBJECTIUS

La motivació inicial que em porta a fer aquest treball va ser el meu desig de ser professora de matemàtiques, que va augmentar gràcies a la motivació i la passió de l'Anton Aubanell quan explicava la geometria en l'assignatura de Didàctica, va ser quan vaig notar molt la diferència, entre ser professor de matemàtiques havent estudiat matemàtiques, i ser-ho sense haver-les estudiades.

A més, també em va motivar el fet de saber que la mitjana global en les proves d'avaluació de competència matemàtica, és baixa per la caiguda dels resultats en el camp de geometria, i això ho mostra el document de l'Anton Aubanell del 2015, titulat com *Anàlisi dels resultats en geometria de cinc proves d'avaluació de competència matemàtica*, [12], on s'analitzen els resultats de cinc proves d'avaluació de competència matemàtica:

1. Avaluació de l'educació secundària obligatòria 2015.
2. Avaluació de l'educació secundària obligatòria 2014.
3. Avaluació de l'educació secundària obligatòria 2013.
4. Proves Pisa 2012. Avaluació prioritària de la competència matemàtica.
5. Proves PISA 2003. Avaluació prioritària de la competència matemàtica.

Altre document important que ens mostra l'existència d'aquesta dificulta és *Quaders d'avaluació.34* [8], on trobem els resultats de les proves de quart d'ESO del 2016. En aquest document també veiem una mitjana baixa en el camp de geometria.

Aquest fet, tal com esta detallat al document amb títol *Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria a l'Educació Secundària* [13], va portar al Servei d'Innovació i Formació de l'Educació Infantil i Primària / de l'Educació Secundària a organitzar un curs telemàtic intensiu orientat a millorar l'ensenyament de la geometria a l'ESO, i tal com queda explicat en la descripció del curs, es pretén ajudar als professors a adaptar les programacions i donar un enfocament diferent a la manera d'ensenyar la geometria, tot introduint activitats d'experimentació a les aules per complementar les matemàtiques formalitzades a la pissarra i aconseguir una millor visualització i comprensió dels continguts geomètrics.

El nostre objectiu en aquest treball és crear activitats més experimentals, per treballar la geometria aprofitant el contingut geomètric de les còniques, amb la intenció d'aconseguir una millor comprensió de la geometria a l'aula i equilibrant les activitats experimentals amb les de pissarra, i que, alhora, serveixin com un pas previ al procés d'abstracció dels coneixements que es tracten amb més profunditat a la universitat.

Per assolir aquest objectiu, hem de conèixer els continguts matemàtics del currículum de l'ESO i Batxillerat. També ens cal conèixer a fons GeoGebra, programa de geometria dinàmica que ens permet experimentar amb la geometria plana i de l'espai, de manera que el seu ús ens pugui aportar millores en el procés d'aprenentatge.

3 DESENVOLUPAMENT DEL TREBALL

3.1 Tria del treball

El primer pas en el desenvolupament d'aquest treball va ser, evidentment, la tria del projecte.

Quan vaig començar l'assignatura de Didàctica vaig decidir que el treball final de grau estaria relacionat amb la didàctica de les matemàtiques però encara no tenia clar quin seria el treball definitiu.

El moment clau en l'elecció del projecte va ser la sessió de geometria que ens ha fet el professor Anton Aubanell, sobre tot la sessió de la geometria amb bombolles de sabó que ens va fer l'últim dia de classe, vaig veure la possibilitat de dur a terme una classe de matemàtiques adreçada a alumnes de Batxillerat, amb la intenció de que fos un projecte gratificant a nivell personal i alhora rigorós matemàticament, útil i beneficiós pels alumnes.

Un cop rebuda una resposta afirmativa del tutor i de la coordinació del treball final de grau, vaig començar a buscar informació i a traçar les línies generals del projecte.

3.2 Recerca de informació

Durant el curs de Didàctica, m'he donat compte que hi ha bastants treballs dedicats a aprofundir en les propostes de millora de la geometria, així doncs, el primer que vaig fer, va ser buscar aquest treballs i estudiar les propostes proposades en ells.

El primer document que vaig estudiar va ser el d'Anton Aubanell, titulat com *orientacions pràctiques per a la millora de la geometria* [9].

És un document que inclou, per un costat, una reflexió teòrica sobre les dificultats existents i possibles línies de millora en l'ensenyament de la geometria i, per l'altre, una mostra de propostes concretes en dos sentits. Tal com diu l'autor en la seva proposta, tenim el següent:

- Activitats geomètriques de tipus experimental que permeten treballar els blocs curriculars de mesura i d'espai i forma d'una manera més viscuda, amb cicles d'experimentació, descoberta i conceptualització.
- Activitats geomètriques per incorporar als blocs no geomètrics (numeració i càlcul, canvi i relacions, estadística i atzar), estenent així la presència de les idees geomètriques i, alhora, aportant els avantatges de la representació gràfica i la visualització en el treball sobre els continguts no estrictament geomètrics.

També tenim la tesi doctoral de Joaquim Costa Llobet amb el títol *Geometria analítica a Batxillerat: un enfocament didàctic contextualitzat i amb eines TIC*, que és un document que presenta un plantejament didàctic diferent del tradicional per a l'enfocament de la geometria analítica a l'aula.

Tal com diu l'autor a l'introducció:

“El meu treball planteja i desenvolupa un dels camins possibles que hi ha per implementar un plantejament didàctic diferent del tradicional per a la geometria analítica, amb les TIC integrades, i orientat, és clar, a la millora dels processos d'ensenyament i aprenentatge en situacions purament reals: en un centre real, amb alumnes reals, amb recursos materials reals, i dins de la realitat del currículum.”

També vaig consultar llibres relacionats amb el tema, entre d'altres, el llibre de Pedro Puig Adam *Curso de geometría mètrica* [6], és un llibre en el qual queden patents els principis de la geometria, destacant l'estructura conceptual interna d'aquesta, i fent ús pràctic dels seus mètodes per orientar amb criteri científic la solució dels problemes, aquest llibre em va inspirar a utilitzar el teorema de Guldin en el meu treball.

3.3 Planificació de les línies generals

Un cop consultada la informació d'altres treballs similars al que volia dur a terme, vaig començar a traçar les línies principals del projecte. Al principi tenia pensat fer-ho sobre geometria en general, però durant la creació de les activitats, vaig decidir treballar més a fons un dels continguts per tal de poder aprofundir en un tema que moltes vegades a Batxillerat queda oblidat pel fet que no surt a selectivitat, les còniques, i treballar la geometria aprofitant el gran contingut geomètric d'aquestes.

Donat que el treball aniria adreçat a alumnes de Batxillerat, una de les primeres qüestions que calia perfilar era el nivell de geometria que tenen.

I per poder-ho saber calia estudiar els currículums de secundària, en particular de 4t d'ESO, i el de Batxillerat, que contenen una sèrie d'objectius o elements que han de ser assolits pels estudiants i que fixen el pla d'estudis corresponent, amb possibles itineraris o optativitat i uns mínims compartits.

3.4 Continguts matemàtics a 4t l'ESO

El currículum té dos parts importants, per una banda els continguts i per altre les competències, aquestes s'estructuren en quatre processos o dimensions: resolució de problemes, raonament i prova, connexions, i comunicació i representació.

Els continguts clau (CC) de l'ESO són 16:

1. CC1. Sentit del nombre i de les operacions.
2. CC2. Raonament proporcional.
3. CC3. Càlcul (mental, estimatiu, algorítmic, amb calculadora).
4. CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.
5. CC5. Patrons, relacions i funcions.

6. CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.
7. CC7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.
8. CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
9. CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.
10. CC10. Relacions i transformacions geomètriques.
11. CC11. Magnituds i mesura.
12. CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.
13. CC13. Sentit de l'estadística.
14. CC14. Dades, taules i gràfics estadístics.
15. CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.
16. CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

Els cinc blocs de continguts en què s'ha estructurat tenen continuïtat amb els establerts per a l'educació primària:

1. Numeració i càlcul.
2. Canvi i relacions.
3. Espai i forma.
4. Mesura.
5. Estadística i atzar.

Pel que fa al bloc de espai i forma de 4t d'ESO, tenim els continguts següents:

- Trigonometria
- Mesura d'angles (unitats sexagesimals i radians).
- Raons trigonomètriques.
- Resolució de triangles rectangles.
- **Ús de programes de geometria dinàmica.**
- El naixement i primer desenvolupament de la trigonometria al llarg de la història.
- Ús de la trigonometria per a la resolució de problemes en contextos diversos.

- Geometria analítica en el pla.
- Coordenades i vectors.
- Equació de la recta.
- Paral·lelisme i perpendicularitat.
- Història de la introducció a les coordenades cartesianes.

Tenim que els continguts claus estrictament relacionats amb aquest bloc, són el següents:

1. CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
2. CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.
3. CC10. Relacions i transformacions geomètriques.

3.5 Continguts matemàtics a Batxillerat

Pel que fa al Batxillerat, tenim tres modalitats: d'arts, ciències i tecnologia i humanitats i ciències socials. L'assignatura de matemàtiques la trobem tant a la modalitat de ciències i tecnologia com la de ciències socials, però els continguts treballats són diferents. Nosaltres ens centrarem en l'estudi dels continguts de les matemàtiques de la modalitat de ciències i tecnologia, ja que és la modalitat que ens interessa, i la que tindrem en compte a l'hora de crear les activitats per millorar l'aprenentatge de la geometria.

Tenim que el currículum de matemàtiques per al Batxillerat està dividit en 4 blocs:

1. Aritmètica i Àlgebra.
2. Geometria.
3. Anàlisi.
4. Probabilitat i Estadística.

Veiem ara els continguts específics del bloc de geometria de 1r i 2n de Batxillerat.

Els continguts específics de 1r de Batxillerat són:

1. Les funcions circulars en l'estudi de fenòmens periòdics i la trigonometria per resoldre problemes mitjançant triangulació.

- a L'angle com a gir. Unitats de mesura d'angles. Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol. Les funcions sinus, cosinus i tangent. L'estudi, amb ordinador, de les funcions trigonomètriques sota canvis d'escala: període i amplitud. Aplicació a l'estudi de fenòmens periòdics.
 - b Resolució gràfica i analítica de triangles: els teoremes del sinus i el cosinus. Problemes geomètrics que es poden resoldre per triangulació. Els procediments de càlcul en topografia.
2. Els vectors, una nova eina per resoldre problemes de geometria. **Les còniques en àmbits no matemàtics.**
- a Els vectors com a manera de representar una magnitud i una direcció Els vectors lliures com a translacions en el pla.
 - b Equacions de la recta. Direcció i pendent. Problemes d'incidència i paral·lelisme. Angles i distàncies. Aplicació a la resolució de problemes geomètrics.
 - c **Llocs geomètrics: les còniques. Les còniques en l'art i l'arquitectura.**

Els continguts específics de 2n de Batxillerat són:

- 1. La interpretació geomètrica dels sistemes lineals amb tres incògnites.
 - a Vectors lliures en l'espai. Dependència i independència lineal.
 - b Equacions del pla i de la recta. Posicions relatives. Interpretació geomètrica de sistemes lineals amb tres incògnites.
- 2. El plantejament i la resolució de problemes mètrics a l'espai.
 - a Producte escalar. Perpendicularitat i angles.
 - b Producte vectorial i mixt. Interpretació geomètrica i aplicacions al càlcul d'àrees i volums.
 - c Càlcul de distàncies.

Durant el desenvolupament del treball vaig tenir l'oportunitat de fer diverses sessions pràctiques a l'institut Collblanc que em van servir per detectar que les dificultats en el camp de geometria a secundària s'estenen al Batxillerat.

A continuació donarem els detalls d'aquestes sessions.

3.6 Contacte amb el centre i l'alumnat

El contacte amb l'Institut Collblanc va ser gràcies a la professora de 2n de Batxillerat Anna Amela, mitjançant la meua germana que era alumna seva.

Vaig fer una reunió amb ella i li vaig explicar el meu treball i la meua voluntat de portar-lo a terme a l'Institut Collblanc. La proposta va ser molt ben rebuda

per la seva part, qui a la seva vegada ho va comentar a la directora del centre i al professor de 1r de Batxillerat, Domingo Rambla.

La trobada que va tenir lloc la primera setmana de febrer, va servir per decidir els continguts de les sessions, els horaris, el nombre de sessions i l'aula d'informàtica que farem servir.

La primera aula que vam visitar va ser l'aula de 1r de Batxillerat, on vam treballar les còniques amb material manipulatiu.

Donat que les còniques no formen part dels continguts del currículum matemàtic d'ESO, era normal que els alumnes no coneguessin les còniques, però abans de començar vaig parlar amb el professor, i em va dir:

“Vaig comentar als meus alumnes que avui els faries una sessió de còniques i em van preguntar que són, aleshores els vaig parlar una mica sobre elles i el perquè del seu nom.”

Després d'aquesta sessió vam visitar l'aula de 2n de Batxillerat. Aquesta sessió era diferent, ja que en aquest cas els alumnes havien acabat tot el temari de geometria que tenia previst la professora.

Més endavant explicarem tot el que ha succeït des d'un punt de vista competencial i metodològic durant aquestes sessions.

3.7 Preparació de les sessions

Ja amb els temes decidits, faltava preparar les sessions. S'havia d'aconseguir transmetre els conceptes d'una manera clara i entenedora i alhora s'havia d'aconseguir que les sessions fossin interessants i atractives. Riques matemàticament i entretingudes pels alumnes.

En la sessió de 1r de Batxillerat vam treballar les còniques. Donat que era la primera vegada que els alumnes les estudien, vam dividir la sessió en dos parts, la primera consistia en explicar la història de les còniques i en la segona vam mostrar algunes de les seves propietats.

Pel que fa a la sessió de 2n de Batxillerat, segons la programació del curs, i com ja hem explicat abans, es duria a terme una vegada acabada la part de geometria.

Dues setmanes abans de fer la sessió em vaig assabentar que la majoria dels alumnes van suspendre el examen final de geometria, així que vam decidir fer una sessió que servis de repàs i preparació a la recuperació.

Era una sessió on vam resoldre les activitats de selectivitat amb el GeoGebra, perquè així els alumnes poguessin visualitzar els conceptes treballats a classe.

Els objectius que vam tenir en compte a l'hora de la preparació eren els següents:

- Sessió de còniques pels alumnes de 1r de Batxillerat:
 1. Conèixer les còniques i la seva història.
 2. Visualitzar les propietats de les còniques.

- Sessió de GeoGebra pels alumnes de 2n de Batxillerat:
 - Visualitzar els continguts treballats a l'aula.
 - Fer una geometria més dinàmica on predomina l'experimentació.

3.8 Implementació a l'aula

1. Còniques amb material manipulatiu

En aquest apartat explicarem tot el que ens ha portat a fer l'activitat de les còniques amb material manipulatiu, que vaig fer a l'aula de 1r de Batxillerat a l'Institut Collblanc de la Canonja. La dinàmica que va tenir l'activitat va ser la següent:

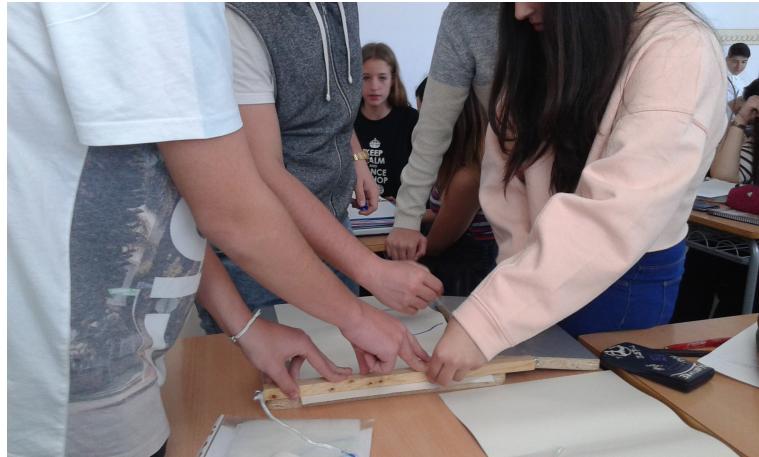
Primer vam començar la classe amb una petita història sobre les còniques, que van ser descobertes pel matemàtic grec Menecmo, com a conseqüència del seu interès en el problema de construir amb regla i compàs un cub de volum doble al d'un altre cub donat. Després vam explicar com s'obtenen les còniques com a secció d'un con, utilitzant un con transparent omplert amb un líquid acolorit.



Una vegada explicat el perquè es diuen còniques, els vam ensenyar els mètodes per dibuixar cada cònica. Vam començar primer amb el mètode per dibuixar la circumferència, després vam definir la circumferència com a lloc geomètric, perquè així relacionen el mètode de dibuix amb aquesta definició i puguin ser capaços de deduir la definició de la resta de còniques com a lloc geomètric després de veure el mètode per dibuixar cada cònica.

Tot seguit vam dibuixar les altres còniques, i cada vegada que dibuixàvem una cònica, la definíem com a lloc geomètric.

Al final de la sessió, vam donar als alumnes un qüestionari, per fer una valoració global a la sessió.



A les imatges de dalt tenim els alumnes de 1r de Batxiller aplicant els mètodes vists a l'aula per dibuixar la paràbola.

Al principi els alumnes no han volgut participar, però al final, quan volien contestar el qüestionari van demanar si podien dibuixar ells les còniques, i va anar molt bé.

2. Sessió de GeoGebra

Ara explicarem la dinàmica que va tenir l'activitat com també tot el que ens ha portat a fer servir GeoGebra com eina per en requerir la geometria.

Vam començar la classe repartint els enunciats dels problemes a resoldre, després vam discutir el mètode de resolució amb bolígraf i paper (sense fer-ho), amb l'objectiu de fer un petit repàs, ja que com hem dit abans ells havien acabat tot el temari.

Després vam comentar el comandaments del GeoGebra que faríem servir i el seu funcionament, tot seguit vam discutir la resolució dels problemes amb el GeoGebra, on es va notar molt la diferència entre els alumnes que tenen el mètode de resolució memoritzat i els que realment saben el que fan.

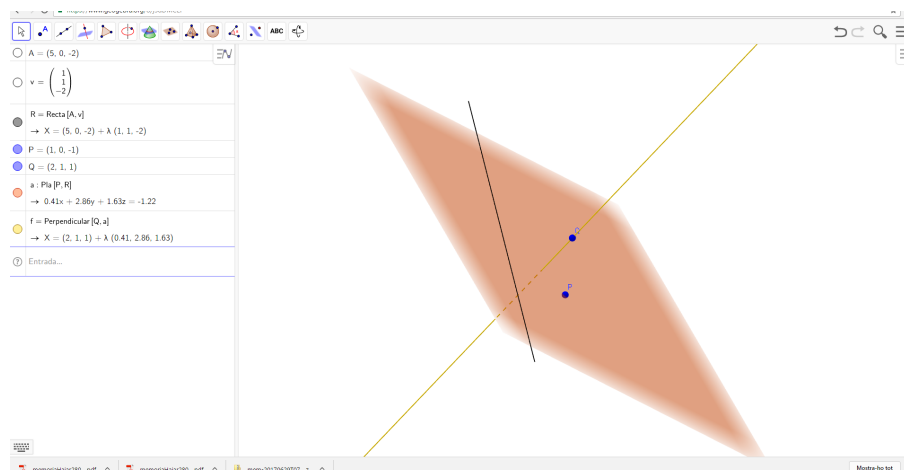
L'activitat que vam decidir resoldre amb GeoGebra és l'activitat 1 sèrie 1 any 2016 de selectivitat que té per enunciat el següent:

Siguin la recta $r : (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ i els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (2, 1, 1)$.

- Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt Q i és perpendicular al pla determinat per la recta r i el punt P .
- Calculeu el punt de la recta r que equidista dels punts P i Q .
- Ampliació (afegida per mi): Substituïm els valors del punt P pels valors $(k, 0, -2)$, en moure el paràmetre k que s'observa?

L'ampliació la vaig afegir amb l'objectiu de veure si els alumnes eren capaços de detectar que el GeoGebra no pot dibuixar feixos de plans de manera immediata. Ja que en moure el paràmetre k , el punt P pertanyerà a la recta r , i això fa que ens apareix un feix de plans per la recta r . Cosa que el GeoGebra no ho detecta. (Per dibuixar feixos de plans has de donar els elements en forma de llista.)

La solució corresponent a l'apartat a és la següent:



Segons aquesta experiència, l'ús de GeoGebra a l'aula ens permet visualitzar i entendre el procés a seguir previ a la resolució analítica i fer que la geometria tingui un enfocament més pràctic a l'aula.

3.9 Anàlisi de sessions a l'aula

L'anàlisi de la sessió de 1r de Batxillerat, la vam fer mitjançant un qüestionari, amb respostes obertes, que vam repartir al final de la sessió.

És un qüestionari de 10 preguntes centrades en la definició de les còniques com a lloc geomètric i la relació que hi ha entre aquesta definició i el mètode utilitzat per dibuixar-les. Després d'haver analitzat i interpretat les respostes de l'alumnat, tenim el següent:

Tot i que han estudiat les paràboles (les funcions parabòliques a 4t d'ESO), tots els alumnes han respòs amb **“No”** a la pregunta **“Havies estudiat abans les còniques?”** excepte un alumne que va contestar **“sí, la paràbola”**.

Això significa que els professors no ensenyen als alumnes a aprendre de forma més transversal, relacionant els coneixements que s'imparteixen en diferents àrees de matemàtiques, sinó que treballen els continguts dels blocs matemàtics per separat, com si fossin independents entre ells.

Pel que fa a les definicions de les còniques com a lloc geomètric, tots els alumnes van poder donar la definició correcta, però els hi va costar donar una explicació del perquè funciona cada mètode.

A continuació mostrem algunes respostes dels alumnes.

Qüestionari

- Havies estudiat abans les còniques? No.....
- Sabies per què es deien còniques? No.....
- Utilitzar material manipulatiu ha fet que la classe sigui mes interessant? Sí.....
- Com definiries la circumferència com a lloc geomètric?
Qualsevol punt de la circumferència que vagi del centre a un altre punt qualsevol tindrà la mateixa longitud.
- Si et dono dos focus i un punt de l'el·lipse, ho podràs dibuixar? Com?
Sí, unint la corda als dos focus i des del punt donat abans amb un rotulador fent un recorregut en la forma de cercle ~~per~~ amb la corda fins a tornar al punt.

En el cas de la sessió de 2n de Batxillerat, a més del qüestionari també tenim fitxers que els alumnes han generat a partir de les activitats amb el programari interactiu Geogebra. Són fitxers que tenen extensió “.ggb” i el nom dels quals permet identificar l'alumne i l'activitat.

La informació obtinguda per escrit dels alumnes, té dos parts, per una banda tenim les respostes a les activitats realitzades amb Geogebra, i per l'altra tenim les respostes relacionades amb el ús del programari GeoGebra.

Pel que fa a la resolució del problema, una gran part dels alumnes van trobar l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt Q i és perpendicular al pla determinat per la recta r i el punt P . Però la majoria van tenir dificultat en trobar

el punt de la recta r que equidista dels punts P i Q . I ningú va ser capaç de detectar el perquè en moure el paràmetre k el pla determinat per la recta r i el punt P , desapareix.

També vaig fer entrevistes amb els professors abans i després de les sessions, la primera era oral i la segona era mitjançant un qüestionari. A continuació detallarem els resultats d'aquestes entrevistes adjuntant una imatge del qüestionari.

Tot i que el professor de 1r de Batxillerat opina que el material manipulatiu és un instrument molt potent, i el seu ús a l'aula ajuda a l'aprenentatge de l'alumne, no el fa servir, a causa del gran nombre d'alumnes a l'aula i també el poc temps que té per acabar el temari.

Aquí tenim les seves respostes redactades per ell.

Has fet servir alguna vegada material manipulatiu a l'aula? Quin?
A 1r BAT no; sempre m'he de pressio per tal de acabar el temari i jo mateix no penses que un dia o dos practics es poden

Creus que el fet d'utilitzar material manipulatiu motiva més els alumnes? Per què?
Si, els fa veure que la teoria i les propietats serveixen per alguna cosa

Creus que el material utilitzat en aquesta secció i el enfocament didàctic que s'ha fet ha ajudat als alumnes a entendre les propietats de les còniques? Per què?
Potser sí, sobretot més que les propietats com obtenir la seva representació gràfica i com aquestes propietats ens ajuden a representar-les

Creus que el fet d'utilitzar material manipulatiu motiva més els alumnes? Per què?
Sí, perquè inclou alumnes que no solen tenir bones notes entenent com els surten les coses bé

Faries servir material manipulatiu durant el curs? Quin?
Sí, però amb grups més reduïts per que tots puguin participar. Quin? hauria de servir ja que com he dit no estic molt posat en el tema

Respecte a la professora de 2n de Batxillerat, sí que fa servir el GeoGebra a l'aula però no com un recurs didàctic on l'alumne pugui experimentar i treure conclusions, sinó que ho fa servir com una eina independent, és a dir, als últims 5 minuts de classe (i si les sobre temps) mostra algunes imatges on l'alumne pugui visualitzar alguns conceptes. I això és degut al poc temps que té.

Aquí tenim les seves respostes redactades per ella.

Has utilitzat GeoGebra amb els alumnes abans? Sí

Creus que GeoGebra es una bona eina per en requerir el coneixement dels alumnes? Per què?

Sí, perquè els hi permet visualitzar els conceptes d'una manera gràfica i amplia la frontera de possibilitats per poder entendre millor els continguts.

Que és el que aporta GeoGebra i que no es pot fer amb llapis i paper?

Poder visualitzar representacions en tres dimensions des de diferents punts de vista, fer animacions, etc.

Creus que utilitzar GeoGebra fa que la classe sigui més interessant i ajuda a motivar els alumnes? Per què?

Sí, perquè els permet treballar de forma més autònoma i dinàmica.

Es pot aprofitar el GeoGebra per treure conclusions teòrics? Com?

Sí, per exemple per fer demostracions gràfiques de teoremes com el Teorema de Pitàgoras.
O per exemple, veure que li passa a l'expressió algebraica d'una funció si li fas moviments horitzontals o verticals, etc.

Creus que GeoGebra pot ajudar als alumnes a resoldre tot tipus d'activitats que hi ha al llibre de text? Per què?

Potser no totes però sí moltes, ja que combina geometria, àlgebra, càlcul i estadística.
És una eina molt completa.

4 Propostes de millora

Després de fer una lectura als documents citats abans, i de les entrevistes que vam fer amb els dos professors, podem concloure que hi han diferents causes dels dificultats que es van analitzar.

Per una banda tenim, el desequilibri del temps que es dedica a cada temari dels 5 blocs que formen el currículum d'ESO, tal com diu Anton Aubanell en el seu document Orientacions per a la millora de la geometria a l'ESO, es dedica més temps al bloc de numeració i càlcul i al domini de les expressions numèriques o algebraïques, que no a la resta del temari, i això és perquè consideren que si l'alumne no domina el càlcul matemàtic tindrà mancances en la resta de matèries on el càlcul es imprescindible en els seus procediments.

Aquest desequilibri no només afecta el temps que es dedica al bloc de geometria, sinó també afecta a l'enfocament que se li dona, ja que en el procés de resolució de problemes geomètriques es limiten en l'aplicació de fórmules en lloc de fer activitats experimentals on l'alumne pugui deduir la teoria partint dels recursos que té a la mà.

Per altre banda tenim que els professors transmeten els conceptes als alumnes de forma menys pràctica, degut a la seva formació, també observem que hi ha una confusió entre els continguts del currículum i els del llibre de text.

Quan vaig fer la sessió de còniques a 1r de Batxillerat, em va sorprendre el comentari del professor, quant li vaig preguntar si els alumnes han estudiat alguna vegada les còniques, i com tenia pensat explicar aquest temari, em va dir:

“Els alumnes no han fet mai còniques, i el que tenia pensat fer és donar-los les equacions de cada cònica, perquè al llibre tampoc hi ha molta cosa”.

Tot i que la geometria és la branca més experimental de les matemàtiques, el fet de treballar-la tenint en compte només els continguts del llibre de text enlloc dels del currículum, la fa que sigui molt mecànica. Per això, a les propostes que es detallin a continuació, fem servir material manipulatiu i eines TAC.

Com veurem més endavant aquests dos recursos, un complementa l'altre, és a dir, les eines TAC amplien els continguts que podem treballar amb els materials manipulatius, i viceversa.

En les propostes següents es detallen els continguts i els conceptes que es treballen, els materials que s'utilitzen, aspectes didàctics i metodològics i el que ens aporta aquesta proposta, també hi ha material per l'alumnat que és una fitxa de preguntes relacionades amb el temari que treballa l'activitat, i per poder veure les matemàtiques que treballa cada activitat hem afegit la solució de les fitxes.

Per decidir l'estructura de les fitxes m'he basat en la descripció detallada de les activitats de l'ARC (Aplicació de Recursos al Currículum) del Departament d'Ensenyament [15].

Notes:

1. Totes les activitats s'iniciaran a partir del material manipulatiu i TAC proposat, perquè després els alumnes passin a respondre a les preguntes proposades en la fitxa.
2. Donat que el nostre treball té un nombre màxim de pàgines, el concepte de envolupants només ho treballat amb la hipèrbola.

4.1 SECCIONS DEL CON

Descripció:

Aquesta primera activitat experimental per introduir les còniques consisteix en visualitzar-les com a secció d'un con complet de manera que, segons la inclinació del pla de tall, obtenim el·lipse, paràbola, hipèrbola o circumferència.

Per fer-ho agafarem un con de material transparent mig ple amb un líquid acolorit de manera que, en canviar la seva inclinació, la superfície del líquid vagi adaptant les formes de les diferents còniques. Un cop l'alumnat hagi familiaritzat amb les còniques, visualitzant-les com a secció del con, les treballarem amb el programa de geometria dinàmica GeoGebra.

Imatge:



Objectius:

Conèixer les seccions del con, el seu nom, propietats i els seus elements.

Aspectes didàctics i metodològics:

Aquesta activitat consta de diversos apartats amb diferents preguntes. L'objectiu del primer apartat és fer que l'alumne intenti predir les diferents seccions que pot trobar inclinant el con transparent, per aleshores refutar o verificar les seves hipòtesis. La segona part de l'activitat, es tracta de visualitzar amb el GeoGebra aquestes seccions.

Nota: Amb el con transparent ple del líquid acolorit el que fèiem era moure el

con per obtenir les diferents seccions. Amb el GeoGebra es fixa el con i es mou el pla.

En el tercer apartat se'ls pregunta pel nom que rep la família de les seccions del con.

Recursos emprats:

Per a dur a terme aquesta activitat necessitarem un con transparent, líquid acolorit i el programa de geometria dinàmica GeoGebra.

Interdisciplinarietat:

Està directament relacionat amb dibuix tècnic.

Què ens afegim?

El fet d'introduir les còniques d'aquesta manera ens permet justificar el perquè del nom comú d'aquestes famílies de corbes. A més és una activitat que consisteix en observar els cossos geomètrics presentats, també es treballa la construcció del con mitjançant el GeoGebra, per a una millor visualització.

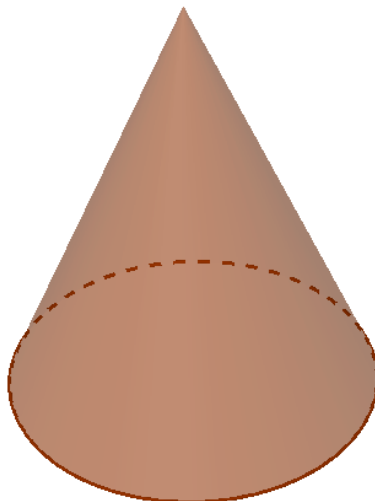
També ens relaciona el dibuix tècnic, assignatura que s'ofereix tant a l'ESO com a la modalitat tecnològica del Batxillerat, amb la geometria.

Observació:

Podem fer servir diferents materials per fer l'activitat, com per exemple, travessar el con mitjançant un raig de llum, tallar un con de porexpan, observar les ombres d'una pilota o les ombres d'una llanterna a la paret, ... etc.

FITXA: SECCIONS DEL CON I DEL CILINDRE

Imatge:



1. Observant el con, quines seccions creus que trobaríem si els talléssim per un pla? Pots utilitzar el material disponible per experimentar.
2. Quin nom creus que poden rebre aquestes seccions?
3. Si en lloc d'utilitzar un con fem servir el cilindre, quines seccions obtindrem?
4. Hi ha seccions que coincideixen amb les del con? Quines?

Seccions d'un con amb GeoGebra.

Ara experimentem amb el GeoGebra els resultats obtinguts anteriorment.

Per saber com es formen les diferents seccions del con amb el GeoGebra, tenim les instruccions següents:

- (a) Primer obrim la finestra de la Gràfica 3D, per fer-ho hem de clicar sobre la pestanya de visualitza i ens apareix aquesta opció
- (b) Una vegada tenim gràfica 3D, construïm un con, donant-li centre, vèrtex i radi de la base.
Per exemple: centre $(0,0,0)$, vèrtex $(0,0,4)$ i radi 3.
- (c) Ara crearem punts lliscants d, e, f, g i definirem el pla: $dx + ey + fz = g$.

Observació: A l'hora d'utilitzar les lletres pels punts lliscants, hem de tenir en compte les que ja estan assignades automàticament pel GeoGebra.

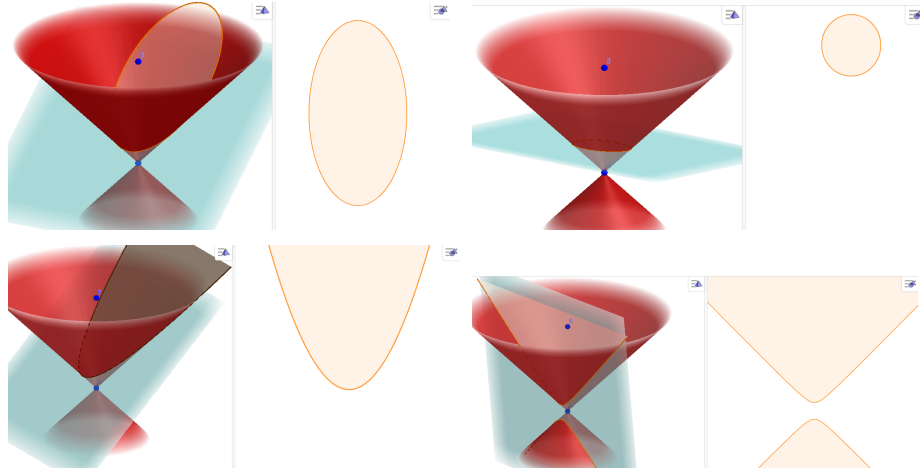
Ampliació: L'eina del punt lliscant ens permet introduir un paràmetre per canviar el valor d'una dada.

(d) Una vegada fet això calculem la intersecció d'aquest pla amb el con, fent servir la instrucció `intersecció`.

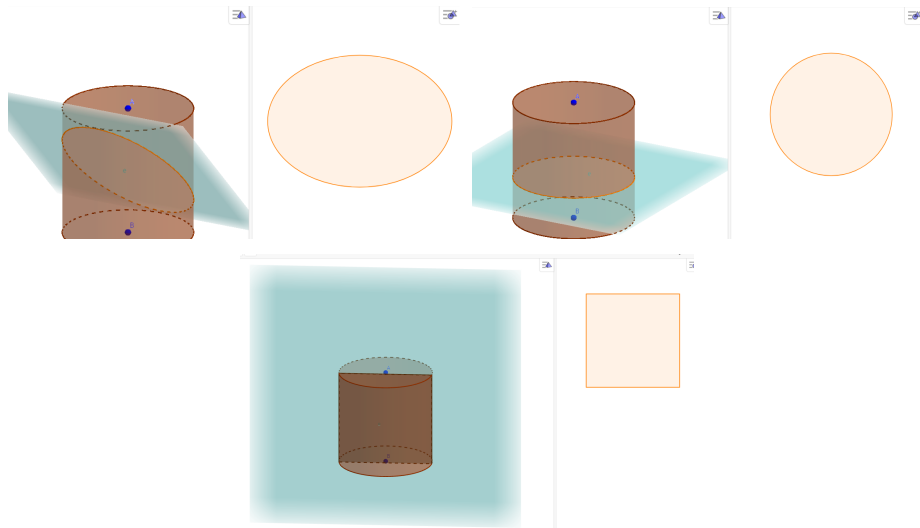
Fes el mateix amb el cilindre i compara els resultats.

SOLUCIÓ

1. Les seccions que trobaríem si talléssim el con per un pla són, l'el·lipse, la circumferència, la paràbola i la hipèrbola:



2. Aquestes seccions s'anomenen còniques.
3. Si el lloc d'utilitzar el con fem servir el cilindre, obtenim l'el·lipse, la circumferència, el rectangle i/o quadrat:



4. Com podem veure en les imatges següents, les seccions que tenen la mateixa forma tant en el con com en el cilindre són l'el·lipse i la circumferència.

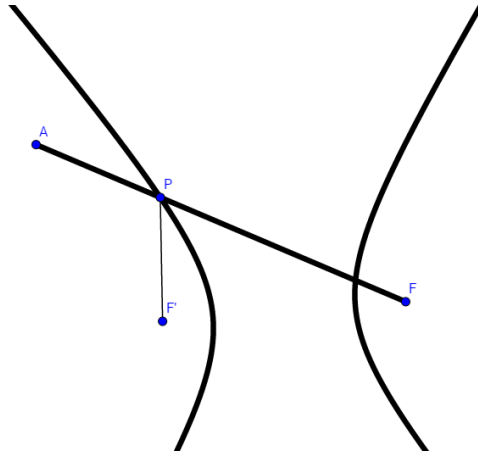
4.2 CONSTRUÏM LA HIPÈRBOLA

Descripció:

Posem cada element del material al seu lloc, fem un petit llaç al extrem lliure del cordell. Col·loquem aquest llaç al clau situat en F' i el forat de la regla en el clau situat en F . Amb un retolador i tensant el cordell de manera que sempre estigui en contacte amb la regla. En moure el retolador mantenint-lo en contacte amb la regla i el cordell tensat s'anirà dibuixant una rama de la hipèrbola.

Per dibuixar l'altra rama, repetirem la mateixa operació, però aquesta vegada col·locarem el llaç del cordell en el clau situat en F i el forat de la regla en el clau situat en F' .

Imatge:



Objectius:

Aquesta activitat consta de dibuixar la hipèrbola, amb l'objectiu de treballar la definició d'aquesta com a lloc geomètric, conèixer i saber distingir els seus elements, tot utilitzant material manipulatiu.

Aspectes didàctics i metodològics:

En primer lloc mostrarem a l'alumnat els elements bàsics de la construcció, el focus (F) i recordarem la definició de la hipèrbola com a lloc geomètric dels punts del pla tals que la diferència de distàncies als focus és, en valor absolut, constant.

Una vegada realitzada la construcció fem la demostració de que la corba obtinguda és realment una hipèrbola a partir de la seva definició com a lloc geomètric.

Finalment donarem una llista de preguntes a l'alumne per respondre .

Comprovació del mètode:

És evident que la longitud de la regla menys la longitud del cordell és constant. Però la longitud de la regla és $AP + PF$ i la longitud del cordell és $AP + PF'$.

Per tant, podem escriure: $(AP + PF) - (AP + PF') = constant$.

Eliminant AP tindrem que $PF - PF' = constant$.

Per l'altra rama de la hipèrbola obtindríem la diferència al revés però la condició del valor absolut que apareix en la definició, fa que el ordre resulti indiferent. És interessant observar que la constant que defineix la hipèrbola és la diferència entre la longitud de la regla i la del cordell que es pot visualitzar fàcilment que coincideix amb la distància entre els vèrtex de la hipèrbola obtinguda. Amb cordells de diferents longituds s'obtidran hipèrboles diferents.

Recursos emprats:

Per la construcció del hipèrbola necessitarem una superfície amb dos claus, que seran els focus F i F' , i una regla que tingui un tros de cordell lligat a un dels seus extrems i un forat a l'altre. Fem un petit llaç al extrem lliure del cordell. Col·loquem aquest llaç al clau situat en F' i el forat de la regla en el clau situat en F .

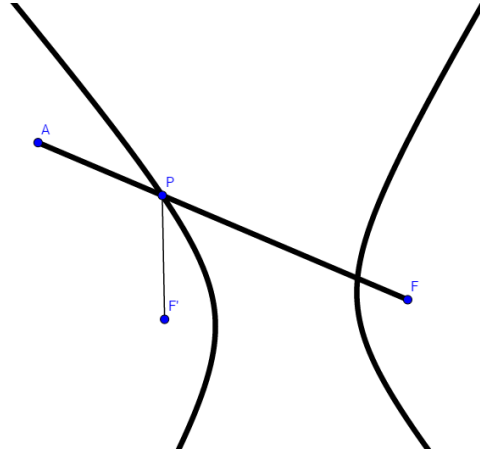
Interdisciplinarietat:

Està directament relacionat amb dibuix tècnic.

Què ens afegeix?

El fet de dibuixar la hipèrbola fent servir la seva definició com a lloc geomètric, ajuda a visualitzar aquesta definició, i conèixer els seus elements.

FITXA:CONSTRUÏM LA HIPÈRBOLA



1. Per dibuixar la hipèrbola, que necessitaries?
2. Com saps que el mètode que has fet servir per dibuixar la funciona?
3. Com es defineix la hipèrbola com a lloc geomètric?
4. Escribeu matemàticament aquesta definició, i doneu la seva equació analítica.

Ampliació:

La hipèrbola $b^2x^2 - a^2y^2 = (ab)^2$ té per asímptotes les rectes $bx - ay = 0$ i $bx + ay = 0$.

Si prenem $a = b$, obtenim l'equació $x^2 - y^2$, que té per asímptotes $y = x$, $y = -x$.

Aquesta equació rep el nom de hipèrbola equilàtera, centrada a l'origen.

5. Donada la hipèrbola $b^2x^2 - 16y^2 = 256$, troba els valors del paràmetre b pels quals és una hipèrbola equilàtera.
6. Com podem dibuixar la hipèrbola amb el GeoGebra? Que passa si anem variant la distància entre els focus?

SOLUCIÓ

1. Per dibuixar la hipèrbola, necessitem els dos focus i un punt de la hipèrbola, o bé dos focus i la diferència constant. Aleshores fent servir el mètode descrit abans, obtenim la hipèrbola.
2. Per comprovar que el mètode que hem fet servir funciona, el que comprovarem és si la corba generada pel mètode compleix la definició de la hipèrbola.
En efecte, tal com vam veure a la part de comprovació del mètode, la corba generada per aquest mètode és una hipèrbola.
3. La hipèrbola com a lloc geomètric es defineix com els punts del pla tals que la seva diferència de distàncies als focus es, en valor absolut, constant.

4. Si escrivim aquesta definició matemàticament tenim que la hipèrbola és:

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

Sigui doncs $F_1 = (f, 0)$, $F_2 = (-f, 0)$ i $P = (x, y)$ i la diferència constant és $2a$ aleshores tenim:

$$|\sqrt{(x+f)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-f)^2 + (y-0)^2}| = 2a$$

Operant obtenim: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{f^2 - a^2} = 1$.

Si fem $b^2 = f^2 - a^2$, amb la condició de $f > a$ aleshores obtenim la següent: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5. En aquest apartat de l'activitat, ens donen una hipèrbola que té l'equació següent: $b^2x^2 - 16y^2 = 256$ amb paràmetre b sense determinar, es demana veure per quin valor de b és equilàtera.

Consideren les seves assímptotes:

$$bx - 4y = 0$$

$$bx + 4y = 0$$

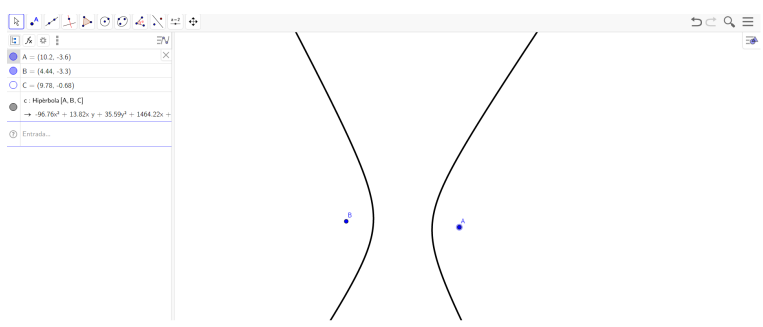
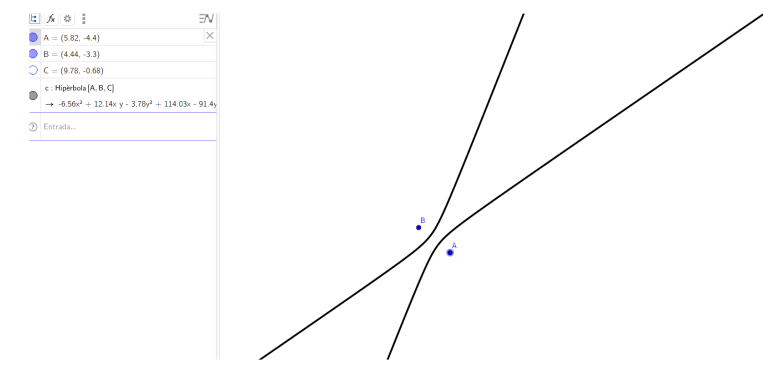
D'on considerant $a = b$ resulta:

$$x = y$$

$$-x = y$$

Per tant, la hipèrbola inicial s'ha transformat en $x^2 - y^2 = 16$, i podem concloure que $b = 4$.

6. Per dibuixar la hipèrbola amb el GeoGebra farem servir la instrucció *hipèrbola* donant-li els focus i un punt. Com podem observar en les imatges següents, en moure els focus varia l'excentricitat de la hipèrbola, podem obtenir, entre d'altres rectes, paral·leles o secants.



4.3 CONSTRUÏM L'EL·LIPSE

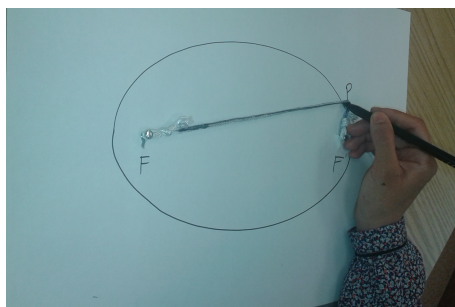
Descripció:

La construcció de l'el·lipse es pot fer amb el conegut mètode del jardiner.

Es tracta de partir de la definició d'el·lipse com el lloc geomètric dels punts tals que la suma de distàncies als focus és constant. La longitud del cordill és igual a la suma d'aquestes distàncies, equivalent a $2a$. Així per dibuixar l'el·lipse, tensem el cordill amb el retolador i, en desplaçar-ho, ens anirà traçant l'el·lipse. Podem fer servir cordills de diferents longitud, i observar com va variant l'excentricitat de l'el·lipse resultant.

També podem variar la distàncies entre els focus, fent servir diferents forats. Així si mantenim la longitud del cordill i anem separant F i F' observarem que cada vegada l'el·lipse serà més excèntrica. Si, mantenint la longitud del cordill, anem ajuntant F i F' observarem que l'el·lipse s'apropa a una circumferència i si F i F' arribessin a coincidir tindríem exactament una circumferència.

Imatge:



Objectius:

Aquesta activitat consta de dibuixar l'el·lipse, amb l'objectiu de treballar la definició de l'el·lipse com a lloc geomètric, conèixer i saber distingir els seus elements, tot utilitzant material manipulable.

Aspectes didàctics i metodològics:

En primer lloc mostrarem a l'alumnat els elements bàsics de la construcció, el focus (F) i el cordill (d), i recordarem la definició de l'el·lipse com a lloc geomètric dels punts del pla la suma de distàncies dels quals a dos punts fixos, anomenats focus és constant.

Després dibuixem l'el·lipse destacant la definició donada. Una vegada realitzada la construcció fem la demostració de que la corba obtinguda és realment un el·lipse a partir de la seva definició com a lloc geomètric.

Finalment donarem una lista de preguntes a l'alumne per respondre.

Comprovació del mètode:

Naturalment la suma de distàncies des de cada un dels punts obtinguts als focus és constant, per ser aquesta igual a la longitud total del cordill.

Tenim que l'el·lipse és el lloc geomètric dels punts del pla la suma de distàncies dels quals a dos punts fixos, anomenats focus és constant, donat que la longitud del cordill és constant, i tenim que la suma de distàncies des de cada un dels punts obtinguts als focus és constant, aleshores aquest mètode és correcte.

En efecte tenim:

$$PF + PF' = \text{longitud del cordill} = \text{constant.}$$

Recursos emprats:

Disposarem d'una superfície amb dos claus situats en els punts F i F' (que seran els focus), un tros de cordell de longitud major que la distància entre els focus, cada extrem l'unirem a un dels claus, un retolador i un paper.

Interdisciplinarietat:

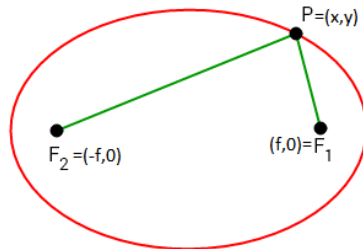
Està directament relacionat amb dibuix tècnic.

Què ens afegim?

El fet de dibuixar l'el·lipse amb aquest mètode fa que l'alumne visualitzi la definició del lloc geomètric de l'el·lipse, com canvia la l'excentricitat en canviar la longitud del cordell i/o la distància entre els focus.

FITXA:CONSTRUÏM L'EL·LIPSE

Imatge:



1. Per dibuixar l'el·lipse, que necessaries?
2. Com saps que el mètode que has fet servir per dibuixar-lo funciona?
3. Fes servir el GeoGebra i explica que passa en variar la distància entre els focus.
4. Com es defineix l'el·lipse com a lloc geomètric?
5. Escribeu matemàticament aquesta definició.
6. Fent servir aquesta definició, escriu l'equació analítica de l'el·lipse.

SOLUCIÓ

1. Per dibuixar l'el·lipse necessitem dos focus i un punt de l'el·lipse, o bé dos focus i la suma de distàncies que ha de ser constant. Aleshores fent servir el mètode descrit abans, anomenat el mètode del jardiner, obtenim l'el·lipse.
2. Per comprovar que el mètode que hem fet servir funciona, el que comprovarem és si la corba generada pel mètode compleix la definició de l'el·lipse. En efecte, tal com vam veure a la part de comprovació del mètode, la corba generada per aquest mètode és un el·lipse.
3. En canviar la distància entre els fous, canvia l'excentricitat de l'el·lipse, i si la distància entre els focus és 0, la cònica que obtindrem és la circumferència.
4. L'el·lipse com a lloc geomètric es defineix com els punts del pla la suma de distàncies dels quals a dos punts fixos, anomenats focus, és constant.
5. Si escrivim aquesta definició matemàticament tenim que l'el·lipse és:

$$P = \{(x, y) \in R^2 \text{ tals que } d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

6. Sigui doncs $F_1 = (f, 0)$, $F_2 = (-f, 0)$ i $P = (x, y)$ i la suma de distàncies és la constant $2a$ aleshores tenim:

$$\sqrt{(x+f)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-f)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\text{Operant obtenim: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-f^2} = 1.$$

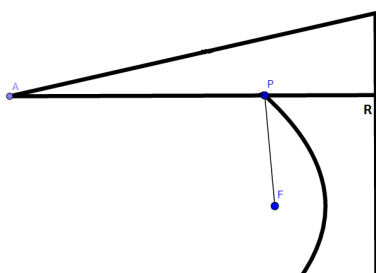
$$\text{Si fem } b^2 = a^2 - f^2, \text{ aleshores obtenim la següent: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4.4 CONSTRUÏM LA PARÀBOLA

Descripció:

En primer lloc mostrarem a l'alumnat els elements bàsics de la construcció, el focus (F) i la directriu (d), i recordarem la definició de la paràbola com el lloc geomètric dels punts que equidisten del focus i de la directriu. Posarem els elements de construcció tal com es mostra a la figura. En particular, un extrem del cordill es fixarà en el vèrtex A i l'altre extrem en el focus F. Col·locarem el retolador de manera que tensi el cordell i a la vegada estigui en contacte amb l'escaire. En moure l'escaire el punt P anirà dibuixant la paràbola de focus F i directriu d.

Imatge:



Objectius:

Aquesta activitat consta de dibuixar la paràbola, amb l'objectiu de treballar la definició d'aquesta com a lloc geomètric, conèixer i saber distingir els seus elements, tot utilitzant material manipulable.

Aspectes didàctics i metodològics:

En primer lloc mostrarem a l'alumnat els elements bàsics de la construcció, el focus (F) i la directriu (d) recordarem la definició de la paràbola com a lloc geomètric dels punts del pla que equidistin del focus i la directriu. Després dibuixarem la paràbola destacant la definició donada. Una vegada realitzada la construcció fem la demostració de que la corba obtinguda és realment una paràbola a partir de la seva definició com a lloc geomètric.

Finalment donarem una llista de preguntes a l'alumne per respondre.

Comprovació del mètode:

Per demostrar que la corba obtinguda és una paràbola de focus F i directriu d, n'hi ha prou recordar que la paràbola és el lloc geomètric dels punts del pla que equidistin del focus i la directriu, i observar que la distància de qualsevol punt P al focus (PF) coincideix amb la longitud del tros de cordell que falta en PR.

Recursos emprats:

Per la construcció de la paràbola utilitzarem una superfície amb un clau en el punt on es situarà el focus F, una regla que senyalarà la directriu D, un escaire i un tros de corda de la mateixa longitud que el catet llarg del escaire, i un paper que col·locarem sobre la superfície per dibuixar a sobre.

Interdisciplinarietat:

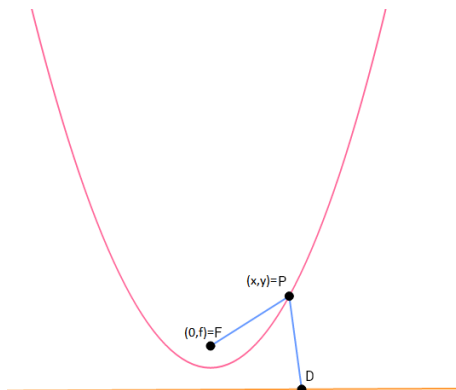
Està directament relacionat amb dibuix tècnic

Què ens afegeix?

El fet de dibuixar la hipèrbola fent servir la seva definició com a lloc geomètric, ajuda a visualitzar aquesta definició, i conèixer els seus elements.

FITXA:CONSTRUÏM LA PARÀBOLA

Imatge:



1. Per dibuixar la paràbola, que necessaries?
2. Com saps que el mètode que has fet servir per dibuixar-la funciona?
3. Com es defineix la paràbola com a lloc geomètric?
4. Escribeu matemàticament aquesta definició.
5. Fent servir aquesta definició, escriu l'equació analítica de la paràbola.
6. Amb l'ajuda del GeoGebra experimentem com varia l'excentricitat de la paràbola en canviar la distància entre el focus i la directriu.

SOLUCIÓ

1. Per dibuixar la paràbola necessitem el focus i la directriu, aleshores fent servir el mètode descrit abans, obtenim la paràbola.
2. Per comprovar que el mètode que hem fet servir funciona, el que comprovarem és, si la corba generada pel mètode compleix la definició de la paràbola.
En efecte, tal com vam veure a la part de comprovació del mètode, la corba generada per aquest mètode és una paràbola.
3. La paràbola com a lloc geomètric es defineix com els punts del pla que equidistin del focus i la directriu.

4. Si escrivim aquesta definició matemàticament tenim que la paràbola és:

$$P = \{(x, y) \in R^2 \text{ tals que } d(P, F) = d(P, D)\}.$$

5. Sigui doncs $F = (0, f)$, $P = (x, y)$ un punt de la paràbola amb directriu l'eix de les X aleshores tenim:

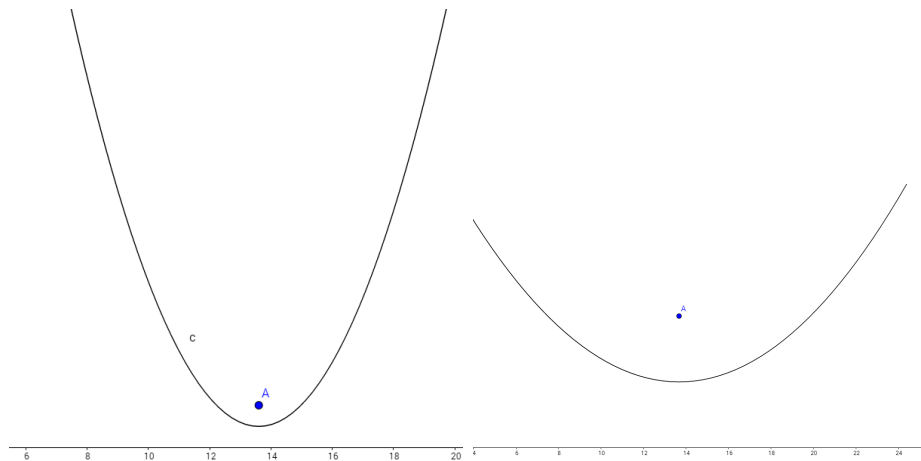
$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - f)^2} = y + f.$$

$$\text{Operant obtenim: } x^2 + y^2 - 2fy + f^2 = y^2 + 2fy + f^2$$

$$\text{Per tant tenim que la paràbola té per equació: } x^2 = 4fy$$

6. En variar la distància entre el focus i la directriu, ens canvia l'excentricitat de la paràbola.

Tal com mostren les següents imatges, com més lluny estigui el focus de la directriu, més oberta és la paràbola obtinguda.



4.5 LES PROPIETATS FOCALS DEL EL·LIPSE I DE LA PARÀBOLA

Descripció:

Construirem un el·lipse i una paràbola i les tallarem sobre una placa de cartró-ploma. En la ranura resultant encaixarem una làmina flexible i allargada de paper de plata dur o paper de estany.

En el cas de l'el·lipse, situem un làser en un dels focus i fent que la llum rebota en el contorn observarem que el raig reflectit passa per l'altre focus. Movent el punt del contorn sobre el qual es reflexa el làser s'observa que el raig reflectit continua passant pel focus.

Fent un experiment semblant amb la paràbola projectant el làser paral·lelament al eix de la paràbola i observant que, en reflectir, passa pel focus.

Imatge:



Objectius:

Analitzar les propietats focals de les còniques i mostrar el seu ús en la vida quotidiana.

Aspectes didàctics i metodològics:

En primer lloc posarem els elements del experiment tal com mostra la figura. Després comencem a experimentar les propietats focals de cada cònica.

Una vegada fet el experiment, expliquem l'aplicació d'aquesta propietat.

Recursos emprats:

Una làmina flexible i allargada de paper de plata dur o paper de estany, una placa de cartró-ploma, escaire, compàs i regla.

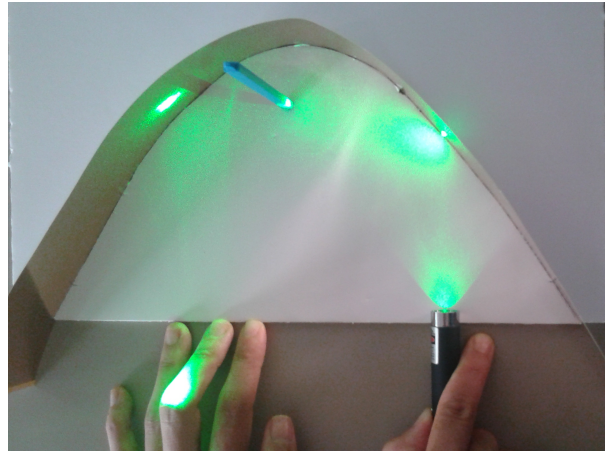
Interdisciplinarietat:

Està directament relacionat amb física i reflexió dels raigs de llum.

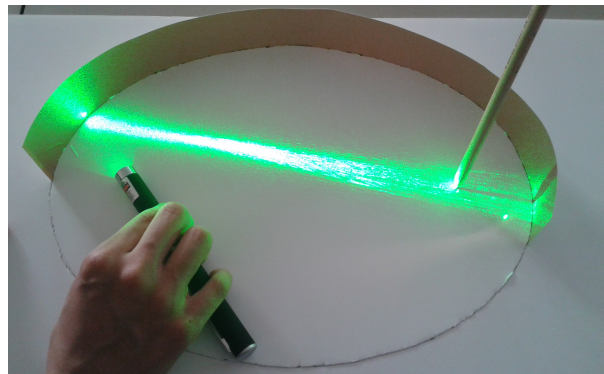
Què ens afegim?

Amb aquesta activitat fem notar la importància de les propietats focals de les còniques en la vida quotidiana.

FITXA:LES PROPIETATS FOCALS DEL EL·LIPSE I DE LA PARÀBOLA



1. Busca informació sobre les cuines solars parabòliques i les antenes parabòliques, explica com funcionen i quina relació tenen amb les propietats focals de la paràbola.



2. Busca informació sobre la litotrícia per ones de xoc, explica quina relació té amb la propietat focal de l'el·lipse?
3. Dóna una altra aplicació de la propietat focal de l'el·lipse.

SOLUCIÓ

1. Les cuines solars són artefactes que permeten cuinar aliments usant el sol com a font d'energia.

Per la construcció d'aquestes cuines s'utilitza una superfície parabolòide de revolució feta amb material reflectant, per concentrar l'energia solar incident i generar la temperatura necessària per la cocció dels aliments.

Partint de la propietat focal de la paràbola, hem de posar el recipient en el focus on se centra l'energia.

Les antenes parabòliques funcionen de manera anàloga, és a dir, són superfícies reflectants que concentren les ones electromagnètiques al focus on es troba el receptor.

2. La litotrícia per ones de xoc és una operació que es fa dins del ronyó per desfer les pedres per tal que puguin sortir per la uretra.

Per fer l'operació es fa servir un llit el·lipsoïdal, on dorm el malalt de forma que el ronyó quedi situat en un dels focus i emeten ones per l'altre per tal de desfer les pedres que hi han.

Una altre aplicació d'aquesta propietat la podem trobar en aules de la facultat de matemàtiques de la UB, que tenen sostre el·lipsoïdal. Aquest efecte permet la insonorització d'aules.

4.6 LA HIPÈRBOLA COM A ENVOLUPANTS DE FAMÍLIA DE RECTES

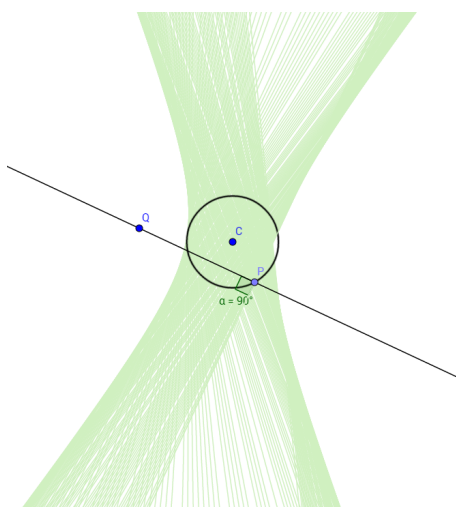
Descripció:

En aquesta proposta es mostren altres propietats de la hipèrbola, els envolupants.

Dibuixarem una circumferència amb centre C , i marcarem un punt P sobre ella i un altre Q fora. Després traçarem una recta per P que sigui perpendicular a la recta PQ .

En moure el punt P sobre la circumferència, el envolupant resultant està dividida en dues corbes que són les rames d'una hipèrbola.

Imatge:



Objectiu:

Mostrar i explicar la construcció de la hipèrbola per envolupants.

Aspectes didàctics i metodològics:

Amb el material que tenim, dibuixem la hipèrbola amb el mètode descrit abans. Després demanarem als alumnes que construeixen amb el GeoGebra la hipèrbola utilitzant aquest mètode.

Finalment els donarem un qüestionari per respondre.

Recursos emprats:

Paper vegetal, compàs, regla, escaire i el GeoGebra.

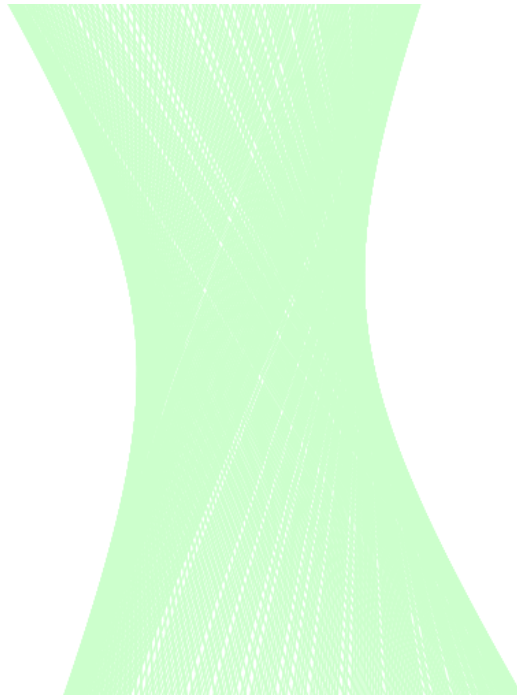
Interdisciplinarietat:

Està relacionat directament amb dibuix tècnic.

Què ens afegeix?

Conèixer els elements de la hipèrbola, i treballar el concepte d'envolupant d'una família de rectes.

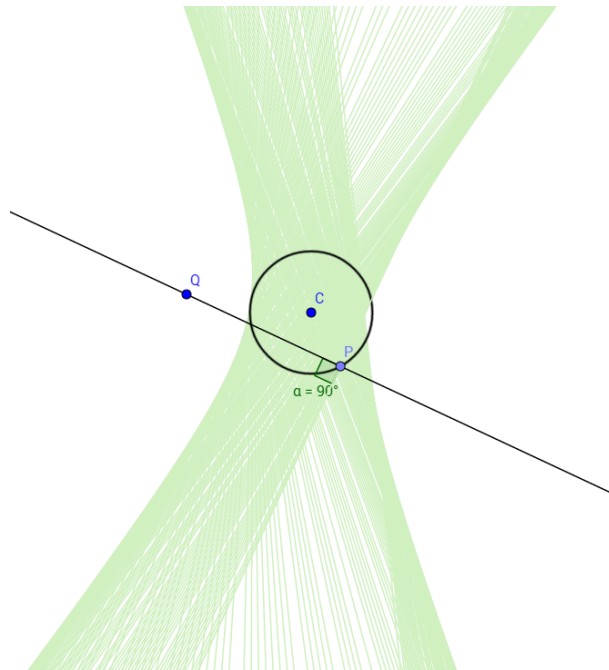
FITXA:LA HIPÈRBOLA COM A ENVOLUPANTS DE FAMÍLIA DE RECTES



1. Busca la definició d'envolupants.
2. Amb el GeoGebra construeix la hipèrbola utilitzant aquesta definició d'envolvent (Tal com hem explicat a classe).
3. Quin nom rep el punt Q respecte la hipèrbola? Hi ha algun altre punt que tingui el mateix nom? En cas afirmatiu com la podem trobar?
4. Quines són les asímtotes d'aquesta hipèrbola?

SOLUCIÓ

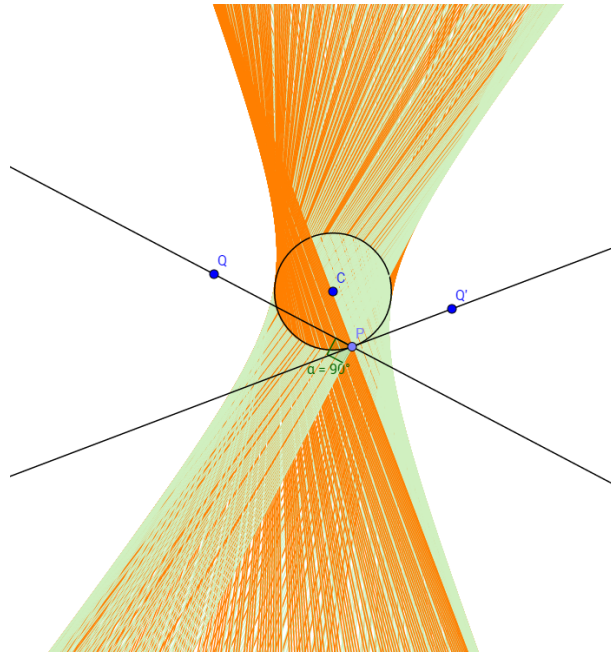
1. Una corba envolupant és una corba tangent a totes les d'una família de corbes donada.
2. Construcció amb el GeoGebra.
 - (a) Donem les coordenades del punt C.
 - (b) Amb l'eina *circumferència donats el centre i el radi* dibuixem la circumferència (Donem qualsevol valor al radi).
 - (c) Agafem un punt P sobre aquesta, i un altre Q fora.
 - (d) Dibuíxem la recta PQ i una perpendicular a aquesta que passi per P, anomenem-la s.
 - (e) Si fem visible el traç de la recta s, i movem el punt P, ens dibuixa la hipèrbola.



3. El punt Q és un dels focus de la hipèrbola, i com que la hipèrbola té dos focus aleshores hi ha un altre punt Q', que és el segon focus.

Per trobar aquest, sabem que el centre de la circumferència és també el centre de la hipèrbola, aleshores si calculem el punt simètric de Q amb centre de simetria C, aquest és Q'.

Amb el GeoGebra podem comprovar que la hipèrbola que generem amb el punt Q, P i la circumferència de centre C, coincideix amb la generada amb aquesta circumferència el punt Q' i P.



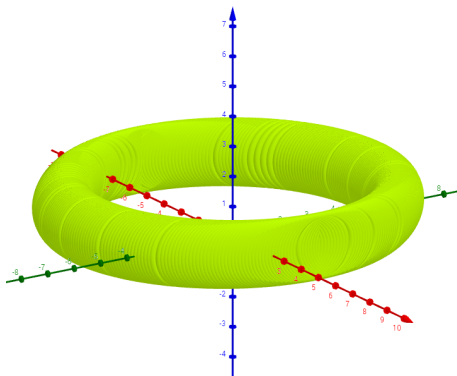
4. Les asímptotes d'aquesta hipèrbola, són les rectes CQ i CQ'.

4.7 TOREMA DE GULDIN

Descripció:

Aquesta activitat pretén treballar el teorema de Guldin, aplicada sobre diferents tipus de línies planes.

Imatge:



Objectius:

Mostrar el teorema de Guldin i saber calcular l'àrea de la superfície engendrada pel gir complet d'una línia plana.

Aspectes didàctics i metodològics:

En primer lloc mencionarem el càlcul de l'àrea del cilindre, després veurem com podem obtenir el cilindre amb el generador de superfícies que tenim, una vegada sabem com podem generar el cilindre relacionem la fórmula del càlcul d'àrea amb el teorema de Guldin.

Recursos emprats:

Cilindre, generador de superfícies i línies planes.

Interdisciplinarietat:

Està directament relacionat amb física.

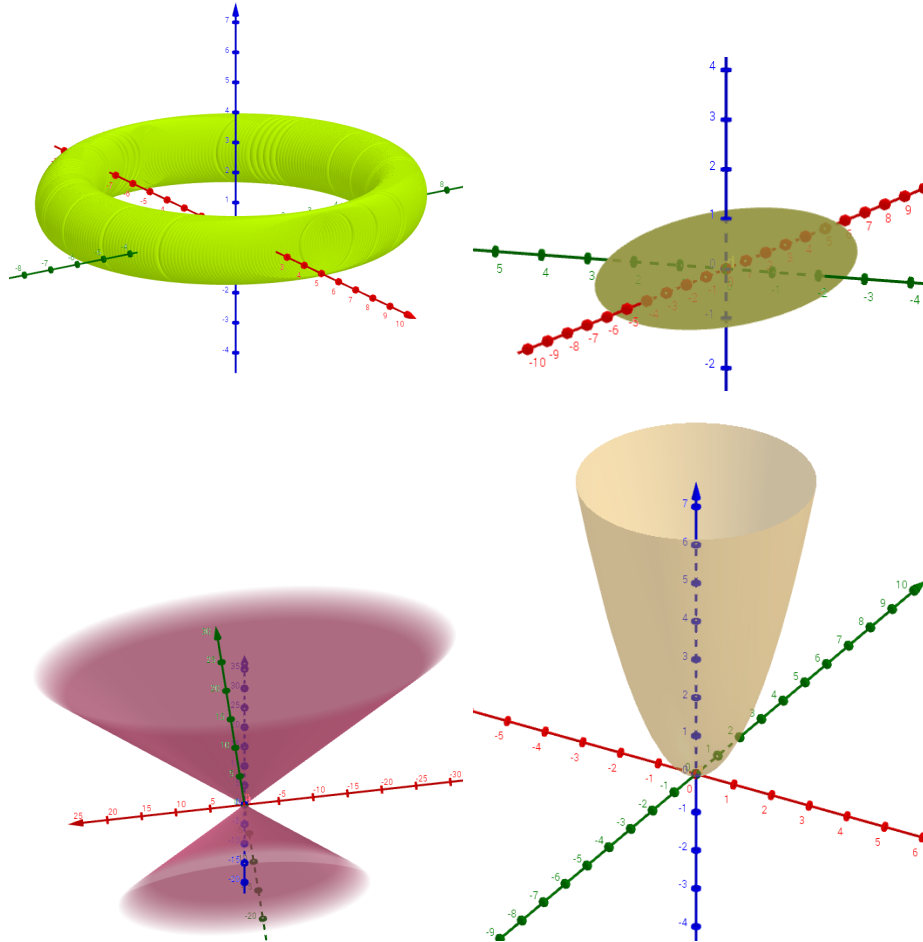
Què ens afegim?

Saber calcular l'àrea i el volum de superfícies de revolució, i també es treballa la construcció d'aquestes superfícies amb el GeoGebra.

FITXA:TEOREMA DE GULDIN

Construcció de superfícies amb GeoGebra

1. Com podem obtenir les següents superfícies de revolució? Com s'anomenen?



2. Aplica el teorema de Guldin per calcular l'àrea del tor de radi 3 i 5. Coincideix amb la fórmula?
3. Si volem obtenir cossos sòlids com ho podem fer?
4. Com podem calcular el volum d'aquests cossos?

SOLUCIÓ

1. Les superfícies de revolució que ens donen a la fitxa són respectivament, el tor, l'el·lipsoide, l'hiperboloide i el paraboloid.

Per l'obtenció d'aquestes superfícies hem de fer girar una circumferència, un el·lipse, una hipèrbola i una paràbola, respectivament.

2. Si el radi de la circumferència que gira és 3 cm , aleshores la seva longitud és $2 \times 3 \times \pi$, i si en girar-la el seu centre descriu una circumferència de radi 5 cm , per tant tenim que la distància que recorre el seu centre és $2 \times 5 \times \pi$.

Aplicant el teorema de Guldin tenim que l'àrea d'una superfície tòrica de radi 3 cm i 5 cm és

$$A = (2 \times 3 \times \pi) \times (2 \times 5 \times \pi) \text{cm}^2$$

3. Si volem obtenir cossos sòlids hem de fer girar superfícies en lloc de corbes.
4. Per calcular el volum d'aquests cossos de revolució, hem de fer el producte de l'àrea d'aquestes superfícies per la longitud de la circumferència descrita pel seu centre de gravetat.

4.8 CÒNIQUES AMB LA DISTÀNCIA DEL TAXISTA

Descripció:

Amb aquesta activitat responem a la pregunta que hom pot fer quant vol desplaçar d'un lloc a un altre, quin és el recorregut mínim que hem de fer per arribar a la nostra destinació?

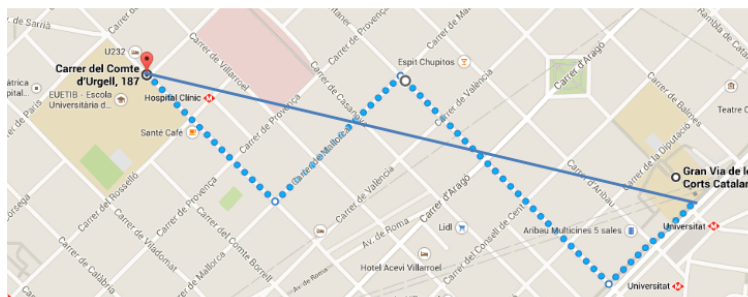
Objectius:

Conèixer distàncies no euclidianes mitjançant la geometria del taxista, i veure com són les còniques en aquesta distància.

Aspectes didàctics i metodològics:

En primer lloc introduïm l'alumne en el context que ens interessa, plantejant-li diverses preguntes, com per exemple quin és el mínim recorregut que podem fer, si volem anar caminant des de la facultat de matemàtiques de la UB a l'Escola Universitària d'Enginyeria Tècnica Industrial de Barcelona?

Després introduïrem la distància del taxi, donant li un mapa i dos punts marcats sobre el mapa quadriculada.



Recursos emprats:

Una superfície quadriculada i xinxetes per anar-hi marcant posicions.

Connexions internes:

Ens relaciona la combinatòria amb la geometria.

Què ens afegeix?

Ens dona conèixer l'existència d'altres distàncies diferents de les habituals, i a més ens relaciona la geometria amb la combinatòria, que és una altre àrea de matemàtiques.

SOLUCIÓ

1. Sigui m les quadrícules que caminen horitzontalment, i n les que caminen verticalment, aleshores el nombre de camins mímins és:

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{(m)!(n)!}.$$

Si $n = m$, aleshores obtenim la següent fòrmula:

$$\binom{m}{m} = \frac{(2m)!}{(n)!^2}.$$

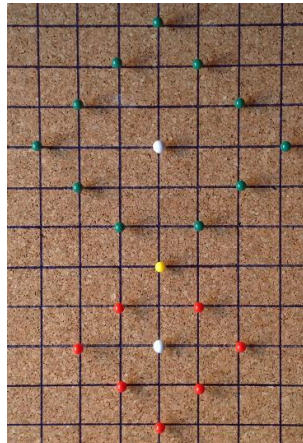
Ampliació: Tenim que la distància de Minkowski, es descriu com:

$$d_m(A, B) = (\sum_{k=1}^n |a_i - b_i|)^{\frac{1}{m}}.$$

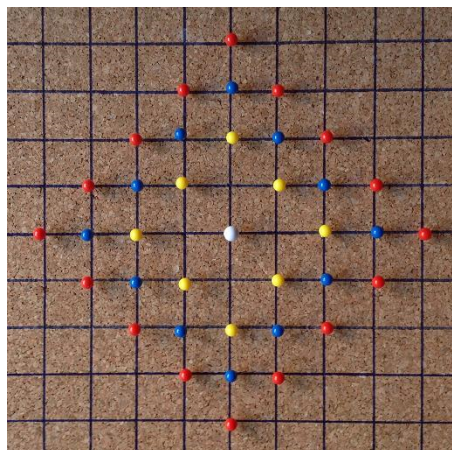
On $A=(a_1, \dots, a_n)$, i n la dimensió del espai on treballem.

En el cas $m=1$, obtenim la distància del taxista.

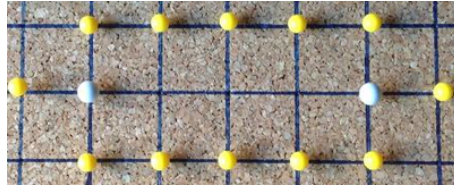
2. Les circumferències tangents poden tenir més d'un punt de contacte, tal com es pot veure en les imatges següents, si desplaceu les circumferències es poden tocar en més d'un punt.



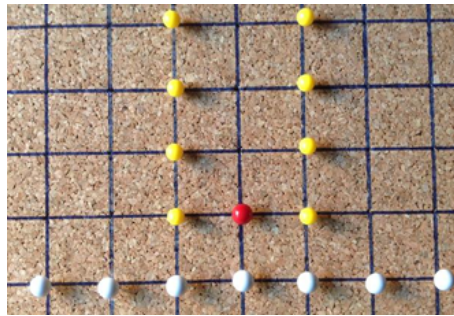
Exemple de les circumferències:



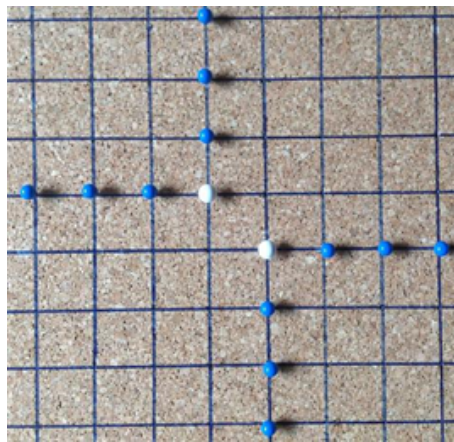
Exemple dels el·lipses:



Exemple de les paràboles:



Exemple de les hipèrboles:



4.9 TRIANGLE DE REULEAUX

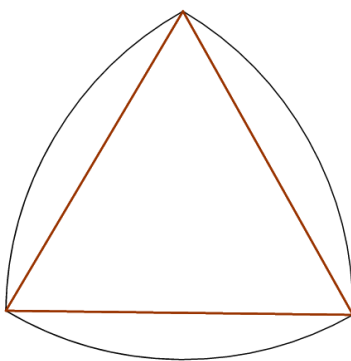
Descripció:

Si ens fixem en les tapes dels embornals, la majoria són circulars perquè si no ho fos podrien caure dins del mateix embornal.

Per exemple, si la tapa fos quadrada, en girarla aquesta podria caure dins del forat. Això no passa amb les tapes circulars.

Existeix alguna altra figura que pugui complir aquest objectiu?

Imatge:



Objectius:

Amb aquesta activitat mencionarem l'amplitud d'una figura, veurem les figures que tenen amplitud constant i estudiarem algunes propietats del triangle de Reuleaux.

Aspectes didàctics i metodològics:

En primer lloc mostrarem recipients amb tapes que tenen forma triangular, quadrada, rectangular i circular, i experimentem que passa si girem les tapes? Una vegada observada la propietat que té el cercle, ens preguntem que és el que fa que el cercle no caigui? hi ha altres formes que tenen la mateixa propietat?

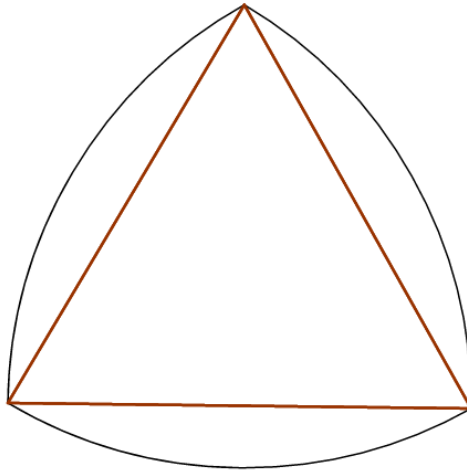
Recursos emprats:

Recipients de diferents formes, el programari GeoGebra, regla i compàs.

Què ens afegim?

Coneixer l'amplitud d'una superfície, el triangle de Reuleaux i les seves propietats.

FITXA: Triangle Reuleaux



1. Quina relació hi ha entre les còniques i el triangle de reuleaux?
2. Dibuixa un triangle de reuleaux amb regla i compàs. Quant val l'amplitud d'aquest triangle?
3. Calcula el perímetre d'aquest triangle en funció del costat del triangle equilàter.

SOLUCIÓ

1. La relació que hi ha entre les còniques i el triangle de reuleaux, és que els vèrtex d'aquest últim són punts d'intersecció de dues circumferències amb centres els altres dos vèrtexs.
2. Per dibuixar el triangle de reuleaux, dibuixem un segment de vertex A i B. Amb el compàs fem centre en A i dibuixem una circumferència que passa per B . Repetim el procediment, agafant ara com a centre el punt B i fem que la circumferència passi per A.
Aleshores el punt d'intersecció C i els punts A i B són els tres vèrtexs del triangle de Reuleaux.
L'amplitud d'aquest triangle és igual a la longitud del segment AB.
3. Tenim que el radi que forma cada arc té la mateixa longitud que el costat del triangle equilàter, com que els anlges d'un triangle equilàter són iguals i mesuren 60 graus, aleshores la longitud de cada costat del triangle de Reuleaux és:

$$L = \frac{2\pi R}{6}$$

On R és el radi del arc.

Per tant el perímetre és:

$$P = 3L = \pi L$$

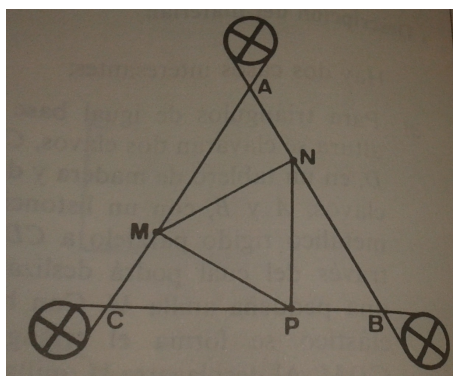
4.10 VARIACIÓ D'ÀREA I PERÍMETRE

Primerament, m'agradaria esmentar que com a referència a aquesta activitat, vaig fer servir el llibre *Materiales para construir la geometria* [7] de Claudi Alsina, Carme Burgués i Josep M^a Fortuny.

Descripció:

Formarem un triangle equilàter ABC amb un cordill tens, els vèrtexs del qual són rodes que giren. A l'interior del triangle ABC formarem un altre MNP que també ha de ser equilàter. Tal com mostra la imatge següent.

Imatge:



Objectius:

Estudiar els triangles, experimentar el canvi d'àrees i perímetres d'aquests i introduir el càlcul d'àrea mitjançant integrals.

Aspectes didàctics i metodològics:

En primer lloc mostrarem el materials als alumnes perquè experimenten el que passa en girar una de les rodes del triangle exterior.

Després els hi demanarem que ho facin amb el GeoGebra, i al final els hi donarem la fitxa de treball que han de respondre.

Recursos emprats:

El material construït, i el programari del GeoGebra.

Connexions internes:

Ens relaciona integrals amb geometria.

Què ens afegim?

Ens defineix el càlcul d'àrea mitjançant la integral definida.

FITXA: Triangle Reuleaux

Instruccions per a la construcció amb el GeoGebra.

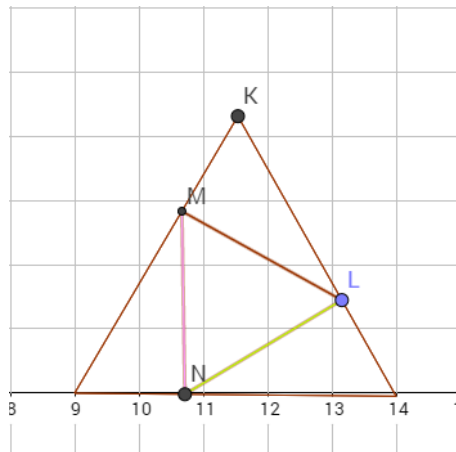
1. Amb l'eina de polígon regular construïm un triangle equilàter IJK.
2. Agafem un punt sobre un costat d'aquest triangle fent servir l'eina *punt en un objecte*.
3. Calculem la distància entre aquest punt i el vèrtex més proper, després per cada vèrtex fent centre en ell i dibuixem una circumferència de radi la distància calculada abans.
4. Marquem els punts d'intersecció de la circumferència amb els costats del triangle.

Nota: No pot haver dos punts sobre el mateix costat.

5. Una vegada tenim els 3 punts d'intersecció L, M i N, els unim formant un triangle equilàter.

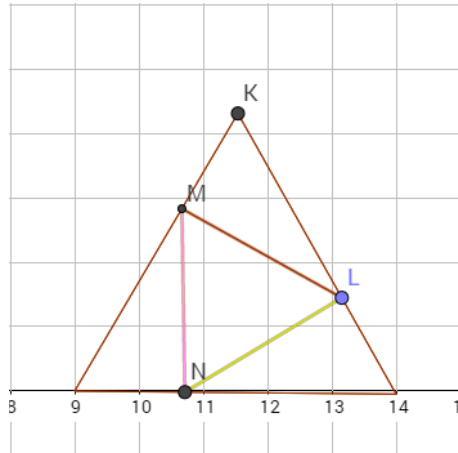
Ara experimentem el que passa en moure el punt L (el primer punt que vam agafar sobre un costat del triangle gran).

Nota: En aquest cas no tenim rodes per girar, sinó que movem el punt L.

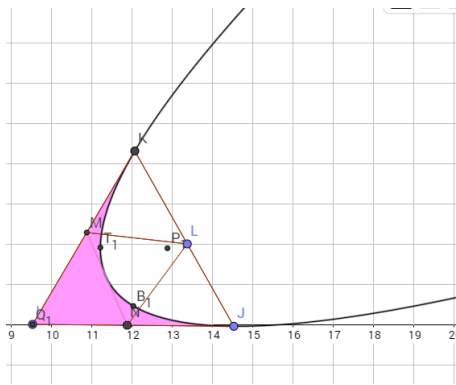


1. Com són les corbes que ens generen els costats del triangle interior?
2. És la figura que ens genera un triangle de Reuleaux? Justifica la resposta.
3. Com podem calcular l'àrea de la figura generada?

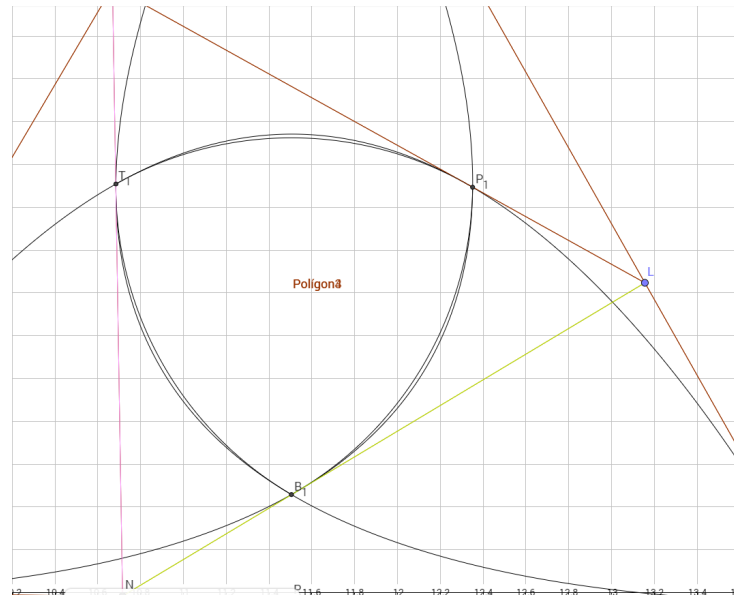
SOLUCIÓ



1. Les corbes que ens generen els costats del triangle interior LMN són les paràboles, com podem veure en la imatge següent.



2. La figura que ens genera s'assembla al triangle de reuleaux però no ho és. Per comprovar-ho primer hem de trobar els vèrtex d'aquesta i dibuixar el triangle de reuleaux partint d'aquests vèrtex. Amb el GeoGebra es pot veure que les figures no són iguals, tal i com ens mostra la imatge següent.



3. Per calcular l'àrea aplicarem la definició d'integral definida. Per tant primer hem de trobar l'equació de les corbes que ens limiten la regió que volem calcular la seva àrea. I això ho podem trobar en la finestra algebraica del GeoGebra, i també trobem els punts d'intersecció d'aquestes.

5 Conclusions

A nivel de conclusions del treball realitzat durant el TFG m'agradaria destacar diferents aspectes.

Gràcies a aquest treball he pogut ampliar els coneixements de geometria treballats en el grau, amb un enfocament més experimental emprant materials manipulatius i TAC. Això amplia molt les possibilitats per treballar amb els alumnes a l'aula.

El bloc de geometria és molt flexible pel que fa a l'ús del material didàctic, cosa que no es té en compte a l'hora de treballar-la a l'aula, i això queda reflectit en el poc ús tant de GeoGebra com dels materials manipulatius.

Dels documents consultats i de les entrevistes realitzades, podem concloure que a causa de la gran dificultat que tenen els alumnes de secundària en l'aprenentatge de geometria, el nivell amb el qual arriben al Batxillerat és baix.

Cal remarcar també que a més d'aquestes dificultats que porten els alumnes, hi han d'altres associades a la formació del professorat, ja que la majoria ensenyen els alumnes amb l'objectiu de què aprenguin l'essencial per aprovar els exàmens de Batxillerat i selectivitat, fent un enfocament que a vegades és massa mecànic i superficial, cosa que afecta la capacitat d'abstracció que tenen els alumnes.

També notem un desequilibri tant en el temps que es dedica al bloc de geometria en comparació amb la resta de blocs, com en el tipus d'activitats, on la gran part són teòrics, gairebé no hi ha activitats experimentals, tot i que són un instrument molt potent que ens pot ajudar a relacionar els conceptes matemàtics amb la forma física.

Així que per a un millor aprenentatge de la geometria, és necessari un continu aprenentatge del professorat, ja que si els professors són conscients de les oportunitats que ens ofereixen els continguts geomètrics, i ho tenen en compte a l'hora de plantejar activitats la forma d'ensenyar la geometria canviarà.

Seria interessant enriquir les propostes que fan els llibres de text amb activitats creades pel professorat que donin sentit als continguts treballats.

Les propostes centrades en el treball amb les còniques només prenen ser un exemple de les possibilitats que ens poden oferir els diferents continguts de Batxillerat si es complementen amb aquesta tipus d'activitats.

Finalment, i més a nivel personal, després d'haver dut a terme aquets treball Final de Grau es confirma la meva decisió de dedicar-me a la docència a secundària.

Referències

- [1] Alsina, Claudi: *Invitación a la didáctica de la geometría*, Madrid : Síntesis, cop. 1987.
- [2] Castelnuovo, E.; Barra, M. *Matematica nella realtà*, Torino: Editori Borighieri, 1976
- [3] Castelnuovo, E. *La Matemàtica La Geometria*, Barcelona: Ketres Editora S.A., 1981. p. 178-186. ISBN: 84-85256-23-9
- [4] Markushévic, A. *Lecciones populares de matemáticas. Curvas maravillosas*, Moscú: Editorial Mir, 1977, p. 7-34.
- [5] Gómez, J. *Cuando las rectas se vuelven curvas. Las geometrías no euclídeas*, Capítol 1. Un viaje en taxi. Navarra: RBA Coleccionables S.A., 2011. ISBN: 978-84-473-6626-2
- [6] Puig Adam, Pedro, *Curso de geometría métrica / por Pedro Puig Adam*, Madrid : Euler, 1986, 16a ed
- [7] Claudi Alsina, Carme Burgués i Josep M^a Fortuny. “*Materiales para construir la geometria*” Madrid : Síntesis, DL 1988 Col·lecció: Matemáticas, cultura y aprendizaje ; 11
- [8] Generalitat de Catalunya. *Quaderns d'avaluació. 34* [29 de juny 2017]
http://csda.gencat.cat/web/.content/home/consell_superior_d_avalua/pdf_i_altres/static_file/quaderns34.pdf
- [9] Anton Aubanell i Pou. Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. [29 de juny 2017]
<http://www.raco.cat/index.php/QuadernsAvaluacio/article/viewFile/293080/381592>
- [10] Currículum Batxillerat Decret 142/2008 DOGC núm. 5183. [29 de juny 2017]
<http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0082/c5fe6a2e-9a69-4acc-b723-c5d4fe75e7a0/matematiques.pdf>
- [11] Currículum educació secundària obligatòria Àmbit matemàtic (matemàtiques) Decret 187/2015 DOGC núm. 6945-28.8.2015 26 [29 de juny 2017]
<http://www.xtec.cat/monografics/documents/curriculum/secundaria/annex4.pdf>
- [12] Anàlisi dels resultats en geometria de cinc proves d'avaluació de competència matemàtica [29 de juny 2017]
http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0036/177077b6-579f-4d87-a4b9-736af982381c/analisi_resultats_geometria.pdf

- [13] Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria a l'Educació Secundària [29 de juny 2017]

https://aplicacions.ensenyament.gencat.cat/pls/soloas/pk_for_mod_ins.p_for_exhaustiu_activitatp_header=Detall%20d%27activitatpk_for_mod_ins.p_for_detall_activitatp_codi=9001300500%26p_curs=2016-2017%26p_es_inscr&p_codi9001300500&p_curs2016-2017&p_es_inscr

- [14] Tesi doctoral de Joaquim Costa Llobet *Geometria analítica a Batrillerat: un enfocament didàctic contextualitzats amb eines TIC* [29 de juny 2017]

<http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4722/jcl1de1.pdf;jsessionid=C945036A684CCECBD244C8F3F135E4B7sequence=1>

- [15] Aplicació de Recursos al Currículum [29 de juny 2017]

<http://apliense.xtec.cat/arc/>