



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Processos puntuals: la hiperuniformitat

Autor: Adrià Garcia Congost

Director: Jordi Marzo

Realitzat a: Departament
de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 15-01-2026

Agraïments

M'agradaria agrair al meu tutor Jordi Marzo, per tot el temps i l'ajuda que m'ha ofert al llarg d'aquests mesos.

Resum

Aquest treball analitza les propietats dels processos puntuals espacials i la seva capacitat per generar estructures amb un ordre especial conegut com a hiperuniformitat. L'objectiu del treball és descriure matemàticament com determinades interaccions locals poden suprimir gairebé per complet les fluctuacions de densitat a gran escala. Després de formalitzar el marc teòric mitjançant la teoria de la mesura, es contrasten els models de referència basats en la independència, com el procés de Poisson, amb sistemes on existeix una repulsió entre punts. L'estudi aprofundeix en els Processos Puntuals Determinantals (DPPs), demostrant que la seva estructura de correlació negativa els permet complir la *sum rule*, condició analítica equivalent a la hiperuniformitat. Finalment, es presenten diversos exemples i una visualització realitzada amb el programari matemàtic (Wolfram Mathematica) que il·lustra la transició des de la independència de punts pura fins a una correlació i ordre global propi dels nuclis del Sinus i de Bessel.

Índex

Índex de figures

Introducció	1
1 El procés puntual i conceptes bàsics	3
1.1 El procés puntual com a mesura aleatòria	3
1.2 Processos Estacionaris	4
1.3 La Mesura d'Intensitat i la Funció d'Intensitat	6
1.4 El Procés Binomial	8
1.5 El Procés de Poisson	10
1.6 Relació entre el procés Binomial i el de Poisson: la Propietat Condicional	11
2 Fórmules de Campbell i Mesures de Moment	13
2.1 Fórmula de Campbell de primer ordre	13
2.2 Moments de segon ordre i interacció entre punts	14
2.3 Moments Factorials d'Ordre Superior	15
2.4 Aplicació: La Variància del Procés	15
2.5 Funció de correlació del procés binomial i del de Poisson	17
3 Distribució d'un procés i el funcional de Laplace	21
3.1 El Funcional de Laplace	21
3.2 Càlcul del Funcional de Laplace de Poisson	23
3.3 Superposició	23
3.4 Aprimament (Thinning)	24

4	Hiperuniformitat i Processos Puntuals Determinantals (DPPs)	27
4.1	Definició i Motivació	27
4.2	La Regla de la Suma (Sum Rule) com a criteri d'hiperuniformitat	28
4.3	Equivalència entre la Hiperuniformitat i la Regla de la Suma	28
4.4	Processos Puntuals Determinantals (DPPs)	30
4.5	Propietats dels DPPs	30
4.6	Alguns exemples fonamentals de DPPs	31
4.6.1	Circular Unitary Ensemble (CUE)	31
4.6.2	Procés del Sinus	31
4.6.3	Procés de Bessel	32
4.7	Demostració de la Hiperuniformitat en els DPPs	33
	Conclusions	35
	Bibliografia	36

Índex de figures

Figura 1 Comparativa entre una graella determinista (esquerra) i dues realitzacions d'una graella aleatòria amb desplaçament uniforme.	5
Figura 2 Realització d'un procés puntual binomial de $n = 25$, en una quadrat d'àrea 10x10. .	9
Figura 3 Realitzacions d'un procés puntual de Poisson homogeni d'intensitat $\lambda = 0.25$, vist en un quadrat de 10x10	11
Figura 4 Comparativa entre processos segons el valor de $g(x, y)$	16
Figura 5 Exemple de superposició amb dos processos de Poisson, d'intensitat $\lambda_1 = 0.2$ i $\lambda_2 = 0.3$	24
Figura 6 Aprimament d'un procés de Poisson d'intensitat $\lambda = 0.7$ i $p=0.3$ constant, en una regió 10x10	25
Figura 7 Comparació de diferents processos en el cercle unitari	31
Figura 8 Gràfic de la funció $g(r)$ pel procés del Sinus	32

Introducció

L'estudi dels processos puntuals és una de les branques més fascinants de la probabilitat moderna i l'estadística espacial. Un procés puntual no és simplement una col·lecció de coordenades en un mapa; és un objecte estocàstic complex que ens permet modelar el món real allà on els esdeveniments apareixen de forma discreta en un continu. Des de la distribució de les galàxies en l'univers fins a la localització de cèl·lules a la retina [1], passant per l'arribada de paquets de dades a un servidor o la posició dels arbres en un bosc, els processos puntuals ens ofereixen el llenguatge necessari per descriure l'atzar geomètric.

Històricament, el model de referència ha estat el procés de Poisson [2]. Aquest procés encarna la idea de l'aleatorietat pura, on cada punt es materialitza de forma totalment independent de la resta. En el món de Poisson, no hi ha interacció, no hi ha memòria i no hi ha estructura: els punts poden aparèixer tan a prop l'un de l'altre com l'atzar dictamini. Tanmateix, la natura poques vegades és tan caòtica. En els sistemes biològics o físics, els objectes competeixen per recursos, es repel·leixen o s'organitzen seguint regles que busquen un cert equilibri. El present treball neix de la necessitat d'explorar aquest territori situat entre el desordre total del gas de Poisson i la rigidesa absoluta d'un cristall o una graella determinista.

L'objectiu general d'aquest Treball Final de Grau és analitzar com les interaccions locals entre punts, i especialment la propietat de repulsió, poden donar lloc a un fenomen sorprenent a escala global: la hiperuniformitat [3]. Un sistema hiperuniforme és aquell que, tot i semblar desordenat a petita escala, presenta unes fluctuacions de densitat anòmalament baixes quan s'observa en grans dominis.

Per arribar a aquest concepte, primer establim els fonaments matemàtics utilitzant la teoria de la mesura i formalitzarem el procés puntual com una mesura aleatòria localment finita. Aquesta base rigorosa ens permetrà definir propietats essencials com la simplicitat i l'estacionarietat, exemplificades a través de les graelles aleatòries. També analitzarem dos models fonamentals, el procés Binomial i el procés de Poisson, que a través de l'estudi de la propietat condicional demostrarem que estan íntimament lligats. Tot seguit introduïrem les eines de caracterització estadística, com la mesura d'intensitat i les fórmules de Campbell, que ens permetran passar de l'esperança de punts individuals a l'estudi de parelles de punts mitjançant les mesures de moment de segon ordre i les funcions de correlació.

Posteriorment introduïrem una forma de caracteritzar la distribució d'un procés puntual amb el funcional de Laplace, i estudiarem dos mètodes bàsics per generar nous processos a partir d'altres ja existents. I finalment, el treball culmina amb l'estudi dels Processos Puntuals Determinants

(DPPs) [4]. Aquests processos, que troben el seu origen en la modelització de la física quàntica i l'estudi de les matrius aleatòries, ens serviran com el vehicle matemàtic perfecte per demostrar l'hiperuniformitat. Veurem com, mitjançant la satisfacció de l'anomenada *sum rule*, la repulsió local d'un nucli determinantal aconsegueix suprimir el desordre a gran escala, creant patrons que combinen la llibertat de l'atzar amb l'equilibri de l'ordre global.

Capítol 1: El procés puntual i conceptes bàsics

En aquest primer capítol establirem el marc teòric fonamental per a l'estudi formal dels processos puntuals, formalitzant la noció de configuració de punts com una mesura aleatòria localment finita, una eina que ens permetrà tractar l'atzar geomètric amb el rigor analític requerit.

La presentació seguirà principalment la referència [2]. En ella definirem les propietats qualitatives essencials del procés, com l'estacionarietat i la simplicitat, així com les magnituds estadístiques fonamentals, com la mesura d'intensitat, que seran la base per analitzar la hiperuniformitat en els capítols posteriors.

1.1 El procés puntual com a mesura aleatòria

Considerem un espai base E que sigui un espai mètric localment compacte i separable (al llarg del treball serà un subconjunt de l'espai euclidià), equipat amb la seva σ -àlgebra de Borel $\mathcal{B}(E)$ (mínima σ -àlgebra que conté tots els conjunts oberts de E). Volem identificar una possible configuració de punts (manera en la que els punts queden distribuïts) sobre E , amb una mesura que compti punts.

Definim $M_p(E)$ com el conjunt de totes les mesures puntuals localment finites sobre E . Una mesura μ s'anomena puntual i pertany a $M_p(E)$ si satisfà dues condicions:

1. És una suma de masses de Dirac: $\mu = \sum_i \delta_{x_i}$, on $x_i \in E$ i $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$ per $A \subset E$.
2. És localment finita: per a tot conjunt compacte $K \subset E$, $\mu(K) < \infty$.

La segona condició evita que en regions fitades tinguem infinits punts ("explosions" del procés).

Per poder definir variables aleatòries que prenguin valors en aquest espai $M_p(E)$, necessitem dotar-lo d'una estructura d'espai mesurable. Sigui $\mathcal{M}_p(E)$ la σ -àlgebra sobre $M_p(E)$ generada per les aplicacions projecció:

$$\pi_C : \mu \mapsto \mu(C), \quad \text{per a tot } C \in \mathcal{B}(E).$$

Això vol dir que $\mathcal{M}_p(E)$ és la σ -àlgebra més petita que fa que comptar punts en qualsevol conjunt de Borel sigui una operació mesurable.

Amb aquesta estructura, ja estem en condicions de donar la definició rigorosa de procés puntual.

Definició 1.1 (Procés Puntual). Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat. Un procés puntual N

sobre E és una aplicació mesurable:

$$N : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (M_p(E), \mathcal{M}_p(E)).$$

Aquesta definició té implicacions pràctiques importants:

- Per a cada realització $\omega \in \Omega$, $N(\omega)$ és una mesura $\mu \in M_p(E)$ que donat $C \in \mathcal{B}(E)$ podem escriure com $\mu(C) = N(\omega, C)$ o simplement $N_\omega(C)$. Es pot pensar que un cop fixada la realització ω , $N(C)$ compta els punts que han “caigut” dins del conjunt $C \in \mathcal{B}(E)$.
- Per a qualsevol conjunt mesurable $C \in \mathcal{B}(E)$, l'aplicació $\omega \mapsto N_\omega(C)$ és una variable aleatòria real (amb valors a $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$). Ens hi referirem com a $N(C)$.

Definició 1.2 (Procés Puntual Simple). Un procés puntual N sobre E s'anomena simple si, gairebé segurament, no hi ha punts múltiples en una mateixa localització.

És a dir que amb probabilitat 1 no trobarem cap realització ω del procés, on hagin caigut dos punts al mateix lloc exactament. Formalment, per a tot $\omega \in \Omega$,

$$N(\omega, \{x\}) \in \{0, 1\} \quad \forall x \in E.$$

Exemple 1.3. Un exemple de procés simple seria aquell que modelitza la posició d'arbres en un bosc, ja que és impossible tenir dos arbres en un mateix lloc. En aquest exemple l'espai base E seria el bosc, i cada realització ω seria una possible distribució d'arbres en el bosc.

Tot i que la definició de procés puntual com a aplicació mesurable cap a l'espai de mesures és la més potent des d'un punt de vista teòric, a la pràctica és molt més intuïtiu treballar amb la localització dels esdeveniments.

Si el procés N és simple, podem identificar la mesura aleatòria amb una successió de punts aleatoris $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que prenen valors en l'espai E . D'aquesta manera, el procés es pot expressar com una suma de masses de Dirac:

$$N = \sum_{n \geq 1} \delta_{X_n}$$

on cada X_n representa la posició d'un esdeveniment individual. Aquesta formulació permet interpretar qualsevol integral respecte a la mesura puntual com una suma sobre els punts de la realització:

$$\int_E f(x) N(dx) = \sum_{x \in N} f(x).$$

Aquesta definició és el que permet aplicar les eines del càlcul integral a l'estudi de patrons espacials aleatoris.

1.2 Processos Estacionaris

Una propietat molt interessant i útil que tenen alguns processos puntuals és el fet de ser estacionaris.

Definició 1.4 (Procés estacionari). Considerem $E = \mathbb{R}^d$. Un procés puntual N sobre E s'anomena estacionari si la seva distribució és invariant sota translacions. Això significa que per a qualsevol $x \in \mathbb{R}^d$ i per a qualsevol col·lecció de Borelians $C_1, \dots, C_k$, la distribució conjunta del vector

$$(N(C_1 + x), \dots, N(C_k + x))$$

és idèntica a la de $(N(C_1), \dots, N(C_k))$.

En un procés estacionari, si observéssim el procés en una regió qualsevol, no seríem capaços de saber quina part de E és la que observem, ja que qualsevol regió de les mateixes dimensions (una translació), tindria les mateixes propietats estadístiques que la que estem mirant.

Exemple 1.5 (Processos puntuals en graells). Un exemple fonamental de procés puntual que difereix notablement del comportament totalment aleatori del Poisson (que veurem més endavant), és la graella (o *grid*). Una graella a $\mathbb{R}^d$ és una col·lecció de punts de la forma:

$$\{(n_1 T_1, \dots, n_d T_d) : n_i \in \mathbb{Z}\},$$

on $T_1, \dots, T_d$ són constants positives que determinen l'espaiat. Aquest procés no presenta cap mena d'aleatorietat, ja que els punts sempre estan fixos. Si volguéssim aleatorietzar-lo d'alguna manera, podríem introduir un desplaçament aleatori uniforme, obtenint per exemple a $\mathbb{R}$:

$$X_n = nT + U, \quad n \in \mathbb{Z},$$

on $U \sim \text{Uniforme}[0, T)$. Aquest procés és simple, i el fet d'haver afegit l'atzar amb una variable aleatòria uniforme, fa que sigui estacionari. Qualsevol interval d'igual longitud té la mateixa distribució (les probabilitats de que caiguin punts a l'interior són les mateixes).

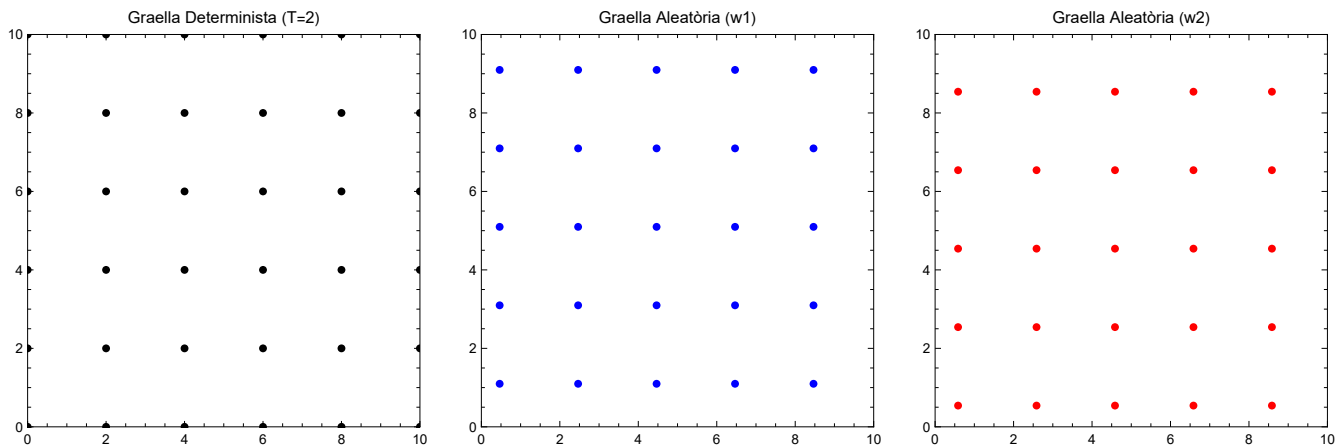


Figura 1. Comparativa entre una graella determinista (esquerra) i dues realitzacions d'una graella aleatòria amb desplaçament uniforme.

En la comparativa de la Figura 1, l'espai base E és $\mathbb{R}^2$ i l'espaiat entre punts T és igual a 2. La regió que està representada a la figura és la d'un quadrat d'àrea 10x10.

En el cas de la graella determinista, per qualsevol realització ω que fem els punts cauen sempre en les mateixes localitzacions (seria com si només existís un ω), que són:

$$\{(2n_1, 2n_2) : n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Aquí no tenim estacionarietat, ja que si per exemple considerem un quadrat C_1 d'àrea 2×2 centrat en la posició $(5,1)$, sempre contindrà 4 punts (a les cantonades), però si fem una translació d'aquest quadrat desplaçant-lo 1 unitat a la dreta (diguem-ne C_2 al quadrat resultant), aquest només contindrà 2 punts, de forma que la distribució de $N(C_1)$ i $N(C_2)$ serà diferent. Concretament $\mathbb{P}(N(C_1) = 4) = 1$ i $\mathbb{P}(N(C_2) = 2) = 1$.

En el cas de la graella aleatòria, a l'introduir una variable aleatòria uniforme (en aquest cas $U \sim \text{Uniforme}[0, 2)^2$), veiem que per diferents realitzacions, els punts cauen en llocs diferents, concretament en punts de l'estil (segons el valor de U obtingut):

$$\{(2n_1 + U, 2n_2 + U) : n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

En aquest cas sí que és un procés estacionari, degut a la variable U introduïda. Això ens diu, que la probabilitat de que caiguin k punts en una regió C_1 , és la mateixa que la de que caiguin k punts en una regió C_2 que tingui les mateixes dimensions que C_1 .

1.3 La Mesura d'Intensitat i la Funció d'Intensitat

Un cop establertes les propietats qualitatives del procés puntual, com la simplicitat i l'estacionarietat, cal definir una magnitud que permeti quantificar el nombre esperat d'esdeveniments en l'espai (és a dir, quants punts esperem que caiguin, en mitjana, en una regió determinada). Aquest paper el desenvolupa la mesura d'intensitat, sovint denotada per ν .

Definició 1.6 (Mesura d'intensitat). Sigui N un procés puntual definit sobre un espai base E . La mesura d'intensitat ν es defineix com la mesura sobre $(E, \mathcal{B}(E))$ que assigna a cada conjunt de Borel C l'esperança del nombre de punts que cauen en aquest regió:

$$\nu(C) = E[N(C)].$$

Perquè el procés sigui útil des d'un punt de vista estadístic, s'assumeix generalment que és de *primer ordre*, la qual cosa implica que la mesura ν és localment finita. Això garanteix que $\nu(C) < \infty$ per a qualsevol conjunt acotat C , evitant l'acumulació infinita de punts en regions finites.

En la majoria de models pràctics, la mesura d'intensitat es pot expressar mitjançant una funció de densitat que anomenarem *funció d'intensitat de primer ordre* i denotarem per $\rho_1(x)$. Si aquesta funció existeix, la relació és:

$$\nu(B) = \int_B \rho_1(x) dx.$$

Aquesta notació ens permetrà, més endavant, definir de forma coherent les intensitats de segon

ordre $\rho_2(x, y)$ i d'ordres superiors.

El fet que un procés sigui estacionari té una implicació directa sobre aquesta funció. Si ho és, la probabilitat de trobar un punt no pot dependre de la seva localització, i per tant, la funció d'intensitat ha de ser constant en tot l'espai:

$$\rho_1(x) = \lambda, \quad \forall x \in E.$$

Demostració. Si suposem que la funció d'intensitat ρ_1 és contínua a tot l'espai i N és un procés puntual estacionari, podem demostrar que $\rho_1(x) = \rho_1(y)$ per a qualsevol parella de punts $x, y \in \mathbb{R}^n$ mitjançant un argument de boles infinitesimals.

Sigui $B(x, \epsilon)$ una bola de radi $\epsilon > 0$ centrada en el punt x . Per la definició de la funció d'intensitat, el nombre esperat de punts dins d'aquesta bola és:

$$\mathbb{E}[N(B(x, \epsilon))] = \int_{B(x, \epsilon)} \rho_1(z) dz.$$

Considerem ara el punt y . Podem escriure $y = x + h$, on $h = y - x$ és el vector de translació. Per ser un procés estacionari, sabem que el nombre de punts en qualsevol conjunt C té la mateixa distribució (i, per tant, la mateixa esperança) que la del conjunt translació $C + h$. En particular:

$$\mathbb{E}[N(B(x, \epsilon))] = \mathbb{E}[N(B(x, \epsilon) + h)] = \mathbb{E}[N(B(y, \epsilon))].$$

Substituint per les integrals de la densitat:

$$\int_{B(x, \epsilon)} \rho_1(z) dz = \int_{B(y, \epsilon)} \rho_1(z) dz.$$

Dividim ambdós costats de la igualtat pel volum de la bola, que denotarem com $|B(\epsilon)|$:

$$\frac{1}{|B(\epsilon)|} \int_{B(x, \epsilon)} \rho_1(z) dz = \frac{1}{|B(\epsilon)|} \int_{B(y, \epsilon)} \rho_1(z) dz.$$

Com que hem suposat que ρ_1 és una funció contínua, podem prendre el límit quan el radi de la bola tendeix a zero ($\epsilon \rightarrow 0$):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B(\epsilon)|} \int_{B(x, \epsilon)} \rho_1(z) dz = \rho_1(x)$$

i paral·lelament,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B(\epsilon)|} \int_{B(y, \epsilon)} \rho_1(z) dz = \rho_1(y).$$

Com que les expressions són iguals per a tot ϵ , els seus límits també han de ser-ho:

$$\rho_1(x) = \rho_1(y).$$

I com que x i y són punts arbitraris de l'espai, concloem que ρ_1 ha de ser una funció constant:

$$\rho_1(x) = \lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

□

La constant λ s'anomena simplement intensitat (o ràtio) del procés, i representa el nombre mitjà de punts per unitat d'àrea. De forma que per a un procés estacionari, la mesura d'intensitat és directament proporcional a la mida de la regió:

$$\nu(C) = \lambda \cdot \text{àrea}(C).$$

En el cas de la graella determinista, és important notar que la mesura d'intensitat no és absolutament contínua, i per tant no es pot expressar mitjançant una funció d'intensitat ordinària $\rho_1(x)$, sinó com un sumatori de masses de Dirac (en els punts fixos de la graella, la delta de Dirac val infinit, i en els altres 0).

En l'exemple anterior, un cop introduïm l'atzar dins la graella amb la variable aleatòria uniforme U , el procés es converteix en estacionari, i té funció d'intensitat constant $\lambda=1/T^2$, on T és l'espaiat entre punts.

Tot seguit analitzarem dos models que serveixen com a referència en l'estudi de l'atzar geomètric, el procés Binomial i el procés de Poisson, i veurem la connexió que hi ha entre els dos mitjançant la propietat condicional. Seguirem la referència [5].

1.4 El Procés Binomial

Considerem un procés en el que tenim un nombre fix de punts n , que cauen de forma aleatòria en una regió acotada $W \subset E = \mathbb{R}^2$. Anomenem $X_1, \dots, X_n$ a aquests punts, que els podem considerar com variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes (*i.i.d*), cadascuna d'elles amb una distribució uniforme sobre la regió W . És a dir que cada X_i té funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{àrea}(W)} & \text{si } x \in W \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}.$$

Si ara agafem un conjunt acotat $C \subset \mathbb{R}^2$, tenim que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i \in C) &= \int_C f(x) dx \\ &= \frac{\text{àrea}(W \cap C)}{\text{àrea}(W)}. \end{aligned}$$

De forma que la variable $N(C)$ del procés puntual es pot escriure com:

$$N(C) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_C(X_i).$$

D'aquí podem observar que $N(C)$ segueix una distribució binomial amb paràmetres n (el nombre de punts inicial fixat), i

$$p = \frac{\text{àrea}(W \cap C)}{\text{àrea}(W)}.$$

Per tant

$$\nu(C) = E[N(C)] = n \cdot \frac{\text{àrea}(C)}{\text{àrea}(W)}, \quad \forall C \subset W$$

pel fet que $N(C)$ segueix una binomial.

Aquest procés N s'anomena procés puntual binomial [5]. En aquests processos, l'estacionarietat només està dins la regió W on cauen els punts, si es considera tot $\mathbb{R}^2$ no n'hi ha.

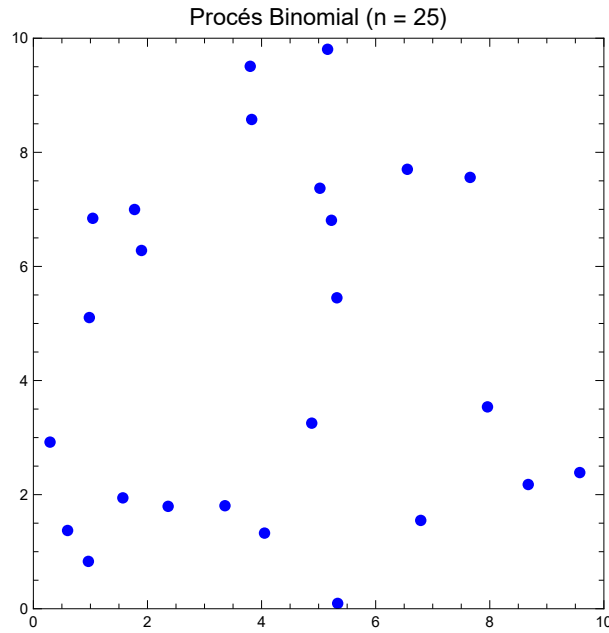


Figura 2. Realització d'un procés puntual binomial de $n = 25$, en una quadrat d'àrea 10x10.

A la Figura 2 podem veure una realització d'un procés binomial.

Comparant-lo amb la Figura 1, observem que en les graelles, existeix una correlació entre els punts, és a dir que la posició d'un punt influeix en la posició d'un altre (la distància entre punts sempre és la mateixa). En canvi en el procés binomial, no existeix cap mena de correlació entre punts, i tots són totalment independents, cosa que fa que la distància entre ells sigui totalment aleatòria, havent zones amb acumulacions, i zones més buides.

1.5 El Procés de Poisson

El procés de Poisson és el model teòric de referència, ja que representa la situació d'aleatorietat pura sense interacció entre punts.

Des d'un punt de vista pràctic, la seva simplicitat matemàtica permet modelar multitud de fenòmens naturals i tecnològics. S'utilitza habitualment en àmbits tan diversos com l'astronomia (posició de galàxies), la silvicultura (distribució d'espècies arbòries sense competència per recursos) i les telecomunicacions (arribada de paquets de dades a un servidor).

Definició 1.7. Un procés puntual N sobre E és un procés de Poisson amb mesura μ si satisfà:

1. Per a tot conjunt mesurable C amb $\mu(C) < \infty$, $N(C)$ segueix una distribució de Poisson de paràmetre $\mu(C)$

$$\mathbb{P}(N(C) = k) = e^{-\mu(C)} \frac{\mu(C)^k}{k!}, \quad k \geq 0.$$

2. Per a qualsevol col·lecció de conjunts disjunts $C_1, \dots, C_k$, les variables aleatòries $N(C_1), \dots, N(C_k)$ són independents.

Per tant tenim que:

$$\nu(C) = E[N(C)] = \mu(C),$$

pel fet que $N(C)$ segueix una Poisson.

Si considerem $E = \mathbb{R}^n$, $\mu(C)$ admet una funció d'intensitat $\rho_1(x)$ (és a dir $\mu(C) = \int_C \rho_1(x) dx$), i a més $\rho_1(x) = \lambda$, $\forall x \in E$, tenim un procés de Poisson homogeni (HPP) amb intensitat λ . I si en particular $\lambda = 1$, s'anomena procés de Poisson estàndard.

A la figura 3 podem observar que en el mateix procés de Poisson, el nombre de punts obtinguts en diferents realitzacions varia (a diferència del procés binomial).

Al tenir intensitat constant $\lambda = 0.25$, es compleix la igualtat:

$$\nu(C) = \lambda \cdot \text{àrea}(C).$$

De forma que el número de punts esperat en la regió del gràfic d'àrea 100, és de 25. Per tant, si féssim infinites realitzacions del procés, la mitjana de punts obtinguts en aquesta regió seria de 25.

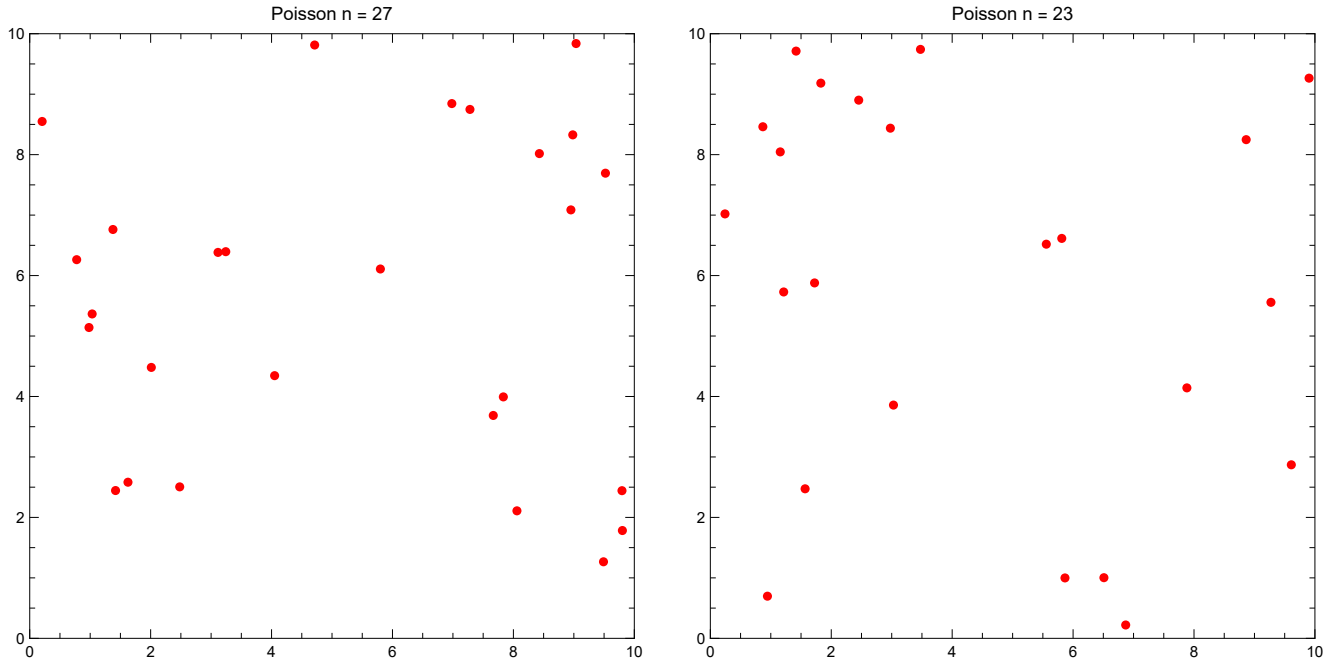


Figura 3. Realitzacions d'un procés puntual de Poisson homogeni d'intensitat $\lambda = 0.25$, vist en un quadrat de 10×10

1.6 Relació entre el procés Binomial i el de Poisson: la Propietat Condicional

Ara anem a veure com el procés Binomial i el de Poisson estan connectats. Aquesta relació es formalitza en el següent lema, extret de [5].

Lema 1.8 (Propietat condicional del procés de Poisson). *Considerem un procés de Poisson homogeni N a $\mathbb{R}^2$ amb intensitat $\lambda > 0$. Sigui W una regió amb àrea finita. Aleshores, si suposem que el nombre total de punts observats serà n (és a dir, $N(W) = n$), el procés dins de $C \subset W$ és exactament un procés puntual binomial de n punts.*

$$\mathbb{P}(N(C)) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \geq 0, \quad p = \frac{\text{àrea}(C)}{\text{àrea}(W)}.$$

Demostració. Siguin $C \subseteq W$ dues regions de l'espai. Per la definició de probabilitat condicional i aprofitant que en un procés de Poisson les variables aleatòries en regions disjunts ($N(C)$ i $N(W \setminus C)$) són independents, tenim:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(C) = k \mid N(W) = n) &= \frac{\mathbb{P}(N(C) = k \text{ i } N(W \setminus C) = n - k)}{\mathbb{P}(N(W) = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(C) = k) \cdot \mathbb{P}(N(W \setminus C) = n - k)}{\mathbb{P}(N(W) = n)}. \end{aligned}$$

Substituint per la funció de probabilitat de la distribució de Poisson de paràmetre $\mu_C = \lambda \cdot \text{àrea}(C)$

i $\mu_W = \lambda \cdot \text{àrea}(W)$:

$$= \frac{\left(e^{-\mu_C} \frac{\mu_C^k}{k!} \right) \cdot \left(e^{-\mu_{W \setminus C}} \frac{\mu_{W \setminus C}^{n-k}}{(n-k)!} \right)}{e^{-\mu_W} \frac{\mu_W^n}{n!}}.$$

Simplificant els termes exponencials (atès que $\mu_C + \mu_{W \setminus C} = \mu_W$) i reordenant els factorials, obtenim:

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\mu_C}{\mu_W} \right)^k \left(\frac{\mu_{W \setminus C}}{\mu_W} \right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

on $p = \text{àrea}(C)/\text{àrea}(W)$. Això correspon exactament a la funció de probabilitat d'una distribució binomial $\text{Bin}(n, p)$. $\square$

Aquest resultat ens indica que, si eliminem l'aleatorietat del número de punts total obtinguts, les localitzacions dels punts d'un procés de Poisson són condicionalment independents i uniformement distribuïdes dins de la regió d'estudi.

Observació 1.9. Podríem dir que per generar un procés de Poisson, primer generem un nombre de punts n seguint una distribució $\text{Poisson}(\lambda \cdot \text{àrea}(W))$ i, a continuació, distribuïm aquests n punts de manera uniforme i independent, tal com es fa en un procés binomial.

Capítol 2: Fórmules de Campbell i Mesures de Moment

Un cop definit l'objecte matemàtic, ens interessa estudiar les seves propietats estadístiques. De la mateixa manera que en teoria de probabilitats estudiem l'esperança i la variància d'una variable aleatòria, en processos puntuals estudiem les mesures de moment.

2.1 Fórmula de Campbell de primer ordre

La mesura d'intensitat $\nu(C) = \mathbb{E}[N(C)]$ ens indica el nombre mitjà de punts en un conjunt. La fórmula de Campbell generalitza aquest concepte per a qualsevol funció mesurable, permetent calcular l'esperança d'una suma aleatòria sobre els punts del procés [2].

Teorema 2.1 (Fórmula de Campbell). *Sigui N un procés puntual sobre E amb mesura d'intensitat ν . Per a qualsevol funció mesurable no negativa $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (o integrable respecte a ν), es compleix:*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in N} f(x) \right] = \int_E f(x) \nu(dx).$$

La variable aleatòria

$$\left[\sum_{x \in N} f(x) \right],$$

s'anomena estadístic lineal del procés puntual N .

Aquest resultat és fonamental. Ens permet calcular el valor esperat d'una quantitat que depèn de tota la configuració aleatòria de punts mitjançant una integral determinista sobre l'espai base.

Demostració. La demostració es basa en l'argument estàndard d'aproximació en teoria de la mesura:

Primer suposem que f és una funció indicatriu, $f(x) = \mathbf{1}_C(x)$ per a un cert $C \in \mathcal{B}(E)$. Llavors:

$$\mathbb{E} \left[\int_E \mathbf{1}_C(x) N(dx) \right] = \mathbb{E}[N(C)] = \nu(C) = \int_E \mathbf{1}_C(x) \nu(dx).$$

Aquesta igualtat és certa per la pròpia definició de la mesura d'intensitat.

Per la linealitat de l'esperança i de la integral, el teorema es compleix automàticament per a funcions simples mesurables (combinacions lineals d'indicatrius) de la forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{1}_{C_i}(x).$$

Si tenim que f és una funció mesurable no negativa qualsevol, sabem que existeix una successió creixent de funcions simples $f_n \uparrow f$. De forma que com:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in N} f_n(x) \right] = \mathbb{E} \left[\int_E f_n(x) N(dx) \right] = \int_E f_n(x) \nu(dx),$$

passant al $\lim_{n \rightarrow \infty}$, pel Teorema de la Convergència Monòtona [2] obtenim:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in N} f(x) \right] = \mathbb{E} \left[\int_E f(x) N(dx) \right] = \int_E f(x) \nu(dx).$$

Però això només ho demostra per una f no negativa. Per a una funció integrable i mesurable f qualsevol, la descomposarem en la seva part positiva $f^+(x) = \max(0, f(x))$ i la seva part negativa $f^-(x) = \max(0, -f(x))$, de manera que $f = f^+ - f^-$.

Com que tant f^+ com f^- són funcions mesurables no negatives, podem aplicar el resultat obtingut anteriorment a cadascuna d'elles. Si suposem que la funció és integrable respecte a la mesura d'intensitat, és a dir, $\int_E |f(x)| \nu(dx) < \infty$, llavors per la linealitat de l'esperança i de la integral tenim:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_E f(x) N(dx) \right] &= \mathbb{E} \left[\int_E f^+(x) N(dx) - \int_E f^-(x) N(dx) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_E f^+(x) N(dx) \right] - \mathbb{E} \left[\int_E f^-(x) N(dx) \right] \\ &= \int_E f^+(x) \nu(dx) - \int_E f^-(x) \nu(dx) \\ &= \int_E f(x) \nu(dx). \end{aligned}$$

Això completa la demostració per a qualsevol funció mesurable integrable. $\square$

2.2 Moments de segon ordre i interacció entre punts

La mesura d'intensitat només ens dóna informació local sobre on és probable trobar punts, però no ens diu res sobre si els punts tendeixen a aparèixer agrupats o si es repel·leixen. Per analitzar la relació entre parelles de punts, introduïm la segona mesura de moment.

Definició 2.2 (Segona mesura de moment). S'anomena segona mesura de moment de N , denotada per M_2 , a la mesura sobre l'espai producte $E \times E$ definida per:

$$M_2(A \times B) = \mathbb{E}[N(A)N(B)].$$

per a qualssevol Borelians acotats $A, B \in \mathcal{B}(E)$.

Tanmateix, la mesura M_2 té un inconvenient: si A i B s'intersequen, el producte $N(A)N(B)$ compta cada punt coincident dues vegades (la “diagonal” de l'espai producte). Per estudiar la interacció entre punts diferents, és més útil la mesura de moment factorial de segon ordre $\alpha^{(2)}$:

Definició 2.3 (Mesura de moment factorial de segon ordre). Es defineix com la mesura que satisfà la versió de segon ordre de la fórmula de Campbell:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in N} \sum_{y \in N, y \neq x} f(x, y) \right] = \int_E \int_E f(x, y) \alpha^{(2)}(dx, dy).$$

A partir d'aquí, si la mesura $\alpha^{(2)}$ admet una densitat $\rho_2(x, y)$ respecte a la mesura de Lebesgue, aquesta s'anomena intensitat conjunta o funció de correlació [2], i ens indica la densitat de probabilitat de trobar un punt a x i un altre a y simultàniament.

2.3 Moments Factorials d'Ordre Superior

Les definicions anteriors s'estenen naturalment a moments d'ordre superior $n \geq 1$. Sigui N un procés puntual tal que $\mathbb{E}[N(C)^n] < \infty$ per a tot compacte C . Definim la mesura de moment d'ordre n , denotada per M_n , com:

$$M_n(C_1 \times \cdots \times C_n) := \mathbb{E}[N(C_1) \cdots N(C_n)], \quad \text{per a } C_1, \dots, C_n \in \mathcal{B}(E).$$

Aquesta mesura captura la probabilitat conjunta de trobar punts en n regions diferents. No obstant això, per a l'estudi de processos puntuals simples, és més rellevant la mesura de moment factorial d'ordre n , denotada per $M^{(n)}$ (o $\alpha^{(n)}$). Aquesta mesura es restringeix a n -uples de punts *diferents*.

La fórmula de Campbell generalitzada per a moments factorials ens diu que, per a qualsevol funció mesurable no negativa integrable $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{X_{i_1} \neq \dots \neq X_{i_n} \in N} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) \right] = \int_{E^n} f(x_1, \dots, x_n) M^{(n)}(dx_1 \times \cdots \times dx_n).$$

Si la mesura $M^{(n)}$ admet una densitat respecte a la mesura de Lebesgue, aquesta densitat $\rho_n(x_1, \dots, x_n)$ s'anomena funció de correlació de n punts. Per a un procés de Poisson d'intensitat $\lambda(x)$, a causa de la independència espacial:

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x_1) \cdots \lambda(x_n).$$

2.4 Aplicació: La Variància del Procés

Podem utilitzar la fórmula de Campbell de segon ordre per deduir la variància del comptatge de punts en un conjunt A . Sabem que:

$$N(A)^2 = \left(\sum_{x \in N} \mathbf{1}_A(x) \right) \left(\sum_{y \in N} \mathbf{1}_A(y) \right) = \sum_{x \in N} \mathbf{1}_A(x) + \sum_{x \neq y} \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_A(y).$$

Prenent esperances i aplicant Campbell d'ordre 1 al primer terme i d'ordre 2 al segon:

$$\mathbb{E}[N(A)^2] = \nu(A) + \alpha^{(2)}(A \times A).$$

Per tant, la variància és:

$$\text{Var}(N(A)) = \nu(A) + \alpha^{(2)}(A \times A) - (\nu(A))^2.$$

De manera més general, la covariància entre $N(A)$ i $N(B)$ ve donada per:

$$\text{Cov}(N(A), N(B)) = \alpha^{(2)}(A \times B) - \nu(A)\nu(B) + \nu(A \cap B).$$

Si existeix la intensitat conjunta $\rho_2(x, y)$, el terme $\alpha^{(2)}(A \times B) - \nu(A)\nu(B)$ es converteix en la integral de $(\rho_2(x, y) - \lambda(x)\lambda(y))$. Aquest integrand mesura l'excés o defecte de probabilitat de trobar parelles de punts respecte al cas independent, indicant atracció (clustering) o repulsió.

A partir de la intensitat conjunta $\rho_2(x, y)$, és habitual definir una versió normalitzada que permeti analitzar la interacció entre punts de manera independent a la intensitat del procés. Aquesta magnitud rep el nom de funció de correlació de parelles (*pair correlation function*) i es defineix com:

$$g(x, y) = \frac{\rho_2(x, y)}{\lambda(x)\lambda(y)}$$

En el cas d'un procés estacionari, aquesta funció només depèn de la distància $r = \|x - y\|$ entre els punts. El valor $g(r) = 1$ actua com a llindar de referència: valors superiors a la unitat indiquen atracció entre esdeveniments, mentre que valors inferiors representen un efecte d'inhibició o repulsió.

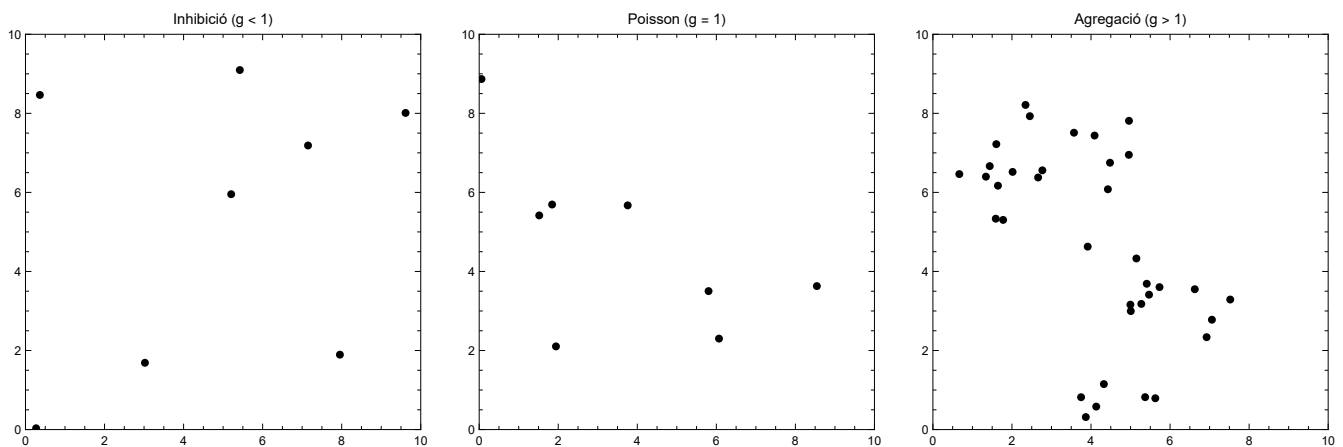


Figura 4. Comparativa entre processos segons el valor de $g(x, y)$

A la Figura 4, en el gràfic de l'esquerra ($g(x, y) < 1$), podem veure que els punts mantenen una distància mínima entre ells, el patró és més regular que en l'atzar.

En el del mig ($g(x, y) = 1$), hi ha independència total entre els punts. És el cas del procés de Poisson.

I en el de la dreta ($g(x, y) > 1$), els punts tendeixen a formar grups i a acumular-se. La presència d'un, fa que sigui més probable que n'hi hagi un altre a prop.

2.5 Funció de correlació del procés binomial i del de Poisson

Considerem un procés puntual binomial N a un conjunt $W \subset \mathbb{R}^n$ acotat, format per n punts independents i uniformement distribuïts $X_1, \dots, X_n$. Per a dos conjunts $A_1, A_2 \subset W$, el producte del nombre de punts en cadascun ve donat per:

$$\begin{aligned} N(A_1)N(A_2) &= \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{A_2}(X_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) \mathbf{1}_{A_2}(X_j). \end{aligned}$$

Podem descomposar aquest sumatori doble en dos sumands segons si els índexs coincideixen (termes de la diagonal) o són diferents:

$$N(A_1)N(A_2) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1 \cap A_2}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) \mathbf{1}_{A_2}(X_j).$$

Calculem l'esperança de cada part per separat utilitzant la linealitat de l'esperança.

1. Termes de la diagonal ($i = j$): Com que cada X_i és uniforme a W , sabem que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X_i)] = \mathbb{P}(X_i \in A) = \frac{|A|}{|W|}$. Per tant:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1 \cap A_2}(X_i) \right] = n \frac{|A_1 \cap A_2|}{|W|} = \nu(A_1 \cap A_2).$$

2. Termes fora de la diagonal ($i \neq j$): Com que els punts X_i i X_j són independents per a $i \neq j$, la probabilitat conjunta és el producte de les probabilitats individuals:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_i) \mathbf{1}_{A_2}(X_j)] &= \mathbb{P}(X_i \in A_1, X_j \in A_2) \\ &= \mathbb{P}(X_i \in A_1) \mathbb{P}(X_j \in A_2) = \frac{|A_1|}{|W|} \frac{|A_2|}{|W|}. \end{aligned}$$

I com que hi ha $n(n-1)$ parelles d'índexs tals que $i \neq j$, el sumatori total és:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) \mathbf{1}_{A_2}(X_j) \right] = n(n-1) \frac{|A_1| |A_2|}{|W|^2}.$$

Combinant els resultats anteriors, la mesura d'ordre dos M_2 és:

$$M_2(A_1 \times A_2) = \mathbb{E}[N(A_1)N(A_2)] = n \frac{|A_1 \cap A_2|}{|W|} + n(n-1) \frac{|A_1||A_2|}{|W|^2}.$$

Finalment, la mesura factorial d'ordre dos $M^{(2)}$, que s'obté restant els elements de la diagonal, resulta en:

$$M^{(2)}(A_1 \times A_2) = M_2(A_1 \times A_2) - \nu(A_1 \cap A_2) = n(n-1) \frac{|A_1||A_2|}{|W|^2}.$$

Recordem que la funció de correlació de segon ordre $\rho_2(x, y)$ és la densitat de la mesura factorial $M^{(2)}$ respecte a la mesura de Lebesgue. Per tant, compleix la relació:

$$M^{(2)}(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \int_{A_2} \rho_2(x, y) dx dy.$$

Substituint el resultat obtingut anteriorment per al procés binomial:

$$n(n-1) \frac{|A_1||A_2|}{|W|^2} = \int_{A_1} \int_{A_2} \rho_2(x, y) dx dy.$$

Com que la mesura d'un conjunt es pot expressar com la integral de la unitat, $|A| = \int_A 1 dx$, podem reescriure el terme de l'esquerra com:

$$\frac{n(n-1)}{|W|^2} \left(\int_{A_1} dx \right) \left(\int_{A_2} dy \right) = \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{n(n-1)}{|W|^2} dx dy.$$

Per identificació directa entre les dues integrals, concloem que la funció de correlació de segon ordre per al procés binomial és constant i ve donada per:

$$\rho_2(x, y) = \frac{n(n-1)}{|W|^2} \quad \text{per a tot } x, y \in W, x \neq y.$$

Ara anem a mirar el cas del procés de Poisson.

Considerem ara un procés de Poisson homogeni N a $\mathbb{R}^n$ amb intensitat $\lambda > 0$. Per calcular la mesura d'ordre dos $M_2(A_1 \times A_2) = \mathbb{E}[N(A_1)N(A_2)]$, utilitzarem la propietat d'independència sobre conjunts disjunts.

Descomposem els conjunts A_1 i A_2 en les següents regions disjunts:

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2), \quad A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1).$$

Així, podem expressar el nombre de punts com a suma de variables aleatòries independents:

$$\begin{aligned} N(A_1) &= N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \setminus A_2), \\ N(A_2) &= N(A_1 \cap A_2) + N(A_2 \setminus A_1). \end{aligned}$$

Denotem per breuetat $X = N(A_1 \cap A_2)$, $Y = N(A_1 \setminus A_2)$ i $Z = N(A_2 \setminus A_1)$. Per les propietats del procés de Poisson, X, Y, Z són variables aleatòries independents amb distribució de Poisson de paràmetres $\lambda|A_1 \cap A_2|$, $\lambda|A_1 \setminus A_2|$ i $\lambda|A_2 \setminus A_1|$ respectivament. L'esperança del producte és:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(A_1)N(A_2)] &= \mathbb{E}[(X + Y)(X + Z)] \\ &= \mathbb{E}[X^2 + XZ + YX + YZ] \\ &= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z].\end{aligned}$$

Recordem que per a una variable de Poisson X , el seu segon moment és $\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2$. Substituint els paràmetres:

$$\begin{aligned}M_2(A_1 \times A_2) &= \lambda|A_1 \cap A_2| + (\lambda|A_1 \cap A_2|)^2 \\ &\quad + (\lambda|A_1 \cap A_2|)(\lambda|A_2 \setminus A_1|) \\ &\quad + (\lambda|A_1 \setminus A_2|)(\lambda|A_1 \cap A_2|) \\ &\quad + (\lambda|A_1 \setminus A_2|)(\lambda|A_2 \setminus A_1|).\end{aligned}$$

Agrupant els termes que porten λ^2 , observem que formen el producte de les àrees totals:

$$\begin{aligned}M_2(A_1 \times A_2) &= \lambda|A_1 \cap A_2| + \lambda^2(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \setminus A_2|)(|A_1 \cap A_2| + |A_2 \setminus A_1|) \\ &= \lambda|A_1 \cap A_2| + \lambda^2|A_1||A_2|.\end{aligned}$$

D'aquí obtenim directament la mesura factorial d'ordre dos, restant la intensitat sobre la intersecció:

$$M^{(2)}(A_1 \times A_2) = M_2(A_1 \times A_2) - \lambda|A_1 \cap A_2| = \lambda^2|A_1||A_2|.$$

Per identificar la funció de correlació $\rho_2(x, y)$, escrivim la mesura factorial en forma integral:

$$\int_{A_1} \int_{A_2} \rho_2(x, y) dx dy = \lambda^2|A_1||A_2| = \int_{A_1} \int_{A_2} \lambda^2 dx dy.$$

Per tant, per al procés de Poisson homogeni:

$$\rho_2(x, y) = \lambda^2 = \rho_1(x)\rho_1(y).$$

Capítol 3: Distribució d'un procés i el funcional de Laplace

Fins ara hem parlat de moments, però per caracteritzar completament un procés puntual N necessitem la seva llei de probabilitat.

Definició 3.1 (Distribució d'un procés puntual). Sigui N un procés puntual sobre $(E, \mathcal{B}(E))$ definit en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sigui $\mathcal{M}_p(E)$ la σ -àlgebra de l'espai de mesures puntuals localment finites $M_p(E)$. La distribució de N és la mesura de probabilitat $\mathbb{P}_N$ sobre $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$ definida com la mesura induïda de $\mathbb{P}$ a través de N :

$$\mathbb{P}_N = \mathbb{P} \circ N^{-1}.$$

Aquesta es pot especificar de diferents maneres equivalents (Secció 1.3 de [2]):

1. **Distribucions finito-dimensionals (fidi):** Coneixent la distribució conjunta dels vectors aleatoris $(N(C_1), \dots, N(C_k))$ per a qualsevol col·lecció de conjunts de Borel fitats C_i .
2. **El Funcional de Laplace:** Que tractarem a la secció següent.
3. **La Funció d'Evitació (Avoidance Function):** Definida com $v(B) = \mathbb{P}(N(B) = 0)$ per a $B \in \mathcal{B}(E)$. És un resultat notable que, per a processos puntuals simples, la funció d'evitació determina unívocament la distribució del procés.

3.1 El Funcional de Laplace

De manera anàloga a com la funció característica caracteritza completament una variable aleatòria, el funcional de Laplace caracteritza completament la distribució d'un procés puntual. És una eina indispensable per a les demostracions de convergència i operacions.

Definició 3.2 (Funcional de Laplace). Sigui N un procés puntual sobre E . El funcional de Laplace de N és l'aplicació L_N que actua sobre l'espai de funcions mesurables no negatives $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida com:

$$L_N(f) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_E f(x) N(dx)} \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{X_i \in N} f(X_i) \right) \right].$$

El següent resultat és clau per identificar processos:

Teorema 3.3 (Unicitat). *La distribució de probabilitat d'un procés puntual simple queda unívocament determinada pel seu funcional de Laplace L_N .*

Vegem dos exemples:

Exemple 3.4. Tal com es discuteix a l'Exemple 1.3.10 de [2]. Considerem un procés puntual que consisteix en exactament n punts $X_1, \dots, X_n$ distribuïts de manera independent i idèntica (i.i.d.) en un conjunt compacte W amb densitat de probabilitat $h(x)$.

Calculem el seu funcional de Laplace. Utilitzant la independència dels punts:

$$\begin{aligned} L_N(f) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^n f(X_i) \right) \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n e^{-f(X_i)} \right] \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left[e^{-f(X_i)} \right] = \left(\int_W e^{-f(x)} h(x) dx \right)^n. \end{aligned}$$

Aquest resultat contrasta amb el del Procés de Poisson que veurem a continuació, on el nombre de punts no és fix sinó aleatori.

Exemple 3.5. A l'Exemple 1.3.16 de [2], s'utilitza el funcional de Laplace per demostrar l'estacionarietat de la graella aleatòria. Considerem la graella estacionària a $\mathbb{R}$ definida per $X_n = nT + U$, on $U \sim \text{Uniforme}[0, T)$. Volem calcular $L_N(f)$ per a $f \geq 0$.

$$L_N(f) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT + U) \right) \right].$$

Com que l'única font d'aleatorietat és U , que té densitat $1/T$ a l'interval $[0, T)$, la integral és:

$$L_N(f) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp \left(- \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT + u) \right) du.$$

Aquesta expressió demostra l'estacionarietat, ja que una translació de la funció f no canvia el valor de la integral degut a la periodicitat de la suma infinita.

És instructiu calcular la variància del nombre de punts d'aquest procés en un interval per contrastar-ho amb el procés de Poisson. Sigui N la graella estacionària a $\mathbb{R}$ amb pas T . Considerem un interval $I = [0, L]$. El nombre de punts en aquest interval és:

$$N(L) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 1_{[0, L]}(nT + U).$$

Com que l'espaiat és determinista (T), el nombre de punts que cauen en un interval de longitud L només pot prendre dos valors possibles: k o $k + 1$, on $k = \lfloor L/T \rfloor$. Mai tindrem la gran variabilitat del Poisson.

De fet, es pot demostrar que la variància està fitada uniformement, independentment de la longitud L . Mentre que per un Poisson $\text{Var}(N(L)) = \lambda L$, per a la graella tenim que $\text{Var}(N(L))$ és una funció periòdica de L i sempre es compleix que:

$$\text{Var}(N(L)) \leq \frac{1}{4}.$$

Aquest comportament (variància fitada quan el volum creix) és la manifestació més forta possible de la propietat d'hiperuniformitat que definirem al final d'aquest treball.

3.2 Càlcul del Funcional de Laplace de Poisson

Podem derivar la forma explícita del funcional de Laplace per a un procés de Poisson. Aquest resultat és el Teorema 3.2.2 a [2].

Teorema 3.6. *Si N és un procés de Poisson amb mesura d'intensitat ν , aleshores:*

$$L_N(f) = \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \nu(dx) \right).$$

Demostració. Procedim per passos utilitzant funcions simples, com és habitual. Sigui $f(x) = c\mathbf{1}_A(x)$ una funció simple amb A fitat i $c > 0$. Llavors:

$$\int_E f(x) N(dx) = cN(A).$$

Per tant:

$$L_N(f) = \mathbb{E}[e^{-cN(A)}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ck} e^{-\nu(A)} \frac{\nu(A)^k}{k!} = e^{-\nu(A)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{-c}\nu(A))^k}{k!}.$$

Reconeixent la sèrie de Taylor de l'exponencial, tenim:

$$= e^{-\nu(A)} e^{e^{-c}\nu(A)} = e^{-\nu(A)(1-e^{-c})} = \exp \left(- \int_A (1 - e^{-c}) \nu(dx) \right).$$

L'integral de la dreta coincideix amb $\int_E (1 - e^{-f(x)}) \nu(dx)$ ja que fora de A , $f(x) = 0$ i l'integrand s'anul·la.

Si f és una suma de funcions simples disjunts, $f = \sum c_i \mathbf{1}_{A_i}$, la independència dels increments del procés de Poisson permet factoritzar l'esperança en un producte d'exponencials, que esdevé l'exponencial de la suma (la integral). Finalment, per convergència monòtona, el resultat s'estén a qualsevol funció mesurable no negativa. $\square$

A partir de processos bàsics, en podem construir de nous mitjançant operacions. Veurem dues operacions fonamentals descrites a [2].

3.3 Superposició

La superposició consisteix a sumar dos processos puntuals. Si N_1 i N_2 són dos processos puntuals independents amb funcionals de Laplace L_{N_1} i L_{N_2} , la seva suma $N = N_1 + N_2$ té per funcional de Laplace:

$$L_N(f) = \mathbb{E}[e^{-\int f d(N_1+N_2)}] = \mathbb{E}[e^{-\int f dN_1} e^{-\int f dN_2}] \stackrel{\text{indep}}{=} L_{N_1}(f) L_{N_2}(f).$$

Conseqüència: Si superposem dos processos de Poisson independents d'intensitats ν_1 i ν_2 , el resultat és un nou procés de Poisson d'intensitat $\nu_1 + \nu_2$. Això es veu fàcilment multiplicant les exponencials dels seus funcionals de Laplace.

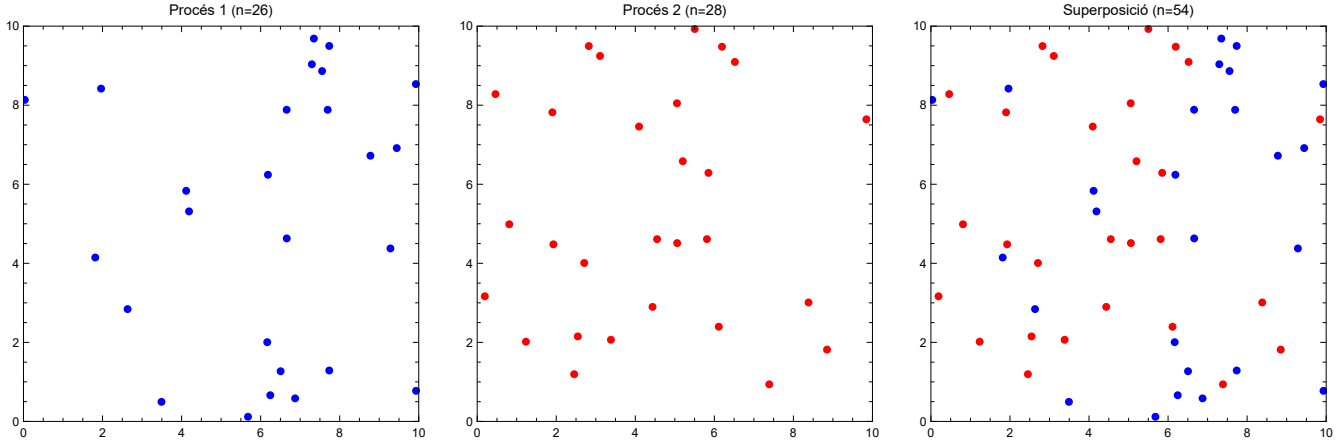


Figura 5. Exemple de superposició amb dos processos de Poisson, d'intensitat $\lambda_1 = 0.2$ i $\lambda_2 = 0.3$

3.4 Aprimament (Thinning)

Una operació clàssica és l'aprimament o *thinning*, que consisteix a eliminar punts del procés original de manera aleatòria.

Definició 3.7 (*p*-thinning). Sigui $N = \sum \delta_{X_n}$ un procés puntual. Sigui $p : E \rightarrow [0, 1]$ una funció (probabilitat de retenció). El procés aprimat N_p es construeix conservant cada punt X_n amb probabilitat $p(X_n)$ i eliminant-lo amb probabilitat $1 - p(X_n)$, de manera independent entre punts.

Sigui ϵ_n una variable Bernoulli amb paràmetre $p(X_n)$. El procés aprimat es pot escriure com $N_p = \sum \epsilon_n \delta_{X_n}$. Podem calcular el seu funcional de Laplace condicionant primer sobre la realització de N :

$$L_{N_p}(f) = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_n \epsilon_n f(X_n) \right) \middle| N \right] \right].$$

L'esperança condicional interna és un producte sobre els punts de N :

$$\prod_n \mathbb{E}[e^{-\epsilon_n f(X_n)} | X_n] = \prod_n (p(X_n) e^{-f(X_n)} + 1 - p(X_n)).$$

Utilitzant la identitat $x = e^{\ln x}$, podem reescriure el terme dins del producte com $\exp(\ln(1 - p(X_n)(1 - e^{-f(X_n)})))$. Això ens porta a la relació general per a l'aprimament:

$$L_{N_p}(f) = L_N \left(-\ln(1 - p(\cdot)(1 - e^{-f})) \right).$$

Aquesta fórmula ens permet demostrar fàcilment el següent resultat clàssic:

Teorema 3.8 (Aprimament de Poisson). *Si N és un procés de Poisson d'intensitat ν i li apliquem un *p*-thinning, el procés resultant N_p és un procés de Poisson amb intensitat mesura $p(x)\nu(dx)$.*

Demostració. Substituïm la funció $g(x) = -\ln(1 - p(x)(1 - e^{-f(x)}))$ en la fórmula de Laplace del Poisson original:

$$L_{N_p}(f) = \exp \left(- \int_E (1 - e^{-g(x)}) \nu(dx) \right).$$

Observem que $e^{-g(x)} = 1 - p(x)(1 - e^{-f(x)})$, per tant $1 - e^{-g(x)} = p(x)(1 - e^{-f(x)})$. Substituint això a la integral:

$$L_{N_p}(f) = \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) p(x) \nu(dx) \right).$$

Reconeixem aquesta expressió com el funcional de Laplace d'un Poisson amb mesura d'intensitat $\mu(dx) = p(x)\nu(dx)$. $\square$

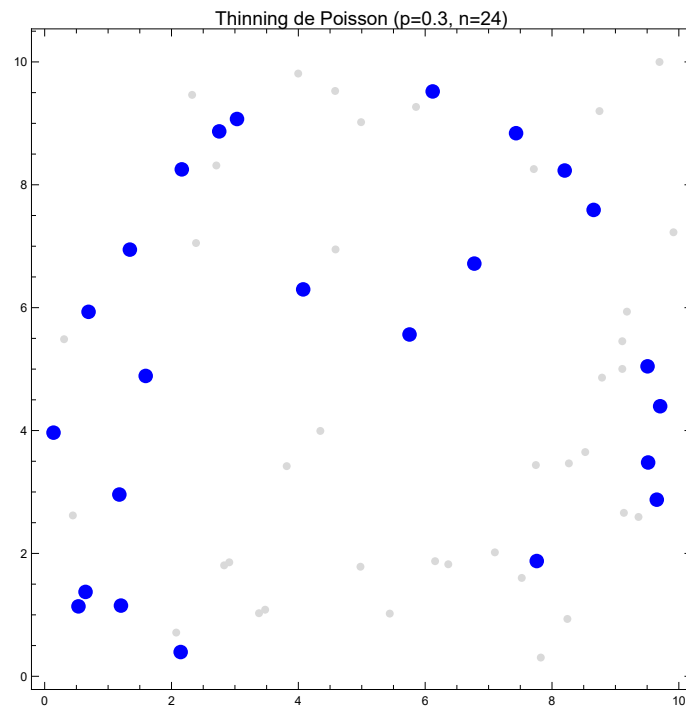


Figura 6. Aprimament d'un procés de Poisson d'intensitat $\lambda = 0.7$ i $p=0.3$ constant, en una regió 10×10

A la figura 6 podem observar que els punts grisos i blaus representen els punts obtinguts en el procés de Poisson, i els blaus són els que han sobreviscut l'aprimament.

L'esperança de punts en una regió 10×10 del procés de Poisson amb $\lambda = 0.7$ en una regió $A=10 \times 10$ és $\nu(A) = 100 \cdot 0.7 = 70$ (que és aproximadament el nombre total de punts obtinguts (grisos i blaus)), i a l'aplicar l'aprimament, $\nu(A) = 100 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 21$ (nombre de punts blaus aproximadament). Veiem que la distribució dels punts és com la de Poisson.

Capítol 4: Hiperuniformitat i Processos Puntuals Determinantals (DPPs)

Fins ara hem estudiat el Procés de Poisson, el qual serveix com a model d'absència total d'estructura o interacció: la posició d'un punt no influeix en la dels altres. Una conseqüència directa d'aquesta independència és que la variància del nombre de punts en un domini creix linealment amb el volum del domini.

Tanmateix, en molts sistemes físics i biològics (com la distribució de cèl·lules a la retina o els nivells d'energia en nuclis pesants), s'observa una regularitat sorprenent: tot i que localment els punts semblen desordenats, a gran escala la fluctuació del nombre de punts és molt menor que en un procés de Poisson. Aquest fenomen es coneix com a hiperuniformitat.

En aquest capítol, formalitzarem aquest concepte seguint l'enfocament presentat en el treball de recerca de R. Lachièze-Rey [6].

4.1 Definició i Motivació

Considerem un procés puntual estacionari N a $\mathbb{R}^d$. Recordem que, per a un procés de Poisson homogeni d'intensitat λ , la variància del nombre de punts en una bola B_R de radi R centrada a l'origen és:

$$\text{Var}(N(B_R)) = \mathbb{E}[N(B_R)] = \lambda \text{Vol}(B_R) \propto R^d.$$

Diem que els sistemes amb aquest comportament ($\text{Var} \sim \text{Vol}$) són *extensius*. La majoria de processos puntuals on les interaccions decauen ràpidament són extensius.

La hiperuniformitat descriu sistemes on aquestes fluctuacions estan suprimides. Seguint la Definició 1.1 de [6], tenim:

Definició 4.1 (Hiperuniformitat). Sigui N un procés puntual estacionari a $\mathbb{R}^d$. Diem que N és hiperuniforme si la variància del nombre de punts creix més lentament que el volum del domini asimptòticament. Formalment:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(N(B_R))}{\text{Vol}(B_R)} = 0,$$

on $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq R\}$ és la bola euclidiana de radi R .

Aquesta condició implica que, per a grans finestres d'observació, el procés s'assembla molt a un cristall perfecte en termes de densitat, tot i que localment pot ser desordenat. Els físics sovint descriuen la hiperuniformitat com un estat de la matèria que posseeix "ordre global i desordre local".

4.2 La Regla de la Suma (Sum Rule) com a criteri d'hiperuniformitat

Mentre que la Definició 4.1 ens dóna una caracterització basada en el creixement de la variància, en la pràctica és extremadament útil disposar d'un criteri basat en les funcions de correlació del procés. En aquesta part seguirem la referència [7].

Si definim la funció de correlació truncada com $f(x, y) = \rho_2(x, y) - \rho_1(x)\rho_1(y)$, es pot demostrar que la condició d'hiperuniformitat en el cas estacionari equival a que la integral de f compensi exactament la intensitat del procés. Aquesta relació es coneix com la regla de la suma (*sum rule*):

$$\rho_1 + \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 0.$$

Aquest resultat és clau, ja que ens permet classificar un procés com a hiperuniforme analitzant exclusivament el seu nucli o la seva funció de correlació, sense dependre de càlculs asimptòtics de la variància.

4.3 Equivalència entre la Hiperuniformitat i la Regla de la Suma

En aquesta secció demostrarem que, per a processos puntuals estacionaris, la condició d'hiperuniformitat és equivalent a la regla de la suma. Aquest resultat ens permet analitzar la hiperuniformitat mitjançant la integrabilitat de la funció de correlació.

Sigui $f(x, y) = \rho_2(x, y) - \rho_1(x)\rho_1(y)$ la funció de correlació truncada (també anomenada funció d'influència). En el cas d'un procés estacionari a $\mathbb{R}^n$, la intensitat de primer ordre és constant ($\rho_1(x) \equiv \rho_1 > 0$) i la funció f només depèn de la diferència entre les posicions, és a dir, $f(x, y) = f(x - y)$.

Teorema 4.2. *Sigui N un procés puntual estacionari a $\mathbb{R}^n$ amb una funció de correlació truncada integrable ($\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$). El procés és hiperuniforme si, i només si, es satisfà la regla de la suma:*

$$\rho_1 + \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 0.$$

Demostració. Considerem una successió de conjunts compactes $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ que convergeixen a $\mathbb{R}^n$ en el sentit de van Hove (és a dir, el seu volum $|\Lambda|$ creix cap a infinit i els efectes de vora esdevenen negligibles). Recordem que la variància del nombre de punts en Λ es pot expressar com:

$$\frac{\text{Var}(N(\Lambda))}{|\Lambda|} = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda} \rho_1(x) dx + \frac{1}{|\Lambda|} \iint_{\Lambda \times \Lambda} f(x, y) dx dy.$$

Com que el procés és estacionari, ρ_1 és constant i la primera integral és simplement $\rho_1 \cdot |\Lambda|$. Per a la integral doble, fem el canvi de variables $z = x - y$:

$$\frac{\text{Var}(N(\Lambda))}{|\Lambda|} = \rho_1 + \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda} \left(\int_{\Lambda-y} f(z) dz \right) dy.$$

Podem reescriure la integral doble utilitzant la funció indicatriu χ_Λ :

$$\frac{1}{|\Lambda|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Lambda(y) \chi_\Lambda(z+y) f(z) dz dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \left(\frac{|\Lambda \cap (\Lambda - z)|}{|\Lambda|} \right) dz.$$

Definim $\gamma_\Lambda(z) = |\Lambda \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Lambda - z)|$, que representa el volum de la regió de Λ que surt fora d'ella mateixa en ser desplaçada per z . Llavors, el terme entre parèntesis es pot escriure com:

$$\frac{|\Lambda \cap (\Lambda - z)|}{|\Lambda|} = \frac{|\Lambda| - \gamma_\Lambda(z)}{|\Lambda|} = 1 - \frac{\gamma_\Lambda(z)}{|\Lambda|}.$$

Substituint en l'expressió de la variància:

$$\frac{\text{Var}(N(\Lambda))}{|\Lambda|} = \rho_1 + \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz - \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{\gamma_\Lambda(z)}{|\Lambda|} dz.$$

Pel teorema de la convergència dominada i les propietats dels conjunts de van Hove, el darrer terme tendeix a zero quan $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ja que $\gamma_\Lambda(z)/|\Lambda| \rightarrow 0$ per a tot z). Per tant:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n} \frac{\text{Var}(N(\Lambda))}{|\Lambda|} = \rho_1 + \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz.$$

Per definició, un procés és hiperuniforme si aquest límit és zero, el que implica necessàriament que $\rho_1 + \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz = 0$. □

En el cas d'un procés de Poisson, la independència entre punts implica que $f(z) = 0$ per a tot $z \neq 0$. En aquest cas, el límit de la variància dividida pel volum és simplement $\rho_1 > 0$, confirmant que el procés de Poisson no pot ser hiperuniforme [3].

En el cas del procés binomial recordem primer que per a un procés de n punts en un conjunt W tenim (com hem vist al capítol anterior):

$$\rho_1(x) = \frac{n}{|W|} \quad \text{i} \quad \rho_2(x, y) = \frac{n(n-1)}{|W|^2}.$$

Definim $h(x, y)$ com la diferència entre la funció de correlació i el producte de les funcions d'intensitat individuals:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \rho_2(x, y) - \rho_1(x)\rho_1(y) \\ &= \frac{n(n-1)}{|W|^2} - \left(\frac{n}{|W|} \right) \left(\frac{n}{|W|} \right) \\ &= \frac{n^2 - n}{|W|^2} - \frac{n^2}{|W|^2} \\ &= -\frac{n}{|W|^2}. \end{aligned}$$

Ara, integrem aquesta funció de correlació respecte a x sobre tot el domini W :

$$\begin{aligned}\int_W h(x, y) dx &= \int_W \left(-\frac{n}{|W|^2} \right) dx \\ &= -\frac{n}{|W|^2} \int_W dx \\ &= -\frac{n}{|W|^2} |W| = -\frac{n}{|W|}.\end{aligned}$$

Finalment, verifiquem si es compleix la regla de suma sumant la intensitat $\rho_1(y)$:

$$\rho_1(y) + \int_W h(x, y) dx = \frac{n}{|W|} + \left(-\frac{n}{|W|} \right) = 0.$$

Per tant, el procés binomial sí que compleix la regla de la suma. Tot i així, no podem dir que el procés binomial sigui hiperuniforme, ja que només hem definit la hiperuniformitat en dominis no acotats.

4.4 Processos Puntuals Determinantals (DPPs)

Els Processos Puntuals Determinantals (DPPs), veure exemple 1.2.10 de [2], constitueixen una classe de processos on la repulsió entre punts està definida de manera inherent a través d'un nucli $K(x, y)$ [4]. Com veurem a continuació, això permet que aquests processos satisfacin la regla de la suma i, per tant, siguin hiperuniformes.

4.5 Propietats dels DPPs

Seguint el teorema de Macchi de 1975 [8], un procés puntual es diu determinantal si les seves funcions d'intensitat de qualsevol ordre $k \geq 1$ es poden expressar com el determinant d'un nucli:

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det[K(x_i, x_j)]_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Per a l'estudi de la hiperuniformitat, ens interessa especialment la intensitat conjunta de segon ordre:

$$\rho_2(x, y) = \det \begin{pmatrix} K(x, x) & K(x, y) \\ K(y, x) & K(y, y) \end{pmatrix} = \rho_1(x)\rho_1(y) - |K(x, y)|^2,$$

on $\rho_1(x) = K(x, x)$. El terme $-|K(x, y)|^2$ representa una correlació negativa que indica que la probabilitat de trobar dos punts a prop és menor que en el cas independent. En aquest context, la funció de correlació truncada definida a la secció anterior és, precisament:

$$f(x, y) = -|K(x, y)|^2.$$

4.6 Alguns exemples fonamentals de DPPs

A continuació presentem tres models de DPPs que apareixen en la literatura de matrius aleatòries i física teòrica, i que són exemples paradigmàtics d'hiperuniformitat (secció 4.3 de [4]).

4.6.1 Circular Unitary Ensemble (CUE)

El procés CUE descriu la distribució dels autovalors de matrius unitàries aleatòries sobre el cercle unitari $\mathbb{S}^1 = [0, 2\pi)$. El seu nucli és l'anomenat nucli de Dirichlet:

$$K_n(x, y) = \frac{\sin(n(x - y)/2)}{\sin((x - y)/2)}, \quad x, y \in [0, 2\pi)$$

Aquest procés és invariant per rotacions al cercle. La seva intensitat de primer ordre és constant i igual a $K_n(x, x) = n$.

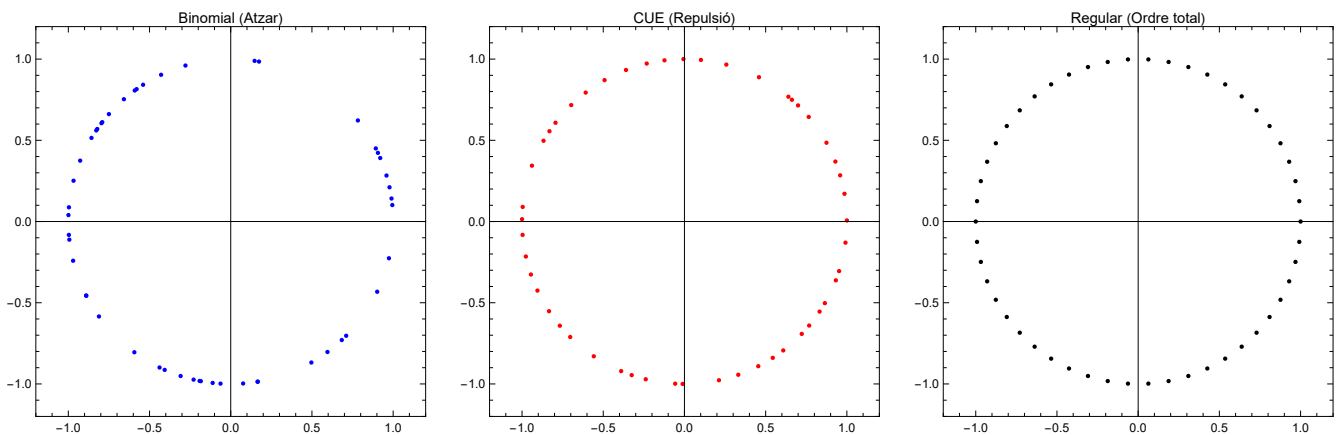


Figura 7. Comparació de diferents processos en el cercle unitari

4.6.2 Procés del Sinus

És el procés de punts sobre la recta real $\mathbb{R}$ que s'obté com a límit del CUE quan el nombre de punts tendeix a infinit. El seu nucli és el sinus cardinal:

$$K_{\sin}(x, y) = \frac{\sin \pi(x - y)}{\pi(x - y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Aquest procés és invariant per translacions i té una intensitat constant $\rho_1 = 1$.

En la Figura 7 podem observar que quan dos punts estan molt propers, és a dir r pròxim a 0, $g(r)$ és molt proper a 0, per tant la probabilitat de tenir dos punts molt propers és pràcticament nul·la (i la de tenir-los en la mateixa localització és inexistent $g(0) = 0$). En canvi, quan la distància entre punts creix, $g(r)$ tendeix a 1, cosa que significa que per punts més allunyats, el procés es comporta com un de Poisson.

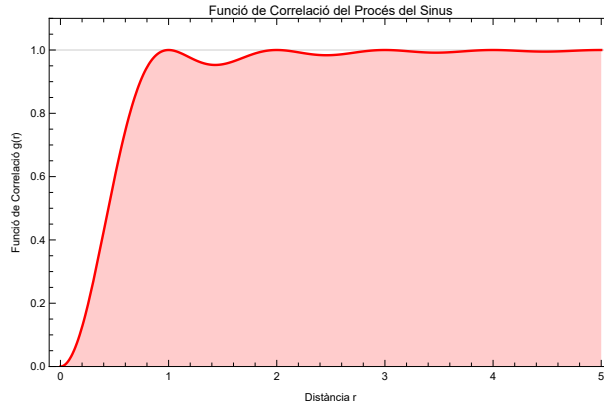


Figura 8. Gràfic de la funció $g(r)$ pel procés del Sinus

4.6.3 Procés de Bessel

Es tracta d'una generalització del procés del sinus a $\mathbb{R}^n$. El seu nucli es defineix mitjançant les funcions de Bessel de primera espècie J_α :

$$K_{\text{bes}}(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \frac{J_{n/2}(\pi|x-y|)}{(\pi|x-y|)^{n/2}}, \quad \text{on } J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}.$$

És un procés estacionari a $\mathbb{R}^d$ on la intensitat ρ_1 és constant.

Anem a justificar que el procés de Bessel a $\mathbb{R}^n$ és, efectivament, una generalització del procés del sinus a $\mathbb{R}$.

Demostració. Considerarem el cas $n = 1$ i demostrarem que el nucli de Bessel es redueix al nucli del sinus.

Si prenem $n = 1$ en la definició del nucli de Bessel, l'ordre de la funció de Bessel és $\alpha = n/2 = 1/2$. Avaluant la sèrie per a aquest valor obtenim:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + 3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1/2}.$$

Utilitzant la propietat de la funció Gamma per a valors semienters, sabem que:

$$\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}} \sqrt{\pi},$$

on $(2m+1)!!$ denota el doble factorial. Substituint aquesta expressió a la sèrie i agrupant factors:

$$J_{1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} 2^{m+1}}{m! (2m+1)!!}.$$

Com que el doble factorial es pot escriure com $(2m+1)!! = \frac{(2m+1)!}{2^m m!}$, l'expressió se simplifica:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}.$$

Si multipliquem i dividim per x , reconeixem la sèrie de Taylor de la funció sinus:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \frac{1}{x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \sin(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x).$$

Finalment, apliquem aquest resultat a la definició del nucli de Bessel per a $n = 1$:

$$\begin{aligned} K_{\text{bes}}(x, y) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{J_{1/2}(\pi|x-y|)}{(\pi|x-y|)^{1/2}} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \pi|x-y|}} \sin(\pi|x-y|)}{(\pi|x-y|)^{1/2}} \\ &= \frac{\sin(\pi|x-y|)}{\pi|x-y|} = K_{\text{sin}}(x, y). \end{aligned}$$

□

4.7 Demostració de la Hiperuniformitat en els DPPs

Per demostrar que aquests processos són hiperuniformes en el cas euclidià ($E = \mathbb{R}^n$), comprovarem que satisfan la regla de la suma: $\rho_1 + \int f(x) dx = 0$.

En el cas del CUE, utilitzant la representació del nucli de Dirichlet com a suma d'exponencials $S_n(x-y) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{ij(x-y)}$, calculem la integral del seu quadrat:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x-y)^2 \frac{dx}{2\pi} = \sum_{j,k} \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)(x-y)} \frac{dx}{2\pi} = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n.$$

Com que $\rho_1 = n$ i $\int f(x) dx = -\int |K|^2 dx = -n$, obtenim que $n - n = 0$. Per tant, el CUE compleix la regla de la suma en el cercle, de forma que es pot dir que és hiperuniforme en el cercle.

Per al Procés de Bessel (i per extensió el del sinus), la condició d'hiperuniformitat se simplifica en demostrar que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_{\text{bes}}(x, y)|^2 dx = \rho_1(y).$$

Recordem que per a aquest procés, la intensitat de primer ordre és constant:

$$\rho_1(y) = K_{\text{bes}}(y, y) = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Anem a calcular la integral del nucli al quadrat sobre tot l'espai $\mathbb{R}^n$. Per l'invariància de les translacions, podem fixar $y = 0$ i escriure:

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} |K_{\text{bes}}(x, y)|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |K_{\text{bes}}(x, 0)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{n/2} \frac{J_{n/2}(\pi|x|)}{(\pi|x|)^{n/2}} \right)^2 dx.$$

Passem a coordenades polars a $\mathbb{R}^n$, on $dx = r^{n-1} \sigma(S^{n-1}) dr$, essent $\sigma(S^{n-1})$ la mesura de superfície de l'esfera unitat:

$$I = \left(\frac{\pi}{2} \right)^n \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} \frac{J_{n/2}^2(\pi r)}{(\pi r)^n} dr.$$

Fem el canvi de variable $s = \pi r$ (d'on $ds = \pi dr$):

$$I = \frac{\sigma(S^{n-1})}{2^n \pi} \int_0^\infty \frac{J_{n/2}^2(s)}{s} ds.$$

Per resoldre aquesta integral, utilitzem la fórmula general per a integrals de funcions de Bessel [9], que estableix que per a $\nu > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu^2(s)}{s} ds = \frac{1}{2\nu}.$$

En el nostre cas, identifiquem $\nu = n/2$, de manera que la integral val $1/n$. Substituint aquest valor obtenim:

$$I = \frac{\sigma(S^{n-1})}{2^n \pi} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sigma(S^{n-1})}{2^n \pi n}.$$

Recordant l'expressió de la superfície de l'esfera unitat a $\mathbb{R}^n$, $\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, o alternativament $\sigma(S^{n-1}) = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$, obtenim finalment:

$$I = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \cdot 2^n \pi n} \cdot \pi \dots (\text{simplificant}) \dots = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = K_{\text{bes}}(y, y).$$

Això conclou que els processos de Bessel i del sinus són hiperuniformes.

Conclusions

En aquesta memòria hem realitzat un estudi sobre els processos puntuals i les propietats necessàries per tal de poder establir la seva relació amb la hiperuniformitat. D'aquesta manera, hem pogut analitzar des de l'aleatorietat pura del procés de Poisson fins a l'ordre característic dels processos hiperuniformes, passant pel cas intermedi dels processos puntuals binomials. Això ha culminat amb l'estudi dels Processos Puntuals Determinantals (DPPs), la caracterització dels nuclis del Sinus i de Bessel, i la demostració analítica de la *sum rule*.

L'atractiu principal de la hiperuniformitat resideix en la seva capacitat per descriure un estat intermedi de la matèria, un sistema que, tot i mantenir un cert desordre a petita escala, presenta un ordre global. Matemàticament, ha estat fonamental veure com la repulsió local induïda pels determinants en els DPPs és precisament el que força aquesta supressió de les fluctuacions de densitat a gran escala.

D'altra banda, la part computacional del treball mitjançant el programari *Wolfram Mathematica* ha estat un complement important per consolidar els conceptes teòrics. Poder visualitzar les realitzacions d'aquests processos m'ha ajudat a entendre bé els conceptes. Tot i els resultats que hem obtingut, encara es podria aprofundir molt més en el tema.

La redacció d'aquesta memòria m'ha obligat a integrar coneixements de branques molt diverses del Grau, com l'Anàlisi Real i la Probabilitat. Més enllà dels resultats concrets, aquest treball m'ha aportat una visió molt més profunda de com s'estructura la recerca matemàtica actual, partint de definicions rigoroses per arribar a conclusions amb aplicacions reals en la física i la biologia.

Ha estat una bona experiència haver pogut descobrir aquest àmbit de la matemàtica moderna.

Referències

- [1] N. Wolchover, *Hyperuniformity Found in Birds, Math and Physics*. Quanta Magazine, 2016.
- [2] P. Brémaud, *Point Process Calculus in Time and Space: An Introduction with Applications*. Probability Theory and Stochastic Modelling, vol 98. Springer International Publishing, 2020.
- [3] S. Torquato, F. H. Stillinger, *Local density fluctuations, predictability, and degeneracy*, Physical Review E, 68(4), 041113, 2003.
- [4] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres, B. Virág, *Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes*. University Lecture Series 51, American Mathematical Society, 2009.
- [5] A. Baddeley, *Spatial Point Processes and their Applications*. In: Weil, W. (eds) Stochastic Geometry. Lecture Notes in Mathematics, vol 1892. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [6] R. Lachièze-Rey, *Hyperuniform random measures, transport and rigidity*, 2025. Preprint HAL Id: hal-05320187.
- [7] P. A. Martin and S. Yalcin, *Poisson fluctuations and quasi-regularity of point processes*, Journal of Statistical Physics, 102(3), 591-635, 2001.
- [8] O. Macchi, *The coincidence approach to stochastic point processes*, Advances in Applied Probability, 7(1), 83-122, 1975.
- [9] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, 2007.