



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Les matemàtiques dels sistemes electorals

Autor: Natàlia Gallego Betorz

Director: Dr. Sergi Muria Maldonado

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Resum

En aquest treball, s'expliquen els diferents sistemes electorals, en què consisteixen i quins tipus hi ha. Es comenten també algunes de les paradoxes que sorgeixen i es contemplen diferents escenaris d'aliances que milloren els resultats dels partits. A continuació del marc teòric, hi ha el treball de camp que ha consistit en crear una proposta didàctica elaborada per treballar amb alumnes que cursen els últims anys dels cicles superiors.

Agraïments

Vull agrair als meus pares, germans, àvia i a tota la resta de la meva família per haver estat fent-me costat en tot moment.

També al Francesc per ser el meu equip i el meu suport.

Als meus amics per ser el meu pilar.

Al meu tutor per haver-me guiat durant aquest procés.

A tots, gràcies!

Índex

1	Les matemàtiques relacionades amb l'educació	1
1.1	La vida quotidiana com a recurs d'aprenentatge acadèmic	1
2	Sistemes electorals	4
2.1	Introducció	4
2.1.1	La democràcia	4
2.1.2	Què és un sistema electoral?	4
2.1.3	Críteris d'un bon sistema	5
2.2	Mètodes amb un guanyador	6
2.2.1	Els sistemes binaris	6
2.2.2	Els sistemes preferencials	7
2.2.3	Els sistemes de valoració	7
2.3	Mètodes amb múltiples guanyadors	7
2.3.1	Mètode proporcional o mètodes distributius	7
2.3.2	Mètodes no proporcional o majoritaris	9
2.3.3	Mètodes mixtos o semiproproporcional	10
2.4	Comparativa dels diferents sistemes	11
3	Els sistemes proporcional	12
3.1	Quan s'aconsegueix la proporcionalitat?	12
3.1.1	Magnitud de les circumscripcions	12
3.1.2	Fórmula electoral	13
3.1.3	Llindar mínim	13
3.1.4	Mida de la Cambra	13
3.2	Sistemes proporcional	14
3.3	El sistema proporcional perfecte	20
3.4	Paradoxes en sistemes proporcional	21
3.4.1	Paradoxes dels sistemes proporcional	24
4	Aliances i influència de la teoria de jocs	25
4.1	Aliances sota el mètode D'Hondt	25
4.1.1	Model d'aliança	25
4.2	Introducció a la teoria de jocs	30
4.2.1	Jocs cooperatius	30
4.2.2	El valor de Shapley	32
4.3	Influència de la teoria de jocs en aliances	35

5	Aplicacions didàctiques	37
5.1	Primera sessió: Què és un sistema electoral	37
5.2	Segona sessió: Quotes i mètode de Hamilton	40
5.3	Tercera sessió: Valor de Shapley	42
5.3.1	Exemple pràctic	43
6	Conclusions	45

1 Les matemàtiques relacionades amb l'educació

La matemàtica de la vida quotidiana

Les matemàtiques són molt presents en múltiples i insospitats aspectes a la vida quotidiana de qualsevol persona; però no totes les seves formes són evidents ni tothom les pot percebre. De la mateixa manera, constitueixen una de les grans manifestacions del pensament i el seu desenvolupament mil·lenari les apropa estretament a les grans fites culturals.

Galileo Galilei (1564 – 1642), astrònom, filòsof, matemàtic i físic italià, va dir: “l’univers és un llibre escrit en el llenguatge de les matemàtiques, sent els caràcters del seu alfabet: triangles, cercles i altres figures geomètriques, sense les quals només s’aconseguirà vagar per un obscur laberint”.

Certament, les matemàtiques han esdevingut l'instrument idoni per a explicar molts dels fenòmens naturals, alhora que fan la nostra vida més confortable: encendre una llum, utilitzar el telèfon, mirar la televisió, escalfar el menjar en el microones, escoltar la radio, navegar per internet, guiar-nos amb un GPS... I és que la nostra vida és plena de matemàtiques! La recerca d'aquestes en situacions habituals pot tenir una doble motivació: comprendre la situació en qüestió i aprendre matemàtiques inspirades per la vida.

Qui donen vida a les matemàtiques, en el cas dels adolescents, són els educadors i professors. Per això, haurien de poder ser competents per identificar les situacions en el dia a dia de qualsevol persona en què intervinguin les matemàtiques i tractar-les didàcticament per poder incorporar-ne algunes en l'àmbit de l'educació.

1.1 La vida quotidiana com a recurs d'aprenentatge acadèmic

Dos aspectes fonamentals relacionen les matemàtiques amb la vida: la seva utilitat i ser un recurs que ajuda a la seva comprensió. Són útils aquells conceptes matemàtics que necessitem perquè ens veiem obligats a realitzar certes situacions.

La utilitat és un dels criteris més estesos entre el professorat per justificar la necessitat d'aprenentatge de la matemàtica formal o acadèmica. Tot i així, en la vida quotidiana, les respostes a preguntes com “quant deu costar?”, “quan he de sortir si vull arribar a una hora en concret?”, “quant m'estalviaré amb el descompte?”, “quin itinerari hauria de seguir per fer el mínim recorregut possible?”, generalment es troben per prova i error.

Portar fenòmens, situacions o experiències pròpies de la vida real o quotidiana a una classe no és un tasca senzilla. Una cosa és viure una situació vital i una altra molt diferent és convertir-la en una activitat o projecte d'ensenyament i aprenentatge, ja que el context, els objectius i el mètode amb els quals abordem situacions reals seran sempre diferents a com serien en un àmbit acadèmic.

Com podem convertir una situació real de la vida en una activitat d'ensenyament i aprenentatge matemàtic? Quin sentit i forma tindrà?

² Partint de la idea que les matemàtiques formen part de la vida de les persones, resulta coherent plantejar que les matemàtiques són una construcció social (Ernest, 1991). Aquesta afirmació és la que dona sentit a reunir diverses persones en un mateix espai (aula) i temps (hora de classe) perquè observin i analitzin situacions de la vida real i desenvolupin conceptes matemàtics (aprenquin) a partir d'elles i en col·laboració amb els seus companys. Les darreres Lleis Orgàniques d'Educació d'Espanya (LOE i LOM-LOE) i la Llei d'Educació de Catalunya (LEC) incorporen els principis d'aprenentatge constructivista, significatiu i competencial en les seves formulacions.

Es defineix com a aprenentatge significatiu aquell que permet a l'alumne construir el seu propi aprenentatge i que l'omple de significat. Aquest aprenentatge s'enfoca a la manera en què el cervell estructura, jerarquitzava, processa, fa abstraccions, generalitzacions, interrelaciona dades, objectes, fets i conceptes per donar-li sentit i amb ells començar a construir coneixements. Hi ha diverses teories de diversos investigadors, Piaget, Vigotsky, Ausubel, Bruner, Teories del processament de la informació... i altres, que comparteixen principis i postulats constructivistes i que coincideixen en assenyalar que el desenvolupament i l'aprenentatge humà són el resultat d'un procés de construcció conjunt.

L'alumnat va construir els seus esquemes de coneixement propis amb les seves experiències educatives anteriors, esquemes que possibilitaran la interpretació dels nous coneixements. Per tant, per introduir un nou coneixement, cal partir dels seus coneixements previs, i tenir en compte què és capaç de fer sol, i què pot aprendre amb l'ajuda d'altres persones, ja sigui observant-les, imitant-les, col·laborant, seguint consignes... El procés de construcció del nou aprenentatge, en relació amb el que ja sap, facilita a l'alumnat poder atribuir-li un significat, o sigui de fer un aprenentatge significatiu, que a la vegada està molt vinculat a la funcionalitat del mateix, a la seva utilitat, o sigui amb la possibilitat de que puguin ser utilitzats en altres ocasions.

La nova LOMLOE estableix que l'aprenentatge de les matemàtiques ha de ser competencial; és a dir, ha de ser dissenyat i portat a la pràctica amb la finalitat d'empoderar els alumnes d'eines i estratègies per aprendre a aprendre al seu ritme i desenvolupar unes habilitats i coneixements competencials, procedimentals i actitudinals per afrontar situacions quotidianes diverses.

Segons Pereña, M. (2014), l'ensenyament competencial ha de ser:

- Enfocat a la pràctica: Learning by doing. L'aprenentatge s'ha de dur a través d'activitats autèntiques de pràctica matemàtica.
- Empoderament: Es necessita dotar els alumnes d'eines i estratègies per desenvolupar la competència d'aprendre a aprendre, cadascú al seu ritme. Els estudiants es fan seu l'aprenentatge, el confeccionen i construeixen de forma diferent. Els docents han de guiar aquest procés i ajudar-los dotant-los de les estratègies que necessitin als diferents moments.
- Interdisciplinarietat: L'aprenentatge és continu i no està segmentat. S'ha de contemplar la interdisciplinarietat com essencial.
- Treball cooperatiu: Per tal de complir els trets de l'educació competencial, el treball cooperatiu és un requisit.

²Fragment extret del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya.

L'adquisició de les competències matemàtiques demana maneres de treballar que en potenciïn el seu desenvolupament.

El professor ha de provocar curiositat i proposar reptes i donar temps per investigar i reflexionar. Ha d'encoratjar l'alumne a construir els seus aprenentatges i ajudar-lo a prendre consciència del seu progrés. Això s'ha de fer en un ambient que afavoreixi l'intercanvi d'idees i que animi a la reflexió. Tot plegat contribuirà al fet que l'alumne desenvolupi actituds com el plaer de comprendre les matemàtiques, de considerar-les una construcció personal i d'aplicar-les en la seva vida quotidiana. Considerar els errors com a font d'informació, les situacions problemàtiques com a reptes engrescadors i el llenguatge matemàtic com una eina potent de comunicació són aspectes actitudinals de les matemàtiques estretament teixits amb les competències.

Cal destacar també el paper dels recursos, com els materials manipulatius, visuals i TIC, ja que afavoreixen l'experimentació, el raonament i la comprensió, com per exemple el programa GeoGebra.

El GeoGebra: és un programa matemàtic interactiu creat per Markus Hohenwarter al 2002, amb l'objectiu d'ésser recurs en l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques. El seu nom és una combinació de les paraules "geometria" i "àlgebra". Avui dia, aquest software ha transcendit l'àmbit exclusiu de les matemàtiques i és un recurs cada vegada més utilitzat en altres matèries científiques.

2 Sistemes electorals

2.1 Introducció

Els sistemes de vots s'impartien a Atenes des del segle VI aC. Una de les eleccions més antigues era el *vot majoritari*, on els electors escollien el ciutadà que volien que fos exiliat per deu anys. L'estat de Venècia, al segle XIII, va adoptar el sistema que avui en dia coneixem com a *vot d'aprovació* per elegir el seu Gran Consell.

2.1.1 La democràcia

La democràcia parlamentària està basada en una elecció suposadament justa d'un petit nombre d'individus, coneguts com a diputats, que representen un nombre molt més gran de ciutadans.

En el nostre país, els candidats a diputats es presenten a les eleccions agrupats en candidatures o llistes, que poden ser presentades per partits polítics o per coalicions de partits. Cada elector vota una llista i, a partir del nombre de vots que ha rebut cada candidatura, aquesta rep una quantitat d'escons.

El sistema que s'utilitza a les eleccions del Parlament de Catalunya es coneix amb el nom de *Llei D'Hont*.

Hi ha dos tipus de democràcia:

- **Democràcia directa:** és el tipus de democràcia més simple. El poder recau en els ciutadans directament i només es permet que hi hagi delegats, els quals poden ser revocats.
- **Democràcia representativa o indirecta:** és el sistema més utilitzat. El poble escull els representats que els governaran durant un cert període de temps i, en la majoria de règims democràtics, el president és escollit directament pels vots. Si el president és escollit pels representants del parlament que prèviament han estat escollits pel poble, com en els casos de Regne Unit, Itàlia o Espanya, es coneix com *democràcia parlamentària*.

2.1.2 Què és un sistema electoral?

Els sistemes de representació democràtica exigeixen un mètode de selecció justa d'un petit nombre d'individus que representen a una majoria dels ciutadans.

Definició 2.1. *Un sistema electoral és una eina constitucional per la qual els vots dels ciutadans es tradueixen en escons que seran assignats als partits que reben els vots. És un conjunt de regles per mitjà de les quals els votants poden expressar les seves preferències, les quals definiran un resultat final.*

Definició 2.2. *L'estudi dels sistemes electorals és la teoria del vot, una subdisciplina de les ciències polítiques, de l'economia i de les matemàtiques.*

Un sistema electoral, a part d'especificar com s'ha de votar i el mètode per determinar els resultats, també ha d'especificar quines seran les circumscripcions electorals o unitats territorials dotades de representants elegibles. Poden haver-hi un o més guanyadors, com és el cas de les eleccions d'un cos legislatiu.

Han de constar els següents elements:

- Nombre de representants elegibles.
- Divisió del territori en circumscripcions (o districtes).
- La forma de les candidatures.
- Fórmula electoral per la qual es tradueixen els vots en escons.
- El llindar mínim per a obtenir representació.

2.1.3 Criteris d'un bon sistema

és impossible dir que un sistema és “el sistema perfecte”, atès que algunes característiques són contradictòries.

Si, per exemple, un candidat és molt apreciat per la majoria dels electors, però també molt odiat pels altres, és un millor candidat que un d'altre que és moderadament apreciat per tots? Els sistemes electorals tenen cadascú una visió diferent d'aquest tipus de problemes.

Per poder comparar els sistemes de manera adequada i independent de les ideologies polítiques, els teoritzadors del vot utilitzen una sèrie de criteris que defineixen potencialment les propietats dels sistemes electorals matemàticament.

Teoria de la impossibilitat

Al 1972, Kenneth Arrow va rebre el *Premi del Banc de Suècia en ciències econòmiques* per haver demostrat la impossibilitat de transformar les preferències individuals en una elecció col·lectiva agregada sense incomplir almenys una de les següents condicions:

- Universalitat: la funció de l'elecció social ha de ser definida per a totes les possibles preferències lògiques.
- No dictadura: cap individu imposa les seves preferències a les dels altres.
- Monotonia: si un elector millora el rang o posició d'una opció, això no l'ha de perjudicar mai.
- Irrellevància de les opcions no pertinents: treure un candidat (llevat del guanyador) no ha de canviar pas el resultat del vot.
- Sobirania: cap elecció social no ha de ser impossible a priori.

Altres criteris

- Criteri de la majoria: si hi existeix una majoria que prefereix un candidat en específic, guanyaria sempre si aquesta majoria vota honestament?
- Criteri de la consistència: si l'electorat està dividit en dos i una opció guanya en els dos grups per separat, guanyaria en conjunt?
- Criteri de la participació: sempre és millor votar honestament que no votar?
- Criteri de Condorcet: si un candidat guanya els altres candidats en una comparació un a un, guanyaria sempre en conjunt?
- Irrellevància dels candidats clonats: el resultat canvia si s'agreguen candidats idèntics als candidats ja existents?

2.2 Mètodes amb un guanyador

Son classificats d'acord amb el tipus de papereta que s'utilitza:

- Sistemes de rang o preferencials: la papereta presenta tots els candidats que l'elector ha d'ordenar del més preferit al menys preferit.
- Sistemes d'avaluació o estimació: la papereta presenta tots els candidats als quals l'elector ha de donar una puntuació.

2.2.1 Els sistemes binaris

La papereta presenta l'opció de votar o no.

El més utilitzat és l'**escrutini uninominal majoritari**; un sistema en el que el votant pot escollir un únic candidat d'entre els que s'hi presenten. Sigui per majoria simple o per pluralitat, qui rep el major nombre de vots esdevé guanyador.

Si es requereix que el candidat guanyi per majoria absoluta, s'utilitzen *mètodes eliminators*:

- S'efectua una segona volta entre els dos candidats més votats.
- S'efectua una eliminació gradual del candidat més dèbil fins que un candidat tingui la majoria absoluta.
- S'efectua una elecció exhaustiva sense eliminació; les eleccions es repeteixen fins que un candidat obtingui la majoria absoluta.

2.2.2 Els sistemes preferencials

La papereta presenta tots els candidats que l'elector ha d'ordenar del més preferit al menys preferit. Si hi ha algun dels candidats que no està inclòs a la llista, se'l considera el menys preferit.

El mètode preferencial més utilitzat és el **mètode d'eliminació instantània** o **vot alternatiu**, on al fer el recompte de vots, l'opció amb menys vots és eliminada. Això es fa successivament i el candidat preferit guanya per majoria absoluta.

Un altre mètode preferencial és el **vot únic transferible**; un mètode de votació en el que els votants classifiquen als candidats segons les seves preferències i el seu vot únic es transfereix a altres candidats en funció d'aquestes classificacions si el seu candidat preferit és eliminat.

2.2.3 Els sistemes de valoració

És un mètode que permet al votant donar-li a cada candidat una valoració independent. La papereta presenta tots els candidats als quals l'elector ha de donar una puntuació i la opció amb major puntuació guanya l'elecció.

2.3 Mètodes amb múltiples guanyadors

Són aquells per mitjà dels quals s'elegeixen dos o més membres d'una assemblea o cos legislatiu. A l'hora d'assignar els vots, les llistes dels partits poden ser obertes o tancades:

- Oberta: els electors decideixen quins candidats del partit han de guanyar els escons.
- Tancada: els escons s'assignen als candidats d'acord amb l'ordre preestablert del partit. Existeixen tres tipus de mètodes d'acord al resultat final en relació amb la composició del cos legislatiu: mètodes no proporcionals, mètodes proporcionals i mètodes mixtos o semiproportionals.

2.3.1 Mètode proporcionals o mètodes distributius

Són aquells que reparteixen els escons entre una sèrie de partits que hagi aconseguit superar el llindar mínim.

Són extensions dels mètodes amb un guanyador, en què no s'obté un resultat proporcional. Aquest sistema es prefereix quan els membres d'un cos legislatiu són representants directes de regions específiques i, per tant, la composició partidista és independent de l'elecció local.

L'extensió més utilitzada és l'extensió de l'**escrutini uninominal majoritari**: cada circumscripció elegix a un representant per majoria relativa (*escrutini uninominal majoritari*) i el cos legislatiu és integrat per l'agregació dels guanyadors de cada circumscripció. S'utilitza l'escrutini en cada circumscripció (regió, localitat, classe...), i els candidats guanyadors passen a ser els caps.

Sistema **majoritari uninominal corregit per tandes (o voltes)**: si en la primera votació algun partit supera la meitat més u dels vots d'un districte electoral, es queda

l'escó disputat en aquella circumscripció. Altrament caldria recórrer a una segona volta en què només participarien els dos partits amb millors resultats en la primera volta.

Un altre mètode és el **vot en bloc** o **escrutini majoritari plurinominal**: cada elector vota per n opcions i el nombre de candidats (n o menys) amb més vots són declarats guanyadors.

- **Fórmula de la resta més gran o de Hamilton**

El que fem primer és calcular les quotes, que són indicadors de la quantitat de vots que necessiten les candidatures per aconseguir un escó. Existeixen 4 tipus:

$$\text{Quota Hare} = \frac{\text{Vots totals}}{\text{Escons}}$$

$$\text{Quota de Droop} = \frac{\text{Vots totals}}{\text{Escons} + 1}$$

$$\text{Quota Imperiali} = \frac{\text{Vots totals}}{\text{Escons} + 2}$$

$$\text{Quota Imperiali Reforçada} = \frac{\text{Vots totals}}{\text{Escons} + 3}$$

Per saber quants escons tindran, s'ha de dividir els seus vots entre la quota i se'ls donaran tants escons com nombre enters tinguin.

- **Fórmula de la mitjana més elevada**

Consisteix en dividir el nombre total de vots que té cada partit i s'atorguen els escons seguint l'ordre de major quocient a menor quocient. Hi ha 4 divisions principals

Fórmula	Divisor k	Observacions	Exemples
D'Hondt	$k = 1, 2, 3, \dots, n,$ $n \in \mathbb{N}$	Penalitzava molt les circumscripcions petites.	Espanya, Holanda, Israel
Sainte-Laguë	$k = 1, 3, 5, 7, \dots, n$ $n \in \mathbb{N}, \text{senar}$	És difícil que el partit més gran segueixi sent el més gran quan $k = 7$, per exemple	Dinamarca al segle XX.
Sainte-Laguë modificada	$k = 1'4, 3, 5, 7 \dots, n$ $n \in \mathbb{N}$	Canvia el primer divisor per beneficiar als partits petits.	Suècia, Noruega i part de Dinamarca.
Imperiali	$k = 2, 3, 4, 5 \dots, n$ $n \in \mathbb{N}$	Exclou el divisor 1, ideada per afavorir els partits grans.	Equador

és un sistema que combina la forma de vot preferencial, circumscripcions petites però plurinominals i la fórmula de Hare-Andrae. En aquest cas, no cal marcar totes les candidatures segons les teves preferències.

Fórmula d' Hare-Andrae: Es comença calculant la quota i tots els candidats que tinguin un nombre de primeres preferències igual o superior a la quota, se'ls assignen escons. Seguidament, es transfereixen els vots sobrats dels candidats ja elegits a les segones preferències (per exemple, si la quota era 50 i el candidat C_1 ha obtingut 74 vots, aquests 24 es reparteixen). Per transferir-los, es calcula el coeficient i es transfereixen tots els vots multiplicats per aquest coeficient.

Exemple 2.3. Si tenim quota= 50, vots totals= 74, vots sobrants= 24. Calculem el coeficient i obtenim

$$\text{coeficient} = \frac{\text{vots sobrants}}{\text{vots totals}} = \frac{24}{74} = 0'324$$

Si d'aquests 74 vots, 28 tinguessin com a segona referència el partit C_2 i 46 el partit C_3 , es transferirien de la següent forma:

$$28 \times 0'324 = 9'07 \text{ vots per } C_2$$

$$46 \times 0'324 = 14'9 \text{ vots per } C_3$$

Aquests vots transferits se sumen als vots que havien obtingut en primera referència i, si arriben a la quota, guanyen un escó. Si no hi arriben, s'elimina l'últim candidat i es transfereixen les seves preferències. Així contínuament fins que s'atorguen tots els escons de la circumscripció

- **Representació proporcional pura:** és una combinació d'una fórmula distributiva (com les de la fórmula de la resta més gran), una circumscripció única nacional, una forma de vot en llista i sense llinzar mínim. Així, el percentatge de vots d'un partit i el seu percentatge d'escons és pràcticament igual.
- **Representació proporcional atenuada:** consta d'una fórmula distributiva, vot de llista tancada, i un dels següents elements: circumscripcions petites o bé un llinzar molt alt. Així s'intenta disminuir la proporcionalitat, afavorint la governabilitat i dificultant l'entrada a partits petits.

2.3.2 Mètodes no proporcionals o majoritaris

Són aquells que donen els escons només al partit que guanya. és el tipus de sistema més utilitzat però el que menys s'aplica en les noves democràcies. Cerquen la representació proporcional; és a dir, si un partit obté l' $X\%$ dels vots, també ha d'obtenir l' $X\%$ dels escons del cos legislatiu. Així, Cada candidat representa aproximadament el mateix nombre d'electors o quota.

Per cada quota que rebí el partit (o percentatge de vots) un dels seus candidats de la llista guanya un escó del cos legislatiu. Hi ha diversos mètodes per assignar escons d'acord amb les quotes, com ara el mètode Sainte-Lagué i la regla D'Hondt, que determinen la quota de manera indirecta.

- **Fórmula de la majoria simple:** Coneguda com *first-past-the-post*, és un dels mètodes més antics i més desproporcional, ja que si queda segon o tercer no obté cap escó. Atorga l'escó d'una circumscripció uninominal a la candidatura que obté més vots en aquesta circumscripció.
- **Vot en bloc:**
Conegut com *winner-takes-it-all*, atorga tots els escons d'una circumscripció plurinominal al partit guanyador en aquesta circumscripció, sense importar per quant hagi guanyat. L'elector disposa de tants vots com escons té la circumscripció, però de vegades les llistes del vot en bloc estan bloquejades; això vol dir que no es vota a candidats en concret sinó a partits.

- **Vot limitat:** és un sistema en què els partits estan obligats a presentar un nombre inferior de candidats a la magnitud de la circumscripció, que serà plurinominal, és a dir, si per exemple una circumscripció escull 10 escons, el partit podrà obtenir, com a màxim 9 representants.
- **Vot únic no transferible:** Conegut com SNTV (*Single-Non-Transferable-Vote*) és un sistema electoral majoritari en què els electors poden escollir un candidat (amb llistes obertes) en una circumscripció plurinominal. Aquest sistema facilita l'elecció de partits minoritaris, però també facilita el clientelisme polític.
- **Sistema de doble volta:** La candidatura que obté la majoria absoluta en una circumscripció es queda amb tots els seus escons. Si cap partit arriba a la majoria absoluta, es seleccionen els que han quedat primers o bé les candidatures que han superat un determinat percentatge de vots i es procedeix a fer una segona volta.
- **Vot alternatiu o preferencial:** Els ciutadans han d'ordenar segons la seva preferència tots els candidats que es presenten. Aquest sistema beneficia les candidatures moderades, ja que a més de tenir assegurats els seus propis votants, també els d'altres candidatures.

2.3.3 Mètodes mixtos o semiproporcionals

Són aquells en què en les eleccions s'ha de votar en dues urnes; una llista nacional que es regeix de forma proporcional i una llista de districte (en què s'escull 1 diputat per districte) que es regeix de forma majoritària.

En els mètodes mixtos, la regió està dividida en districtes electorals que elegeixen els candidats per majoria relativa (diputats uninominals) que agregats conformen el cos legislatiu i, a més, s'hi agrega un nombre específic de diputats que són elegits per representació proporcional (diputats plurinominals). Aquests poden ser elegits d'acord amb el percentatge de vots nacionals o per circumscripció superior al districte electoral nominal.

Si la composició del cos legislatiu mixt reflecteix la proporció dels vots que cada partit en l'elecció, el sistema és anomenat un **sistema de representació proporcional mixta** i, si no la reflecteix, s'anomena **sistema de vot paral·lel**.

2.4 Comparativa dels diferents sistemes

MAJORITARI

- **Avantatges:** El partit que guanya s'ho endú tot, donen lloc a governs estables. En la majoria de sistemes majoritaris, les circumscripcions són petites i uninominals, la qual cosa, junt amb la proximitat que hi ha, fa que l'elector conegui més al diputat.
- **Desvantatges:** Hi ha molt poca proporcionalitat, ja que els dos partits més grans en surten molt beneficiats. Si l'elector percep que el seu partit no té possibilitats de sortir guanyador, no va a votar.

DISTRIBUTIU

- **Avantatges:** Les fórmules esmentades aconseguixen una millor representació del que el poble ha votat i, per tant, una proporcionalitat més alta. Tenint en compte però variables que la poden fer minvar, com el llinar mínim, les circumscripcions...
- **Desvantatges:** Quanta més proporcionalitat hi hagi, més fragmentada està la cambra, donant més importància a partits petits de la que els pertocaria.

MIXT

- **Avantatges** Solen agafar el millor de les fórmules dels altres sistemes; ofereixen una alta proporcionalitat al mateix temps que una bona relació diputat-elector.
- **Desvantatges** Per la majoria de ciutadans pot resultar difícil entendre tant la forma de votar com l'escrutini.

Aleshores, podem veure que la proporcionalitat no només depèn del sistema electoral, sinó que també del sistema de partits (si hi ha molts partits o coalicions, si els votants estan molt dividits o voten principalment a partits majoritaris, etc).

3 Els sistemes proporcionals

3.1 Quan s'aconsegueix la proporcionalitat?

La proporcionalitat d'un sistema electoral és el grau de similitud que hi ha entre el percentatge de vots rebut per un partit i el percentatge d'escons que obté.

En una democràcia parlamentària, com és el cas d'Espanya, ha d'haver-hi un òrgan reduït que prengui les decisions que representin la voluntat dels ciutadans. Per fer-ho, és necessària una alta proporcionalitat del sistema electoral.

Com més proporcionalitat hi hagi, més complicada és l'existència de majories parlamentàries manufacturades o espúries. Hi ha tres aspectes que afecten a la proporcionalitat:

- La magnitud de les circumscripcions
- La fórmula electoral
- El llindar mínim
- La mida de la Cambra

3.1.1 Magnitud de les circumscripcions

Una **circumscripció** es defineix com el col·lectiu d'electors sobre els quals es realitza l'operació d'assignació d'escons entre les diferents candidatures. La **magnitud de les circumscripcions**, és el nombre d'escons dels quals disposa aquella circumscripció per assignar-los entre les diferents candidatures.

En el cas que hi hagi un sistema majoritari, la proporcionalitat serà més gran si les circumscripcions són més petites ja que s'assegura que les preferències locals tinguin representació.

La magnitud de cada circumscripció es determina amb una operació anomenada **prorrateig**. Hi ha 3 tipus de prorrateig:

- Demogràfic (el més utilitzat).
- Territorial.
- Combinat.

El **prorrateig demogràfic** assigna un nombre d'escons a cada circumscripció d'acord amb el nombre d'habitants que té. Es segueixen 4 passos:

1. Es fixa la magnitud de la Cambra.
2. Es calcula la ràtio d'habitants per diputat, dividint el nombre d'habitants de tot el país entre el nombre total d'escons que té el Parlament.
3. Es busca el nombre d'escons per circumscripció dividint el nombre d'habitants de la circumscripció per la ràtio d'habitants per diputat.
4. S'arrodoneix el quocient.

3.1.2 Fórmula electoral

És la fórmula que es decideix que s'utilitza en el sistema electoral per l'assignació d'escons. Els sistemes majoritaris són molt menys proporcionals que els sistemes proporcionals i d'entre els sistemes proporcionals, el menys proporcionals és el D'Hondt i el del coeficient Imperial, mentre que el més proporcionals seria el mètode de Hare.

3.1.3 Llindar mínim

Es el percentatge mínim de vots que necessiten els partits per poder prendre part en l'assignació d'escons; si una candidatura no obté el percentatge mínim de vots, és automàticament eliminada, i els seus vots es perden. La justificació política d'aquesta norma és evitar que hi hagi una excessiva quantitat de partits amb representació. Com més alt sigui el llindar mínim, més baixa serà la proporcionalitat.

3.1.4 Mida de la Cambra

És el nombre total d'escons que la componen. S'ha comprovat que la mida de la Cambra dels països desenvolupats acostuma a estar al voltant de l'arrel cúbica de la seva població; cal destacar, però, que s'ha de tenir present la població activa enlloc de la població total (és a dir, s'exclouen els menors que no poden treballar i els analfabets). Així doncs, la fórmula seria

$$P_A = P \cdot L \cdot W$$
$$S = \sqrt[3]{2 \cdot P_A}$$

Per exemple, un país desenvolupat amb 13 milions d'habitants, on un 43% de la població és analfabeta i un 70% de la població està en edat de treballar, la magnitud de la cambra quedaria:

$$P_A = 13.000.000 \cdot 0'57 \cdot 0'7 = 5.187.000 \quad \text{i} \quad S = \sqrt[3]{2 \cdot 5187000} = 218 \text{ escons}$$

3.2 Sistemes proporcionals

A partir d'ara, utilitzarem la següent **notació**:

- \mathbb{R} i \mathbb{Q} el conjunt de nombres reals i racionals.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunt d'enters positius.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ el conjunt d'enters no negatius.
- \mathbb{Q}_+ el conjunt de racionals no negatius.
- n : el nombre de partits que participen a les eleccions i que poden obtenir un escó.
- S : el nombre total d'escons que s'assignen als partits.
- C_k : el nom del k -èssim partit.
- v_k : el nombre de vots emesos pel partit C_k .
- $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$: el vector de vots.
- $V = v_1 + v_2 + \dots + v_n$: el nombre total de vots vàlids.
- $v^* = v/V$: el vector de distribució relativa del vot.
- $s_k \in \mathbb{N}_0$: el nombre d'escons assignats al partit C_k , on $s_1 + s_2 + \dots + s_n = S$.
- $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$: el vector d'escons.
- $s^* = s/S$: el vector de distribució relativa dels escons.
- $\sigma_k = \frac{Sv_k}{V} = Sv_k^* \in \mathbb{Q}_+$: la part proporcional dels escons pel partit C_k , $k = 1, 2, \dots, n$.
- Notem que $\|v\| = V$, $\|s\| = S$ i $\|v^*\| = \|s^*\| = 1$.
- v_k/s_k : preu en vots de cada escó obtingut per k ; mostra aproximadament quants vots són necessaris per a un escó del partit.

Una segona interpretació de les quantitats anteriors és la següent:

Que el país estigui dividit en n regions C_1, C_2, \dots, C_n amb població v_1, v_2, \dots, v_n respectivament. Aleshores, s_k és el nombre d'escons preassignats a la regió C_k i S és el nombre total d'escons al parlament.

Considerem un país inventat que anomenarem Sawpi. Hi ha 10 circumscripcions F_1, \dots, F_{10} . A Sawpi s'hi presenten 6 partits a les eleccions C_1, \dots, C_6 . El nombre de vots que reben aquests partits es mostra a la taula que hi ha a continuació:

TAULA VOTS	
Partit	Vots
C_1	17 631
C_2	45 644
C_3	91 234
C_4	101 256
C_5	84 455
C_6	11 544
TOTAL	351 764

A continuació il·lustrarem la llei D'Hondt a la circumscripció F_1 , on cal escollir 12 diputats. Farem una taula amb cada candidatura. La primera columna mostrarà el nombre de vots totals que té cadascú (v) i hi farem una marca al nombre més gran. La segona serà el nombre total de vots dividit per 2 ($v/2$) del *guanyador* i farem una marca al resultat més gran d'ambdues columnes. I així successivament fins a obtenir la quantitat d'escons (en el nostre cas, 12).

TAULA 1: LLEI D'HONDT					
Partit	(v/1)	(v/2)	(v/3)	(v/4)	(v/5)
C_1	17.631				
C_2	*45.644	*22.822	15.215		
C_3	*91.234	*45.617	*30.411	22.806	
C_4	*101.256	*50.628	*33.752	*25.314	20.251
C_5	*84.455	*42.228	*28.152	21.114	
C_6	11.544				

Per a què un sistema electoral sigui proporcional, el que es vol és aconseguir que la proporció d'escons de cada llista sigui igual a la proporció de vots que ha obtingut.

Per exemple, el partit C_2 ha obtingut 45 644 vots d'un total de 351 764. Per poder conservar aquesta proporció, calculem la quota d'escons que li correspon:³

- Calculem la proporció dels seus vots:

$$\text{Proporció}(C_2) = \frac{V}{v_k} = \frac{351\,764}{45\,644} = 7'7067$$

- Dividim la quantitat d'escons que sollicitem entre aquesta proporció:

$$q = \frac{12}{7'7067} = 1'55$$

- Calculem les quotes dels altres partits i obtenim: 0'60, 3'11, 3'45, 2'88, 0'39.

El problema és que no podem assignar escons decimals.

Quants més escons obtingui una llista, més petit serà el preu, per tant, la llista més afavorida és la que obté el preu mínim

$$\min_{k=1,\dots,n} \frac{v_k}{s_k}$$

Aquest mínim estarà sempre acotat per V/S , per tant, podem escollir els s_k de manera que el preu mínim sigui el màxim possible per a totes les candidatures. Aleshores, el problema matemàtic que se'ns planteja és trobar les n quantitats s_1, \dots, s_n enteres, positives i de suma S per tal que s'obtingui

$$\max \left(\min_{k=1,\dots,n} \frac{v_k}{s_k} \right),$$

algorisme que coneixem com la **lleï D'Hondt**.

Teorema 3.1. *Sigui $n \in \mathbb{N}$, $s_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, n$, tal que $\sum_{k=1}^n s_k = S$. La lleï D'Hondt és un algorisme per trobar les quantitats e_1, \dots, e_n per obtenir $\max \left(\min_{i=1,\dots,n} \frac{v_i}{e_i} \right)$*

Demostració. Sigui (s'_1, \dots, s'_n) l'assignació òptima obtinguda mitjançant la lleï D'Hondt i sigui (s_1, \dots, s_n) una altra assignació que satisfà les restriccions i amb millor valor de la funció objectiu. Llavors, existirà una candidatura j tal que

$$\min_i \frac{v_i}{s_i} > \min_i \frac{v_i}{s'_i} = \frac{v_j}{s_j}.$$

D'aquí es dedueix que $\frac{v_j}{s_j} > \frac{v_i}{s'_i}$ i, per tant, $s'_j > s_j$.

Com que el nombre total d'escons està fixat, existirà també una candidatura k tal que $s'_k < s_k$, és a dir, $s_k \geq s'_k + 1$.

D'altra banda, a partir de l'algorisme de la lleï D'Hondt, tenim la següent relació:

$$\min_i \frac{v_i}{s'_i} \geq \max_i \frac{v_i}{s_i + 1}.$$

³Nota: A partir d'ara, escriuré els decimals amb $[\]$ enlloc de $[\]$ per evitar confusions

En efecte, en cas contrari, l'últim escó assignat hauria d'haver anat a una altra candidatura. En definitiva, obtenim

$$\frac{v_i}{s'_i} = \min_i \frac{v_i}{s'_i} \geq \max_i \frac{v_i}{s'_i + 1} \geq \frac{v_k}{s'_i + 1} \geq \frac{v_k}{s_k} \geq \min_i \frac{v_i}{s_i} > \frac{v_j}{s'_j},$$

que és absurd. ■

Així doncs, darrere la llei D'Hondt hi ha un model matemàtic de justícia electoral que pretén uniformitzar els preus per escó a l'alça. També es poden uniformitzar a la baixa; la llista menys afavorida és aquella que paga el preu $\min_{k=1, \dots, n} \frac{v_k}{s_k}$. Aleshores, escollim els s_i de manera que aquest preu sigui el mínim possible i obtenim el problema

$$\min \left(\max_{k=1, \dots, n} \frac{v_k}{s_k} \right)$$

Aquest problema té un algorisme anomenat la **Llei d'Adams** o **dels divisors més petits**; és semblant al de la llei D'Hondt amb la diferència que els divisors comencen per zero, és a dir, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. El cas del resultat de dividir els vots entre $k = 0$, el denotem per ∞ amb la qual cosa se li assigna un escó a cada partit.

Considerem ara el següent model: si en unes eleccions hi ha un total de V votants, la proporció de cada elector respecte els escons és V/S , i si un elector vota la llista k , llavors la seva influència sobre els escons és de s_k/v_k . Les diferències $\frac{s_k}{v_k} - \frac{S}{V}$ es poden interpretar com una desviació de l'assignació ideal deguda a circumstàncies aleatòries. Una mesura habitual d'aquestes desviacions és l'*error quadràtic*. Si volem que aquest error quadràtic sigui mínim, haurem de trobar l'assignació s_1, \dots, s_n que fa

$$\min_{\sum_{k=1}^n s_k = S} v_k \left(\frac{s_k}{v_k} - \frac{S}{V} \right)^2,$$

algorisme es coneix com a **Llei de Sainte-Laguë**.

Apliquem els tres mètodes a l'exemple de Sawpi (el D'Hondt l'hem vist anteriorment):

TAULA 2: LLEI D'ADAMS				
Partit	(v/0)	(v/1)	(v/2)	(v/3)
C_1	*∞	17.631		
C_2	*∞	*45.644	22.822	
C_3	*∞	*91.234	*45617	
C_4	*∞	*101.256	*50.628	33.752
C_5	*∞	*84.455	42.228	
C_6	*∞	11.544		

TAULA 3: LLEI DE SAINTE-LAGUË

Partit	(v/1)	(v/3)	(v/5)	(v/7)
C_1	*17.631	5.877		
C_2	*45.644	*15.215	9.129	
C_3	*91.234	*30.411	*18.247	13.033
C_4	*101.256	*33.752	*20.251	14.465
C_5	*84.455	*28.152	*16.891	12.065
C_6	11.544			

Observem que el resultat de repartir els 12 diputats és diferent tot i que cadascun d'ells reflecteixen la voluntat dels ciutadans; tots tres estan motivats en termes d'una funció objectiu que cal minimitzar o maximitzar i que representa una mesura de desproporcionalitat respecte a la quota. La conclusió és que no es pot parlar d'una única manera justa d'assignar escons.

TAULA COMPARATIVA

	D'Hondt	Adams	Sainte-Laguë
Blau	0	1	1
Verd	2	2	2
Taronja	3	3	3
Groc	4	3	3
Vermell	3	2	3
Lila	0	1	0
TOTAL	12	12	12

Definició 3.2. *Sigui $d : N \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funció estrictament creixent tal que $d(k) \in [k, k + 1)$ o bé $d(k) \in (k, k + 1], \forall k$. El **mètode de divisors associat a d** és l'algorisme d'assignació d'escons descrit anteriorment, usant la successió de divisors $\{d(k)\}_{k \geq 0}$.*

Així, D'Hondt, Adams i Sainte-Laguë corresponen a $d(k) = k + 1$, $d(k) = k$, $d(k) = k + 1/2$, respectivament.

Tot i que els tres models que hem vist donen resultats diferents, les diferències són petites. Els dos altres factors que tenen influència en la desproporció entre vots i escons són les divisions entre circumscripció i el llindar inferior, com hem explicat abans.

El terme quota es refereix als escons teòrics que correspondrien a cada circumscripció si mantinguéssim la proporcionalitat estricta amb la població d'electors que contenen.

Determinar aquesta assignació és un problema anàleg al de repartir escons entre candidatures. L'algorisme anomenat **Llei de les restes més grans** o **mètode de Hamilton** consisteix en arrodonir a l'enter superior les quotes que tenen una part decimal més gran, les necessàries per completar la cambra. Correspon al problema de minimitzar la funció

$$\sum_{i=1}^n (s_i - q_i)^p,$$

amb qualsevol $p \geq 1$, on q_i és la quota de la circumscripció i .

Definició 3.3. Definim *injustícia* en el repartiment entre dos partits i, j com la diferència

$$\frac{s_i}{v_i} - \frac{s_j}{v_j}$$

on s_i és el nombre d'escons del partit i , v_i el nombre de vots del partit i (idem pel partit j).

Proposició 3.4. El mètode de Webster (o de Saint-Laguë) minimitza la injustícia, és a dir, si es transfereixen escons d'un partit a un altre d'una manera diferent a com ho fa Webster, augmentaria la injustícia.

Demostració. Suposem que dos partits C_1 i C_2 competeixen pel següent escó. Sigui v_1 el nombre de vots del partit C_1 i s_1 el nombre d'escons que ja ha obtingut. Anàlogament siguin v_2 el nombre de vots del partit C_2 i s_2 el seu nombre d'escons ja adjudicats. El mètode de Webster donarà el següent escó a C_1 si verifica

$$\frac{v_2}{2s_2 + 1} < \frac{v_1}{2s_1 + 1} \quad (3.1)$$

Llavors, la diferència de proporció representativa entre C_1 i C_2 seria

$$D_{12} = \frac{s_1 + 1}{v_1} - \frac{s_2}{v_2}$$

Si l'escó l'hagués rebut C_2 enlloc de C_1 , la diferència de proporció representativa seria

$$D_{21} = \frac{s_2 + 1}{v_2} - \frac{s_1}{v_1}$$

La injustícia de la qual hauria estat més gran, ja que, com podem comprovar, es té $D_{12} < D_{21}$. En efecte, la relació $D_{12} < D_{21}$ és

$$\frac{s_1 + 1}{v_1} - \frac{s_2}{v_2} < \frac{s_2 + 1}{v_2} - \frac{s_1}{v_1}$$

i si passem a l'esquerra tots els termes de P_1 i a la dreta els de C_2 , queda

$$\frac{s_1 + 1}{v_1} + \frac{s_1}{v_1} < \frac{s_2 + 1}{v_2} + \frac{s_2}{v_2}$$

I això és el mateix que

$$\frac{2s_1 + 1}{v_1} < \frac{2s_2 + 1}{v_2}$$

que és certa perquè és equivalent (multiplicant en creu) a l'assignació que havia fet Webster en 3.1. ■

3.3 El sistema proporcional perfecte

Hem vist que els sistemes electorals proporcionals es poden pensar com algorismes que resolen problemes d'optimització. No hi ha manera de comparar-los entre sí en termes de "justícia", ja que són tots el "mètode ideal" quan s'utilitza la seva pròpia funció objectiu com a mesura "d'injustícia".

Una idea més interessant seria classificar els sistemes en "bons" o "dolents", fixant-nos en certes propietats (axiomes) que qualsevol bon sistema electoral hauria de satisfer. El mètode axiomàtic permet de vegades en matemàtiques individualitzar un sol objecte que satisfà tota la llista d'axiomes. Tot i que si això donés resultat, estaríem parlant sobre el "sistema electoral perfecte", sabem que l'elecció d'axiomes és arbitrària.

Per exemple, podem considerar v_k i s_k el nombre de vots i el nombre d'escons de la candidatura i respectivament, mentre que V i S són el total de vots i escons. Considerem els axiomes següents:

1. Monotonia respecte als vots: $v_k \leq v_i \Rightarrow s_k \leq s_i$.
2. Principi de la majoria absoluta: $v_k > V/2 \Leftrightarrow s_k > S/2$
3. Superadditivitat: si $k \cup i$ és la coalició en una sola candidatura de les candidatures k i i , aleshores $s_{k \cup i} \geq s_k + s_i$.
4. Monotonia respecte a la cambra: si (s_1, \dots, s_n) és l'assignació d'escons per a una cambra de S escons, i (s'_1, \dots, s'_n) és l'assignació per a una cambra de $S + 1$ escons, aleshores $s'_k \geq s_k, \forall k$.
5. Satisfacció de la quota: $s_k - q_k < 1, \forall k$.

Si la propietat 4 la satisfan tots els mètodes de divisors, no la satisfà el mètode de les restes més grans. En canvi, per a la propietat 5 és a l'inrevés.

Teorema 3.5. *No hi ha cap sistema electoral que satisfaci els axiomes 1,2,3.*

Demostració. Si observem el següent exemple, suposem que 100 000 electors han d'escollir 3 diputats. Hi ha 4 candidatures i els vots es reparteixen de la següent manera:

Candidatura	Vots
A	47 000
B	24 000
C	17 000
D	12 000

Podem fer la llista de 20 possibles assignacions d'escons i veure que l'única que compleix els axiomes 1 i 2 és la que assigna un escó A, B, C i cap a D. Llavors, considerem un sistema electoral qualsevol que, en aquest exemple, doni lloc a l'assignació d'escons esmentada. Si les candidatures B i C es fusionessin, per tal de satisfer l'axioma 3, aquest sistema electoral hauria d'assignar 2 escons a la coalició, que només té el 41% dels vots, i per tant, no satisfaria l'axioma 2. ■

3.4 Paradoxes en sistemes proporcionals

A continuació, considerem una descripció d'un sistema electoral proporcional i una sèrie de paradoxes electorals. Suposem que diversos partits reben vots a les eleccions per a un parlament. Si hi ha un llindar inferior $LL > 1\%$ vots, només participaran en l'assignació d'escons els partits amb vots superiors a LL .

Suposant que almenys dos partits superen el llindar inferior, arribem a la següent afirmació del problema de l'assignació d'escons proporcional:

En aquesta secció, considerarem que el sistema proporcional, o la regla que transforma els vots en escons, es descriu per la funció factorial $(v, S) \rightarrow s$, que denotem per:

$$f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0^n. \quad (3.2)$$

Aquí, el nombre s_k d'escons assignats al partit C_k ve donat per $s_k = f_k(v, S)$, o $s = f(v, S)$. Així, la funció f ha de satisfer la relació $\|f(v, S)\| = \sum_{k=1}^n f_k(v, S) = S$. És natural suposar que $v_j > v_k$ implica $s_j \geq s_k$.

Hem vist que és possible que hi hagi escons que, a priori, no es poden repartir i que es necessita fer ús d'eines complementàries per assignar-los. Sabem també que un requisit general per a un sistema proporcional és que els escons dels partits han de ser aproximadament proporcionals als vots dels partits. Això es pot expressar com

$$\frac{s_k}{v_k} \simeq \frac{S}{V}, k = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

Un altre requeriment és que $f(\lambda v, S) = f(v, S)$, $\lambda \in \mathbb{N}$.

Per cada funció f i dades v, S , podem definir la desviació de la proporcionalitat com

$$d_f(v, S) = \|s^* - v^*\| = \left\| \frac{f(v, S)}{S} - \frac{v}{V} \right\|.$$

Considerarem només els mètodes que obeeixen la condició de monotonia

$$(v_j - v_k)(s_j - s_k) \geq 0, j \neq k \quad (3.4)$$

que és una característica principal de qualsevol sistema electoral purament proporcional. Amb aquestes últimes desigualtats, el que es pretén és que un partit amb més vots no obtingui menys escons que un altre partit amb menys vots.

Una altra condició de monotonia natural que s'assumeix més endavant és que la funció f_k no decreix en v_k , $k = 1, 2, \dots, n$, és a dir,

$$(v_k - \hat{v}_k)(f_k(v, S) - f_k(\hat{v}_k, S)) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

per $\|v - \hat{v}_k\| = |v_k - \hat{v}_k|$.

A continuació es mostra una llista de **cinc propietats**, no sempre assolibles, d'un sistema electoral proporcional.

La **primera propietat** correspon a l'expectativa que si s'assignen més escons $S + T$ ($T \in \mathbb{N}$) enlloc dels escons S inicials (amb els mateixos vots del partit), un partit no pot reduir els seus escons.

P1: La funció f compleix la condició $f(v, S) \preceq f(v, s + T)$, $T \in \mathbb{N}$.

La propietat P1 significa que si es distribueixen més escons amb el mateix vector de vot v , cap partit pot perdre un escó. La violació d'aquesta propietat es coneix com la "*Paradoxa d'Alabama*".

Si es produeix aquesta paradoxa, alguns partits perden un total de $L \geq 1$ escons mentre que els altres partits guanyen un total de $L + T$ escons. Direm que la paradoxa d'Alabama és d'ordre $N \in \mathbb{N}$ si es produeix per a $T = N$ però no es produeix per a $T = 1, 2, \dots, N - 1$.

La **segona propietat** tracta de la hipòtesi que un nou partit participa en les eleccions i aconsegueix escons amb els antics partits mantenint els seus vots v_1, v_2, \dots, v_n i sent S el mateix. Aleshores, es pot suposar que un partit antic no hauria de guanyar escons addicionals. Siguin $v \in \mathbb{N}^n$ i $s \in \mathbb{N}_0^n$ les antigues distribucions de vots i escons, i sigui el nou partit C_{n+1} amb $v_{n+1} \in \mathbb{N}$ vots afegits. Denotem per $\hat{s} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n, \hat{s}_{n+1}) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ el vector d'escons corresponent al vector de vots $\hat{v} = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ i sigui $\hat{s}_{n+1} \geq 1$. Que un partit antic no guanyi escons addicionals quan un partit nou aconsegueix escons, es pot formular de la següent manera.

P2: Es compleixen les desigualtats $\hat{s}_k \leq s_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

La propietat P2 significa que quan s'inclou un partit nou (mantenint S igual), és possible que un partit antic no augmenti els seus escons. La violació de la propietat P2 s'anomena "*paradoxa del nou partit*".

Si es produeix aquesta paradoxa, alguns dels partits antics obtenen $L \geq 1$ escons addicionals, mentre que la resta de partits antics perden $L + \hat{s}_{n+1}$ escons.

La propietat P2 es pot formular en una forma dual que és més probable que passi: Suposem que després de les eleccions el partit C_n està prohibit i perd els seus $s_n \geq 1$ escons. Suposem també que els partits C_1, C_2, \dots, C_{n-1} reben ara tots els S escons (enlloc dels $S - s_n$ escons abans de la prohibició) segons els seus vots v_1, v_2, \dots, v_{n-1} . Denotem per $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ el nou vector d'escons amb $\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 + \dots + \tilde{s}_{n-1} = S$. Aleshores es pot esperar que cap partit perdi un seient, és a dir, que $\tilde{s}_k \geq s_k$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$. La violació de qualsevol de les últimes $n - 1$ desigualtats es poden anomenar "*Paradoxa del partit prohibit*". De fet, és un cas particular de la paradoxa d'Alabama.

La **tercera propietat** es refereix al cas en què dues regions electorals augmenten la seva població amb certs increments. Aleshores és natural suposar que la regió amb un increment més gran pot no perdre un escó. Pel que fa a les eleccions parlamentàries, la formulació d'aquesta propietat és la següent. Siguin dos partits, C_1 i C_2 , que augmenten els seus vots des de v_1 a $v_1 + u_1$ i des de v_2 a $v_2 + u_2$. Denotem amb $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n)$ el vector d'escons corresponents al vector de vots $\bar{v} = v + u$, on $u = (u_1, u_2, 0, 0, \dots, 0)$. Aleshores la tercera propietat es pot formular de la manera següent:

P3: Si $u_1 > u_2 \geq 1$, aleshores $\bar{s}_1 \geq s_1$ i $\bar{s}_2 \leq s_2$.

La propietat P3 significa que si el primer partit obté més vots addicionals en comparació amb el segon partit ($u_1 > u_2$), llavors el primer partit no hauria de perdre un escó. La violació d'aquesta propietat es coneix com la “*Paradoxa de la població*”.

La **quarta propietat** està relacionada amb la possibilitat d'augmentar els vots i els escons de dos partits per tal de formar una coalició. És natural suposar que les altres parts mantindran els seus escons i es pot esperar que la coalició obtingui la suma d'escons dels seus dos partits. Si això no passa, es pot considerar una paradoxa.

Per descriure aquesta situació considerem $n \geq 3$ i el vector de vots (v_1, v_2, \dots, v_n) que produeix el vector d'escons (s_1, s_2, \dots, s_n) . Si els partits C_{n-1} i C_n formen una coalició (sumant els seus vots), llavors podem considerar un nou vector de vot $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$. Denotem per $\underline{s} = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{N}_0^{n-1}$ el vector d'escons corresponent a \underline{v} . Aleshores, la quarta propietat es pot formular de la següent manera:

P4: Es compleixen les igualtats

$$s_k = \underline{s}_k, k = 1, \dots, n - 2 \quad (3.6)$$

En aquest cas, $\underline{s}_{n-1} = s_{n-1} + s_n$.

La violació de la propietat P4 es diu “*Paradoxa de la coalició*”.

La **cinquena propietat** correspon a l'expectativa que si volem complir exactament la propietat de proporcionalitat, obtenim el fraccional d'escons (o accions)

$$\sigma_k := Sv_k^* = S \frac{v_k}{V} = \frac{v_k}{q_H}, \quad k = 1, \dots, n ,$$

on, $q_H := V/S$ és el que es coneix com a *quota de Hare*. Per tant, una altra propietat desitjable es pot formular de la següent manera.

P5: Es compleixen les desigualtats

$$[\sigma_k] \leq s_k \leq [\sigma_k] + 1, \quad k = 1, 2, \dots, n , \quad (3.7)$$

La violació de la propietat P5 es coneix com “*Paradoxa de la quota de Hare*”.

Si $q \left(\frac{V}{S+1} < q \leq \frac{V}{S} \right)$ és una altra quota (per exemple, la quota de Droop), llavors podem utilitzar les accions v_k/q enlloc de σ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ en la formulació de la propietat P5.

Observació 3.6. El *Mètode de la resta més gran amb quota Hare* o *LRM/H* (conegut també a com a *Mètode de Hare* o *mètode de Hamilton*), no té les propietats P1, P2, P3 i P4, però té la propietat P5. A més, *LRM/H* ha estat dissenyat per satisfer P5.

En canvi, el *Mètode D'Hondt* o conegut també com el *Mètode de Mitjanes Màximes*, o *HAM* satisfà les propietats les P1 i P2, però no P3, P4, P5.

3.4.1 Paradoxes dels sistemes proporcionals

Qualsevol violació de les propietats P1-P5 es coneix com a paradoxa del sistema proporcional, això vol dir que el sistema es comporta d'una manera que sembla estranya o que contradia la intuïció.

Teorema 3.7. (*Balinski and Young, 1982*): *No hi ha un sistema electoral proporcional que satisfà les propietats P1 (o equivalentment P2), P3 i P5.*

Paradoxes HAM

Recordem que el mètode HAM o de les mitjanes més elevades, troba una distribució d'escons que maximitza la quantitat

$$\min \left\{ \frac{v_k}{s_k}, k = 1, \dots, n \right\}$$

De manera més general, un mètode de tipus HAM és el següent: Sigui $0 < q_1 < \dots < q_s$ una successió creixent, aleshores podem definir les quantitats $h_{i,j}$ de $h_{i,j} = v_i/q_i$ en particular, per $q_i = i$ tenim el mètode D'Hondt i per $q_i = 2i - 1$ tenim el mètode de Saint-Laguë.

Teorema 3.8. *El mètode de les mitjanes més elevades compleix les propietats P1, P2 i no compleix les propietats P3, P4 i P5*

Paradoxes de LRM/H

Recordem com funciona LRM/H per a les parts que superen el llindar inferior, en cas que n'hi hagi:

1. Es defineix la quota de Hare $q_H = V/S$ i a cada part C_k s'assigna la quota principal $\sigma_k = v_k/q_H$. Si $\sigma_k \in \mathbb{N}$ posem $s_k = \sigma_k$.
2. Si $\sigma_k \notin \mathbb{N}$ per k , el partit C_k rep $[\sigma_k]$ escons automàticament. Definim la resta $r_k = \sigma_k - [\sigma_k]$ i sigui $R \in \mathbb{N}$ sigui la suma de totes les restes ($R < n$). Aleshores la suma dels escons automàtics és $S - R$ i hi ha R escons per a una posterior assignació.
3. S'ordenen les parts de manera que $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n \geq 0$ amb empats per si es produeixen restes iguals.
4. Estableix $s_k = [\sigma_k] + 1$ per $k = 1, 2, \dots, R$ i $s_k = [\sigma_k]$ per $k = R + 1, R + 2, \dots, n$. Tots els escons de S estan assignats.

Com s'ha esmentat anteriorment, LMR/H està dissenyat per satisfer la propietat P5 i, per tant, les possibles paradoxes en l'ús de LMR/H entren en conflicte amb les propietats P1 i P2: La Paradoxa d'Alabama, P3: la Paradoxa de la població i P4: la Paradoxa de la coalició.

Teorema 3.9. *El LMR/H compleix la propietat P5 i no compleix les propietats P1-P4.*

4 Aliances i influència de la teoria de jocs

4.1 Aliances sota el mètode D'Hondt

El mètode D'Hondt també conegut com a mètode de Jefferson, el sistema Hagenbach-Bischoff, el mètode del divisor amb arrodoniment per baix i el mètode dels màxims divisors.

L'aliança de llistes és la formació de coalicions abans del dia de les eleccions de manera que els vots obtinguts per l'aliança es compten com una llista única. Donada la naturalesa del mètode d'Hondt, pot donar-se el cas de que la llista única sorgida d'una aliança obtingui més escons que la suma dels escons obtinguts individualment pels partits si aquests no haguessin optat per aliar-se. D'aquesta forma, en certs escenaris electorals resulta beneficiós per un conjunt de partits formar una aliança.

En aquesta secció s'explorà el sistema d'aliances sota el mètode d'Hondt, caracteritzarem quan aquestes resulten en un augment d'escons respecte a l'escenari sense aliança i aprofundirem en la naturalesa d'aquests canvis d'escons.

4.1.1 Model d'aliança

El model matemàtic de la representació proporcional de les eleccions realitzades pel mètode D'Hondt està descrit per un conjunt de partits $\mathcal{N} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, el nombre de vots $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v \in \mathbb{N}^n$, $V = \sum_i v_i$ i el nombre d'escons assignats pel mètode D'Hondt $s(S) = (s_1, \dots, s_n)$, $s \in \mathbb{N}_+^n$, on $S = \sum_i s_i$ és la mida de la cambra (és a dir, el nombre total d'escons possibles a repartir entre els partits).

Recordem del Teorema 3.1 que la solució del mètode D'Hondt s'obté de manera recursiva de la següent manera:

i Inicialment $s(0) = (0, \dots, 0)$.

ii Iterativament, un cop repartit l'escó T -èssim resultant en $s(T) = (s_1, \dots, s_n)$ amb $T < S$, es determina si hi ha algun partit k pel qual es compleixi:

$$\frac{v_k}{s_k + 1} = \max_{C_i} \frac{v_i}{s_i + 1}.$$

En aquest cas s'assigna l'escó $T + 1$ -èssim al partit C_k , de forma que $s(T + 1) = (s_1, \dots, s_{k-1}, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_n)$. Aquest pas (ii) s'aplica fins a arribar a $T = S$.

Siguin $C_i, C_j \in \mathcal{N}$ partits qualssevol. Sigui quina sigui la mida de la cambra, se satisfà:

$$\frac{v_j}{s_j} \geq \frac{v_i}{s_i + 1} \quad (4.1)$$

conseqüència del repartiment que dicta el mètode d'Hondt. És a dir, en assignar un escó a un partit C_i es disminueix el nombre de vots per escó. A més, si el partit C_j és el que rep l'últim escó d'acord amb el procediment recursiu, aleshores també tenim

$$\frac{v_i}{s_i} \geq \frac{v_j}{s_j} \geq \frac{v_i}{s_i + 1} \quad (4.2)$$

per a qualsevol altre partit C_i .

Sota aquest supòsit, els altres partits diferents del C_j (que rep l'últim escó) tenen un nombre igual o superior de vots per escó que el partit C_j . Així doncs, donada aquesta "injustícia", resulta natural contemplar què hagués passat amb el repartiment d'escons si aquests partits haguessin concorregut sota el paraigües d'un partit únic en comptes de fer-ho individualment, amb la fi d'obtenir una relació de vots per escó més beneficiós.

Definició 4.1. Una **aliança** és un subconjunt $\mathcal{C} = \{C_{i_1}, \dots, C_{i_k}\} \subseteq \mathcal{N}$ de partits que en un escenari electoral es comporta com un únic partit amb nombre de vots $\sum_{C_i \in \mathcal{C}} v_i$.

Definició 4.2. Es diu que una aliança és **satisfactòria** si aconsegueix més escons dels que acumularien els seus membres sense formar-ne una.

Si j és el partit que ha rebut l'últim escó, del mètode d'Hondt tenim trivialment que la condició necessària i suficient per a que una aliança \mathcal{C} guanyi amb certesa almenys un escó addicional és

$$\frac{\sum_{C_i \in \mathcal{C}} v_i}{\sum_{C_i \in \mathcal{C}} s_i + 1} > \frac{v_j}{s_j} \quad (4.3)$$

Informalment, l'aliança \mathcal{C} ha robat aquest darrer escó a C_j . A continuació caracteritzem una aliança que sempre és satisfactòria:

Proposició 4.3. Si hi ha una aliança satisfactòria $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$, llavors l'aliança $\mathcal{C}' = \mathcal{N} \setminus \{C_j\}$ també és satisfactòria, on el partit C_j és un partit que rep l'últim escó en un repartiment sense aliança.

Demostració. Sigui $s(S) = (s_1, \dots, s_n)$ la distribució d'escons pel mètode D'Hondt abans de la formació de l'aliança. L'aliança \mathcal{C} és satisfactòria, i per tant, rep almenys un escó addicional:

$$\frac{\sum_{C_i \in \mathcal{C}} v_i}{\sum_{C_i \in \mathcal{C}} s_i + 1} > \frac{v_j}{s_j}$$

si $C_j \notin \mathcal{C}$, aleshores

$$\sum_{C_i \in \mathcal{C}} v_i > \frac{v_j}{s_j} \left(\sum_{C_i \in \mathcal{C}} s_i + 1 \right). \quad (4.4)$$

si $C_j \in \mathcal{C}$, aleshores

$$\sum_{C_i \in \mathcal{C} \setminus \{C_j\}} v_i > \frac{v_j}{s_j} \left(\sum_{C_i \in \mathcal{C} \setminus \{C_j\}} s_i + 1 \right). \quad (4.5)$$

Per la propietat del mètode D'Hondt, per qualsevol $C_i \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{C} \cup \{C_j\})$ tenim

$$v_i \geq \frac{v_j}{s_j} s_i$$

$$\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{C} \cup \{C_j\})} v_i \geq \frac{v_j}{s_j} \left(\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{C} \cup \{C_j\})} s_i \right) \quad (4.6)$$

Sumant 4.6 amb 4.4 (o 4.5 segons el cas) obtenim:

$$\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus \{C_j\}} v_i > \frac{v_j}{s_j} \left(\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus \{C_j\}} s_i + 1 \right)$$

d'on segueix finalment:

$$\frac{\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus \{C_j\}} v_i}{\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus \{C_j\}} s_i + 1} > \frac{v_j}{s_j}$$

i doncs l'aliança $\mathcal{N} \setminus \{C_j\}$ és satisfactòria. ■

De fet veiem que l'aliança $\mathcal{N} \setminus \{C_j\}$ no és satisfactòria si, i només si,

$$\frac{\sum_{C_i \neq C_j} v_i}{\sum_{C_i \neq C_j} s_i + 1} < \frac{v_j}{s_j}.$$

Multiplicant pels dos denominadors i sumant $s_j v_j$, obtenim

$$\frac{V}{S+1} < \frac{v_j}{s_j} \tag{4.7}$$

És a dir, no hi ha aliances satisfactòries si, i només si, l'aliança $\mathcal{N} \setminus \{C_j\}$ no és satisfactòria. La desigualtat 4.7 s'anomena **condició de prova d'aliança**. El costat esquerre d'aquesta desigualtat, arrodonit cap amunt a l'enter més proper, és el que anteriorment hem vist com a quota de Droop.

Proposició 4.4. *De la mateixa manera, la condició a prova d'aliança es representa en la forma de desproporcionalitat*

$$\frac{s_j}{S(S+1)} > \frac{s_j}{S} - \frac{v_j}{V} \tag{4.8}$$

Demostració. La condició de prova d'aliança 4.7 és equivalent a

$$\frac{s_j}{(S+1)} - \frac{s_j}{S} > \frac{v_j}{V} - \frac{s_j}{S} \tag{4.9}$$

Llavors,

$$\frac{s_j}{S(S+1)} > \frac{s_j}{S} - \frac{v_j}{V} \tag{4.10}$$

■

El costat dret de l'expressió és la desviació del cas proporcional exacte, i aquesta condició d'aliança limita la desproporcionalitat del repartiment ja que com que el partit C_j rep l'últim escó, és possible que el partit C_j no tingui el biaix més alt entre tots els partits.

A continuació caracteritzarem la possibilitat de reduir la cardinalitat d'una aliança satisfactòria

Proposició 4.5. *Si l'aliança $\mathcal{C} = \mathcal{N} \setminus \{C_j\}$ és satisfactòria, aleshores l'aliança*

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \left\{ C_i : \frac{V}{S+1} > \frac{v_i}{s_i} \right\}$$

és també satisfactòria.

Demostració. L'aliança \mathcal{C} té èxit i, per tant, igual que abans rep almenys un escó addicional

$$\frac{\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus \{C_j\}} v_i}{\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus \{C_j\}} s_i + 1} > \frac{V}{S+1} > \frac{v_j}{s_j}$$

$$\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus \{C_j\}} v_i > \frac{V}{S+1} \left(\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus \{C_j\}} s_i + 1 \right) > \frac{v_j}{s_j} \left(\sum_{C_i \in \mathcal{N} \setminus \{C_j\}} s_i + 1 \right)$$

Tenint per tot $C_k \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{C}' \cup \{C_j\})$, $s_k(V/S+1) < v_k$, obtenim

$$\sum_{C_i \in \mathcal{C}'} v_i > \frac{V}{S+1} \left(\sum_{C_i \in \mathcal{C}'} s_i + 1 \right) > \frac{v_j}{s_j} \left(\sum_{C_i \in \mathcal{C}'} s_i + 1 \right),$$

$$\frac{\sum_{C_i \in \mathcal{C}'} v_i}{\sum_{C_i \in \mathcal{C}'} s_i + 1} > \frac{V}{S+1} > \frac{v_j}{s_j}$$

Així doncs, l'aliança \mathcal{C}' és satisfactòria. ■

La condició de prova d'aliança es pot estendre al cas de més d'una aliança. La proposició 4 connecta els casos d'una i diverses aliances.

Proposició 4.6. *Si la condició de prova d'aliança es compleix, aleshores en presència d'una o més aliances totes les aliances no tenen èxit.*

Demostració. Si el partit j obté l'últim escó segons el mètode D'Hondt, aleshores

$$v_i \geq \frac{v_j}{s_j} s_i \quad C_i \in \mathcal{N}$$

Sigui $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$ una aliança arbitrària, $C_j \notin \mathcal{C}$, tenim

$$\frac{\sum_{C_i \in \mathcal{C}} v_i}{\sum_{C_i \in \mathcal{C}} s_i} \geq \frac{v_j}{s_j}$$

Tenint en compte la condició de prova d'aliança, tenim

$$\frac{\sum_{C_i \in \mathcal{C}} v_i}{\sum_{C_i \in \mathcal{C}} s_i} \geq \frac{v_j}{s_j} \geq \frac{\sum_{C_i \neq C_j} v_i}{\sum_{C_i \neq C_j} s_i + 1}$$

L'aliança \mathcal{C} no canvia un partit que rep l'últim escó repartit. Com que el partit C_j rep l'últim escó, la condició de prova d'aliança es manté. La primera aliança no modifica la distribució dels escons i la condició de prova d'aliança es manté inalterada. Cada aliança posterior té el mateix resultat. L'existència de diverses aliances no modifica la distribució dels escons i la satisfacció de la condició de prova d'aliança es manté inalterada. ■

Una aliança satisfactòria pot guanyar més d'un escó. Considerem un exemple amb sis partits i distribució de vots $v = (179, 99, 99, 99, 99, 99)$. En el cas de $S = 29$, trobem la distribució de seients $s = (9, 4, 4, 4, 4, 4)$. Si els cinc últims partits creen una aliança, la distribució de la nova votació és $\hat{v} = (179, 495)$ i la nova distribució de seients és $\hat{s} = (7, 22)$. El partit més gran perd dos escons.

Acabem aquesta secció portant el cas a l'extrem: en general, no hi ha límit en la quantitat d'escons que una aliança pot guanyar, i tampoc n'hi ha en el nombre de partits que perden escons. Les següents proposicions caracteritzen com pot donar-se el cas en el que aquests dos nombres esdevinguin arbitràriament grans.

Proposició 4.7. *Hi ha una seqüència de distribucions de vots i mides de casa de manera que el nombre d'escons addicionals d'una aliança satisfactòria no té límit superior.*

Demostració. Considerem un exemple amb $n = 2x + 1$ partits ($x \geq 3$). $n - 1 = 2x$ partits són iguals, i cadascun té $v_i = x + 1$ vots. Un partit té $v_j = 2x^2 - 4x$ vots. El nombre total de vots és igual a $V = 4x^2 - 2x$. El nombre total d'escons és $S = 4x^2 - 4x - 1$. Cada partit obté un escó menys que el nombre de vots. La proporció de vot per escó d'ambdós tipus de partits són superiors a u. Els escons addicionals redueixen la proporció de vot per escó a u. Per tant, no està assignat. La distribució d'escons pel mètode D'Hondt és $s_i = x$ i $s_j = 2x^2 - 4x - 1$.

Considerem una aliança de $n - 1$ partits iguals. La condició suficient per a que l'aliança guanyi almenys $x - 2$ escons addicionals és

$$\frac{v_i}{s_j - (x - 2) + 1} < \frac{(n - 1)v_i}{(n - 1)s_i + x - 2}$$

$$\frac{2x^2 - 4x}{2x^2 - 5x + 2} < \frac{2x^2 + 2x}{2x^2 + x - 2}$$

Es compleix si $x \geq 3$. Prenent una x il·limitadament gran, obtenim un nombre il·limitat d'escons addicionals obtinguts per l'aliança. ■

Proposició 4.8. *Hi ha una seqüència de distribucions de vots i mides de les cambres de manera que el nombre de partits que perden escons no té límit superior.*

Demostració. Considerem un exemple amb $n = (2x + 1)y$ partits ($x \geq 3, y \geq 1$). $n - y = 2xy$ partits són iguals i cadascun té $v_i = x + 1$ vots. Els y partits tenen $v_j = 2x^2 - 4x$ vots. El nombre total de vots és igual a $V = 4x^2y - 2xy$. El nombre total d'escons és igual a $S = 4x^2y - 4xy - y$. Cada partit obté un escó menys que el nombre de vots. Les proporcions de vot per escó dels dos partits són més grans que u. Els escons addicionals redueixen la proporció de vot per escó a u i, per tant, no està assignat. La distribució d'escons pel mètode D'Hondt és $s_i = x$ i $s_j = 2x^2 - 4x - 1$.

Considerem una aliança de $n - y$ partits iguals. La condició suficient per a que l'aliança guanyi almenys y escons és

$$\frac{v_j}{s_j} < \frac{(n - y)v_j}{(n - y)s_j + y}$$

$$\frac{2x^2 - 4x}{2x^2 - 4x - 1} < \frac{2xy(x + 1)}{2xyx + y}$$

és cert per qualsevol $x \geq 3$ i $y \geq 1$. Hi ha almenys y partits que perden un escó. Prenent una y sense restriccions, obtenim un nombre il·limitat de partits que perden escons. ■

A continuació veurem la influència que té la teoria de jocs en les aliances.

4.2 Introducció a la teoria de jocs

La teoria de jocs és la branca matemàtica que estudia les situacions en què es produeixen decisions interactives composades per un grup d'agents, una decisió presa per un agent, resultats en funció de les decisions de tots els agents i les preferències en el conjunt de possibles resultats de cada agent. Direm jocs a les diferents situacions, jugadors als agents i estratègies a les possibles decisions.

La teoria de jocs és una teoria normativa ideal que percep en cada situació com ha de comportar-se un jugador racional. Els dos grans blocs de jocs són els jocs cooperatius i els jocs no cooperatius. La teoria de jocs no cooperatius estudia el comportament dels jugadors en qualsevol situació on l'elecció o estratègia òptima de cada jugador depèn del seu pronòstic sobre les eleccions dels seus oponents, i el seu propòsit és maximitzar els seus interessos sense preocupar-se dels interessos dels demés.

4.2.1 Jocs cooperatius

Els jocs cooperatius són aquells en que els seus jugadors prenen les seves decisions conformant aliances amb altres jugadors per a obtenir una recompensa col·lectiva que després ha de ser repartida.

Dins dels jocs cooperatius hi ha dos classes: els jocs cooperatius d'utilitat transferible i els d'utilitat no transferible, que són el la classe més general. Les utilitats d'aquest últim reflecteixen les preferències personals sobre els possibles resultats del joc i les possibilitats de cada coalició s'han de descriure utilitzant un conjunt que contingui totes les utilitats que una coalició pot assegurar als seus membres.

Definició 4.9. *Sigui $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunt de jugadors. Una **coalició** $S \subseteq N$ és un subconjunt de jugadors, on $|S|$ és el nombre de jugadors de S . És a dir, una coalició és el conjunt de diferents grups o aliances que els jugadors poden conformar entre si.*

Definició 4.10. *Un **joc cooperatiu d'utilitat transferible** (o un joc TU) és una parella (N, v) on N és el conjunt de jugadors i $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ és la funció característica del joc. Per conveni, $v(\emptyset) = 0$.*

Observació 4.11. La funció característica del joc descriu totes les possibles recompenses de totes les possibles coalicions, però no ens diu com repartir la recompensa entre els seus membres. Denotarem (N, v) per v .

Definició 4.12. *Sigui G^N la classe de jocs TU amb $n = |N|$ jugadors, en aquest conjunt definim la suma i el producte per escalars com:*

1. Per $u, v \in G^N$, $(u + v)(S) = u(S) + v(S), \forall S \subseteq N$.
2. Per $v \in G^N$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda v)(S) = \lambda v(S), \forall S \subseteq N$.

Observació 4.13. Amb aquestes operacions, G^N té estructura d'espai vectorial i la seva dimensió és 2^{n-1} ja que les funcions 1_S definides per a cada coalició no buida $S \subseteq N$ per

$$1_S(T) := \begin{cases} 1 & \text{si } s = N \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

formen base de G^N .

Definició 4.14. Un joc TU , $v \in G^N$ és **monòton** si per cada parell $S, T \subseteq N$ amb $S \subseteq T$, es té $v(S) \leq v(T)$.

El concepte de monotonia reflecteix que l'adhesió de nous jugadors en una coalició mai empitjora el resultat obtingut per la coalició.

Definició 4.15. Un joc TU , $v \in G^N$, és **súper-additiu** si per cada parell $S, T \subseteq N$ amb $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T \geq v(S) + v(T)$. Denotem per SG^N la classe de jocs TU súper-additius de n jugadors.

Observacions 4.16. Un joc TU és súper-additiu quan els jugadors reals per la cooperació, és a dir, la unió de qualsevol parell de coalicions disjunctes de jugadors, mai disminueix els beneficis totals.

- Monotonia \Rightarrow súper-additivitat.

Definició 4.17. Un joc TU , $v \in G^N$, és un **joc simple** si

- és monòton.
- Per cada $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.
- $v(N) = 1$.

Denotarem per S^N la classe de jocs simples amb n jugadors.

Definició 4.18. Una **coalició guanyadora** és un subconjunt del conjunt total de jugadors N , autosuficient per guanyar una votació, és a dir,

$$S \subseteq N, S \text{ és una coalició guanyadora} \Leftrightarrow v(S) = 1$$

Denotarem per $W(v)$ el conjunt de totes les coalicions guanyadores i definirem de la següent manera: $W(v) = \{S \subseteq N | v(S) = 1\}$. El conjunt $W_i(v) := \{S \in W(v) | i \in S\}$.

Definició 4.19. Una **coalició serà perdedora** quan no sigui guanyadora, és a dir, si i només si, $v(S) = 0$.

Definició 4.20. Un joc de majoria simple és un joc simple $v \in S^N$, en el que la funció característica del joc v és $v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } |S| > n/2 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$, on S és una coalició de N .

Definició 4.21. Sigui una quota $q > 0$, i un sistema de ponderacions no-negatives, w_1, \dots, w_n . Un joc simple $v \in S^N$, és un **joc de majoria ponderada** si, i només si,

$$\sum_{i \in S} w_i \geq q, \forall S \in W.$$

Denotarem un joc de majoria ponderada per $[q; (w_1, \dots, w_n)]$. El parell $[q, w]$ es diu representació del joc v .

Definició 4.22. Una **regla d'assignació** de tipus puntual ϕ per un joc TU , $v \in G^N$, de n jugadors és una funció

$$\phi : G^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

que assigna a cada $v \in G^N$ un únic vector $x \in \mathbb{R}^N$.

Definició 4.23. Sigui $v \in G^N$

i. Un jugador $i \in N$ és un jugador **nul** si per

$$S \subseteq N \setminus \{i\}, v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$$

ii. Dos jugadors i, j són **simètrics** si per cada coalició

$$S \subseteq N \setminus \{i, j\}, v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$$

Propietats. Sigui ϕ regla d'assignació de tipus puntual i podem imposar les següents propietats:

- Eficiència (EF): Per cada $v \in G^N$,

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$

- Jugador Nul (JN): Per cada $v \in G^N$ i cada jugador nul $i \in N$,

$$\phi_i(v) = 0$$

- Simetria (SIM): Per cada $v \in G^N$ i cada parell de jugadors simètrics $i, j \in N$,

$$\phi_i(v) = \phi_j(v)$$

- Additivitat (AD): Per cada $v, w \in G^N$,

$$\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$$

4.2.2 El valor de Shapley

Definició 4.24. El **valor de Shapley**, ϕ està definit per cada $v \in G^N$ i per cada $i \in N$, per

$$\phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Sigui $\Pi(N)$ el conjunt de totes les permutacions d'elements en N i, per cada $\pi \in \Pi(N)$, sigui $P^\pi(i)$ el conjunt de processadors de i sota l'ordre donat per π , és a dir,

$$j \in P^\pi(i) \Leftrightarrow \pi(j) < \pi(i)$$

Definició 4.25. Sigui $v \in G^N$. Sigui $\pi \in \Pi(N)$. El **vector de contribucions marginals associat a π** , $m^\pi(v) \in \mathbb{R}^N$, està definit, per cada $i \in N$, per

$$m_i^\pi(v) := v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))$$

Teorema 4.26. *El valor de Shapley és la única regla d'assignació en G^N que satisfà EF, JN, SIM, AD.*

Demostració.

- **Eficiència:**

Siguin $\forall i \in N$ i $\forall S \subseteq N \setminus \{i\}$, aleshores existeixen $|S|!(n - |S| - 1)!$ permutacions diferents, $\pi \in \Pi(N)$ per les que $P^\pi(i) = S$. Així doncs obtenim

$$\begin{aligned}\phi_i(v) &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v)\end{aligned}$$

Ara, podem calcular

$$\begin{aligned}\sum_{i \in N} \phi_i(v) &= \sum_{i \in N} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v) \\ &= \sum_{i \in N} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \sum_{i \in N} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} (v(N) - v(\emptyset)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} v(N) \\ &= \frac{1}{n!} n! v(N) = v(N)\end{aligned}$$

- **Jugador nul**

Hem vist abans que i és nul $\Leftrightarrow v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$, per tant, obtenim

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) = 0$$

- Simetria:

Abans hem vist que dos jugadors i, j són simètrics si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, per tant,

$$\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i, j\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\
&\quad + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i, j\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} v(S \cup \{i, j\}) \\
&= v(S \cup \{j\}) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i, j\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{j\}) - v(S)) \\
&\quad + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i, j\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} v(S \cup \{i, j\}) \\
&= v(S \cup \{i\}) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{j\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{j\}) - v(S)) \\
&= \phi_j(v)
\end{aligned}$$

- Additivitat: Es consideren els jocs v_1 i v_2 de n jugadors. Aleshores, $v_1 + v_2$ és un altre joc de n jugadors i es verifica que

$$\forall S \subseteq N, (v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$$

Per tant, per cada jugador $i \in N$ tenim que

$$\begin{aligned}
\phi(v_1 + v_2) &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} ((v_1 + v_2)(S \cup \{i\}) - (v_1 + v_2)(S)) \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v_1(S \cup \{i\}) + v_2(S \cup \{i\}) - v_1(S) - v_2(S)) \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v_1(S \cup \{i\}) - v_1(S) + v_2(S \cup \{i\}) - v_2(S)) \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v_1(S \cup \{i\}) - v_1(S)) \\
&\quad + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v_2(S \cup \{i\}) - v_2(S)) \\
&= \phi_i(v_1) + \phi_i(v_2)
\end{aligned}$$

4.3 Influència de la teoria de jocs en aliances

Altra vegada, sigui \mathcal{N} el conjunt de tots els partits amb representació d'escons. El problema de l'aliança és un problema cooperatiu. Definim un joc d'aliança complet $v_{FA}(\mathcal{C})$. Tots els partits estan dividits en una aliança \mathcal{C} i una contraaliança $\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$. L'aliança \mathcal{C} correspon al nombre d'escons obtinguts per l'aliança \mathcal{C} segons el mètode D'Hondt en el nou problema de repartiment. La contraaliança no és passiva. Opta per unir els seus vots per defensar els escons.

Penseu en un joc de guanys d'aliança complet

$$v_{FAG}(\mathcal{C}) = v_{FA}(\mathcal{C}) - \sum_{C_i \in \mathcal{C}} s_i, \quad (4.11)$$

en què s_i és la distribució d'escons pel mètode D'Hondt sense aliances. El guany d'escons $v_{FAG}(\mathcal{C})$ pot ser alt o baix sense restriccions. És un joc de suma zero

$$v_{FAG}(\mathcal{C}) + v_{FAG}(\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}) = 0. \quad (4.12)$$

Abans de formar una aliança, podem calcular un benefici (pèrdua) de jugar un joc d'aliança complet per a cada partit. El valor de Shapley⁵ (Shapley, 1953) del joc v_{FAG} és, a priori, una mesura del guany (pèrdua) esperat en escons. Una possible definició del valor de Shapley és la contribució marginal mitjana a una coalició obtinguda per un partit que arriba aleatòriament. Sigui σ la permutació dels partits i σ_i la col·locació de la part C_i en la permutació σ . La contribució marginal del partit C_i a la coalició $C_{\sigma(i)-1}^\sigma$ és $v(C_{\sigma(i)}^\sigma) - v(C_{\sigma(i)-1}^\sigma)$ on $C_{\sigma(i)-1}^\sigma$ és el conjunt dels $\sigma(i) - 1$ primers partits en la permutació σ (el conjunt de partits en \mathcal{N} que precedeixen el partit i en l'ordre σ). Tenint en compte totes les permutacions possibles amb la mateixa probabilitat, la fórmula per calcular el valor de Shapley per al partit C_i es deriva de la següent manera:

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \left[v(C_{\sigma(i)}^\sigma) - v(C_{\sigma(i)-1}^\sigma) \right] \quad (4.13)$$

Si es compleix la condició de prova d'aliança, aleshores la contribució marginal és igual a zero per a tots els partits i aliances.

Proposició 4.27. *9 Hi ha una seqüència de distribucions de vots i mides de cases de manera que el valor de Shapley $\phi_i(v_{FAG})$ no està acotat per sota.*

Demostració. Considerem un exemple amb $n = 2x + 1$ partits ($x \geq 3$). $n - 1 = 2x$ partits són iguals, i cadascun té $v_i = x + 1$ vots. Un partit té $v_j = 2x^2 - 4x$ vots. El nombre total de vots és igual a $V = 4x^2 - 2x$. El nombre total d'escons és igual a $S = 4x^2 - 4x - 1$. Cada partit obté un escó menys que el nombre de vots. La proporció de vot per escó d'ambdós partits són superiors a un. Els escons addicionals redueixen la proporció de vot per escó a un i, per tant, no està assignat. La distribució d'escons pel mètode D'Hondt és $s_i = x$ i $s_j = 2x^2 - 4x - 1$. Penseu en un joc complet de guanys d'aliança. Considereu una aliança de k partits iguals ($2 \leq k \leq 2x$). La condició suficient perquè l'aliança guanyi almenys $\lceil k/3 \rceil$ escons addicionals és

$$\frac{v_j + (2x - k)v_i}{s_j + (2x - k)s_i - \frac{k}{3} + 1} < \frac{kv_i}{ks_i + \frac{k}{3}},$$

$$\frac{2x^2 - 4x + (2x - k)x + (2x - k)}{2x^2 - 4x - 1 + (2x - k)x - \frac{k}{3} + 1} < \frac{kx + k}{kx + k/3}.$$

Si $x \geq 6$, aleshores es compleix per qualsevol $2 \leq k \leq 2x$.

Considerem l'aliança de $k \geq 0$ partits iguals i el partit j . La condició suficient per a que l'aliança no guanyi cap seient addicional és

$$\frac{v_j + kv_i}{s_j + ks_i + 1} < \frac{(2x - k)v_i}{(2x - k)s_i},$$

$$\frac{2x^2 - 4x + k(x + 1)}{2x^2 - 4x - 1 + kx + 1} < \frac{x + 1}{x}$$

Es compleix si $x \geq 3$. La contribució marginal del partit C_j a l'aliança \mathcal{C} amb k partits iguals ($2 \leq k \leq 2x$) en el joc complet de guanys d'aliança és negatiu, i és com a màxim a $-[k/3]$. La contribució marginal del partit C_j a l'aliança \mathcal{C} amb k parts iguals ($0 \leq k \leq 1$) en el joc de guanys de l'aliança total és igual a zero. El valor de Shapley de el partit C_j és com a màxim

$$\phi(v_{FAG}) \leq \frac{1}{2x + 1} \sum_{k=2}^{2x} \left(- \left[\frac{k}{3} \right] \right) \leq \frac{1}{2x + 1} \sum_{k=2}^{2x} \left(- \left[\frac{k}{3} \right] + 1 \right) = \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x \right)$$

El valor de Shapley de la part C_j no està acotat inferiorment.

5 Aplicacions didàctiques

En la formació com a docent de matemàtiques és necessari que la professora tingui un ampli coneixement sobre el tema que impartirà. És de vital importància per poder entendre i resoldre els dubtes que sorgeix a l'alumnat i ser capaç d'enfocar el problema des de diferents perspectives i punts de vista. És important també tenir en compte la manera en què es transmet el coneixement, ja que una sessió buida de contingut pot fer que els alumnes passin una bona estona però que no aprenguin res. Per altra banda, però, si la sessió està molt carregada d'informació, pot fer que els alumnes no assoleixin els coneixements i, conseqüentment, tampoc aprenguin res ni es creïn inquietuds.

A continuació presentaré una proposta educativa on les activitats proposades estan pensades per realitzar-se amb estudiants dels cursos compresos entre la 3r d'ESO i 2n de batxillerat. Aquesta seqüència didàctica està pensada per dur-se a terme en tres sessions didàctiques d'una hora de durada les dues primeres i de dues hores la última. A continuació explicaré com estan dividides i les activitats proposades en cadascuna.

L'activitat consta de diverses parts: es fa una introducció teòrica del concepte de sistema electoral i tot el que comporta, els tipus de sistemes electorals i quins mètodes s'utilitzen. Després tindriem la part pràctica i la introducció a les quotes i acabariem amb el concepte del valor de Shapley, on s'explica quina relació tenen els mètodes electorals amb la teoria de jocs.

5.1 Primera sessió: Què és un sistema electoral

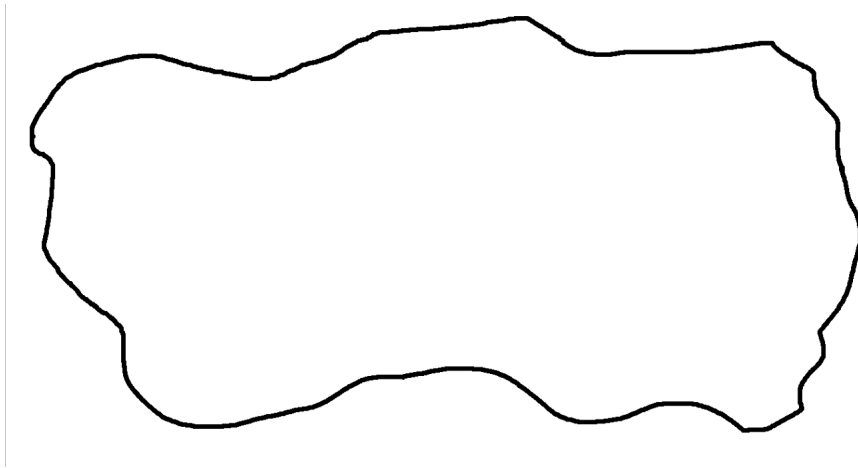
OBJECTIUS I DESCRIPCIÓ DE L'ACTIVITAT

- Entendre què és un sistema electoral.
- Quins elements els componen.
- Quins tipus de sistemes electorals hi ha.
- Sistemes proporcionals.
- Mètode D'Hondt.
- Mètode de Saint-Laguë.

DESENVOLUPAMENT DE LA SESSIÓ

En primer lloc, duc a terme una introducció del què és un sistema electoral; com es defineix, com es compon i el concepte d'escó.

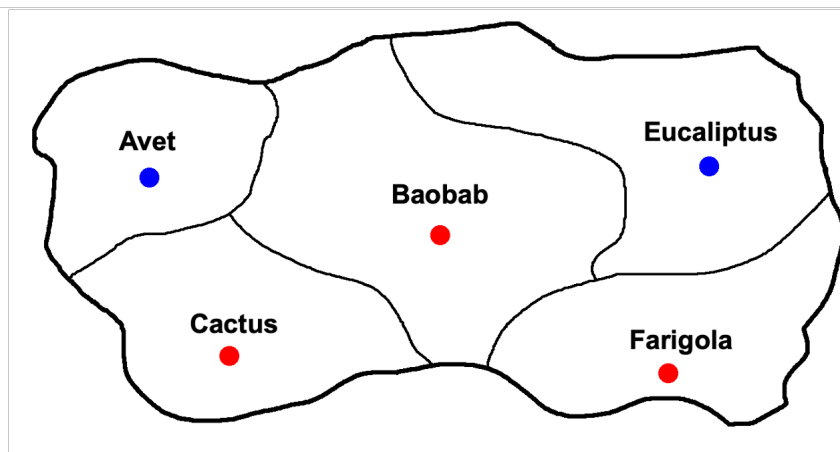
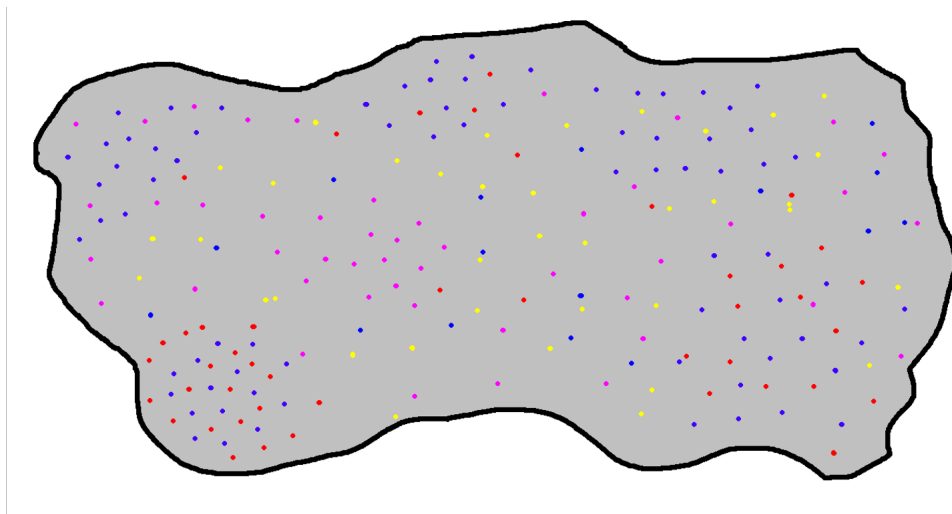
Tot seguit, presento el país inventat vist anteriorment; Sawpi.

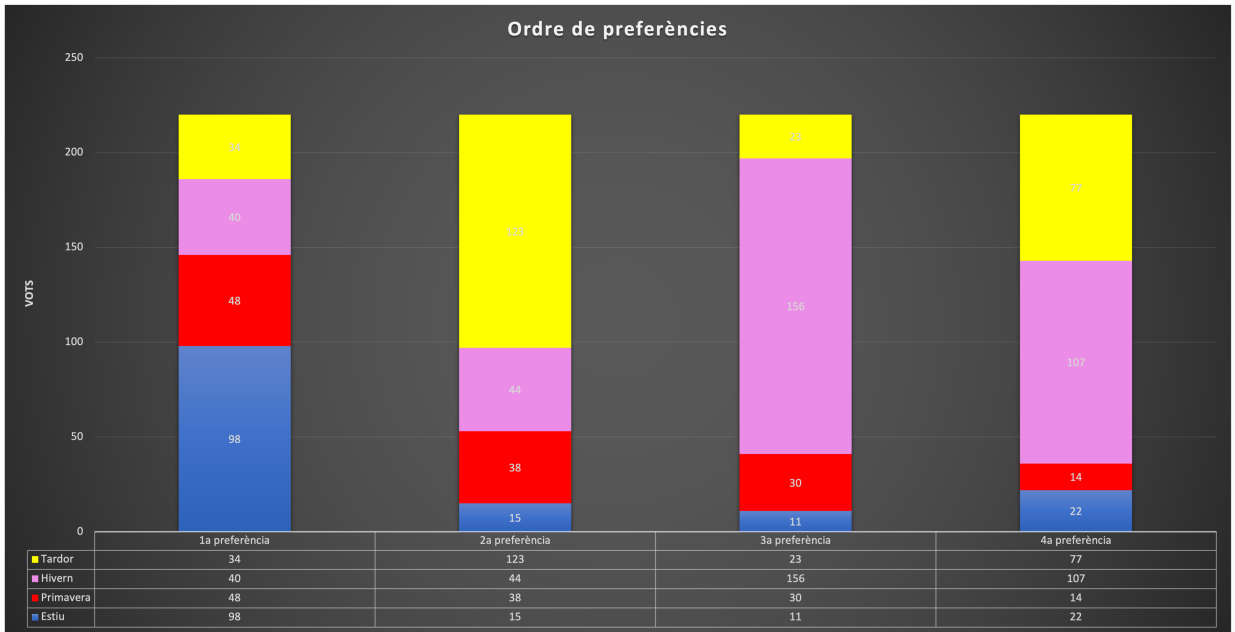


En aquest país el govern proposa uns dies vacances generals i els ciutadans han d'escollir en quina època volen que siguin.

Els partits que s'hi presenten seran les quatre estacions de l'any: Estiu, Primavera, Hiver i Tardor.

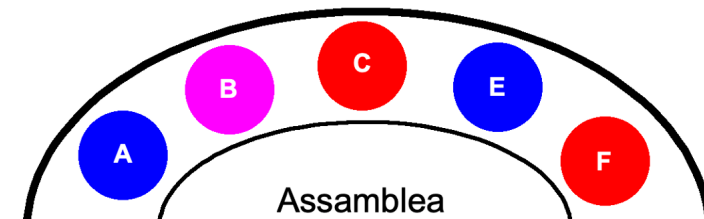
A partir dels resultats inventats, mostro els tres resultats diferents segons el mètode que s'esculli: Si fem el recompte tots els vots junts, si separem Sawpi en circumscripcions i si utilitzem el mètode de vot per preferència.



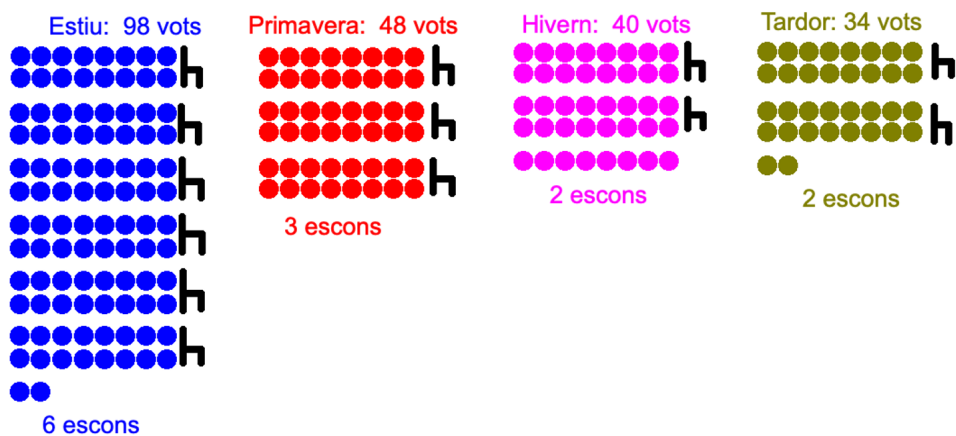


Amb aquests resultats, els alumnes han pogut veure que tot i tenir el mateix nombre de vots d'un sol país i sota les mateixes condicions, s'han produït tres resultats diferents, la qual cosa considerem que és una paradoxa.

A continuació explico que una assemblea no és un reflex fidel de la voluntat del poble i, en conseqüència, el desitg de la creació de sistemes proporcionals.



Procedeixo a explicar el problema que sorgeix en l'assignació d'escons



Explico els mètodes D'Hondt i de Saint-Laguë; en què consisteixen i com funcionen.

Hondt

	v	v/2	v/3	v/4	v/5	v/6	v/7	v/8	Escons
Estiu	98*	49*	33*	25*	19*	16*	14*	12	7
Primavera	48*	24*	16*	12*	9				4
Hivern	40*	20*	13*	10					3
Tardor	34*	17*	11						2
									16

Saint-Laguë

	v	v/3	v/5	v/7	v/9	v/11	v/13	v/15	Escons
Estiu	98*	33*	19*	14*	11*	9*	8*	6	7
Primavera	48*	16*	10*	6					3
Hivern	40*	13*	8*	6					3
Tardor	34*	11*	7*	4					3
									16

Finalment, fem una reflexió dels avantatges i dels inconvenients d'aquests últims.

PART PRÀCTICA

Es demana als estudiants que apliquin els mètodes D'Hondt i de Saint-Laguë en l'escrutini de vots d'unes eleccions produïdes a Sawpi on es presenten 7 partits i s'han de repartir 13 escons.

5.2 Segona sessió: Quotes i mètode de Hamilton

OBJECTIUS I DESCRIPCIÓ DE L'ACTIVITAT

- Què és una quota.
- Mètode de Hamilton.
- Tipus de quotes.

DESENVOLUPAMENT DE LA SESSIÓ

Fem un recordatori del que vam fer a la sessió anterior i utilitzem el mateix país inventat, Sawpi, per explicar el nou contingut.

Explicuem què és una quota i on s'utilitzen. Tot seguit introduïm el mètode de Hamilton juntament amb la seva implementació i explicuem les diferents quotes que se'n deriven.

Explicuem el funcionament de les res quotes juntament amb tres exemples i fem reflexions conjuntes dels possibles resultats que es poden produir.

Tipus de quotes

Quocient Hare	Quocient Droop	Quocient Imperiali
$q_H = \frac{m}{n}$	$q_D = 1 + \frac{m}{n+1}$	$q_I = \frac{m}{n+2}$

On n fa referència al nombre d'escons i m a la quantitat de vots.

Exemple de la quota de Hare

$n=10$ (el nombre d'escons) i $m=220$ (el nombre de vots). $q_H = \frac{m}{n} = \frac{220}{10} = 22$

Quocient Hare		quocient= 22				
Partit	ESTIU	PRIMAVERA	HIVERN	TARDOR	TOTAL	
Vots per partit (mi)	98	70	13	39	220	
Escons per quocient (ei)	4	3	0	1	8	
Vots per quocient (q*e_i)	88	66	0	22		
Vots de residu	10	4	13*	17*		
Escons per residu (e_i)			1	1	2	
Total d'escons (P_i)	4	3	1	2	10	

Exemple de la quota de Droop

$n=10$ (el nombre d'escons) i $m=220$ (el nombre de vots). $q_D = 1 + \frac{m}{n+1} = 1 + \frac{220}{10+1} = 21$

Quocient Droop		Quocient=21				
Partit	ESTIU	PRIMAVERA	HIVERN	TARDOR	Total	
Vots per partit (mi)	98	70	13	39	220	
Escons per quocient (ei)	4	3	0	1	8	
Vots per quocient (q*e_i)	84	63	0	21		
Vots de residu	14	7	13	18		
Escons per residu (e_i)	1				2	
Total d'escons (P_i)	5	3	0	2	10	

Exemple de la quota Imperiali

$n=10$ (el nombre d'escons) i $m=220$ (el nombre de vots). $q_I = \frac{m}{n+2} = \frac{220}{10+2} = 19$

Quocient Imperiali		Quocient=19				
Partit	ESTIU	PRIMAVERA	HIVERN	TARDOR	TOTAL	
Vots per partit (mi)	98	70	13	39	220	
Escons per quocient (ei)	5	3	0	2	10	
Vots per quocient (q*e_i)	95	57	0	38		
Vots de residu	3	13	13	1		
Escons per residu (e_i)					0	
Total d'escons (P_i)	5	3	0	2	10	

PART PRÀCTICA

Es demana als alumnes que facin els càlculs per obtenir les quotes de Hare, Droop i Imperiali dels exercicis de la sessió anterior. També se'ls demana que responguin a qüestions com ara:

- Comenta els resultats de les diferents repartiments segons les quotes. A què creus que és degut?
- Coneixies algun d'aquests mètodes electorals? Quin creus que és el "millor"? Per què?
- Fes una proposta de mètode proporcional explicant els beneficis i les desavantatges que podria tenir.

5.3 Tercera sessió: Valor de Shapley

Observació 5.1. Aquesta part no m'ha donat temps a realitzar-la amb els alumnes, però a continuació escric la proposta de treball.

OBJECTIUS I DESCRIPCIÓ DE L'ACTIVITAT

- Què és una coalició.
- Què és una funció característica.
- Quines són les possibles coalicions.
- Què és el valor de Shapley i caluclar-lo.

DESENVOLUPAMENT DE LA SESSIÓ Començarem la sessió fem un recordatori del que vam fer a les sessions anteriors per tal que els alumnes es puguin situar i no es perdin.

Tot seguit donarem les definicions bàsiques del que són els jocs cooperatius, una coalició, la funció característica i el valor de Shapley.

Per tal que tots ells puguin entendre-ho, les definicions que utilitzo són les següents:

Definició 5.2. *Els jocs cooperatius són jocs on els jugadors prenen les seves decisions conformant aliances amb altres jugadors amb la finalitat d'obtenir una recompensa col·lectiva la qual haurà de ser repartida posteriorment.*

Definició 5.3. *En un joc cooperatiu, format per un conjunt de J aliances, una **coalició**, S , és un subconjunt del conjunt de jugadors $S \subseteq J$, on S és una coalició qualsevol.*

Definició 5.4. *La **funció característica** descriu, de manera general, totes les possibles recompenses de totes les possibles coalicions. Utilitzarem la notació*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } \dots \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

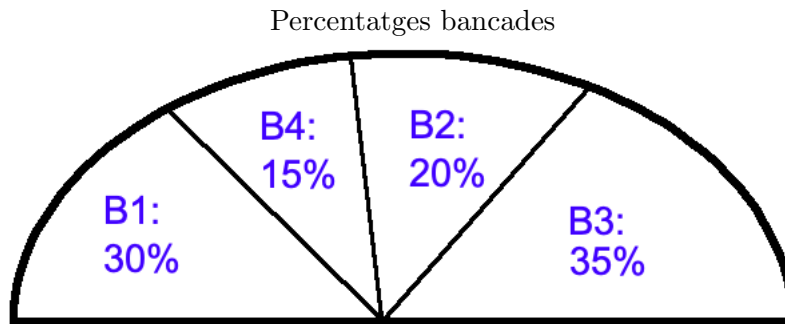
Definició 5.5. *El **valor de Shapley** és un valor que indica com es pot repartir la recompensa entre els membres d'una coalició. Calcula el poder de cada jugador dins de la coalició.*

Observació 5.6. El valor de Shapley no ens diu com s'ha de produir el repartiment de la recompensa.

Una vegada introduïdes les definicions, passem a fer un exemple pràctic mentre anem explicant altres conceptes.

5.3.1 Exemple pràctic

Suposem que s'està discutint un projecte de llei en el senat, on el senat està dividit en 4 bancades amb el següent repartiment de vots: La primera representa el 30% dels vots, la segona el 20%, la tercera el 35% i la quarta el 15%.



Per a que un projecte es converteixi en llei, és necessari que sigui aprovat almenys per un 50% dels vots. Com cap de les bancades individualment supera el 50% hauran de formar coalicions necessàriament.

En aquest cas, la funció característica és $v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } |S| \geq 50\% \\ 0, & \text{si } |S| < 50\% \end{cases}$

Les possibles coalicions que es poden fer són:

Percentatges bancades

Coalicions potencials	Mida de la coalició	Percentatge acumulat en la coalició	Recompensa de la coalició
{}	0	0'00%	0
{B ₁ }	1	0'30%	0
{B ₂ }		0'20%	0
{B ₃ }		0'35%	0
{B ₄ }		0'15%	0
{B ₁ , B ₂ }	2	0'50%	1
{B ₁ , B ₃ }		0'65%	1
{B ₁ , B ₄ }		0'45%	0
{B ₂ , B ₃ }		0'55%	1
{B ₂ , B ₄ }		0'35%	0
{B ₃ , B ₄ }		0'50%	1
{B ₁ , B ₂ , B ₃ }	3	0'85%	1
{B ₁ , B ₂ , B ₄ }		0'65%	1
{B ₁ , B ₃ , B ₄ }		0'80%	1
{B ₂ , B ₃ , B ₄ }		0'70%	1
{B ₁ , B ₂ , B ₃ , B ₄ }	4	1'00%	1

Procedim a explicar la fórmula per calcular el valor de Shapley:

$$\phi_i(v) := \sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \cdot [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

$\phi_i(v)$ és el símbol que utilitzem per assignar el valor de Shapley. La i indica el jugador a qui li estem calculant el valor de Shapley. v designa la funció característica del joc. El sumatori $\sum_{S \in \mathcal{S}}$, ens diu que s'han de sumar totes les coalicions S a les que pertany el jugador i .

La fracció $\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$ ens indica la quantitat de maneres en les que s'organitzen les coalicions amb una determinada quantitat d'integrants, dividit entre el nombre de formes en que es poden organitzar tots els jugadors. n indica el nombre total d'integrants del joc. k indica la mida de la coalició.

L'últim terme del sumatori, $[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$ ens indica la recompensa addicional que rep una coalició S segons l'aportació del jugador i : $v(S)$ fa referència a la recompensa de la coalició amb el jugador i i $v(S - \{i\})$ fa referència a la recompensa de la coalició sense el jugador i .

Calculem el valor de Shapley:

$$\begin{aligned} \phi_{B_1}(v) &:= \sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \cdot [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \\ &= \frac{(1-1)!(4-1)!}{4!} [0-0] + \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} [1-0] \\ &\quad + \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} [1-0] + \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} [0-0] \\ &\quad + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} [1-1] + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} [1-0] \\ &\quad + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} [1-1] + \frac{(4-1)!(4-4)!}{4!} [1-1] \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\phi_{B_1}(v) = \frac{1}{4} = 0'25 = 25\%$$

Per tant, el valor de Shapley de la bancada 1 és del 25%. Amb això, el que veiem és que tot i que la bancada 1 representava un 30% dels vots, realment té un poder òptim del 25% al formar una coalició.

Finalment, els proposo que resolguin dues exercicis: Respon a les dues preguntes següents:

- Per què el veritable poder de la B_1 és del 25% i no del 30%?
- Calcular el valor de Shapley per les altres.

6 Conclusions

Ensenyar matemàtiques té com a objectiu base fer que els alumnes aprenguin a buscar solucions de problemes freqüents en la vida quotidiana. Triar aquest tema m'ha ajudat a veure els diferents resultats que ofereixen cadascun dels sistemes tot i treballar amb el mateix conjunt de vots.

El projecte ha funcionat de manera excel·lent a dins de l'aula ja que ha despertat gran interès pel fet de ser un tema amb el qual poden tractar personalment i de manera directa. Les valoracions que he rebut han estat d'allò més satisfactòries amb la qual cosa puc afirmar que combinar exercicis mecànics amb exercicis de raonament els ha ajudat ser més propensos a proporcionar valoracions i reflexions bones i creatives de temes que influeixen a la ciutadania.

Aquest treball he pogut observar la comprensió de diferents alumnes de 4t d'ESO de les Escoles Betlem envers al caràcter matemàtic de les activitats proposades. Ha estat una experiència molt enriquidora i fantàstica per veure que es pot despertar fàcilment la curiositat dels alumnes per les matemàtiques quan es tracten temes amb els quals estan familiaritzats.

Referències

- [1] Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. educacio.gencat.cat/ca/inici/.
- [2] Tocinap: El Vot més Just
<https://www.upf.edu/documents/2846463/7201953/97-+El+vot+mes+just.pdf/>
- [3] Sistema Electoral. *Vikipèdia*
https://ca.wikipedia.org/wiki/Sistema_electoral
- [4] Apunts Sistemes Electorals. *astroosona*
<http://www.astroosona.net/web/Apunts/SistemesElectorals.pdf>
- [5] Generalitat de Catalunya. Portal Sistema Electoral
<https://www.parlament.cat/pcat/parlament/sistema-electoral/>
- [6] Agustí Bosch: *El Sistema Electoral - Vol I*
https://fundaciobofill.cat/uploads/docs/m/e/s/g/e/m/e/i/v/0917_0.pdf
- [7] Alabert Romero, A.: Sistemes Electorals. *Butlletí De La Societat Catalana De Matemàtiques*, Vol. 16, Núm. 2, mayo de 2002, p. 7-30
<https://raco.cat/index.php/ButlletisCM/article/view/149275>.
- [8] Konstantinov, M.M.. (2007): Mathematical Aspects of Electoral Systems. 946. 10.1063/1.2806039.
https://www.researchgate.net/publication/253176228_Mathematical_Aspects_of_Electoral_Systems
- [9] Karpov, A., Alliance incentives under the D'Hondt method. *Mathematical Social Sciences* (2014),
<http://dx.doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2014.12.001>
- [10] Cerdá, E.; Pérez, J.; Jimeno, J.L. Juegos Cooperativos. A: Teoría de Juegos, *Pearson Educación, 2004*.
- [11] Deegan, J.; Packel, E. W. A new index of power for simple n-person games. A: *International Journal of Game Theory*, 1978.
- [12] González-Díaz, J.; García-Jurado, I.; Fiestras-Janeiro, M. G. Cooperative Games. A: An Introductory Course on Mathematical Game Theory, *American Mathematical Society*, 2010.
- [13] Giménez-Pradales, J.M. Preliminares. A: Aportaciones al estudio de soluciones para juegos cooperativos, Programa de Doctorado de Matemática Aplicada UPC, 2005.