Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball de final de grau

ÍNDEXS DE PODER I EL CREIXEMENT DE LA ULTRADRETA A EUROPA

Autora: Maria Carceller Pardina

Director: Dr. Josep Vives i Dr. David Márquez

Realitzat a: Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de gener de 2024

Abstract

We are introducing ourselves to the field of simple cooperative games, where the main purpose of players stops being their competitive strategy and becomes a study of all their possible alliances and how the consequent benefit will be shared amongst the participants. Politics is one of the main applications of this field, where coalition formation and the subsequent power distribution are analyzed. Power indices will be introduced for this purpose.

When we apply it to politics, we will restrict players' cooperation by using graphs. Not all parties are willing to form an alliance together, so we will modify the magnitude of their power with incompatibility graphs. This will allow us to find more realistic values and be able to study real situations with as much precision as we can.

The theory will be used to study how far-right parties' power indices have changed for a sample of European countries. We want to judge rationally and empirically if these parties are really growing in our society and how impactful that could be.

Resum

Ens introduïm al camp dels jocs cooperatius simples, on l'objectiu dels jugadors deixa de ser l'estratègia competitiva i es converteix en un estudi de les seves possibles aliances i el repartiment del benefici que se n'obté com a conseqüència. Una de les grans aplicacions d'aquest camp és la política, on s'analitza la formació de coalicions i la distribució de poder subseqüent. S'introduiran els índexs de poder per a fer-ho.

Aplicant-ho al camp de la política, restringirem la cooperació dels jugadors mitjançant l'ús de grafs. No tots els partits estan disposats a pactar entre ells, per tant, modificarem la magnitud del seu poder amb els grafs d'incompatibilitats. Això ens permetrà trobar valors més realistes i poder estudiar situacions reals amb la màxima precisió.

Aquesta teoria serà usada per a estudiar com han canviat els índexs de poder dels partits d'ultradreta d'una mostra de països europeus. Volem poder jutjar racionalment i empíricament si realment aquests partits estan a l'alça a la nostra societat i quin impacte hi poden tenir.

2020 Mathematics Subject Classification. 91

Agraïments

M'agradaria agrair l'ajuda a tanta gent que ha col·laborat a fer que això fos possible.

Als meus professors, el Josep i el David, per guiar-me en tot moment i sempre tenir les respostes que necessitava. Us heu adaptat a les meves idees "poc convencionals" i m'heu donat tot el suport per desenvolupar-les. Crec que mai m'havia trobat amb ningú que em contestés tan de pressa els correus, i no sabeu com us ho agraeixo. Vaig tenir bona vista triant tutors.

Al Víctor i el Jaume, que m'han guiat en els complicats camins de la política i m'han ajudat a entendre que res és blanc o negre.

A l'Edu, perquè tens les millors idees i em contagies la teva creativitat meravellosa. Aquest treball no hauria existit sense tu.

A la Paula, que ha sigut una gran companya d'estudi inclòs quan més insegura em sentia.

A l'Amadeu, per ser sempre un referent i explicar-me un altre cop com funcionen els ordinadors. Un home amb una paciència infinita.

A l'Antonio i el Lander, perquè m'han fet costat (i el dinar a vegades) i m'han ensenyat que la programació potser no és taaaan horrorosa.

A l'Alícia, per ser sempre un pilar, tenir sempre les respostes que necessito i inspirar-me a treballar tant com fa ella. Qui t'havia de dir, el primer dia que em vas veure, que et citaria pel nom al TFG?

A la família i els amics. No us puc citar a tots pel nom perquè no acabaria mai. Sense vosaltres no hauria arribat fins aquí, 6 anys després de començar. Encara estaria fent aritmètica. Sou el suport que em permet créixer. Gràcies per gaudir del camí al meu costat.

To my fellow nominees, the team behind this project and the audiences. To the Academy. Thank you.

Índex

1 Introducció

La teoria de jocs és la teoria matemàtica que regeix les situacions on s'han de prendre decisions interactives. Aquestes situacions es caracteritzen per un seguit d'elements:

- un grup d'agents
- cada agent ha de prendre una decisió
- es dona un resultat específic depenent de les decisions que prenguin aquests agents
- cada agent té unes preferències específiques sobre aquests resultats

L'objectiu de la teoria de jocs és preveure com jugadors racionals es comportaran en cada situació. Suposem que saben el que volen, i que el seu principal objectiu és aconseguir-ho.

La teoria de jocs té dues branques: els jocs cooperatius i els no cooperatius. La principal diferència és la presència d'acords vinculants en els jocs cooperatius. La comunicació sempre està permesa en la presa de decisions, però només en aquests es pot arribar a acords que obliguin els jugadors a jugar d'una manera determinada. Això obre un nou camp d'investigació on es tracten conceptes com les coalicions i les assignacions corresponents de beneficis.

Dins d'aquest camp apareixen els índexs de poder, mesures del poder que té un agent per canviar els resultats en un problema de votació.

L'objectiu principal d'aquest treball és utilitzar aquesta teoria per entendre el panorama polític actual. Ens qüestionem una afirmació que es queda al subconscient de qualsevol ciutadà que escolti un debat polític dels últims anys: s'apropa la ultradreta, i l'hem de frenar. És l'argument que ha fet servir, sense anar més lluny, Pedro Sánchez per demanar el suport de Junts a la seva investidura: si no hi ha pacte, es repeteixen les eleccions i puja el risc d'una coalició amb majoria entre PP i Vox. S'ha establert un clima de crispació a la societat, que observa el creixement desenfrenat de la ultradreta als parlaments d'Europa. El que volem estudiar aquí és si realment aquest auge de vots es tradueix també en un augment del seu poder polític. És a dir, ha augmentat realment el poder dels partits d'ultradreta? La principal motivació per triar aquest tema és veure si matemàticament podem contrastar el grau de veracitat d'aquest missatge que s'està difonent, sobretot des dels partits d'esquerres, i discernir entre dues possibilitats: que realment estiguem vivint un auge del poder de l'extrema dreta o que sigui una estratègia electoral.

Aquest treball es dividirà en dues parts. La primera serà teòrica, on estudiarem la teoria de jocs cooperatius aplicable a la política i la inclusió dels grafs corresponents. I, en segon lloc, farem un estudi de diferents parlaments i com els partits d'ultradreta han canviat les seves posicions de poder en els últims quatre anys.

2 Fonaments de la Teoria de Jocs

Aquest capítol està basat en la referència [8].

Definició 2.1. *Un joc d'estratègia de n jugadors, amb un conjunt de jugadors N, on $|N| = n$, és una parella $G := (A, u)$ que té els següents elements:*

Conjunt d'estratègies: *Per cada $i \in N$, A_i és el conjunt d'estratègies no nul del jugador i i $A := \prod_{i=1}^{n} A_i$ és el conjunt de perfils d'estratègies.*

Funcions de pagament: *Per cada $i \in N, u_i : A \to \mathbb{R}$ és la funció de pagaments del jugador i i $u := (u_1, u_2, ..., u_n)$; on u_i assigna, a cada conjunt d'estratègies $a \in A$, el pagament que el jugador i rep si a es juga.*

En un joc no cooperatiu, cada jugador $i \in N$ escull, simultàniament i independentment, una estratègia $a_i \in A_i$, i obté un pagament $u_i(a)$. En aquests casos, no poden formar cap aliança vinculant. En jocs cooperatius el procés és diferent, com veurem més endavant.

Definició 2.2. *En una situació de joc d'estratègia, tenim els següents elements:*

- *A_i amb $i \in N$, els conjunts d'estratègies dels jugadors.*
- *R, el conjunt de possibles resultats.*
- *Una funció $f : A \to R$ que assigna, a cada perfil estratègic a, el seu resultat corresponent.*
- *$\succcurlyeq_i$, amb $i \in N$, les preferències dels jugadors sobre els resultats a R.*
- *U_i, amb $i \in N$, les funcions d'utilitat dels jugadors, que representen les seves preferències a R.*

Per veure com aquests elements interactuen entre ells, proposem l'exemple probablement més famós de la teoria de jocs:

Exemple 2.3. El dilema dels presos

Tenim dos criminals acusats de dos delictes, un greu i un lleu. La policia té evidència per culpar-los pel delicte lleu, però no en té prou per a l'altre. Tanquen als dos criminals a dues cel·les separades i els interroguen, tenint així la possibilitat de confessar. Hi ha diverses opcions. Si ambdós confessen, tots dos passaran 6 anys a presó. Si només confessa un, i accepta fer de testimoni en contra de l'altre, el traïdor sortirà lliure i l'altre serà empresonat durant 9 anys. Si cap dels dos confessa, només seran imputats pel crim lleu i estaran 1 any a presó cadascú.
Per tant, ens trobem en un joc estratègic (A, u) tal que $A_1 = A_2 = \{\text{callar, confessar}\}$. Veiem també les funcions de pagament de cada criminal:

Jugador 1: $u_1(callar, callar) = -1, u_1(callar, confessar) = -9, u_1(confessar, callar) = 0, u_1(confessar, confessar) = -6$

Jugador 2: $u_2(callar, callar) = -1, u_2(callar, confessar) = 0, u_2(confessar, callar) = -9, u_2(confessar, confessar) = -6$

Veurem aquesta informació en una taula:

1|2	Callar	Confessar
Callar	$-1, -1$	$-9, 0$
Confessar	$0, -9$	$-6, -6$

Continuem amb un altre concepte crucial de la teoria de jocs. Donat un joc d'estratègia $G = (A, u)$, i un perfil estratègic $a \in A$, denotarem el perfil $(a_1, ..., a_{i-1}, \hat{a}_i, a_{i-1}, ..., a_n)$ per $(a_{-i}, \hat{a}_i)$.

Definició 2.4. *Sigui $G = (A, u)$ un joc d'estratègia. L'equilibri de Nash de G és un perfil estratègic $a^* \in A$ tal que, per cada $i \in N$ i cada $\hat{a}_i \in A_i$, $u_i(a^*) \geq u_i(a^*_{-i}, \hat{a}_i)$*

Exemple 2.5. Tornant a l'exemple del dilema dels presos, seguim el següent raonament per trobar l'equilibri de Nash. Si juguem com a jugador 1, ens plantegem què faríem partint de les estratègies que té el jugador 2. És a dir, si sabem que el jugador 2 callarà, ens surt més a compte confessar:

$$u_1(callar, callar) = -1 < u_1(confessar, callar) = 0.$$

Si el jugador 2 confessa, ens surt més a compte confessar:

$$u_1(callar, confessar) = -9 < u_1(confessar, confessar) = -6.$$

I amb el jugador 2, si repetim el raonament ara tenint en compte com creiem que jugarà 1, obtenim el mateix resultat. Per tant, l'únic equilibri de Nash que trobem al dilema dels presos és

$$a^* = (confessar, confessar)$$

i, per tant, el comportament més lògic que tindran els criminals en aquest joc no cooperatiu és confessar ambdós, acabant 6 anys a la presó.

3 Jocs cooperatius

Aquest capítol està basat en les referències [8] i [11].

Fins ara hem estat tractant amb jocs no cooperatius, on els jugadors no poden formar acords vinculants entre ells. Però ara això canvia, ja que els jugadors es poden comprometre a jugar de certa manera. Ara, el que ens interessa estudiar ja no és el que decidiran, sinó com es repartiran els beneficis segons les decisions que prenguin, ja que el problema que sorgia en pensar que els altres jugadors voldran canviar d'estratègia per maximitzar el seu benefici desapareix.

Per això s'introdueixen nous conceptes clau, com les coalicions: subgrups de jugadors que pacten. Definim $S \subset N$, on S és aquesta coalició i $|S|$ és el nombre de jugadors que hi ha a dins. També estudiarem els resultats que pot obtenir cada coalició i el repartiment de beneficis que es farà entre els jugadors, depenent de molts factors.
Els jocs cooperatius poden ser *jocs d'utilitat no transferible* o *jocs d'utilitat transferible.* Els primers són jocs on la utilitat que rep cada coalició no es pot transferir entre els seus membres. En canvi, quan parlem de jocs d'utilitat transferible, que són els que farem servir, parlem de jocs on la utilitat que genera una coalició guanyadora es pot repartir i compartir de la manera que vulguin els jugadors, sense restriccions.

Definim, en primer lloc, el *conjunt de les parts de N*, el conjunt de tots els subconjunts de N que denotem per 2^N.

Definició 3.1. *Un joc d'utilitat transferible (TU) és una parella (N,v), on N és el conjunt de jugadors, i* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ *és la funció característica del joc. Per convenció,* $v(\varnothing) := 0$. *Interpretem v(S), el valor de la coalició S, com el benefici que genera S.*

Definició 3.2. *Sigui* $(N, v) \in G^N$*, on* G^N *és la classe de jocs TU amb n jugadors, i sigui* $S \subset N$*. La restricció de (N,v) a la coalició S és el joc TU* (S, v_s)*, on, per cada* $T \subset S$*,* $v_s(T) := v(T)$*.*

Exemple 3.3. Per veure aquests conceptes, farem servir un exemple molt senzill. Hi ha 3 jugadors que volen vendre un parell de guants: el jugador 1 té el dret i els jugadors 2 i 3 tenen un guant esquerre cadascun. És clar que per vendre'ls s'han de combinar els dos, de manera que les úniques coalicions que funcionen són 1 i 2, 1 i 3, i tots. Per tant, podem modelar la situació com un joc TU (N, v) tal que $N = \{1, 2, 3\}$ i

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$$

ja que un jugador sol o dos amb dos guants esquerres no poden fer la venda. Ara,

$$v(12) = v(13) = v(123) = 1$$

ja que aquestes combinacions sí que poden fer la venda, que té un preu d'1 €.

3.1 Jocs Simples

Introduïm un nou tipus de joc, però abans emprem una definició nova:

Definició 3.4. *Un joc TU és monotònic si, per cada parella* $S, T \subset N$ *amb* $S \subset T$*, tenim que* $v(S) \leq v(T)$*.*

Definició 3.5. *Un joc TU $v \in G^N$ és un joc simple si és monotònic, per cada $S \subset N$, $v(S) \in \{0, 1\}$, i $v(N) = 1$. Anomenarem S^N als jocs simples que tenen n jugadors.*

Veurem ara alguns conceptes relacionats amb els jocs simples, que ens ajudaran després a caracteritzar les coalicions que volem estudiar:

Definició 3.6. *Una coalició és guanyadora si v(S)=1, perdedora si v(S)=0.*
Un conjunt de coalicions guanyadores és un conjunt W tal que

$$W := \{S \subset N : v(S) = 1\},$$

dins del qual hi ha les coalicions guanyadores S.
Definim un conjunt de coalicions guanyadores minimal com

$$W^m := \{S \in W \ : \text{per cada } T \in W, \text{ si } T \subset S, \text{ aleshores } T = S\}.$$

Definició 3.7. *Sigui $v \in S^N$. Un jugador $i \in N$ és un jugador amb veto a v si $v(N \backslash \{i\}) = 0$.*

Definició 3.8. *Un joc TU $v \in G^N$ és superadditiu si, per cada parella $S, T \subset N$, amb $S \cap T = \varnothing$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.*

4 Índexs de poder

En aquesta secció ens basem en les referències [1], [5], [6], [7], [8], [10] i [20].

Els índexs de poder són mesures quantitatives del poder o la influència que té un jugador concret en una coalició. Es pot interpretar com la capacitat a priori que tenen els jugadors de canviar el resultat, o com el poder de negociació que té un partit. Quan parlem de jocs simples, els índexs de poder són les regles d'assignació, i ens subministren les condicions inicials pel regateig coalicional.
Per exemple, si tenim un conjunt de N jugadors, i hi ha una coalició S tal que $v(S) = 1$, sabem que aquest grup de jugadors té suficient poder per canviar el resultat. Per exemple, si s'està votant a favor d'una llei, si la coalició S hi està a favor, s'aprovarà.

Definició 4.1. *Una regla d'assignació per un joc TU de n jugadors és un mapa* $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$.

Aquesta regla ens defineix com es repartirà el valor de la coalició entre els jugadors que hi participen. És a dir, com compartiran els beneficis o costos que generi el joc.

Definició 4.2. *Sigui* $v \in G^N$,

1. *Un jugador* $i \in N$ *és un jugador nul si, per cada* $S \subset N, v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.
2. *Dos jugadors i i j son simètrics si, per cada coalició* $S \subset N \backslash \{i, j\}$, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Veiem ara que dins dels jocs simples, hi ha una nova categoria: els jocs de majoria ponderada. Són útils quan tenim diversos jugadors amb influències diferents, és a dir, que el vot d'un val més que el d'un altre. En política això passa constantment, ja que un partit amb més vots tindrà més pes en una votació que un altre més minoritari.

Definició 4.3. *Un joc simple* $v \in S^N$ *és un joc de majoria ponderada si hi ha una quota* $q > 0$ *i un sistema de pesos no negatius* $p_1, p_2, ..., p_n$ *tals que*

$$v(S) = 1 \text{ si i només si } p(S) := \sum_{i \in S} p_i \geq q, \text{ és a dir,}$$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(S) \geq q \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Si un joc admet aquesta representació, l'escriurem com $\Gamma = [q; p_1, ..., p_n]$.

Posem un exemple en el marc de la política:

Exemple 4.4. Tenim un parlament amb 15 escons, els quals estan repartits entre quatre partits. El primer té 6 membres escollits, el segon 4, el tercer 4 i el quart 1. El pes de cada partit està representat pel nombre d'escons que tenen. En aquest cas, la quota és $q = 8$, els vots necessaris per tenir majoria. Com que els partits tenen un pes decreixent, també tindran una importància decreixent a l'hora de formar coalicions.
En aquest cas,

$$W = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}.$$

Però entre aquestes coalicions n'hi ha que són massa grans i que tenen membres que no són necessaris. Per tant, ho restringim a coalicions minimals:

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}.$$

També veiem que el quart partit és un jugador nul, ja que no té prou poder per canviar cap resultat. En cap cas el fet que s'afegeixi o es retiri d'una coalició n'afecta la capacitat d'arribar a la quota:

$$\forall S \subset W^m, v(S \cup \{4\}) - v(S) = 0.$$

Definim ara certes propietats que podem imposar a una regla d'assignació φ. Veiem quan les satisfà φ:

- **Eficiència (EFF)**: si per tot $v \in G^N$,

$$\textstyle\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N).$$

- **Jugador Nul (NPP)**: si per tot $v \in G^N$ i tot jugador nul $i \in N$,

$$\varphi_i(v) = 0.$$

- **Simetria (SYM)**: si per tot $v \in G^N$ i per cada parella de jugadors simètrics $i, j \in N$,

$$\varphi_i(v) = \varphi_j(v).$$

- **Additivitat (ADD)**: si per cada parell $v, w \in G^N$,

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w).$$

- **2-Eficiència (2-EFF)**: si per tot $v \in G^N$, i per cada parell de jugadors $i, j \in N$,

$$\varphi_i(v) + \varphi_j(v) = \varphi_p(v^{ij})$$

  on (N^{ij}, v^{ij}) és el joc derivat de *(N,v)* quan els jugadors i i j es fusionen en un nou jugador anomenat p. És a dir, $N^{ij} = (N \backslash \{i,j\}) \cup \{p\}$ i per tot $S \subseteq N^{ij}$,

$$v^{ij}(S) = \begin{cases} v(S) & \text{si } p \notin S \\ v((S \setminus p) \cup i \cup j) & \text{si } p \in S \end{cases}$$

L'eficiència és una propietat que s'encarrega de comprovar que el mètode de retribució usa tot el benefici disponible, de manera que cap part del benefici quedi sense repartir als membres de la coalició que l'ha obtingut. El valor total d'una coalició total $v(N)$ s'ha de repartir entre tots els jugadors.
El jugador nul estableix que els jugadors que no aporten res a cap coalició no haurien de rebre cap benefici, ja que no en generen.
La simetria ens diu que s'ha de donar la mateixa quantitat de benefici a dos jugadors que aportin una contribució marginal igual. Han de ser recompensats de la mateixa manera per una aportació simètrica.
L'additivitat és una propietat que ha sigut sovint criticada. Ens diu que el benefici de la coalició ha de ser igual a la suma dels integrants per separat.
La 2-Eficiència diu que la regla d'assignació és immune contra qualsevol fusió o separació artificial de jugadors.

4.1 El Valor de Shapley

El Valor de Shapley és proposat el 1953 per Lloyd Shapley, enfocat als jocs TU cooperatius amb n jugadors. Conjuntament amb Martin Shubik, estableixen el 1954 el valor de Shapley-Shubik, que té en consideració la classe dels jocs simples. Es converteix ràpidament en l'índex de poder més utilitzat i popular.

Definició 4.5. *El Valor de Shapley, Φ, es defineix, per cada $v \in G^N$ i cada $i \in N$, per*

$$\Phi_i(v) := \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Una manera alternativa de definir el Valor de Shapley seria la següent. Hem de considerar primer que $\Pi(N)$ és el conjunt de totes les permutacions dels elements de N, i, per cada $\pi \in \Pi(N)$, $P^\pi(i)$ és el conjunt dels predecessors de i segons l'ordre establert per π. Veiem doncs un element que ens ajudarà a trobar aquesta segona definició:

Definició 4.6. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU. Sigui $\pi \in \Pi(N)$. El vector de contribució marginal associat a π, $m^\pi(v) \in \mathbb{R}$, es defineix per cada $i \in N$ com a*

$$m_i^\pi(v) := v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)).$$

Per tant, el valor de Shapley es pot representar anàlogament com:

$$\Phi_i(v) := \tfrac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v).$$

Definició 4.7. *Dins de la classe G^N i donat $S \subset N$, el joc d'unanimitat per la coalició S, v^S, es defineix de la següent manera. Per cada $T \subset N$, $v^S(T) := 1$ si $S \subset T$ i $v^S(T) := 0$ quan no. És a dir, una coalició és guanyadora només si conté tots els jugadors de la coalició S.*

Teorema 4.8. *El Valor de Shapley és l'única regla d'assignació a G^N que satisfà EFF, NPP, SYM i ADD.*

Demostració. Φ satisfà tant NPP com ADD. També es pot veure que ja compleix les altres dues propietats, ja que qualsevol vector de contribució marginal és una assignació eficient i, per tant, tant EFF com SYM es poden derivar directament de la segona definició del valor de Shapley que hem donat.
Veiem ara la seva unicitat. Sigui φ una regla d'assignació que compleix les quatre propietats. Cada $v \in G^N$ es pot representar com el vector $\{v(S)\}_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \in \mathbb{R}^{2^n-1}$. Aleshores, G^N es pot identificar amb un espai vectorial de dimensió $2^n - 1$. Ara veurem que els jocs per unanimitat, definits com a $U(N) := \{w^S : S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}\}$ son la base d'aquest espai vectorial. Per a fer-ho, veurem que $U(N)$ és un conjunt de vectors independents. Sigui $\{\alpha_S\}_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \alpha_S w^S = 0$ i suposant que hi ha un $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ amb $\alpha_T \neq 0$. Aleshores, $0 = \sum_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \alpha_S w^S(T) = \alpha_T \neq 0$ i ens trobem en una contradicció.
Com que φ satisfà EFF, NPP i SYM, tenim que per cada $i \in N$ cada $\varnothing \neq S \subset N$, i cada $\alpha_S \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_i(\alpha_S w^S) = \begin{cases} \frac{\alpha_s}{|S|} & i \in S, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Finalment, si φ també satisfà ADD, φ està determinada únicament, perquè $U(N)$ és base de G^N.

$\square$

Veiem un exemple de com funcionen els càlculs del valor de Shapley en un cas molt senzill:

Exemple 4.9. Sigui v la funció característica:

$$
\begin{array}{lll}
v(\emptyset) = 0 & v(\{12\}) = 6 & v(\{123\}) = 10 \\
v(\{1\}) = 1 & v(\{13\}) = 6 & \\
v(\{2\}) = 2 & v(\{23\}) = 6 & \\
v(\{3\}) = 3 & &
\end{array}
$$

Per calcular el valor de Shapley fem servir la següent fórmula:

$$\Phi_i(v) := \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Jugador 1:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(v) &= \sum_{S \subset \{2,3\}} \frac{|S|!(3-|S|-1)!}{3!}(v(S \cup \{1\}) - v(S)) \\
&= \frac{1}{3}v(1) + \frac{1}{6}(v(12) - v(2)) + \frac{1}{6}(v(13) - v(3)) + \frac{1}{3}(v(123) - v(23)) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot (6-2) + \frac{1}{6} \cdot (6-3) + \frac{1}{3} \cdot (10-6) \\
&= \frac{17}{6} \approx 2,83
\end{aligned}
$$

Jugador 2:

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(v) &= \sum_{S \subset \{1,3\}} \frac{|S|!(3-|S|-1)!}{3!}(v(S \cup \{2\}) - v(S)) \\
&= \frac{1}{3}v(2) + \frac{1}{6}(v(12) - v(1)) + \frac{1}{6}(v(23) - v(3)) + \frac{1}{3}(v(123) - v(13)) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot (6-1) + \frac{1}{6} \cdot (6-3) + \frac{1}{3} \cdot (10-6) \\
&= \frac{20}{6} \approx 3,33
\end{aligned}
$$

Jugador 3:

$$\begin{aligned}
\Phi_3(v) &= \sum_{S\subset\{1,2\}} \frac{|S|!(3-|S|-1)!}{3!}(v(S\cup\{3\})-v(S)) \\
&= \frac{1}{3}v(3)+\frac{1}{6}(v(13)-v(1))+\frac{1}{6}(v(23)-v(2))+\frac{1}{3}(v(123)-v(12)) \\
&= \frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot(6-1)+\frac{1}{6}\cdot(6-2)+\frac{1}{3}\cdot(10-6) \\
&= \frac{23}{6} \approx 3,83
\end{aligned}$$

D'aquesta manera veiem que el vector de Shapley pels jugadors és:

$$Sh = (2.83, 3.33, 3.83)$$

El resultat té sentit, ja que les coalicions de dos jugadors valen totes el mateix, però el valor de cada jugador individual va en ordre creixent, i per tant també ho fa el seu valor de Shapley i el benefici que idealment haurien de rebre.

Una manera que tenim d'interpretar la fórmula que hem fet servir és la següent. La coalició total s'ha de formar dins d'una sala tancada. Seguint un ordre aleatori, hi van entrant els jugadors. Cada cop que algú hi entri, rebrà el valor que aporta a la coalició ja existent, és a dir, si la coalició S està dins la sala i entra el jugador i, el valor que rebrà serà $v(S\cup\{i\})-v(S)$. L'ordre d'entrada és totalment aleatori, amb les $n!$ opcions sent igual de probables.

Si restringim el Valor de Shapley als jocs simples, obtenim l'índex de Shapley-Shubik.

Definició 4.10. *Siguin $v\in S^N$ i $i\in N$. Una oscil·lació per un jugador i és la coalició $S\subset N\backslash\{i\}$ tal que $S\not\subseteq W$ i $S\cup\{i\}\in W$.*

Definim com a $\mu_i(v)$ el nombre d'oscil·lacions que té cada agent i, i amb $\bar{\mu}(v)$ la suma de les oscil·lacions de tots els jugadors.

Prèviament, havíem definit el valor de Shapley com a la mitjana ponderada de la contribució marginal de cada jugador a les coalicions. Ara, que hem restringit els jocs als simples, quan treballem amb l'índex de Shapley-Shubik ens fixem en les parelles de coalicions S i $S\cup\{i\}$ tals que S no és guanyadora però la segona sí. És a dir, si hi incloem el jugador i, passa a ser una coalició guanyadora i és una oscil·lació.
Les oscil·lacions són molt importants per aquest índex, ja que es podria definir com una mitjana ponderada de les oscil·lacions de cada jugador, tenint en compte que el pes d'aquestes és determinat per la seva respectiva mida.

Fent servir la terminologia de les oscil·lacions, podem redefinir el valor de Shapley com:

$$\varphi_i(v) = \tfrac{1}{n!}\sum_{S\subseteq N}\gamma_{s,n}\eta_i^s(v)$$

on $\gamma_{s,n}=s!(n-s-1)!$ i $\eta_i^s(v)$ denota el nombre d'oscil·lacions S que té el jugador i a v tal que $s=|S|$.

4.2 Índex de Banzhaf

L'any 1965, John F. Banzhaf discrepa amb Shapley, i opina que els pesos que dona a les coalicions depenent de la seva mida no són justes (vegeu [2]). La idea base del seu índex ja existia, i havia estat presentada per Penrose el 1946 (vegeu [17]), però no va atraure cap atenció. Per aquesta raó, també se'l coneix com l'índex de Banzhaf-Penrose. Es va tornar a introduir, però no se'n va presentar cap caracterització. No es va tenir completament definit fins que Owen, el 1975, en va presentar les primeres expressions i Lehrer, el 1988 (vegeu [13]), en va proposar la primera caracterització. La idea subjacent de l'índex és que totes les oscil·lacions haurien de tenir el mateix pes i haurien de ser igual de rellevants. Per tant, crea l'Índex de Banzhaf brut, que es basa justament en el nombre d'oscil·lacions possibles per al jugador en concret i en com és de decisiva la seva participació en la votació.

Definició 4.11. *Sigui $v \in S^N$ i $i \in N$, l'Índex de Banzhaf brut és*

$$\beta_i(v) := \frac{\mu_i(v)}{\bar{\mu}(v)}.$$

Però hi ha una altra definició de l'índex que està més normalitzada. Definim un concepte abans per a veure-ho:

Definició 4.12. *Un jugador i és un pivot per S, on $S \subset N \backslash \{i\}$, quan S és una oscil·lació per aquest jugador i.*

Definició 4.13. *Sigui $v \in S^N$ i $i \in N$, l'Índex de Banzhaf es defineix com*

$$Bz_i(v) := \frac{\mu_i(v)}{2^{n-1}}.$$

Fent servir aquesta definició, veiem que $Bz_i(v)$ és la probabilitat que un jugador qualsevol i sigui un pivot quan escollim aleatòriament una coalició $S \subset N \backslash \{i\}$.

Per comparar-lo amb el valor de Shapley, podem fer servir una notació més semblant a la que hem emprat inicialment per aquest:

$$\beta_i(v) = 2^{1-n} \sum_{S \subseteq N} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Un dels avantatges que té l'índex de Banzhaf respecte al valor de Shapley és que es pot interpretar d'una manera més intuïtiva: correspon directament a la probabilitat que un model canviï quan hi canvia un jugador. Prèviament, hem comentat que el valor de Shapley es pot interpretar com l'entrada aleatòria de jugadors a la coalició i el còmput de com de sovint en canvia el resultat. En canvi, Banzhaf ens dona una interpretació molt més directa del canvi esperat al model.

És important veure quines propietats compleix l'índex.

Teorema 4.14. *L'índex de Banzhaf és l'única regla d'assignació a G^N que satisfà 2-EFF, NPP, SYM i ADD.*

Per la demostració, vegeu [13].

Com veiem, la principal discrepància entre el valor de Shapley i l'índex de Banzhaf és que el primer és eficient i el segon és 2-eficient, però comparteixen la resta de propietats.

Propietats	**Shapley**	**Banzhaf**
Eficiència	$\surd$	
Jugador Nul	$\surd$	$\surd$
Simetria	$\surd$	$\surd$
Additivitat	$\surd$	$\surd$
2-Eficiència		$\surd$

4.3 Valor Coalicional d'Owen

Definim un altre índex, que difereix una mica dels que hem vist abans. En aquest cas, escollim el valor de Shapley com a índex base. Però ara volem veure com la formació de coalicions altera la distribució inicial de poder que ens dona aquest índex.

El Valor Coalicional d'Owen (1977) s'adapta a la situació d'evolució constant d'una situació de negociacions. És dinàmic, i es va modificant segons es pacta per arribar a reflectir les fases finals de negociació a les que es pot trobar un òrgan de govern. És una mesura de la distribució de poder que s'ajusta a cada possible estructura de coalicions, i ens dona informació del valor que s'obté quan se'n forma una de tres maneres diferents: ens dona el valor que obté la coalició un cop es forma, com s'hauria de distribuir entre els seus integrants, i quin valor residual acaba pertocant a cada jugador que no formi part d'aquesta coalició. Per tant, és una molt bona mesura per veure la posició estratègica en la qual es troba cada partit abans de començar a negociar.

Per poder trobar aquests valors, el primer pas és definir quines coalicions es poden formar i si tenen sentit raonable. A part de les restriccions entre partits, que veurem més endavant, hi ha un altre factor important a l'hora de veure quines coalicions poden ser funcionals i quines no: ha de ser capaç de proporcionar una posició acceptable a tots els seus membres i els hi ha de poder donar estabilitat. Això succeeix quan els jugadors formen part de coalicions que optimitzen el seu valor coalicional. Aquí és quan l'anàlisi de la situació agafa un angle no cooperatiu. Els partits volen tenir el màxim poder possible, i això els farà escollir entre diverses coalicions amb l'objectiu individual de trobar aquella que els permeti tenir-lo. Si una coalició aconsegueix maximitzar-lo, aporta estabilitat, ja que els partits integrants no voldran canviar-se'n. És un concepte que es correspon amb l'equilibri fort de Nash en un joc no cooperatiu, ja que busquem que cap jugador tingui incentius per canviar d'acord.

4.4 Valor Solidari

Aquest valor va ser introduït el 1904 per Nowak i Radzik, i pretén satisfer un principi de solidaritat, ja que inclòs jugadors nuls reben potencials beneficis.

Recordem que el vector de contribució marginal $m(v) \in \mathbb{R}$, es defineix per cada $i \in N$ com a

$$m_i(v,S) := v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

i que un jugador nul té $m_i(v,S) = 0$.

Definició 4.15. *Sigui (N,v) un joc, per tot $S \subseteq N$,*

$$m^{av}(v,S) := \frac{1}{s} \sum_{i \in S} m_i(v,S)$$

on m^{av} és la mitjana de les contribucions marginals dels jugadors de la coalició S. El Valor Solidari del joc (N,v) és un vector de pagament $Sl(N,v) \in \mathbb{R}^N$ definit per

$$Sl_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N : i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} m^{av}(v,S)$$

Aquí, en lloc de fer servir la contribució marginal de cada jugador per calcular el valor, com fem amb el valor de Shapley, fem servir la mitjana de les contribucions marginals. Per això, jugadors amb menys aportació continuen rebent certs beneficis.

El que es busca amb aquest valor és que tots els participants d'una coalició tinguin cert nivell de poder. Pot ser que un jugador vulgui entrar en una coalició, però no pugui aportar escons suficients perquè es doni una oscil·lació o simplement ja sigui una coalició guanyadora minimal i la seva entrada no millori la situació en la qual es troben. Però a vegades, el seu valor va més enllà del nombre de vots que hagin rebut. Un jugador concret pot facilitar la comunicació perquè altres, que sí que són crucials per generar la coalició guanyadora, decideixin cooperar. També poden ser jugadors que tinguin un afecte especial de la població, i aportin simpatia ciutadana cap al conjunt format. Per aquestes raons, el valor solidari busca donar poder a tots els partits fent servir la mitjana de totes les seves contribucions marginals, ja que considera que si un partit forma part de la coalició és perquè d'una manera o altra hi aporta valor.

A l'hora de caracteritzar Sl correctament a G^N, van introduir una variant de l'axioma del jugador nul, ja que aquest no es complia. Recordem el concepte de jugador nul:
Un jugador $i \in N$ és un jugador nul si, per cada $S \subset N, v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.
Ja no interessa definir un jugador per la seva contribució marginal a la coalició, ja que hem vist que inclòs si és zero pot aportar altres factors imprescindibles i, per tant, ha de rebre cert poder. Fins ara, els jugadors nuls en rebien zero.

El concepte que ara ens interessa és el següent:

Definició 4.16. *Un jugador $i \in N$ és un jugador A-nul a (N,v) si $m^{av}(v,S) = 0$ per qualsevol coalició $S \subseteq N$ que contingui i.*

És a dir, totes les coalicions on participa el jugador A-nul tenen una contribució marginal mitjana nul·la, i per tant són coalicions on tots els jugadors tenen una contribució marginal igual a zero.

Finalment, el valor solidari satisfà el següent axioma:

Axioma del jugador A-nul: Per tot *(N,v)* i tot $i \in N$, si i és un jugador A-nul, aleshores $\varphi_i(N,v) = 0$.

5 Grafs

Per aquesta secció ens hem basat en les referències [1], [4], [9], [14], [15] i [20].

Fins ara hem estudiat jocs cooperatius on totes les coalicions són possibles. Però a vegades no tots els jugadors són compatibles. Introduïm el concepte dels grafs, per veure com aplicar aquestes aliances i enemistats entre jugadors al càlcul dels seus índexs de poder. Utilitzarem aquests conceptes per poder discutir l'estructura dels jocs de cooperació parcial i veure com els resultats d'aquests depenen de les aliances possibles.

Definició 5.1. *Un graf de comunicació de N és un conjunt de parelles sense ordenar de membres diferents de N. Ens referirem a aquestes parelles com a enllaços, i denotarem l'enllaç entre dos jugadors n i m com n:m. Els jugadors, n i m, són vèrtexs del graf. Podem denotar g=(N,E), on N és el conjunt de tots els vèrtexs del graf i E el conjunt de tots els enllaços que els uneixen. Donat un enllaç e=n:m, diem que n i m son els seus punts finals i que són dos punts adjacents.*

Definició 5.2. *Denotem g^N com el graf complet de tots els enllaços:*

$$g^N = \{n : m | n \in N, m \in N, n \neq m\}.$$

Denotem GR com el conjunt de tots els grafs a N, tal que

$$GR = \{g | g \subset g^N\}.$$

Com que tractem amb jocs cooperatius, permetem que els jugadors estableixin acords bilaterals, que representem a través d'enllaços. D'aquesta manera, una estructura de cooperació es pot representar a través d'un graf amb tots els enllaços entre els seus jugadors. Podem identificar el conjunt de totes les possibles estructures de cooperació amb GR, el conjunt de tots els grafs possibles entre el conjunt de jugadors N.

Definirem alguns conceptes importants de la relació de les coalicions i els grafs de cooperació per poder continuar:

Definició 5.3. *Siguin $S \subset N$, $g \in GR$, $n \in S$ i $m \in S$, direm que n i m estan connectats a S per g si i només si hi ha un camí a g que va de n a m i es queda dins de S. És a dir, n i m estan connectats a S per g si n=m o si per alguna $k \geq 1$ i una seqüència $(n^0, n^1, ..., n^k)$ tal que $n^0 = n, n^k = m$ i $n^{i-1} : n^i \in g$ i $n^i \in S$ per tot $i = 1, ..., k$.*

Definició 5.4. *Definim un subgraf de g=(N,E) com un graf h=(S,E') tal que $S \subseteq N$ i E' és un subconjunt de E tal que els dos punts finals de qualsevol $e' \in E'$ són elements de S. Si E' conté tots els enllaços de E amb els dos punts finals a S, diem que h és el subgraf de g induït per S. És comú anomenar-lo g[S].*

Definició 5.5. *Donat $g \in GR$ i $S \subset N$, hi ha una única partició de S en classes que agrupen els jugadors entre ells si i només si estan connectats a S per g. Denotem aquesta partició com*

$$S/g = \{i | \text{ } i \text{ i } j \text{ estan connectats a } S \text{ per } g \text{ amb } j \in S\}.$$

Amb S/g obtenim la partició de S en components connectats maximals.

Interpretem S/g com el conjunt de coalicions menors que sorgirien dins de S si s'aliessin segons les seves connexions a g.

Exemple 5.6. Si $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $g = \{1 : 2, 1 : 4, 2 : 4, 3 : 4\}$, definim $S = \{1, 2, 3\}$. Veiem que, per una banda, $N/g = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}\}$ i després $S/g = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Quan considerem un graf g hi associarem la partició N/g com a estructura natural de coalicions. Això ens permet veure que inclòs si dos jugadors no estan directament connectats pel graf poden igualment cooperar efectivament si tots dos tenen afinitat amb un jugador intermedi o si hi ha algun camí del graf que els connecta.

5.1 Regles d'assignació a jocs restringits

Veurem ara com es modifica la funció característica quan hi introduïm aquests conceptes. Recordem que una funció característica v és una funció que assigna a cada coalició S un nombre real *v(S)*, que interpretem com el benefici d'utilitat transferible que rep aquesta coalició i que ha de repartir entre els seus integrants si cooperen.

Reiterem la definició (4.1), ara introduint-hi els nous conceptes de connectivitat que hem introduït. Sigui GR el conjunt de totes les estructures de cooperació possibles pel joc v, i els resultats de v es puguin representar per vectors d'assignació de beneficis a $\mathbb{R}^n$. El resultat de v depèn doncs de l'estructura de cooperació per una funció $Y : GR \to \mathbb{R}^N$, que envia els grafs de cooperació als vectors d'assignació.

Definició 5.7. *Una regla d'assignació per v és tota funció $Y : GR \to \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\forall g \in GR, \forall S \in N/g, \sum_{n \in S} Y_n(g) = v(S).$$

Entenem que $Y_n(g)$ ens dona el pagament d'utilitat que el jugador n espera al joc v si g representa el patró de cooperació entre els jugadors.
La condició final ens diu que si S és una component connectada de g, els membres de S s'han de repartir entre ells tot el benefici atorgat per $v(S)$. El difícil és com repartir-ho. I en molts casos, això depèn del graf. Ho veurem a l'exemple següent:

Exemple 5.8. Tenim $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i tenim dos grafs diferents: $g_1 = \{1 : 2, 1 : 3, 1 : 4\}$ i $g_2 = \{1 : 2, 2 : 3, 3 : 4\}$. Segurament, la regla d'assignació donarà més beneficis al jugador 1 a g_1, ja que la seva posició és molt més important a l'hora de coordinar als altres jugadors: n'és el nexe d'unió, sense ell no poden cooperar. Per tant, és essencial i se'l premiarà com a tal. Tot i això, s'ha de respectar la condició mencionada a la definició, per tant

$$\sum_{n=1}^{4} Y_n(g_1) = \sum_{n=1}^{4} Y_n(g_2) = v(\{1, 2, 3, 4\}).$$

Per veure el concepte d'estabilitat, fem servir el símbol \ per denotar que traiem un enllaç d'un conjunt. Per tant,

$$g \backslash n : m = \{i : j | i : j \in g, i : j \neq n : m\}.$$

Definició 5.9. *Una regla d'assignació* $Y : GR \to \mathbb{R}^N$ *és estable si i només si* $\forall g \in GR, \forall n : m \in g$, $Y_n(g) \geq Y_n(g \backslash n : m)$ *i* $Y_m(g) \geq Y_m(g \backslash n : m)$.

El que comporta una regla d'assignació estable és que dos jugadors sempre sortiran beneficiats d'arribar a un acord bilateral.

Una altra propietat de les regles d'assignació és l'equitat, que ens permet aplicar un principi d'equitat dels guanys: si dos jugadors formen un acord bilateral, tots dos han de guanyar el mateix. Vegem-ho formalment:

Definició 5.10. *Una regla d'assignació* $Y : GR \to \mathbb{R}^N$ *és justa si i només si* $\forall g \in GR, \forall n : m \in g$, $Y_n(g) - Y_n(g \backslash n : m) = Y_m(g) - Y_m(g \backslash n : m)$.

Redefinim un altre concepte amb l'adherit dels grafs:

Definició 5.11. *Donada una funció característica* v *i un graf* g, *definim* v/g *com un joc de funció característica tal que* $\forall S \subset N$,

$$(v/g)(S) = \sum_{T \in S/g} v(T).$$

Es pot interpretar com el joc que resulta si restringim el joc original v al graf g, de manera que només els jugadors connectats pels enllaços de g es poden comunicar.

Teorema 5.12. *Donat un joc de funció característica* v, *hi ha una única regla d'assignació justa* $Y : GR \to \mathbb{R}^N$. *També satisfà que*

$$Y(g) = \varphi(v/g), \; \forall g \in GR,$$

on $\varphi()$ *és l'operador del valor de Shapley. Si* v *és superadditiu, aleshores la regla d'assignació justa també és estable.*

Com que $v/g^N = v$, veiem que $Y(g^N) = \varphi(v)$ com a regla d'assignació justa Y. Això ens dona una nova expressió pel valor de Shapley basada en els grafs de cooperació.
Abans de veure la demostració del teorema, necessitem una definició:

Definició 5.13. *Considerem un joc (N,v) i* $T \in 2^N$. *Diem que* T *és un carrier de (N,v) si per a qualsevol* $S \in 2^N$, *tenim que*

$$v(S) = v(S \cap T).$$

Vegem-ne un breu exemple:

Exemple 5.14. Sigui *(N,v)* un joc de 3 jugadors, $v\{1,2,3\} = v\{1,2\} = 1$ i $v(S) = 0$ per totes les altres coalicions. El carrier del joc és $T = \{1,2\}$.

Ara podem veure la demostració del teorema anterior:

Demostració. Veiem primer que només hi pot haver com a màxim una única regla d'assignació justa per un joc v. Suposem que tant $Y^1 : GR \to \mathbb{R}^N$ com $Y^2 : GR \to \mathbb{R}^N$ satisfan les condicions definides a les definicions (5.7) i (5.10) i són diferents. Si g és un graf amb un nombre mínim d'enllaços tal que $Y^1(g) \neq Y^2(g)$; definim $y^1 = Y^1(g)$ i $y^2 = Y^2(g)$, tal que $y^1 \neq y^2$. Per la condició mínima de g, si n:m és un enllaç de g, aleshores $Y^1(g \backslash n : m) = Y^2(g \backslash n : m)$. Per tant,

$$y_n^1 - y_m^1 = Y_n^1(g\backslash n:m) - Y_m^1(g\backslash n:m) = Y_n^2(g\backslash n:m) - Y_m^2(g\backslash n:m) = y_n^2 - y_m^2.$$

Veiem doncs que

$$y_n^1 - y_n^2 = y_m^1 - y_m^2$$

quan n i m estan enllaçats, i per tant també quan formen part de la mateixa component connectada S de g. Escrivim doncs $y_n^1 - y_n^2 = d_S(g)$, on $d_S(g)$ depèn de S i g, però no de n. Per (5.7) sabem que $\sum_{n\in S} y_n^1 = \sum_{n\in S} y_n^2$. Per tant,

$$0 = \sum_{n\in S}(y_n^1 - y_n^2) = |S|d_S(g),$$

i veiem que $d_S(g) = 0$. Aleshores, és indiscutible que $y_n^1 = y_n^2$, i ens trobem en una contradicció. Per tant, només hi pot haver com a màxim una única regla d'assignació justa per v.

Ara ens queda veure que $Y(g) = \varphi(v/g)$ implica que (5.7) i (5.10) estan satisfetes, així com (5.9) si v és superadditiu.

Veurem (5.7) primer.

Triem un $g \in GR$ qualsevol. Per cada $S \in N/g$, definim un joc de funció característica u^S tal que

$$u^S(T) = \sum_{R\in(T\cap S)/g} v(R), \forall T \subset N.$$

Ara doncs, qualsevol parella de jugadors connectats a T per g estan també connectats a N per g, de manera que

$$T/g = \bigcup_{S\in N/g}(T\cap S)/g.$$

Per tant, $v/g = \sum_{S\in N/g} u^S$. Però S és un carrier de u^S, perquè $u^S(T) = u^S(T\cap S)$. Fent servir l'axioma del carrier de Shapley (vegeu [16]), per qualsevol $S \in N/g$ i qualsevol $T \in N/g$,

$$\sum_{n\in S}\varphi_n(u^T) = \begin{cases} u^T(N), & \text{si } S = T \\ 0, & \text{si } S\cap T = \varnothing. \end{cases}$$

Per tant, per la linealitat de φ, si $S \in N$ aleshores

$$\sum_{n\in S}\varphi_n(v/g) = \sum_{T\in N/g}\sum_{n\in S}\varphi_n(u^T) = u^S(N) = \sum_{R\in S/g} v(R) = v(S).$$

Per veure que (5.10) es compleix, hem d'agafar un $g \in GR$ i un enllaç $n:m \in g$ qualssevol. Sigui $w = v/g - v/(gn:m)$. Observem que $S/g = S/(g\backslash n:m)$ si $\{n:m\} \nsubseteq S$. Per tant, si $n \notin S$ o $m \notin S$, tenim que

$$w(S) = \sum_{T\in S/g} v(T) - \sum_{T\in S/(g\backslash n:m)} v(T) = 0.$$

Per tant, les úniques coalicions amb benefici diferent de 0 a w són coalicions que contenen tant a n com a m. Per l'axioma de simetria de Shapley (veure [16]) veiem que $\varphi_n(w) = \varphi_m(w)$. Per la linealitat de φ,

$$\varphi_n(v/g) - \varphi_n(v/g\backslash n:m) = \varphi_n(w) = \varphi_m(w) = \varphi_m(v/g) - \varphi_m(v/g\backslash n:m)$$

Finalment, veurem (5.9). Observem que $S/(g\backslash n:m)$ sempre refina S/g com a partició de S, i si $n \notin S$, aleshores $S/(g\backslash n:m) = S/g$. Per tant, si v és superadditiu,

$$(v/g)(S) = \sum_{T\in S/g} v(T) \geq \sum_{S/(g\backslash n:m)} v(T) = (v/(g\backslash n:m))(S)$$

i la desigualtat es converteix en una igualtat si $n \notin S$. Per tant, si $w = v/g - v/(g\backslash n:m)$, aleshores $w(S) \geq 0$ per tot S i $w(S) = 0$ si $n \notin S$. Així, $w(S \cup \{n\} \geq w(S)$ per tot S, i $\varphi_n(w) \geq 0$, a través de la representació del valor de Shapley com una contribució esperada marginal. Així doncs,

$$\varphi_n(v/g) - \varphi_n(v/g\backslash n:m) = \varphi_n(w) \geq 0,$$

demostrant-ne l'estabilitat. □

6 Cooperació, compatibilitats i enemistats

En aquesta secció es fa referència a [1], [5], [9] i [20].

Un joc restringit està format per un joc de votació ponderada i un graf. Hem introduït el concepte de graf per veure com modifica la relació entre els jugadors d'un joc TU. Anem a veure ara com es modifica la seva estructura un cop hi integrem aquests nous elements:

Definició 6.1. *Un joc amb comunicació restringida per grafs és una tripleta (N,v,E), on (N,v) és un joc i (N,E) és un graf de comunicació. El conjunt de tots els jocs amb comunicació restringida per grafs es denomina per* $\mathcal{GC}$*. Un valor a* $\mathcal{GC}$ *és un mapa, f, que assigna un vector únic f(N,v)*$\in \mathbb{R}^N$ *a cada (N,v,E)*$\in \mathcal{GC}$*.*

Per cada $(N, v, E) \in \mathcal{GC}$, el joc de comunicació restringida assumeix que els jugadors només es poden comunicar a través de $g = (N, E)$. Per tant, una coalició només podrà cooperar si els seus jugadors estan connectats a través del graf. Veiem que per tot $S \subseteq N$,

$$v^E(S) = \sum_{T \in S/E} v(T).$$

(N,v,E) és un joc simple, que hereta de *(N,v)* les propietats de monotonia i superadditivitat. En canvi, a vegades deixa de ser un joc de majoria ponderada. Com que $v^E \subseteq v$, és habitual que el joc restringit sigui menys decisiu i més fàcil de bloquejar, ja que la introducció de les restriccions fa més difícil la formació de coalicions.

Veiem ara els dos tipus de grafs concrets amb els quals tractarem:

Definició 6.2. *Donat un joc simple (N,v), direm que el joc* v^A *és un joc de comunicació (o d'afinitats) i està definit per:*

$$v^A(S) = \begin{cases} 1 & si\ \exists T \subseteq S : T \in W^M(v)\ \ i\ g[T]\ \ està\ connectat \\ 0 & altrament. \end{cases}$$

per tot $S \subseteq N$*, on g[T] denota el subgraf de g induït pels jugadors de la coalició T i g és el seu graf de comunicació.*

Hem vist que en un model de jocs de comunicació, els jugadors cooperen quan són adjacents a g. És a dir, quan hi ha un camí que els uneix al graf. Veurem ara una nova definició que empra la idea oposada, tot i que el graf no és completament complementari.

Definició 6.3. *Donat un joc simple (N,v), definim* v^I *com un joc d'incompatibilitat, on:*

$$v^I(S) = \begin{cases} 1 & si\ \exists T \subseteq S : T \in W^M(v)\ \ i\ g[T]\ \ està\ buit \\ 0 & altrament. \end{cases}$$

per tot $S \subseteq N$*. Ara també ens referim a g com el seu graf d'incompatibilitats, ja que* v^I *és el joc amb la cooperació restringida per g.*

Aquí trobem que el càlcul de les coalicions guanyadores minimals és directe quan tenim un joc restringit per incompatibilitats:

$$(W^I)^m = \{S \in W^m : S \text{ és I-admissible}\}.$$

Per a poder usar ambdós grafs alhora, s'ha d'exigir una condició de consistència:

$$A \cap I = \varnothing.$$

Així impedim que hi hagi jugadors que siguin afins i incompatibles alhora, que seria una incongruència.

Finalment, obtenim una definició formal de les coalicions guanyadores en un joc restringit pels grafs A i I:

$$W^{\text{AI}} = \{S \subseteq N : S_0 \subseteq S \text{ essent } S_0 \in W, A \text{ connexa i } I \text{ admissible}\}.$$

Nota: Fins ara fèiem servir E per parlar dels enllaços d'un graf. Emprarem A quan parlem d'afinitats i I quan parlem d'incompatibilitats, però continuarem fent servir E quan no estigui especificat el tipus de graf referit.

Un dels nostres objectius en introduir els grafs a l'estudi dels índexs de poder és poder veure com els modifiquen. Formalment, hi ha dos valors molt coneguts a $\mathcal{GC}$ que generalitzen els valors de Shapley i de Banzhaf:

Definició 6.4. *El valor de Myerson,* SG*, és un valor a* $\mathcal{GC}$ *definit per cada (N,v,E)*$\in \mathcal{GC}$ *per*

$$\mathsf{SG}(N, v, E) = \mathsf{Sh}(N, v^E)$$

El valor de graf de Banzhaf, BG*, és el valor a* $\mathcal{GC}$ *definit per cada (N,v,E)*$\in \mathcal{GC}$ *per*

$$\mathsf{BG}(N, v, E) = \mathsf{Ba}(N, v^E)$$

Amb aquests conceptes, i pel fet d'introduir informació addicional al joc i restringir-lo, passem d'una estructura formal a una estructura modificada, fet que es veurà reflectit quan ho apliquem a la pràctica.

7 Bases polítiques i primer exemple pràctic

Abans de començar amb l'aplicació pràctica d'aquest treball, posarem una mica de context i donarem hipòtesis sobre les quals es basarà tota la investigació posterior.

Definim dos conceptes claus en votacions: La **majoria absoluta** es dona quan els vots a favor són més de la meitat dels vots emesos i la **majoria simple** es dona quan els vots a favor són més que els vots en contra.

En els casos polítics a treballar, suposem:

- Perfecta disciplina de vot dins de cada grup parlamentari: cap membre vota de forma independent, sinó que es coordinen tots amb els interessos del partit. D'aquesta manera, podem identificar als partits polítics com els jugadors involucrats en el joc.
- Les decisions sotmeses a votació són sempre de tipus binari, en les quals una proposta nova pretén modificar el *statu quo*.
- És necessària una majoria absoluta per a l'aprovació de qualsevol moció presentada.
- Els partits buscaran formar coalicions guanyadores minimals sempre que cap tingui la majoria absoluta requerida.
- La utilitat del poder, i per tant el seu valor, és fraccionable i transferible.

7.1 La ultradreta

El terme ultradreta, també conegut com l'extrema dreta, s'utilitza per definir moviments o partits polítics que promouen discursos ultraconservadors, ultranacionalistes i autoritaris.

Es comença a fer servir després de la Revolució Francesa, per descriure els partits monàrquics i conservadors que s'asseuen a la dreta del nou parlament. Durant la Segona Guerra Mundial es relaciona amb el feixisme i el nazisme, tot i aquest segon descriure's com a socialista. En general, els partits d'extrema dreta comparteixen el seu ideari, amb una ideologia molt centrada en el conservadorisme, l'antidemocràcia, el supremacisme blanc i l'opressió contra col·lectius minoritaris, ja sigui en forma de racisme, masclisme o homofòbia.

Un cop acabada la guerra, el feixisme no desapareix, i els grups d'ultradreta se'n queden el discurs i resisteixen. Lentament, va sorgint una nova corrent, que ja no és tan antidemocràtica, però busca fer front a les elits que apareixen després de la guerra: el populisme de dretes. Després de la dècada dels setanta, amb les seves crisis del petroli i un augment de la globalització i, per tant, de la immigració, aquests partits entren als parlaments gràcies a la insatisfacció dels ciutadans amb els governs del moment. La seva principal motivació política és l'antiimmigració, i se'ls coneix com la dreta radical populista.

A partir del nou segle, entrem en una era molt més tecnològica. La nova facilitat per la propaganda i l'abandonament de l'afiliació amb les idees neonazis i la consegüent violència que plantegen, han fet que els partits d'ultradreta deixin de ser marginals. Això ha portat els altres partits a haver de considerar-los per formar coalicions, i la dreta tradicional n'ha començat inclòs a adoptar algunes idees. Ara ja no són partits exclosos i marginals, formen part de l'espectre parlamentari habitual.

Actualment, ens trobem amb l'augment més dràstic de votants de l'extrema dreta des de la Segona Guerra Mundial. Això es deu principalment a les situacions de crisi que hem viscut a principis de segle: l'11-S, la Gran Recessió del 2008 i la crisi dels refugiats del 2015. Si hi sumem la globalització creixent i el canvi constant, és més fàcil entendre aquest fenomen. La població té por, i part de la demogràfica (majoritàriament masculina i blanca) sent que està perdent la seva forma de viure amb aquests canvis, i per això emet un vot reaccionari cap als partits que els prometen evitar-ho.

7.2 Exemple: Estudi del Parlament Espanyol el 2023

Per fer una primera aproximació a l'estudi dels valors de Shapley d'un cos de votació, de forma senzilla, farem servir el cas més actual de la política espanyola. El passat 23 de juliol de 2023 hi va haver les eleccions generals.
El poder legislatiu espanyol es concentra a les Corts Generals, que estan dividides en dues cambres: el Congrés dels Diputats i el Senat. Es tracta de parlamentarisme bicameral. El Congrés dels Diputats està compost per 350 membres, que són escollits cada quatre anys. Una de les seves funcions principals és escollir el president del Govern, i per això ens centrarem a estudiar el poder de la ultradreta al Congrés, i no al Senat. El sistema de votació del president funciona en primera votació per majoria absoluta i en majoria simple després de 48 hores.

El resultat de la distribució dels escons va ser:

Partit	**Escons**
Partido Popular	136
Partido Socialista Obrero de España	122
Vox	33
SUMAR	31
Esquerra Republicana de Catalunya	7
Junts	7
Euskal Herria Bildu	6
Euzko Alderdi Jeltzalea - Partido Nacionalista Vasco	5
Bloque Nacionalista Galego	1
Coalición Canaria	1
Unión del Pueblo Navarro	1

Donat que la quota, o la majoria absoluta, és de 176 escons, expressem la situació amb:

$$N = \{\text{PP, PSOE, Vox, SUMAR, ERC, Junts, EH Bildu, EAJ-PNV, BNG, CCa, UPN}\}$$

$$[176; 136, 122, 33, 31, 7, 7, 6, 5, 1, 1, 1]$$

Veurem doncs, com a primer exemple de cas real, quin valor de Shapley tindrien aquests partits, no contemplant cap restricció.

Partit	**Valor de Shapley Formal**
PP	0.3826
PSOE	0.2116
Vox	0.1521
SUMAR	0.1124
ERC	0.0358
Junts	0.0358
EH Bildu	0.0271
EAJ-PNV	0.0175
BNG	0.0072
CCa	0.0072
UPN	0.0072

Observem que es manté l'ordre de vots: com més escons té un partit, més poder té, però no és proporcional. Si ens hi fixem, PP té quasi el doble de poder que PSOE, a pesar de només tenir 14 escons més. De la mateixa manera, els partits amb només un escó tenen un poder molt baix a la situació política espanyola actual.

Al pròxim apartat veurem com els grafs de restriccions modifiquen aquests valors i ens permeten fer-ne interpretacions més precises de la situació real dels països. Perquè fins ara, tots els partits amb els mateixos vots tindran el mateix índex de poder, però en la realitat, partits com UPN o BNG no tenen la mateixa influència. BNG forma part d'una potencial coalició guanyadora, mentre que UPN no. Per això restringirem la connexió d'ara endavant.

Efectivament, la coalició que ha acabat traient la majoria absoluta a les últimes eleccions i investint a Pedro Sánchez (PSOE) està formada per:

PSOE, SUMAR, ERC, Junts, EH Bildu, BNG, PNV i CCa.

8 Aplicació als Parlaments europeus i la ultradreta

Volem aplicar tota la teoria que hem vist a com s'estructuren els diferents Parlaments europeus, per poder comparar fidelment la situació actual amb la de fa quatre anys.

El que farem a continuació serà veure com s'han modificat els vots dels partits d'ultradreta als seus respectius països entre les últimes votacions parlamentàries que hi hagi hagut i les anteriors. A través d'aquestes dades, estudiarem com ha variat el valor de Shapley d'aquests partits, i per conseqüència, el seu poder polític. Per a fer-ho, hem d'establir les incompatibilitats que tinguin amb altres partits.
Un dels criteris que emprarem per veure-les és l'espectre dreta-esquerra polític. Sabem que no és un criteri complet, que hi ha moltes dimensions dins dels partits i que la seva visió economicosocial no és l'únic que determina amb qui estan disposats a pactar. En el cas espanyol, l'independentisme és un altre factor crucial. Però el farem servir perquè els partits d'extrema dreta estan massa lluny ideològicament a l'espectre, i per això qualsevol partit que no sigui clarament de dreta queda directament eliminat.

Nota de les taules: Els partits amb un símbol "-" no van participar en les eleccions d'aquell mandat. Si no apareixen a les primeres, són un partit nou, i si no apareixen a les segones, s'han dissolt abans de les eleccions.

8.1 Espanya

Com hem comentat a la secció anterior, el poder legislatiu espanyol es divideix en dues cambres, i estudiarem el Congrés dels Diputats. Està compost per 350 membres, que són escollits cada quatre anys. Una de les seves funcions principals és escollir el president del Govern, i per això ens centrarem a estudiar el poder de la ultradreta al Congrés.

Compararem els resultats per partits entre les eleccions del 23 de juliol de 2023 i les del 10 de novembre de 2019. Notem que són les segones eleccions que es van celebrar el 2019, ja que les primeres van ser el 28 d'abril, però no es va aconseguir formar govern. Per tant, hem considerat més interessant fer la comparativa amb les definitives.

Partit	Escons 2019	Escons 2023
PP	89	136
PSOE	120	122
Vox	52	33
SUMAR	38	31
ERC	13	7
Junts	8	7
EH Bildu	5	6
EAJ-PNV	6	5
BNG	1	1
CCa	2	1
NA+ / UPN	2	1
Ciudadanos	10	-
CUP	2	-
PRC	1	-
Teruel Existe	1	-
Total	350	350

El partit SUMAR es forma a través d'una coalició dels següents partits: Unidas Podemos, Izquierda Unida, Catalunya En Comú, Más Madrid, Más País, Compromís, Xunta Aragonesiste, Més per Mallorca, Més per Menorca, Verdes Equo, Alianza Verde, Batzarre, Proyecto Drago, Izquierda Asturiana i Iniciativa del Pueblo Andaluz.

$$N_{2023} = \{\text{PP, PSOE, Vox, SUMAR, ERC, Junts, EH Bildu, EAJ-PNV, BNG, CCa, UPN}\}$$

$$[176; 136, 122, 33, 31, 7, 7, 6, 5, 1, 1, 1]$$

$$N_{2019} = \{\text{PSOE, PP, Vox, SUMAR, ERC, Ciudadanos, Junts, EAJ-PNV, EH Bildu, CCa, CUP, NA+, BNG, PRC, Teruel Existe}\}$$

$$[176; 120, 89, 52, 38, 13, 10, 8, 6, 5, 2, 2, 2, 1, 1, 1]$$

En primer lloc, trobarem els valors de Shapley formals, els que no estan modificats per cap graf, de la mateixa manera que ho hem fet a l'exemple anterior. Després hi afegirem el graf, que ens dirà com es modifica realment el valor de Shapley dels partits segons les seves incompatibilitats. Per poder definir-les, és important tenir en compte el context.

Actualment, el govern de coalició entre PSOE, SUMAR, ERC, Junts, EH Bildu, BNG, PNV i CCa és el segon govern de coalició d'Espanya. El primer es va donar el 2019, quan Pedro Sánchez (PSOE) va ser investit amb l'ajut de Podemos. Anteriorment, a Espanya, els governs es formaven intermitentment entre el PP i el PSOE, amb majories suficients per governar sols.

Un altre tema que cal abordar abans de parlar de les incompatibilitats, és el perquè de Vox. Es funda el 2013, majoritàriament per membres del PP, i està encapçalat per

Santiago Abascal. Neix com un corrent reaccionari motivat especialment pels regionalismes creixents, sobretot el català i el basc. La seva ideologia és durament nacionalista, amb l'anhel d'eliminar les autonomies i centralitzar el país. És ultraconservador, amb polítiques poc socials envers les demogràfiques minoritàries o en situació d'opressió.

Veurem primer com Vox es relaciona amb els altres partits:

Afinitats:

Els altres partits definits com a partits de dreta dins d'Espanya (veure [3]) són:

PP, Ciudadanos, NA+ / UPN.

Disparitats:

En aquest cas, una de les incompatibilitats principals amb el nacionalisme espanyol de Vox és l'independentisme o el nacionalisme regional, independentment de la seva visió en altres aspectes de la política. Els partits definits com a independentistes són:

Catalans: ERC, Junts, CUP.
Bascs: EH Bildu, EAJ-PNV.
Gallecs: BNG.
Canaris: CCa.

Els partits definits com a esquerra són:

PSOE, SUMAR, PRC.

El partit Teruel Existe no es defineix com un partit d'esquerres, però sempre ha rebutjat pactar amb la ultradreta.

Veiem ara el graf complet dels partits que rebutgen pactar entre ells:

Graf I: Incompatibilitats

PP/SUMAR, PP/ERC, PP/EH Bildu, PP/BNG, PP/CUP, PSOE/Vox, PSOE/UPN, Vox/SUMAR, Vox/ERC, Vox/Junts, Vox/EH Bildu, Vox/EAJ-PNV, Vox/BNG, Vox/-CUP, SUMAR/UPN, SUMAR/Ciudadanos ERC/Ciudadanos, Junts/Ciudadanos, Ciudadanos/EH Bildu, Ciudadanos/EAJ-PNV.

Apliquem les fórmules i veiem quins valors de Shapley tenen els partits.

2018

Partit	**% Escons**	**Valor Formal**	**Valor Modificat**
PSOE	0.3429	0.4049	0.5823
PP	0.2543	0.2024	0.2224
Vox	**0.1486**	**0.1766**	**0.0**
SUMAR	0.1086	0.0974	0.0822
ERC	0.0371	0.0276	0.0380
Ciudadanos	0.0286	0.0221	0.0
Junts	0.0229	0.0176	0.0183
EAJ-PNV	0.0171	0.0148	0.0183
EH Bildu	0.0143	0.0130	0.0087
CCa	0.0057	0.0054	0.0032
CUP	0.0057	0.0054	0.0032
NA+ / UPN	0.0057	0.0054	0.0
BNG	0.0029	0.0026	0.0012
PRC	0.0029	0.0026	0.0012
Teruel Existe	0.0029	0.0026	0.0012

2023

Partit	**% Escons**	**Valor Formal**	**Valor Modificat**
PP	0.3886	0.3826	0.3571
PSOE	0.3486	0.2116	0.5238
Vox	**0.0943**	**0.1521**	**0.0**
SUMAR	0.0886	0.1124	0.0238
ERC	0.02	0.0358	0.0238
Junts	0.02	0.0358	0.0238
EH Bildu	0.0171	0.0271	0.0238
EAJ-PNV	0.0143	0.0175	0.0238
BNG	0.0029	0.0072	0.0
CCa	0.0029	0.0072	0.0
UPN	0.0029	0.0072	0.0

Els escons de Vox es redueixen, perdent-ne 19, un 36.53%. El seu valor de Shapley formal també disminueix per un valor de 0.0245, un 13.87%. I el valor de Shapley modificat pel graf I és 0 en ambdós casos.

Interpretem aquests resultats veient que, en primer lloc, els escons i els vots de Vox baixen. Veiem també que el seu valor de Shapley disminueix, informant-nos que el seu poder dins del parlament també s'ha fet menor. Però és interessant notar que el seu índex de poder ha disminuït per menys de la meitat del que ho ha fet el nombre d'escons. Això és interessant perquè al final, el parlament no només escull un govern. També s'hi voten totes les lleis i quan es fa això, no sempre es funciona per coalicions. A vegades els partits voten segons els seus interessos sense importar qui més vota a favor del que es presenta. En casos com aquests, podem constatar que el poder de Vox ha disminuït menys del que ho ha fet el seu nombre d'escons, i per tant les seves decisions i opinions encara tenen efecte sobre els veredictes. Han perdut votants, però això no ha reduït el seu poder equivalentment.

Per altra banda, tenim els valors de Shapley modificats pel graf. Un cop introduïdes les incompatibilitats dels partits, veiem que el poder de Vox es redueix a 0 en ambdós casos. Això ens indica que el seu poder real dins del parlament, sobretot a l'hora de formar govern, ha sigut inexistent en els dos casos. Cap govern possible i factible, tant per majoria absoluta com per compatibilitats, inclou Vox. Es converteix en un jugador nul.

Tanmateix, és important recordar que formar part del govern i d'una coalició guanyadora no és sempre l'única mostra de poder que pot tenir un partit. Tot i ser cert que no estaran en cap possibilitat de govern, tenen una importància dins de l'oposició que no es pot negligir. És un partit que té una alta influència en els seus grups més afins i això els dona cert nivell de poder per la força de la seva ideologia.

Per altra banda, també és interessant comentar que al parlament espanyol qualsevol partit de l'oposició amb més de 50 escons té la potestat per interposar recursos d'inconstitucionalitat al Tribunal Constitucional. És una forma de poder que no queda reflectida als índexs, però que Vox tenia abans i ha perdut després de les últimes eleccions.

Farem uns últims comentaris sobre els resultats obtinguts. Si observem la taula del 2018, veiem que quan tenim en compte les incompatibilitats els partits que en surten més perjudicats són els de la dreta (C's i UPN). També observem que el PSOE, que té més afinitats i molts escons sempre surt guanyant quan apliquem el graf. Es pot veure de forma molt dràstica als resultats de 2023. També és interessant el repartiment de poder dels partits el 2023, ja que tots els grups intermedis (pel que fa a escons) tenen el mateix poder, és a dir, son igual d'importants per a formar una coalició guanyadora, sense importar el seu nombre de vots. I finalment podem constatar que cap coalició pot passar a ser guanyadora amb l'adherència d'un partit d'un escó, i per això els tres últims es queden amb un poder nul.

8.2 Itàlia

El sistema electoral italià és de votació paral·lela: el 37% dels escons s'assignen a través de "first-past-the-post", sistema on els votants poden escollir un dels candidats que es presenta i el que obtingui més vots guanya, per majoria simple. El 63% restant es tria per representació proporcional, amb el mètode de Hare. Per com està estructurat, és un sistema que premia als partits més grans.

Una recent reformulació de la forma parlamentària italiana l'ha portat a reduir els seus escons de 630 a 400. Això no afectarà els nostres càlculs, però es notarà una diferència de magnituds respecte a la comparativa de vots. Per això, els representarem ja al principi també amb percentatges.

Compararem les eleccions del 25 de setembre de 2022 amb les del 4 de març de 2018.

Partit	**Escons 2018**	**% Escons 2018**	**Escons 2022**	**% Escons 2022**
Fratelli d'Italia	32	5.08%	119	29.75%
Partito Democratico - PD	112	17.78%	69	17.25%
Lega	125	19.84%	66	16.50%
5 Stelle	227	36.03%	52	13.00%
Forza Italia	104	16.51%	45	11.25%
Azione - Italia Viva	-	-	21	5.25%
Alleanza Verdi e Sinistra	14	2.22%	12	3.00%
Noi Moderati	4	0.63%	7	1.75%
SVP-PATT	4	0.63%	3	0.75%
+Europa	3	0.48%	2	0.50%
Impegno Civico	-	-	1	0.25%
Sud Chiama Nord	-	-	1	0.25%
Vallée d'Aoste	0	0.00%	1	0.25%
MAIE	2	0.32%	1	0.25%
Civica Popolare	2	0.32%	-	-
Insieme	1	0.16%	-	-
Total	630	100%	400	100%

El partit Noi Moderati es forma per la unió de Noi con l'Italia com a principal partit, amb Italia al Centro, Coraggio Italia i UdC. Liberi e Uguali, partit que es va presentar el 2018, es dissol després i s'uneix a Alleanza Verdi e Sinistra. USEI es fusiona amb MAIE per les segones eleccions.

N_{2022} = {FdI, PD, Lega, 5 Stelle, Forza Italia, Azione - Italia Viva, Alleanza Verdi e Sinistra, Noi Moderati, SVP-PATT, +Europa, Impegno Civico, Sud Chiama Nord, Vallée d'Aoste, MAIE}

$$[201; 119, 69, 66, 52, 45, 21, 12, 7, 3, 2, 1, 1, 1, 1]$$

N_{2018} = {5 Stelle, Lega, PD, Forza Italia, FdI, Alleanza Verdi e Sinistra, Noi Moderati, SVP-PATT, +Europa, Civica Popolare, MAIE, Insieme}

$$[316; 227, 125, 112, 104, 32, 14, 4, 4, 3, 2, 1, 1]$$

En primer lloc, trobarem els valors de Shapley formals, els que no estan modificats per cap graf. Després hi afegirem el graf, que ens dirà com es modifica realment el valor de Shapley dels partits segons les seves incompatibilitats, que veurem observant les coalicions governamentals que s'han format fins ara:

El 2018 es va formar una coalició entre 5 Stelle (M5S) i Lega amb 352 escons, per sobre dels 316 que constitueïen la majoria absoluta, amb Giuseppe Conte de M5S al capdavant. Un any més tard comença la crisi governamental italiana, on Lega els retira el seu suport i Conte dimiteix. Es torna a formar una coalició, aquest cop entre M5S, PD i Liberi e Uguali, altra vegada amb Conte al capdavant. El 2021, arran de la crisi de la COVID-19, hi ha una segona crisi i es reemplaça el govern per una coalició tecnòcrata, on el president Mattarella nomina Mario Draghi com a primer ministre. Aconsegueix el suport de

PD, Italia Viva, Liberi e Uguali primer, i després s'hi afegeixen Lega, Forza Italia i part de M5S. Actualment, la coalició de centredreta que té 237 escons i la majoria absoluta està compresa per: Fratelli d'Italia, Lega, Forza Italia i Noi Moderati. Al capdavant, la primera ministra Giorgia Meloni, de FdI.

Una característica a considerar d'Itàlia és que hi ha hagut coalicions molt variades i que ignoren relativament l'espectre esquerra-dreta [veure Annex A]. La coalició de Draghi, per exemple, tenia el suport de partits tan distants com PD i Forza Italia. Un partit que exemplifica en certa manera aquesta tendència és 5 Stelle, que va néixer com un partit d'extrema esquerra i quan ha tingut l'oportunitat d'escollir amb qui pactar, ho ha fet amb la dreta durant el govern de Conte. Un altre que n'és característic és Forza Itàlia, que tant pacta amb la dreta, al govern de Meloni, com accepta pactar amb partits d'esquerra, durant el mandat de Draghi.

El partit italià que volem estudiar és Fratelli d'Italia. Neix el 2012, de la mà d'Ignazio La Russa, antic membre de Forza Italia. Silvio Berlusconi, president de FI, hi acorda l'escissió per poder representar millor la dreta del seu partit, i per això ens tornem a trobar en una situació semblant a la de Vox, on la part més radical d'un partit de dreta se n'independitza. Les seves principals característiques ideològiques són el conservadorisme, el nacionalisme italià i l'euroescepticisme.

Una de les circumstàncies principals que han portat a aquesta pujada de vots per l'extrema dreta és la posició geogràfica d'Itàlia. És el primer punt d'entrada a Europa de tots els immigrants que entren des del nord d'Àfrica, per la qual cosa s'ha generat un moviment reaccionari antiimmigració molt recolzat per FdI que els ha fet cada vegada més populars.

Veurem doncs com FdI es relaciona amb els altres partits, majoritàriament segons l'eix esquerra-dreta:

Afinitats:

Els altres partits definits com a partits de dreta dins d'Itàlia són:

Lega, Forza Italia, Noi Moderati.

SVP-PATT és un partit amb base a la regió del Tirol, que té una ideologia regionalista. Però es posicionen com a centre amb un punt conservador i històricament han pactat amb Fratelli d'Italia a la seva regió, i per això hi tenen certa afinitat (veure [12]).

Disparitats:

Els partits definits com a esquerra són:

Partito Democratico, Alleanza Verda e Sinistra, +Europa, Impegno Civico, Vallée d'Aoste, Insieme, Civica Popolare.

Els partits definits com a centre liberal són:

Azione - Italia Viva, MAIE.

5 Stelle és un partit que es defineix fora de l'espectre dreta-esquerra, però que basa la seva política en el populisme. Igual que Sud Chiama Nord, partit sicilià que té un historial contrari a FdI a la seva regió.

Veurem ara quins partits s'eviten a l'hora de pactar:

Graf I: Incompatibilitats

FdI/5 Stelle, FdI/+Europa, FdI/PD, FdI/Alleanza Verdi e Sinistra, FdI/Impegno Civico, FdI/Vallée d'Aoste, FdI/Insieme, PD/Lega, Lega/+Europa, Lega/Alleanza Verdi e Sinistra, Lega/Impegno Civico, Lega/Vallée d'Aoste, Lega/Insieme, Forza Italia/Alleanza Verdi e Sinistra.

Un cop conegudes les relacions dels partits, procedirem a aplicar les fórmules per trobar els valors de Shapley.

2018

Partit	% Escons	Valor Formal	Valor Modificat
5 Stelle	0.3603	0.5	0.75
Lega	0.1984	0.1667	0.0833
Partito Democratico - PD	0.1778	0.1667	0.0833
Forza Italia	0.1651	0.1667	0.0833
Fratelli d'Italia	**0.0508**	**0.0**	**0.0**
Alleanza Verdi e Sinistra	0.0222	0.0	0.0
Noi Moderati	0.0063	0.0	0.0
SVP-PATT	0.0063	0.0	0.0
+Europa	0.0048	0.0	0.0
Civica Popolare	0.0032	0.0	0.0
MAIE	0.0032	0.0	0.0
Insieme	0.0016	0.0	0.0

2022

Partit	% Escons	Valor Formal	Valor Modificat
Fratelli d'Italia	**0.2975**	**0.3331**	**0.3076**
Partito Democratico - PD	0.1725	0.1641	0.0278
Lega	0.1650	0.1519	0.3076
5 Stelle	0.1300	0.1072	0.0248
Forza Italia	0.1125	0.0906	0.1121
Azione - Italia Viva	0.0525	0.0709	0.1121
Alleanza Verdi e Sinistra	0.0300	0.0457	0.0
Noi Moderati	0.0175	0.0136	0.0296
SVP-PATT	0.0075	0.0074	0.0296
+Europa	0.0050	0.0050	0.0296
Impegno Civico	0.0025	0.0026	0.0048
Sud Chiama Nord	0.0025	0.0026	0.0048
Vallée d'Aoste	0.0025	0.0026	0.0048
MAIE	0.0025	0.0026	0.0048

Els escons de FdI augmenten en 87, i el percentatge augmenta en 24.67 punts, un 485.62%. El seu valor de Shapley formal també augmenta per un valor de 0.3331, abans tenint-ne 0. I el valor de Shapley modificat pel graf I augmenta per 0.3076, abans estant a 0 també.

Els vots de FdI han augmentat molt, però el més significatiu és com ha canviat la distribució dels escons entre unes eleccions i les següents. El 2018, pel nombre d'escons que acumulaven els quatre primers partits, ens trobem que les úniques coalicions guanyadores minimals possibles només els involucraven a ells. FdI, que encara era un partit secundari, tenia un poder 0 tant aplicant el graf com no aplicant-lo. El 2022 pugen molt significativament de vots, arribant a ser la primera força del parlament. El seu valor de Shapley també es torna significatiu, disminuint només lleugerament quan apliquem el graf, però mantenint-se en primera posició. Els resultats estan constatats per la realitat, ja que el govern actual està majoritàriament format per FdI.

El més interessant de comentar dels valors de 2018 és que 5 Stelle, primera força que va robar molts votants a la resta de partits en aquelles eleccions (sobretot al PD), augmenta de poder quan apliquem el graf. És un partit que no es posiciona molt i està molt obert a pactar amb tothom, i per això quan els altres es troben amb restriccions ells es troben en una situació privilegiada. El 2022 ens sembla interessant la tendència, contrària al que passava a Espanya, d'augmentar de valor quan apliquem el graf pels partits de la dreta. En aquest cas, tenen una clara majoria absoluta i tots els partits (sobretot PD i AVS) que es neguen a pactar amb l'extrema dreta són els que n'acaben sortint perjudicats.

8.3 França

Estudiarem com ha variat la situació política a un altre país veí: França. El sistema electoral és diferent dels que havíem vist fins ara, ja que les votacions presidencials i les parlamentàries són diferents. Fins ara, es formava un parlament que escollia per majoria absoluta un president i el seu equip.
Les eleccions presidencials franceses van en dues rondes: a la primera s'hi presenten tots els candidats, i si cap no obté la majoria absoluta, es fa una segona ronda entre els candidats més votats. Tant a les eleccions de 2017 com a les de 2022 es van encarar a la segona ronda Emmanuel Macron, del partit centrista Renaissance, amb Marine Le Pen, del partit d'extrema dreta Rassemblement National. En ambdós casos ha guanyat Macron, amb un 66.10% el 2017 i un 58.55% el 2022.
Les eleccions parlamentàries van a part. El Parlament francès es divideix en el Senat i l'Assemblea Nacional, en la qual ens centrarem. Té 577 diputats, per la qual cosa s'hi obté majoria absoluta amb 289. Igual que a les eleccions presidencials, als diputats se'ls escull per un sistema de segona volta electoral, on els més votats entren a la segona ronda on seran finalment elegits.

Presentem el cas de França per la seva proximitat i perquè hi ha hagut un creixement de vots cap als partits de dreta que val la pena comentar. Però és un cas molt diferent i que no podem interpretar de la mateixa manera. En tenir dues eleccions separades, ens trobem que el parlament francès no ha de formar govern. Per tant, la base del procés que estem fent servir, la formació de coalicions majoritàries per poder governar, no té sentit. No podem inferir les incompatibilitats entre els partits per les coalicions que han format anteriorment, ni per la seva actitud entre ells a l'hora de pactar després de les últimes eleccions. Un parlament és un òrgan legislatiu, i clarament hi ha pactes entre els partits quan s'han d'aprovar o no les lleis. Però aquests pactes són molt més volàtils, i depenen totalment del tema que es tracta. Dos partits totalment contraris poden estar d'acord en un aspecte concret i aprovar una mateixa llei, però això no vol dir que estiguin pactant entre ells. Per aquesta raó, estudiarem el cas de França, però hi donarem menys importància a l'hora de treure'n conclusions, perquè la premissa governamental és diferent. El graf serà menys precís i no estarà tan basat en les proves empíriques de conducta dels partits, sinó en les seves ideologies. Igualment, creiem fermament que s'havia d'incloure França, ja que sempre és interessant veure els valors de Shapley d'un parlament, que ens poden donar una idea a través de la tendència de vot de com s'està movent el pensament ciutadà.

Estudiarem les eleccions del 18 de juny del 2017 i les compararem amb les del 19 de juny del 2022.

Partit	**Escons 2017**	**Escons 2022**
Ensemble	350	245
Nouvelle Union populaire écologique et sociale	57	131
Rassemblement National (Front National)	8	89
Les Républicains	112	61
Divers gauche	12	22
Divers droite	6	10
Régionaliste	5	10
Divers centre	0	4
Union des démocrates et indépendants	18	3
Droite souverainiste	-	1
Divers	3	1
Parti radical de gauche	3	0
Divers extrême droite	1	0
Debout la France	1	0
Écologistes	1	0
Total	**577**	**577**

El partit Ensemble es va formar el 2022 per donar suport a la candidatura d'Emmanuel Macron, i conté els partits Renaissance i Mouvement Démocrate entre d'altres (aquests dos són els que van tenir representació el 2017). NUPES és també una coalició dels partits La France Insoumise, Parti Socialiste i Parti Communiste Français, entre altres.

N_{2022} = {Ensemble, NUPES, RN, Les Républicains, Divers gauche, Divers droite, Régionaliste, Divers centre, Union des démocrates et indépendants, Droite souverainiste, Divers}

$$[289; 245, 131, 89, 61, 22, 10, 10, 4, 3, 1, 1]$$

N_{2018} = {Ensemble, Les Républicains, NUPES, Union des démocrates et indépendants, Divers gauche, RN, Divers droite, Régionaliste, Divers, Parti radical de gauche, Divers extrême droite, Debout la France, Écologistes}

$$[289; 350, 112, 57, 18, 12, 8, 6, 5, 3, 3, 1, 1, 1]$$

En aquest cas, el partit que més ens interessa és el Rassemblement National (RN), conegut com a Front National fins a 2018, el partit pel qual es presenta a les eleccions presidencials Marine Le Pen. Es va fundar el 1972 per promoure la unificació del moviment nacionalista francès, amb Jean-Marie Le Pen al capdavant, qui el 2012 va ser substituït per la seva filla Marine. El partit es caracteritza per ser fortament nacionalista. Té unes polítiques antiimmigració molt dures i ha sigut fins a 2019 molt euroescèptic, tot i que ara opten per una reforma. És altament proteccionista econòmicament i aposta per un model legislatiu molt punitiu. Se'ls ha acusat de xenofòbia i antisemitisme, sobretot quan Jean-Marie Le Pen hi estava al capdavant, guanyant-se una infame reputació pel seu discurs d'odi, centrat sobretot en la islamofòbia i la negació de l'Holocaust.

L'auge de partidaris del grup de Le Pen neix principalment de la insatisfacció amb el govern de Macron. S'han fet canvis que no han agradat al públic, com pujar l'edat de jubilació. També hi ha una situació de xenofòbia creixent per un problema d'immigració, que ha portat als més radicals a aliar-se amb RN i als més liberals a posicionar-se lluny de Macron, per com s'han gestionat els conflictes. Només cal recordar l'assassinat d'un adolescent de color a mans de la policia aquest passat juny. També està creixent l'antisemitisme, i a França sempre hi ha hagut l'amenaça latent del terrorisme, que fa que els seus ciutadans busquin seguretat. La mescla del descontentament amb l'actual govern, la necessitat de seguretat, la situació que genera la immigració i el creixent cost de vida a França han portat molts votants a adherir-se a la retòrica populista de l'extrema dreta.

Veiem doncs quins partits mantenen una relació cordial amb RN i quins no:

Afinitats:

Els altres partits definits com a partits de dreta dins de França són:

Les Républicains, Divers droite, Droite souverainiste, Divers extrême droite, Debout la France.

Disparitats:

Els partits definits com a esquerra són:

NUPES, Divers gauche, Écologistes, Parti radical de gauche.

Els partits definits com a centre liberal són:

Divers centre, Union des démocrates et indépendants.

Ensemble, el partit d'Emmanuel Macron, es defineix consistentment com a partit ni d'esquerres ni de dretes, sinó com un partit progressista, en un espectre contra el conservadorisme. Havent sigut el rival de Le Pen, els considerem incompatibles.

Ara definim el graf. Pel que hem comentat del cas del parlament francès, que no forma govern i, per tant, no hi ha tanta tendència a les coalicions, veurem menys incompatibilitats que abans. També tenim molts grups parlamentaris que comparteixen una tendència, però estan compostos per diputats independents, com per exemple Divers droite o Droite souverainiste, per la qual cosa llevat que sigui molt extrema la diferència, no es pot dir que siguin completament incompatibles amb els altres partits. Sobretot a l'hora de pactar entre els grups independents.

Graf I: Incompatibilitats

Ensemble/NUPES, Ensemble/RN, Ensemble/Parti radical de gauche, Ensemble/Divers extrême droite, NUPES/RN, NUPES/Les Républicains, NUPES/Divers extrême droite, NUPES/Debout la France, RN/Divers gauche, RN/Écologistes, RN/Parti radical de gauche, Les Républicains/Parti radical de gauche, Parti radical de gauche/Divers extrême droite, Parti radical de gauche/Debout la France, Divers extrême droite/Divers gauche, Divers extrême droite/Écologistes.

Un cop conegudes les relacions dels partits, procedirem a aplicar les fórmules per trobar els valors de Shapley formals i modificats.

2017

Partit	**% Escons**	**Valor Formal**	**Valor Modificat**
Ensemble	0.605	1	1
Les Républicains	0.194	0.0	0.0
NUPES	0.098	0.0	0.0
Union des démocrates et indépendants	0.031	0.0	0.0
Divers gauche	0.021	0.0	0.0
Rassemblement National	**0.014**	**0.0**	**0.0**
Divers droite	0.010	0.0	0.0
Régionaliste	0.009	0.0	0.0
Divers	0.005	0.0	0.0
Parti radical de gauche	0.005	0.0	0.0
Divers extrême droite	0.002	0.0	0.0
Debout la France	0.002	0.0	0.0
Écologistes	0.002	0.0	0.0

2022

Partit	**% Escons**	**Valor Formal**	**Valor Modificat**
Ensemble	0.424	0.511	0.5448
NUPES	0.227	0.1499	0
Rassemblement National	**0.154**	**0.1499**	**0**
Les Républicains	0.106	0.1499	0.3056
Divers gauche	0.038	0.011	0.0448
Divers droite	0.017	0.011	0.0448
Régionaliste	0.017	0.011	0.0448
Divers centre	0.007	0.0023	0.0056
Droite souverainiste	0.002	0.0023	0.0056
Union des démocrates et indépendants	0.005	0.0007	0.002
Divers	0.002	0.0007	0.002

Els escons de Rassemblement National augmenten en 81, un 1012.5%. El seu valor de Shapley formal també augmenta per un valor de 0.1499, essent abans 0. I el valor de

Shapley modificat pel graf I es manté en 0.

En aquest cas, ens trobem amb una situació especial. És el país on més fortament han augmentat els escons del partit que estudiem, ja que passa de ser un partit minoritari a ser la tercera força del país. Per aquesta raó, el seu valor de Shapley passa de ser nul a tenir bastant importància, essent el segon més alt de tots. Tot i això, per les incompatibilitats aplicades, tot i l'augment dràstic de votants, RN continua tenint un poder real nul. Recordem que en aquest cas no es parla de formació de governs, per tant, s'ha d'analitzar diferent, però ens indica que molta part del parlament els té una animadversió que no els permet ser jugadors clau per a l'aprovació de lleis. Tot i això, és el cas on més important és el valor de Shapley formal, ja que les coalicions ideològiques són menys importants al seu parlament. Observant el seu augment de valor, es pot constatar que la ultradreta està en auge a França.

El 2017 ens trobem amb un cas molt excepcional, ja que Ensemble, el partit de Macron, tenia la majoria absoluta. Per aquesta raó, el valor de Shapley els hi dona tot el poder, ja que tenen el control total del parlament i el que s'hi aprova. A les eleccions següents canvia la situació, Macron perd la majoria absoluta i necessiten el suport extern per poder tirar endavant les seves propostes. És interessant veure que un cop hi apliquem el graf (que recordem, és el país on és menys rellevant), els partits dels extrems són els que es queden sense poder. És una tendència no sorprenent, i que veiem sovint. Com més extrem és un partit, menys flexible és la seva predisposició a pactar amb partits de l'altra banda.

8.4 Finlàndia

L'últim cas que estudiarem és el de Finlàndia. Divergeix dels països que hem estudiat fins ara, sobretot per la localització, però és crucial: igual que a Itàlia, els vots dels partits d'ultradreta han pujat fins a portar-los a formar govern.
En aquest cas, ens trobem amb un parlament que es forma seguint el mètode D'Hondt, un mètode de representació proporcional emprat sobretot a estats federals que pertany a la classe dels mètodes de les mitjanes altes. Hi ha 13 districtes que es reparteixen 200 escons. En aquest cas, a diferència de per exemple Itàlia, el sistema electoral és més proporcional amb l'atorgament d'escons.

Nota: fins ara hem respectat els noms originals dels partits, però en aquest cas els emprarem traduïts al català per ajudar a la comprensió, ja que els noms acostumen a proporcionar detalls sobre la ideologia dels partits.

Compararem doncs les eleccions del 14 d'abril del 2019 amb les del 2 d'abril del 2023.

Partit	Escons 2019	Escons 2023
Coalició Nacional	38	48
Partit dels Finlandesos	39	46
Partit Socialdemòcrata	40	43
Partit del Centre	31	23
Lliga Verda	20	13
Aliança de l'Esquerra	16	11
Partit Popular Suec	9	9
Demòcrates Cristians	5	5
Moviment Ara	1	1
Coalició Åland	1	1
Total	200	200

N_{2023} = {Coalició Nacional, PdF, Partit Socialdemòcrata, Partit del Centre, Lliga Verda, Aliança de l'Esquerra, Partit Popular Suec, Demòcrates Cristians, Moviment Ara, Coalició Aland}

$$[101; 48, 46, 43, 23, 13, 11, 9, 5, 1, 1]$$

N_{2019} = {Partit Socialdemòcrata, PdF, Coalició Nacional, Partit del Centre, Lliga Verda, Aliança de l'Esquerra, Partit Popular Suec, Demòcrates Cristians, Moviment Ara, Coalició Aland}

$$[101; 40, 39, 38, 31, 20, 16, 9, 5, 1, 1]$$

La coalició que va governar després de les eleccions de 2019 estava formada per: Partit Socialdemòcrata, Partit del Centre, Lliga Verda, Aliança de l'Esquerra i Partit Popular Suec. Al capdavant, Antti Rinne com a primer ministre. Després d'un escàndol amb el servei postal finlandès, Rinne va dimitir, essent precedit per Sanna Marin.

Després de les eleccions del 2023, la coalició que es va formar el 2019 ja no tenia la majoria, donat el descens a les urnes sobretot dels partits d'esquerres. El Partit del Centre, a més, es va negar a tornar-hi a participar (vegeu [19]). De fet, la majoria dels partits que formaven aquesta coalició van preferir passar a formar part de l'oposició. Finalment, es va formar una nova coalició entre: Coalició Nacional, Partit dels Finlandesos, Partit Popular Suec i Demòcrates Cristians. Van aconseguir la majoria absoluta amb 108 escons.

Finlàndia té un tret característic que el fa un país molt interessant d'estudiar. Les coalicions de l'última dècada són totalment variades i no respecten mai l'eix esquerra-dreta [veure Annex A]. La coalició de Jyrki Katainen, entre el 2011 i el 2015, tenia als mateixos membres que la coalició del 2019 (excepte el Partit del Centre), tots tirant cap a l'esquerra, i els Demòcrates Cristians i la Coalició Nacional, partits de centredreta.

Una altra característica particular és que els partits de centre finlandesos, tot i no tenir molts vots, serveixen de crossa pels altres. El Partit Popular Suec, per exemple, ha sigut membre de tres de les últimes quatre coalicions que hi ha hagut al govern finlandès.

És a dir, són partits molt flexibles que funcionen com a frontisses i donen suport a les coalicions d'ambdues bandes quan els hi poden aportar certs nivells de poder. I és un país on les coalicions són constants, a diferència d'altres com Espanya, on la majoria dels governs han estat formats per un dels dos grans partits del país. Per acabar, és interessant assenyalar que Finlàndia no té cap partit d'extrema esquerra.

En aquest cas, el partit que més ens interessa és el Partit dels Finlandesos, conegut en finès com *Perussuomalaiset*. Es va fundar el 1995 després de la dissolució del Partit Rural Finlandès. Passa prou desapercebut fins al 2011, quan esdevé el tercer partit més votat. La seva ideologia és principalment nacionalista i conservadora, però també es presenten com una alternativa populista al neoliberalisme, agafant alguns conceptes de la ideologia típicament d'extrema esquerra. Els motius de l'auge dels partits extremistes a Finlàndia són més diversos. Per una banda, fa anys que hi ha un corrent d'immigració, especialment de països com Síria, Turquia o Iraq, que entra al país. Grups ètnics perseguits com ara els kurds han buscat refugi a Finlàndia, però la seva adaptació al nou estat no sempre ha sigut la que s'esperava. Igual que a Itàlia, això ha despertat un sentiment reaccionari entre parts de la població, que s'han decantat per partits més nacionalistes i amb una visió més antiimmigració. Per altra banda, s'ha de tenir en compte que Finlàndia comparteix una frontera de 1.340 km amb Rússia. L'amenaça per la seguretat nacional que això suposa ha fet que, sobretot recentment amb l'ombra de la guerra ucraïnesa, els ciutadans busquin partits que els prometin màxim compromís amb la seva seguretat, per molt dràstiques que puguin ser les mesures que prenen. Tot i això, la primera ministra Marin (Partit Socialdemòcrata) va ser qui va prendre la decisió de posicionar-se en contra de Rússia quan va començar la guerra i formalitzar l'aplicació de Finlàndia a l'OTAN.

Anem a veure doncs, quins partits es van negar a pactar amb PdF i quins hi van accedir:

Afinitats:

Els altres partits definits com a partits de dreta dins de Finlàndia són:

Coalició Nacional, Demòcrates Cristians, Moviment Ara.

En aquest cas, pel que comentàvem del fet que els partits de centre són crosses per ambdós costats de l'espectre, PdF també és afí amb:

Partit del Centre, Partit Popular Suec.

Disparitats:

Els partits definits com a esquerra són:

Partit Socialdemòcrata, Aliança de l'Esquerra, Aliança Verda.

Tots aquests partits van deixar constància que rebutjaven explícitament formar cap mena d'acord amb PdF, i abans que tornar a formar una coalició van preferir passar a l'oposició.

La Coalició Aland, pel seu caràcter regionalista, també consta com a incompatible.

Primer trobarem els valors de Shapley formals, els que no estan modificats per cap graf, i ara el definirem per aplicar-lo després:

Graf I: Incompatibilitats

PdF/Partit Socialdemòcrata, PdF/Aliança de l'Esquerra, PdF/Lliga Verda, PdF/Coalició Aland, Coalició Nacional/Aliança de l'Esquerra.

Per tot el que hem comentat fins ara, veiem que és el graf més petit de tots els països. L'últim enllaç apareix arran d'una declaració de l'Aliança de l'Esquerra durant les eleccions del 2023. És cert que havien pactat prèviament, però no ho han tornat a fer des de 2015.

Un cop conegudes les relacions dels partits, procedirem a aplicar les fórmules per trobar els valors de Shapley.

2019

Partit	% Escons	Valor Formal	Valor Modificat
Partit Socialdemòcrata	0.20	0.2056	0.2004
Partit dels Finlandesos	**0.195**	**0.1988**	**0.0595**
Coalició Nacional	0.19	0.1881	0.2373
Partit del Centre	0.155	0.1488	0.2671
Lliga Verda	0.10	0.1004	0.1171
Aliança de l'Esquerra	0.08	0.0702	0.0278
Partit Popular Suec	0.045	0.0488	0.0504
Demòcrates Cristians	0.025	0.0274	0.0373
Moviment Ara	0.005	0.006	0.0016
Coalició Åland	0.005	0.006	0.0016

2023

Partit	% Escons	Valor Formal	Valor Modificat
Coalició Nacional	0.24	0.2659	0.406
Partit dels Finlandesos	**0.23**	**0.2484**	**0.1187**
Partit Socialdemòcrata	0.215	0.2373	0.1738
Partit del Centre	0.115	0.0627	0.0964
Aliança de l'Esquerra	0.055	0.0627	0.0631
Lliga Verda	0.065	0.0587	0.0278
Partit Popular Suec	0.045	0.0413	0.0905
Demòcrates Cristians	0.025	0.0127	0.0119
Moviment Ara	0.005	0.0052	0.006
Coalició Åland	0.005	0.0052	0.006

Els escons de PdF augmenten en 7, un 17.95%. El seu valor de Shapley formal també augmenta per un valor de 0.0496, un 24.94%. I el valor de Shapley modificat pel graf I n'augmenta 0.0592, un 99.49%.

Finlàndia és un país on la pujada de l'extrema dreta és evident. S'han mantingut com a segona força principal del parlament, però amb la diferència que el 2023 el primer partit és Coalició Nacional, també de dretes. Això fa que, quan apliquem el graf d'incompatibilitats, el valor de PdF disminueixi menys, ja que són aliats de la primera força. I es representa amb l'augment del quasi 100% del valor modificat. És l'únic partit dels que hem estudiat on el seu valor modificat supera el valor formal. També veiem que l'augment del valor de Shapley, en els dos casos, és major que l'augment d'escons. Això ens diu que per molt que els votants del partit no hagin augmentat tant, li han conferit a PdF una intensificació no proporcional del seu poder. Si el comparem amb els altres països, veiem que és el cas on la ultradreta ha augmentat menys (a Espanya ha disminuït i a França i Itàlia han augmentat els escons per nombres molt més alts) però el seu poder real ha augmentat molt significativament. Tant que ha arribat al govern.

És curiós veure que en aquest cas, en cap de les dues eleccions hi ha hagut cap partit sense poder. És un país amb aliances molt variades i molt poques incompatibilitats, i per això quan afegim el graf cap partit es queda sense poder. També és interessant veure que el 2023 la Coalició Nacional gaudeix d'una posició molt privilegiada, ja que pocs partits refuten pactar-hi i això es tradueix en un valor modificat que abasta més del 40% del total. Un cop més, tenir poques incompatibilitats i que els altres en tinguin més es tradueix en un augment del valor de Shapley un cop hi afegim el graf.

9 Conclusions

L'objectiu d'aquest treball ha estat estudiar la teoria de jocs, concretament els jocs cooperatius amb utilitat transferible simples. Per a fer-ho, hem introduït els índexs de poder, que després de comparar-los i estudiar-ne les propietats els hem aplicat a l'estudi de la política actual. Ens hem centrat en la variació dels índexs de poder dels partits d'ultradreta europea, per trobar-hi tendències que puguin explicar la situació global actual.

També hem pogut veure com els índexs de poder, regles de repartiment del benefici dins dels jocs cooperatius, poden canviar quan la cooperació no és igual per tothom. Hem dut a terme aquest estudi buscant la resposta més realista a la pregunta inicial: ha augmentat realment el poder dels partits d'ultradreta? En termes de política, no es pot esperar que tots els jugadors es tractin entre ells per igual i estiguin igual de predisposats a arribar a acords. Per això vam introduir els grafs a la teoria de jocs. A través dels índexs de poder obtenim uns resultats que ens permetien entendre com eren de crucials els partits dins dels seus parlaments, i el que aporten a les coalicions possibles. Però quan hi introduïm el graf d'incompatibilitats, trobem una aproximació que s'assembla molt més a la realitat. Aplicant la teoria que hem vist al principi del treball, podíem restringir la cooperació dels partits i obtenir uns resultats que són molt més significatius a l'hora de veure quina influència tenen dins del cos parlamentari.

Hem estudiat quatre països crítics dins d'Europa, que ens han permès veure com ha canviat el repartiment del poder des de fa quatre anys fins ara. La situació que vivim ha canviat, i també ho ha fet la política. Hem fet l'elecció de països segons dos criteris: la proximitat geogràfica a Espanya (França i Itàlia) i la presència de la ultradreta al govern estatal (Itàlia i Finlàndia).
Presentem els resultats de la forma següent: veiem els canvis que han experimentat els partits d'ultradreta que hem estudiat, primer en termes de valors absoluts i després observant-ne el creixement percentual.

Partit (País)	**△ Escons**	**△ V. Formal**	**△ V. Modificat**
Vox (ES)	-19	-0.0245	0
Rassemblement Nacional (FR)	+81	+0.1499	0
Partit dels Finlandesos (FI)	+7	+0.0496	+0.0592
Fratelli d'Italia (IT)	+87	+0.3331	+0.3076

Partit (País)	**△ % Escons**	**△ % V. Formal**	**△ % V. Modificat**
Vox (ES)	-36.53	-13.87	0
Rassemblement Nacional (FR)	+1012.5	+	0
Partit dels Finlandesos (FI)	+17.95	+24.94	+99.49
Fratelli d'Italia (IT)	+485.62	+	+

A la segona taula, quan trobem un signe + sol ens representa un augment del valor. El partit tenia un valor 0 a les primeres eleccions i ara és positiu, i per això no podem representar-ho percentualment.

Hem ordenat els països segons ha crescut la influència dels partits. Com hem vist, Espanya és l'únic país estudiat on ha baixat el nombre d'escons del partit d'extrema dreta. Això els ha portat a una pèrdua de poder, tot i que menor que la pèrdua de votants. En canvi, als altres països, l'augment d'escons dels partits d'ultradreta els ha portat a augmentar el seu valor de Shapley formal. També veiem que el valor modificat s'ha mantingut en 0 per tots els països on l'extrema dreta no ha entrat al parlament (Espanya i França), però ha augmentat significativament als que sí (Finlàndia i Itàlia). Això ens porta a una constatació: si el partit d'ultradreta té un valor de Shapley positiu inclòs després d'aplicar el graf d'incompatibilitats, forma part del govern actual. És a dir, als països on els partits d'ultradreta tenen possibilitat de cooperació guanyadora amb altres, formen coalicions i acaben al poder.

Sabíem que contestar la pregunta inicial seria difícil, però veient els resultats, ens agradaria extreure'n dues conclusions. Observant els valors de França, per exemple, podem dir que un augment desorbitat d'escons per un partit no significa necessàriament que el seu poder també augmenti de la mateixa manera, cosa que s'ha de tenir en compte quan escoltem el discurs alarmista. Però observant els altres països, veiem una tendència de desproporcionalitat entre escons i valor formal de Shapley, ja que aquest segon tendeix a baixar menys quan disminueixen els escons i a pujar més quan augmenten. I veient els resultats i el que comentàvem al paràgraf anterior sobre els partits amb valors modificats positius, no podem desmentir el que hem sentit: l'auge de l'extrema dreta és real, i els valors que hem trobat a través dels índexs de poder ho corroboren.

Finalment, volem parlar sobre les limitacions d'aquest treball. La política i les matemàtiques són dos camps que funcionen de manera oposada. La política és flexible, s'adapta i canvia amb cada situació nova. És humana i subjectiva, i està molt condicionada a jugadors que actuen d'una manera que no sempre es pot predir. Les matemàtiques ens permeten estudiar-la, però des d'un punt de vista objectiu, exacte i que suposa sempre el comportament més racional per part dels jugadors. Hem fet el millor esforç per precisar el poder que els partits estudiats tenen als seus parlaments, però l'aritmètica parlamentària s'ha de tenir en compte. La formació de coalicions és un procés complex i fluid, que es pot alterar en qualsevol moment amb una decisió inesperada per part d'un jugador. Alhora, hi ha jugadors que, amb els mateixos escons que altres, es converteixen en molt més significatius sense que això es vegi reflectit a les xifres obtingudes. Que un partit com Vox tingui un índex que ha baixat, i nul quan apliquem el graf, no impedeix que sigui crucial al parlament. És una crossa pel PP i molt important a diverses demarcacions espanyoles. Un partit pot tenir la simpatia dels ciutadans, i que això el faci un jugador que aporta més del que matemàticament es podria pensar.

Per altra banda, hem aplicat un graf d'incompatibilitats, però no és suficient. Ens trobem en un enfocament matemàtic d'un cas polític, el qual fa que no sigui totalment exacte a la realitat. Si volguéssim aproximar-la el màxim possible, hauríem d'introduir més restriccions. El graf d'afinitats que s'ha discutit a la teoria, per exemple. També s'haurien pogut afegir altres tipus de grafs, on es veiessin representades les afinitats unilaterals entre els grups o les preferències dels partits a l'hora de pactar. També ens agradaria poder estudiar tots els països europeus, per poder tenir una mostra completa i poder estudiar millor les tendències globals.

Personalment, crec que aquest projecte dona un enfocament numèric a un problema que cada cop preocupa més als europeus. Hem intentat estudiar el creixement de la ultradreta per a una mostra de països, però sense oblidar que els canvis socials sempre tenen un origen, i hem procurat no oblidar que a cada país hi ha un perquè específic d'aquest auge. Hem constatat que els resultats electorals realment estan conferint un augment de poder als partits d'ultradreta. Ara hem d'entendre les raons socials i la situació personal en la qual es troben els ciutadans a l'hora de votar per poder comprendre perquè busquen en aquesta ideologia una solució als problemes que els preocupen.

Hem pogut aprofundir molt en la teoria de jocs i usar-la en un camp que és crucial entendre, la política. A pesar de les limitacions, pensem que és un camp on es pot aplicar molt bé la teoria que hem estudiat, ja que el poder es confereix a través de votacions. Les quotes i les majories estan molt establertes, i el poder individual que té cada jugador també. Això fa que tingui un alt interès estudiar-ho matemàticament, ja que és un procés amb una aritmètica molt clara. També hem vist que totes les situacions en què hi hagi jugadors enfrontats que cooperen en cerca de coalicions es poden estudiar amb la teoria de jocs i que afegir-hi restriccions ens ajuda a modelar aquests escenaris de forma molt més pròxima a la realitat. Que al final, és el que busquem amb la matemàtica aplicada.

10 Bibliografia

Referències

[1] Mikel Álvarez Mozos. “The Banzhaf value in TU games with restricted cooperation”. A: (2009).

[2] John F. Banzhaf. “Weighted voting doesn’t work: a mathematical analysis”. A: *Rutgers Law Review, 19* (1965), pàg. 317 - 343.

[3] Olatz Barriuso. *UPN, PP y Vox trasladan el clamor contra Sánchez a Pamplona tras su pacto con Bildu*. Las Provincias. Section: politica. 17 de des. de 2023. URL: https://www.lasprovincias.es/politica/feijoo-pamplona-rechazar-mocion-psoebildu-sanchez-quiere-20231217121124-ntrc.html (cons. 15-01-2024).

[4] Mark Burgin i Lloyd S. Shapley. “Enhanced Banzhaf Power Index and its Mathematical Properties”. A: *International Conference on Game Theory Stony Brook* WP-797 (2001).

[5] Emilio Calvo i Esther Gutierrez. “A value for cooperative games with a coalition structure”. A: *Discussion Papers in Economic Behaviour* (2011).

[6] Francesc Carreras i Guillermo Owen. “Valor coalicional y estrategias parlamentarias”. A: *Reis* 71 (1995), pàg. 157. ISSN: 02105233. DOI: 10.2307/40183866. URL: https://www.jstor.org/stable/10.2307/40183866?origin=crossref.

[7] Pradeep Dubey i Lloyd S. Shapley. “Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index”. A: *The Rand Paper Series* P-6016 (1977).

[8] Julio González Díaz, Ignacio García-Jurado i María Gloria Fiestras Janeiro. *An introductory course on mathematical game theory*. Graduate studies in mathematics vol. 115. Providence (R.I.): American mathematical society, 2010. ISBN: 978-0-8218-5151-7.

[9] Martí Jané Ballarín. “The Complexity of Power Indices in Voting Games with Incompatible Players”. A: *Col·lecció d’Economia E23/441* (2023).

[10] Adam Karczmarz et al. “Improved Feature Importance Computations for Tree Models: Shapley vs. Banzhaf”. A: arXiv:2108.04126 (2021). URL: http://arxiv.org/abs/2108.04126.

[11] Vassili Kolokoltsov i Oleg Alekseevich Malafeev. *Understanding game theory: introduction to the analysis of many agent systems with competition and cooperation.* OCLC: ocn534497375. Singapore ; Hackensack, NJ: World Scientific, 2010. 286 pàg. ISBN: 978-981-4291-71-2.

[12] *L’Svp sceglie la destra: via libera all’accordo con Fratelli d’Italia, Lega e Freiheitlichen*. il Dolomiti. 2 de des. de 2023. URL: https://www.ildolomiti.it/politica/2023/lsvp-sceglie-la-destra-via-libera-allaccordo-con-fratelli-ditalia-lega-e-freiheitlichen (cons. 15-01-2024).

[13] Ehud Lehrer. “An Axiomatization of the Banzhaf Value”. A: *International Journal of Game Theory* 17.2 (1988), pàg. 89 - 99. URL: https://EconPapers.repec.org/RePEc:spr:jogath:v:17:y:1988:i:2:p:89-99.

[14] Haitao Li et al. “Simplification of Shapley value for cooperative games via minimum carrier”. A: *Control Theory and Technology* 19 (2021), pàg. 157 - 169.

[15] Roger B Myerson. "Graphs and Cooperation in Games". A: *Discussion Paper No. 246* (1976).

[16] Yadati Narahari. "Game Theory. Chapter 32. The Shapley Value." A: (2012). URL: https://gtl.csa.iisc.ac.in/gametheory/ln/web-cp5-shapley.pdf.

[17] Lionel Penrose. "The elemenatary statistics of majority voting". A: *Journal of the Royal Statistical Society, 109* (1946), pàg. 53-57.

[18] Redacción1. *ITALIA: Meloni aguanta durante 2023 y se mantiene muy por encima de un PD que logró deshacer el sorpasso del M5S*. El Electoral. 2024. URL: https://elelectoral.com/2024/01/italia-meloni-aguanta-durante-2023-y-se-mantiene-muy-por-encima-de-un-pd-que-logro-deshacer-el-sorpasso-del-m5s/ (cons. 15-01-2024).

[19] Aleksi Teivainen. *Current ruling coalition can't continue after elections, states Saarikko*. Helsinki Times. Section: Politics. 10 de març de 2023. URL: https://www.helsinkitimes.fi/finland/finland-news/politics/23112-current-ruling-coalition-can-t-continue-after-elections-states-saarikko.html (cons. 15-01-2024).

[20] Oriol Tejada i Mikel Álvarez-Mozos. "Graphs and (levels of) cooperation in games: Two ways how to allocate the surplus". A: *Mathematical Social Sciences* 93 (2018), pàg. 114-122. ISSN: 01654896. DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2018.02.005. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0165489618300179.

11 Annex

A Espectres polítics i coalicions

Figura 1: Coalicions italianes dels últims quatre mandats.

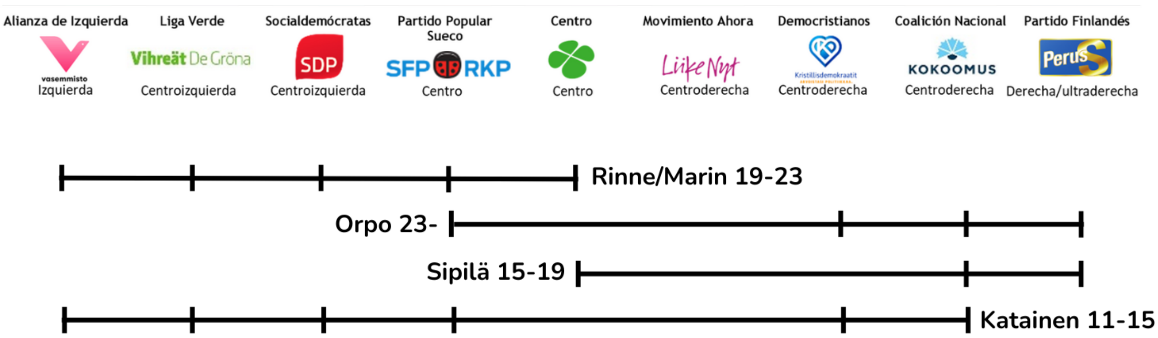

Figura 2: Coalicions finlandeses dels últims quatre mandats.

[18]

B Codi Python

Listing 1: Càlcul dels valors de Shapley formal i modificat (dades emprades per Espanya 2023)

```
from itertools import combinations
import math as m

def sorted_k_partitions(seq, k):
    n = len(seq)
    groups = []  # a list of lists, currently empty

    def generate_partitions(i):
        if i >= n:
            yield list(map(tuple, groups))
        else:
            if n - i > k - len(groups):
                for group in groups:
                    group.append(seq[i])
                    yield from generate_partitions(i + 1)
                    group.pop()
            if len(groups) < k:
                groups.append([seq[i]])
                yield from generate_partitions(i + 1)
                groups.pop()

    result = generate_partitions(0)

    # Sort the parts in each partition in short lexicographic
        order
    result = [sorted(ps, key=lambda p: (len(p), p)) for ps in
        result]

    # Sort partitions by the length of each part, then
        lexicographically
    result = sorted(result, key=lambda ps: (*map(len, ps), ps))

    return result

# Your data
valor_escons = [136, 122, 33, 31, 7, 7, 6, 5, 1, 1, 1]
B = {1: [4, 5, 7, 9], 2: [3, 11], 3: [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9], 4:
    [1, 3, 11], 5: [1, 3], 6: [3], 7: [1, 3], 8: [3], 9: [1, 3],
    10: [0], 11: [2, 4]}



# Precalculate necessary variables for the following functions
```

```
n = len(valor_escons)
N = list(range(1, n+1))
escons_totals = sum(valor_escons)

#subconjunts
s = []

for i in range(n):
    s.extend(list(combinations(N, i + 1)))


def valor_v(partits):
    escons = 0
    for p in partits:
        escons += valor_escons[p - 1]
    if (escons >= (escons_totals // 2) + 1):
        return 1
    return 0

def valor_v_b(partits):
    """
    partits: iterable amb els partits a puntuar junts
       considerant incompatibilitats
    ---
    retorna 0 o 1 depenent de si alguna de les combinacions de
    partits
    t   valor 1 en la funci   valorv() nom s per a aquelles
    combinacions B admissibles
    """
    sb = []
    n_participants = len(partits)
    # per cada particio de partits p
    for k in range(1, n_participants + 1):
        for p in sorted_k_partitions(list(partits), k):
            valid = True
            # per cada agrupacio de partits dins de la particio
                p
            for group in p:
                # per cada partit en l'agrupacio group dins la
                    particio p
                for i in range(len(group) - 1):
                    # comprobem la incompatibilitat amb la resta
                        del seu
                    # grup en la particio p
                    if any(x in group for x in B[group[i]]):
                        valid = False
            # si tots els grups son valids afegim la particio
                per a ser
            # tractada despres
```

```
            if valid:
                sb.append(p)

    m = []
    # per cada particio p
    for p in sb:
        suma = 0
        # per cada grup k en la particio p
        for k in p:
            # calculem el valor V(k) i el sumem al valor de la particio
            suma += valor_v(k)
        m.append(suma)
    return max(m)




def valor_shapley(jugador):
    s_subconjunt = []
    for t in s:
        if jugador not in t:
            s_subconjunt.append(t)
    n_fact = m.factorial(n)
    sumatori = 0
    for t in s_subconjunt:
        primer_terme = (m.factorial(len(t)) * m.factorial(n - len(t) - 1)) / n_fact
        segon_terme = valor_v(t + (jugador,)) - valor_v(t)
        sumatori += (primer_terme * segon_terme)
    return round(sumatori, 4)

for i in range(n):
    print(valor_shapley(i + 1))

def valor_shapley_b(jugador):
    s_subconjunt = []
    for t in s:
        if jugador not in t:
            s_subconjunt.append(t)
    n_fact = m.factorial(n)
    sumatori = 0
    for t in s_subconjunt:
        primer_terme = (m.factorial(len(t)) * m.factorial(n - len(t) - 1)) / n_fact
        segon_terme = valor_v_b(t + (jugador,)) - valor_v_b(t)
        sumatori += (primer_terme * segon_terme)
    return round(sumatori, 4)
```

```
for i in range(n):
    print("JugadorB_" + str(i + 1) + ":", valor_shapley_b(i + 1)
    )
```

Nota: El codi ha sigut adaptat del treball de fi de grau "Formació de coalicions en contextos de cooperació restringida; aplicació a la formació de coalicions postelectorals" de Núria Nievas Viñals (2018, UB).