Reaseguro finite risk en ambiente financiero estocástico

Pons Cardell, M.A.; Sarrasí Vizcarra, F.J.

mapons@ub.edu; sarrasi@ub.edu

Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial

Universidad de Barcelona

RESUMEN

Una de las características del reaseguro *finite risk* es la existencia de una cuenta de experiencia, que está formada por las primas que cobra el reasegurador, junto con su rendimiento financiero, y su finalidad es financiar los siniestros que éste ha de satisfacer a la cedente en el plazo establecido. El objetivo de este trabajo es diseñar un modelo que permita determinar el saldo estimado o reserva que debe de tener en cada periodo anual la cuenta de experiencia para garantizar su solvencia dinámica, teniendo en cuenta la experiencia de siniestralidad de la cartera del reasegurador y de cada cedente. Para el cálculo de la prima de reaseguro y del saldo de la cuenta de experiencia se asumirá ambiente financiero estocástico, de modo que la prima de reaseguro dependerá también de otros parámetros como la volatilidad del tipo de interés o de la aversión al riesgo.

ABSTRACT

One of the characteristics of the finite risk reinsurance is the existence of an found of experience, which is constituted by the premiums charged by the reinsurer, together with his financial incomes, and his objective is to finance the claims to be satisfied to the insurer in the specified period. The objective of this work is to design a model that allows us to determinate the reserve that the found of experience should have in every annual period in order to guarantee its dynamic solvency, taking into the experience of the claims of the reinsurer's portfolio and of each insurance company. To calculate the reinsurance premium and the reserve of the found of experience, stochastic financial environment is assumed, so that the reinsurance premium will also depend on other parameters such as interest rate volatility or risk aversion.

***Palabras claves*:** Reaseguro; finite risk; credibilidad; cuenta de experiencia; solvencia; ambiente estocástico; volatilidad.

***Keywords*:** Reinsurance; finite risk; credibility; found of experience; solvency; stochastic environment; volatility.

***Área temática*:** Matemática Financiera y Actuarial.

1. INTRODUCCIÓN

El *finite risk* es una forma de reaseguro que se sirve de los mismos instrumentos que el reaseguro tradicional, pero presenta unos rasgos característicos. Los contratos son plurianuales lo que permite constituir una relación contractual estable con la compañía de seguros, también llamada cedente, a medio y largo plazo. El reasegurador constituye un fondo denominado cuenta de experiencia, que está integrado por las primas de reaseguro, y por su producto financiero, y de la misma son liquidados los siniestros a su cargo, por tanto la prima de reaseguro depende del tipo de interés que genera la cuenta de experiencia. El reaseguro *finite risk* no sólo cubre de forma limitada el riesgo de suscripción, es decir, el riesgo que los siniestros reales sean mayores de lo esperado, como sucede en las modalidades de reaseguro tradicionales, sino que también, asume otros tipos de riesgos, como el riesgo de tiempos o *timing risk* y el riesgo de interés. Por último comentar que la cedente puede contratar un reaseguro *finite risk* en cualquiera de las modalidades de reaseguro tradicionales, nosotros estudiaremos las modalidades Cuota Parte y Exceso de Pérdida.

El objetivo de este trabajo se centra en el análisis de la solvencia dinámica de la cuenta de experiencia de cada una de las cedentes que integran la cartera del reasegurador. Para calcular el saldo estimado o reserva de la cuenta de experiencia al final de cada periodo anual vamos a suponer que la ley financiera que rige dicha cuenta, es decir, aquella que nos proporciona su rendimiento financiero durante el horizonte temporal considerado, presenta un comportamiento estocástico, por tanto, para un instante dado, τ, la ley financiera asociada a dicho instante, $\tilde{\rho}(\tau)$, es una variable aleatoria.

Para calcular la prima de reaseguro vamos a aplicar la misma ley financiera que rige la cuenta de experiencia y el reasegurador asumirá la misma situación de riesgo que la entidad financiera donde está depositada dicha cuenta.

Trabajaremos con un factor de capitalización estocástico, posteriormente sustituiremos la evolución estocástica del proceso por una trayectoria determinada de acuerdo con la regla de decisión adoptada, esto es, según el criterio de decisión asumido. Vamos a plantear la ecuación de equilibrio al final del horizonte temporal de la cuenta de experiencia, sin aplicar la propiedad de escindibilidad financiera en el factor de capitalización estocástico, ya que éstos, según el criterio de decisión que asumamos, no siempre la satisfacen; de esta manera garantizamos que el saldo de la cuenta de experiencia al final del plazo de la operación sea cero, ya que utilizaremos el mismo factor de capitalización en el cálculo de la prima y en el cálculo del saldo de la cuenta de experiencia al final de cada año.

Vamos a asumir que la cartera del reasegurador está formado por un conjunto de cedentes que operan en un mismo ramo, que conocemos las distribuciones de probabilidad del ramo objeto de estudio y que hay independencia entre las cedentes y dentro de cada cedente.

Supondremos que el reasegurador asume todos los riesgos de la operación y corresponde al reasegurador garantizar la solvencia de la cuenta de experiencia, por tanto, las posibles aportaciones que deban realizarse a ésta serán a su cargo. A la hora de determinar los parámetros de las distribuciones de probabilidad de cada cedente, no sólo tendremos en cuenta las características comunes, mismo ramo y pertenencia a la misma cartera del reasegurador, sino también la historia de siniestralidad de cada una de ellas, utilizando para ello modelos de credibilidad. En el modelo que plantearemos calcularemos, en el origen de la operación, el saldo estimado de la cuenta de experiencia al final de cada año y supondremos que los parámetros de las funciones de distribución, y el resto de variables del modelo, son conocidos en el origen del contrato y se mantienen constantes a lo largo del plazo.

Para estimar la siniestralidad futura a cargo del reasegurador utilizaremos el método de simulación de Monte-Carlo.

2. FACTOR DE CAPITALIZACIÓN ESTOCÁSTICO

Si la ley financiera que rige la cuenta de experiencia para el horizonte temporal considerado presenta un comportamiento estocástico, para un instante dado, τ, la ley financiera asociada a dicho instante, $\tilde{\rho}(\tau)$, es una variable aleatoria.

Si asumimos que el tanto efectivo estricto sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica para el horizonte temporal considerado:

$$\tilde{\rho}(\tau) \cdot d\tau = \rho \cdot d\tau + \sigma \cdot dW(\tau) \qquad \forall \tau \in [T, T']$$

siendo:

- ρ: valor medio esperado de la ley financiera en el intérvalo $[T,T']$,
- σ: parámetro constante que recoge la volatilidad de la ley financiera en el intervalo $[T,T']$,
- $W(\tau)$: proceso de Wiener estandar que perturba el tanto efectivo estricto,

el factor financiero de capitalización estocástica se obtiene a partir de la solución de la siguiente ecuación diferencial[1]:

$$d\tilde{C}(\tau)=\tilde{C}(\tau)\cdot\tilde{\rho}(\tau)\cdot d\tau=\tilde{C}(\tau)\cdot\rho\cdot dt+\tilde{C}(\tau)\cdot\sigma\cdot dW(\tau)\quad \forall\,\tau\in[T,T']$$

donde $\tilde{C}(\tau)$ es la variable aleatoria cuantía equivalente en τ.

Aplicando el Lema de Itô en el intervalo $[T,T']$, con la condición de contorno inicial $\tilde{C}(T)=C(T)$, la solución de la ecuación diferencial es:

$$\tilde{C}(T')=C(T)\cdot e^{\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T'-T)+\sigma\cdot[W(T')-W(T)]}$$

de donde el factor financiero de capitalización estocástica viene dado por:

$$\tilde{f}(T,T')=\frac{\tilde{C}(T')}{C(T)}=e^{\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T'-T)+\sigma\cdot[W(T')-W(T)]}$$

Teniendo en cuenta que $W(T')-W(T)\sim N(0,T'-T)$ entonces:

$$\tilde{f}(T,T')\sim logN\left(\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T'-T),\sigma^2\cdot(T'-T)\right)$$

siendo su esperanza matemática y su varianza, respectivamente,

$$E\left[\tilde{f}(T,T')\right]=e^{\rho\cdot(T'-T)}\quad \text{y}\quad Var\left[\tilde{f}(T,T')\right]=e^{2\cdot\rho\cdot(T'-T)}\cdot\left(e^{\sigma^2\cdot(T'-T)}-1\right)$$

Si definimos $\tilde{Z}(T'-T)=\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T'-T)+\sigma\cdot[W(T')-W(T)]$ y $t=T'-T$ podemos escribir $\tilde{C}(T')=C(T)\cdot e^{\tilde{Z}(t)}$ y $\tilde{f}(T,T')=e^{\tilde{Z}(t)}$, donde $\tilde{Z}(t)\sim N\left(\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t,\sigma^2\cdot t\right)$.

---

[1] Una demostración a través del Lema de Itô de la solución de la ecuación diferencial estocástica puede verse entre otros en Mallaris, A.G. et al (1982), pp. 118-119 y en Shuss, Z. (1980), pp. 89-90.

2.1. Criterios de decisión

Adoptar un criterio de decisión supondrá sustituir la evolución estocástica del proceso por una trayectoria determinada de acuerdo con la regla de decisión adoptada. Hay distintos criterios de decisión, siguiendo a Alegre-Mayoral consideraremos los criterios de decisión[2] de la esperanza matemática, el del percentil y el de la desviación tipo.

- **Criterio de la esperanza matemática**

Este criterio lo vamos a simbolizar por γE_λ y se define como $\gamma E_\lambda\left[\tilde{C}(T')\right] = E\left[\tilde{C}(T')\right] - \lambda \cdot E\left[\tilde{C}(T')\right]$, donde $\lambda \geq 0$ es el recargo de seguridad que recoge el nivel de aversión al riesgo del decisor proporcionalmente a la esperanza de la cuantía final estocástica.

Partiendo de la expresión general $\tilde{C}(T') = C(T) \cdot \tilde{f}(T,T')$ resulta,

$$\gamma E_\lambda\left[\tilde{C}(T')\right] = E\left[\tilde{C}(T')\right] - \lambda \cdot E\left[\tilde{C}(T')\right] = (1-\lambda) \cdot E\left[C(T) \cdot \tilde{f}(T,T')\right] =$$
$$= C(T) \cdot (1-\lambda) \cdot E\left[\tilde{f}(T,T')\right] = C(T) \cdot (1-\lambda) \cdot e^{\rho \cdot t}$$

Por tanto, el factor financiero asociado a este criterio viene dado por la siguiente expresión:

$$\gamma E_\lambda\left[\tilde{f}(T,T')\right] = \frac{\gamma E_\lambda\left[\tilde{C}(T')\right]}{C(T)} = (1-\lambda) \cdot e^{\rho \cdot t} = e^{\rho \cdot t + ln(1-\lambda)} = f_E(T,T')$$

Cabe destacar que $f_E(T,T')$ es independiente de la volatilidad, σ, que perturba la ley financiera y no verifica la propiedad de escindibilidad financera. En el caso particular que $\lambda = 0$, $f_E(T,T')$ coincide con el de una ley financiera estacionaria cierta, cumpliendo la propiedad de la escindibilidad financiera y la de reciprocidad.

Como el parámetro λ desplaza la función $f_E(T,T')$ hacia abajo, siempre se verifica que si $\lambda > 0 \Rightarrow \exists T^* \in [0,T'] \,/\, f_E(0,T^*) < 1$, por tanto no tiene sentido financiero considerar $\lambda > 0$ en nuestro caso, ya que pueden producirse siniestros dentro del intervalo $[0,T^*]$.

[2] Ver Mayoral, R. (1997), pp. 53-73.

➢ **Criterio del percentil**

Este criterio lo vamos a simbolizar por γ_ε, donde ε es la probabilidad que con la capitalización estocástica resulte un valor final inferior al equivalente cierto dado por el criterio.

Partiendo de la expresión general $\tilde{C}(T')=C(T)\cdot\tilde{f}(T,T')$, el criterio del percentil se define como $\gamma_\varepsilon\left[\tilde{C}(T')\right]=C(T)\cdot\gamma_\varepsilon\left[\tilde{f}(T,T')\right]$ donde $P\left[\tilde{f}(T,T')<\gamma_\varepsilon\left[\tilde{f}(T,T')\right]\right]=\varepsilon$.

Si tenemos en cuenta que $\tilde{Z}(t)\sim N\left(\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t,\sigma^2\cdot t\right)$, su percentil y_ε viene dado por:

$$y_\varepsilon=\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t+z_\varepsilon\cdot\sigma\cdot\sqrt{t}$$

siendo z_ε el percentil ε de la $N(0,1)$ tal que si $\xi\sim N(0,1)\rightarrow P[\xi<z_\varepsilon]=\varepsilon$. Entonces $\gamma_\varepsilon\left[\tilde{f}(T,T')\right]$ vendrá dado por la transformación exponencial del percentil de la variable aleatoria $\tilde{Z}(t)$, y_ε:

$$\gamma_\varepsilon\left[\tilde{f}(T,T')\right]=\frac{\gamma_\varepsilon\left[\tilde{C}(T')\right]}{C(T)}=e^{y_\varepsilon}=e^{\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t+z_\varepsilon\cdot\sigma\cdot\sqrt{t}}=f_\varepsilon(T,T')$$

Este criterio introduce dos nuevos parámetros respecto al factor financiero cierto asociado a una ley estacionaria: σ^2, parámetro que recoge la variabilidad del precio en el mercado financiero, y ε, parámetro subjetivo que recoge el nivel de aversión al riesgo del decisor.

Consideraremos que el decisor tiene preferencia por el riesgo si las variaciones del factor financiero ante las variaciones en la volatilidad del tanto instantáneo tienen el mismo signo, en caso contrario diremos que el decisor tiene aversión al riesgo. Cuanto más arriesgado es el decisor la función $f_\varepsilon(T,T')$ proporciona mayores valores finales equivalentes. Por tanto, en este criterio se pueden contemplar dos situaciones frente al riesgo por parte del decisor, aversión o preferencia por el riesgo según el valor que tome ε.

El comportamiento de la función $f_\varepsilon(T,T')$ depende del parámetro de subjetivo ε:

- Si $\varepsilon\geq 0{,}5$ entonces $f_\varepsilon(T,T')$ es creciente $\forall t>0$.

- Si $\varepsilon < 0{,}5$ entonces $f_{\varepsilon}(T,T')$ no siempre es creciente $\forall t > 0$.

Cabe destacar que $f_{\varepsilon}(T,T')$ no verifica la propiedad de escindibilidad financiera.

➢ Criterio de la desviación tipo

Este criterio lo vamos a simbolizar por γ_D, donde D es el símbolo de la desviación tipo, y se define como $\gamma_D\left[\tilde{C}(T')\right] = E\left[\tilde{C}(T')\right] - k \cdot D\left[\tilde{C}(T')\right]$, siendo k el parámetro que recoge la aversión al riesgo del decisor.

Partiendo de la expresión general $\tilde{C}(T') = C(T) \cdot \tilde{f}(T,T')$, resulta,

$$\gamma_D\left[\tilde{C}(T')\right] = E\left[\tilde{C}(T')\right] - k \cdot D\left[\tilde{C}(T')\right] = E\left[C(T) \cdot \tilde{f}(T,T')\right] - k \cdot D\left[C(T) \cdot \tilde{f}(T,T')\right] =$$
$$= C(T) \cdot \left[E\left[\tilde{f}(T,T')\right] - k \cdot D\left[\tilde{f}(T,T')\right]\right] = C(T) \cdot \left[e^{\rho \cdot t} - k \cdot \sqrt{e^{2\cdot\rho\cdot t} \cdot \left(e^{\sigma^2 \cdot t} - 1\right)}\right] =$$
$$= C(T) \cdot e^{\rho \cdot t} \cdot \left(1 - k \cdot \sqrt{e^{\sigma^2 \cdot t} - 1}\right)$$

De modo que el factor financiero asociado a este criterio es:

$$\gamma_D\left[\tilde{f}(T,T')\right] = \frac{\gamma_D\left[\tilde{C}(T')\right]}{C(T)} = e^{\rho \cdot t} \cdot \left(1 - k \cdot \sqrt{e^{\sigma^2 \cdot t} - 1}\right) = f_D(T,T')$$

El factor obtenido introduce también dos nuevos parámetros respecto al factor financiero cierto asociado a una ley estacionaria: σ^2, parámetro que recoge la variabilidad del precio en el mercado financiero, y k, parámetro subjetivo que recoge el nivel de aversión al riesgo del decisor. $f_D(T,T')$ es inversamente proporcional a k y σ^2. Sólo tiene sentido financiero para aquellos valores de k que satisfagan $f_D(T_1,T_2) \geq 1 \quad \forall T_1, T_2 \in [T,T'] \quad y \quad T_1 > T_2$.

Cabe destacar también que la función $f_D(T,T')$ tampoco cumple la propiedad de la escindibilidad financiera. En los casos particulares que $k = 0$, o bien, $\sigma^2 = 0$, $f_D(T,T') = e^{\rho \cdot t}$, esto es, coincide con el factor financiero cierto de una ley estacionaria.

3. PRIMA DE REASEGURO FINITE RISK Y SALDO ESTIMADO DE LA CUENTA DE EXPERIENCIA

En el cálculo de la prima de reaseguro finite risk hay que tener en cuenta no sólo el coste y el número de siniestros sino también el momento de pago de los mismos, de manera que el proceso de riesgo viene definido por las siguientes variables aleatorias:

$$(X_1, X_2, ..., X_{N_t}, T_1, T_2, ..., T_{N_t}, N_t)$$

donde:

- N_t: Variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo $\left[0, n\right]$, con n expresado en años.
- X_i : Variable aleatoria coste del i-ésimo siniestro ocurrido en el intervalo $\left[0, n\right]$, con $i = 1, 2, ..., N_t$. Asumiremos que son independientes y están equidistribuidas.
- T_i : Variable aleatoria momento de pago, expresado en años, del i-ésimo siniestro, con $i = 1, 2, ..., N_t$.

En el reaseguro Cuota Parte, la variable aleatoria coste del siniestro i-ésimo a cargo del reasegurador, X_i^R, con $i = 1, 2, ..., N_t$ viene dada por:

$$X_i^R = \begin{cases} k_R \cdot X_i & k_R \cdot X_i < M_R \\ M_R & k_R \cdot X_i \geq M_R \end{cases}$$

donde k_R es el coeficiente de cesión al reasegurador, expresado en tanto por uno, y M_R es el límite del contrato de reaseguro, y en el reaseguro Exceso de Pérdida por:

$$X_i^R = \begin{cases} 0 & X_i < M \\ X_i - M & M \leq X_i \leq M + M_R \\ M_R & X_i \geq M + M_R \end{cases}$$

donde M es el pleno de retención de la cedente y M_R es la capacidad máxima del contrato del reasegurador.

Para calcular la prima de reaseguro trabajaremos con un factor de capitalización estocástico y el reasegurador replicará la misma posición respecto al riesgo que la entidad financiera que gestiona la cuenta de experiencia, por tanto, aplicará la misma ley financiera y parámetros de riesgos que rigen dicha cuenta.

Plantearemos la ecuación de equilibrio al final del horizonte temporal de la cuenta de experiencia, sin aplicar la propiedad de escindibilidad financiera en el factor de capitalización ya que, como se ha visto anteriormente, no siempre se cumple. De esta manera garantizamos que el saldo de la cuenta de experiencia al final del plazo de la operación sea cero, ya que utilizaremos el mismo factor de capitalización tanto en el cálculo de la prima como en el cálculo del saldo de la cuenta de experiencia al final de cada año.

La variable aleatoria valor final del coste total de los siniestros a cargo del reasegurador, C_n^R, asociado al intervalo $\left[0,n\right]$, vamos a definirla como el valor final del coste de cada uno de los N_t siniestros a cargo del reasegurador, X_i^R, con $i=1,2,...,N_t$, que se producen en dicho intervalo:

$$C_n^R = \sum_{i=1}^{N_t} X_i^R \cdot \tilde{f}(T_i,n) \qquad \forall T_i \in \left[0,n\right]$$

con $\tilde{f}(T_i,n) \sim logN\left(\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\left(n-T_i\right), \sigma^2 \cdot \left(n-T_i\right)\right) \quad \forall T_i \in \left[0,n\right]$.

Si aplicamos al factor financiero de capitalización, $\tilde{f}(T_i,n) \quad \forall T_i \in \left[0,n\right]$ un criterio de decisión éste queda transformado en $f_C(T_i,n)$, cuya expresión dependerá del criterio utilizado, por tanto ahora su aleatoriedad vendrá determinada únicamente por la variable aleatoria T_i:

$$\tilde{f}(T_i,n) \rightarrow f_C(T_i,n) = \begin{cases} f_E(T_i,n) \\ f_\varepsilon(T_i,n) \\ f_D(T_i,n) \end{cases} \qquad \forall T_i \in \left[0,n\right]$$

de modo que:

$$C_n^R = \sum_{i=1}^{N_t} X_i^R \cdot f_C(T_i,n) \qquad \forall T_i \in \left[0,n\right]$$

La prima anual de reaseguro P_s^R, de temporalidad d, siendo $1 \le d \le n$, que se satisface en s, con $s=0,1,...,n-1$ años, se obtiene de la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\sum_{s=0}^{d-1} P_s^R \cdot f_C(s,n) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i^R \cdot f_C(T_i,n) \qquad \forall T_i \in \left[0,n\right]$$

Si la prima de reaseguro es constante entonces $P_s^R = P^R$ para $s=0,1,...,d$, por tanto:

$$\sum_{s=0}^{d-1} P^R \cdot f_C(s,n) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i^R \cdot f_C(T_i,n) \quad \rightarrow \quad P^R = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i^R \cdot f_C(T_i,n)}{\sum_{s=0}^{d-1} f_C(s,n)}$$

En el caso particular de prima única, $d=1$:

$$P_0^R = \Pi^R = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i^R \cdot f_C(T_i,n)}{f_C(0,n)}$$

Uno de los objetivos del reasegurador es garantizar que el saldo real de la cuenta de experiencia se ajuste al saldo estimado, realizando para ello las aportaciones necesarias para cubrir esta diferencia. Vamos a calcular, en el origen de la operación, el saldo estimado de la cuenta de experiencia al final de cada año, con los parámetros de siniestralidad conocidos en el origen y utilizando el mismo criterio de decisión que en el cálculo de la prima de reaseguro.

Vamos a simbolizar por S_j^e, con $j=1,2,...,n$, la variable aleatoria saldo estimado de la cuenta de experiencia en j, que se obtiene, valorando en j, la diferencia entre las primas de reaseguro satisfechas y los siniestros estimados a cargo del reasegurador ocurridos hasta j, incluido:

- En el caso de primas periódicas:

$$S_j^e = \sum_{s=0}^{j} P_s^R \cdot f_C(s,j) - \sum_{i=1}^{N_{[0,j]}} X_{i,[0,j]}^R \cdot f_C(T_i,j) \quad \text{con} \quad j=1,...,n$$

- y en el caso de prima única:

$$S_j^e = \Pi^R \cdot f_C(0,j) - \sum_{i=1}^{N_{[0,j]}} X_{i,[0,j]}^R \cdot f_C(T_i,j) \quad \text{con} \quad j=1,...,n$$

siendo $N_{[0,j]}$ la variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo $[0,j]$, con $j \le n$, $X_{i,[0,j]}^R$ la variable aleatoria coste del siniestro i-ésimo a cargo del reasegurador, ocurrido en el intervalo $[0,j]$, con $i=1,...,N_{[0,j]}$ y $f_C(T,T')$, con $T'>T$, el factor financiero de capitalización bajo el criterio de decisión considerado.

Para poder calcular la prima de reaseguro P^R y el saldo S_j^e, deberemos simular las trayectorias de evolución de la siniestralidad del reaseguro capitalizadas, o bien hasta n, $\sum_{i=1}^{N_t} X_i^R \cdot f_C(T_i,n) \quad \forall T_i \in [0,n]$, o bien hasta j, $\sum_{i=1}^{N_{[0,j]}} X_{i,[0,j]}^R \cdot f_C(T_i,j)$ con $j=1,...,n$. El método de simulación que utilizaremos será Monte-Carlo.

Una vez simuladas las trayectorias aplicaremos el criterio de la esperanza matemática. Si las primas de reaseguro son constantes:

$$E[P^R] = \frac{E\left[\sum_{i=1}^{N_t} X_i^R \cdot f_C(T_i,n)\right]}{\sum_{s=0}^{d-1} f_C(s,n)}$$

$$E[S_j^e] = \sum_{s=0}^{j} E[P^R] \cdot f_C(s,j) - E\left[\sum_{i=1}^{N_{[0,j]}} X_{i,[0,j]}^R \cdot f_C(T_i,j)\right] \qquad j=1,...,n$$

Cabe destacar que cuando $f_C(T,T') = f_E(T,T') = (1-\lambda)\cdot e^{\rho\cdot t}$ la prima esperada es independiente del parámetro de aversión al riesgo:

$$E[P^R] = \frac{E\left[\sum_{i=1}^{N_t} X_i^R \cdot e^{\rho\cdot(n-T_i)}\right]}{\sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho\cdot(n-s)}}$$

4. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Para poder calcular la variable aleatoria saldo estimado, S_j^e, deberemos asumir hipótesis respecto a las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias que intervienen en el proceso de riesgo:

$$(X_1, X_2, ..., X_{N_t}, T_1, T_2, ..., T_{N_t}, N_t)$$

Asumiremos que la variable aleatoria X_i, coste del i-ésimo siniestro ocurrido en el intervalo $[0,n]$, con $i=1,2,...,N_t$, se distribuye según una función de distribución exponencial de parámetro μ_0, $X_i \sim Exp(\mu_0)$, siendo $1/\mu_0$ el coste medio de los siniestros en el intervalo $[0,n]$.

También asumiremos que la variable aleatoria tiempo de interocurrencia, en años, entre dos siniestros en el intervalo $[0,n]$, $T_s - T_{s-1}$, sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_0 > 0$, para $s = 1,2,...,N_t$. Bajo esta hipótesis queda definida la distribución de probabilidad del número de siniestros N_t, ya que si $T_s - T_{s-1} \sim Exp(\lambda_0)$ para $s = 1,2,...,N_t$ y $\lambda_0 > 0$ entonces $N_t \sim P(\lambda_0 \cdot n)$.

A partir de $T_s - T_{s-1}$ podemos determinar la variable aleatoria T_i con $i = 1,2,...,N_t$ por suma:

$$T_i = \sum_{s=1}^{i} T_s - T_{s-1} \quad \text{con} \quad T_0 = 0$$

Como la variable aleatoria número de siniestros, N_t, sigue una distribución de Poisson, su esperanza coincide con el valor del parámetro de la distribución, esto es, $E(N_t) = \lambda_0 \cdot n$, pudiéndose interpretar λ_0 como el número medio anual de siniestros. El parámetro λ_0 también nos servirá para calcular el tiempo medio entre dos siniestros, dado que $E(T_s - T_{s-1}) = \dfrac{1}{\lambda_0}$.

4.1. Coste medio y número medio de siniestros

El coste medio o esperanza matemática de la variable aleatoria X_i, con $i = 1,2,...,N_t$, vamos a definirla como $E(X_i) = {}^{1}\!/_{\mu_0} = \alpha_0$, la cual vendrá determinada por la experiencia de siniestralidad de la cedente y/o de la cartera. Como ya hemos dicho, la variable aleatoria número de siniestros, N_t, sigue una distribución de Poisson y su esperanza es $E(N_t) = \lambda_0 \cdot n$, donde λ_0 se interpreta como el número medio anual de siniestros en el intervalo $[0,n]$, parámetro que deberemos estimar.

Para estimar el coste medio, α_0, y el número medio anual de siniestros, λ_0, de cada cedente, nos podemos encontrar frente a dos posibles escenarios:

- No disponemos de experiencia de siniestralidad pasada de la cedente. En este caso, el coste medio y el número medio de siniestros para esta cedente vendrán dados por el coste y número medio del ramo.

- Disponemos de experiencia de siniestralidad pasada de la cedente. En este otro caso aplicaremos la Teoría de la Credibilidad para discriminar el coste medio y el número medio de siniestros de cada cedente, en función de su propia historia de siniestralidad, pero teniendo en cuenta también la experiencia de siniestralidad de la cartera.

Para determinar el coste medio, α_0, y número medio de siniestros, λ_0, vamos a asumir la existencia de independencia entre las cedentes, así como que los parámetros de riesgo están idénticamente distribuidos. El estimador para α_0 lo obtendremos aplicando el modelo de credibilidad de Bühlmann-Straub[3], ya que suponemos que el reasegurador dispone de información respecto al coste medio de los siniestros ocurridos desde hace H años, a contar desde 0, y del número de siniestros ocurridos cada año, para cada una de las cedentes. El estimador del parámetro número medio de siniestros, λ_0, vamos a obtenerlo aplicando el modelo de credibilidad de Bühlmann[4] , ya que suponemos que el reasegurador dispone únicamente de información respecto al número de siniestros ocurridos desde hace H años, a contar desde 0 , para cada una de las cedentes.

5. APLICACIÓN NUMÉRICA

Vamos a considerar una compañía de reaseguros que contrata un reaseguro *finite risk* para un determinado ramo, con tres compañías de seguros (cedentes). La compañía de reaseguros dispone hoy, $j = 0$, de información respecto al coste de los siniestros, expresados en miles de euros, y al momento de ocurrencia de cada siniestro o diferimiento, expresado en años, acaecidos en los últimos cinco años para cada una de las tres cedentes.

Los datos de la siniestralidad histórica para cada una de las tres cedentes son los siguientes:

[3] Ver Pons, M.A. y Sarrasí, F.J. (2009), pp. 194-197.

[4] Ver Pons, M.A. y Sarrasí, F.J. (2009), pp. 197-199.

Cedente 1 (k = 1)		**Cedente 2 (k = 2)**		**Cedente 3 (k = 3)**	
Diferimiento	**Coste**	**Diferimiento**	**Coste**	**Diferimiento**	**Coste**
0,3361	5,5000	0,3076	4,0823	0,0254	4,1065
0,5219	4,2500	0,3249	7,0642	0,4648	4,9236
0,5994	1,0000	0,3372	1,0327	0,5016	2,4565
0,9356	3,2500	0,4894	0,2486	0,6278	0,2316
0,9998	1,0000	0,5038	5,0599	1,6176	9,7855
1,1083	2,0000	0,6500	9,6727	1,7908	1,4671
1,2508	3,5000	0,6916	2,4659	1,8032	5,7930
1,2589	2,5000	0,9519	1,7657	1,8144	2,7915
1,6180	2,5000	1,0762	10,2710	2,1123	4,1836
1,7014	1,0000	1,6280	12,9910	2,2418	2,6089
1,8885	6,5000	1,8103	3,4260	2,3149	2,9194
2,1532	0,5000	1,8244	17,9068	2,5616	13,0480
2,4576	2,0000	1,8707	5,1849	2,7478	0,0927
2,5165	2,0000	1,9006	4,7011	2,9789	10,3902
3,7405	0,5000	1,9045	6,0894	3,1169	1,1304
3,8529	0,5000	2,0356	0,2645	3,3640	22,5375
3,9986	2,6000	2,4530	1,0989	3,6507	0,5052
4,0255	5,0000	2,4653	1,8359	3,7459	7,6579
4,0271	6,2500	2,5431	0,6137	3,8180	8,2535
4,6397	7,2500	3,0590	0,6556	3,9022	5,2094
4,8345	2,7500	3,5735	3,0009	3,9874	9,2917
4,9321	3,7500	3,5954	0,6499	4,0338	1,1087
		3,9506	5,4664	4,3714	3,9622
		4,0611	9,8734	4,5310	12,2829
		4,1543	12,2953	4,6852	0,2307
		4,2638	0,8074	4,6959	2,3442
		4,4236	0,5569	4,8734	10,3656
		4,4325	26,5370	4,8843	17,9788
		4,6998	3,1321		
		4,9675	0,8519		

Para calcular el estimador de la componente histórica del coste medio hoy, en el origen de la operación, $\hat{\alpha}_0$, hemos aplicado el modelo de credibilidad de Bühlmann-Straub, ya que no sólo disponemos de información, para cada cedente, respecto al coste medio de los siniestros ocurridos en los 5 últimos años, sino también del número de siniestros ocurridos cada año, información esta última que vamos a asignarle el significado de ponderación o pesos naturales conocidos. Para calcular el estimador del número medio de siniestros, $\hat{\lambda}_0$, hemos aplicado el modelo de Bühlmann ya que sólo disponemos de información, para cada cedente, respecto al número de siniestros ocurridos cada año. Los resultados obtenidos para cada cedente han sido los siguientes:

Cedente	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\lambda}_0$
1	4,8876	5,0821
2	4,9226	5,5128
3	4,9341	5,4051

A continuación obtendremos la prima pura única y el saldo estimado en términos de esperanza matemática, para un reaseguro *finite risk* cuota parte con una cuota de cesión al reasegurador del 50%, $k_R = 0,5$. Para ello hemos simulado por el método de Monte-Carlo 1.000.000 de trayectorias de evolución de la siniestralidad del reasegurador para cada una de las tres cedentes que componen su cartera. Hemos supuesto que el horizonte temporal de la operación es de 5 años y el tanto efectivo anual de valoración esperado, que proporciona la cuenta de experiencia, es constante para todo el plazo $I_1 = 0,03$, siendo el tanto instantáneo asociado $\rho = \ln(1,03) = 0,0295588$.

En la tabla I mostramos el saldo estimado, S_j^e, en j, para cada una de las tres cedentes bajo el criterio de la esperanza matemática con parámetro de aversión al riesgo $\lambda = 0$:

Saldo estimado en el origen de la operación Reaseguro cuota parte			
j	**Cedente 1**	**Cedente 2**	**Cedente 3**
0	57,70820	63,06589	61,96721
1	46,83562	51,19886	50,30192
2	35,64874	38,96602	38,28229
3	24,11414	26,36094	25,88931
4	12,23822	13,37801	13,14697
5	0	0	0

Tabla I

Para $j=0$ el saldo estimado coincide con la prima pura del reasegurador. Para valores de $\lambda>0$ el factor financiero no tiene sentido finaciero ya que siempre encontraremos plazos, por pequeños que sean, donde el factor de capitalización es menor que uno. De todas maneras el valor de la prima es independiente del nivel de aversión al riesgo λ.

A continuacion consideramos sólo para la cedente 1 la evolución de la prima única Π_j^R capitalizada hasta j y del saldo estimado S_j^e en j, para el criterio del percentil y el criterio de la desviación tipo:

- **Criterio del percentil**

$\sigma^2=0,05$				
	Π_j^R		S_j^e	
j	$z_\varepsilon=0$ $\varepsilon=0,5$	$z_\varepsilon=1$ $\varepsilon=0,84134$	$z_\varepsilon=0$ $\varepsilon=0,5$	$z_\varepsilon=1$ $\varepsilon=0,84134$
0	61,37579	52,34510	61,37579	52,34510
1	61,65622	65,76079	49,20942	51,29224
2	61,93795	72,47224	36,99920	41,58954
3	62,22095	78,16586	24,72125	29,40256
4	62,50525	83,37154	12,39178	15,44638
5	62,79085	88,29224	0	0

Tabla II

En la tabla II mostramos como evoluciona la prima y el saldo estimado ante diferentes escenarios de aversión al riesgo. Observamos que cuanto mayor es el percentil z_ε, menor es la prima que cobra el reasegurador debido a que éste asume un mayor riesgo.

En las tablas III y IV mostramos como se comporta la prima de reaseguro ante variaciones en la volatilidad del tanto instantáneo para dos escenarios de riesgo diferentes, $\varepsilon=0,5$ y $\varepsilon=0,84134$.

$z_{\varepsilon} = 0 \quad (\varepsilon = 0{,}5)$				
	Π_j^R		S_j^e	
j	$\sigma^2 = 0{,}01$	$\sigma^2 = 0{,}05$	$\sigma^2 = 0{,}01$	$\sigma^2 = 0{,}05$
0	58,41767	61,37579	58,41767	61,37579
1	59,87010	61,65622	47,29789	49,20942
2	61,35864	61,93795	35,91349	36,99920
3	62,88419	62,22095	24,23396	24,72125
4	64,44767	62,50525	12,26873	12,39178
5	66,05003	62,79085	0	0

Tabla III

En el caso mostrado en la tabla III, la prima única de reaseguro aumenta a medida que incrementa la volatilidad del tanto instantáneo, debido a que estamos ante un escenario de aversión al riesgo por parte del reasegurador, sin embargo, si el reasegurador asume un mayor riesgo $\varepsilon = 0.84134$, tal y como observamos en la tabla IV, el comportamiento es inverso al anterior, es decir, existe una relación inversa entre la prima única y la volatilidad del tanto instantáneo, esto se debe precisamente a que el reasegurador está asumiendo una estrategia de preferencia por el riesgo.

$z_{\varepsilon} = 1 \quad (\varepsilon = 0{,}84134)$				
	Π_j^R		S_j^e	
j	$\sigma^2 = 0{,}01$	$\sigma^2 = 0{,}05$	$\sigma^2 = 0{,}01$	$\sigma^2 = 0{,}05$
0	54.39409	52.34510	54.39409	52.34510
1	61.60939	65.76079	48.16456	51.29224
2	65.81149	72.47224	37.82197	41.58954
3	69.62592	78.16586	26.17227	29.40256
4	73.29487	83.37154	13.53061	15.44638
5	76.91157	88.29224	0	0

Tabla IV

➢ Criterio de la desviación tipo

A continuación mostramos como responde la prima única y el saldo estimado frente a variaciones en el nivel de aversión al riesgo, tabla V, y frente a variaciones en la volatilidad del tanto instantáneo, tabla VI.

$\sigma^2 = 0{,}005$				
	Π_j^R		S_j^e	
j	$k = 0{,}005$	$k = 0{,}01$	$k = 0{,}005$	$k = 0{,}01$
0	57,72315	57,73811	57,72315	57,73811
1	59,43380	59,42815	46,83296	46,83029
2	61,20779	61,19296	35,64249	35,63625
3	63,03687	63,01443	24,10778	24,10142
4	64,92174	64,89239	12,23409	12,22996
5	66,86371	66,82780	0	0

Tabla V

A diferencia de lo que sucede en el criterio del percentil donde el reasegurador puede posicionarse en una estrategia de aversión al riesgo o de preferencia por el riesgo según el valor de ε, en el criterio de la desviación tipo la estrategia del reasegurador siempre será de aversión al riesgo, de esta manera cuanto mayor sea el valor de k, más aversión al riesgo tendrá y por tanto mayor será la prima de reaseguro que cobrará a la cedente, tal y como queda reflejado en la tabla V.

En la tabla VI se muestra el comportamiento típico de un reasegurador con aversión al riesgo ya que la prima de reaseguro aumenta frente a variaciones positivas en la volatilidad del tanto instantáneo.

$\boldsymbol{k} = 0{,}005$				
	Π_j^R		S_j^e	
j	$\sigma^2 = 0{,}005$	$\sigma^2 = 0{,}01$	$\sigma^2 = 0{,}005$	$\sigma^2 = 0{,}01$
0	57,72315	57,72959	57,72315	57,72959
1	59,43380	59,43166	46,83296	46,83206
2	61,20779	61,20179	35,64249	35,64007
3	63,03687	63,02763	24,10778	24,10525
4	64,92174	64,90953	12,23409	12,23243
5	66,86371	66,84864	0	0

Tabla VI

6. CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo hemos analizado la prima y el saldo o provisión de la cuenta de experiencia en un reaseguro *finite risk* en la modalidad cuota parte y exceso de pérdida, asumiendo la hipótesis que el comportamiento estocástico de los parámetros de siniestralidad son conocidos en el origen de la operación y se mantienen constantes a lo largo del plazo de vigencia de la misma. Hemos asumido que el factor financiero de valoración presenta una doble aleatoriedad, la inducida por el diferimiento, cuyo comportamiento viene dado por la distribución de probabilidad del momento de interocurrencia entre siniestros y la originada por el tanto instantáneo, el cual, en nuestro caso, hemos asumido la hipótesis que viene perturbado por un proceso de Wiener. Para eliminar la aleatoriedad del tanto instantáneo hemos introducido criterios de decisión, los cuales nos han permitido introducir en el cálculo de la prima de reaseguro nuevas variables como el nivel de aversión al riesgo del reasegurador o la volatilidad del tanto instantáneo.

Hemos supuesto en el ejemplo numérico que la cartera del reasegurador está formada por tres cedentes del mismo ramo y para la estimación de los parámetros de siniestralidad, número medio y coste medio, hemos utilizado modelos de credibilidad para tener en cuenta tanto la experiencia individual como la de la cartera. Los valores de la prima de reaseguro y del saldo estimado han sido obtenidos por simulación de Monte-Carlo.

Las conclusiones a las que hemos llegado son las siguientes. En el caso del criterio de la esperanza, la prima de reaseguro es independiente del nivel de aversión al riesgo, de todas maneras para valores de $\lambda > 0$ el factor de capitalización no tiene sentido financiero ya que siempre encontraremos plazos, por pequeños que sean, donde el factor es menor que uno. El criterio del percentil y el criterio de la desviación tipo plantean escenarios de aversión al riesgo del reasegurador siendo la prima de reaseguro mayor cuanto mayor es la volatilidad del tanto instantáneo. De todas maneras, a diferencia de lo que sucede con el criterio de la desviación tipo, en el criterio del percentil se pueden plantear situaciones en las que el reasegurador tenga no sólo aversión al riesgo sino también preferencia por el mismo, en este último caso la prima de reaseguro disminuye frente a variaciones positivas en la volatilidad del tanto instantáneo.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEGRE, A. y MAYORAL, R. (2000). “Leyes estocásticas de capitalización y descuento. Compatibilidad bajo el criterio de la esperanza”. Documento de trabajo 05/00 del programa interuniversitario de doctorado Nuevas Tendencias en Dirección de Empresas.Universidad de Burgos-Universidad de Salamanca-Universidad de Valladolid.
- DEVOLDER, P. (1993). Finance Stochastique. Editions de l’Université de Bruxelles. Bruselas.
- DURA, J.M. y LOPEZ, J.M. (1988). Fundamentos de estadística. EDITORIAL ARIEL, Madrid (España).
- MALLIARIS, A.G.and BROCK, W.A. (1982). Stochastic Methods in Economics and Finance. North-Holland. Amsterdam.
- MAYORAL, R. (1997). Análisis estocástico de las operaciones financieras y actuariales con riesgo de variación del tipo de interés. Tesis doctoral. Barcelona.

- PITACCO, E. (1986). Simulation in Insurance. In M. Goovaerts (eds.) Insurance and Risk Theory, D. Reidel Publishing Company.
- PONS, M.A. y SARRASÍ, F.J. (2009). ”Solvencia en un reaseguro finite risk”. Anales 2009, tercera época, 15, pp. 179-208.
- SARRASÍ, F.J. y PÉREZ, M.J. (2003). “Una aproximación al reaseguro financiero en la modalidad de finite risk”. Gerencia de Riesgos y Seguros, 82, 2º trimestre, pp. 21-32. Madrid (España).
- SHUSS, Z. (1980). Theory and Applications of Stochastic Differential Equations. John Wiley & Sons . New York.
- Swiss Re. (1977). La transferencia alternativa de riesgos mediante el seguro finite risk. Suiza de reaseguros. Sigma 5.