UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

El teorema de Bolzano

Autor: Enric Guimerà Vea

Director: Dr. Sergi Múria

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de juny de 2020

Abstract

Bolzano's theorem is indisputably a classic theorem in mathematical analysis. In this work we present its mathematical construction with its many applications, from the simple location of roots to numerical methods based on this result. I dedicate a section in addition to its possible generalizations where we will analyze Bolzano's theorem topologically. Finally I will propose a didactic part where we will see how to carry this theorem in the classroom and work on the mathematical language, an essential element in mathematics.

Resum

Indiscutiblement el teorema de Bolzano és un teorema clàssic en el món de l'anàlisi matemàtic. En aquest treball presentem la seva construcció matemàtica abordant moltes aplicacions, des de la localització simple d'arrels fins als mètodes numèrics basats en aquest resultat. Dedico un apartat addicionalment a les seves possibles generalitzacions on analitzarem topològicament el teorema de Bolzano. Finalment proposaré una part didàctica on veurem com portar aquest teorema a l'aula i treballar el llenguatge matemàtic, element essencial en matemàtiques.

Resumen

Indiscutiblemente el teorema de Bolzano es un teorema clásico en el análisis matemático. En este trabajo presentamos su construcción matemática abordando muchas aplicaciones, desde la localización simple de raíces hasta métodos numéricos basados en este resultado. Dedico un apartado adicionalmente a sus posibles generalizaciones dónde analizaremos topológicamente el teorema de Bolzano. Finalmente propondré una parte didáctica dónde veremos como llevar este teorema en el aula y trabajar el lenguaje matemático, elemento esencial en matemáticas.

Agraïments

En primer lloc, vull agrair al meu tutor Sergi Múria per tot el seu suport durant el treball i tots els consells que m'ha brindat. Realitzar un treball d'aquestes dimensions sempre es presenta com un repte; sense supervisió d'un tutor és una tasca complexa d'organitzar i executar. Gràcies a la supervisió m'ha sigut molt més fàcil.

En segon lloc, vull mencionar que aquest treball ha estat complementat pels meus amics Natxo, Cristina i Víctor. El seu suport i la seva filosofia de treballar ha estat una font d'inspiració per mi. A més a més, m'han transmès el rigor necessari per escriure aquest treball molt més satisfactòriament. I no puc oblidar-me de l'Álvaro, gràcies a ell ha estat molt més senzill escollir tema i m'ha servit com a referència.

Finalment agrair a la meva família i tots aquells que m'han ajudat a avançar en el bell camí de les matemàtiques.

Índex

1 Introducció

L'objectiu d'aquest treball és abordar el teorema de Bolzano des de dues perspectives diferents: en primer lloc, incidir profundament en el discurs purament matemàtic que hi ha darrera d'aquest teorema, vegent en detall les definicions formals necessàries que hi ha darrera les hipòtesis del teorema de Bolzano fins arribar a les seves conseqüències més importants.

La conseqüència més important i immediata és el mètode de la bisecció, un mètode numèric iteratiu per trobar zeros a funcions. Podem dir que és un mètode que està lluny de ser el més eficient i resoldre correctament el problema de trobar zeros; malgrat això, dóna una idea molt interessant de com es podria abordar el problema de trobar zeros i considero que tot matemàtic l'hauria de conèixer sens falta. Addicionalment, presento altres mètodes númerics relacionats amb el mètode de la bisecció per donar més perspectiva i presentar més aplicacions del teorema de Bolzano.

Com a objectiu dins d'aquesta secció del treball hem de considerar les possibles generalitzacions del teorema i com arribar-hi. El teorema de Bolzano és complicat de generalitzar ja que es basa en propietats intrínsiques al conjunt $\mathbb{R}$ però que no tenen perquè ser certes en $\mathbb{R}^n$ si $n > 1$. M'estic referint per exemple en la propietat topològica de que tot conjunt connex contingut en $\mathbb{R}$ ha de ser necessàriament un interval; això en $\mathbb{R}^n$ si $n > 1$ no té perquè ser cert. Així doncs primerament farem una reflexió inicial sobre com podem generalitzar el teorema i presentarem els teoremes els quals es poden considerar generalitzacions.

En segon lloc, com a segon propòsit fonamental del treball, tinc fer una proposta real a l'aula de com treballar aquest teorema i veure què pot aportar sobre el temari estàndard de 1r de Batxillerat. En la meva experiència personal, puc afirmar que fins a la universitat no vaig mai arribar a veure un teorema escrit curosament, amb totes les hipòtesis i conseqüències escrites clarament. Considero que va ser una mancança important i la meva proposta didàctica vol abordar aquesta possible mancança a través del teorema de Bolzano. Considero que és el teorema ideal per portar-lo a l'aula i per treballar el llenguatge matemàtic ja que el resultat és molt intuïtiu i les hipòtesis i conseqüències són relativament senzilles.

Per dur a terme aquestes idees comentades anteriorment he preparat uns apunts sobre el teorema de Bolzano on exposo alguns problemes que no poden resoldre algebraicament i la proposta és veure el teorema de Bolzano per tal d'abordar i solucionar aquests problemes. Aquests apunts (amb problemes inclosos) i les respectives solucions estan adjuntades a secció dedicada a la proposta didàctica.

Finalment, vull esmentar que desitjo que aquest treball serveixi com a guia i referència a tota aquella persona que vol profunditzar sobre aquest teorema. Aspiro que aquest treball plasmi de forma inequívoca tota la importància d'aquest teorema en les diverses àrees on es pot englobar; àrees com l'anàlisi matemàtic, la matemàtica aplicada o fins i tot la topologia.

Anirem desgranant totes aquestes qüestions poc a poc al llarg de tot el treball.

2 Context històric

2.1 Biografia

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano va néixer el 5 d'octubre de 1781 a Praga, Bohèmia (actual República Txeca). El protagonista d'aquesta biografia, va néixer en una família humil a la part més antiga de la ciutat de Praga, sent el quart dels dotze germans. Tot i aquest fet, només van arribar a l'edat adulta 2 dels 12 germans.

L'educació que va rebre Bolzano va ser un fet clau en la seva vida. Va ser influenciat pel seu pare en la idea de la importància de tenir cura dels demés. Al 1796 Bolzano es va inscriure a la Facultat de Filosofia de la Universitat de Praga. A la tardor del 1800, contra els desitjos del seu pare, va iniciar tres anys d'estudi teològic a la Universitat Carolina de Praga. Va obtenir el seu doctorat el 1804 escrivint una tesi donant la seva visió de les matemàtiques i el que constitueix una prova matemàtica correcta. Dos dies després de doctorar-se, Bolzano va ser ordenat sacerdot romà. Cal esmentar que la seva mare va ser una devota catòlica, fet que probablement va tenir una forta influència en el seu fill Bernard.

Bolzano va participar en dues competicions per a càtedres a la Universitat Carolina de Praga. Una va ser per a la càtedra de matemàtiques que va quedar vacant degut a la mort de Stanisław Vydra; l'altra càtedra vacant era la nova càtedra de filosofia de la religió que acabava d'establir l'emperador Franz. Bolzano va aconseguir el primer lloc en ambdues competicions, però la universitat va preferir donar-li la càtedra de filosofia de la religió; d'aquesta manera van poder donar la càtedra de matemàtiques a Ladislaw Jandera ja que havia substituït anteriorment Vydra durant la seva malaltia entre 1801 i 1804. Després d'algunes pressions del govern austríac, el 1819 Bolzano va ser acusat d'heretgia i sota arrest domiciliari se li va prohibir publicar. Malgrat la censura del govern, els seus llibres es van publicar fora de l'Imperi austríac i Bolzano va seguir escrivint i ocupant un important paper dins de la vida intel·lectual del seu país.

Després de 1817, Bolzano va estar molts anys sense publicar res relacionat amb les matemàtiques. Entre 1821 i 1825 va ser jutjat per l'Església i malgrat la seva forta defensa de les seves opinions, va ser obligat a rectificar les seves suposades heretgies. Donat que es va negar a cedir en els seus ideals, va haver de renunciar a la seva càtedra.

Des del 1823 havia passat els estius vivint a prop del poble de Techobuz, al sud de Bohèmia, a la finca dels seus amics Josef i Anna Hoffmann, mentre passava l'hivern vivint a Praga amb el seu germà Johann. JJI Hoffmann va ser un matemàtic que va revisar diverses de les obres anteriors de Bolzano. Entre 1830 i 1841 va viure durant tot l'any amb els Hoffmanns, tenint molt temps per dedicar-se a l'estudi. Degut a aquest fet al 1837 va publicar *Wissenschaftslehre*, un intent d'elaborar una teoria del coneixement i de la ciència completa. Quan Anna Hoffmann es va emmalaltir el 1841, Bolzano i els Hoffmanns es van traslladar a Praga on tots van viure amb Johann Bolzano (Anna va morir el 1842). Bolzano tornà a ser membre actiu de la Royal Bohemian Society of Sciences i fou president durant el 1842-43. Va patir problemes respiratoris durant la major part de la seva vida i es va fer més greu a mesura que es va fer gran. L'hivern de 1848 va contreure un refredat que, donat el mal estat dels seus pulmons, va provocar la seva mort.

2.2 Obres destacades i contribucions

Bolzano va fer un gran nombre de contribucions originals i valuoses en matemàtiques. De fet, va ser un dels primers matemàtics de la història en dotar de rigor l'anàlisi matemàtica (que autors com Carl Friedrich Gauss treballaven amb poc rigor en les demostracions, fet que portava a resultats, sense saber-ho llavors, falsos). Amb aquesta finalitat, Bolzano va publicar *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* (1810), *Der binomische Lehrsatz* (1816) i *Rein analytischer Beweis* (1817). Aquesta manera de fer, però, no va ser posada en valor fins cinquanta anys després, quan cridaren l'atenció de Karl Weierstrass.

En els fonaments de l'anàlisi va contribuir a la introducció rigorosa de la definició (ϵ, δ) de límit. També fou el primer en descobrir la completesa dels nombres reals. La noció de límit per Bolzano era similar a l'actual. Bolzano també va donar la primera prova purament analítica del Teorema Fonamental de l'Àlgebra, demostrat per primera vegada per Gauss a partir de consideracions geomètriques. També donà la primera demostració purament analítica del Teorema del valor intermedi (conegut també com a Teorema de Bolzano), el qual és el que es basa aquest treball.

Bolzano és conegut també pel Teorema de Bolzano-Weierstrass, que Karl Weierstrass va desenvolupar de manera independent a Bolzano anys després que ell i que fou anomenat "Teorema de Weierstrass" fins que la demostració anterior feta per Bolzano fou redescoberta.

Figura 1: Retrat de Bernard Bolzano

3 Definicions i resultats previs al teorema de Bolzano

Començarem donant unes definicions i uns resultats sobre límits i continuïtat necessaris per arribar a enunciar i demostrar el teorema de Bolzano amb detall.

3.1 Definicions i resultats de límits

Definició. *Sigui $D \subseteq \mathbb{R}$ i sigui $f : D \to \mathbb{R}$. Considerem $a \in D$. El límit de f quan tendeix a a és $l \in \mathbb{R}$ si per tot $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que:*

$$0 < |x - a| < \delta,\ x \in D \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Ho denotarem com $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. La darrera implicació també es pot expressar en forma d'intervals, la qual cosa en resulta:

$$x \in D \cap (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} \Longrightarrow f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

A vegades ens interessarà com es comporta una funció únicament per un costat. Podem definir conseqüentment els límits laterals.

Definició. *Diem que el límit de f quan tendeix a a per la dreta és $l \in \mathbb{R}$ si per tot $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que:*

$$x \in (a, a + \delta),\ x \in D \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Ho denotarem $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

Anàlogament podem definir el límit per l'esquerra.

Definició. *Diem que el límit de f quan tendeix a a per l'esquerra és $l \in \mathbb{R}$ si per tot $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que:*

$$x \in (a - \delta, a),\ x \in D \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Ho denotarem $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.

Enunciem i provem un resultat molt important a l'hora de treballar amb els límits que ens serà útil per treballar posteriorment amb la continuïtat.

Teorema. *Sigui $D \subseteq \mathbb{R}$ i siguin $f, g : D \to \mathbb{R}$ funcions. Considerem $x_0 \in D$ pel qual tenim*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$

Aleshores tenim que se satisfan les següent propietats:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = a + b$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$

Demostració. Anem a demostrar en detall el resultat.

Propietat i) L'objectiu és demostrar que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) + g(x) - (a + b)| < \epsilon.$$

Per aconseguir-ho, prenem $\epsilon^* = \frac{\epsilon}{2}$ i tenim que existeixen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tals que si

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - a| < \epsilon^*$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - b| < \epsilon^*$$

Aleshores escollint $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ tenim que per $0 < |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) + g(x) - (a + b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \epsilon^* + \epsilon^* = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

on la primera desigultat és conseqüència de la desigualtat triangular i per tant acabem de provar que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = a + b$$

Propietat ii) El que ara ens disposem a veure és

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) \cdot g(x) - (a \cdot b)| < \epsilon$$

sabent que

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_1 \mid 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - a| < \epsilon_1$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_2 \mid 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |g(x) - b| < \epsilon_2$$

De forma similar a la demostració de la propietat anterior, escollim $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Aleshores obtenim,

$$|f(x) \cdot g(x) - a \cdot b| = |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot b + f(x) \cdot b - a \cdot b| \leq |b||f(x) - a| + |f(x)||g(x) - b|$$

on la desigualtat ve donada de novament per la desigualtat triangular. Ara, si hem escollit ϵ_1 de forma que $|b| \cdot \epsilon_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$, tenim que

$$|b||f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Escollint ϵ_1 de forma que $\epsilon_1 \leq 1$ tenim que

$$|f(x) - a| < \epsilon_1 \leq 1 \Longrightarrow |f(x)| < |a| + 1,$$

així que

$$|f(x)||g(x) - b| \leq (|a| + 1)|g(x) - b| < (|a| + 1)\epsilon_2.$$

Per últim, és suficient prendre ϵ_2 com

$$\frac{1}{2} \frac{\epsilon}{|a| + 1}$$

per obtenir $|f(x)||g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Per tant amb la construcció que hem fet obtenim:

$$|f(x) \cdot g(x) - a \cdot b| < \epsilon,$$

la qual cosa prova el que buscàvem: $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$.

$\square$

3.2 Definicions i resultats de continuïtat

Definició. *Considerem una funció* $f : D \to \mathbb{R}$*, on* $D \subseteq \mathbb{R}$*. Direm que una funció* f *és contínua en un punt* $a \in D$ *si per* $\forall \epsilon > 0$*, existeix* $\delta > 0$ *tal que:*

$$x \in D \cap I(a, \delta) \Longrightarrow f(x) \in I(f(a), \epsilon).$$

De forma forma equivalent tenim que f *és contínua en* $a \in D$ *si existeix* $\lim_{x \to a} f(x)$ *i a més* $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Definició. *Si* f *no compleix la condició de continuïtat en* a *direm que és discontínua en el punt* $a \in D$*.*

Observació. *Direm que* f *és contínua si és contínua per tot punt del seu domini, és a dir, si és contínua* $\forall a \in D$*. Denotarem el conjunt de funcions contínues en* D *com* $\mathcal{C}(D)$*. Per tant si* f *és contínua en* D *tenim que* $f \in \mathcal{C}(D)$*.*

Farem un anàlisi més exhaustiu per mostrar resultats importants sobre la continuïtat.

Teorema. *Siguin* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *funcions contínues en* $a \in D$*. Aleshores tenim que f+g, f-g, f·g són contínues en a. Si a més g(x)* $\neq$ *0,* $\forall x \in D$ *(o a tot entorn de a), aleshores f/g és contínua en a.*

Teorema. *Considerem la funció* $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $g : E \to \mathbb{R}$ *amb la propietat que* $f(D) \subseteq E$*. Si* f *és contínua al punt* $a \in D$ *i* g *és contínua al punt* $f(a) \in E$*, aleshores la funció composta* $g \circ f$ *és contínua al punt* $a \in D$*.*

Demostració. Per hipòtesi sabem que g és contínua al punt $f(a)$. Així doncs tenim que per a tot $\epsilon >$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$y \in E \cap I(f(a), \delta)) \implies g(y) \in I(g(f(a)), \epsilon)$$

Per continuïtat de f al punt a, fixat $\delta > 0$ existeix $\eta > 0$ tal que

$$x \in D \cap I(a, \eta) \implies f(x) \in I(f(a), \delta)$$

Aleshores si $x \in D \cap I(a, \eta)$ podem prendre $y = f(x)$ a la primera implicació i en conseqüència deduïm que $g(f(x)) \in I(g(f(a)), \epsilon)$ la qual cosa és el que volíem provar. $\square$

Exemple. Mostrarem mitjançant la definició formal de continuïtat que la funció $f(x) = 3x - 5$ és contínua en $x_0 = 2$. De fet, donat que f és un polinomi, és contínua en tot el seu domini, el qual és $\mathbb{R}$.
Així doncs tenim que f és contínua en $x_0 = 2 \Longleftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |x - 2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(2)| < \epsilon$$

Per tant hem de trobar un $\delta > 0$ per un $\epsilon > 0$ arbitrari tal que si $|x - 2| < \delta$ aleshores tenim que $|(3x - 5) - 1| < \epsilon$. Observem que:

$$|f(x) - f(2)| = |(3x - 5) - 1| = |3(x - 2)| = 3|x - 2|$$

Prenem un x tal que $|x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$, obtindrem que

$$|(3x - 5) - 1| = 3|x - 2| < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Per tant prenent $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ tenim el que volíem demostrar. *Notem que la condició* $0 < |x - x_0| < \delta$ *es pot simplicar per* $|x - x_0| < \delta$ *ja que si* $x = x_0$ *es compleix clarament la condició de que* $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ *ja que* $|f(x_0) - f(x_0)| = 0$ *i* $\epsilon > 0$*.*

3.3 Teoremes fonamentals relatius a la continuïtat

El primer teorema fonamental que veurem fa referència a l'existència de màxims i mínims d'una funció. Així doncs mostrem el conceptes necessaris per entendre què afirma el teorema.

Definició. *Considerem una funció $f : D \to \mathbb{R}$, on $D \subseteq \mathbb{R}$. Direm que f assoleix un màxim absolut al punt $a \in D$ si $f(x) \leq f(a)$ per a tot $x \in D$. Anàlogament diem que f assoleix un mínim absolut en $a \in D$ si $f(x) \geq f(a)$ per a tot $x \in D$.*

Amb aquest concepte previ podem enunciar el Teorema de Weierstrass.

Teorema de Weierstrass. *Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Aleshores f és acotada i assoleix un màxim i un mínim absolut.*

Per demostrar el teorema de Weierstrass enunciarem el teorema de Bolzano-Weierstrass i donarem una definició bàsica per entendre'l, però no el demostrarem perquè no és l'objectiu de la construcció matemàtica que estem fent.

Definició. *Sigui $\{a_1, a_2, ...\}$ una successió de nombres reals i*

$$n_1 < n_2 < ...$$

una successió de nombres naturals estrictament creixent. La successió $\{a_{n_i}\}$, el terme i-èssim de la qual és a_{n_i}, s'anomena parcial de $\{a_n\}$.

Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Tota successió fitada de nombres reals té una successió parcial convergent.*

Amb aquests conceptes passem a demostrar el Teorema de Weierstrass.

Demostració. El primer pas de la demostració serà veure que la funció està acotada. Així doncs suposem el contrari: aleshores tenim que hi ha punts x_n, $a \leq x_n \leq b$ tals que $|f(x_n)| > n$. Pel teorema de Bolzano-Weierstrass tenim que existeix una successió parcial $\{x_{n_i}\}$ convergent cap a un límit $l \in [a,b]$. Per la continuïtat de f en el punt l la successió $\{f(x_{n_i})\} \longrightarrow f(l)$, però això és impossible ja que $\{f(x_{n_i})\}$ no és fitada.
Conseqüentment hem vist que la funció sempre està acotada tant superiorment com inferiorment i per tant $f(D)$ tindrà suprem. Considerem aquest suprem; sigui $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$. Ara cal veure que aquest suprem s'assoleix en algun punt del domini. Per aconseguir-ho, considerem la successió $\{a_n\}$ de manera que $a \leq a_n \leq b$ i

$$M - \frac{1}{n} \leq f(a_n) \leq M$$

Usant novament el teorema de Bolzano-Weierstrass ens dóna el resultat tal que existeix una successió parcial $\{a_{n_i}\}$ amb límit c. Com que f és contínua en c, $\{f(a_{n_i})\} \longrightarrow f(c)$ i de les condicions anteriors deduïm que $f(c) = M$. Hem arribat en conseqüència al que volíem provar, és a dir, que c és màxim de la funció f. De forma anàloga es prova que la funció assoleix un mínim. $\square$

Ara veurem un altre resultat molt interessant sobre la continuïtat que ens donarà una caracterització fonamental de les funcions contínues. El teorema de conservació del signe afirma que donada una funció $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que és contínua en p, on $p \in D$ i $f(p)$ és positiva, aleshores existeix un entorn obert del punt p de radi δ en el qual la funció és positiva. És anàleg considerant que $f(p) < 0$. Formalment tenim:

Teorema de la conservació del signe. *Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua tal que és contínua en p, amb $p \in D$ i complint $f(p) > 0$. Aleshores $\exists \delta$ tal que per tot x tal que $x \in D$ i $|x - p| < \delta$ aleshores $f(x) > 0$. Anàlogament ho tenim per $f(p) < 0$.*

Demostració. Les hipòtesis del teorema ens asseguren que f és contínua en p. Conseqüentment tenim que $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) > 0$. Ara usarem la definició de límit. En efecte,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Prenem ara $\epsilon = \frac{f(p)}{2}$. Aleshores $\exists \delta > 0$ tal que

$$x \in D \land |x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \frac{f(p)}{2}$$

Això és equivalent a

$$-\frac{f(p)}{2} < f(x) - f(p) < \frac{f(p)}{2}$$

Ara sumant $f(p)$ a la desigualtat obtenim:

$$\frac{f(p)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(p)$$

i com per hipòtesi teníem que $f(p) > 0$ tenim també que $\frac{f(p)}{2} > 0$ i arribem al que volíem: $f(x) > 0$. □

Teorema de Bolzano. *Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua amb $f(a) \cdot f(b) < 0$. Aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Donat que aquest és teorema central i fonamental del treball, donarem dues demostracions possibles d'aquest teorema. La primera estarà basada en el mètode de la bisecció, i l'altre es basarà en una propietat de la continuïtat. Més endavant aprofundirem en el mètode de la bisecció ja que és una conseqüència directa i important del teorema de Bolzano.

Passem a veure doncs la primera demostració:

Demostració. La idea és crear una successió d'intervals cada cops més petits que convergeixin a l'arrel. Vegem-ho amb detall: anomenem a l'interval $[a, b]$ per I_0. Aleshores el dividim en dos intervals d'igual longitud. Per fer-ho considerem el punt mig de l'interval I_0 que ve donat per $\frac{(a+b)}{2}$. Aquí poden succeir dues situacions: si el punt mig la funció val zero la demostració ja ha acabat perquè hem demostrat que hi ha un punt en l'interval on la funció assoleix un zero. En cas contrari, construïm I_1 prenent la meitat de l'interval on la funció té signes diferents als extrems i anem reiterant el procés. D'aquesta manera arribem a dues situacions possibles novament: la primera és que en un nombre finit de passos arribem a un punt on el qual la funció assoleix el 0 o bé hem construït una successió d'intervals tancats de la següent forma:

$$I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq I_2 \ldots$$

amb la propietat que f pren valors de diferent signe als extrems de cada interval I_n. Si prenem un punt x_n de cada I_n aconseguim una successió de Cauchy que tindrà com a límit l, tal que $l \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. De fet encara podem afirmar més, l és l'únic punt tal que

$l \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Per acabar la demostració cal veure finalment el que afirma el teorema: $f(l) = 0$. Per veure-ho suposem $f(l) > 0$, en tot entorn $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ prendria únicament valors positius la qual cosa no és possible ja que per un n suficientment gran tenim que $I_n \subseteq (l-\epsilon, l+\epsilon)$ i tenim que f pren valors oposats als extrems de I_n per una n arbitrària. De forma completament anàloga es raona que no es pot donar que $f(l) < 0$. □

Veiem ara una altra demostració possible del teorema de Bolzano:

Demostració. Fem notar un fet important: si $f(x) > 0$ per algun $x \in (a, b)$, aleshores existeix un ϵ de forma que $0 < \epsilon < f(x)$. També ho podem raonar anàlogament: si $f(x) < 0$ per algun $x \in (a, b)$, aleshores existeix un ϵ de forma que $0 > -\epsilon > f(x)$. Per la definició de continuïtat tenim l'existència d'un $\delta > 0$ tal que per y a l'interval $(x-\delta, x+\delta)$ es verifica $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ i per tant $f(y) > 0$ (respectivament tindríem $f(y) < 0$). Als extrems a i b tindrem intervals $[a, a + \delta)$ on f serà negativa i $(b - \delta, b]$ serà positiva (es podria raonar l'altre cas anàlogament).
Considerem ara $x^* = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$. Com que suficientment a prop de a, f és negativa i suficientment aprop de b tenim que f és positiva, es dedueix que $x^* \in (a, b)$. Caldrà veure finalment el que afirma el teorema: $f(x^*) = 0$. En efecte, si $f(x^*) > 0$ se'n deduiria $f(x) > 0$ per $x \in (x^* - \delta, b]$ contradient la definició de x^* com la mínima cota superior dels valos de x dels quals f és negativa. Per altra banda si $f(x) < 0$, aleshores tindríem que $f(x^* + \delta)$ també seria negativa, en contra del fet que x^* és cota superior dels valors de x pels quals f és negativa. D'aquí deduïm finalment que $f(x^*) = 0$. □

Com a corol·lari directe del teorema de Bolzano podem enunciar el següent resultat.

Teorema del Valor intermig. *Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i sigui z un valor entre $f(a)$ i $f(b)$. Existeix $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$.*

Demostració. Definim la funció $g(x) = f(x) - z$. En cas que $g(a) = 0$ o $g(b) = 0$ ja hem acabat. En cas contrari apliquem el teorema de Bolzano. Clarament g és una funció contínua i a més tenim que $g(a)$ i $g(b)$ tenen signes diferents ja que z està entre $f(a)$ i $f(b)$ de tal forma que obtenim que $\exists\, c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$ el qual resol el problema que volíem. □

El teorema de Bolzano té també una altra conseqüència interessant que ve donada pel següent resultat:

Teorema. *Sigui $D \neq \emptyset$ i $D \subseteq \mathbb{R}$ amb la propietat addicional de que si $a, b \in D$ tenim que $[a, b] \subseteq D$. Aleshores tenim que D ha de ser necessàriament d'una de les següents formes:*

i) D és un interval obert, és a dir, és de la forma (c, d).

ii) D és un interval tancat, és a dir, és de la forma $[c, d]$.

iii) D és un interval semiobert, és a dir, de la forma, $[c, d)$ o bé $(c, d]$.

iv) D és una semirecta oberta, és a dir, de la forma $(-\infty, d)$ o bé $(c, +\infty)$.

v) D és una semirecta tancada, és a dir, de la forma $(-\infty, d]$ o bé $[c, +\infty)$.

vi) D és tota la recta, és a dir, $D = \mathbb{R}$.

Demostració. Per demostrar el resultat, considerem $c = \inf D$ i $d = \sup D$. En cas que D no sigui acotat inferiorment considerem $c = -\infty$ i anàlogament considerem $d = +\infty$ en cas que D no estigui acotat superiorment.

L'objectiu ara serà veure que D és un interval d'extrems c i d. Si $e \in (c, d)$, tenim que existeixen $c_1, d_1 \in D$ tals que $c < c_1 < e < d_1 < d$, per ser $c = \inf D$, $d = \sup D$. Aleshores tenim que $e \in [c_1, d_1] \subseteq D$ i $(c, d) \subseteq D$.

D'altra banda, $\nexists a < c$ tal que $a \in D$ i $\nexists d > c$ tal que $b \in D$, d'on es dedueix que D ha de ser dels tipus necessàriament enunciats. $\square$

Degut a aquest resultat, podem enunciar el teorema de Bolzano d'una forma diferent: Si f és una funció definida en un conjunt D amb la propietat que s'ha donat al teorema anterior i tenim que $a, b \in D$ i z és un punt entre $f(a)$ i $f(b)$, llavors z està també en la imatge de f. També podem afirmar de forma equivalentment que el conjunt imatge té aquesta mateixa propietat que D i és del tipus anteriorment esmentats.

4 Aplicacions del teorema de Bolzano

4.1 Aplicacions immediates

L'objectiu d'aquesta secció és veure les aplicacions d'aquest teorema. Aquest teorema és purament d'anàlisi però té efectes en el problema clàssic de trobar zeros a funcions ja que com hem dit anteriorment se'n deriva un mètode numèric per trobar zeros de funcions, concretament, el mètode de la bisecció. Començarem veient la primera aplicació totalment immediata la qual és demostrar l'existència de zeros a funcions. Vegem-ho en un exemple.

Exemple 1 Considerem la funció $f(x) = x^2 - cos(x) - 8$. Volem demostrar l'existència d'almenys un zero en l'interval $[-3, -2]$. Per fer-ho farem servir el teorema de Bolzano. El primer que ens demana el teorema de Bolzano és que la funció sigui contínua. Clarament la funció que hem escollit és contínua ja que x^2, $cos(x)$ i la funció constant 8 són contínues. Cal veure que a l'extrem dels intervals prenen signes diferents:

$$f(-3) = (-3)^2 - cos(-3) - 8 \simeq 1.989$$

$$f(-2) = (-2)^2 - cos(-2) - 8 \simeq -3.583$$

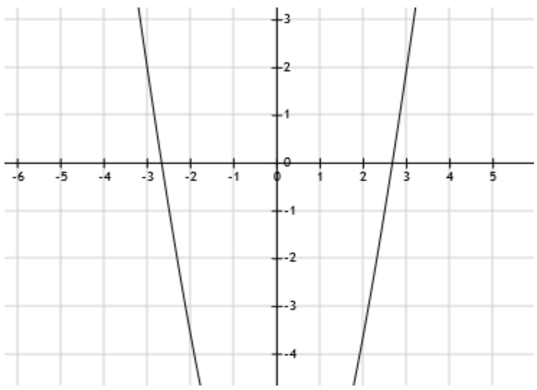
Aplicant el teorema obtenim que existeix almenys un $c \in (-3, -2)$ tal que $f(c) = 0$. A més a més, concretament en aquest exemple estem treballant amb una funció parella, és a dir, compleix que

$$f(x) = f(-x), \ \forall x \in D_f = \mathbb{R}$$

ja que

$$f(x) = x^2 - cos(x) - 8 = (-x)^2 - cos(-x) - 8 = f(-x)$$

Degut aquesta propietat i al teorema de Bolzano podem afirmar que existeix també almenys una arrel en l'interval $(2, 3)$. Tot això que hem provat analíticament ho podem visualitzar gràficament:



Il·lustrarem amb un altre exemple que se'n poden deduir resultats immendiats i més generals. Fins i tot aquest exemple el podríem considerar com un corol·lari del teorema de Bolzano.

Exemple 2 Volem provar que tota equació polinòmica

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

té solució demanant que n sigui senar. Evidentment $n \in \mathbb{N}$. Ho provarem usant el teorema de Bolzano. Donat que $p(x)$ és un polinomi és continu en tot el seu domini el qual és $\mathbb{R}$. Així doncs només cal veure que pren signes diferents en diferents punts del seu domini. En efecte, podem veure que

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_0}{x^n}) = +\infty$$

D'aquest fet se'n dedueix necessàriament que existeix b tal que $p(b) > 0$. D'altra banda tenim que

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_0}{x^n}) = -\infty$$

Anàlogament deduïm que existeix a tal que $p(a) < 0$. Per tant podem aplicar el teorema de Bolzano i tenim que existeix un $c \in (a, b)$ tal que $p(c) = 0$ que és exactament el fet que volíem provar.

Encara que el teorema ens asseguri l'existència d'arrels en certs casos no sempre ens servirà per localitzar certes arrels. Això ho podem veure amb el següent exemple:

Exemple 3 Considerem la funció $f(x) = x^2$. És clar que és una paràbola i té un zero en $x = 0$. No obstant, amb Bolzano mai podríem assegurar l'existència d'aquesta arrel ja que tot entorn de 0 té imatges positives. Matemàticament ho podem formalitzar dient que tot entorn de 0 és de la forma $(-\epsilon, \epsilon)$ on $\epsilon > 0$ arbitrari. I tenim que:

$$f(\epsilon) = (\epsilon)^2 = \epsilon^2 > 0$$

$$f(-\epsilon) = (-\epsilon)^2 = \epsilon^2 > 0$$

En cap cas podrem aplicar el teorema de Bolzano però existeix una solució en l'interval ja que clarament $0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ i $f(0) = 0^2 = 0$.

Amb aquest exemple hem il·lustrat una feblesa del teorema; hi ha arrels que no es poden localitzar a través de Bolzano. Un altre fet important en el qual cal insistir és que el teorema de Bolzano és capaç d'assegurar l'existència sota certes hipòtesis però no podem conèixer quants zeros hi ha dins de l'interval. El teorema de Bolzano ens assegura que hi ha almenys un zero, però n'hi podrien haver 2, 3 o fins i tot infinits. Vull afegir que aquests fets per mi són fonamentals a l'hora d'entendre bé què ens diu el teorema i què no ens diu. Donat que aquest treball és de caire didàctic és una cosa en la qual he posat molt d'èmfasi a l'hora de preparar una classe en un institut per treballar el teorema. Per mi és essencial treballar el llenguatge matemàtic i entendre bé com utilitzar-lo.

Malgrat que sigui matemàticament interessant demostrar l'existència de zeros nosaltres encara volem arribar més lluny. No només volem saber l'existència de zeros sinó també trobar-ne aproximacions. És aquí on entra en joc el mètode de la bisecció el qual ara detallarem. En realitat la idea ja s'ha vist; hem demostrat anteriorment el teorema fent servir la idea en la qual es basa aquest mètode numèric.

4.2 El mètode de la bisecció

L'objectiu del mètode de la bisecció (al igual com qualsevol mètode per trobar zeros a funcions) és trobar un valor p tal que $f(p) = 0$. Per fer-ho considerarem un interval $[a, b]$ tal que es pot aplicar Bolzano, és a dir, tal que f és contínua en $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tot i que el mètode funcioni amb el fet que hi hagi més d'una arrel per facilitar l'argumentació considerarem solament que hi ha una arrel. En cas que hi hagi més d'una arrel funcionaria igual però no podríem assegurar cap a quina arrel convergirà.

4.2.1 Descripció del mètode

Per començar amb el mètode de la bisecció considerarem $a_1 = a$ i $b_1 = b$. Aleshores considerarem p_1 el punt mig de l'interval $[a, b]$ que ve donat per la següent expressió:

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}$$

Si $f(p_1) = 0$, aleshores l'arrel que buscàvem és $p = p_1$. En cas contrari, és a dir, en cas que $f(p_1) \neq 0$, aleshores necessàriament $f(p_1)$ ha de tenir un signe igual a $f(a_1)$ o bé $f(b_1)$. Aquí tenim una disjunció; en cas que $f(p_1)$ i $f(a_1)$ tinguin el mateix signe aleshores l'arrel p es trobarà a (p_1, b_1) (la qual cosa ens ho assegura el teorema de Bolzano ja que $sgn(f(p_1)) \neq sgn(f(b_1))$. En aquest cas prenem

$$a_2 = p_1 \ i \ b_2 = b_1$$

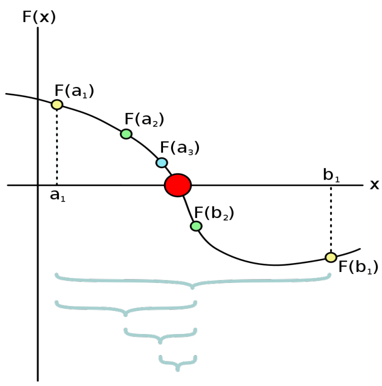
Anàlogament podem considerar l'altre cas; si $f(p_1)$ i $f(b_1)$ tenen el mateix signe l'arrel p que busquem es troba en l'interval (a_1, p_1) (Bolzano novament ens ho assegura ja que la funció pren signes diferents en l'interval) i prenem

$$a_2 = a_1 \ i \ b_2 = p_1$$

Aleshores anem aplicant iterativament aquest procés per obtenir diferents intervals

$$[a_1, b_1] \supsetneq [a_2, b_2] \supsetneq [a_3, b_3]...$$

El qual cada nou interval té la meitat de la longitud de l'interval anterior. En la següent imatge podem visualitzar la idea:



A l'hora de programar-ho ho podríem resumir de la següent manera:

Pas 1. Considerem un interval $[a_n, b_n]$ en el qual es pugui aplicar Bolzano i per tant hi haurà l'arrel. Construirem l'interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ que també contindrà l'arrel prenent el punt mig

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$$

Pas 2. Verifiquem si $|f(p_n)| < TOL$, on TOL denota la tolerància desitjada. En cas afirmatiu hem trobat l'arrel. En cas contrari passem al següent pas.

Pas 3. Considerarem $a_{n+1} = a_n$ i $b_{n+1} = p_n$ en cas que $f(a_n) \cdot f(p_n) < 0$. En cas que aquesta última afirmació sigui falsa considerarem $a_{n+1} = p_n$ i $b_{n+1} = b_n$. En aquest pas podem considerar dos criteris addicionals de parada: el primer és que si $|f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})| < TOL$ prenem l'arrel com el punt mig i aturem el procés. L'altre criteri seria imposar un nombre d'iteracions màxim que en cas que arribéssim aturaríem també el procés.

4.2.2 Convergència del mètode

Com hem vist anteriorment la idea del mètode de la bisecció és anar construïnt intervals

$$I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq I_2 ...$$

En cada pas, la longitud de l'interval en el que sabem que hi ha el zero es redueix a la meitat. També sabem que el punt mig de l'interval p_1 dista de l'arrel p com a màxim $\frac{b-a}{2}$. Com aquest fet succeeix en cada iteració tenim que

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Gràcies a aquest fet, de la següent desigualtat és molt senzilla fitar el nombre d'iteracions necessàries per garantitzar una tolerància donada. Suposem donada una certa TOL. Per determinar fita d'iteracions n usem la desigualtat descrita anteriorment:

$$\frac{b-a}{2^n} < TOL$$

Fàcilment podem aïllar la n obtenint

$$\log_2 \frac{b-a}{TOL} < n$$

4.2.3 Observacions addicionals

Si bé és cert que el mètode de la bisecció és conceptualment clar dista molt de ser un mètode eficient per trobar zeros a funcions. Té defectes considerables (molts d'ells heretats del teorema de Bolzano):

1. La convergència és molt lenta en comparació altres mètodes com Newton-Raphson.
2. Si considerem un interval $[a, b]$ en el qual es pot aplicar el teorema de Bolzano pot ser que hi hagi més d'una arrel. Aquest és un fet on hem posat molta èmfasi anteriorment; el teorema de Bolzano només ens assegura l'existència de zeros però en cap cas les quantifica. En cas que hi hagin més d'una arrel no podem assegurar cap a quina convergirà el mètode.

3. Com hem vist en l'Exemple 3, donada la naturalesa de la funció mai haguéssim pogut trobar el zero d'aquella funció emprant el mètode de la bisecció. Més generalment donada una funció $f : D \to \mathbb{R}^+$ o bé una funció $f : D \to \mathbb{R}^-$ on $D \subseteq \mathbb{R}$ no podrem usar aquest mètode.

4. Per calcular el punt mig tenim aquestes dues maneres equivalents algebraicament:

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2} \ i \ p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

   Malgrat que pugui semblar que amb la segona igualtat fem menys operacions no és recomanable usar aquesta forma de càlcul del punt mig ja que quan ens acostem a la precisió màxima de la màquina, aquesta correcció pot resultar errònia mentre que amb la primera igualtat només estem afegint una petita correció $\frac{b_n - a_n}{2}$ al valor ja conegut.

No obstant a aquests fets, podem dir que aquest mètode té una propietat molt important i positiva: si som capaços de trobar un interval $[a, b]$ on la funció pren valors de diferents signes tenim assegurada la convergència. Això no sempre passarà en tots el mètodes per trobar zeros a funcions. També cal fer un especialment esment en el fet que aquest mètode permet calcular el nombre d'iteracions necessàries per trobar la solució amb una certa tolerància. Abans d'aplicar-lo podem fer-nos una idea de quantes iteracions ens caldran per aproximar la solució.

4.2.4 Implementació a MATLAB

Aquí deixo la proposta del codi amb el qual després es faran comparacions. En aquest cas volem aproximar $\sqrt{3}$. Per fer-ho busquem el zero de la funció $f(x) = x^2 - 3$.

```
%Implementació del mètode de la bisecció a MatLab


tol=input('Introdueix tolerància\n');
itermax=input('Introdueix iteracions màximes\n');

%Aproximació inicial
fprintf("Introdueix un interval [a,b]\n");
a=input('Introdueix a:');
b=input('Introdueix b:');

if(a>b)
    aux=b;
    b=a;
    a=aux;
elseif(a==b)
    fprintf("Interval erroni\n");
    exit(0);
end

if(f(a)*f(b)>0)
```

```
    fprintf("No podem aplicar Bolzano\n");
    exit(1);
end
p=a+(b-a)/2;
iter=0;

while(abs(f(p))>tol && iter<itermax)
    if(f(p)*f(a)<0)
        b=p;
    else
        a=p;
    end
    p=a+(b-a)/2;
    iter=iter+1;

    if(abs(f(a)-f(b))<tol)
        fprintf("La solució és %.12f amb %d iteracions\n", a+(b-a)/2, iter);
        exit(0);
    end

end
if(iter>=itermax)
        fprintf("Iteracions màximes assolides\n");
else
fprintf("La solució és %.12f amb %d iteracions\n", p, iter);

end
function y=f(x)
    y=x^2-3;
end
```

4.3 Mètode de la secant

Tot i que el mètode de la bisecció ens asseguri la convergència és massa lent per a que sigui un mètode estàndard per trobar zeros a funcions. No obstant, la idea en la qual està basada dóna pas a millorar-se i a derivar-se en altres mètodes millorats. Presentarem el mètode de la secant amb l'objectiu final de veure el mètode de la *Régula falsi* un mètode híbrid entre el mètode de la secant i el mètode de la bisecció.

4.3.1 Descripció del mètode

La successió d'aproximacions generada per el mètode de la secant ve donada per dos valors inicials, idealment propers a l'arrel. Podem considerar $p_0 = a$ i $p_1 = b$. Ara considerem l'equació de la recta que passa per els punts $(p_0, f(p_0))$ i $(p_1, f(p_1))$ la qual és

$$y = f(p_1) + \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0}(x - p_1)$$

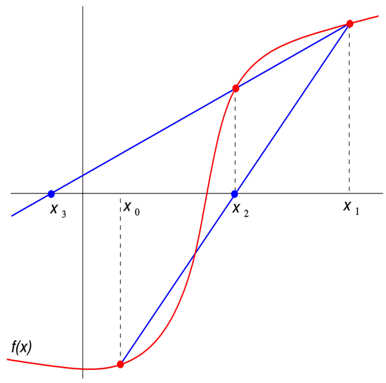
En el punt de tall $(p_2, 0)$ d'aquesta recta amb l'eix d'abscisses verfica

$$0 = f(p_1) + \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0}(p_2 - p_1)$$

on finalment podem aïllar p_2 obtenint

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)}$$

Gràficament es pot visualitzar:



A l'hora de programar-ho ho podríem resumir de la següent manera:

Pas 1. Donats p_n i p_{n-1}, l'aproximació p_{n+1} de l'arrel de $f(x) = 0$ s'obté recursivament de la següent forma

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)(p_n - p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})}$$

Pas 2. Es comprova si $|p_{n+1} - p_n| < TOL$ o bé s'han assolit les iteracions màximes per si el mètode no ha convergit. En cas contrari es reitera el procés on $p_{n-1} = p_n$ i $p_n = p_{n+1}$ i s'obté novament p_{n+1} a partir dels nous p_n i p_{n-1}.

4.3.2 Convergència del mètode

El mètode de secant no exigeix que l'arrel romangui encaixada dins del parell de punts com ho fa el mètode de la bisecció, i per això no sempre convergeix. L'ordre de convergència és α, on

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618...$$

la qual és la raó àuria.

Malgrat que en aquest mètode no en podem assegurar la convergència sí que podem afirmar que quan el mètode convergeix ho fa molt més ràpid que amb el mètode de la bisecció (ja que té convergència lineal).

4.3.3 Observacions addicionals

1. El mètode de la secant no demana el càlcul de la derivada com exigeixen altres mètodes numèrics el qual és un fet positiu perquè a vegades és molt costós calcular-ho o vegades ni tan sols la podem calcular perquè no la coneixem.

2. Podem pensar que podem simplicar la fórmula d'iteració de la següent manera:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)(p_n - p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})} = \frac{f(p_{n-1})p_n - f(p_n)p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_n)}$$

ja que algebraicament és equivalent. No obstant això és un error ja que podríem augmentar dràsticament l'error al restar dos nombres pràcticament iguals quan fem $f(p_{n-1})p_n - f(p_n)p_{n-1}$.

4.3.4 Implementació a MATLAB

Aquí tenim novament el codi del mètode de la secant. En aquest cas també volem aproximar $\sqrt{3}$. Per fer-ho busquem el zero de la funció $f(x) = x^2 - 3$.

```
%Implementació del mètode de la secant a MatLab

tol=input('Introdueix tolerància\n');
itermax=input('Introdueix iteracions màximes\n');

%Aproximacions inicials
x0=input('Introdueix x0:');
x1=input('Introdueix x1:');

if(x0==x1)
    fprintf("Aproximacions errònies\n");
end

iter=0;
while(abs(x1-x0)>tol && iter<itermax)

    x2=x1-(f(x1)*(x1-x0))/(f(x1)-f(x0));
    x0=x1;
    x1=x2;
    iter=iter+1;
end

if(iter>=itermax)
    fprintf("Hem assolit el nombre d'iteracions màxim. No ha convergit\n");
else
    fprintf("La solució és %.12f amb %d iteracions\n", x2, iter);
end

function y=f(x)
    y=x^2-3;
end
```

4.4 Mètode de la *Régula Falsi* o posició falsa

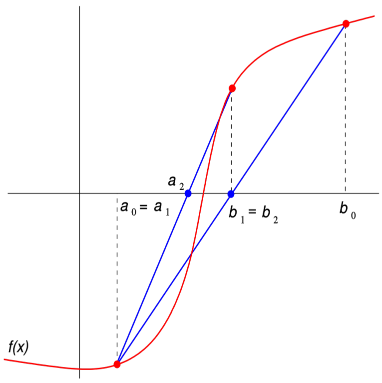
Finalment vull presentar el darrer mètode numèric que és un híbrid entre els dos mètodes anteriors. En aquest cas, a diferència del mètode de la secant es manté l'arrel encaixonada com al mètode de la bisecció la qual cosa ens assegura la convergència.

4.4.1 Descripció del mètode

Per usar el mètode de la *Régula Falsi* necessitem en primer lloc un interval inicial $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. D'aquesta manera el teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'un zero. Prenem $a_1 = a$ i $b_1 = b$, aleshores l'aproximació p_2 ve donada per:

$$p_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

Si $f(p_2)$ i $f(a_1)$ tenen el mateix signe, aleshores prenem $a_2 = p_2$ i $b_2 = b_1$. Altrament, si $f(p_2)$ i $f(b_1)$ tenen el mateix signe, prenem $a_2 = a_1$ i $b_2 = p_2$. Ho podem visualitzar de la següent manera:



A l'hora de programar-ho ho podem resumint de la següent forma:

Pas 1. Considerem un interval $[a_n, b_n]$ en el qual es pugui aplicar Bolzano i per tant hi haurà l'arrel. Es construeix un interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ on també es podrà aplicar el teorema de Bolzano considerant primerament

$$p_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Si $|f(p_n)| < TOL$ ja hem acabat. Sinó passem al pas 2.

Pas 2. Si $f(a_n) \cdot f(p_{n+1}) < 0$ prenem $a_{n+1} = a_n$ i $b_{n+1} = p_{n+1}$. Altrament prenem $a_{n+1} = p_{n+1}$ i $b_{n+1} = b_n$.

Pas 3. Aquest pas és opcional. Podem parar si posem un nombre d'iteracions màximes $ITERMAX$.

4.4.2 Convergència del mètode

Podria semblar que el mètode de la *Régula Falsi* és substancialment millor que el mètode de la Secant. El fet és que no és així, generalment el mètode de la Secant convergeix més ràpid i fins i tot en alguns casos que veurem, el mètode de la *Régula Falsi* pot arribar a ser més lent que el mètode de la bisecció (tot i que és l'excepció i no la regla).

Es pot demostrar que sota certes condicions el mètode de la falsa posició té ordre de convergència lineal, pel que sol convergir més lentament a la solució de l'equació que el mètode de la secant, encara que el mètode de la falsa posició sempre convergeix a una solució de l'equació.

L'algorisme té l'inconvenient que si la funció és convexa o còncava prop de la solució, l'extrem de l'interval més allunyat de la solució queda fix variant únicament el més proper, convergint molt lentament.

4.4.3 Implementació a MATLAB

El següent codi implementa el mètode de la posició falsa. Fem notar que la funció que s'ha escollit és també $f(x) = x^2 - 3$ per trobar un aproximació de $\sqrt{3}$.

```
%Implementació del mètode de la Regula Falsi a MatLab

tol=input('Introdueix tolerància\n');
itermax=input('Introdueix iteracions màximes\n');

%Aproximació inicial
fprintf("Introdueix un interval [a,b]\n");
a=input('Introdueix a:');
b=input('Introdueix b:');

if(a>b)
    aux=b;
    b=a;
    a=aux;
elseif(a==b)
    fprintf("Interval erroni\n");
    exit(0);
end

if(f(a)*f(b)>0)
    fprintf("No podem aplicar Bolzano\n");
    exit(1);
end

p=a-(f(a)*(b-a))/(f(b)-f(a));
iter=0;

while(abs(f(p))>tol && iter<itermax)
    if(f(p)*f(a)<0)
        b=p;
    else
        a=p;
```

```
    end
    p=a-(f(a)*(b-a))/(f(b)-f(a));
    iter=iter+1;
end
if(iter>=itermax)
        fprintf("Iteracions màximes assolides\n");
else
fprintf("La solució és %.12f amb %d iteracions\n", p, iter);
end

function y=f(x)
    y=x^2-3;
end
```

4.5 Comparació dels mètodes

L'objectiu d'aquesta secció serà comprovar empíricament tot el que hem estat comentat sobre els mètodes numèrics que hem explicat per trobar zeros a funcions. Cal afegir que totes aquestes comprovacions es faran a través del codis que han estat mostrat anteriorment on s'implementaven els diferents mètodes a MATLAB.

Exemple 1 En primer lloc corroborarem la velocitat de convergència dels següents mètodes per trobar una aproximació de $\sqrt{3}$. Per fer-ho hem considerat una funció que té com arrel $\sqrt{3}$, concretament la funció $f(x) = x^2 - 3$. Amb una tolerància de 1e-4 i unes aproximacions inicials de 1 i 2, considerant addicionalment unes iteracions màximes de 50, hem obtingut el següent:

Mètode numèric	Iteracions requerides	Aproximació
Mètode de la bisecció	12	1.732055664063
Mètode de la secant	4	1.732050680432
Mètode de la *Régula Falsi*	3	1.732026143791

En aquest cas clarament el mètode més lent ha estat el de la bisecció. Donat que la secant a convergit ho ha fet més ràpid que el de la bisecció.

Exemple 2 L'objectiu d'aquest problema és comparar les iteracions requerides per cada mètode i comparar les deu primeres aproximacions de cada mètode per trobar el zero de la funció $f(x) = \tan \pi x - 6$. Sabem qué té un zero quan $x = (\frac{1}{\pi}) \arctan 6 \simeq 0.447431543$. Aproximarem aquesta arrel usant els tres mètodes amb condicions inicials $p_0 = 0$ i $p_1 = 0.48$ usant 10 iteracions. Usarem una tolerància de 1e-6.

n	Mètode de la secant	Error absolut
1	0.181194242	0.266237301
2	0.286187166	0.161244377
3	1.091986107	0.644554564
4	-3.692296665	4.139728208
5	-22.600649855	23.048081398
6	-57.222832473	57.670264016
7	3.538758146	3.091326603
8	-113.944405048	114.391836591
9	-195.894994825	196.342426368
10	-2989.940037531	2990.387469074

n	Mètode de la bisecció	Error absolut
1	0.240000000	0.207431543
2	0.360000000	0.087431543
3	0.420000000	0.027431543
4	0.450000000	0.002568457
5	0.435000000	0.012431543
6	0.442500000	0.004931543
7	0.446250000	0.001181543
8	0.448125000	0.000693457
9	0.447187500	0.000244043
10	0.447656250	0.000224707

n	Mètode de la *Régula Falsi*	Error absolut
1	0.181194242	0.266237301
2	0.286187166	0.161244377
3	0.348981227	0.098450316
4	0.387052621	0.060378922
5	0.410304720	0.037126823
6	0.424566483	0.022865060
7	0.433336313	0.014095230
8	0.438737409	0.008694134
9	0.442066949	0.005364594
10	0.444120662	0.003310881

Amb el mètode de la bisecció acabem obtenint:

```
La solució és 0.447431545 amb 22 iteracions
```

Amb el mètode de la secant no acaba convergint (ja s'intueix veient les primeres iteracions):

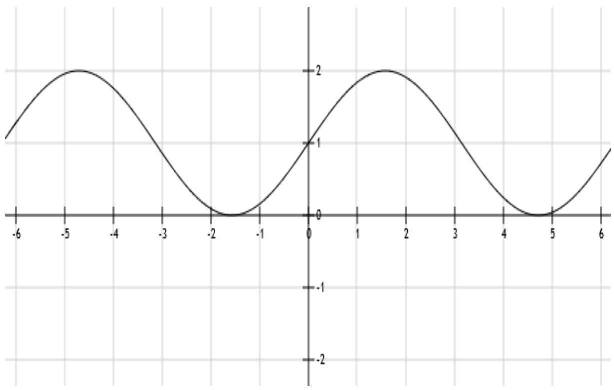
```
Hem assolit el nombre d'iteracions màxim. No ha convergit.
```

Pel mètode de la *Régula Falsi* l'algoritme acaba convergint obtenint:

```
La solució és 0.447431536 amb 36 iteracions
```

Aquest és un bon exemple per veure que no sempre el mètode de la *Régula Falsi* és millor que el mètode de la bisecció; en aquest cas convergeix més lentament que el de la bisecció.

Exemple 3 Considerem la funció $f(x) = sin(x) + 1$. La funció que hem considerat té la següent propietat: $f : D \to \mathbb{R}^+$. Gràficament ho podem visualitzar:



Per tant, tot entorn de $a \in D$ tal que $f(a) = 0$ té imatges positives. Conseqüentment resulta impossible aproximar els zeros d'aquesta funció emprant el teorema de Bolzano ja que com hem dit, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D$. Per tant podem descartar el mètode de la bisecció i el de *Régula Falsi*. No obstant, el mètode de la secant sí que convergeix amb $x_0 = -0.5$ i $x_1 = 0.5$, obtenint:

```
La solució és -1.570795035 amb 28 iteracions.
```

I efectivament sabem que $sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ i per tant $-\frac{\pi}{2} \simeq -1.570796327$ és zero de f.

Com a conclusió general podem afirmar que no hi ha un mètode millor de forma estàndard, sinó que cada cas s'ha d'estudiar i depenent de les condicions haurem de decidir quin mètode és millor. Malgrat això hi ha uns patrons i idees estàndard que hem d'utilitzar per deduïr quin és el mètode que més ens convé.

5 Generalització del teorema de Bolzano

5.1 Plantejament inicial i alguns fets per reflexionar

Donat que les matemàtiques són una ciència abstracta, un gran objectiu que tenen és poder generalitzar conceptes. Aquest és un fet que s'observa al llarg del grau, on constantment intentem generalitzar conceptes prèviament treballats per abstratitzar encara més el coneixement matemàtic. Un exemple clar podria ser com extenem el concepte de continuïtat a $\mathbb{R}$ usant la distància del valor absolut i ho passem a espai mètric, on treballem amb distàncies arbitràries. I quan arribem a la topologia el concepte de continuïtat pren una nova dimensió a nivell de generalització. Ara cada distància indueïx a una topologia diferent, però no totes les topologies provenen de distàncies. Així doncs, intentarem presentar maneres de generalitzar aquest teorema malgrat no és gens trivial fer-ho.

Amb la majoria de gent que he tingut la oportunitat de parlar i els he comentat si coneixien alguna generalització del teorema de Bolzano a $\mathbb{R}^n$ s'han sorprès i no en coneixien cap. I no només es tracta de plantejar una generalització, sinó a quin nivell; és a dir, una generalització per a funcions de n variables i n incògnites independents? Una generalització als nombres complexos? I en dimensió infinita?

Són moltes les preguntes que ens vénen. En aquest cas intentarem generalitzar el teorema de Bolzano per funcions escalars i finalment per n variables i n equacions independents. És important saber perquè aquest teorema és tant intuïtiu en una variable i després ja deixa de ser-ho; el problema rau en el fet que $\mathbb{R}$ té unes propietats intrínsiques que deixen de ser certes en $\mathbb{R}^n$, amb $n > 1$. Hi ha dues propietats fonamentals que ens permeten provar el teorema de Bolzano fàcilment: la primera és l'existència de suprem per tot subconjunt de $\mathbb{R}$ no buit i acotat. És a dir, sigui ve donat del següent teorema:

Teorema. *Sigui $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ acotat superiorment (resp. acotat inferiorment), aleshores A té suprem (resp. ínfim).*

La segona propietat fonamental que es fa servir per poder demostrar el teorema de Bolzano és la propietat local de conservació del signe per funcions contínues no nul·les. Malgrat que aquest teorema anteriorment l'hem enunciat considerant $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és molt senzill generalitzar-lo de la següent manera ($||\cdot||$ denota la norma euclidiana):

Teorema de la conservació del signe. *Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció contínua tal que és contínua en p, amb $p \in D$ i complint $f(p) > 0$. Aleshores $\exists \delta$ tal que per tot x tal que $x \in D$ i $||x - p|| < \delta$ aleshores $f(x) > 0$. Anàlogament ho tenim per $f(p) < 0$.*

El que no té sentit generalitzar és a una funció d'aquest tipus $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja que la imatge té més d'una component. Aquí és on perdem aquesta gran propietat que ens permet demostrar el teorema de Bolzano.

Topològicament fem servir bàsicament dues propietats essencials per demostrar el teorema: les funcions contínues i exhaustives envien subconjunts connexos a subconjunts connexos i tot subconjunt no trivial de $\mathbb{R}$ és connex si i només si és un interval. Aquesta darrera propietat no sembla tenir una generalització ja que només passa per $\mathbb{R}$.

5.2 Generalització per funcions escalars

El problema matemàtic que volem resoldre en aquesta secció és que donada una funció contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ demostrar l'existència d'un punt $p \in \mathbb{R}^n$ de forma que $f(p) = 0$. Amb altres paraules volem un $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(p_1, ..., p_n) = 0$$

Notem que aquí sí que podem usar la propietat que hem comentat anteriorment, concretament la propietat de la propietat local de conservació del signe per funcions contínues no nul·les. En aquest cas té sentit ja que la funció té només una component. Aquest fet ens facilitarà la generalització. Enunciarem el següent resultat que ens resoldrà el problema que hem plantejat inicialment.

Teorema. *Siguin $a, b \in \mathbb{R}^n$. Considerem una funció escalar contínua, és a dir, considerem una funció contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ amb la següent propietat:*

$$f(a) < 0 < f(b)$$

Aleshores tenim que l'equació $f(x) = f(x_1, ..., x_n) = 0$ té com a mínim una solució en el conjunt

$$(a, b) = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in (0, 1)\}$$

Observació. *Notem que el conjunt*

$$(a, b) = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in (0, 1)\}$$

és un segment obert de $\mathbb{R}^n$.

Demostració. La idea per provar aquest resultat és unidimensionar el problema per tal d'aplicar el teorema de Bolzano en una variable, el qual ja hem vist anteriorment. Per fer-ho, prenem la funció contínua $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, la qual definirem de la següent manera:

$$g(\lambda) = f((1 - \lambda)a + \lambda b)$$

Notem ara un fet important:

$$g(0) = f(a) < 0 < f(b) = g(1)$$

Aplicant doncs el teorema de Bolzano en g tenim el resultat que volíem provar (ho podem fer ja que g és contínua i té signes diferents en 0 i 1 com hem fet notar). □

Observació. *Notem que és anàleg suposar que $f(a) > 0 > f(b)$. Podem enunciar i demostrar el teorema de forma totalment anàloga ja que el fet essencial en la demostració és que*

$$sgn(f(a)) \neq sgn(f(b))$$

Finalment per acabar els comentaris del teorema cal dir que en efecte aquest teorema és una generalització del teorema de Bolzano unidimensional ja que el teorema per $n = 1$ és justament el teorema de Bolzano en una variable.

5.3 Generalització per a n variables i n equacions independents

Ara el que volem resoldre és que donat una funció $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ amb certes condicions de regularitat (caldrà analitzar-ho) demostrar que existeix algun $p \in D$ tal que $f(p) = 0$, on $0 = (0, ..., 0)$, per tant $0 \in \mathbb{R}^n$. Dit d'una altra manera, volem veure si el següent sistema té solució:

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ f_n(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

on $f_i : D_i \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amb $D_1 \times ... \times D_n = D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Una petita observació que m'agradaria afegir és que aquí la teoria que hem desenvolupat per resoldre el problema per funcions escalars no ens serveix. És a dir, donat $i \in \{1, ..., n\}$ podem resoldre

$$f_i(x_1, ..., x_n) = 0$$

però el problema que nosaltres volem resoldre és que passi per totes les i simultàniament.

Vegem un exemple representatiu per veure fets interessants:

Exemple Considerem la funció $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \mapsto (sin(x), cos(x))$. Aquesta funció té condicions de regularitat molt bones, ja que $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$. Addicionalment, donat que la imatge és $\mathbb{S}^1$, on $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$, és a dir, la circumferència unitat. Conseqüentment té punts als quatre quadrants, hi ha totes les possibles combinacions diferents de signes entre els diferents punts de la imatge. Malgrat tot això, l'equació

$$f(x, y) = 0$$

no té solució. Per tant per assegurar l'existència el fet que hi hagi diferents signes en cada component no sembla representatiu. També podem notar que $f([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ és un subconjunt connex però no té la propietat de ser un interval, com sí que passa en funcions unidimensionals.

Més generalment el que volem remarcar amb aquest exemple és que el fet que una funció contínua (o certes condicions de regularitat) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ prengui imatges en

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, x_2 > 0, \ ... \ , x_n > 0\}$$
$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0, x_2 > 0, \ ... \ , x_n > 0\}$$
$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0, x_2 < 0, \ ... \ , x_n > 0\}$$
$$...$$
$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0, x_2 < 0, \ ... \ , x_n < 0\}$$

no sembla un fet essencial per provar l'existència de zeros.

De fet, el que sí que és decisiu per determinar l'existència de solucions en sistemes d'equacions és que la funció f que volem estudiar tingui un comportament adequat a la frontera toplògica del domini que volem estudiar.

5.3.1 Generalització per dominis rectangulars

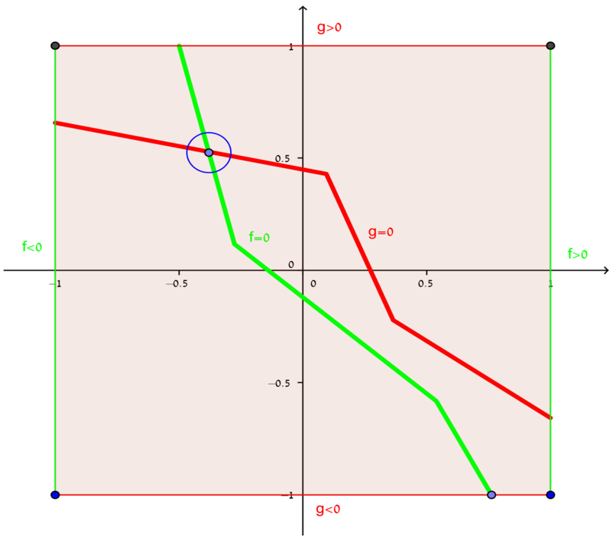
En conseqüència amb l'afirmació que he fet amb el paràgraf anterior, existeixen resultats que van en aquesta direcció centrant-nos amb un tipus de domini específic:

Teorema de Poincaré-Miranda a $\mathbb{R}^2$. *Considerem la funció contínua $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^2$ (amb $a < b$ i $c < d$), tal que $(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$ i complint:*

$$f_1(a, y) < 0 < f_1(b, y), \ \forall y \in [c, d]$$

$$f_2(x, c) < 0 < f_2(x, d), \ \forall x \in [a, b]$$

Aleshores l'equació $f(x, y) = (0, 0)$ té una solució en $(a, b) \times (c, d)$.



Representació gràfica del teorema de Poincaré-Miranda per $n = 2$

Aquest teorema es podria considerar una generalització del teorema de Bolzano. En efecte, una observació molt important a fer és que el teorema de Poincaré-Miranda per $n = 1$ és justament el teorema de Bolzano. No obstant, té una limitació seriosa: és vàlid per quan tenim un domini que sigui un rectangle. No és gaire difícil sospitar que aquest teorema té una generalització a $\mathbb{R}^n$. Anem-la a veure:

Teorema de Poincaré-Miranda a $\mathbb{R}^n$. *Considerem una funció contínua $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on A és conjunt de la forma $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ (amb $a_i < b_i$ per tot $i \in \{1, .., n\}$). Tenim les següents cares:*

$$P_i^- = \{x \in P : x_i = a_i\}, \ (1 \le i \le n)$$

$$P_i^+ = \{x \in P : x_i = b_i\}, \ (1 \le i \le n)$$

de forma que

$$f_i(x) \le 0, \ (x_i \in P_i^-), \ (1 \le i \le n)$$

$$f_i(x) \ge 0, \ (x_i \in P_i^+), \ (1 \le i \le n)$$

Aleshores f té almenys un zero en A.

Evidentment aquesta generalització hereta les limitacions del teorema en la versió de $\mathbb{R}^2$. El teorema de Poincaré-Miranda ens mostra que és molt decisiu el domini de la funció que volem treballar; però no solament és important saber el domini, sinó també com la funció es comporta en la frontera topològica del domini (aquest fet s'observa en les hipòtesis del teorema de Poincaré-Miranda). Però no tenim el problema global resolt ja que no tots els dominis tenen cares.

5.3.2 Generalització en la bola euclidiana

Presentarem una manera d'abordar el problema per una bola euclidiana. Per fer-ho, caldrà veure unes quantes definicions prèvies per entendre què afirma el teorema al qual volem arribar.

Definició. *El producte escalar de dos vectors $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, el qual es denota per $\langle x, y\rangle$, ve donat per*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n = \sum_{n=1}^{n} x_iy_i$$

Definició. *Denotem a l'aplicació $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ com la norma euclidiana la qual ve definida com:*

$$||x|| : \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2},\ (x \in \mathbb{R}^n)$$

A més a més, verifica les següents propietats:

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, *per* $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *i* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definició. *Al parell $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ se l'anomena espai euclidià (de dimensió n) on $||\cdot||$ denota la norma euclidiana a $\mathbb{R}^n$.*

Vegem ara la definició de la distància euclidiana:

Definició. *La distància euclidiana a $\mathbb{R}^n$ és una aplicació*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

que ve definida per

$$d(x, y) = ||x - y||,\ (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

tal que compleix:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *per* $x, y \in \mathbb{R}^n$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Finalment veurem una definció topològica necessària.

Definició. *Sigui $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definim la frontera de A, la qual denotarem com a ∂A, com el conjunt de punts $p \in \mathbb{R}^n$ tals que per tot $r > 0$, la bola oberta euclidiana amb centre p i radi r, la qual definirem com $B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(p,x) < r\}$ conté punts tant de A com del seu complementari, és a dir, $\mathbb{R}^n \setminus A$.*

Donades aquestes definicions podem procedir a enunciar el teorema. Notem que com ja havíem fet notar, un punt clau serà el comportament de la funció a la frontera topològica. Això quedarà reflexat a les hipòtesis del teorema. Addicionalment cal esmentar que $\overline{B}(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(p,x) \leq r\}$, és a dir, la bola tancada de radi r i centrada en p a $\mathbb{R}^n$ usant la distància euclidiana.

Teorema. *Considerem una funció contínua $f : \overline{B}(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que compleix*

$$\langle x, f(x) \rangle > 0, \ \forall x \in \partial \overline{B}(0,r).$$

Aleshores l'equació $f(x) = 0$ té una solució en la bola oberta $B(0,r)$.

Una pregunta natural que ens podem plantejar és si realment és una generalització del teorema de Bolzano. La forma de veure que això efectivament és cert és reescrivint el teorema anterior però per $n = 1$, la qual cosa ens queda així:

Teorema. *Considerem una funció contínua $f : \overline{B}(0,r) = [-r,r] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que compleix*

$$\langle x, f(x) \rangle > 0, \ \forall x \in \partial \overline{B}(0,r) = \{-r, r\}.$$

Aleshores l'equació $f(x) = 0$ té una solució en la bola oberta $B(0,r) = (-r,r)$.

En efecte és una generalització del teorema de Bolzano ja que la condició

$$\langle -r, f(-r) \rangle > 0$$

$$\langle r, f(r) \rangle > 0$$

és equivalent a demanar que

$$f(-r) < 0$$

$$f(r) > 0$$

Notem que en tot moment usem que $r > 0$. Per tant en el fons no és més que una reescriptura més restrictiva del teorema de Bolzano en una variable, però no deixa de ser una generalització.

Hi ha una teoria que unifica i permet provar els teoremes: la teoria del grau de Brouwer. Es pot trobar tots els detalls en [7] i [8].

6 Proposta didàctica

6.1 Reflexió inicial

Donat que aquest treball té un caire didàctic és imprescindible que hi hagi una part del treball que vagi dedicada a l'ensenyament. Les matemàtiques sempre han tingut fama de ser complicades i ser un coneixement difícil d'adquirir. I potser aquesta fama és certa; però això no és excusa per intentar millorar cada dia i buscar noves maneres de transmetre aquest bell coneixement. Realment penso que les matemàtiques són un coneixement molt necessari; ens ensenyen a raonar, a reflexionar i la filosofia que hi ha darrera transcendeix d'una mera definició. Les coses no són perquè sí, darrera de cada petit detall hi ha una idea profunda la qual algú ha reflexionat prèviament. Com a exemplificació del que estic dient hi hauria per exemple la definició de continuïtat: hi ha la definició $\epsilon - \delta$, la qual hem abordat durant al treball. Però aquesta definició no és casual, prové de la idea intuïtiva de continuïtat. Tot i que és veritat tot el que acabo de dir, és necessari que algú t'introdueixi mínimament a tot aquest pensament ple de idees que viu en un món purament platònic. És aquí on entra la figura del docent.

Malgrat que no tingui experiència com a docent en una aula no vol dir que no hagi pensat en com ensenyaria les matemàtiques. De fet, sí que tinc experiència com a professor particular, tant en cursos de secundària com de batxillerat. A més a més, durant pràcticament tota la meva vida he estat estudiant i per tant sí que he tingut molta experiència com a alumne; i de fet gràcies a aquesta experiència he plantejat les sessions que vull dur a terme de la manera que ho he fet. És evident que cada persona és un món i té unes circumstàncies diferents, però hi ha uns certs patrons que es solen repetir en l'aprenentatge: en primer lloc durant la meva experiència a l'institut em van donar una idea molt mecànica de les matemàtiques. En realitat penso que aquesta manera de plantejar les matemàtiques és errònia. Igual com no té sentit aprendre's de memòria exactament tot el que va dir un filòsof i escriure-ho en un examen sense raonar res ja que fer això fa perdre l'essència de l'assignatura, el mateix passa en les matemàtiques. Si verdaderament entens què estàs fent operant un certs passos per resoldre un problema, de ben segur que l'assignatura pren una nova dimensió: ja no importarà tant la memòria, el que verdaderament importarà és el raonament i la justificació del que fas. I això és aplicable a pràcticament tots els nivells, no solament a la universitat. Però també cal realisme en el que estic plantejant: la pressió que rep un alumne del segle XXI és enorme i el que val en realitat és la nota que treus, no realment el que aprens. Si pots aprovar sobradament de forma mecànica ja no caldrà fer l'esforç d'anar una mica més enllà. I més si tens moltes més assignatures a l'espera.

Tot i això cal dir que quan arribes a la universitat has d'aprendre a raonar perquè les assignatures deixen de ser mecàniques; l'exigència és molt superior, però també necessària. I aquí és per mi on hi ha la verdadera dificultat del pas de l'institut a la universitat sumat amb el segon fet que vull comentar: el llenguatge matemàtic. Personalment en la meva experiència a l'institut mai vaig veure un teorema ben escrit amb unes hipòtesis i unes conclusions. M'agradaria pensar que això és l'excepció i no la norma. Evidentment coneixia el teorema de Pitàgores i sabia aplicar-lo, però realment no el vaig veure mai escrit curosament. Sabia que un teorema era una afirmació matemàtica. Però una demostració era un terreny totalment desconegut per mi. Tot això va ser una barrera al principi del grau: la calculadora va perdre el sentit, tot eren lletres, tot eren idees. I el llenguatge va passar a ser un element clau.

En aquesta línia m'agradaria encarar la meva proposta didàctica. Resulta utòpica la idea de que això es pot resoldre amb un parell de sessions a l'aula; en sóc plenament conscient. A més a més tots els alumnes responen d'una forma diferent ja que cadascú té una realitat diferent i uns interessos diferents. No pretenc que tothom li agradin les matemàtiques. No obstant això, sí que m'agradaria presentar una nova manera de fer matemàtiques: mostraré una petita construcció molt assequible i intuïtiva. Estic segur que el teorema de Bolzano serà una bona manera de fer-ho; és relativament senzill, molt intuïtiu i es pot representar gràficament. Serà una manera de treballar el llenguatge matemàtic. Tot això ho recolzaré amb uns apunts i uns exercicis que segueixen aquesta mateixa línia. Més endavant ho comentaré tot més detalladament.

Finalment tot el que he dit no vull que sembli una crítica als docents; en realitat els professors tenen una llibertat molt limitada. Constantment han d'estar pendents d'uns temaris extensos els quals han d'impartir dia sí dia també. Encara més si la selectivitat està esperant. En aquest sentit vull mostrar i agraïr el seu suport al llarg del meu aprenentatge. Estic segur que la majoria d'ells ho han fet el millor que han sabut.

6.2 Procés d'elaboració dels apunts

En aquesta secció el meu objectiu és explicar els apunts i problemes que he proposat. Seria convenient consultar-los per entedre tot el que exposaré.

En primer lloc, abans de donar qualsevol definició o qualsevol detall del teorema, el primer que faig és presentar 2 problemes semblants als que han resolt al llarg del curs; però he afegit alguns detalls que fan que no els puguin resoldre. Per exemple els alumnes de 1r de Batxillerat saben buscar arrels de polinomis utilitzant Ruffini, però si poso un nombre irracional (concretament π en el terme independent) forço a que no busquin divisors. És un nou cas que fins la data no s'havien trobat. Una cosa similar faig amb el segon problema. A més a més demostro gràficament que l'equació $cos(x) = x$ té solució, per tant no es tracta d'un problema sense solució.

Un cop presentada aquesta motivació (problemes oberts) presento la teoria la qual ens ajudarà a resoldre'ls. En realitat els resoldrem parcialment, és a dir, demostrarem que hi ha solucions i a més a més on es troben. Per resoldre'ls completament (trobar una aproximació de la solució) necessitaríem el mètode de la bisecció la qual cosa ja resulta una mica més avançat i amb el temps disponible és impossible abordar-ho amb mètodes numèrics. Si veuen un teorema ben escrit, entenen les hipòtesis i saben arribar a conclusions ja em sembla un gran pas assolit. La teoria definirà de forma senzilla la contuïtat d'una funció; en principi suposo que tenen la idea de continuïtat assolida. Si no fos el cas s'explicaria detingudament ja que és un concepte fonamental. Finalment presento el teorema de Bolzano (vull fer molta èmfasi en saber llegir hipòtesis i conclusions). De fet els exemples van en aquesta direcció.

El primer exemple és l'aplicació directa del teorema per demostrar que té una solució l'equació presentada. No presenta més dificultat. He intentat escriure amb detall tot el raonament necessari sense donar res per suposat; és un fet essencial en matemàtiques. El segon exemple és un exemple que mostra que aplicar Bolzano no implica necessàriament que hi hagi una única arrel. Vol dir que com a mínim n'hi ha una; en aquesta exemple n'hi ha dos, però també en podríem moltes més. El teorema de Bolzano demostra l'existència d'arrels, no les quantifica. I finalment al tercer exemple mostro un fet molt interessant; no poder aplicar Bolzano no implica que no hi hagi una arrel. Potser en un primer moment pot sorprendre, però el teorema de Bolzano diu que si es compleixen les hipòtesis aleshores hi ha com a mínim un zero. Però si no es compleixen les hipòtesis no podem afirmar res. Em sembla necessari mostrar aquest fet empirícament, per això he escollit una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Un cop vistos els exemples ja només cal comprovar si els alumnes han entès tot el que s'ha explicat. En cas contrari serà la oportunitat perquè ho acabin d'entendre. Els problemes he intentat que siguin una mica diferents entre ells; a més a més, 2 problemes són justament els que he presentat inicialment. D'aquesta forma podrem solucionar tot allò que hem plantejat inicialment i veuran que tota la teoria que hem treballat té un sentit. Ara hauran adquirit una nova tècnica per abordar problemes que en un primer moment semblaven difícils. Per mi és important mostrar que Bolzano ajuda a resoldre problemes que ja havien resolt anteriorment d'una altra manera: realment és una extensió en el seu coneixement.

Donat que no sé si hi haurà temps de resoldre tots els problemes, he escrit curosament totes les respostes el més detalladament que he pogut de manera que si alguna cosa ha quedat incompletament explicada s'ho puguin llegir i puguin acabar de resoldre els problemes que els hagin quedat pendents. D'aquesta forma m'asseguro que no quedi res a l'aire; la idea és que al finalitzar les sessions se'ls faciliti per acabar de resoldre dubtes o si més no, comprovar que les seves solucions són correctes. En cas que hi hagi infinites solucions d'un problema s'ha fet notar a les solucions.

6.3 Objectius de les sessions

Un cop finalitzades les sessions, els alumnes haurien de ser capaços de:

- Comprendre el concepte de continuïtat.
- Conèixer el teorema de Bolzano. Conèixer la interpretació geomètrica.
- Identificar en quines situacions el teorema de Bolzano resulta útil per resoldre problemes.
- Saber aplicar el teorema de Bolzano per resoldre problemes de zeros a funcions. Cal fer èmfasi en la idea de ser capaços de verificar les hipòtesis i saber les conseqüències exactes d'aplicar el teorema.

6.4 Objectius personals

Com a docent, els meus objectius personals a l'hora de dur a terme l'activitat són:

- Innovar en la manera de treballar. Concretament naturalitzar la idea d'utilitzar apunts que no s'han pres directament de la pissarra.
- Mostrar la importància del llenguatge matemàtic. Exposar la necessitat dels quantificadors en matemàtiques. Demostrar la importància d'aplicar correctament un teorema.
- Proposar i gestionar activitats no mecàniques que exigeixin anar una mica més enllà en el raonament matemàtic.

6.5 Implementació

La proposta que he presentat va dirigida a alumnes de 1r de Batxillerat tot i que es podria presentar perfectament a alumnes de 2n de Batxillerat. De fet, en realitat el teorema de Bolzano és actualment temari curricular de 2n de Batxillerat. Malgrat això, vaig preparar l'activitat per presentar-la a una classe de 1r de Batxillerat ja que no tenen tanta pressió per la selectivitat i ja que em deixaven dues sessions, preferia usar-les a 1r de Batxillerat. Addicionalment haig de dir que jo al Batxillerat no vaig veure mai el teorema de Bolzano malgrat aparegués al currículum; el meu professor el va ometre degut que no havia aparegut mai a la selectivitat de Catalunya.

Abans que arribés la crisi sanitària de la primavera del 2020 degut al coronavirus ja tenia emparaulat amb l'institut on vaig estudiar Batxillerat, concretament 'Col·legi La Mercè Martorell', dur a terme l'activitat. Malgrat tenir-ho pactat, no va ser possible realitzar la proposta, ni tan sols telemàticament degut a que la situació s'havia tornat molt complexa tant per als alumnes com per als professors.

6.6 Continguts

Els continguts que vull treballar amb la proposta són (tots ells es troben al Decret 142/2008 - DOGC núm. 5183):

- Continuïtat.
- El teorema de Bolzano: un mètode per aproximar arrels.

Tots aquests continguts es troben en el bloc d'Anàlisi de 2n de Batxillerat. En aquest bloc es pretén treballar l'aplicació de l'estudi local i global d'una funció a situacions geomètriques, científiques i tecnològiques. Malgrat l'activitat la vaig pensar per dur-la a terme a 1r de Batxillerat no suposa cap problema ja que els contiguts necessaris per entendre el teorema de Bolzano formen part del currículum de 1r de Batxillerat (em refereixo concretament a la continuïtat).

Aquests continguts els podem trobar en el grau de matemàtiques, concretment a l'assignatura d'Introducció al Càlcul Diferencial. La diferència rau en la profundització: en el grau es veu la definició de continuïtat ($\epsilon - \delta$), no només en termes de límits. Per altra banda, al grau es mostra la demostració del teorema de Bolzano, la qual cosa és omesa al Batxillerat.

6.7 Competències

La finalitat d'aquesta secció és veure quines competències es treballen amb la proposta didàctica. Si mirem novament el currículum de Batxillerat, el qual es troba al Decret 142/2008 - DOGC núm. 5183, podem observar que ha Batxillerat hi ha principalment 5 vessants matemàtiques a treballar. Concretament són:

- Resoldre problemes matemàtics.
- Comunicar-se matemàticament.

- Raonar matemàticament.
- Valorar la matemàtica i la seva construcció.
- Tenir confiança en la pròpia capacitat matemàtica.

És clar doncs que la proposta didàctica és completa i íntegra ja que engloba les diferents competències principals del currículum de Batxillerat. Vegem-ho en detall: en primer lloc, la capacitat de resoldre problemes matemàtics es treballa àmpliament donat que després de presentar una teoria cal aplicar-la per resoldre diferents exercicis. A més els exercicis no són totalment mecànics; en cadascun s'exigeix un mínim de raonament nou. Això comporta desenvolupar aquesta competència amb profunditat tenint en compte el temps disponible per dur a terme la proposta didàctica.

En segon lloc, una altra competència important al Batxillerat és comunicar-se matemàticament. Aquesta competència també és treballada: per tal de resoldre els problemes correctament cal la capacitat de saber redactar matemàticament i per tant comunicar-se. A més a més la comunicació no és només en una direcció: cal que sàpiguen interpretar els apunts i els exemples mostrats als apunts els quals també s'han treballat a la pissarra. Finalment també vull afegir que he fet molta èmfasi en la importància en el llenguatge matemàtic; és un element clau en la comunicació.

La tercera competència és saber raonar matemàticament. Clarament per poder resoldre els problemes proposats hauran de saber verificar hipòtesis i aplicar un teorema. Això és essencial en matemàtiques i es demana que ho siguin capaços de fer-ho per solucionar els problemes. Per tant podem concloure que aquesta competència és treballada.

En quart lloc tenim una competència que ens parla de valorar la matemàtica i la seva construcció. La idea que tinc és que al mostrar el teorema de Bolzano mostrar la necessitat de la condició de continuïtat i demostrar que res és perquè sí en el món de les matemàtiques. Cal transmetre que la rigurositat en matemàtiques és molt necessària. Per tant, d'aquí es desprèn treballar aquesta competència.

Finalment la última competència es treballa lliurant les respostes i que cadascú observi el seu resultat. La capacitat matemàtica és una capacitat natural de l'ésser humà però que cal ser desenvolupada: plasmant el progrés amb una qualificació i unes correccions crec que és una bona manera de veure com funcionen les coses individualment i veure el progrés assolit per tal de seguir millorant.

6.8 Avaluació i qualificació

Per tal de saber si els objectius que m'he proposat s'han assolit proposo avaluar l'activitat a través dels exercicis que he suggerit al final dels apunts. Després d'haver exposat i explicat els apunts la idea és que els alumnes resolguin els exercicis i els lliurin per tal de ser corregits. Un cop fet, jo hauria de corregir-los per tal no només d'avaluar-los sinó per tal d'identificar les principals dificultats i de cara a un futur fer una proposta de millora.

Un cop lliuri les correccions als alumnes per tal que coneguin les solucions completes seria necessari facilitar-los les solucions redactades per mi mateix per tal que les comparessin i veiessin en què s'han equivocat. Donat que hi ha 4 exercicis proposats, cada exercici valdria 2'5 punts i obtindrien una qualificació sobre 10.

6.9 Apunts preparats

Aquí s'adjunten els apunts del teorema de Bolzano. Serveixen de guia tant per l'alumne com el professor.

6.9.1 Introducció

Per tal d'entendre l'objectiu de treballar aquest teorema i veure què ens pot aportar en tot allò que ja prèviament hem treballat plantejarem alguns problemes els quals poden ser abordats amb el teorema de Bolzano.

Problema 1 Sigui $p(x) = x^4+x^3+2x+\pi$. Volem localitzar les arrels d'aquest polinomi, és a dir, trobar intervals on hi hagin valors de x que compleixin:

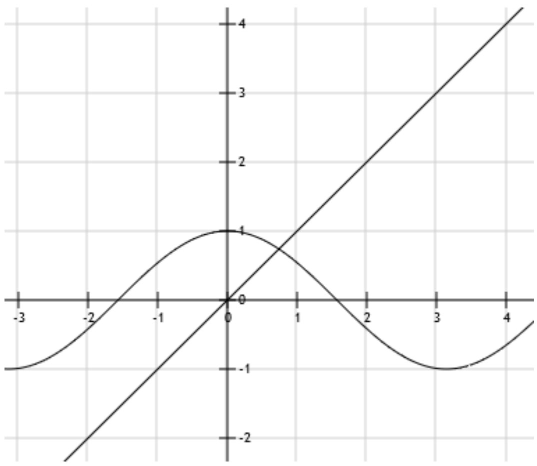
$$p(x) = x^4 + x^3 + 2x + \pi = 0$$

Fins ara, durant el curs per trobar les arrels d'un polinomi de grau més gran que dos havíem de provar els divisors del terme independent del polinomi i aplicar Ruffini. No obstant, en aquest cas el terme independent és π el qual no té divisors. Com podem localitzar les arrels?

Problema 2 Volem trobar el valor de x pel qual es compleix

$$cos(x) = x$$

Gràficament tenim:



Per tant sabem que l'equació té una solució. Com podem trobar una aproximació d'aquest punt?

6.9.2 Teoria

Per tal de resoldre aquestes qüestions anem a veure en detall els conceptes que necessitem per entendre el teorema de Bolzano.

Definició. *Una funció f és contínua en un punt p si es verifiquen 3 propietats:*

1) Existeix $f(p)$.

2) Existeix $\lim_{x\to p} f(x)$ i és finit.

3) $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Direm que si no es compleix alguna d'aquestes condicions aleshores la funció és discontínua en p.

Observació. *Una funció és contínua si és contínua en tots els punts del domini.*

Ara doncs enunciem en detall el teorema.

Teorema. *Si una funció f és contínua en un interval $[a,b]$ i en els extrems d'aquest interval pren valors de diferent signe, aleshores hi ha almenys un punt $c \in (a,b)$ tal que f(c)=0.*

6.9.3 Exemples

Exemple 1 Sigui $f(x) = x^2 - \cos(x) + \frac{1}{2}$. Volem veure que hi ha almenys un $p \in (0, \pi)$ tal que $f(p) = 0$. Verifiquem les hipòtesis del teorema de Bolzano. Clarament f és una funció contínua en tot el seu domini. Prenem l'interval $[0, \pi]$. Comprovem ara que:

$$f(0) = 0^2 - \cos(0) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(\pi) = \pi^2 - \cos(\pi) + \frac{1}{2} = \pi^2 + \frac{3}{2} > 0$$

En aquest punt hem verificat les hipòtesis del teorema. L'apliquem i per tant podem afirmar:

Pel teorema de Bolzano existeix un punt $p \in (0, \pi)$ tal que $f(p) = 0$.

Vegem en detall altres exemples interessants per veure què diu i què no diu el teorema.

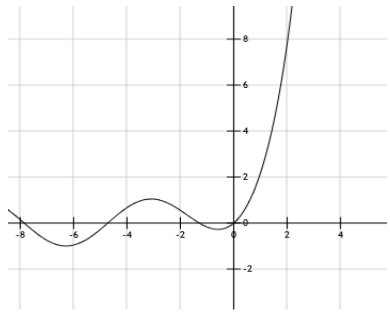
Exemple 2 Considerem la funció $f(x) = e^x - \cos(x)$. Volem trobar un interval $[a,b]$ tal que hi hagi un $p \in (a,b)$ tal que $f(p) = 0$. Clarament la funció $f(x)$ és contínua perquè e^x és contínua i la funció $cos(x)$ també és contínua. Considerem l'interval $[-6, 2]$. Aleshores obtenim:

$$f(-6) = e^{-6} - \cos(-6) \simeq -0.95 < 0$$

$$f(2) = e^2 - \cos(2) \simeq 7.80 > 0$$

Per tant podem aplicar el teorma de Bolzano i sabem que hi ha almenys un $p \in (-6, 2)$ tal que $f(p) = 0$. Però alerta, aquest p no té perquè ser únic. En l'exemple mostrat n'hi ha 2 com es pot apreciar en el gràfic de sota.

Aquesta és una de les febleses del teorema, que no podem saber en exactitud quants zeros té la funció. En podria tenir 1, 2, o fins i tot infinits zeros.



Exemple 3 En aquest exemple volem mostrar que en cas que no poguem aplicar el teorema de Bolzano no vol dir que no hi hagi zeros de la funció. En aquest cas considerarem la funció $f(x) = x^2$. Com ja sabem aquesta funció té un zero quan $x = 0$. Si prenem l'interval $[-1, 1]$ i calculem quin signe pren la funció en els extrems de la funció obtenim:

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 > 0$$

$$f(1) = (1)^2 = 1 > 0$$

Per tant en aquest cas no podem aplicar Bolzano perquè els signes de la funció en els extrems de l'interval són iguals. Però això no vol dir que no pugui haver un valor x en el qual la funció valgui 0 ja que com ja havíem vist:

$$f(0) = (0)^2 = 0$$

I clarament $0 \in$ [-1,1].

6.9.4 Problemes

Problema 1 Demostra que la funció $g(x) = -x^3 + x - 8$ té almenys un zero a l'interval $[-5, 0]$.

Problema 2 Demostra que l'equació $e^{sin(x)} - 1 = 0$ té almenys una solució a l'interval $[2, 4]$. *Indicació: Considereu la funció $f(x) = e^{sin(x)} - 1$ i verifiqueu les hipòtesis del teorema de Bolzano a l'interval* $[2, 4]$.

Problema 3 Volem resoldre el segon problema plantejat a l'introducció. Trobeu un interval on l'equació $cos(x) = x$ té solució. *Indicació: Resoldre $cos(x) = x$ és equivalent a resoldre $cos(x) - x = 0$. Considera la funció $f(x) = cos(x) - x$ i troba un interval on es pugui aplicar el teorema de Bolzano.*

Problema 4 Volem resoldre el primer problema plantejat inicialment. Volem trobar intervals on hi ha les arrels del polinomi

$$p(x) = -x^4 + x^3 + 2x + \pi = 0$$

Sabem que la primera arrel està en un interval de la forma $[a, 0]$, on $a < 0$. Trobeu una a on pugeu aplicar el teorema de Bolzano. Feu el mateix per trobar un interval de la forma $[0, b]$ on estigui la segona arrel, on la $b > 0$.

6.10 Problemes resolts

Aquí s'adjunten els problemes resolts. Poden servir novament de referència tant per l'alumne com per el professor.

6.10.1 Solucions

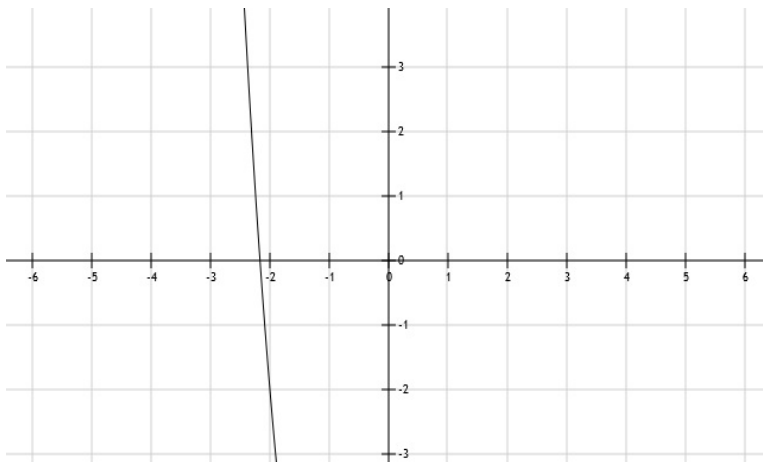
Problema 1 Demostra que la funció $g(x) = -x^3 + x - 8$ té almenys un zero a l'interval $[-5, 0]$.

Solució Per demostrar que que la funció $g(x) = -x^3 + x - 8$ té almenys un zero a l'interval $[-5, 0]$ cal comprovar les hipòtesis del teorema de Bolzano. Clarament la funció $g(x)$ és contínua perquè és un polinomi de tercer grau. Verifiquem el signe als extrems de l'interval $[-5, 0]$. Obtenim el següent:

$$g(-5) = -(-5)^3 + (-5) - 8 = 112 > 0$$

$$g(0) = (0)^3 + (0) - 8 = -8 < 0$$

Per tant el signe als extrems de l'interval és diferent i podem aplicar el teorema de Bolzano obtenint que hi ha com a mínim un $p \in (-5, 0)$ tal que $g(p) = 0$, per tant p serà un zero de la funció. Gràficament podem observar que efectivament hi ha una arrel:



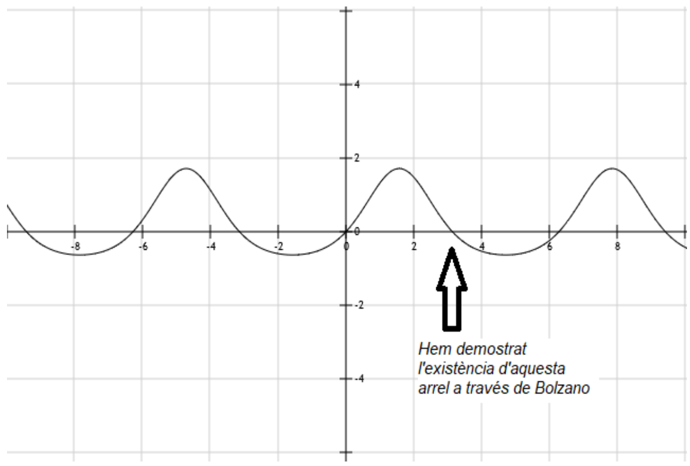
Problema 2 Demostra que l'equació $e^{sin(x)} - 1 = 0$ té almenys una solució a l'interval $[2, 4]$. *Indicació: Considereu la funció* $f(x) = e^{sin(x)} - 1$ *i verifiqueu les hipòtesis del teorema de Bolzano a l'interval* $[2, 4]$.

Solució Seguint la indicació donada volem aplicar el teorema de Bolzano a la funció $f(x) = e^{sin(x)} - 1$ i obtindrem un $p \in (2, 4)$ tal que $f(p) = 0$. Observem que $f(x)$ és un funció contínua ja que e^x i $sin(x)$ són funcions contínues i la composició de funcions contínues és contínua. Ara calculem el signe als extrems de l'interval $[2, 4]$:

$$f(2) = e^{sin(2)} - 1 \simeq 1.48 > 0$$

$$f(4) = e^{sin(4)} - 1 \simeq -0.53 < 0$$

Per tant el signe és diferent i aplicant el teorema de Bolzano obtenim el que volíem, és a dir, que hi ha almenys un $p \in (2,4)$ tal que $f(p) = e^{sin(p)} - 1 = 0$ i resol l'equació plantejada inicialment. Gràficament ho podem visualitzar de la següent manera:



Problema 3 Volem resoldre el segon problema plantejat a l'introducció. Trobeu un interval on l'equació $cos(x) = x$ té solució. *Indicació: Resoldre* $cos(x) = x$ *és equivalent a resoldre* $cos(x) - x = 0$. *Considera la funció* $f(x) = cos(x) - x$ *i troba un interval on es pugui aplicar el teorema de Bolzano.*

Solució Observem que la funció $f(x)$ és contínua ja que $cos(x)$ i x són funcions contínues. Volem trobar un interval $[a,b]$ on aplicar el teorema de Bolzano. Podem prendre per exemple l'interval $[0,\pi]$ i comprovar el signe de la funció als extrems de l'interval:

$$f(0) = cos(0) - 0 = 1 > 0$$

$$f(\pi) = cos(\pi) - \pi \simeq -4.14 < 0$$

El signe és diferent i tenim que hi ha almenys un $p \in (0,\pi)$ tal que $f(p) = 0$. És a dir, p verifica que

$$f(p) = cos(p) - p = 0 \Longrightarrow cos(p) - p = 0 \Longrightarrow cos(p) = p$$

que és l'equació que havíem plantejat inicialment. *Qualsevol interval que verifiqui les hipòtesis del teorema de Bolzano és vàlid, hem mostrat l'interval* $[0,\pi]$ *a mode d'exemple.*

Problema 4 Volem resoldre el primer problema plantejat inicialment. Volem trobar intervals on hi ha les arrels del polinomi

$$p(x) = -x^4 + x^3 + 2x + \pi = 0$$

Sabem que la primera arrel està en un interval de la forma $[a,0]$, on $a < 0$. Trobeu una a on pugeu aplicar el teorema de Bolzano. Feu el mateix per trobar un interval de la forma $[0,b]$ on estigui la segona arrel, on la $b > 0$.

Solució Volem aplicar el teorema de Bolzano a la funció $p(x) = -x^4 + x^3 + 2x + \pi$ en un interval de la forma $[a, 0]$, on $a < 0$. La funció $p(x)$ és un polinomi i per tant és una funció contínua. Prenem per exemple $a = -2$. Llavors tenim l'interval $[-2, 0]$. Mirem el signe als extrems de l'interval:

$$p(-2) = -(-2)^4 + (-2)^3 + 2 \cdot (-2) + \pi \simeq -24.85 < 0$$

$$p(0) = -(0)^4 + (0)^3 + 2 \cdot (0) + \pi = \pi > 0$$

Per tant hi ha un $c_1 \in (-2, 0)$ tal que $p(c_1) = 0$ i per tant c_1 és una arrel.

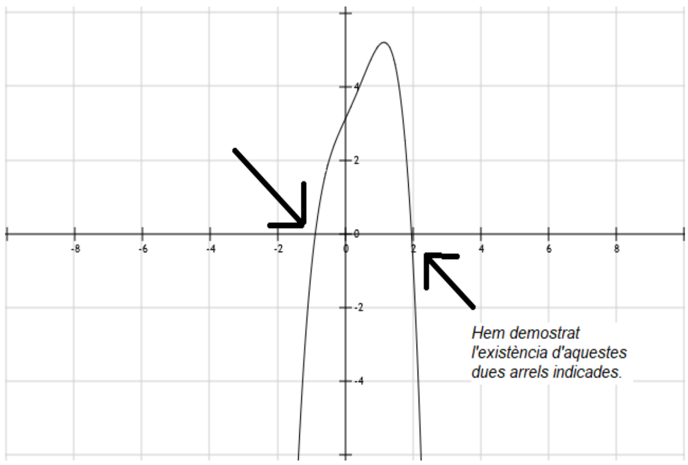
Anàlogament fem el mateix per trobar un interval $[0, b]$, amb $b > 0$. Prenem per exemple $b = 5$. Tenim l'interval $[0, 5]$. Mirem el signe als extrems de l'interval:

$$p(0) = -(0)^4 + (0)^3 + 2 \cdot (0) + \pi = \pi > 0$$

$$p(5) = -(5)^4 + (5)^3 + 2 \cdot (5) + \pi \simeq -486.85 < 0$$

Per tant hi ha un $c_2 \in (0, 5)$ tal que $p(c_2) = 0$ i per tant c_2 és una arrel. Hem aconseguit demostrar on són les arrels i per tant localitzar-les. *Qualsevol a, b que verifiqui les hipòtesis del teorema de Bolzano és vàlid, hem mostrat per $a = -2$ i $b = 5$ a mode d'exemple.*

Gràficament hem raonat el següent:



6.11 Activitats d'ampliació

Per tal de profunditzar més en el teorema de Bolzano proposo activitats addicionals d'ampliació:

6.11.1 Problemes

Problema 5 Tenim f una funció contínua en $[1, 5]$ amb $f(1) = -2$, $f(2) = -1$ i $f(5) = 3$. Raona si són certes les següents afirmacions:

1) f té una arrel en $[1, 5]$

2) f no té una arrel en $[1, 2]$.

3) f pot tenir més de 2 zeros en $[1, 5]$.

Problema 6 Aplica el teorema de Bolzano per provar que les funcions $f(x) = sin(2x)$ i $g(x) = 2x - 1$ es tallen en algun punt de l'interval $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Problema 7 A través del teorema de Bolzano podem assegurar que la funció $f(x) = |x|$ té alguna arrel al seu domini?

Problema 8 Raona si aquesta variació del teorema de Bolzano és certa: *Sigui f una funció qualsevol definida en un interval $[a, b]$ amb $f(a) \cdot f(b) < 0$. Aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

6.11.2 Solucions

Problema 5

1) L'afirmació és certa degut al fet que podem aplicar el teorema de Bolzano. La funció f és contínua i $f(1) = -2 < 0 < f(5) = 3$. Per tant com es compleixen les hipòtesis del teorema de Bolzano $\exists c$ tal que $c \in (1, 5)$ de manera que $f(c) = 0$.

2) L'afirmació és falsa. El fet que als extrems de l'interval la funció prengui valors del mateix signe ($f(1) = -2$ i $f(2) = -1$) impedeix aplicar el teorema de Bolzano. No obstant, com hem vist als apunts al exemple 3, no poder aplicar el teorema de Bolzano no implica que no puguin haver-hi arrels.

3) L'afirmació és certa. En aquest cas, com en 1), podem aplicar el teorema de Bolzano. Com també hem vist als apunts al exemple 2, aplicar el teorema de Bolzano implica que almenys hi ha una arrel, però en podrien haver moltes més. Bolzano només assegura una arrels, però no les quantifica. Per tant és cert que poden haver-hi 2 zeros en $[1, 5]$ amb les hipòtesis que tenim.

Problema 6 L'objectiu de l'exercici és veure que l'equació $f(x) = g(x)$ té solució a $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Resoldre

$$f(x) = g(x)$$

és equivalent a resoldre

$$f(x) - g(x) = 0$$

Aplicarem doncs el teorema de Bolzano a la funció $h(x) = f(x) - g(x)$ a l'interval $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. En efecte, si demostrem que $h(x)$ té una arrel c en $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ haurem resolt l'exercici ja que:

$$h(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = g(c)$$

Apliquem doncs el teorema de Bolzano. És clar que

$$h(x) = f(x) - g(x) = sin(2x) - (2x - 1) = sin(2x) - 2x + 1$$

és una funció contínua. Aleshores,

$$h(\frac{\pi}{4}) = sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) - 2(\frac{\pi}{4}) + 1 \simeq 0.42 > 0$$

$$h(\frac{\pi}{2}) = sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) - 2(\frac{\pi}{2}) + 1 \simeq -2.14 < 0$$

Per tant per Bolzano tenim almenys una arrel en $c \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ i l'exercici queda resolt.

Problema 7 El fet rellevant que hem de veure és que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Per tant donat que la funció mai prendrà imatges negatives serà impossible aplicar el teorema de Bolzano; amb altres paraules, a través de Bolzano mai podrem assegurar l'existència de cap arrel. Però malgrat aquest fet, f té una arrel en 0 ja que $f(0) = |0| = 0$.

Problema 8 L'objectiu d'aquest exercici és veure que la condició de continuïtat és totalment necessària. L'enunciat és fals degut a que no exigim continuïtat; precisament la diferència del teorema de Bolzano i aquest enunciat rau en el fet que f és una funció qualsevol i per tant no té perquè ser contínua. Com a contraexemple per veure que l'enunciat és fals podríem definir la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Aquí podem veure que $f(-1) = -1$ i $f(1) = 1$. Però no és cert que $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$ ja que la funció $f(x)$ en cap cas pren el valor 0, només pren els valors -1 i 1. Amb altres paraules, $f(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$. El fet essencial que fa que no hi hagi una arrel és la discontinuïtat en $x = 0$.

7 Conclusions

Com hem mostrat al llarg del treball, la idea principal és anar veient gradualment totes les facetes del teorema de Bolzano: la respectiva construcció matemàtica, les aplicacions, les generalitzacions i finalment com portar-lo a l'aula. Donada la dualitat que presenta aquest treball (la part teòrica i la part didàctica) les conclusions s'han de establir en aquestes dues línies.

Abans d'escriure la meva visió personal d'haver treballat el tema del teorema de Bolzano m'agradaria reflexar que tot el que jo personalment pugui dir sobre els resultats matemàtics mostrats al treball no són més que comentaris addicionals ja que les matemàtiques ja són conclusions en si mateixes.

Malgrat que al segle XXI el teorema de Bolzano ens pot semblar un resultat bàsic en l'anàlisi matemàtic el fet és que quan es va provar per primer cop no va resultar fàcil. Demostrar formalment el teorema requereix les definicions ($\epsilon - \delta$) de límits i continuïtat. El problema radica en com escriure formalment el concepte de continuïtat en funcions. I va ser Bolzano el primer el qual ho va poder demostrar rigorosament. Hem de tenir en compte que per ell això era fonamental, de fet part de la seva obra es basava en com es constituïa una prova matemàtica correcta.

Aquest recorregut és el que hem vist en primera instància; és la part essencial que ens permet desenvolupar la resta: les aplicacions i la generalització. M'ha semblat interessant provar els diferents resultats fonamentals corresponents al concepte de continuïtat: això ens dóna perspectiva i ens ajuda a situar el teorema de Bolzano. També cal dir que he provat el teorema de Bolzano de dues formes: la primera manera ha estat per bisecció i la segona per el teorema de conservació del signe. Això ens mostra que en matemàtiques per dos camins independents podem arribar a la mateixa conclusió i ens mostra dues maneres de treballar amb funcions contínues. El fet de mostrar diferents resultats de continuïtat ens demostra també el poder que tenen les definicions de límit i continuïtat; veritablement la caracterització d'una funció contínua té moltíssimes conseqüències i ens facilita poder deduïr moltes propietats d'aquest tipus de funcions.

Un cop acabada aquesta primera part de construcció i fonamentació la idea és veure l'aplicació que en resulta de tot el que hem estat treballant. Treballar a nivell abstracte és essencial per tot matemàtic; però també és important saber treballar empíricament. D'aquí neix la part més experimental del treball a nivell teòric: programar els diferents algoritmes per trobar a zeros a funcions i estudiar-los detingudament. Cada cas és diferent i cada mètode funciona de forma diferent. És important conèixer molts algoritmes i saber com funcionen i les propietats que tenen per tal d'escollir un algoritme que s'adeqüi al problema que es vol estudiar. Addicionalment haver programat en MATLAB m'ha servit per treballar amb un altre llenguatge de programació diferent al que s'ha vist al grau on tot es programa en C. Personalment penso que per controlar la precisió és millor treballar en C. L'únic que això té un preu: és més senzill treballar en MATLAB. Tot depèn de la precisió que es necessiti ja que programar en MATLAB resulta més senzill i donat que hi ha una infinitat de funcions preprogramades és un element important a considerar ja que podem programar més ràpidament. Novament cada cas és diferent i cal sospesar els aventatges i desavantatges de cada eina de programació.

Finalment per acabar la part teòrica haig d'esmentar les generalitzacions del teorema de Bolzano. La primera vegada que em van presentar el teorema de Bolzano va ser a l'assignatura d'Introducció al Càlcul Diferencial. Curiosament posteriorment a l'assignatura de càlcul diferencial en diverses variables no va aparèixer aquest teorema en diverses variables. Em va sorprendre que no ens presentessin el teorema de Bolzano en diverses variables ja que en una variable era un teorema molt important, tot i que més endavant vaig entendre perquè no ens en van parlar: es requereixen propietats topològiques que en aquell moment no s'han vist. Al llarg del grau ens han presentat diferentes generalitzacions de molts teoremes però en moltes d'elles hi ha un pas abismal de treballar en una variable o més. Pensem, per exemple, en la noció de derivada en dimensió superior a 1, que exigeix un gran esforç, temps i pràctica per a la correcta maduració o en els teoremes integrals clàssics de l'anàlisi vectorial, com els Teoremes de Green i Stokes. El teorema de Bolzano no n'és l'excepció. Malgrat això, he volgut presentar diverses generalitzacions possibles per tal d'entendre al problema que ens estem enfrontant al buscar una generalització del teorema de Bolzano. De fet, només començar la secció faig una reflexió inicial per exposar detalladament tot el que estic comentant aquí.

Un cop acabada tota la part teòrica vull parlar d'una part més pràctica: el caire didàctic del treball. La motivació per haver escollit tema era clara: la meva vocació per la docència. Des de fa temps ja faig classes particulars de matemàtiques i malgrat dista molt de fer classe a un institut puc afirmar que m'agrada molt ensenyar. Degut a aquest fet, no vaig dubtar en quin departament dirigir-me. No obstant, en el semestre que he realitzat el treball de fi de grau m'he trobat amb algunes complicacions: la més important és no haver pogut posar en pràctica la proposta didàctica en un institut. Malgrat que ho tingués pactat, la crisi sanitària degut al coronavirus em va impedir dur-ho a terme.

La proposta didàctica que he realitzat la he basat en la meva experiència com a estudiant i professor particular. A nivell personal crec que la dificultat del que he proposat rau en què mai han llegit uns apunts matemàtics. Recordo que quan era estudiant d'institut, em costava molt agafar el llibre i posar-me a entendre'l. Penso que és interessant facilitar uns apunts als alumnes per acostumar-los a treballar d'una forma una mica diferent, no només a través del professor i la pissara. En aquest sentit, he intentat redactar al màxim de detalladament els apunts per tal que siguin complets i moltes situacions en què es puguin trobar quedin explicades. És un pas important per ser autodidàctiques, ja que la capacitat d'aprendre per un mateix em sembla essencial. No obstant això, la meva idea és explicar-ho tot ja que és la tasca de tot docent, però el fet de facilitar apunts ja és un pas.

Espero que tard o d'hora ho pugui portar a l'aula ja que aquesta part l'he preparat amb molta dedicació perquè per mi la docència sempre ha estat una opció molt real a l'hora d'enfrontar-me al món laboral.

Referències

[1] J. M. Ortega: Introducció a l'anàlisi matemàtica, *Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 1990.*

[2] C. Perelló: Càlcul infinitesimal amb mètodes numèrics i aplicacions, *Biblioteca Universitària, Enciclopèdia Catalana.*

[3] A. Aubanell, A. Benseny, A. Delshams: Eines bàsiques de càlcul numèric, *Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1991.*

[4] J. D. Faires, R. Burden: Métodos Numéricos, *Thomson, 2003.*

[5] MacTutor History of Mathematics archive
`http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolzano.html` -, [consulta: 15 d'abril de 2020]

[6] A. Cañada: Introducción al análisis no lineal con aplicaciones a ecuaciones diferenciales e integrales, *Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, 1995.*

[7] A. Cañada, S. Villegas: ¿El Teorema de Bolzano en varias variables?, *Gac. R. Soc. Mat. Esp. 7 (2004), 101-121.*

[8] G. Dinca Y J. Mawhin: Brouwer Degree and Applications, *2009, Preprint.* `https://www.ljll.math.upmc.fr-`, [consulta: 10 de juny de 2020]

[9] J. Peñarrocha, A. Santamaria, J. Vidal: Mètodes matemàtics. Variable complexa, *Educació. Sèrie Materials, 2006.*

[10] Treball de fi de grau: J.F Sánchez: El teorema de Bolzano y sistemas de ecuaciones. *Universidad de Granada, 2016.*

[11] Apunts de l'assignatura d'introducció al càlcul diferencial. *Universitat de Barcelona, 2014.*

[12] Apunts de l'assignatura de topologia. *Universitat de Barcelona, 2016.*