



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

INTEGRAL D'ITÔ I EQUACIONS DIFERENCIALS ESTOCÀSTIQUES

Autor: Adrià Solé Falgà

Director: Dr. Carles Rovira Escofet
Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 11 de gener de 2026

Abstract

This thesis begins by giving four strokes on stochastic processes and with the characterization of Brownian motion, highlighting its fundamental properties and the highly irregular nature of its trajectories. Subsequently, the Itô integral is constructed and its main properties are analyzed. The Itô formula is then presented as a generalization of the classical chain rule in the stochastic setting.

Afterwards, stochastic differential equations are introduced, together with an existence and uniqueness theorem under Lipschitz conditions. Finally, the practical relevance of stochastic differential equations is illustrated through three prominent models: Black-Scholes-Merton, Ornstein-Uhlenbeck and SABR, and numerical methods for the simulation of trajectories are presented, with examples that illustrate their behavior and accuracy.

Resum

Aquest treball s'inicia donant quatre pinzellades sobre processos estocàstics i amb la caracterització del moviment brownià, tot destacant-ne les propietats fonamentals i el caràcter irregular de les seves trajectòries. A continuació, es construeix la integral d'Itô i se n'analitzen les propietats principals. Seguidament, es presenta la fórmula d'Itô, que generalitza la regla de la cadena clàssica al context estocàstic.

Posteriorment, s'introdueixen les equacions diferencials estocàstiques i s'enuncia un teorema d'existència i unicitat de solució sota hipòtesis de Lipschitz. Finalment, s'il·lustra la utilitat pràctica d'aquestes equacions mitjançant tres models rellevants: Black-Scholes-Merton, Ornstein-Uhlenbeck i SABR, i es presenten mètodes numèrics per a la simulació de trajectòries, amb exemples que permeten analitzar-ne el comportament i la precisió.

Agraïments

Vull agrair al meu tutor, el Dr. Carles Rovira Escofet, la seva ajuda, disponibilitat i consells al llarg de la redacció d'aquest treball. La seva orientació i les eines bibliogràfiques proporcionades han estat fonamentals per a l'elaboració d'aquesta memòria.

També vull donar les gràcies a la meva família per la seva paciència i el seu suport incondicional durant tota aquesta etapa.

Finalment, agraeixo als meus amics per estar al meu costat en tot moment.

Índex

1	Introducció	1
2	Moviment Brownià	3
2.1	Preliminars	3
2.2	Definició i propietats bàsiques	4
2.3	Trajectòries	6
3	Càlcul estocàstic d'Itô	10
3.1	Construcció de la integral d'Itô	10
3.2	Exemples inicials d'integrals d'Itô	20
3.3	Propietats de la integral d'Itô	23
3.4	Diferencial estocàstic i fórmula d'Itô	26
3.5	Equacions diferencials estocàstiques (EDE)	31
3.5.1	Teorema d'existència i unicitat de solució	33
4	Models regits per EDE i simulacions	36
4.1	Model de Black-Scholes-Merton	36
4.2	Model d'Ornstein-Uhlenbeck	38
4.3	Model SABR	39
4.4	Simulació de trajectòries	40
4.4.1	Mètode d'Euler-Maruyama	41
4.4.2	Mètode de Milstein	44
5	Conclusions	47
	Bibliografia	48
A	Codis de Programació en R	49

Capítol 1

Introducció

La caracterització matemàtica de la incertesa i el seu paper en sistemes dinàmics ha esdevingut un dels eixos centrals del progrés matemàtic contemporani. Des de l'estudi pioner del moviment brownià fins als models actuals de mercats financers o de propagació epidèmica, la necessitat d'incorporar l'aleatorietat en les descripcions deterministes ha conduït al desenvolupament d'una disciplina tècnica i aplicada: el càlcul estocàstic.

Aquest treball té com a objectiu exposar de manera clara i progressiva els fonaments d'aquesta àrea, centrant-se en dos conceptes essencials: la integral d'Itô i les equacions diferencials estocàstiques.

El punt de partida és el moviment brownià, un procés estocàstic amb trajectòries contínues quasi segurament, però que no són diferenciables en cap punt i tenen variació total infinita en qualsevol interval. Aquesta manca de regularitat impossibilita l'ús de la integral de Riemann-Stieltjes per a integrar respecte del moviment brownià, fet que va motivar la definició d'una nova integral per part del matemàtic japonès Kiyosi Itô l'any 1942. La seva construcció permet donar sentit a expressions de la forma

$$\int_0^T f(t) dW(t),$$

on $W(t)$ és un moviment brownià, i obre la porta a una teoria d'integració coherent en contextos aleatoris.

En aquesta línia, al capítol 3 es construeix la integral d'Itô de forma rigorosa, començant per processos simples i estenent-la després a una classe més àmplia per aproximació. S'hi destaquen propietats fonamentals com la linealitat, la isometria i el fet que la integral d'Itô defineix una martingala. Seguidament, es tracten les diferents versions de la fórmula d'Itô, que és l'eina central del càlcul estocàstic que generalitza la regla de la cadena del càlcul ordinari. Aquest resultat és el pont natural cap a la teoria de les equacions diferencials estocàstiques, essencials quan l'evolució temporal del sistema està subjecta a influències aleatòries. Per acabar aquest capítol s'exposa un teorema d'existència i unicitat de solució sota condicions de Lipschitz.

Al capítol 4 es presenten aplicacions pràctiques de les equacions diferencials estocàstiques tot estudiant tres models clàssics: el model de Black-Scholes-Merton usat en finances, el model d'Ornstein-Uhlenbeck, que es caracteritza pel fenomen de reversió a la mitjana, i el model SABR, àmpliament utilitzat en la valoració de derivats de tipus d'interès. A més, s'introdueixen tècniques de simulació numèrica, descrivint el mètode d'Euler-Maruyama i el mètode de Milstein il·lustrant la seva implementació mitjançant exemples pràctics que permeten visualitzar el comportament de les solucions i analitzar la precisió dels mètodes numèrics emprats.

Capítol 2

Moviment Brownià

L'objectiu d'aquest capítol és introduir el moviment brownià unidimensional. Tot i així, abans de donar una definició formal i estudiar les seves propietats fem un petit resum d'algunes nocions relacionades amb els processos estocàstics. Seguidament, ens centrem en la definició del moviment brownià i exposem les propietats més rellevants, fent èmfasi en les seves trajectòries. Finalment, donem un resultat que ens permet motivar la definició de les integrals estocàstiques.

Fixem un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on Ω és l'espai mostral, $\mathcal{F}$ una σ -àlgebra i P una mesura de probabilitat. Això s'entendrà implícitament d'ara endavant.

2.1 Preliminars

Definició 2.1. Un *procés estocàstic* amb espai d'estats S és una família de variables aleatòries $\{X_t, t \in T\}$ tal que $X(t, \omega) : T \times \Omega \rightarrow S$. Al conjunt T l'anomenem espai de paràmetres.

Els processos estocàstics són una eina molt utilitzada per modelar l'evolució de diferents fenòmens físics, biològics, econòmics, etc. Destaquem el següent:

- Habitualment la variable t representa el temps. Quan $T = \{1, 2, \dots\}$, aleshores estem davant d'un procés estocàstic discret, mentre que si T és no numerable, el procés és continu.
- Generalment tindrem $T = [0, \infty)$ i $S = \mathbb{R}$, és a dir processos estocàstics continus a valors reals i ho denotarem per $\{X(t), t \geq 0\}$. Pel que fa a la notació, és usual utilitzar $X(t)$ o X_t per referir-se a $X(t, \omega)$.
- Si fixem un valor de $\omega \in \Omega$, diguem-li $\bar{\omega}$, aleshores $X(t, \bar{\omega})$ representa una *trajectòria* o *realització* del procés. Si, en canvi, fixem el valor de t , $X(\bar{t}, \omega)$ fa referència a un estat del procés a temps $\bar{t}$.

Ara introduïrem conceptes que caracteritzen als processos estocàstics.

Definició 2.2. Un procés estocàstic $\{X(t), t \geq 0\}$ té *increments independents* si les variables aleatòries $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_k) - X(t_{k-1})$ són independents per a tot $t_1 < t_2 < \dots < t_k$.

Definició 2.3. Una *filtració* és una família $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ de σ -àlgebres de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ per a tot $0 \leq s \leq t$. Diem que $\{X(t), t \geq 0\}$ és un procés *adaptat* a la filtració si X_t és $\mathcal{F}_t$ -mesurable per a tot $t \geq 0$.

Definició 2.4. Donat un procés estocàstic $\{X(t), t \geq 0\}$, es defineix la seva *filtració natural* com la successió de σ -àlgebres $\mathcal{F}_t = \sigma\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$, amb $t \geq 0$.

Intuïtivament la noció de procés adaptat a una filtració vol dir que fixat un $t \geq 0$ la filtració $\mathcal{F}_t$ proporciona la suficient informació per tal de conèixer on es troba el procés a temps t . D'altra banda, podem entendre una filtració natural com la filtració més petita sobre la qual $X(t)$ és $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Definició 2.5. Un procés estocàstic $\{X(t), t \geq 0\}$ és una *martingala* respecte de la filtració $\mathcal{F}_t$ si es verifica:

1. $X(t) \in L^1$ per a tot $t \geq 0$, és a dir, $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty$.
2. $X(t)$ és adaptat a la filtració $\mathcal{F}_t$.
3. $\mathbb{E}(X(t) | \mathcal{F}_s) = X(s)$ per a tot $s, t \in [0, \infty)$ amb $s \leq t$.

2.2 Definició i propietats bàsiques

Definició 2.6. Un *moviment brownià estàndard* (o procés de Wiener) és un procés estocàstic $\{W(t), t \geq 0\}$ tal que satisfà les propietats següents:

1. $W(0) = 0$ quasi segurament.
2. Les trajectòries $t \mapsto W(t)$ són contínues quasi segurament.
3. $W(t)$ té increments independents.
4. Per a $0 \leq s < t$, l'increment $W(t) - W(s)$ segueix una llei normal d'esperança 0 i variància $t - s$, això és, $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.

Proposició 2.7. Siguin $W(s)$ i $W(t)$ dos moviments brownians unidimensionals, aleshores $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = \min\{s, t\}$ per a tot $s, t \geq 0$.

Demostració. Suposem que $s < t$, aleshores

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(s)W(t)) &= \mathbb{E}(W(s)(W(t) - W(s))) + \mathbb{E}(W(s)^2) \\ &= \mathbb{E}(W(s)) \underbrace{\mathbb{E}(W(t) - W(s))}_0 + s = s = \min\{s, t\}, \end{aligned}$$

on hem emprat que $W(t) - W(s)$ i $W(s)$ són independents i que

$$\mathbb{E}(W(s)^2) = \mathbb{E}((W(s) - W(0))^2) = \text{Var}(W(s) - W(0)) = s.$$

□

Proposició 2.8 (Propietat d'escala). Si $W(t)$ és un moviment brownià estàndard, llavors $X(t) = aW(t/a^2)$ també ho és per a tot $a > 0$.

Demostració. $X(t)$ compleix la definició de moviment brownià estàndard, ja que:

1. $X(0) = aW(0/a^2) = aW(0) = 0$ quasi segurament.
2. Clarament les trajectòries $t \mapsto X(t)$ són contínues quasi segurament.
3. Prenem $t > s$, aleshores notem que els increments de $X(t)$ són de la forma $X(t) - X(s) = a(W(t/a^2) - W(s/a^2))$. Ara, com que $W(t)$ té increments independents, $W(t/a^2) - W(s/a^2)$ és independent de $W(u/a^2)$ per $u < s$ i així concloem que els increments de $X(t)$ també són independents.
4. $X(t) - X(s) = a(W(t/a^2) - W(s/a^2))$ seguirà tenint una distribució normal. D'altra banda

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t) - X(s)) &= \mathbb{E}(a(W(t/a^2) - W(s/a^2))) \\ &= a \underbrace{\mathbb{E}(W(t/a^2) - W(s/a^2))}_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X(t) - X(s)) &= \text{Var}(a(W(t/a^2) - W(s/a^2))) \\ &= a^2 \underbrace{\text{Var}(W(t/a^2) - W(s/a^2))}_{t/a^2 - s/a^2} = t - s. \end{aligned}$$

Per tant, podem assegurar que $X(t) - X(s) \sim N(0, t - s)$.

□

Teorema 2.9 (Teorema de caracterització de Paul Lévy). Sigui $\{W(t), t \geq 0\}$ un procés estocàstic i denotem per $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$ la filtració generada per ell. Aleshores $\{W(t), t \geq 0\}$ és un moviment brownià si i només si es compleixen les següents condicions:

1. $W(0) = 0$ quasi segurament.
2. Les trajectòries $t \mapsto W(t)$ són contínues quasi segurament.
3. $\{W(t), t \geq 0\}$ i $\{W(t)^2 - t, t \geq 0\}$ són martingales respecte de la filtració $\mathcal{F}_t$.

Demostració. Podem trobar una demostració general i rigorosa d'aquest teorema a la pàgina 150 de [10]. □

Conclourem aquest capítol proporcionant un seguit de resultats que descriuen la naturalesa oscil·latòria de les trajectòries del moviment brownià.

2.3 Trajectòries

Sabem que les trajectòries del moviment brownià són contínues quasi segurament però veurem que no són diferenciables en cap instant de temps. Vegem-ne un exemple gràficament:

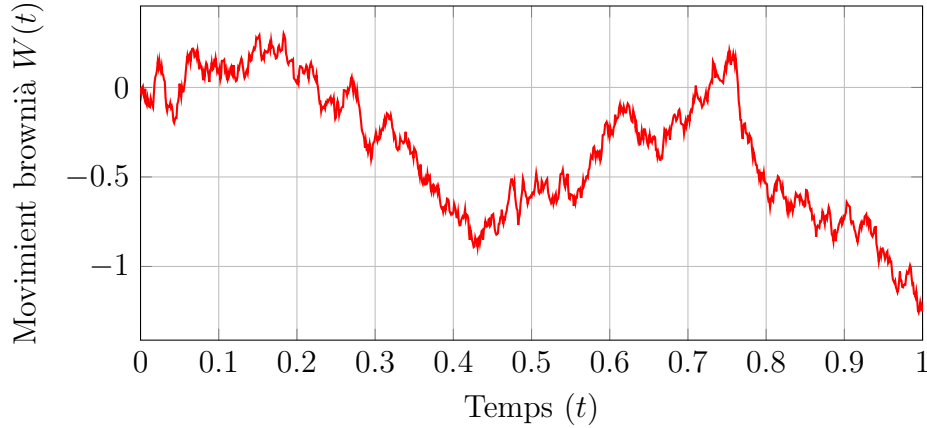


Figura 2.1: Trajectòria d'un moviment brownià

Definició 2.10. Donada una funció $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, definim la seva *variació total* com

$$VT(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|,$$

on $\mathcal{P}$ és el conjunt de totes les particions $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ de l'interval $[0, T]$ i el suprem es pren sobre totes les possibles particions d'aquest interval.

Si $VT(f) < \infty$, direm que f és de variació total acotada en $[0, T]$. Altrament, f és de variació total infinita.

Podem interpretar la variació total de f com la quantitat total de canvi vertical de la seva gràfica independentment del sentit.

Definició 2.11. Donada $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, definim la seva *variació quadràtica* com el límit, si existeix,

$$VQ(f) := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2,$$

on $\|P\| = \max_j |t_{j+1} - t_j|$ és la malla de la partició $P = \{0 = t_0 < \dots < t_n = T\}$.

Intuïtivament la variació quadràtica de f mesura com de bruscs són els canvis de la gràfica de la funció.

Sigui $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$, on $t_j^n = \frac{jT}{n}$, una partició de l'interval $[0, T]$ en n parts iguals. Denotem els increments del moviment brownià W com

$$\Delta_j^n W = W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n).$$

Proposició 2.12. La variació quadràtica del moviment brownià $W(t)$ en l'interval $[0, T]$ és igual a T en L^2 , és a dir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 = T \text{ en } L^2.$$

Demostració. Com que per definició de convergència en L^2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 - T \right)^2 \right) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 = T \text{ en } L^2,$$

demostrarem la part esquerra d'aquesta equivalència.

El fet de prendre una partició uniforme de l'interval $[0, T]$ implica que

- $\Delta_j^n W = W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n) \sim N(0, T/n)$.
- Els increments $\Delta_j^n W$ són independents per a $j \neq k$.

D'altra banda sabem que es verifiquen aquestes tres igualtats:

- $\mathbb{E}(\Delta_j^n W) = 0$.
- $\mathbb{E}((\Delta_j^n W)^2) = \text{Var}(\Delta_j^n W) = \frac{T}{n}$.
- $\mathbb{E}((\Delta_j^n W)^4) = 3 \left(\frac{T}{n} \right)^2$, per ser $\Delta_j^n W$ una variable aleatòria gaussiana.

Expandint el quadrat que apareix a l'expressió que volem demostrar obtenim

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 - T \right)^2 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 \right)^2 - 2T \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 + T^2.$$

Ara calculem l'esperança de cada terme:

1. Pel primer terme tenim

$$\mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 (\Delta_k^n W)^2 \right).$$

Separem en dos casos:

- Si $j = k$, $\mathbb{E}((\Delta_j^n W)^4) = 3 \left(\frac{T}{n} \right)^2$ i hi ha n termes d'aquest tipus.
- Si $j \neq k$, $\mathbb{E}((\Delta_j^n W)^2 (\Delta_k^n W)^2) = \mathbb{E}((\Delta_j^n W)^2) \cdot \mathbb{E}((\Delta_k^n W)^2) = \left(\frac{T}{n} \right)^2$ i hi ha $n(n-1)$ termes d'aquest tipus.

Per tant,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 \right)^2 \right) &= n \cdot 3 \left(\frac{T}{n} \right)^2 + n(n-1) \cdot \left(\frac{T}{n} \right)^2 \\ &= \frac{3T^2}{n} + \frac{(n-1)T^2}{n} = \frac{2T^2}{n} + T^2.\end{aligned}$$

2. Pel segon terme tenim

$$\mathbb{E} \left(-2T \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 \right) = -2T \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} ((\Delta_j^n W)^2) = -2T \cdot n \cdot \frac{T}{n} = -2T^2.$$

3. Pel tercer terme tenim $\mathbb{E}(T^2) = T^2$.

Combinant els tres termes arribem a

$$\mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 - T \right)^2 \right) = \left(T^2 + \frac{2T^2}{n} \right) - 2T^2 + T^2 = \frac{2T^2}{n}.$$

Així doncs,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 - T \right)^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2T^2}{n} = 0.$$

D'aquesta manera queda demostrat que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n W)^2 = T \text{ en } L^2.$$

□

Aquesta proposició justifica la idea heurística que $(dW(t))^2 \approx dt$, de manera que els productes $(dt)^2$ i $dt dW(t)$ esdevenen negligibles davant de dt i $dW(t)$. Aquestes regles es recullen en la *taula d'Itô*, que és una eina molt útil en el càlcul estocàstic.

$\cdot$	$dW(t)$	dt
$dW(t)$	dt	0
dt	0	0

Taula 2.1: Taula d'Itô

Teorema 2.13. Amb probabilitat 1, les trajectòries del moviment brownià $W(t)$ no són diferenciables en cap instant de temps t .

Demostració. La demostració d'aquest teorema es troba en [5] pàgines 110-111. □

Corol·lari 2.14. Les trajectòries d'un moviment brownià $W(t)$ són de variació total infinita quasi segurament. És a dir, amb probabilitat 1, les trajectòries del moviment brownià no són de variació total acotada en cap interval de temps.

Demostració. Mostrarem que si una trajectòria d'un moviment brownià tingués variació total finita en algun interval, aleshores seria diferenciable en gairebé tots els punts d'aquest interval, contradient el teorema anterior. Usarem que si una funció $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ té variació total finita, aleshores és diferenciable en gairebé tot punt.

Suposem, per contradicció, que existeix un conjunt de probabilitat no nul·la on alguna trajectòria browniana té variació total finita en algun interval $[a, b]$. Aleshores, pel resultat que acabem de citar, aquesta trajectòria seria diferenciable en gairebé tot punt de $[a, b]$, en particular, existiria algun punt $t_0 \in [a, b]$ on la trajectòria seria diferenciable. Però pel Teorema 2.13 cap trajectòria browniana és diferenciable en cap punt, amb probabilitat 1. Per tant, les trajectòries del moviment brownià tenen variació total infinita en qualsevol interval. $\square$

Aquest últim resultat té implicacions profundes en la teoria d'integrals estocàstiques que desenvoluparem al següent capítol. Concretament, les integrals de la forma

$$I = \int_0^T f(t) dW(t)$$

no poden definir-se trajectòria a trajectòria, és a dir, no poden definir-se per a cada $\omega \in \Omega$ de manera individual com les integrals de Lebesgue-Stieltjes, ja que per poder fer això seria necessari que $W(t)$ fos de variació total acotada i ja hem vist que no és així. Per superar aquesta limitació, aprofitarem que el moviment brownià és un procés estocàstic amb prou bones propietats i utilitzarem convergències en sentit més feble per construir la integral estocàstica.

De manera més rigorosa, la integral de Lebesgue-Stieltjes d'una funció f respecte a una altra funció g es construeix com un límit de sumes de la forma

$$\sum_i f(t_i^*)[g(t_{i+1}) - g(t_i)],$$

on $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$. Per tal que aquest límit existeixi i estigui ben definit per a una classe àmplia de funcions f , es requereix que la funció g sigui de variació total acotada. Això garanteix que les sumes convergeixin independentment de com es triïn els punts intermedis t_i^* . Com que les trajectòries brownianes tenen variació total infinita quasi segurament, aquesta teoria clàssica és inaplicable.

Per superar aquesta limitació, es renuncia a definir la integral per a cada ω de manera independent i s'adopta una perspectiva estocàstica. L'objectiu ja no és obtenir un nombre per a cada trajectòria, sinó una variable aleatòria que sigui el límit (en un sentit més feble) d'unes sumes S_n apropiades que ja veurem com són.

En efecte, es busca la convergència en L^2 , això és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}((I - S_n)^2) = 0.$$

Capítol 3

Càlcul estocàstic d'Itô

El nostre objectiu en aquest capítol consisteix a donar una construcció de la integral d'Itô. Encara que aquest tema es pot abordar amb martingales, aquí hem decidit tractar-lo només pel moviment brownià, així com també hem considerat únicament processos unidimensionals, cosa que simplifica la notació i ens permet anar més enllà. Durant tot aquest capítol $W(t)$ denotarà un moviment Brownià adaptat a una filtració $\mathcal{F}_t$ i L^2 serà l'espai de variables aleatòries quadrat integrables.

3.1 Construcció de la integral d'Itô

En primer lloc, definirem la integral per a una classe de processos constants a trossos anomenats processos simples i posteriorment estendrem aquesta definició a una classe més general mitjançant aproximació.

Per familiaritzar-nos una mica amb el concepte i comparar les integrals estocàstiques amb unes de ben conegudes com les de Riemann destaquem el següent:

- Les aproximacions de la integral de Riemann convergeixen en $\mathbb{R}$ mentre que la integral d'Itô s'aproximarà mitjançant successions de variables aleatòries que convergeixen en L^2 .
- D'una banda, les sumes de Riemann que aproximen la integral d'una funció $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ són de la forma

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(s_j)(t_{j+1} - t_j),$$

on $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ i s_j és un punt arbitrari de l'interval $[t_j, t_{j+1}]$ per a cada j . D'altra banda, en el cas estocàstic les sumes que aproximen la integral són del tipus

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(s_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)).$$

És rellevant tenir en compte que el valor de la integral de Riemann no depèn de la tria dels punts $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$, mentre que en el cas estocàstic és fonamental quina tria es fa dels punts $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$, ja que el resultat obtingut varia.

Ara veurem un exemple on es pot veure l'ambigüitat que resulta de prendre diferents eleccions de punts intermedis s_j en els subintervals de la partició.

Exemple 3.1. Sigui $f(t) = W(t)$ i $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$, on $t_j^n = \frac{jT}{n}$, una partició de l'interval $[0, T]$ en n parts iguals. Aleshores es compleix

$$L_n = \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T, \quad (3.1.1)$$

$$R_n = \sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \frac{1}{2}W(T)^2 + \frac{1}{2}T. \quad (3.1.2)$$

Per provar (3.1.1) i (3.1.2) usarem les següents identitats

$$\begin{aligned} a(b-a) &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2, \\ b(b-a) &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a-b)^2. \end{aligned}$$

De la primera identitat obtenim

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n)^2 - W(t_j^n)^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 \\ &= \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2. \end{aligned}$$

Així doncs, fent ús de la Proposició 2.12 tenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) = \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T \text{ en } L^2.$$

De la segona identitat obtenim

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n)^2 - W(t_j^n)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 \\ &= \frac{1}{2}W(T)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 \end{aligned}$$

que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n) (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) = \frac{1}{2} W(T)^2 + \frac{1}{2} T \text{ en } L^2.$$

Arribats aquí també es pot demostrar que si avaluem $W(t)$ en el punt mitjà de l'interval $[t_j, t_{j+1}]$, és a dir, en $s_j = (t_j + t_{j+1})/2$, aleshores es compleix

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W\left(\frac{t_j^n + t_{j+1}^n}{2}\right) (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) = \frac{1}{2} W(T)^2 \text{ en } L^2.$$

Podem afirmar, doncs, que si considerem diferents eleccions dels punts intermedis s_j les sumes que aproximen la integral estocàstica convergeixen en L^2 a diferents expressions. Aquest fenomen no és un fet aïllat, podem destacar el següent:

- Si prenem l'extrem esquerre de l'interval, és a dir, $s_j = t_j$ per a cada j , aleshores això condueix a la integral estocàstica d'Itô. En canvi si prenem el punt mitjà de l'interval, és a dir, $s_j = (t_j + t_{j+1})/2$ per a cada j , això condueix a la integral d'Stratonovich. Altres tries de punts s_j ens porten a integrals estocàstiques poc pràctiques, ja que no conserven propietats essencials i, per tant, només s'usen en contextos molt específics. En quan a la notació hi ha una subtil diferència entre la integral d'Itô i la d'Stratonovich:

$$\text{Itô: } \int_0^T f(t) dW(t) \quad ; \quad \text{Stratonovich: } \int_0^T f(t) \circ dW(t).$$

- Notem que la integral d'Itô és adaptada a la filtració $\mathcal{F}_{t_j}$ i preserva la propietat de martingala, en canvi la integral d'Stratonovich no conserva la propietat de martingala, ja que estem avaluant el procés en un instant de temps posterior a t_j .
- Una de les diferències més importants entre aquests dos tipus d'integrals és la regla de la cadena associada a cadascuna d'elles. En el sentit d'Itô apareix un terme addicional (ho veurem més endavant) quan derivem, en canvi en el sentit d'Stratonovich es manté la regla de la cadena clàssica que coneixem d'anàlisi real.
- Destacar també que la integral d'Itô satisfà la propietat d'isometria mentre que la d'Stratonovich no gaudeix d'aquesta propietat essencial per als càlculs en L^2 .
- En quan a les aplicacions, la integral d'Itô és més usada en finances, en canvi la d'Stratonovich és útil en física i enginyeria, on es vol preservar les regles del càlcul ordinari.

Nosaltres, com que ens centrarem en la integral d'Itô, exigirem que l'aproximació només depengui del que ha passat fins a l'instant de temps t , però no de cap esdeveniment posterior. Això equival a prendre l'extrem esquerre de l'interval, és a dir, $s_j = t_j$ per a cada j .

Definirem ara el concepte de procés simple i la integral estocàstica associada a aquest tipus de processos.

Definició 3.2. Direm que $f(t), t \geq 0$, és un *procés simple* si és de la forma

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t), \quad (3.1.3)$$

on $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ és una partició de $[0, T]$ i η_j són variables aleatòries quadrat integrables i $\mathcal{F}_{t_j}$ -mesurables per a $j = 0, 1, \dots, n-1$. Denotem per M_{sim}^2 el conjunt de processos simples.

Observació 3.3. • Com que η_j han de ser $\mathcal{F}_t$ -mesurables, aleshores $f(t)$ és un procés adaptat a la filtració $\mathcal{F}_t$.

- De la mateixa manera, com que η_j són quadrat integrables, aleshores $f(t)$ és quadrat integrable per a cada t .
- M_{sim}^2 és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$, és a dir, $\alpha f + \beta g \in M_{\text{sim}}^2$ per a tot $f, g \in M_{\text{sim}}^2$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definició 3.4. Definim la *integral estocàstica* d'un procés simple $f \in M_{\text{sim}}^2$ com

$$I(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)).$$

Observació 3.5. L'aplicació $I : M_{\text{sim}}^2 \rightarrow L^2$ és lineal. És a dir, per a tot $f, g \in M_{\text{sim}}^2$ i qualsevol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es compleix

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

Proposició 3.6. La integral estocàstica $I(f)$ d'un procés simple $f \in M_{\text{sim}}^2$ és una variable aleatòria quadrat integrable ($I(f) \in L^2$) tal que

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)^2 dt\right).$$

Demostració. Per comoditat escrivim $W(t_{j+1}) - W(t_j) := \Delta_j W$ i $t_{j+1} - t_j := \Delta_j t$. Tenim que

$$\mathbb{E}(\Delta_j W) = 0 \quad \text{i} \quad \mathbb{E}((\Delta_j W)^2) = \text{Var}(\Delta_j W) = \Delta_j t.$$

En primer lloc calculem l'esperança de

$$I(f)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \eta_j \eta_k \Delta_j W \Delta_k W = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \Delta_j^2 W + 2 \sum_{k < j} \eta_j \eta_k \Delta_j W \Delta_k W.$$

Com que η_j i $\Delta_j W$ són independents es verifica

$$\mathbb{E}(\eta_j^2 (\Delta_j W)^2) = \mathbb{E}(\eta_j^2) \mathbb{E}((\Delta_j W)^2) = \mathbb{E}(\eta_j^2) \Delta_j t.$$

A més, si $k < j$, aleshores $\eta_j \eta_k \Delta_k W$ i $\Delta_j W$ són independents, per tant

$$\mathbb{E}(\eta_j \eta_k \Delta_j W \Delta_k W) = \mathbb{E}(\eta_j \eta_k \Delta_k W) \mathbb{E}(\Delta_j W) = 0.$$

En resum, tenim

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\eta_j^2) \Delta_j t.$$

Com que $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1} \in L^2$ tenim que $\mathbb{E}(I(f)^2) < \infty$, per tant $I(f) \in L^2$.

D'altra banda,

$$f(t)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \eta_j \eta_k \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

cosa que implica

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)^2 dt\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) dt\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} 1 dt\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \Delta_j t\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\eta_j^2) \Delta_j t. \end{aligned}$$

Ajuntant tot obtenim

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)^2 dt\right),$$

com volíem. $\square$

Recapitulant, hem definit la integral estocàstica $I(f)$ per a qualsevol procés simple $f \in M_{\text{sim}}^2$ i hem demostrat que $I(f) \in L^2$. Ara volem tractar una classe de processos més àmplia i definir la integral estocàstica associada mitjançant aproximació.

Definició 3.7. Denotem per M^2 la classe de processos estocàstics $f(t), t \geq 0$, tals que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)^2 dt\right) < \infty$$

i existeix alguna successió de processos simples $\{f_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\int_0^\infty (f(t) - f_n(t))^2 dt\right) = 0. \quad (3.1.4)$$

En aquest cas direm que la successió $\{f_n\}_{n \geq 1}$ convergeix a f en M^2 .

Definició 3.8. Anomenem $I(f) \in L^2$ la *integral estocàstica d'Itô* (de 0 a ∞) de $f \in M^2$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}((I(f) - I(f_n))^2) = 0 \quad (3.1.5)$$

per a qualsevol successió de processos simples $\{f_n\}_{n \geq 1}$ que convergeixi a f en M^2 . Se sol escriure

$$I(f) := \int_0^\infty f(t) dW(t).$$

El següent resultat assegura l'existència i unicitat de la integral d'Itô per a qualsevol procés $f \in M^2$. A més, dona lloc a la forta relació entre la classe de processos estocàstics M^2 i l'espai L^2 en termes de les seves esperances.

Proposició 3.9. Per a qualsevol $f \in M^2$ la integral estocàstica $I(f) \in L^2$ existeix, és única (com a element de L^2 , és a dir, llevat d'igualtat quasi segura) i satisfà

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)^2 dt\right). \quad (3.1.6)$$

Demostració. En primer lloc, és convenient escriure

$$\|f\|_{M^2} = \sqrt{\mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)^2 dt\right)} \quad \text{i} \quad \|\eta\|_{L^2} = \sqrt{\mathbb{E}(\eta^2)},$$

per a qualsevol $f \in M^2$ i $\eta \in L^2$. Aquestes normes són a M^2 i L^2 , respectivament.

D'una banda, considerem una successió de processos simples $\{f_n\}_{n \geq 1}$ que convergeix a f en M^2 , és a dir, se satisfà la igualtat (3.1.4). Notem que aquesta igualtat la podem reescriure com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{M^2}^2 = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{M^2} = 0. \quad (3.1.7)$$

D'altra banda, afirmem que $\{I(f_n)\}_{n \geq 1}$ és una successió de Cauchy en L^2 . En efecte, degut a (3.1.7), per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un N tal que per a tot $n > N$, $\|f - f_n\|_{M^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ i es verifica

$$\begin{aligned} \|I(f_m) - I(f_n)\|_{L^2} &= \|I(f_m - f_n)\|_{L^2} \\ &= \|f_m - f_n\|_{M^2} \\ &\leq \|f - f_m\|_{M^2} + \|f - f_n\|_{M^2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

per a qualssevol $m, n > N$. En la primera igualtat hem usat la linealitat de la integral per a processos simples, a la segona hem emprat la Proposició 3.6 i finalment la desigualtat triangular.

Ara, com que L^2 amb la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ és un espai complet (de fet, un espai de Hilbert), tota successió de Cauchy en L^2 té límit. Així se segueix que $\{I(f_n)\}_{n \geq 1}$ té límit en L^2 per qualsevol successió de processos simples $\{f_n\}_{n \geq 1}$ que convergeix a f . Això prova l'existència de $I(f)$.

Ara demostrarem la unicitat de $I(f)$. Suposem que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ i $\{g_n\}_{n \geq 1}$ són dues successions de processos simples que convergeixen a f en M^2 . Si considerem la successió barrejada $f_1, g_1, f_2, g_2, \dots$ aquesta també convergeix a f en M^2 . D'aquesta manera la successió $I(f_1), I(g_1), I(f_2), I(g_2), \dots$ és de Cauchy i, per tant, convergeix en L^2 . Sabem, a més, que en una successió convergent totes les subsuccessions convergeixen, en particular $\{I(f_n)\}_{n \geq 1}$ i $\{I(g_n)\}_{n \geq 1}$ convergeixen en L^2 al mateix element, que denotem per $I(f)$.

Finalment, per la Proposició 3.6

$$\|I(f_n)\|_{L^2}^2 = \|f_n\|_{M^2}^2 \implies \|I(f_n)\|_{L^2} = \|f_n\|_{M^2}$$

per a cada n , ja que f_n són processos simples. Prenent el límit amb $n \rightarrow \infty$ obtenim

$$\|I(f)\|_{L^2} = \|f\|_{M^2}.$$

□

Observació 3.10. Donat $f \in M^2$ tenim la següent equivalència:

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)^2 dt\right) \iff \|I(f)\|_{L^2} = \|f\|_{M^2}.$$

Això significa que l'aplicació $f \mapsto I(f)$ és una *isometria* entre els espais $(M^2, \|\cdot\|_{M^2})$ i $(L^2, \|\cdot\|_{L^2})$. Recordem que $\|\cdot\|_{M^2}$ i $\|\cdot\|_{L^2}$ són les normes induïdes pels productes escalars

$$\langle f, g \rangle_{M^2} := \mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)g(t) dt\right) \quad ; \quad \langle A, B \rangle_{L^2} := \mathbb{E}(AB).$$

Fixem-nos que si $I(f) = 0$ en L^2 , aleshores $\|f\|_{M^2} = 0$, la qual cosa implica que $f = 0$ quasi segurament. Per tant, l'aplicació $f \mapsto I(f)$ és injectiva.

Proposició 3.11. Per a qualssevol processos $f, g \in M^2$ es compleix

$$\mathbb{E}(I(f)I(g)) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)g(t) dt\right).$$

Demostració. La prova es fonamenta en considerar productes escalars adequats a M^2 i a L^2 , fer ús de la identitat de polarització i emprar la Proposició 3.9. En efecte, considerem els productes escalars

$$\langle f, g \rangle_{M^2} = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty f(t)g(t) dt\right) \quad \text{i} \quad \langle \eta, \zeta \rangle_{L^2} = \mathbb{E}(\eta\zeta)$$

per a qualssevol $f, g \in M^2$ i $\eta, \zeta \in L^2$. Com que L^2 i M^2 són espais de Hilbert amb les normes $\|\cdot\|_{L^2}$ i $\|\cdot\|_{M^2}$, respectivament, podem usar la identitat de polarització:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{M^2} &= \frac{1}{4}\|f + g\|_{M^2}^2 - \frac{1}{4}\|f - g\|_{M^2}^2 \\ &= \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\int_0^\infty (f(t) + g(t))^2 dt\right) - \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\int_0^\infty (f(t) - g(t))^2 dt\right), \\ \langle \eta, \zeta \rangle_{L^2} &= \frac{1}{4}\|\eta + \zeta\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\|\eta - \zeta\|_{L^2}^2 = \frac{1}{4}\mathbb{E}((\eta + \zeta)^2) - \frac{1}{4}\mathbb{E}((\eta - \zeta)^2). \end{aligned}$$

Ara si ens centrem en la igualtat que volem demostrar fixem-nos que el costat esquerre verifica

$$\mathbb{E}(I(f)I(g)) = \langle I(f), I(g) \rangle_{L^2} = \frac{1}{4}\mathbb{E}((I(f) + I(g))^2) - \frac{1}{4}\mathbb{E}((I(f) - I(g))^2).$$

Ara, el costat dret compleix

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\int_0^\infty f(t)g(t) dt \right) &= \langle f, g \rangle_{M^2} \\ &= \frac{1}{4} \mathbb{E} \left(\int_0^\infty (f(t) + g(t))^2 dt \right) - \frac{1}{4} \mathbb{E} \left(\int_0^\infty (f(t) - g(t))^2 dt \right).\end{aligned}$$

Arribats aquí, com que $f, g \in M^2$ tenim que $f + g \in M^2$ i $f - g \in M^2$, per tant si definim $h_1 = f + g$ obtenim

$$\mathbb{E} ((I(f) + I(g))^2) = \mathbb{E} ((I(f + g))^2) = \mathbb{E} \left(\int_0^\infty (f(t) + g(t))^2 dt \right),$$

on en la primera igualtat hem usat la linealitat de la integral estocàstica i en la segona la Proposició 3.9. Anàlogament, prenent el procés $h_2 = f - g$ obtenim

$$\mathbb{E} ((I(f) - I(g))^2) = \mathbb{E} ((I(f - g))^2) = \mathbb{E} \left(\int_0^\infty (f(t) - g(t))^2 dt \right).$$

Així doncs,

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\infty f(t)g(t) dt \right) = \frac{1}{4} \mathbb{E} ((I(f) + I(g))^2) + \frac{1}{4} \mathbb{E} ((I(f) - I(g))^2).$$

Com que el costat dret i esquerre de la igualtat que volem demostrar són idèntics, ja hem acabat. $\square$

Fixem-nos que hem definit la integral d'Itô des de 0 fins a ∞ , però és natural preguntar-se si podem considerar integrals estocàstiques sobre qualsevol interval de temps finit de la forma $[0, T]$. La resposta és afirmativa, i prové del fet que podem restringir la classe de processos M^2 a qualsevol interval finit $[0, T]$ mitjançant funcions indicadores d'aquest interval de temps. A continuació il·lustrarem aquest fenomen.

Definició 3.12. Per a qualsevol $T > 0$, denotem per M_T^2 l'espai de tots els processos estocàstics $f(t), t \geq 0$, tals que

$$\mathbb{1}_{[0, T)} f \in M^2.$$

La integral estocàstica d'Itô (des de 0 fins a T) de $f \in M_T^2$ es defineix com

$$I_T(f) = I(\mathbb{1}_{[0, T)} f) := \int_0^T f(t) dW(t). \quad (3.1.8)$$

Proposició 3.13. Tot procés simple $f \in M_{\text{sim}}^2$ pertany a M_t^2 per a qualsevol $t > 0$ i

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) dW(s) \quad (3.1.9)$$

és una martingala respecte de la filtració $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$.

Demostració. És immediat veure que si $f \in M_{\text{sim}}^2$, aleshores $\mathbb{1}_{[0,t]}f \in M_{\text{sim}}^2 \subset M^2$ per a tot $t > 0$. En conseqüència, $f \in M_t^2$ per a tot $t > 0$.

Ara hem de comprovar que $I_t(f)$ és una martingala respecte de la filtració $\mathcal{F}_t$. Sigui $0 \leq s < t$. Per definició de procés simple, $f \in M_{\text{sim}}^2$ pot escriure's com

$$f = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

on

$$0 = t_0 < \dots < t_k = s < t_{k+1} < \dots < t_m = t < t_{m+1} < \dots < t_n$$

és una partició de l'interval $[0, t_n]$. Com ja hem fet alguna altra vegada denotem els increments del moviment brownià $W(t_{j+1}) - W(t_j)$ per $\Delta_j W$. Aleshores

$$\mathbb{1}_{[0,t]}f = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})} \quad \text{i} \quad I_t(f) = I(\mathbb{1}_{[0,t]}f) = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_j \Delta_j W,$$

on η_j són variables aleatòries quadrat integrables i $\mathcal{F}_{t_j}$ -mesurables ($j = 0, \dots, m-1$). Així que $I_t(f)$ és adaptat a $\mathcal{F}_t$ i quadrat integrable, per tant integrable. Notem ara que demostrar que $I_t(f)$ és una martingala respecte de la filtració $\mathcal{F}_t$ és equivalent a mostrar que

$$\mathbb{E}(I_t(f) \mid \mathcal{F}_s) = I_s(f). \quad (3.1.10)$$

Vegem que es compleix aquesta igualtat: Tenim

$$\mathbb{E}(I_t(f) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(I(\mathbb{1}_{[0,t]}f) \mid \mathcal{F}_s) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{E}(\eta_j \Delta_j W \mid \mathcal{F}_s).$$

Ara distingim dos casos, segons com sigui j :

- Si $j < k$, llavors η_j i $\Delta_j W$ són $\mathcal{F}_s$ -mesurables i $\mathbb{E}(\eta_j \Delta_j W \mid \mathcal{F}_s) = \eta_j \Delta_j W$.
- Si $j \geq k$, llavors $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{t_j}$, η_j és $\mathcal{F}_{t_j}$ -mesurable i $\Delta_j W$ és independent de $\mathcal{F}_{t_j}$ perquè el moviment brownià té increments independents del passat. Per tant, tenim la següent cadena d'igualtats:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta_j \Delta_j W \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta_j \Delta_j W \mid \mathcal{F}_{t_j}) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(\eta_j \mathbb{E}(\Delta_j W \mid \mathcal{F}_{t_j}) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(\eta_j \mathbb{E}(\Delta_j W) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(\eta_j \cdot 0 \mid \mathcal{F}_s) = 0. \end{aligned}$$

D'aquesta manera només sobreviuen els termes amb $j < k$, i obtenim

$$\mathbb{E}(I_t(f) \mid \mathcal{F}_s) = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j \Delta_j W = I(\mathbb{1}_{[0,s]}f) = I_s(f).$$

□

A efectes pràctics és d'especial importància disposar d'una condició prou senzilla que assegurí l'existència de la integral estocàstica d'Itô. La raó és que no sempre és fàcil comprovar si l'integrand compleix les condicions d'integrabilitat i mesurabilitat, i encara menys trobar una successió de processos simples que convergeixi a un procés estocàstic de la classe M^2 o M_T^2 .

A continuació es presenta un teorema que proporciona aquesta condició d'existència.

Teorema 3.14. Sigui $f(t), t \geq 0$, un procés estocàstic amb trajectòries contínues quasi segurament i adaptat a una filtració $\mathcal{F}_t$. Aleshores

1. $f \in M^2$, és a dir, la integral d'Itô $I(f)$ existeix, si i només si

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\infty f(t)^2 dt \right) < \infty. \quad (3.1.11)$$

2. $f \in M_T^2$, és a dir, la integral d'Itô $I_T(f)$ existeix, si i només si

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T f(t)^2 dt \right) < \infty. \quad (3.1.12)$$

Demostració. La idea central de la demostració és construir una successió de processos simples $\{f_n\}_{n \geq 1}$ que convergeixi a f mitjançant mitjanes integrals i després provar la convergència en M^2 utilitzant la continuïtat de les trajectòries i el teorema de la convergència dominada. Com que és tècnica i llarga, per trobar-la podeu consultar [1] pàgines 187-188. $\square$

El següent teorema proporciona una caracterització de M^2 i M_T^2 , és a dir, dona una condició necessària i suficient perquè un procés estocàstic f pertanyi a M^2 o a M_T^2 . Com que implica la noció de procés progressivament mesurable, donarem abans aquesta definició.

Definició 3.15. Un procés estocàstic $f(t), t \geq 0$, es diu *progressivament mesurable* si per a tot $t \geq 0$ la funció

$$\begin{aligned} f: [0, t] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \omega) &\longmapsto f(s, \omega) \end{aligned}$$

és mesurable respecte a la σ -àlgebra $\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}$. Aquí $\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}$ és la σ -àlgebra producte en $[0, t] \times \Omega$, és a dir, la σ -àlgebra més petita que conté tots els conjunts de la forma $A \times B$, on $A \subset [0, t]$ és un conjunt de Borel i $B \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.16. 1. L'espai M^2 està format per tots els processos estocàstics progressivament mesurables $f(t), t \geq 0$, tals que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\infty f(t)^2 dt \right) < \infty.$$

2. L'espai M_T^2 està format per tots els processos estocàstics progressivament mesurables $f(t), t \geq 0$, tals que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T f(t)^2 dt \right) < \infty.$$

3.2 Exemples inicials d'integrals d'Itô

Exemple 3.17. En aquest primer exemple volem demostrar que la següent integral estocàstica d'Itô existeix i satisfà

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T. \quad (3.2.1)$$

Fixem $T > 0$ i definim $f(t) = \mathbb{1}_{[0,T)}(t)W(t)$. Observem que $f \in M^2$ i

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \int_0^\infty f(t) dW(t).$$

Prenem una partició de $[0, T]$ en n parts iguals, $0 = t_0^n < \dots < t_n^n = T$, amb $t_j^n = \frac{jT}{n}$, i definim

$$f_n = \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) \mathbb{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}.$$

Aleshores, la successió de processos simples $\{f_n\}_{n \geq 1}$ convergeix a f en M^2 , ja que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^\infty (f(t) - f_n(t))^2 dt \right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \mathbb{E} ((W(t) - W(t_j^n))^2) dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} (t - t_j^n) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1}^n - t_j^n)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{T^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Ara, aprofitant els càlculs fets a l'Exemple 3.1,

$$I(f_n) = \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T.$$

Per tant, hem arribat a

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T.$$

Exemple 3.18. Volem demostrar que

$$\int_0^T W(t)^2 dW(t) = \frac{1}{3}W(T)^3 - \int_0^T W(t) dt, \quad (3.2.2)$$

on la integral de l'esquerra és la integral estocàstica d'Itô de $W(t)^2$, mentre que la integral de la dreta és la integral de Riemann de $W(t)$.

Utilitzant la mateixa partició de $[0, T]$ en n parts iguals que a l'exemple anterior i posant

$$f_n = \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)^2 \mathbb{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n)},$$

obtenim una successió de processos simples $\{f_n\}_{n \geq 1}$ que convergeix a $f = \mathbb{1}_{[0, T]} W^2$ en M^2 . En efecte,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^\infty (f(t) - f_n(t))^2 dt \right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \mathbb{E} \left((W(t)^2 - W(t_j^n)^2)^2 \right) dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} (3(t - t_j^n)^2 + 4(t - t_j^n)t_j^n) dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\left(\frac{T}{n} \right)^3 + 2 \left(\frac{T}{n} \right)^2 \frac{jT}{n} \right] \\ &= \frac{T^3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

L'esperança anterior es calcula usant la següent fórmula, vàlida per a qualsevol $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left((W(t)^2 - W(s)^2)^2 \right) &= \mathbb{E} \left((W(t) - W(s))^4 \right) + 4\mathbb{E} \left((W(t) - W(s))^3 W(s) \right) \\ &\quad + 4\mathbb{E} \left((W(t) - W(s))^2 W(s)^2 \right) \\ &= 3(t - s)^2 + 4(t - s)s. \end{aligned}$$

Utilitzant la identitat $a^2(b - a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b - a)^2 - \frac{1}{3}(b - a)^3$, podem escriure

$$\begin{aligned} I(f_n) &= \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)^2 (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n)^3 - W(t_j^n)^3) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^3 \\ &= \frac{1}{3} W(T)^3 - \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) (t_{j+1}^n - t_j^n) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) \left[(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^3. \end{aligned}$$

Els límits en L^2 de les tres últimes sumes són

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) (t_{j+1}^n - t_j^n) &= \int_0^T W(t) dt, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) \left[(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right] &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^3 &= 0. \end{aligned}$$

En efecte, el primer límit dona això perquè

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) (t_{j+1}^n - t_j^n) - \int_0^T W(t) dt \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} (W(t_j^n) - W(t)) dt \right)^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \mathbb{E} \left((W(t_j^n) - W(t))^2 \right) dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} (t - t_j^n) dt \\ &= \frac{T^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

El segon límit es pot verificar així:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) \left[(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right] \right)^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} \left(W(t_j^n)^2 \left((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right)^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} (W(t_j^n)^2) \mathbb{E} \left(\left((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right)^2 \right) \\ &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} t_j^n (t_{j+1}^n - t_j^n)^2 \\ &= \frac{(n-1)}{n^2} T^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Finalment, per al tercer límit tenim

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^3 \right)^2 \right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} \left((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^6 \right) \\
&= 6 \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1}^n - t_j^n)^3 \\
&= 6 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{T^3}{n^3} = \frac{6T^3}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Per tant, se segueix que

$$I(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \frac{1}{3} W(T)^3 - \int_0^T W(t) dt,$$

la qual cosa demostra la fórmula de l'exemple.

3.3 Propietats de la integral d'Itô

En aquesta secció comencem presentant les tres propietats fonamentals que caracteritzen la integral d'Itô i que ens permetran manipular-la i aplicar-la en contextos pràctics. Seguidament estudiem de manera resumida la continuïtat de la integral

$$\int_0^t f(s) dW(s)$$

com una funció que depèn de t .

Teorema 3.19. Les següents propietats són vàlides per a qualssevol $f, g \in M_t^2$, qualssevol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i qualsevol $0 \leq s < t$:

1. Linealitat

$$\int_0^t (\alpha f(r) + \beta g(r)) dW(r) = \alpha \int_0^t f(r) dW(r) + \beta \int_0^t g(r) dW(r).$$

2. Isometria

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t f(r) dW(r) \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t f(r)^2 dr \right).$$

3. Propietat de martingala

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t f(r) dW(r) \middle| \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s f(r) dW(r).$$

Demostració. Demostrarem cadascuna de les propietats per separat:

1. Si f i g pertanyen a M_t^2 , aleshores $\mathbb{1}_{[0,t)}f$ i $\mathbb{1}_{[0,t)}g$ pertanyen a M^2 , de manera que existeixen successions $\{f_n\}_{n \geq 1}$ i $\{g_n\}_{n \geq 1}$ en M_{sim}^2 que convergeixen a $\mathbb{1}_{[0,t)}f$ i $\mathbb{1}_{[0,t)}g$, respectivament. Ara considerem la combinació lineal $\alpha f + \beta g$. L'expressió $\mathbb{1}_{[0,t)}(\alpha f + \beta g)$ pot aproximar-se per la successió de processos simples $\{\alpha f_n + \beta g_n\}_{n \geq 1}$. Per la linealitat de la integral estocàstica associada a processos simples deduïm que

$$I(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha I(f_n) + \beta I(g_n)$$

per a cada n . Finalment, prenent el límit en L^2 a ambdós costats d'aquesta igualtat quan $n \rightarrow \infty$, obtenim

$$I(\mathbb{1}_{[0,t)}(\alpha f + \beta g)) = \alpha I(\mathbb{1}_{[0,t)}f) + \beta I(\mathbb{1}_{[0,t)}g).$$

2. La funció $\mathbb{1}_{[0,t)}f$ pot aproximar-se per processos simples en M_{sim}^2 . Això ens permet escriure

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t f(r) dW(r) \right)^2 \right) = \mathbb{E} ((I_t(f))^2) = \mathbb{E} \left(\int_0^t (f(r))^2 dr \right)$$

on la segona igualtat es dedueix de la Proposició 3.6.

3. Si f pertany a M_t^2 , aleshores $\mathbb{1}_{[0,t)}f$ pertany a M^2 . Sigui $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una successió de processos simples que convergeix a $\mathbb{1}_{[0,t)}f$ en M^2 . Per la Proposició 3.13

$$\mathbb{E} (I(\mathbb{1}_{[0,t)}f_n) \mid \mathcal{F}_s) = I(\mathbb{1}_{[0,s)}f_n)$$

per a cada n . Prenent el límit en L^2 als dos costats d'aquesta igualtat quan $n \rightarrow \infty$, veurem que

$$\mathbb{E} (I(\mathbb{1}_{[0,t)}f) \mid \mathcal{F}_s) = I(\mathbb{1}_{[0,s)}f),$$

que és exactament el que cal demostrar. En efecte, observem que $\{\mathbb{1}_{[0,s)}f_n\}_{n \geq 1}$ és una successió de processos simples que convergeix a $\mathbb{1}_{[0,s)}f$ en M^2 , per tant

$$I(\mathbb{1}_{[0,s)}f_n) \rightarrow I(\mathbb{1}_{[0,s)}f) \text{ en } L^2 \text{ quan } n \rightarrow \infty.$$

De manera similar, $\{\mathbb{1}_{[0,t)}f_n\}_{n \geq 1}$ també és una successió de processos simples que convergeix a $\mathbb{1}_{[0,t)}f$ en M^2 , la qual cosa implica que

$$I(\mathbb{1}_{[0,t)}f_n) \rightarrow I(\mathbb{1}_{[0,t)}f) \text{ en } L^2 \text{ quan } n \rightarrow \infty.$$

Finalment, usant el lema que enunciem a continuació deduïm que

$$\mathbb{E} (I(\mathbb{1}_{[0,t)}f_n) \mid \mathcal{F}_s) \rightarrow \mathbb{E} (I(\mathbb{1}_{[0,t)}f) \mid \mathcal{F}_s) \text{ en } L^2 \text{ quan } n \rightarrow \infty,$$

completant la demostració.

□

Lema 3.20. Si ξ i $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ són variables aleatòries quadrat integrables tals que $\xi_n \rightarrow \xi$ en L^2 quan $n \rightarrow \infty$, aleshores

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}) \text{ en } L^2 \text{ quan } n \rightarrow \infty$$

per a qualsevol σ -àlgebra $\mathcal{G}$ en Ω continguda en $\mathcal{F}$.

Demostració. Aplicant la desigualtat de Jensen per esperances a la funció $\varphi(x) = x^2$ tenim

$$(\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{G}) - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}))^2 = (\mathbb{E}(\xi_n - \xi | \mathcal{G}))^2 \leq \mathbb{E}((\xi_n - \xi)^2 | \mathcal{G}),$$

d'on es dedueix que

$$\mathbb{E}((\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{G}) - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}))^2) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}((\xi_n - \xi)^2 | \mathcal{G})) = \mathbb{E}((\xi_n - \xi)^2) \rightarrow 0$$

quan $n \rightarrow \infty$. □

A continuació estudiem la continuïtat de la integral estocàstica $\int_0^t f(s) dW(s)$ com una funció de t . Per poder respondre aquesta qüestió cal que introduïm alguna noció nova.

Definició 3.21. Siguin $\xi(t)$ i $\zeta(t)$ dos processos definits per a $t \in T$, on $T \subset \mathbb{R}$. Diem que els processos són *modificacions* (o *versions*) l'un de l'altre si

$$P\{\xi(t) = \zeta(t)\} = 1 \text{ per a tot } t \in T. \quad (3.3.1)$$

Observació 3.22. Si $T \subset \mathbb{R}$ és un conjunt numerable, aleshores (3.3.1) és equivalent a

$$P\{\xi(t) = \zeta(t) \text{ per a tot } t \in T\} = 1.$$

No obstant això, aquest resultat no és necessàriament cert si T és no numerable.

Teorema 3.23. Sigui $f(t)$ un procés que pertany a M_t^2 i sigui

$$\xi(t) = \int_0^t f(s) dW(s)$$

per a tot $t \geq 0$. Aleshores existeix una modificació adaptada $\zeta(t)$ de $\xi(t)$ amb trajectòries contínues quasi segurament. A més, aquesta modificació és única llevat d'igualtat quasi segura.

D'ara endavant, identificarem $\int_0^t f(s) dW(s)$ amb la modificació adaptada que té trajectòries contínues quasi segurament. Aquesta convenció funciona a la perfecció juntament amb el Teorema 3.14 sempre que calgui demostrar que una integral estocàstica es pot utilitzar com a integrand d'una altra integral estocàstica, és a dir, que pertany a M_T^2 per a tot $T \geq 0$. Aquest fet és útil quan treballem amb equacions diferencials estocàstiques i per resoldre-les apareixen integrals de manera iterativa. Vegem un exemple que il·lustra el significat d'aquest fragment:

Exemple 3.24. La integral estocàstica

$$\xi(t) = \int_0^t W(s) dW(s)$$

pertany a M_T^2 per a tot $T \geq 0$.

Pel Teorema 3.23, $\xi(t)$ es pot identificar amb una modificació adaptada que té trajectòries contínues quasi segurament. Per tant, n'hi ha prou amb verificar que $\xi(t)$ satisfà la condició (3.1.12) del Teorema 3.14. És a dir, hem de veure que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \xi(t)^2 dt \right) < \infty.$$

Atès que la integral d'Itô és una isometria,

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t W(s) dW(s) \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t W(s)^2 ds \right) = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}.$$

Conseqüentment,

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \xi(t)^2 dt \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^T \left(\int_0^t W(s) dW(s) \right)^2 dt \right) = \int_0^T \frac{t^2}{2} dt = \frac{T^3}{6} < \infty$$

és a dir, $\xi(t)$ satisfà la condició (3.1.12) i, per tant, pertany a M_T^2 .

3.4 Diferencial estocàstic i fórmula d'Itô

Sabem que qualsevol funció contínuament diferenciable $x(t)$ tal que $x(0) = 0$ satisfà les fórmules

$$x(T)^2 = 2 \int_0^T x(t) dx(t) \qquad x(T)^3 = 3 \int_0^T x(t)^2 dx(t),$$

on $dx(t)$ es pot interpretar com una notació per referir-se a $x'(t) dt$. En canvi, si considerem un moviment brownià $W(t)$ obtenim

$$\begin{aligned} W(T)^2 &= \int_0^T dt + 2 \int_0^T W(t) dW(t), \\ W(T)^3 &= 3 \int_0^T W(t) dt + 3 \int_0^T W(t)^2 dW(t). \end{aligned}$$

I aquí es on trobem la gran sorpresa, ja que ens apareixen els termes addicionals

$$\int_0^T dt \text{ en } W(T)^2 \qquad \text{i} \qquad 3 \int_0^T W(t) dt \text{ en } W(T)^3.$$

Aquests termes extra s'anomenen *termes correctius d'Itô* i són la característica fonamental que diferencia el càlcul estocàstic del càlcul ordinari. La raó fonamental és que el moviment brownià té variació quadràtica no nul·la en l'interval $[0, T]$.

Definició 3.25. Un procés estocàstic $\xi(t), t \geq 0$, s'anomena *procés d'Itô* si té trajectòries contínues quasi segurament i es pot escriure com

$$\xi(T) = \xi(0) + \int_0^T a(t) dt + \int_0^T b(t) dW(t), \quad (3.4.1)$$

on $b(t)$ és un procés que pertany a M_T^2 per a tot $T > 0$ i $a(t)$ és un procés adaptat a la filtració $\mathcal{F}_t$ tal que

$$\int_0^T |a(t)| dt < \infty \quad (3.4.2)$$

per a tot $T \geq 0$. La classe de tots els processos adaptats $a(t)$ satisfent (3.4.2) per algun $T > 0$ la denotarem per $\mathcal{L}_T^1$.

Generalment per un procés d'Itô ξ és habitual reescriure (3.4.1) com

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dW(t) \quad (3.4.3)$$

i anomenem $d\xi(t)$ el *diferencial estocàstic* de $\xi(t)$. Aquesta forma d'escriure-ho es coneix com *la notació diferencial d'Itô*. Cal destacar que el diferencial estocàstic no té un significat matemàtic ben definit en si mateix i l'hem d'entendre en el context de l'equació (3.4.1). La notació diferencial d'Itô és una manera abreujada d'escriure aquesta equació, més que no pas un intent de donar un significat matemàtic precís al diferencial estocàstic.

Teorema 3.26 (Fórmula d'Itô, versió simple). Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció tal que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, és a dir, una funció dues vegades contínuament diferenciable. Aleshores,

$$f(W(T)) - f(W(0)) = \int_0^T f'(W(t)) dW(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f''(W(t)) dt, \quad T \geq 0.$$

En notació diferencial aquesta fórmula es pot reescriure com

$$df(W(t)) = f'(W(t)) dW(t) + \frac{1}{2} f''(W(t)) dt.$$

Observem que el terme correctiu d'Itô en aquest cas és $\frac{1}{2} f''(W(t)) dt$.

Exemple 3.27. Volem calcular $\int_0^T W(t)^2 dW(t)$.

Per tal d'aplicar la versió simple de la fórmula d'Itô observem que busquem una funció $f(x)$ tal que $f'(x) = x^2$. D'aquesta manera $f(x) = x^3/3 + C$, on $C \in \mathbb{R}$, i $f''(x) = 2x$. També és clar que

$$f(W(T)) = \frac{W(T)^3}{3} + C, \quad f(W(0)) = f(0) = 0 + C = C, \quad f''(W(t)) = 2W(t).$$

Per tant, substituint a la fórmula obtenim

$$\frac{W(T)^3}{3} + \cancel{C} - \cancel{C} = \int_0^T W(t)^2 dW(t) + \frac{1}{2} \int_0^T 2W(t) dt.$$

Aïllant la integral que volem calcular arribem a

$$\int_0^T W(t)^2 dW(t) = \frac{W(T)^3}{3} - \int_0^T W(t) dt.$$

Teorema 3.28 (Fórmula d'Itô, versió espai-temps). Sigui $F : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció tal que $F \in \mathcal{C}^1[0, \infty) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Suposem que $\frac{\partial F}{\partial x}(t, W(t))$ pertany a M_T^2 per a tot $T \geq 0$. Aleshores, $F(t, W(t))$ és un procés d'Itô tal que

$$\begin{aligned} F(T, W(T)) - F(0, W(0)) &= \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, W(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, W(t)) \right) dt \\ &\quad + \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(t, W(t)) dW(t). \end{aligned}$$

Notem que $\frac{\partial F}{\partial t}$ representa la parcial de F respecte del primer argument i $\frac{\partial F}{\partial x}$ la parcial respecte del segon argument. En notació diferencial aquesta fórmula es pot escriure com

$$dF(t, W(t)) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, W(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, W(t)) \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, W(t)) dW(t). \quad (3.4.4)$$

Observació 3.29. Si comparem l'expressió en notació diferencial (3.4.4) amb la regla de la cadena ordinària

$$dF(t, x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) dx(t),$$

per a una funció suau $x(t)$, on $dx(t)$ s'interpreta com una notació abreujada de $x'(t) dt$, observem que en (3.4.4) apareix un terme addicional de la forma

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, W(t)) dt.$$

Aquest és el terme de correcció d'Itô.

Exemple 3.30. Volem calcular $\int_0^T tW(t) dW(t)$.

Observem que l'integrand és $tW(t)$ que depèn de t i $W(t)$. Així doncs, busquem una funció $F(t, x)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = tx$. Anem a comprovar que $\frac{\partial F}{\partial x}(t, W(t)) = tW(t)$ pertany a M_T^2 fent ús del Teorema 3.14:

- El procés $tW(t)$ és producte d'una funció contínua determinista t i $W(t)$ que té trajectòries contínues quasi segurament, per tant $tW(t)$ té trajectòries contínues quasi segurament.
- Com que $W(t)$ és adaptat a una filtració $\mathcal{F}_t$ i t és determinista tenim que $tW(t)$ és adaptat a $\mathcal{F}_t$.
- Per verificar la condició d'integrabilitat fixem-nos que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T (tW(t))^2 dt \right) = \int_0^T t^2 \mathbb{E} (W(t)^2) dt = \int_0^T t^3 dt = \frac{T^4}{4} < \infty.$$

Integrant respecte de x obtenim l'expressió de $F(t, x)$ que és $F(t, x) = t\frac{x^2}{2} + g(t)$, on $g(t)$ és una funció que depèn de t . Escrivint les pertinents derivades tenim

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{x^2}{2} + g'(t) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = tx \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = t.$$

Ara, substituïm a la versió espai-temps de la fórmula d'Itô obtenint

$$\frac{TW(T)^2}{2} + g(T) - 0 - g(0) = \int_0^T \left(\frac{W(t)^2}{2} + g'(t) + \frac{1}{2}t \right) dt + \int_0^T tW(t) dW(t).$$

Com que $\int_0^T g'(t) dt = g(T) - g(0)$, cancel·lem aquests termes a banda i banda de la igualtat, arribant a

$$\frac{TW(T)^2}{2} = \int_0^T \frac{W(t)^2}{2} dt + \frac{T^2}{4} + \int_0^T tW(t) dW(t).$$

Finalment, aïllant la integral que volíem calcular tenim

$$\int_0^T tW(t) dW(t) = \frac{TW(T)^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^T W(t)^2 dt - \frac{T^2}{4}.$$

El següent resultat dona lloc a la fórmula generalitzada de la fórmula d'Itô. Es basa en reemplaçar el moviment brownià per un procés d'Itô arbitrari $\xi(t)$ que sabem que és de la forma

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dW(t), \quad (3.4.5)$$

on $a \in \mathcal{L}_t^1$ i $b \in M_t^2$ per a tot $t \geq 0$.

Teorema 3.31 (Fórmula d'Itô, versió general). Sigui $\xi(t)$ un procés d'Itô satisfent (3.4.5). Suposem que $F : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció tal que $F \in \mathcal{C}^1[0, \infty) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ i que $b(t)\frac{\partial F}{\partial x}(t, \xi(t))$ pertany a M_T^2 per a tot $T \geq 0$. Aleshores $F(t, \xi(t))$ és un procés d'Itô tal que

$$\begin{aligned} F(T, \xi(T)) - F(0, \xi(0)) &= \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, \xi(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \xi(t)) a(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, \xi(t)) b(t)^2 \right) dt + \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(t, \xi(t)) b(t) dW(t). \end{aligned}$$

En notació diferencial aquesta fórmula es pot reescriure com

$$\begin{aligned} dF(t, \xi(t)) &= \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, \xi(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \xi(t)) a(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, \xi(t)) b(t)^2 \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \xi(t)) b(t) dW(t). \end{aligned}$$

Demostració. Tot i que la demostració rigorosa del teorema requereix desenvolupaments extensos, podem obtenir simbòlicament l'equació anterior mitjançant sèries de Taylor i usant la taula d'Itô.

Atès que $F(t, x)$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en t i $\mathcal{C}^2$ en x , el desenvolupament de Taylor fins a segon ordre en els diferencials és

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} dt dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (dt)^2$$

Ara substituïm x per $\xi(t)$. Així $dx = d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dW(t)$. Tenint en compte que $(dt)^2 = 0$, $dt dW(t) = 0$ i $(dW(t))^2 = dt$, obtenim $(d\xi)^2 = b(t)^2 dt$, $dt d\xi = 0$.

Així, el desenvolupament es redueix a

$$dF(t, \xi(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \xi(t)) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \xi(t)) d\xi(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, \xi(t)) (d\xi(t))^2.$$

Substituïm ara $d\xi(t)$ per la seva expressió en forma diferencial de procés d'Itô

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} (a(t) dt + b(t) dW(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (d\xi)^2.$$

Com que $(d\xi(t))^2 = b(t)^2 dt$, tenim

$$\begin{aligned} dF(t, \xi(t)) &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} a(t) dt + \frac{\partial F}{\partial x} b(t) dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b(t)^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} a(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b(t)^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} b(t) dW(t), \end{aligned}$$

que correspon exactament a la fórmula en notació diferencial donada anteriorment. La versió integral s'obté integrant aquesta expressió entre 0 i T . $\square$

Fixem-nos que el terme correctiu d'Itô quan tractem processos d'Itô arbitraris és de la forma

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, \xi(t)) b(t)^2 dt.$$

Per finalitzar aquesta secció exposem la regla del producte per al càlcul estocàstic.

Teorema 3.32 (Regla del producte per al càlcul estocàstic). Siguin $X(t)$ i $Y(t)$ dos processos estocàstics d'Itô, llavors

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t Y(s) dX(s) + \int_0^t X(s) dY(s) + \int_0^t b_1(s)b_2(s) ds$$

o en forma diferencial,

$$d(X(t)Y(t)) = Y(t) dX(t) + X(t) dY(t) + b_1(t)b_2(t) dt.$$

3.5 Equacions diferencials estocàstiques (EDE)

Ara estem completament preparats per abordar l'objectiu principal d'aquest capítol, que és analitzar *equacions diferencials estocàstiques* (EDE) de la forma

$$d\xi(t) = f(\xi(t)) dt + g(\xi(t)) dW(t). \quad (3.5.1)$$

Aquesta expressió, aparentment compacta, conté dues components fonamentals:

- El *terme de deriva* (drift): representa la tendència determinista o el comportament mitjà del sistema al llarg del temps. Correspon a $f(\xi(t))$, que dicta l'evolució previsible del procés.
- El *terme de difusió* (diffusion): modela l'aleatorietat del procés. Correspon a $g(\xi(t))$, que determina la magnitud de les fluctuacions. Com més gran sigui g més volàtil serà el sistema.

Si consideréssim $g(\xi(t)) \equiv 0$ estariem eliminant l'aleatorietat que governa el procés provocant que l'equació resultant fos una EDO clàssica de la forma

$$\frac{d(\xi(t))}{dt} = f(\xi(t)).$$

Les solucions de (3.5.1) es buscaran en la classe de processos d'Itô $\xi(t)$ amb trajectòries contínues quasi segurament i s'anomenaran *processos de difusió*. També cal especificar una condició inicial $\xi(0) = \xi_0$.

Aquí ξ_0 pot ser un nombre real fix, però generalment serà una variable aleatòria. Com que $\xi(t)$ és un procés d'Itô, ha de ser adaptat a la filtració $\mathcal{F}_t$ de $W(t)$, per tant ξ_0 ha de ser $\mathcal{F}_0$ -mesurable. Això garanteix que el valor inicial no depengui d'informació futura del moviment brownià i, en conseqüència, respecta la condició de no anticipació inherent al càlcul estocàstic d'Itô.

Definició 3.33. Un procés d'Itô $\xi(t)$, $t \geq 0$, és *solució* del problema de valor inicial

$$\begin{cases} d\xi(t) = f(\xi(t)) dt + g(\xi(t)) dW(t) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$$

si ξ_0 és una variable aleatòria $\mathcal{F}_0$ -mesurable, els processos $f(\xi(t))$ i $g(\xi(t))$ pertanyen, respectivament, a $\mathcal{L}_T^1$ i M_T^2 i

$$\xi(T) = \xi_0 + \int_0^T f(\xi(t)) dt + \int_0^T g(\xi(t)) dW(t) \quad (3.5.2)$$

per a tot $T \geq 0$.

Observació 3.34. La noció d'equació diferencial estocàstica es basa en la notació de diferencial estocàstic, per tant, no té un significat matemàtic ben definit. Només les *equacions integrals estocàstiques* de la forma (3.5.2) tenen un significat matemàtic rigorós. Llavors, per què intentem escriure les equacions integrals estocàstiques d'aquesta manera? La resposta és clara; utilitzant equacions diferencials estocàstiques, podem aprofitar l'analogia amb les equacions diferencials ordinàries.

Exemple 3.35. Suposem que $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$. Considerem el procés d'Itô $\xi(t)$ que verifica l'equació diferencial estocàstica de Langevin

$$d\xi(t) = -\alpha\xi(t) dt + \sigma dW(t)$$

amb condició inicial $\xi(0) = \xi_0$. Aquesta equació diferencial la podem reescriure com

$$\xi(t) = \xi_0 - \alpha \int_0^t \xi(s) ds + \sigma \int_0^t dW(s).$$

Considerem la funció $F(t, x) = e^{\alpha t}x$ que té derivades parcials contínues amb

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \alpha e^{\alpha t}x, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = e^{\alpha t}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

Com que $\sigma e^{\alpha t}$ és fitat en cada conjunt de la forma $[0, T] \times \mathbb{R}$, podem assumir que $\sigma e^{\alpha t} \in M_T^2$ per a tot $T \geq 0$. Així doncs, $F(t, \xi(t)) = e^{\alpha t}\xi(t)$ és també un procés d'Itô i es compleixen les hipòtesis necessàries per aplicar la versió general de la fórmula d'Itô. En efecte, tenim

$$e^{\alpha t}\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t (\alpha e^{\alpha s}\xi(s) - \alpha e^{\alpha s}\xi(s)) dt + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW(s) = \xi_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW(s).$$

Fixem-nos que tenim

$$e^{\alpha t}\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW(s),$$

i com que $e^{\alpha t} \neq 0$ per a tot $t \geq 0$, podem dividir tota l'expressió resultant entre $e^{\alpha t}$ i obtenim que el procés $\xi(t)$ que és solució de l'equació de Langevin és

$$\xi(t) = e^{-\alpha t}\xi_0 + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW(s).$$

Exemple 3.36. El procés definit per $X(t) = \sinh(C + t + W(t))$, on $W(t)$ és un moviment brownià i $C = \sinh^{-1} X_0$, és una solució de l'equació diferencial estocàstica

$$dX(t) = \left(\sqrt{1 + X(t)^2} + \frac{1}{2}X(t) \right) dt + \left(\sqrt{1 + X(t)^2} \right) dW(t)$$

amb condició inicial $X(0) = X_0$. Notem que $X(0) = \sinh C = X_0$. Ara, atès que $F(t, x) = \sinh(t + x)$ satisfà les hipòtesis de la fórmula d'Itô, tenim

$$\begin{aligned} dX(t) &= dF(t, C + W(t)) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, C + W(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, C + W(t)) \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, C + W(t)) dW(t) \\ &= \left(\cosh(C + t + W(t)) + \frac{1}{2} \sinh(C + t + W(t)) \right) dt \\ &\quad + \cosh(C + t + W(t)) dW(t) \\ &= \left(\sqrt{1 + \sinh^2(C + t + W(t))} + \frac{1}{2} \sinh(C + t + W(t)) \right) dt \\ &\quad + \sqrt{1 + \sinh^2(C + t + W(t))} dW(t) \\ &= \left(\sqrt{1 + X(t)^2} + \frac{1}{2}X(t) \right) dt + \sqrt{1 + X(t)^2} dW(t). \end{aligned}$$

3.5.1 Teorema d'existència i unicitat de solució

Teorema 3.37. Supposem que $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ són funcions contínues en el sentit de Lipschitz, és a dir, existeix una constant $C > 0$ tal que per a qualssevol $x, y \in \mathbb{R}$ es compleix

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq C|x - y|, \\ |g(x) - g(y)| &\leq C|x - y|. \end{aligned}$$

A més, sigui ξ_0 una variable aleatòria $\mathcal{F}_0$ -mesurable i quadrat integrable. Aleshores, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} d\xi(t) = f(\xi(t)) dt + g(\xi(t)) dW(t) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (3.5.3)$$

té una solució $\xi(t), t \geq 0$, en la classe dels processos d'Itô. La solució és única en el sentit que si $\eta(t), t \geq 0$, és un altre procés que satisfà (3.5.3), llavors els dos processos són idèntics quasi segurament, és a dir,

$$P\{\xi(t) = \eta(t) \text{ per a tot } t \geq 0\} = 1.$$

Demostració. Fixem $T > 0$. Estem buscant un procés $\xi \in M_T^2$ tal que

$$\xi(s) = \xi_0 + \int_0^s f(\xi(t)) dt + \int_0^s g(\xi(t)) dW(t) \quad (3.5.4)$$

per a tot $s \in [0, T]$. Un cop haguem demostrat que existeix un tal $\xi \in M_T^2$, per obtenir una solució del problema de valor inicial (3.5.3) n'hi ha prou amb prendre una modificació de ξ amb trajectòries contínues quasi segurament cosa que podem fer perquè aquesta modificació existeix pel Teorema 3.23.

Ara, per a demostrar que existeix una solució de l'equació integral estocàstica (3.5.4) emprarem el teorema del punt fix de Banach a M_T^2 amb la norma

$$\|\xi\|_\lambda^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-\lambda t} |\xi(t)|^2 dt \right),$$

que converteix M_T^2 en un espai vectorial normat complet. Hem de tenir en compte que el nombre $\lambda > 0$ s'ha de triar prou gran, com veurem més avall. Per aplicar el teorema del punt fix definim $\Phi : M_T^2 \rightarrow M_T^2$ com

$$\Phi(\xi)(s) = \xi_0 + \int_0^s f(\xi(t)) dt + \int_0^s g(\xi(t)) dW(t) \quad (3.5.5)$$

per a qualsevol $\xi \in M_T^2$ i $s \in [0, T]$. Afirmem que Φ és una contracció estricta, és a dir,

$$\|\Phi(\xi) - \Phi(\zeta)\|_\lambda \leq \alpha \|\xi - \zeta\|_\lambda$$

per a algun $\alpha < 1$ i qualsevol $\xi, \zeta \in M_T^2$. Llavors, pel teorema del punt fix de Banach, Φ té un únic punt fix $\xi = \Phi(\xi)$. Aquesta és la solució desitjada de (3.5.4).

Ens queda verificar que Φ és realment una contracció estricta. N'hi ha prou amb demostrar que les dues aplicacions Φ_1 i Φ_2 , on

$$\Phi_1(\xi)(s) = \int_0^s f(\xi(t)) dt, \quad \Phi_2(\xi)(s) = \int_0^s g(\xi(t)) dW(t),$$

són contraccions estrictes amb constants contractives α_1 i α_2 tals que $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. Per a Φ_1 això es dedueix de la continuïtat de Lipschitz de f . Per a Φ_2 necessitem usar la continuïtat de Lipschitz de g i la propietat d'isometria de la integral d'Itô. Esmentem només un pas essencial en aquest últim cas. Per a qualsevol $\xi, \zeta \in M_T^2$

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(\xi) - \Phi_2(\zeta)\|_\lambda^2 &= \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-\lambda s} \left| \int_0^s [g(\xi(t)) - g(\zeta(t))] dW(t) \right|^2 ds \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-\lambda s} \int_0^s |g(\xi(t)) - g(\zeta(t))|^2 dt ds \right) \\ &\leq C^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-\lambda s} \int_0^s |\xi(t) - \zeta(t)|^2 dt ds \right) \\ &= C^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T \left(\int_t^T e^{-\lambda s} e^{\lambda t} ds \right) e^{-\lambda t} |\xi(t) - \zeta(t)|^2 dt \right) \\ &\leq \frac{C^2}{\lambda} \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-\lambda t} |\xi(t) - \zeta(t)|^2 dt \right) \\ &= \frac{C^2}{\lambda} \|\xi - \zeta\|_\lambda^2, \end{aligned}$$

on el segon pas és conseqüència de la isometria de la integral d'Itô, el cinquè prové del fet que $\int_t^T e^{-\lambda s} e^{\lambda t} ds = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(T-t)}) \leq \frac{1}{\lambda}$ i C és la constant de Lipschitz de g . Finalment, si triem $\lambda > 0$ tal que $\frac{C^2}{\lambda} < 1$, és a dir, $C^2 < \lambda$, llavors Φ_2 és una contracció estricta. $\square$

L'últim exemple que presentem conté una equació diferencial estocàstica que no satisfà les hipòtesis del Teorema 3.37. Resulta que la solució pot no existir per a tots els temps $t \geq 0$. Aquest és un fenomen conegut en equacions diferencials ordinàries. Tanmateix, les equacions diferencials estocàstiques afegixen un nou efecte: el temps màxim d'existència de la solució, anomenat *temps d'explosió*, pot ser una variable aleatòria no constant.

Exemple 3.38. Considerem el problema de valor inicial

$$\begin{cases} dX(t) = X(t)^3 dt + X(t)^2 dW(t) \\ X(0) = 1 \end{cases}. \quad (3.5.6)$$

Aplicant la fórmula d'Itô a la funció $F(t, x) = \frac{1}{x}$ obtenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(t)} &= 1 + \int_0^t \left(\frac{-1}{X(s)^2} X(s)^3 + \frac{1}{2} \frac{2}{X(s)^3} X(s)^4 \right) ds + \int_0^t \frac{-1}{X(s)^2} X(s)^2 dW(s) \\ &= 1 + \int_0^t (-X(s) + X(s)) ds - \int_0^t dW(s) \\ &= 1 - W(t). \end{aligned}$$

Així doncs, la solució de (3.5.6) ve donada per l'expressió

$$X(t) = \frac{1}{1 - W(t)}.$$

Notem que $X(t)$ no està definida quan $W(t) = 1$, ja que en aquest cas s'anul·laria el denominador. El temps d'explosió és $\tau = \inf\{t \geq 0 : W(t) = 1\}$ i podem afirmar que $\tau < \infty$ quasi segurament, ja que el moviment brownià acaba visitant qualsevol punt amb probabilitat 1. Per tant, la solució explota (tendeix a infinit) en un temps finit.

Estrictament parlant, la fórmula d'Itô no cobreix el cas d'aquest exemple perquè $F(t, x) = 1/x$ presenta una singularitat en $x = 0$. Fixem-nos, a més, que la Definició 3.33 tampoc aplica, ja que requereix que la solució estigui definida per a tot $t \geq 0$. Per superar aquesta limitació extensions de la fórmula d'Itô i de la definició de solució són necessàries per tal d'estudiar equacions diferencials estocàstiques que involucren explosions.

Capítol 4

Models regits per EDE i simulacions

Les equacions diferencials estocàstiques tenen una gran aplicació pràctica en diversos camps científics. En aquest capítol presentarem tres models ben coneguts on intervenen EDE i posteriorment trobarem, si és possible, la solució de manera analítica i simularem les seves trajectòries.

4.1 Model de Black-Scholes-Merton

El model de Black-Scholes-Merton es regeix per una fórmula matemàtica que permet calcular el preu teòric d'una opció de compra (call) o de venda (put) sobre un actiu financer. Va ser desenvolupat per Fischer Black, Myron Scholes i Robert Merton, sent d'especial importància dins del món de les finances. De fet, Scholes i Merton van rebre el Nobel d'Economia l'any 1997.

El model funciona correctament sota una sèrie de supòsits teòrics, però el que ens interessa a nosaltres és que el preu de l'actiu segueix un *moviment brownià geomètric*. En efecte, considerem el problema de valor inicial donat per

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 = x_0 > 0 \end{cases},$$

on la nostra incògnita X_t fa referència al preu dels actius, habitualment accions, $\mu \in \mathbb{R}$ representa un tipus d'interès constant i $\sigma > 0$ és un coeficient de variabilitat que s'identifica amb la volatilitat dels actius.

Fixem-nos que l'equació del moviment brownià geomètric ens diu que els preus no canvien linealment, sinó que fluctuen de manera proporcional al valor actual i després també hi intervé la part aleatòria.

Una manera d'interpretar aquesta EDE consisteix a considerar un interval infinitesimal de la forma $[t, t + dt]$ per a reescriure l'equació que governa el model com

$$X_{t+dt} - X_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

o equivalentment

$$\frac{X_{t+dt} - X_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Fixem-nos que el membre de l'esquerra de la igualtat ens indica el rendiment relatiu (o increment percentual) de l'actiu en el període $[t, t + dt]$. Observem que aquest increment varia en funció del comportament d'un terme determinista μdt , que reflecteix el creixement esperat de l'actiu, i d'un terme estocàstic σdW_t que incorpora l'aleatorietat que presenta el mercat.

Ara trobarem analíticament la solució associada a l'equació del moviment brownià geomètric usant una tècnica anomenada *aparellament dels coeficients d'Itô*. Sabem que la solució ha de satisfer la fórmula d'Itô

$$dX_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, W_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, W_t) \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, W_t) dW_t,$$

sent $X_t = F(t, W_t)$. Si agrupem termes observem que s'ha de complir

$$\begin{cases} \mu F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) \\ \sigma F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) \end{cases}.$$

Manipulant la segona equació obtenim

$$\sigma = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x)}{F(t, x)} \implies \int \sigma dx = \int \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x)}{F(t, x)} dx \implies \sigma x + h(t) = \ln |F(t, x)| + k.$$

Prenent exponencials arribem a

$$F(t, x) = C e^{\sigma x + h(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

El següent pas és trobar l'expressió de $h(t)$, que ho farem emprant l'altra equació.

$$\mu e^{\sigma x + h(t)} = h'(t) e^{\sigma x + h(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{\sigma x + h(t)} \implies h'(t) = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2.$$

Així doncs, integrant respecte de t , obtenim

$$h(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t.$$

Finalment, imposant la condició inicial $X_0 = x_0$, la solució buscada és

$$X_t = F(t, W_t) = x_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}.$$

Observem que en el cas $\sigma = 0$ tenim l'equació determinista $dX_t = \mu X_t dt$ que modelaria un escenari on l'actiu manca de risc, és a dir, estariem davant d'una inversió segura on la solució seria $X_t = x_0 e^{\mu t}$.

Propietats de la solució

- $X_t > 0$ per a tot $t \geq 0$, ja que $x_0 > 0$ i l'exponencial sempre és positiva.
- $X_t \sim \text{Lognormal}(m, s^2)$, on $m = \ln x_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t$ i $s^2 = \sigma^2 t$.
- $\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{\mu t}$ i $\text{Var}(X_t) = x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$.

4.2 Model d'Ornstein-Uhlenbeck

Els físics Ornstein i Uhlenbeck es van centrar en l'estudi del comportament dels gasos. Concretament, el seu objectiu era esbrinar quina podia ser la velocitat d'una partícula de gas individual i van arribar a la conclusió que aquesta podia accelerar-se o alentir-se sempre que la diferència entre la velocitat de la partícula individual i del conjunt total experimentés una reversió cap a zero, és a dir, a mesura que el temps es fes gran aquesta diferència tendís a zero. Per això diem que el procés d'Ornstein-Uhlenbeck és un model estocàstic que caracteritza sistemes amb reversió a la mitjana, és a dir, fenòmens que tot i fluctuar aleatòriament tendeixen a apropar-se de manera persistent cap a un valor d'equilibri o nivell mitjà. Avui en dia, aquest model té aplicacions en finances per modelar tipus d'interès, en biologia per estudiar dinàmiques de poblacions i en enginyeria per caracteritzar sistemes de control amb soroll. El model en si es basa en el problema del valor inicial

$$\begin{cases} dX_t = \theta(\mu - X_t) dt + \sigma dW_t \\ X_0 = x_0 > 0 \end{cases},$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ és la mitjana a llarg termini, $\theta > 0$ és la velocitat de la reversió i $\sigma > 0$ és la volatilitat. També es diu que $t_{1/2} = \ln(2)/\theta$ és el temps característic de mitja reversió. Aquest valor representa el temps necessari perquè el procés redueixi a la meitat una desviació inicial respecte a la mitjana.

Si considerem el cas $\mu = 0$, l'equació diferencial que governa el model es transforma en $dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dW_t$, que és exactament l'equació de Langevin que hem tractat en l'Exemple 3.35. Si considerem el cas general $\mu \neq 0$, el valor al voltant del qual el procés experimenta les fluctuacions causades per σdW_t ja no és 0, sinó μ .

Arribats aquí ja ens podem plantejar trobar analíticament la solució associada a aquest model. Motivats per l'observació que μ s'entén com la mitjana a llarg termini del procés X_t , podem simplificar l'EDE $dX_t = \theta(\mu - X_t) dt + \sigma dW_t$ introduint el canvi de variable $Y_t = X_t - \mu$ de manera que Y_t satisfà

$$dY_t = dX_t = -\theta Y_t dt + \sigma dW_t. \quad (4.2.1)$$

A l'equació (4.2.1) es pot observar que el procés Y_t presenta una deriva cap a zero a una taxa exponencial θ , ja que si imposéssim $\sigma = 0$, aleshores tindríem $dY_t = -\theta Y_t dt$ que té per solució $Y_t = Y_0 e^{-\theta t}$. Això motiva el canvi de variable

$$Y_t = e^{-\theta t} Z_t \iff Z_t = e^{\theta t} Y_t,$$

que hauria d'eliminar el terme de deriva. Vegem que efectivament succeeix això:

$$dZ_t = \theta e^{\theta t} Y_t dt + e^{\theta t} dY_t = \theta e^{\theta t} Y_t dt + e^{\theta t} (-\theta Y_t dt + \sigma dW_t) = 0 dt + \sigma e^{\theta t} dW_t.$$

Per tant, integrant des de 0 fins a t a ambdós costats de la igualtat obtenim

$$Z_t - Z_0 = \sigma \int_0^t e^{\theta s} dW_s.$$

Recordant que $Z_t = e^{\theta t} Y_t$, $Y_t = X_t - \mu$ i $X_0 = x_0$ tenim $Z_0 = e^{\theta \cdot 0} Y_0 = x_0 - \mu$. Així

$$e^{\theta t}(X_t - \mu) - (x_0 - \mu) = \sigma \int_0^t e^{\theta s} dW_s.$$

Per tant, aïllant X_t tenim

$$X_t = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s.$$

Propietats de la solució

- $\mathbb{E}(X_t) = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\theta t} + 0 \rightarrow \mu$, quan $t \rightarrow \infty$.
- $\text{Var}(X_t) = \text{Var}\left(\sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s\right) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\theta(t-s)} ds \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\theta}$, quan $t \rightarrow \infty$.
- $X_t \sim N(\mu, \sigma^2/2\theta)$, quan $t \rightarrow \infty$, és a dir, X_t té una distribució estacionària.

4.3 Model SABR

El model SABR, acrònim de “Stochastic Alpha, Beta, Rho”, és un dels models de volatilitat estocàstica més influents i utilitzats en la indústria financera, especialment per a la valoració de derivats de tipus d’interès que són contractes financers el valor dels quals depèn del valor futur dels tipus d’interès. Els més coneguts són els swaps que es basen en intercanviar tipus d’interès fix per variable i viceversa, i els caps i floors que es basen en posar un límit màxim/mínim per a tipus d’interès variables. Va ser desenvolupat per Hagan, Kumar, Lesniewski i Woodward l’any 2002 i el seu èxit recau en la capacitat de capturar el “somriure de la volatilitat” i l’asimetria dels mercats.

Aquest model descriu la dinàmica conjunta de dues variables: un tipus d’interès forward, és a dir el tipus d’interès acordat avui per a una inversió que es farà en el futur, i la seva volatilitat instantània. A diferència de models més simples com el de Black-Scholes-Merton, on la volatilitat es considera constant, el model SABR assumeix que la pròpia volatilitat és una variable aleatòria que segueix un procés estocàstic. Aquesta característica és la que li atorga la flexibilitat necessària per ajustar-se a les estructures de volatilitat complexes que s’observen en la realitat.

Les equacions que defineixen el model SABR són

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_t^{(1)} \\ d\sigma_t = \alpha \sigma_t dW_t^{(2)} \end{cases},$$

amb els corresponents valors a temps zero $F_0 > 0$ i $\sigma_0 > 0$. En aquest cas $W_t^{(1)}$ i $W_t^{(2)}$ són dos moviments brownians correlacionats amb coeficient de correlació $\rho \in (-1, 1)$, és a dir, $dW_t^{(1)} dW_t^{(2)} = \rho dt$. Les variables involucrades al sistema són:

- F_t és el tipus d'interès forward a temps t .
- σ_t és la volatilitat estocàstica associada a F_t . Segueix una distribució lognormal, la qual cosa assegura que la volatilitat sigui sempre positiva.
- $\beta \in [0, 1]$ és el paràmetre d'elasticitat. Si $\beta = 0$ el model es comporta com un model normal, si $\beta = 1$ el model es comporta com un model lognormal. Un valor comú en mercats de tipus d'interès és $\beta = 0.5$.
- $\alpha \geq 0$ és coneix com la volatilitat de la volatilitat. Aquest paràmetre determina com és de volàtil la pròpia volatilitat σ_t .

Les dues equacions conjuntes del model SABR no admeten una solució analítica tancada, però fixem-nos que la segona equació sí que té solució exacta:

$$\sigma_t = \sigma_0 \exp \left\{ -\frac{\alpha^2}{2} t + \alpha W_t^{(2)} \right\}.$$

La primera equació, que governa l'evolució del tipus forward F_t , en general no admet una solució explícita a causa de la dependència estocàstica de σ_t i la possible correlació ρ entre els moviments brownians.

4.4 Simulació de trajectòries

Quan s'utilitzen mètodes numèrics amb l'objectiu de resoldre equacions diferencials estocàstiques és fonamental comprendre la qualitat de les aproximacions obtingudes. Atès que les solucions numèriques no coincideixen exactament amb les solucions analítiques, cal disposar d'eines per quantificar i analitzar els errors comesos.

Considerem l'equació diferencial estocàstica

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad 0 \leq t \leq T$$

amb condició inicial $X_0 = x_0$. Suposem que $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ és la solució exacta de l'EDE i $Y = \{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$ és la solució aproximada.

Definició 4.1 (Error absolut). Definim l'error absolut entre la solució exacta d'una EDE i la seva aproximació en l'instant T com

$$\varepsilon = \mathbb{E}(|X_T - Y_T|).$$

Definició 4.2 (Convergència forta). Diem que una aproximació $Y^{(\delta)}$, on δ és la mida màxima del pas de temps utilitzat en la discretització, convergeix fortament a X en l'instant T si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(|X_T - Y_T^{(\delta)}| \right) = 0.$$

Observació 4.3. La convergència forta garanteix la proximitat entre les trajectòries de X i Y en l'instant T per a una mateixa realització del moviment brownià subjacent. Això significa que, fixada una trajectòria browniana, les trajectòries exacta i aproximada s'apropen a mesura que refinem la discretització temporal.

Definició 4.4 (Ordre de convergència forta). Diem que $Y^{(\delta)}$ convergeix fortament a X amb ordre $\gamma > 0$ en l'instant T si, i només si, existeix una constant positiva C independent de δ i un $\delta_0 > 0$ de manera que

$$\mathbb{E} \left(\left| X_T - Y_T^{(\delta)} \right| \right) \leq C\delta^\gamma$$

per a cada $\delta \in (0, \delta_0)$. Podem pensar que γ quantifica la velocitat amb què l'error disminueix a mesura que refinem el pas de temps.

4.4.1 Mètode d'Euler-Maruyama

El mètode d'Euler-Maruyama és àmpliament usat en l'àmbit de les equacions diferencials ordinàries i es pot extrapolar al cas estocàstic. Fonamentalment, consisteix a discretitzar l'equació diferencial que governa el model estudiat.

Suposem que estem treballant amb equacions diferencials estocàstiques de la forma

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, & 0 \leq t \leq T \\ X_0 = x_0 \end{cases}.$$

Sabem que la solució d'aquest problema de valor inicial és un procés que denotem per $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$. Per aproximar aquesta solució comencem prenent una partició de l'interval $[0, T]$ de la forma $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Se solen prendre particions equiespaiades, és a dir, es defineix un pas de temps de la forma $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ que sigui constant. En efecte, usualment es posa $\Delta t = T/N$. El mètode es basa en aproximar la solució X mitjançant un procés estocàstic continu, que denotem per Y , i que verifica l'esquema iteratiu següent:

$$\begin{cases} Y_0 = x_0 \\ Y_{j+1} = Y_j + \mu(t_j, Y_j)(t_{j+1} - t_j) + \sigma(t_j, Y_j)(W_{j+1} - W_j), & j = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

amb el benentès que $Y(t_j) = Y_j$ i $W(t_j) = W_j$.

Fixem-nos que només ens quedaria reproduir els increments del moviment brownià per tal de dur a terme la simulació. Hem vist que $W_{j+1} - W_j \sim N(0, \Delta t)$, o equivalentment, $W_{j+1} - W_j \sim \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$, per tant usarem aquesta condició en el nostre codi.

Entre dos instants de temps t_j i t_{j+1} el procés pot definir-se d'una altra manera. Un enfocament natural és considerar la interpolació lineal de manera que $Y(t)$ es defineix com

$$Y(t) = Y_j + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} (Y_{j+1} - Y_j), \quad t \in [t_j, t_{j+1}).$$

En general, assumint condicions Lipschitz i de creixement lineal en els coeficients μ i σ , el mètode d'Euler-Maruyama té un ordre de convergència forta $\gamma = 1/2$. En casos especials pot assolir, de fet, un ordre de convergència forta més alt. Per exemple quan el coeficient de difusió és del tipus $\sigma(t, x) \equiv \sigma(t)$ per a tot $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, i sota certes hipòtesis de regularitat adequades sobre μ i σ resulta que el mètode d'Euler-Maruyama té un ordre de convergència forta $\gamma = 1$.

Aplicació pràctica 1

L'esquema iteratiu associat al procés d'Ornstein-Uhlenbeck és de la forma

$$Y_{j+1} = Y_j + (\theta\mu - \theta Y_j) \Delta t + \sigma(W_{j+1} - W_j),$$

per a $j = 0, 1, \dots, N - 1$, amb $Y_0 = x_0$ i $W_{j+1} - W_j \sim \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$. Si definim $Z_j \sim N(0, 1)$ independents podem escriure

$$Y_{j+1} = Y_j + (\theta\mu - \theta Y_j) \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_j.$$

Fixem, per exemple, $N = 500$, $T := t_{\max} = 5$ i $x_0 = 8$ i fem una simulació aplicant Euler-Maruyama variant els valors de μ , θ i σ . D'aquesta manera podem visualitzar l'efecte d'aquests paràmetres en les trajectòries de la solució.

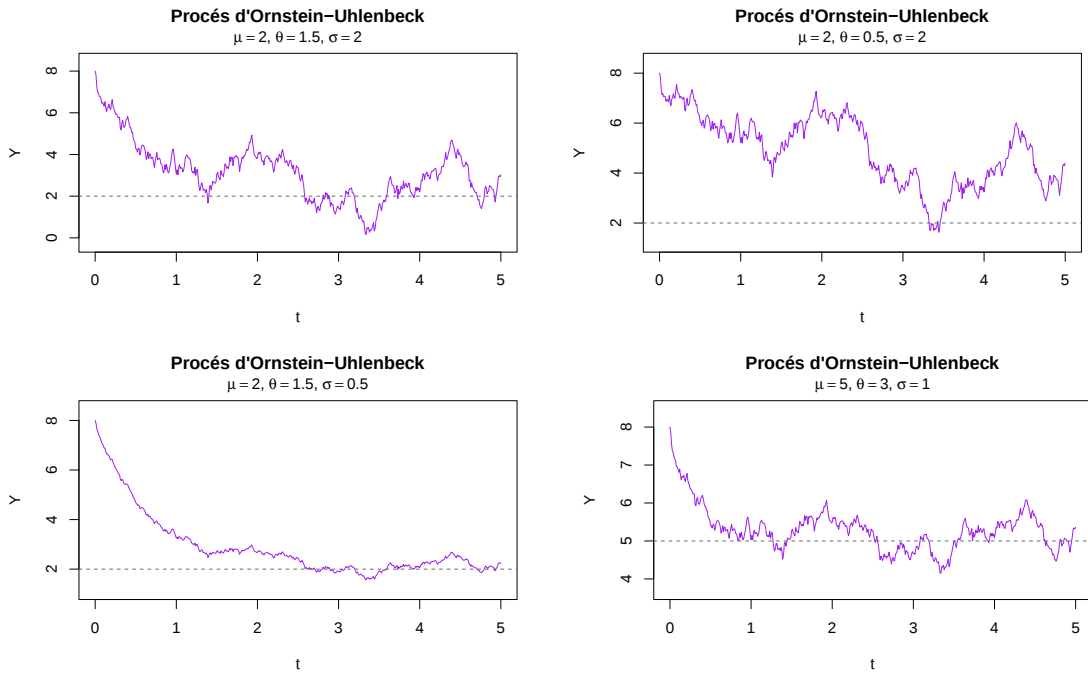


Figura 4.1: Simulacions del procés d'Ornstein-Uhlenbeck.

Si observem les gràfiques de les simulacions veiem el fenomen de reversió a la mitjana μ en tres d'elles. En la gràfica de dalt a la dreta no percebem la reversió perquè hem pres un valor de θ petit, σ és prou gran i la condició inicial està bastant allunyada del valor de μ . Notem que θ controla que tan ràpid el procés s'aproxima a μ . En efecte, com més gran sigui θ més ràpid ens aproximem a μ . Finalment, fixem-nos que σ produeix la dispersió aleatòria, com més gran sigui σ més fluctuacions hi ha i aleshores la trajectòria oscil·la de manera més notòria durant tot el seu recorregut. Notar que és natural que el fenomen de reversió a la mitjana no sigui suau, sinó que presenti alts i baixos produïts pel moviment brownià.

El fet de prendre valors de θ relativament petits provoca que hàgim de prendre valors de t més grans per tal d'observar el fenomen de reversió a la mitjana de manera clara.

Aplicació pràctica 2

Considerem un esquema iteratiu associat al model SABR de la forma

$$\begin{cases} F_{j+1} = F_j + \sigma_j F_j^\beta (W_{j+1}^{(1)} - W_j^{(1)}) \\ \sigma_{j+1} = \sigma_j \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2} \Delta t + \alpha (W_{j+1}^{(2)} - W_j^{(2)}) \right) \end{cases},$$

per a $j = 0, 1, \dots, N - 1$, amb condicions inicials $F_0 > 0$ i $\sigma_0 > 0$ fixades. Notem que F_t l'hem discretitzat emprant el mètode d'Euler-Maruyama i per a σ_t hem discretitzat la solució exacta per no perdre precisió.

Considerem variables aleatòries tals que $Z_j^{(1)}, Z_j^{(2)} \sim N(0, 1)$ independents per a tot j de manera que els increments brownians correlacionats els podem escriure com

$$W_{j+1}^{(1)} - W_j^{(1)} = \sqrt{\Delta t} Z_j^{(1)} \quad ; \quad W_{j+1}^{(2)} - W_j^{(2)} = \sqrt{\Delta t} (\rho Z_j^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} Z_j^{(2)}).$$

Per assegurar-nos que F no pren valors negatius imposablem $F_{j+1} = \max(F_{j+1}, 0)$. No ens cal demanar aquesta condició per a σ , ja que $\sigma_t > 0$ per a tot t .

Simulem l'evolució durant 1 any (252 dies laborables) d'un tipus d'interès forward swap a 5 anys, que actualment cotitza al 3.0% utilitzant el model SABR ajustat a dades de mercat recents. Hem observat que la volatilitat implícita inicial és del 20% anual, amb un paràmetre d'elasticitat $\beta = 0.5$. Addicionalment, es detecta una correlació negativa moderada, $\rho = -0.4$, entre el tipus d'interès i la seva volatilitat, mentre que la volatilitat de la volatilitat α és del 60%, indicant una alta incertesa sobre la futura volatilitat. Amb aquests valors generem cinc possibles trajectòries.

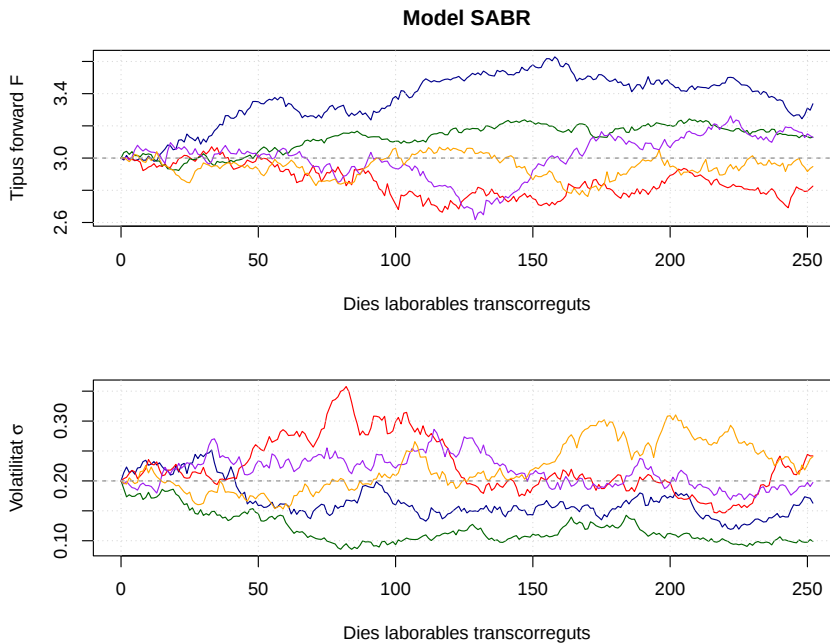


Figura 4.2: Simulacions del model SABR.

Visualitzant les trajectòries podem fer-nos una idea de com podria evolucionar el mercat i entendre la dinàmica conjunta que captura el model SABR. El primer gràfic mostra l'evolució del tipus forward, que es manté al voltant del 3 % però amb variacions moderades entre les diferents trajectòries. El segon gràfic representa la volatilitat estocàstica, que oscil·la aproximadament entre 0.10 i 0.35, evidenciant períodes de major i menor incertesa. A causa de la correlació negativa ($\rho = -0.4$), increments de la volatilitat tendeixen a anar associats a disminucions del tipus d'interès, i viceversa.

4.4.2 Mètode de Milstein

Aquest mètode incorpora un nou terme a l'esquema iteratiu d'Euler-Maruyama. Concretament, intervé la derivada parcial de $\sigma(t, x)$ respecte de la segona component x , cosa que millora la precisió de l'aproximació obtinguda. Usant la mateixa notació que hem usat en el mètode d'Euler-Maruyama, l'esquema iteratiu de Milstein és de la forma

$$Y_{j+1} = Y_j + \mu(t_j, Y_j)(t_{j+1} - t_j) + \sigma(t_j, Y_j)(W_{j+1} - W_j) + \frac{1}{2}\sigma(t_j, Y_j)\frac{\partial\sigma}{\partial x}(t_j, Y_j) [(W_{j+1} - W_j)^2 - (t_{j+1} - t_j)],$$

per a $j = 0, \dots, N-1$, amb condició inicial $Y_0 = x_0$.

Aquest mètode té un ordre de convergència forta de $\gamma = 1$, per a μ i σ prou regulars. Notem que si $\sigma(t, x) \equiv \sigma(t)$, aleshores l'esquema d'Euler-Maruyama i el de Milstein coincideixen.

Aplicació pràctica 1

Hem vist que en el model de Black-Scholes-Merton el preu de l'actiu segueix un moviment brownià geomètric, és a dir, verifica l'equació $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$. Notem que

$$\mu(t, X_t) = \mu X_t, \quad \sigma(t, X_t) = \sigma X_t, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial x} = \sigma.$$

Així doncs, posant $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, l'esquema iteratiu resultant aplicant el mètode de Milstein és de la forma

$$Y_{j+1} = Y_j + \mu Y_j \Delta t + \sigma Y_j (W_{j+1} - W_j) + \frac{1}{2}\sigma^2 Y_j [(W_{j+1} - W_j)^2 - \Delta t].$$

Fixem-nos que podem treure Y_j com factor comú, així obtenim

$$Y_{j+1} = Y_j \left[1 + \mu \Delta t + \sigma (W_{j+1} - W_j) + \frac{1}{2}\sigma^2 ((W_{j+1} - W_j)^2 - \Delta t) \right].$$

Finalment, tenint en compte que $W_{j+1} - W_j \sim \sqrt{\Delta t} Z_j$, on $Z_j \sim N(0, 1)$ independents, deduïm que

$$(W_{j+1} - W_j)^2 \sim \Delta t Z_j^2, \text{ on } Z_j^2 \sim N(0, 1)^2 \sim \chi_1^2 \text{ per a tot } j.$$

A continuació podem veure com seria la simulació d'una trajectòria del moviment brownià geomètric canviant el valor dels paràmetres μ i σ . Concretament, hem pres $N = 500, T := t_{\max} = 1$ i $x_0 = 0.1$.

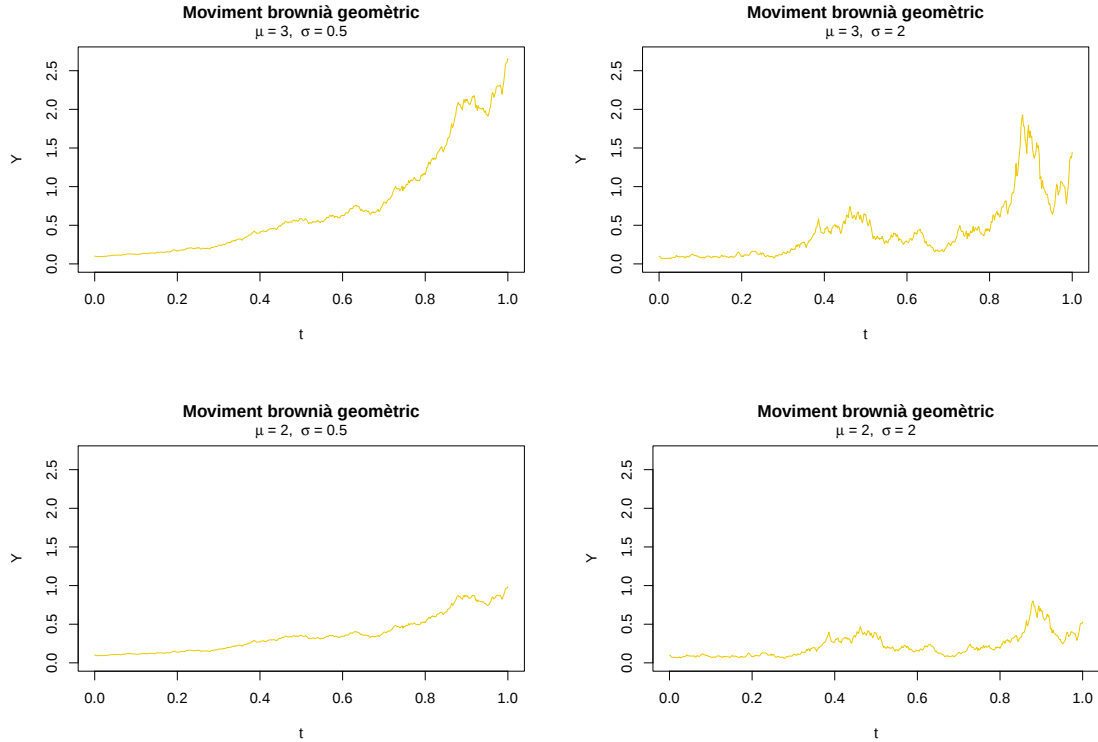


Figura 4.3: Simulacions del moviment brownià geomètric.

Aquestes simulacions il·lustren el paper que juguen els paràmetres μ i σ en l'evolució del preu de l'actiu X_t .

D'una banda, el paràmetre μ determina la tendència mitjana de creixement del procés. Quan μ és més elevat, les trajectòries presenten un pendent ascendent més pronunciat, reflectint un ritme de revaloració més gran de l'actiu. Per contra, valors menors de μ donen lloc a trajectòries que creixen de manera més moderada.

D'altra banda, el paràmetre σ controla la variabilitat del procés. Un valor reduït de σ produeix trajectòries molt més suaus, properes al seu comportament esperat. En canvi, valors elevats de σ generen una dispersió molt més gran i oscil·lacions brusques, fet que reflecteix una major incertesa en el preu de l'actiu. En aquests casos, les trajectòries poden experimentar increments sobtats o davallades pronunciades en intervals de temps molt curts.

Així, les simulacions mostren com, malgrat començar totes des del mateix valor inicial x_0 , el moviment brownià geomètric pot exhibir comportaments molt diversos segons la combinació dels paràmetres. Aquest fet posa de manifest la capacitat del model per representar tant mercats estables com situacions amb alta volatilitat.

Aplicació pràctica 2

Volem comparar la precisió dels mètodes d'Euler-Maruyama i de Milstein simulant trajectòries del moviment brownià geomètric fixant $T = 1$, $x_0 = 10$, $\mu = 1$, $\sigma = 1.5$ per a dos valors de N diferents.

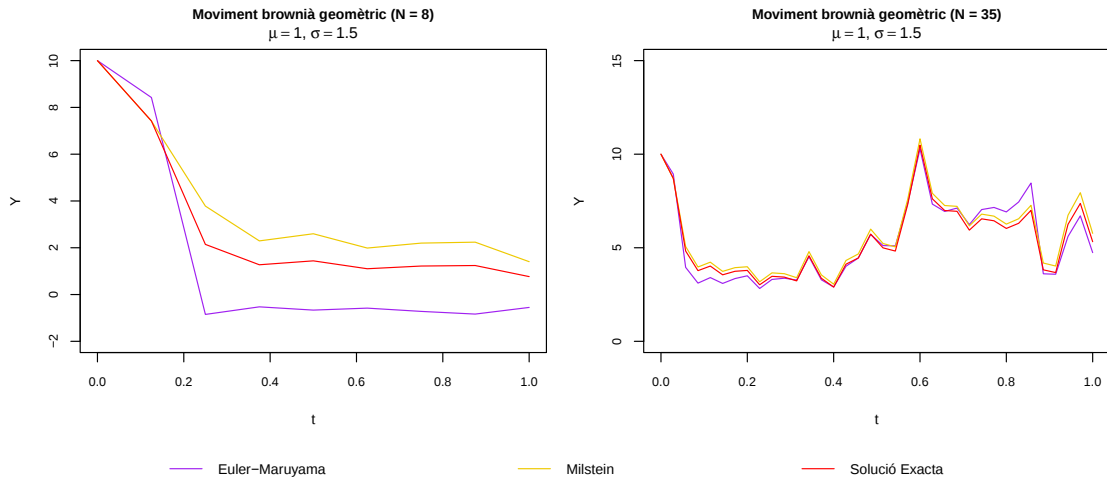


Figura 4.4: Comparació de les trajectòries del moviment brownià geomètric.

Per al cas $N = 8$, és a dir, $\Delta t = 1/8 = 0.125$ observem el següent:

- Les tres trajectòries són molt diferents i divergeixen entre si al llarg del temps.
- La trajectòria del mètode d'Euler-Maruyama és la que més s'allunya de la solució exacta. En canvi, la trajectòria del mètode de Milstein segueix més de prop la solució exacta, encara que també amb un error apreciable.
- Amb tan pocs passos, l'aproximació és poc suau i cada increment aleatori del moviment brownià té un impacte elevat en la trajectòria resultant.

Per al cas $N = 35$, és a dir, $\Delta t = 1/35 \approx 0.0286$ observem el següent:

- Les tres trajectòries estan notablement més properes, quasi superposades en diversos intervals.
- La millora en la precisió és evident per als dos mètodes numèrics respecte al cas $N = 8$.
- En els punts de major variació la trajectòria de Milstein continua sent la que millor s'ajusta a l'exacta, mentre que Euler-Maruyama presenta petites desviacions sistemàticament majors.

Capítol 5

Conclusions

Aquest treball m'ha permès aprofundir en els fonaments del càlcul estocàstic gràcies a la guia del meu tutor i la consulta de bibliografia especialitzada.

En primer lloc, s'han introduït diversos conceptes bàsics relacionats amb els processos estocàstics, per posteriorment centrar-se en l'estudi del moviment brownià. D'aquest procés s'han analitzat tant les seves propietats essencials com aspectes més subtils, com ara la no diferenciabilitat quasi segura de les seves trajectòries i el càlcul de la seva variació quadràtica en intervals de temps finits.

La construcció de la integral estocàstica d'Itô s'ha abordat de manera progressiva. Inicialment, s'ha definit per a processos simples de la classe M_{sim}^2 , per després estendre-la a processos més generals de la classe M^2 i la seva versió restringida a un interval finit, M_T^2 . En aquest context, s'ha destacat la relació isomètrica entre aquests espais de processos i l'espai de variables aleatòries quadrat integrables L^2 , que constitueix una propietat clau del càlcul estocàstic.

A continuació, s'ha introduït la noció de diferencial estocàstic i la fórmula d'Itô. Aquesta fórmula permet transformar i calcular integrals estocàstiques i és una eina clau en el desenvolupament de la teoria de les equacions diferencials estocàstiques. També s'ha definit la classe de processos d'Itô, dins la qual es busquen les solucions d'aquestes equacions, i s'han presentat diversos exemples rellevants. Finalment, s'ha enunciat un teorema d'existència i unicitat de solució per a equacions diferencials estocàstiques sota condicions adequades.

En la darrera part del treball s'han estudiat diversos models governats per equacions diferencials estocàstiques amb una clara motivació aplicada, com el model de Black-Scholes-Merton, el procés d'Ornstein-Uhlenbeck i el model SABR. A més, s'han presentat mètodes numèrics per a la simulació de trajectòries, com els esquemes iteratius d'Euler-Maruyama i de Milstein, que permeten aproximar solucions quan no es disposa d'expressions explícites i analitzar el comportament dels processos de manera pràctica.

Bibliografia

- [1] Z. Brzezniak and T. Zastawniak. *Basic Stochastic Processes*. Springer-Verlag, 1999.
- [2] Lawrence C. Evans. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. American Mathematical Society, 2013.
- [3] Patrick S. Hagan, Deep Kumar, Andrew S. Lesniewski, and Diana E. Woodward. Managing smile risk. *Wilmott Magazine*, pages 84–108, January 2002. URL: https://www.researchgate.net/publication/235622441_Managing_Smile_Risk.
- [4] S.M. Iacus. *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: with R examples*. Springer, 2008.
- [5] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1991.
- [6] P.E. Kloeden and E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, 1992.
- [7] H.H. Kuo. *Introduction to Stochastic Integration*. Springer, 2006.
- [8] T. Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific, 1999.
- [9] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, 6th edition, 2013.
- [10] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1999.
- [11] Carles Rovira. *Processos estocàstics: un curs bàsic*, 2020.
- [12] J.M. Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer-Verlag, 2001.

Apèndix A

Codis de Programació en R

Codi Model d'Ornstein-Uhlenbeck (Euler-Maruyama)

```
set.seed(231)          # Llavor
N <- 500                # Nombre de passos
Tmax <- 5               # Màxim de l'interval temporal
x0 <- 8                 # Condició inicial
delta_t <- Tmax/N       # Definim el pas de temps
Z <- rnorm(N)           # Vector aleatori de N observacions N(0,1)
mu <- 2                 # Paràmetre mu que pot variar
theta <- 1.5            # Paràmetre theta que pot variar
sigma <- 2              # Paràmetre sigma que pot variar

# Inicialització de Y i bucle on implementem l'esquema iteratiu
Y <- numeric(N+1)
Y[1] <- x0
for (j in 1:N)
  Y[j+1] <- Y[j] + (theta * mu - theta * Y[j]) * delta_t +
    sigma * sqrt(delta_t) * Z[j]

# Representació gràfica
t <- seq(0, Tmax, length = N+1) # Creació de la malla de temps
ylim_range <- range(Y)          # Troba el mínim i el màxim de Y
ylim_range <- c(min(Y) - 0.5, max(Y) + 0.5)
plot(t, Y, type = "l", main = "Procés d'Ornstein-Uhlenbeck",
     col = "purple", ylim = ylim_range)
abline(h = mu, lty = 2, col = "grey40")
mtext(bquote(paste(mu ==.(mu), ", ", theta ==.(theta),
                  ", ", sigma ==.(sigma))),
      side = 3, line = 0.25)
```

Codi Model SABR (Euler-Maruyama)

```
# Paràmetres / Dades
F0 <- 3.0          # Tipus forward swap 3.0% actual
sigma0 <- 0.2      # Volatilitat implícita actual del 20% anual
beta <- 0.5        # Paràmetre elasticitat (comportament moderat)
rho <- -0.4        # Correlació observada
alpha <- 0.6       # Volatilitat de la volatilitat del 60%
any_calendari <- 1 # 1 any calendari
dies_labo <- 252   # Convenció estàndard de mercat
dt <- any_calendari / dies_labo # Pas temporal

# Funció de Simulació
sim_swap_sabr <- function(F0, sigma0, beta, rho, alpha, dies_labo,
                          num_trajectories)
{
  N <- dies_labo
  M <- num_trajectories
  dt <- 1/N # tractem N com a "parts d'un any de mercat"
  t <- seq(0, 1, length.out = N + 1)
  F <- matrix(F0, nrow = M, ncol = N + 1)
  sigma <- matrix(sigma0, nrow = M, ncol = N + 1)

  # Generem trajectòries
  for (j in 1:N) {
    Z1 <- rnorm(M)
    Z2 <- rnorm(M)
    # Increments brownians
    dW1 <- sqrt(dt) * Z1
    dW2 <- sqrt(dt) * (rho * Z1 + sqrt(1 - rho^2) * Z2)
    # Actualització de sigma_t (Sol Exacta)
    sigma[, j+1] <- sigma[, j] *
      exp(-0.5 * alpha^2 * dt + alpha * dW2)
    # Actualització de F_t (Euler-Maruyama)
    F[, j+1] <- F[, j] + sigma[, j] * (F[, j]^beta) * dW1

    # Assegurem no negativitat dels tipus d'interès
    F[, j+1] <- pmax(F[, j+1], 0)
  }

  return(list(t = t * 252, # Convertim a dies laborables
             dies_labo = t * 252,
             F = F,
             sigma = sigma))
}
```

```

# Generem 5 trajectòries
set.seed(123) # Llavor per resultats reproduïbles
resultat <- sim_swap_sabr(F0, sigma0, beta, rho, alpha,
                        dies_labo, 5)

par(mfrow = c(2, 1), mar = c(4, 4, 3, 2))

# Gràfic 1: Evolució del tipus forward
plot(resultat$dies_labo, resultat$F[1, ], type = "l",
     ylim = range(resultat$F),
     xlab = "Dies laborables transcorreguts",
     ylab = "Tipus forward F",
     main = "Model SABR",
     col = "darkblue", lwd = 1)

colors <- c("darkblue", "red", "darkgreen", "purple", "orange")
for (i in 2:5) {
  lines(resultat$dies_labo, resultat$F[i, ],
        col = colors[i], lwd = 1)
}
abline(h = F0, lty = 2, col = "gray50", lwd = 1)
grid()

# Gràfic 2: Evolució de la volatilitat
plot(resultat$dies_labo, resultat$sigma[1, ], type = "l",
     ylim = range(resultat$sigma),
     xlab = "Dies laborables transcorreguts",
     ylab = expression(paste("Volatilitat ", sigma)),
     main = "",
     col = "darkblue", lwd = 1)

for (i in 2:5) {
  lines(resultat$dies_labo, resultat$sigma[i, ],
        col = colors[i], lwd = 1)
}
abline(h = sigma0, lty = 2, col = "gray50", lwd = 1)
grid()
par(mfrow = c(1, 1))

```

Codi Moviment brownià geomètric (Milstein)

```

set.seed(231)          # Llavor
N <- 500                # Nombre de passos
Tmax <- 1               # Màxim de l'interval temporal
x0 <- 0.1               # Condició inicial
delta_t <- Tmax/N      # Pas de temps
Z <- rnorm(N)           # Vector aleatori de N(0,1)
mu <- 3                 # Paràmetre mu que pot variar
sigma <- 0.5            # Paràmetre sigma que pot variar

# Inicialització de Y i bucle on implementem l'esquema iteratiu
Y <- numeric(N+1)
Y[1] <- x0
for (j in 1:N) {
  dW <- sqrt(delta_t) * Z[j]
  factor_increment <- 1 + mu * delta_t + sigma * dW +
    0.5 * sigma^2 * (dW^2 - delta_t)
  Y[j+1] <- Y[j] * factor_increment
}

# Representació gràfica
t <- seq(0, Tmax, length = N+1)
plot(t, Y, type = "l",
     main = "Moviment brownià geomètric",
     col = "gold2",
     ylim = c(0, 2.7),
     xlab = "t",
     ylab = "Y")
mtext(bquote(paste(mu==.(mu), " ", sigma==.(sigma))),
     side = 3, line = 0.25)

```

Codi Comparació Euler-Maruyama i Milstein

```
# SIMULACIÓ PER A N = 8
set.seed(231)
N <- 8
Tmax <- 1
x0 <- 10
delta_t <- Tmax/N
mu <- 1
sigma <- 1.5
t <- seq(0, Tmax, length = N+1)

# Simulem el moviment brownià
W <- c(0, cumsum(sqrt(delta_t) * rnorm(N)))

# Mètode d'Euler-Maruyama
Y1 <- numeric(N+1)
Y1[1] <- x0
set.seed(231)
Z <- rnorm(N)
for (j in 1:N)
  Y1[j+1] <- Y1[j] + (mu * Y1[j]) * delta_t +
    (sigma * Y1[j]) * sqrt(delta_t) * Z[j]

# Mètode de Milstein
sigmax <- sigma          # parcial de sigma
Y2 <- numeric(N+1)
Y2[1] <- x0
set.seed(231)
Z <- rnorm(N)
for (j in 1:N)
  Y2[j+1] <- Y2[j] + (mu * Y2[j]) * delta_t +
    (sigma * Y2[j]) * (sqrt(delta_t) * Z[j]) +
    0.5 * (sigma^2 * Y2[j]) *
    ((sqrt(delta_t) * Z[j])^2 - delta_t)

# Solució Exacta
Y3 <- x0 * exp(sigma * W + (mu - 0.5 * sigma^2) * t)

# SIMULACIÓ PER A N = 35
N2 <- 35
delta_t2 <- Tmax/N2
set.seed(231)
# Simulem el moviment brownià
W2 <- c(0, cumsum(sqrt(delta_t2) * rnorm(N2)))
```

```

# Mètode d'Euler-Maruyama
Y1b <- numeric(N2+1)
Y1b[1] <- x0
set.seed(231)
Z2 <- rnorm(N2)
for (j in 1:N2)
  Y1b[j+1] <- Y1b[j] + (mu * Y1b[j]) * delta_t2 +
    (sigma * Y1b[j]) * sqrt(delta_t2) * Z2[j]

# Mètode de Milstein
Y2b <- numeric(N2+1)
Y2b[1] <- x0
set.seed(231)
Z2 <- rnorm(N2)
for (j in 1:N2)
  Y2b[j+1] <- Y2b[j] + (mu * Y2b[j]) * delta_t2 +
    (sigma * Y2b[j]) * (sqrt(delta_t2) * Z2[j]) +
    0.5 * (sigma^2 * Y2b[j]) *
    ((sqrt(delta_t2) * Z2[j])^2 - delta_t2)

# Solució Exacta
t2 <- seq(0, Tmax, length = N2+1)
Y3b <- x0 * exp(sigma * W2 + (mu - 0.5 * sigma^2) * t2)

# Representació gràfica
layout(matrix(c(1, 2, 3, 3), nrow = 2, ncol = 2,
               byrow = TRUE), heights = c(0.85, 0.15))
par(mar = c(4, 4, 3.5, 1) + 0.1)

# Primera gràfica (N = 8)
titol1 <- expression(bold(paste("Moviment brownià geomètric
                                   (N = 8)"))))
plot(t, Y1, type = "l", main = titol1,
     col = "purple", ylim = c(-2, 10),
     ylab = "Y", xlab = "t", lwd = 1,
     cex.main = 0.9, cex.lab = 0.9, cex.axis = 0.8, font.main = 2)
lines(t, Y2, col = "gold2", lwd = 1)
lines(t, Y3, col = "red", lwd = 1)
subtitol1 <- expression(paste(mu == 1, ", ", sigma == 1.5))
mtext(subtitol1, side = 3, line = 0.2, cex = 0.8, font = 1)

# Segona gràfica (N = 35)
titol2 <- expression(bold(paste("Moviment brownià geomètric
                                   (N = 35)"))))

```

```

plot(t2, Y1b, type = "l", main = titol2,
     col = "purple", ylim = c(0, 15),
     ylab = "Y", xlab = "t", lwd = 1,
     cex.main = 0.9, cex.lab = 0.9, cex.axis = 0.8, font.main = 2)
lines(t2, Y2b, col = "gold2", lwd = 1)
lines(t2, Y3b, col = "red", lwd = 1)
subtitol2 <- expression(paste(mu == 1, ", ", sigma == 1.5))
mtext(subtitol2, side = 3, line = 0.2, cex = 0.8, font = 1)

# Llegend
par(mar = c(0.5, 0, 0.5, 0))
plot.new()
legend_items <- c("Euler-Maruyama", "Milstein", "Solució Exacta")
colors <- c("purple", "gold2", "red")
x_positions <- seq(0.2, 0.8, length.out = length(legend_items))

for (i in 1:length(legend_items)) {
  legend(x_positions[i], 0.5, legend = legend_items[i],
        col = colors[i], lty = 1, lwd = 1,
        cex = 0.9, bty = "n", horiz = FALSE,
        xjust = 0.5, yjust = 0.5)
}

```