Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

COMPARACIÓ DE MESURES DE RISC

Autor: Anabel Luis Herrero

Director: Dr. Josep Vives
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2020

Abstract

For companies, it is of great importance to be able to calculate financial risk, that makes reference to the possibility of loss that is about the return of an investment. In this project we will focus in two measures to calculate this risk. The first of this is the most well-known, named Value at Risk (VaR), that despite of being one of the most used and easy to calculate, it has been seen that has some inconvenient. Throughout the project we will see some of them, but we will focus on two. The first fact is that VaR does not take into account unpredictable events, and the second is that it sometimes goes against the principal that diversification should reduce risk. We will see the way in which they can be solved, and obtain a better way of measuring risk, named Average Value at Risk (AVaR). We will also look at calculating these two risk measures for a particular model, the Black-Scholes model.

Resum

Per les empreses és de gran importància poder calcular el risc financer, que fa referència a la possibilitat de pèrdua que es té sobre el rendiment d'una inversió. En aquest treball ens centrarem en dues mesures per calcular aquest risc. La primera d'elles és una de les més conegudes, anomenada Valor en Risc (VaR), que tot i ser una de les més utilitzades i fàcil de calcular, s'ha pogut veure que té diversos inconvenients. Al llarg del treball veurem alguns d'ells, ens centrarem en dos. El primer d'ells és que el VaR no té en consideració esdeveniments poc provables i el segon és que a vegades va en contra del principi de que la diversificació hauria de reduir el risc. Veurem de quina manera es poden solucionar, i obtenir així una millor mesura de risc, que anomenem Valor Promig en Risc (AVaR). Veurem també el càlcul d'aquestes dues mesures de risc per un model concret, el model Black – Scholes.

2010 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agraïments

Vull agrair al meu tutor Josep Vives per l'ajuda proporcionada al llarg del projecte, tant en l'elecció del temari, com en ajudar-me a entendre totes les qüestions del treball. També agrair l'atenció rebuda. En segon lloc m'agradaria agrair a la meva família i amics per el suport rebut.

Índex

1 Introducció

Per qualsevol empresa, sigui del sector que sigui, o qualsevol inversor en general, la mesura del risc financer és fonamental.

El **risc** fa referència a la possibilitat que pugui donar-se un succés contrari al planejat, i les seves conseqüències. Per tant podem entendre el **risc financer** com la probabilitat que es doni un succés contrari i que tingui efectes sobre un agent financer i les seves decisions. És a dir, el risc financer fa referència a la incertesa produïda en el rendiment d'una inversió, fent referència no només a la possibilitat que els resultats obtinguts siguin menors, sinó també a obtenir una major rendibilitat a l'esperada. Els mercats financers reben amenaces contínues procedents de les diferents variables que els determinen, això provoca que siguin molts els riscs financers a tenir en compte. El risc financer està directament relacionat amb el risc econòmic, ja que els actius que té una empresa, els productes o serveis que proporciona, juguen un gran paper a l'hora de determinar el seu nivell de deute. [3] [4] [5]

Un exemple de risc financer pot ser la possibilitat que una empresa no pugui complir amb les seves obligacions financeres, com per exemple el pagament d'interessos o l'amortització dels deutes.

Trobem diferents tipus de riscs financers :

1. *Risc de mercat* : aquest risc s'associa amb les variacions i canvis en els mercats financers, és a dir, fa referència a la probabilitat que un conjunt d'inversions es redueixi degut a moviments desfavorables en el valor dels factors de risc de mercat. Aquests factors solen ser principalment: risc de tipus d'interès (associat al canvi en contra dels tipus d'interès), risc de tipus de canvi (associat a les variacions dels tipus de canvi a l'hora de realitzar canvi de divises, sobretot per empreses que treballen a nivell internacional i han d'operar amb multitud de monedes) i risc de mercat (fa referència al canvi en el valor dels instruments financers, com accions, bons... en resum, aquells actius relacionats directament amb el sector financer en els que una persona física o jurídica pot intervenir).

2. *Risc de crèdit* : es produeix per l'incompliment de les obligacions d'una de les parts en un contracte financer, com per exemple no pagar o que el deutor retardi els pagaments

3. *Risc de liquidació* : Associat a què, tot i disposar dels actius i la voluntat de comerciar amb ells, no es pugui efectuar la compravenda dels mateixos o no es pugui realitzar prou ràpid i al preu adequat.

4. *Risc operacional* : És la possibilitat de pèrdues financeres originades per errors o insuficiències de processos, persones, sistemes interns, tecnologia o presència d'esdeveniments externs imprevistos.

És impossible eliminar per complet l'existència del risc financer, però sí que es pot disminuir, i així minimitzar els danys per a l'empresa o l'inversor. Alguns dels mètodes per reduir el risc financer són els següents:

- Informar-se sobre cada inversió, ja que quan major sigui la informació que tenim sobre les operacions que volem realitzar, el risc al qual ens sotmetem serà menor.
- Diversificar les inversions: l'objectiu d'aquest mètode és construir una cartera d'inversions sòlida que dilueixi el factor risc per la presència de múltiples actius.
- Anticipar-nos al que pugui succeir al mercat.
- Protegir els actius mitjançant assegurances.

Les persones i les empreses interactuen constantment amb un món d'incertesa degut al desconeixement del futur, en aquest món han de realitzar diferents tipus d'inversions financeres amb l'objectiu d'obtenir altes rendibilitats i així justificar el risc al què es sotmeten. En particular un inversor pot voler saber: "quina és la probabilitat de pèrdua en la seva inversió", "quina es la probabilitat de no aconseguir el rendiment necessari per obtenir certs objectius", "quina es la pèrdua màxima que es pot esperar en un període de temps determinat". Per respondre aquestes preguntes necessitem **mesurar el risc**.

Des d'un punt de vista històric podem parlar de tres períodes d'importants desenvolupaments en les finances modernes: *Mitjana-Variança* (1952-1956) (proposat per Markowitz), *models en temps continu* (1969-1973) (iniciat per Robert Merton, Fisher Black y Myron Scholes) i *mesures de risc* (1997-) (van ser publicats els primers resultats sobre mesures de risc coherents per part d'Artzner et al (1997, 1999)). En aquest treball ens centrarem en l'últim període.

La necessitat del control financer i l'experiència d'importants desastres financers, va fer que el 1994 es desenvolupés una mesura de risc anomenada **Valor en Risc** *(VaR)*. Mesura en la què ens centrarem en gran part del treball.

Després de la crisi del 2008, el VaR obté especial importància, sobretot a les sales de tresoreria dels bancs. La creixent exigència de capital cap al sector bancari i en conseqüència un major control de riscs, fa que els departaments de riscs assignin un VaR diari, setmanal i mensual a les diferents taules de tipus d'interès, bons, o altres instruments negociables en els mercats. No obstant, també té especial importància en el món de la gestió d'actius, gestió de carteres o altres sectors en contacte amb els mercats financers. [6] [7]

Ara bé, tot i que el VaR és una de les mesures de risc més populars en l'actualitat, trobem que té algunes deficiències i limitacions com a mesura de risc. Per això parlarem d'una altra mesura de risc anomenada **Valor Promig en Risc** *(AVaR)*.

Per realitzar l'estudi del VaR i AVaR d'aquest treball ens basem en els llibres *Introducción de mercados futuros y opciones* [1] i *Portafolio theory and risk management* [2]

2 Quantils

Per poder definir el Valor en Risc, cal estudiar primer els quantils de F_X, on X és el guany descomptat per una inversió, i F_X és la seva funció de distribució.

Els quantils teòrics són aquells valors de la variable, que ordenats de menor a major, divideixen la distribució en parts iguals, en intervals que comprenen el mateix número de valors.

Els més coneguts són: Quartils (divideixen la distibució en quatre parts), Decils (divideixen a la distribució en 10 parts iguals) i Percentils (divideixen la distribució en 100 parts iguals).

Més formalment, la funció quantil d'una llei de probabilitat és la inversa (generalitzada) de la seva funció de distribució. La funció quantil empírica d'una mostra és la funció quantil de la seva distribució empírica. [14] [15]

Definició 2.1. *Per $\alpha \in$ (0,1) el número*

$$q^{\alpha}(X) = inf\,\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

s'anomena α **- quantil superior de X** .

Per $\alpha \in$ (0,1) el número

$$q_{\alpha}(\mathrm{X}) = \inf\{x : \alpha \leq F_X(x)\}$$

s'anomena α **- quantil inferior de X** .

Qualsevol

$$q \in [q_{\alpha}(X), q^{\alpha}(X)]$$

s'anomena α **- quantil de X** .

Exemple 2.2. Considerem un model binomial de dos passos amb preus d'accions

$S_0 = 100$

$S_1^u = 110$ $S_1^d = 90$

$S_2^{uu} = 121$ $S_2^{ud} = S_2^{du} = 99$ $S_2^{dd} = 81$

La probabilitat que el preu pugi en un sol pas es p = 0.8

Calculem el guany després del segon pas de comprar una acció única com $X = S_2 - S_0$ que ens dóna

$$\mathrm{X} = \begin{cases} 21 & \text{amb probabilitat } p^2 = 0.64 \\ -1 & \text{amb probabilitat } 2p(1-p) = 0.32 \\ -19 & \text{amb probabilitat } (1-p)^2 = 0.04 \end{cases}$$

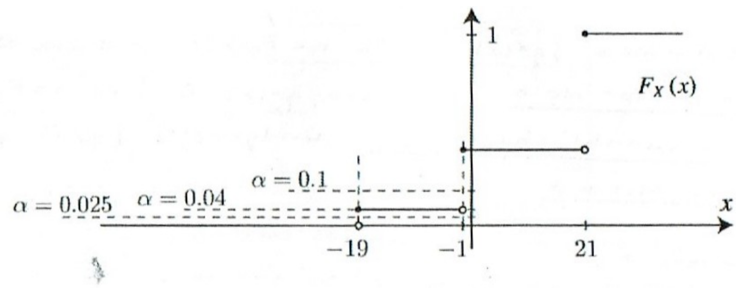

Figura 1: Gràfic de la funció de distribució

Calculem per tant els quantils superiors i inferiors de X per $\alpha \in \{0.025, 0.04, 0.1\}$, mirant la figura, podem veure

$$q^{0.025}(X) = -19$$
$$q^{0.04}(X) = -1$$
$$q^{0.1}(X) = -1$$
$$q_{0.025}(X) = -19$$
$$q_{0.04}(X) = -19$$
$$q_{0.1}(X) = -1$$

Proposició 2.3. *Si X i Y són variables aleatòries, aleshores:*

1. $X \geq Y$, *implica* $q^\alpha(X) \geq q^\alpha(Y)$
2. *Per qualsevol* $b \in \mathbb{R}$, $q^\alpha(X+b) = q^\alpha(X) + b$
3. *Per b>0,* $q^\alpha(bX) = bq^\alpha(X)$
4. $q^\alpha(-X) = -q_{1-\alpha}(X)$

Demostració

1. Volem veure que

$$\inf\{x : \alpha < F_X(x)\} \geq \inf\{x : \alpha < F_Y(x)\}$$

aleshores si X $\geq$ Y, sabem que

$$F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(Y \leq y) = F_Y(x),$$

per tant $\alpha < F_X(x)$ implica que $\alpha < F_Y(x)$, això significa que

$$\{x : \alpha < F_X(x)\} \subseteq \{x : \alpha < F_Y(x)\}$$

que ens dóna

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} \geq \inf\{x : \alpha < F_Y(x)\} = q^\alpha(Y).$$

2. Volem veure que

$$\inf\{x + b : \alpha < F_{X+b}(x + b)\} = b + \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}.$$

Prenem Y = X+b i tenim

$$F_Y(x + b) = P(X + b \leq x + b) = F_X(x)$$

per tant podem veure

$$\begin{aligned} q^\alpha(X + b) &= \inf\{x + b : \alpha < F_Y(x + b)\} \\ &= \inf\{x : \alpha < F_Y(x + b)\} + b \\ &= \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} + b \\ &= q^\alpha(X) + b. \end{aligned}$$

3. Volem veure que

$$\inf\{x : \alpha < F_{bX}(x)\} = b \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}.$$

Com $P(bX \leq x) = P(X \leq x/b)$, tenim que $F_{bX}(x) = F_X(x/b)$, per tant per b>0,

$$\begin{aligned} q^\alpha(bX) &= \inf\{x : \alpha < F_{bX}(x)\} \\ &= \inf\{x : \alpha < F_X(x/b)\} \\ &= \inf\{by : \alpha < F_X(y)\} \\ &= b \inf\{y : \alpha < F_X(y)\} \\ &= bq^\alpha(X). \end{aligned}$$

4. Per provar l'última propietat volem veure que

$$\inf\{x : \alpha < F_{-X}(x)\} = -\inf\{x : 1 - \alpha \leq F_X(x)\}.$$

Primer veurem que per $b \in \mathbb{R}$

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} = \inf\{x : b \leq P(X < x)\}.$$

Com $P(X < x) \leq P(X \leq x)$, si $b \leq P(X < x)$ llavors $b \leq P(X \leq x)$, que significa que

$$\{x : b \leq P(X < x)\} \subset \{x : b \leq P(X \leq x)\} \ ,$$

per tant

$$\inf\{x : b \leq P(X < x)\} \geq \inf\{x : b \leq P(X \leq x)\}.$$

Ara descartem l'opció de què la desigualtat anterior sigui estricta.

Suposem que existeix algun $x^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} < x^* < \inf\{x : b \leq P(X < x)\}$$

per tant tenim $P(X < x^*) < b$, ja que x^* és menor que el mínim x que compleix $b \leq P(X < x)$. Com x $\rightarrow$ P(X $<$ x) és continua per l'esquerra, podem trobar un $\hat{x} \in \mathbb{R}$,

$$inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} < \hat{x} < x^* \ ,$$

per el qual P(X $<$ $\hat{x}$) $<$ b, però també veiem que $b \leq P(X \leq \hat{x})$, que ens contradiu l'anterior afirmació. Per tant obtenim la igualtat que buscàvem.

Per provar l'última propietat també usarem el fet que :

$$F_{-X}(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X < -x).$$

Per tant ja podem calcular,

$$\begin{aligned} q^{\alpha}(-X) &= \inf\{x : \alpha < F_{-X}(x)\} \\ &= -\sup\{-x : \alpha < F_{-X}(x)\} \end{aligned}$$

(Com $F_{-X}(x) = 1 - P(X < -x)$)

$$\begin{aligned} &= -\sup\{-x : \alpha < 1 - P(X < -x)\} \\ &= -\sup\{y : \alpha < 1 - P(X < y)\} \\ &= -\sup\{y : P(X < y) < 1 - \alpha\} \end{aligned}$$

(com y $\rightarrow$ P(X $<$ y) és no decreixent)

$$\begin{aligned} &= -\inf\{y : 1 - \alpha \leq P(X < y)\} \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha \leq P(X \leq y)\} \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha \leq F_X(y)\} \\ &= -q_{1-\alpha}(X). \end{aligned}$$

□

De manera similar podriem veure les propietats per q_{α}.

Lema 2.4. *Si $F_X(x)$ és continua i estrictament creixent, aleshores $q^\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$*

Demostració

Com F_X és continua i estrictament creixent, és invertible.

La funció inversa $\alpha \to F^{-1}(\alpha)$ és continua i $\alpha < F_X(x)$ és equivalent a $F_X^{-1}(\alpha) < x$. Això dóna que:

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} = \inf\{x : F_X^{-1}(\alpha) < x\} = F_X^{-1}(\alpha).$$

$\square$

Lema 2.5. *Sigui X una variable aleatòria. Si f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és continua per la dreta i no decreixent aleshores $q^\alpha(f(X)) = f(q^\alpha(X))$*

Demostració

Veiem primer $q^\alpha(f(X)) \leq f(q^\alpha(X))$. És suficient demostrar que per tot $y > f(q^\alpha(X))$ es té $y \geq q^\alpha(f(X))$.

Prenem $y > f(q^\alpha(X))$. Com f és contínua per la dreta i no decreixent es té

$$\{x : f(x) < y\} = \{x < a\}$$

per un cert $a \in \mathbb{R}$.

Aleshores,

$$\{x \leq q^\alpha(X)\} \subseteq \{f(x) \leq f(q^\alpha(X))\} \subset \{f(x) < y\} = \{x < a\}.$$

Per tant, existeix $\bar{x}$ tal que

$$q^\alpha(X) < \bar{x} < a.$$

Aleshores

$$\mathbb{P}(f(X) \leq y) \geq \mathbb{P}(f(X) < y) = \mathbb{P}(X < a) \geq \mathbb{P}(X \leq \bar{x}) > \alpha,$$

i per tant

$$y \geq q^\alpha(f(X)).$$

Veiem ara que $f(q^\alpha(X)) \leq q^\alpha(f(X))$.

En efecte, si $f(q^\alpha(X)) > q^\alpha(f(X))$ existeix y tal que

$$q^\alpha(f(X)) < y < f(q^\alpha(X)).$$

Aleshores

$$\alpha < \mathbb{P}(f(X) \leq y) \leq \mathbb{P}(f(X) < f(q^\alpha(X))) \leq \mathbb{P}(X < q^\alpha(X)) \leq \alpha$$

i això és contradictori.

$\square$

3 Valor en Risc

El Valor en risc (VaR) és una tècnica estadística per mesurar el risc financer d'una inversió. Indica la probabilitat (normalment 1% o 5%) de patir una determinada pèrdua durant un període de temps, és a dir, estableix la pèrdua màxima que pot experimentar una inversió dins d'un període temporal donat un nivell de confiança (1-α), (normalment 95% o 99%). Aquesta tècnica es mesura només amb tres variables: la quantia de la pèrdua, la probabilitat de la pèrdua i el temps. El VaR avui en dia és una de les eines més utilitzades com a mesura de risc pels bancs i entitats financeres.

Aquest mètode va ser desenvolupat per matemàtics i estadístics de JP Morgan, a meitat del 90, quan un alt executiu va preguntar la màxima pèrdua probable en les següents 24 hores. Van llençar el seu servei Risk Metrics ("mètriques de risc"), perquè els seus clients implementessin el concepte del VaR. Tot i així, no s'ha d'oblidar que el VaR mesura probabilitats, és a dir, que proporciona una mesura resumida del risc del mercat. [18] [19]

Ho definirem ara més tècnicament, treballarem en un model de mercat financer amb un únic pas en què invertim en t=0 i retirem la nostra inversió en t=T. Denotarem per X el valor descomptat de la posició de l'inversor en el moment T.

Definició 3.1. *Per* $\alpha \in (0,1)$ *definim el* **valor en risc (VaR)** de X, en el nivell de confiança 1-α, com:

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}.$$

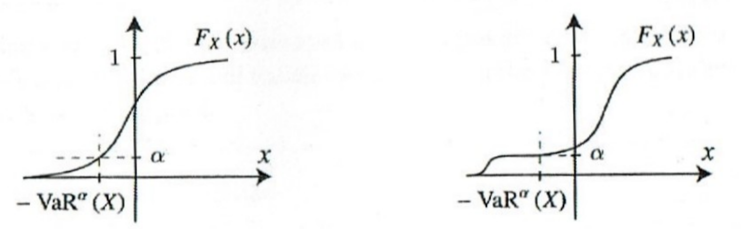

Figura 2: Gràfic del alfa quantil superior de X

Observem que donat que X denota els guanys d'una inversió, -X denota la pèrdua, aleshores podem expressar el VaR en termes de pèrdua de la següent manera:

Usant la Proposició 2.3

$$\begin{aligned} VaR^{\alpha}(X) &= -q^{\alpha}(X) = q_{1-\alpha}(-X) \\ &= \inf\{x : 1-\alpha \leq P(-X \leq x)\} \\ &= \inf\{x : P(x < -X) \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

En termes generals això significa que en el nivell de confiança $1-\alpha$, la nostra pèrdua no és pitjor que VaR^{α}.

Exemple 3.2. Per entendre-ho millor, suposem que una empresa té un 5% de probabilitat de perdre en un mes 5 milions d'euros, o el que seria el mateix, té un VaR de 5 milions al 5%. Això vol dir que existeix un 5% de probabilitats que aquesta empresa perdi algun mes més de 5 milions d'euros, i un 95% de probabilitats que la pèrdua sigui menor. Per tant, l'empresa ha de tenir en compte que 5 de cada 100 mesos perdrà com a mínim 5 milions d'euros, o que un de cada 20 mesos perdrà 5 milions d'euros.

Veurem ara les propietats algebraiques simples del VaR que es dedueixen de les que vam veure pel quantil superior a la Proposició 2.3

Proposició 3.3. *Si X i Y són variables aleatòries, aleshores:*

1. $X \geq Y$, *implica* $VaR^{\alpha}(X) \leq VaR^{\alpha}(Y)$.
2. *Per qualsevol* $a \in \mathbb{R}$, $VaR^{\alpha}(X+a) = VaR^{\alpha}(X) - a$.
3. *Per tota* $a > 0, VaR^{\alpha}(aX) = aVaR^{\alpha}(X)$.

Demostració

Les demostracions són immediates a partir de la definició de VaR i les propietats del quantil superior

1. Si X $\geq$ Y, aleshores

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X) \leq -q^{\alpha}(Y) = VaR^{\alpha}(Y).$$

2. Prenem qualsevol $a \in \mathbb{R}$ aleshores,

$$VaR^{\alpha}(X+a) = -q^{\alpha}(X+a) = -q^{\alpha}(X) - a = VaR^{\alpha}(X) - a.$$

3. Per tota $a > 0$, tenim

$$VaR^{\alpha}(aX) = -q^{\alpha}(aX) = -aq^{\alpha}(X) = aVaR^{\alpha}(X).$$

□

3.1 Càlcul del VaR : exemples

Suposem que en el moment zero invertim $\mathbf{V(0)}$ per rebre $\mathbf{V(T)}$ en el moment T. Usarem $\mathbf{X}$ per denotar el guany descomptat en el moment T.

Aleshores $\mathbf{X} = \mathbf{e^{-rT}V(T)} - \mathbf{V(0)}$ on r és la taxa lliure de risc per capitalització continua.

Exemple 3.4. Suposem que invertim V(0) sense risc, aleshores $V(T) = e^{rT}V(0)$, i obtenim:

$$X = e^{-rT}V(T) - V(0) = 0,$$

La funció de distribució de X és

$$\mathrm{F}_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si x<0} \end{cases}$$

Per qualsevol $\alpha \in (0,1), q^{\alpha}(X) = 0$, que dóna $VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X) = 0$.

3.1.1 Càlcul del VaR per a distribucions discretes

El VaR en el cas de distribucions discretes és senzill, podem resumir-ho en aquest lema:

Lema 3.5. *Suposem que X és una variable aleatòria discreta, amb* $P(X = x_i) = p_i, \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ *, i* $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$*, aleshores*

$$VaR^{\alpha}(X) = -x_{k_\alpha},$$

on $k_\alpha \in \mathbb{N}$ *és el major número tal que* $\sum_{i=1}^{k_\alpha - 1} p_i \leq \alpha$*.*

Demostració

Volem veure $VaR^{\alpha}(X) = -x_{k_\alpha}$ i per definició és equivalent a veure $q^{\alpha}(X) = x_{k_\alpha}$.

Usarem les següents propietats, com X té una distribució discreta i $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ podem veure que,

$$P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

i també usarem :

$$\min\{k : \alpha < \sum_{i=1}^{k} p_i\} = \max\{k : \sum_{i=1}^{k-1} p_i \leq \alpha\}.$$

Amb això podem obtenir :

$$\begin{aligned} q^{\alpha}(X) &= \inf\{x : \alpha < P(X \leq x)\} \\ &= \min\{x_k : \alpha < P(X \leq x_k)\} \\ &= \min\{x_k : \alpha < \sum_{i=1}^{k} p_i\} \\ &= \max\{x_k : \sum_{i=1}^{k-1} p_i \leq \alpha\} \\ &= x_{k_\alpha}. \end{aligned}$$

□

3.1.2 Càlcul del VaR per a distribucions continues

Ara veurem el càlcul del VaR per variables aleatòries amb distribució contínues. Si la funció de distribució d'una variable aleatòria X és F(X), estrictament creixent i contínua, tenim:

$$VaR^{\alpha}(X) = -F^{-1}(\alpha)$$

Més contretament per una variable aleatòria normal estàndard Z, amb funció de distribució $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$, el Lema 2.4 , produeix:

$$VaR^{\alpha}(Z) = -N^{-1}(\alpha)$$

per qualsevol $\alpha \in (0, 1)$. Ho veurem més concretament en el següent exemple.

Exemple 3.6. Suposem que el preu actual de l'acció és S(0). Suposem també que el preu de l'acció en el moment T és $S(T) = S(0)e^{m+\sigma Z}$ amb Z que té una distribució normal N(0,1). Calculem $VaR^{\alpha}(X)$ per

$$X = e^{-rT} S(T) - S(0).$$

Pel Lema 2.4,com N(x) és una funció continua i estrictament creixent, tenim que $q^{\alpha}(Z) = N^{-1}(\alpha)$. Observant que X = f(Z), on

$$f(\zeta) = e^{-rT} S(0)e^{m+\sigma\zeta} - S(0)$$

és una funció creixent, i usant el Lema 2.4, el Lema 2.5 i les definicions anteriors, tenim

$$\begin{aligned} VaR^{\alpha}(X) &= -q^{\alpha}(f(Z)) \\ &= -f(q^{\alpha}(Z)) \\ &= -f(N^{-1}(\alpha)) \\ &= S(0)(1 - e^{m-rT+\sigma N^{-1}(\alpha)}). \end{aligned}$$

En aquest exemple hem usat el fet que f(Z) és una funció no decreixent d'una variable aleatòria amb distribució normal estàndard, i per això és fàcil de calcular. Aquesta idea pot formular-se en termes més generals de la següent manera.

Lema 3.7. *Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció continua per la dreta i no decreixent. Aleshores*

$$VaR^{\alpha}(f(X)) = -f(q^{\alpha}(X)).$$

Demostració

Com f és una funció contínua per la dreta i no decreixent podem aplicar el Lema 2.5, aleshores,

$$VaR^{\alpha}(f(X)) = -q^{\alpha}(f(X)) = -f(q^{\alpha}(X)).$$

□

3.1.3 Càlcul del VaR amb simulacions de Monte Carlo

Aquest sistema mostra l'evolució dels preus dels actius en base a simular els components aleatoris de l'evolució en el temps del preu. Es basa principalment en el comportament d'actius dels què no tenim informació històrica, d'actius amb una rendibilitat que segueixen una distribució molt diferent a la normal, etc.

Lema 3.8. *Sigui $X_1, X_2, \ldots$ una seqüència de variables aleatòries independents i idènticament distribuides, X_i, amb la mateixa distribució que X. Sigui $x \in \mathbb{R}$ fixat. Si prenem la seqüència de variables aleatòries $F_N(x)$, definida com :*

$$F_N(x) = \tfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1_{\{X_i \leq x\}},$$

Aleshores $F_N(x) \xrightarrow{p} F_X(x)$.

Demostració

Introduïm la següent notació $Y_i = 1_{\{X_i \leq x\}}$ i $Y = 1_{\{X \leq x\}}$.

Aleshores per la llei feble de grans nombres, si prenem $Y_1, \ldots, Y_N$ una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, tenim

$$\tfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(Y) \ ,$$

per tant

$$F_N(x) = \tfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1_{\{X \leq x\}}) = P(X \leq x) = F_X(x).$$

□

Suposem ara que $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_N$ són resultats de les simulacions que segueixen la mateixa distribució que X i

$$\hat{F}_N(x) = \tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1_{\{\hat{X}_i \leq x\}}$$

Pel Lema 3.8 , per qualsevol $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \lim \hat{F}_N(x) \text{ (quan } N \to \infty) \text{ (3.1)}$$

Sigui Y_N una variable aleatoria discreta amb distribució $P(Y_N = \hat{X}_i) = \frac{1}{N}$ per i = 1, . . . , N.

La funció de distribució F_{Y_N} és igual a $\hat{F}_N$ (per 3.1) i prenent un N prou gran, es pot aproximar $VaR^{\alpha}(X)$ usant $VaR^{\alpha}(Y_N)$ que el podem calcular fàcilment usant el Lema 3.5.

4 Inconvenients del VaR

El VaR és una de les mesures més usades en l'actualitat, però tot i tenir avantatges com per exemple fer molt fàcil la valoració del risc, ja que produeix nombres per quantificar el risc, també trobem inconvenients en ella [17], com:

1. El VaR és tant útil com bons siguin els resultats que s'utilitzen per calcular-lo.
2. El VaR no té en compte els pitjors escenaris possibles.
3. Alguns dels mètodes per calcular-lo (com Monte Carlo) són difícils i costosos d'aplicar.
4. Hem de tenir en compte que el que ens dóna és només una probabilitat.
5. No calcula la quantia de la pèrdua esperada que es queda en el percentatge de probabilitat, és a dir, si hi ha un 1% de perdre més de 5 milions d'euros, quina és la quantitat de pèrdua esperada?
6. A vegades la diversificació que ens dóna el VaR no és intuïtiva, ho veurem més endevant.

Nosaltres ens centrarem en dos inconvenients:

- El VaR no té en consideració events poc probables.
- A vegades va en contra del principi de que la diversificació hauria de reduir el risc.

Per entendre'ls millor veurem dos exemples.

El primer exemple ens il · lustra la primera de les propietats que volem tractar, és a dir, que el VaR no té en consideració events poc probables.

Exemple 4.1. Considerem

$$\mathrm{X} = \begin{cases} -20 & \text{amb probabilitat } 0.025 \\ -10 & \text{amb probabilitat } 0.025 \end{cases}$$

i $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 0) = 0.95$.

Per $\mathrm{x} < 0$, tenim la següent funció de distribució

$$\mathrm{F}_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si x} \in (-\infty, -20) \\ 0.025 & \text{si x} \in [-20, -10) \\ 0.05 & \text{si x} \in [-10, 0) \end{cases}$$

Prenem ara $\alpha = 0.025$, tenim

$$VaR^{0.025}(X) = -q^{0.025}(X) = 10.$$

Per qualsevol $\alpha < 0.025$,

$$VaR^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X) = 20.$$

Això ens demostra que VaR^{α} pot ser sensible al canvi en l'elecció de α. Canviem ara -20 per -2000, $Var^{0.025} = 10$, això il · lustra que VaR no té en consideració events poc probables, és a dir amb probabilitat per sota del α escollit. Aquesta és una característica negativa en una mesura de risc.

Ara veurem el segon dels inconvenients que volíem tractar, és a dir, que el VaR a vegades va en contra del principi de què la diversificació hauria de reduir el risc.

Exemple 4.2. Considerem dues inversions independents, X_1, X_2, amb guanys :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{amb probabilitat p} \\ 1 & \text{amb probabilitat 1-p} \end{cases}$$

I tenen la següent funció de distribució

$$F_{X_i}(\text{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si x} < 0 \\ p & \text{si x} \in [0,1) \\ 1 & \text{si x} \geq 1 \end{cases}$$

Per i =1,2. Podem considerar-los dos bons corporatius amb el mateix preu i data de venciment, de dues companyies independents que tenen una probabilitat d'incompliment amb zero recuperació igual a p.

Si $\alpha < p$ aleshores $VaR^{\alpha}(X_1) = VaR^{\alpha}(X_2) = 0$

Si en canvi comprem la meitat d'una unitat de cada un dels dos bonos, aleshores el nostre guany serà :

$$\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 = \begin{cases} 0 & \text{amb probabilitat } p^2 \\ 0.5 & \text{amb probabilitat 2p(1-p)} \\ 1 & \text{amb probabilitat } (1-p)^2 \end{cases}$$

I per tant la seva funció de distribució serà la següent:

$$\mathrm{F}_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si x <0} \\ \mathrm{p}^2 & \text{si x} \in [0, \frac{1}{2}) \\ \mathrm{p}^2 + (2p(1-p)) & \text{si x} \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 1 & \text{si x} \geq 1 \end{cases}$$

Si prenem $\alpha \in (p^2, p)$, Aleshores

$$F_{\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2}(\tfrac{1}{2}) = p^2 + 2p(1-p) > \alpha. \text{ Per tant,}$$
$$VaR^{\alpha}(\tfrac{1}{2}X_1 + \tfrac{1}{2}X_2) = \tfrac{1}{2}$$

Podem veure

$$VaR^{\alpha}(\tfrac{1}{2}X_1 + \tfrac{1}{2}X_2) > max\{VaR^{\alpha}(X_1), VaR^{\alpha}(X_2)\}$$

El que significa que el risc d'una posició diversificada és major que el risc d'invertir tot en un únic bo. Això va en contra del principi de què la diversificació hauria de reduir el risc, i per tant il · lustra el segon inconvenient de l'ús del VaR per mesurar el risc.

5 Millora del VaR : AVaR

En aquesta secció veurem com modificar la definició de VaR per produir una mesura de risc que conservi la simplicitat sense tenir el primer inconvenient anomenat anteriorment, tenint en compte tota la cua de distribució.

Això ho obtindrem principalment calculant VaR^{β} per tots $\beta \leq \alpha$ en (0,1) i prenent la seva mitjana.

Per això definirem una nova mesura de risc.

Suposarem que X indica el guany descomptat d'algun projecte d'inversió.

Definició 5.1. *El* **Valor promig en risc** (AVaR) de X ve donat per:

$$AVaR^{\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR^{\beta}(X)d\beta = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)d\beta.$$

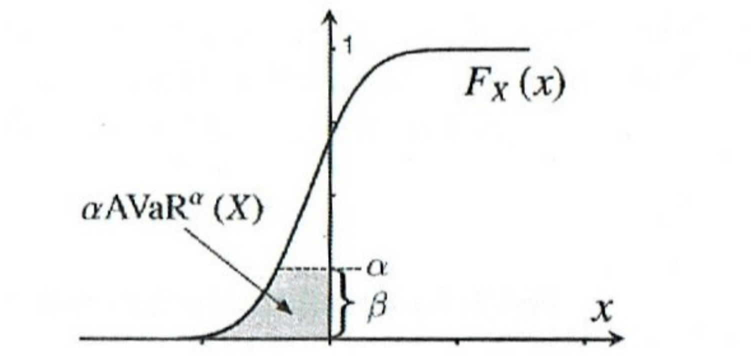

Figura 3: Gràfic AVaR

Les propietats dels quantils donats a la Proposició 2.3 mostren que:

$$AVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)d\beta = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q_{1-\beta}(-X)d\beta.$$

Per tant podem veure que a diferència de VaR^{α} això té en compte totes les pèrdues que succeeixen amb probabilitat com màxim α.

Com $\beta \leq \alpha$ implica $q^{\beta}(X) \leq q^{\alpha}(X)$, aleshores està clar que AVaR és major o igual que VaR.

$$AVaR^{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X)d\beta \geq -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\alpha}(X)d\beta = -q^{\alpha}(X) = VaR^{\alpha}(X).$$

És immediat, a partir de la definició, que compleix les mateixes propietats que VaR:

Proposició 5.2. *Per $X \leq Y$ i $m \in \mathbb{R}$ aleshores:*

1. $AVaR^{\alpha}(X) \geq AVaR^{\alpha}(Y)$
2. $AVaR^{\alpha}(X + m) = AVaR^{\alpha}(X) - m$
3. *Per tota* $\lambda \geq 0, AVaR^{\alpha}(\lambda X) = \lambda AVaR^{\alpha}(X)$

Demostració

Les demostracions són immediates a partir de la definició de VaR i les propietats del quantil superior

1. Si X $\leq$ Y, aleshores

$$AVaR^{\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR^{\beta}(X)d\beta \geq \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR^{\beta}(Y)d\beta = AVaR^{\alpha}(Y).$$

2. Prenem qualsevol $m \in \mathbb{R}$ aleshores,

$$AVaR^{\alpha}(X+m) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR^{\beta}(X+m)d\beta = \frac{1}{\alpha}(\int_0^{\alpha} VaR^{\beta}(X) - m)d\beta$$
$$= \mathrm{AVaR}^{\alpha}(X) - m.$$

3. Per tota $\lambda \geq 0$, tenim

$$AVaR^{\alpha}(\lambda X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR^{\beta}(\lambda X)d\beta = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \lambda VaR^{\beta}(X)d\beta = \lambda\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR^{\beta}(X)d\beta$$
$$= \lambda AVaR^{\alpha}(X).$$

□

Aleshores per la definició donada AVaR proporciona un remei pel primer inconvenient que tractem del VaR, ja que **té en compte tota la cua de distribució.**

El segon inconvenient que volem tractar és que el VaR pot suggerir un major risc quan les carteres estan diversificades. Per veure que AVaR no te aquest problema veurem que és **sub – additiu**.

Teorema 5.3. *Per qualsevol cartera X, Y*

$$AVaR^{\alpha}(X+Y) \leq AVaR^{\alpha}(X) + AVaR^{\alpha}(Y)$$

Per la demostració d'aquest teorema necessitem veure uns resultats previs. Derivarem una formulació alternativa per AVaR, que és la que usarem per demostrar el Teorema 5.3, i també ens serà útil per fer els càlculs.

Comencem amb un lema tècnic.

Lema 5.4. *Sigui X una variable aleatòria. Suposem que U és una variable aleatòria distibuïda uniformement en (0,1). Aleshores la variable aleatòria Y definida per* $Y = q^U(X)$ *té la mateixa distribució que X. Aquest lema també és vàlid per* $Y = q_U(X)$.

Demostració

Usarem la notació g: $(0,1) \to (0,1)$ tal que $g(\alpha) = q^{\alpha}(X)$.

Aleshores usant aquesta notació Y = $q_U(X)$ = g(U).

Com U és una variable aleatòria distribuïda uniformement a (0,1), per qualsevol conjunt borelià $A \subset (0,1)$ la probabilitat de què U estigui dins de A és

$$\mathbb{P}(U \in A) = m(A)$$

on m representa la mesura de Lebesgue, que en aquest cas si prenem A = (a,b) tenim que m(A) = b-a.

Prenem $y \in \mathbb{R}$ fixat. Com estem en el cas d'una distribució uniforme en (0,1), pot existir com a màxim un α tal que

$$g(\alpha) = q^{\alpha}(X) = y.$$

Hi ha la possibilitat de què aquest α no existeixi, això és quan y es troba sota de la part plana de la funció de distribució $F_X(y)$.

Això significa que la preimatge $g^{-1}(y)$ consisteix com a màxim en un únic punt, per tant

$$\mathbb{P}(g(U) = y) = \mathbb{P}(U \in g^{-1}(y)) = m(g^{-1}(y)) = 0,$$

per la definició del quantil superior ($q^{\alpha}(X) = inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$), podem veure que si $\alpha < F_X(x)$ aleshores $q^{\alpha}(X) \leq x$. Això vol dir que

$$\{\alpha : \alpha < F_X(y)\} \subset \{\alpha : q^{\alpha}(X) \leq y\} = \{\alpha : g(\alpha) \leq y\}.$$

Per tant amb aquesta afirmació podem obtenir la desigualtat següent

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(g(U) \leq y) \geq \mathbb{P}(U < F_X(y)) \\ &= F_X(y). \end{aligned}$$

Amb això hem obtingut que $F_Y(y) \geq F_X(y)$.

Veiem ara l'altra desigualtat per així obtenir que són iguals. Un altre cop per la definició de $q^{\alpha}(X)$, podem veure que si $q^{\alpha}(X) < x$ aleshores $\alpha < F_X(x)$ i per tant:

$$\{\alpha : g(\alpha) < y\} = \{\alpha : q^{\alpha}(X) < y\} \subset \{\alpha : \alpha < F_X(y)\}.$$

Això dóna

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(g(U) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(g(U) < y) + \mathbb{P}(g(U) = y) \\ &= \mathbb{P}(g(U) < y) \leq \mathbb{P}(U < F_X(y)) \\ &= F_X(y). \end{aligned}$$

Per tant hem vist $F_Y(y) = F_X(y)$.

$\square$

Ara amb f_u que denota la densitat uniforme en (0,1) , és a dir,

$$f_u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x} \in \text{(0,1)} \\ 0 & \text{de lo contrari} \end{cases}$$

tenim

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} q^s(X) f_U(s) ds = \int_0^1 q^s(X) ds.$$

Per tant el Lema 5.4, implica que per qualsevol variable aleatòria integrable X, com les funcions de distribució de X i Y són les mateixes, tenim:

$$\int_0^1 q^s(X) ds = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X).$$

Nota. Això també es compleix si fem el canvi de $q^s(X)$ per $q_s(X)$.

Apliquem per tant aquest últim resultat obtingut per tenir la descripció alternativa de AVaR

Proposició 5.5. *Per qualsevol* $\alpha \in (0,1)$

$$AVaR^\alpha(X) = -\tfrac{1}{\alpha}[\mathbb{E}(X 1_{\{X < q^\alpha(X)\}}) + q^\alpha(X)(\alpha - P(X < q^\alpha(X))].$$

Demostració

Sigui x^- que denota la part negativa de x, és a dir, $x^- = -\min\{x, 0\}$. Com $f(x) = -x^-$ és una funció no decreixent, pel Lema 2.5, per qualsevol variable aleatòria Y i per qualsevol $\beta \in (0,1)$, tenim

$$q^\beta(-Y^-) = q^\beta(f(Y)) = f(q^\beta(Y)) = -(q^\beta(Y))^-.$$

Escriurem $q^\alpha(X) = q^\alpha$ per facilitar la notació. Aleshores,

$$\begin{aligned} AVaR^\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q^\beta(X) d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha (q^\beta(X) - q^\alpha) d\beta - q^\alpha \end{aligned}$$

com per $\beta \leq \alpha$ tenim que $q^\beta(X) \leq q^\alpha$, podem suposar que $\beta > \alpha$, aleshores

$$= -\tfrac{1}{\alpha}\int_0^1 -(q^\beta(X) - q^\alpha)^- d\beta - q^\alpha$$

per la Propietat 2.3, tenim

$$= -\tfrac{1}{\alpha}\int_0^1 -(q^\beta(X-q^\alpha))^- d\beta - q^\alpha$$

sabem que $q^\beta(-Y^-) = -(q^\beta(Y))^-$, aleshores

$$= -\tfrac{1}{\alpha}\int_0^1 q^\beta(-(X-q^\alpha)^-)d\beta - q^\alpha$$

usant el resultat $\int_0^1 q^s(X)ds = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$, obtenim

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(-(X-q^\alpha)^-) - q^\alpha \\
&= -\frac{1}{\alpha}\int_{\{X<q^\alpha\}}(X-q^\alpha)dP - q^\alpha \\
&= -\frac{1}{\alpha}[\int_{\{X<q^\alpha\}} XdP - \int_{\{X<q^\alpha\}} q^\alpha dP + \alpha q^\alpha] \\
&= -\frac{1}{\alpha}[\mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha\}}) + q^\alpha(\alpha - P(X<q^\alpha))].
\end{aligned}$$

□

Corol · lari 5.6. *Suposem que X és una variable aleatòria discreta amb $P(X = x_i) = p_i$, $p_1 + \ldots + p_N = 1$ i $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$. Aleshores*

$$AVaR^\alpha(X) = -\tfrac{1}{\alpha}[\sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i x_i + x_{k_\alpha}(\alpha - \sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i)],$$

on $k_\alpha \in \mathbb{R}$ és el major nombre tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i \leq \alpha$

Demostració

Pel Lema 3.5, sabem que $q^\alpha(X) = -VaR^\alpha(X) = x_{k_\alpha}$, per tant

$$P(X < q^\alpha(X)) = P(X < x_{k_\alpha}) = \sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i \ ,$$

$$\mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha(X)\}}) = \sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i x_i.$$

Substituint ara a la Proposició 5.5 trobem el resultat que volem.

□

El Corol · lari 5.6 pot fer-se servir per estimar AVaR usant una simulació de Monte Carlo.

Si $\hat{X}_1, \ldots \hat{X}_N$ són resultats de la simulació amb la mateixa distribució que X, definim Y_N com la variable aleatòria discreta amb distribució

$$P(Y_N = \hat{X}_i) = \frac{1}{N} \text{ , per i = 1,..., N}$$

Com la distribució de F_{Y_N} convergeix a F_X quan N tendeix a infinit, per N prou gran podem aproximar $AVaR^\alpha(X)$ per $AVaR^\alpha(Y_N)$, i cada $AVaR^\alpha(Y_N)$ pot calcular-se fàcilment usant el Corol · lari 5.6.

Trobem un altre corol · lari a partir de la Proposició 5.5

Corol · lari 5.7. *Si X és una variable aleatòria tal que la funció de distribució F_X és estrictament creixent i contínua, aleshores:*

$$AVaR^\alpha(X) = -\mathbb{E}(X|X \leq q^\alpha(X)).$$

Demostració

Com F_X és contínua , per qualsevol $q \in \mathbb{R}$,

$$\text{P(X = q) = 0.}$$

Pel Lema 2.4

$$q^\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha).$$

Usant aquests dos resultats obtenim,

$$\begin{aligned} P(X < q^\alpha(X)) &= P(X \leq q^\alpha(X)) - P(X = q^\alpha(X)) \\ &= P(X \leq q^\alpha(X)) \\ &= F_X(q_\alpha(X)) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Substituint al resultat de la Proposició 5.5, tenim:

$$\begin{aligned} AVaR^\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha}[\mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha(X)\}}) + q^\alpha(X)(\alpha - P(X < q^\alpha(X))] \\ &= -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X1_{\{X\leq q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\frac{1}{P(X \leq q^\alpha(X))}\mathbb{E}(X1_{\{X\leq q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\mathbb{E}(X|X \leq q^\alpha(X)). \end{aligned}$$

□

Per distribucions generals, hem de permetre la possibilitat de què F_X tingui un salt en α. Per això veurem el següent lema.

Lema 5.8. *Per $\alpha \in (0,1)$, prenem $q^\alpha = q^\alpha(X)$ i posem*

$$1_X^\alpha = \begin{cases} 1_{\{X<q^\alpha\}} & si\ P(X = q^\alpha) = 0 \\ 1_{\{X<q^\alpha\}} + k1_{\{X=q^\alpha\}} & si\ P(X = q^\alpha) > 0 \end{cases}$$

on

$$k = \frac{\alpha - P(X<q^\alpha)}{P(X=q^\alpha)}$$

Aleshores

$$\mathbb{E}(1_X^\alpha) = \alpha$$

i per tot $\omega \in \Omega$

$$1_X^\alpha(\omega) \in [0,1]$$

Demostració

Per demostrar la primera afirmació, $\mathbb{E}(1_X^\alpha) = \alpha$, observem si $P(X = q^\alpha) = 0$, aleshores

$$\mathbb{E}(1_X^\alpha) = \mathbb{E}(1_{\{X<q^\alpha\}}) = P(X < q^\alpha) = P(X \leq q^\alpha) = \alpha.$$

Mentre que si $P(X > q^\alpha) > 0$ tenim,

$$\mathbb{E}(1_X^\alpha) = \mathbb{E}(1_{\{X<q^\alpha\}} + k1_{\{X=q^\alpha\}}P(X < q^\alpha) + \alpha - P(X < q^\alpha) = \alpha.$$

Ara per demostrar la segona afirmació, per tot $\omega \in \Omega, 1_X^\alpha(\omega) \in [0,1]$, observem primer que quan $P(X = q^\alpha) = 0$, aleshores

$$1_X^\alpha = 1_{\{X<q^\alpha\}} \in \{0,1\}.$$

Ara si $P(X = q^\alpha) > 0$ i $\omega \notin \{X = q^\alpha\}$ aleshores

$$1_X^\alpha(\omega) = 1_{\{X<q^\alpha\}}(\omega) \in \{0,1\}.$$

Veiem per últim l'únic cas no trivial, és quan $P(X = q^\alpha) > 0$ i $\omega \in \{X = q^\alpha\}$.

En aquest cas (usant la notació $F_X(x_-) = lim_{y \nearrow x} F_X(y)$), tenim

$$P(X = q^\alpha) = F_X(q^\alpha) - F_X(q_-^\alpha),$$

i per $\omega \in \{X = q^\alpha\}$

$$1_X^\alpha(\omega) = k = \frac{\alpha - F_X(q_-^\alpha)}{F_X(q^\alpha) - F_X(q_-^\alpha)}.$$

Per la definició de α - quantil superior,

$$q^\alpha = inf\{x : \alpha < F_X(x)\} \ ,$$

veiem que per qualsevol $q < q^\alpha$ tenim $\alpha \geq F_X(q)$, per tant

$$\alpha \geq F_X(q_-^\alpha).$$

Per qualsevol $q > q^\alpha$, $\alpha < F_X(q)$ i per la continuïtat per la dreta de F_X tenim

$$\alpha \leq F_X(q^\alpha).$$

Hem demostrat que $\alpha \in [F_X(q_-^\alpha), F_X(q^\alpha)]$, per tant el quocient definit anteriorment es troba a [0,1].

$\square$

La definició de 1_X^α es dóna per poder expressar en la següent porposició $AVaR^\alpha$ com una esperança.

Proposició 5.9. *Per qualsevol* $\alpha \in (0, 1)$

$$AVaR^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X1_X^\alpha)$$

Demostració

Escriurem $q^\alpha(X) = q^\alpha$.

Si $P(X = q^\alpha) = 0$, aleshores $P(X < q^\alpha) = P(X \leq q^\alpha) = \alpha$, aleshores usant la Proposició 5.5 tenim,

$$\begin{aligned} AVaR^\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha}[\mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha(X)\}}) + q^\alpha(X)(\alpha - P(X < q^\alpha(X)))] \\ &= -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X1_X^\alpha). \end{aligned}$$

Si $P(X = q^\alpha) > 0$, usant

$$\int_{\{X=q^\alpha\}} XdP = \int_{\{X=q^\alpha\}} q^\alpha dP = q^\alpha P(X = q^\alpha),$$

Podem calcular

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X1_X^\alpha) &= \mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha\}} + X\frac{\alpha - P(X<q^\alpha)}{P(X=q^\alpha)}1_{\{X=q^\alpha\}}) \\
&= \mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha(X)\}}) + \int_{\{X=q^\alpha\}} X\frac{\alpha - P(X<q^\alpha)}{P(X=q^\alpha)}dP \\
&= \mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha(X)\}}) + \frac{\alpha - P(X<q^\alpha)}{P(X=q^\alpha)}\int_{\{X=q^\alpha\}} XdP \\
&= \mathbb{E}(X1_{\{X<q^\alpha(X)\}}) + q^\alpha(\alpha - P(X<q^\alpha)) \\
&= -\alpha AVaR^\alpha(X).
\end{aligned}$$

□

Observem que la variable aleatòria $Z(\omega) = \frac{1}{\alpha}1_X^\alpha(\omega)$ és integrable, acotada superiorment per $\frac{1}{\alpha}$, i té esperança 1, com hem vist al Lema 5.8. Per tant podem definir una nova mesura de probabilitat, que denotarem per Q_X^α , com

$$Q_X^\alpha(A) = \int_A ZdP.$$

En altres paraules, Z és una **derivada de Radon-Nikodym**, i la notació habitual és

$$Z = \frac{dQ_X^\alpha}{dP}$$

Això demostra que, usant la mesura Q_X^α, l'expressió $AVaR^\alpha$ pren una forma simple

$$AVaR^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X1_X^\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\int_\Omega X1_X^\alpha dP = -\int_\Omega X\frac{dQ_X^\alpha}{dP}dP = -\mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X).$$

Amb això podrem arribar a una fàcil demostració de la propietat de sub-additivitat.

Necessitem primer el següent resultat.

Definició 5.10. *Una mesura de probabilitat Q és* **absolutament contínua respecte a P**, que denotem com Q $\ll$ P, quan P(A) = 0 implica que Q(A) = 0.

Teorema 5.11. *(Teorema de Radon - Nikodym). Si tenim Q una mesura de probabilitat absolutament contínua respecte a P, aleshores existeix una única f tal que Q és la integral indefinida de f, és a dir*

$$Q(A) = \int_A fdP \textit{ per tot } A \textit{ mesurable}$$

i es diu que f és la derivada de Radon - Nikodym de Q respecte P, i s'escriu $f = \frac{dQ}{dP}$

Teorema 5.12. *Per* $\alpha \in (0,1)$ *prenem*

$$\mathcal{P}_\alpha = \{Q : Q \textit{ és una mesura de probabilitat, } Q \ll P, \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\alpha}\}$$

Aleshores

$$\sup\{-\mathbb{E}_Q(X) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} = AVaR^\alpha(X).$$

Demostració

Escriurem $q^\alpha = q^\alpha(X)$.

Com

$$\tfrac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) = \tfrac{1}{\alpha}1_X^\alpha(\omega),$$

Per la definició de 1_X^α, podem veure

$$\begin{gathered}\tfrac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) = \tfrac{1}{\alpha} \text{ , per } \omega \in \{X < q^\alpha\} \text{ ,}\\ \tfrac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) = \tfrac{1}{\alpha}k \text{ , per } \omega \in \{X = q^\alpha\} \text{ ,}\\ \tfrac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) = 0 \text{ , per } \omega \in \{X > q^\alpha\}.\end{gathered}$$

Sigui Q una mesura arbitraria de $\mathcal{P}_\alpha$. Calculem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(X) &= \int_Q X\frac{dQ}{dP}dP\\
&= \int_{\{X<q^\alpha\}} X\frac{dQ}{dP}dP + \int_{\{X=q^\alpha\}} X\frac{dQ}{dP}dP + \int_{\{X>q^\alpha\}} X\frac{dQ}{dP}dP\\
&= \int_{\{X<q^\alpha\}} X(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha})dP + \int_{\{X<q^\alpha\}} X\frac{dQ_X^\alpha}{dP}dP\\
&+ \int_{\{X=q^\alpha\}} X(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha}k)dP + \int_{\{X=q^\alpha\}} X\frac{dQ_X^\alpha}{dP}dP\\
&+ \int_{\{X>q^\alpha\}} X\frac{dQ}{dP}dP + \int_{\{X>q^\alpha\}} X\frac{dQ_X^\alpha}{dP}dP\\
&= \int_{\{X<q^\alpha\}} X(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha})dP + \int_{\{X=q^\alpha\}} X(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha}k)dP\\
&+ \int_{\{X>q^\alpha\}} X\frac{dQ}{dP}dP + \int_Q X\frac{dQ_X^\alpha}{dP}dP.
\end{aligned}$$

Ara examinem una a una les integrals de l'expressió.

Per definició, $\frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\alpha}$, per tant quan $\{X < q^\alpha\}$

$$(X - q^\alpha)(\tfrac{dQ}{dP} - \tfrac{1}{\alpha}) \geq 0,$$

que ens dóna

$$\textstyle\int_{\{X<q^\alpha\}} X(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha})dP \geq \int_{\{X<q^\alpha\}} q^\alpha(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha})dP.$$

Evidentment

$$\textstyle\int_{\{X=q^\alpha\}} X(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha}k)dP = \int_{\{X=q^\alpha\}} q^\alpha(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha}k)dP.$$

Com que $\frac{dQ}{dP} \geq 0$,

$$\int_{\{X>q^\alpha\}} X\frac{dQ}{dP}dP \geq \int_{\{X>q^\alpha\}} q^\alpha \frac{dQ}{dP}dP.$$

Finalment, per l'última de les integrals tenim

$$\int_\Omega X\frac{dQ^\alpha_X}{dP}dP = \mathbb{E}_{Q^\alpha_X}(X).$$

Ara substituïm totes aquestes expressions a la fórmula de $\mathbb{E}_Q(X)$ i obtenim

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(X) &\geq \int_{\{X<q^\alpha\}} q^\alpha(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha})dP + \int_{\{X=q^\alpha\}} q^\alpha(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha}k)dP \\
&+ \int_{\{X>q^\alpha\}} q^\alpha \frac{dQ}{dP}dP + \mathbb{E}_{Q^\alpha_X}(X) \\
&= -\int_{\{X<q^\alpha\}} q^\alpha \frac{1}{\alpha}dP - \int_{\{X=q^\alpha\}} q^\alpha \frac{1}{\alpha}kdP \\
&+ \int_\Omega q^\alpha \frac{dQ}{dP}dP + \mathbb{E}_{Q^\alpha_X}(X) \\
&= -q^\alpha\frac{1}{\alpha}P(X<q^\alpha) - q^\alpha\frac{1}{\alpha}kP(X=q^\alpha) + q^\alpha + \mathbb{E}_{Q^\alpha_X}(X) = \mathbb{E}_{Q^\alpha_X}(X).
\end{aligned}$$

Aquesta última igualtat és conseqüència de la definició de k.

Hem demostrat que $-\mathbb{E}_Q(X) \leq -\mathbb{E}_{Q^\alpha_X}(X)$. Com $Q^\alpha_X \in \mathcal{P}_\alpha$, això implica que

$$\sup\{-\mathbb{E}_Q(X) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} = -\mathbb{E}_{Q^\alpha_X}(X) = AVaR^\alpha(X).$$

□

Amb tots aquests resultats ja podem demostrar el Teorema 5.3. El resultat es dedueix del Teorema 5.12.

Corol · lari 5.13. *AVaR és sub-additiu*

$$AVaR^\alpha(X+Y) \leq AVaR^\alpha(X) + AVaR^\alpha(Y).$$

Demostració

Usarem el fet que per dues funcions $f, g : U \to \mathbb{R}$, on U és un conjunt arbitrari ,

$$\sup_{x\in U}\{f(x) + g(x)\} \leq sup f(x) + sup g(x).$$

Considerem X, Y fixades, podem aplicar la propietat de les funcions prenent $U = \mathcal{P}_\alpha$, $f(Q) = -\mathbb{E}_Q(X)$, i $g(Q) = -\mathbb{E}_Q(Y)$. Usant també el Teorema 5.12, obtenim

$$\begin{aligned}
AVaR^\alpha(X+Y) &= sup\{-\mathbb{E}_Q(X+Y) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} \\
&= sup\{\mathbb{E}_Q(-X) + \mathbb{E}_Q(-Y) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} \\
&\leq sup\{\mathbb{E}_Q(-X) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} + sup\{\mathbb{E}_Q(-Y) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} \\
&= AVaR^\alpha(X) + AVaR^\alpha(Y),
\end{aligned}$$

□

5.1 Coherència

En aquest apartat definirem una determinada classe de mesures de risc, i veurem que conté el AVaR però no el VaR. Prendrem $\rho(X) \in \mathbb{R}$ com a mesura de risc que s'assigna a una variable aleatòria X per representar el seu risc.

Definició 5.14. *Una mesura de risc ρ és* **coherent** si és:

1. Monòtona: $X \leq Y$ implica $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
2. $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.
3. Homogèniament positiva: per tot $\lambda \geq 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.
4. Sub-additiva: per qualsevol X,Y $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Ens centrem en les dues mesures de risc que hem estudiat al llarg del treball.

Podem veure per la Proposició 3.3, que VaR compleix les tres primeres propietats per ser una mesura coherent, en canvi hem vist a l'exemple 4.2 que VaR és una mesura que va en contra de què el principi de què la diversificació hauria de reduir el risc, i per tant ens diu que no és sub-additiva. Per tant podem treure com a conclusió que el VaR **no** és una **mesura coherent** .

Mirant ara la Proposició 5.2, veiem que AVaR també compleix les tres primeres propietats per ser una mesura coherent, i fixant-nos en el Corol · lari 5.13, veiem que aquesta també compleix la sub-additivitat, per tant podem concloure que el AVaR és una **mesura coherent** .

6 VaR i AVaR en el model Black-Scholes

El model Black-Scholes va ser desenvolupat per dos matemàtics, Fisher Black i Myron Scholes. Es va presentar en el seu document de 1973, ”El preu de les opcions i passius corporatius”, publicat a la Revista d'Economia Política. L'any 1997 aquest model va rebre el premi Nobel d'economia. En un principi es va utilitzar per intentar calcular quin hauria de ser el preu just d'una opció financera. Però més endavant es va ampliar per tota classe d'opcions. [16]

El model té en compte els següents supòsits:

- No hi ha costos de transacció o impostos.
- La taxa d'interès lliure de risc és constant per tots els venciments
- L'acció no paga dividends.
- La volatilitat es manté constant.
- Es permet la venda en curt.
- No hi ha oportunitats d'arbitratge sense risc
- Assumeix que la distribució de probabilitat dels retorns és una distribució normal.

Definim ara el model Black-Scholes, tenim una sola acció i un actiu lliure de risc. El preu de l'acció en el moment zero és S(0) > 0. El preu de l'acció en el moment T ve donat per

$$S(T) = S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}Z}$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ són paràmetres, i Z és una variable aleatòria amb distribució normal estàndard N(0,1). El paràmetre μ representa la **tendència** i el paràmetre σ representa la **volatilitat** de les accions.

La taxa lliure de risc és constant igual a r > 0, amb capitalització continua, que vol dir que el preu en el temps T de l'actiu lliure de risc es

$$A(T) = A(0)e^{rT},$$

per simplificar-ho prendrem A(0) = 1

Una **opció de venda Europea** , amb preu d'exercici K i venciment T, té un **benefici** de

$$(K - S(T))^+ = max(K - S(T), 0),$$

i un **cost** de

$$P(r, T, K, S(0), \sigma) = Ke^{-rT}N(-d_-) - S(0)N(-d_+),$$

on

$$d_+ = \frac{ln\frac{S(0)}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_- = \frac{ln\frac{S(0)}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

i N és la funció de distribució normal estàndard.

Denotem H(t) com el valor d'una opció de venda en els instants t = 0,T.

$$H(0) = P(r, T, K, S(0), \sigma)$$
$$\text{H(T)} = \text{(K - S(T))}^+.$$

Lema 6.1. *Per S(T), H(T) de la forma donada anteriorment, es té*

$$q^\alpha(S(T)) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(\alpha)},$$
$$q^\alpha(-H(T)) = -(K - q^\alpha(S(T)))^+.$$

Demostració

Primer hem de tenir en compte que pel Lema 2.4 obtenim que $q^\alpha(Z) = N^{-1}(\alpha)$.

Com $z \rightarrow S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}z}$ és una funció creixent, aleshores pel Lema 2.5, $q^\alpha(f(Z)) = f(q^\alpha(Z))$ obtenim el resultat de $q^\alpha(S(T))$.

De la mateixa manera, com $\zeta \rightarrow -(K - \zeta)^+$ és una funció no-decreixent, aleshores també pel Lema 2.5 tenim el resultat de $q^\alpha(-H(T))$.

□

6.1 VaR en el model Black-Scholes

Suposem primer que comprem una única part de l'acció. El guany descomptat d'aquesta inversió és

$$X = e^{-rT}S(T) - S(0).$$

Pel Lema 3.7, com $VaR^\alpha(f(X)) = -f(q^\alpha(X))$, podem veure que

$$VaR^\alpha(X) = S(0) - e^{-rT}q^\alpha(S(T))$$

Veiem ara un exemple de com calcularíem el VaR mitjançant el que hem anunciat anteriorment.

Exemple 6.2. Calcularem el $VaR^{5\%}(X)$ per una inversió en una acció amb els paràmetres $S(0) = 100$, $\mu = 10\%$, $\sigma = 0.2$, $r = 3\%$ i $T = 1$.

Usant les fòrmules anteriors, tenim

$$VaR^{5\%}(X) = S(0) - e^{-rT}q^{0.05}(S(T)) = 100 - e^{-0.03}q^{0.05}(S(T))$$

Per això necessitem calcular

$$\begin{aligned} q^{\alpha}(S(T)) &= S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}N^{-1}(\alpha)} \\ q^{0.05}(S(T)) &= 100e^{(0.1-\frac{0.2^2}{2})1+0.2\sqrt{1}N^{-1}(0.05)} \\ &= 100e^{(0.1-\frac{0.2^2}{2})1+0.2\sqrt{1}(-1.645)} = 77.96 \end{aligned}$$

Per tant tornant al resultat anterior, obtenim

$$VaR^{5\%}(X) = 100 - e^{-0.03}77.96 = 24.34$$

El que vol dir que hi ha una probabilitat del 5% de perdre més de 24.34 €

Considerem ara una inversió on en el moment zero comprem x accions i y unitats de l'actiu lliure de risc.

Usarem $V_{(x,y)}(t)$ per t = 0,T per denotar el valor de la cartera en el moment t,

$$V_{(x,y)}(t) = xS(t) + yA(t).$$

i usem $X_{(x,y)}$ per denotar el guany descomptat

$$X_{(x,y)} = e^{-rT}V_{(x,y)}(T) - V_{(x,y)}(0)$$

Lema 6.3. *Si $x \geq 0$ aleshores,*

$$VaR^{\alpha}(X_{(x,y)}) = V_{(x,y)}(0) - xe^{-rT}q^{\alpha}(S(T)) - y$$

Demostració

Com $x \geq 0$, el guany descomptat pot ser expresat com una funció no decreixent de S(T),

$$X_{(x,y)} = f(S(T)),$$

on

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= e^{-rT}(x\zeta + yA(T)) - V_{(x,y)}(0) \\ &= \mathrm{e}^{-rT}x\zeta + y - V_{(x,y)}(0), \end{aligned}$$

aplicant el Lema 3.7 tenim

$$VaR^{\alpha}(f(S(T)) = -f(q^{\alpha}(S(T)) = -e^{-rT}xq^{\alpha}(S(T)) - y + V_{(x,y)}(0).$$

□

Escollint qualsevol $x \in (0,1)$ i $y = (1-x)S(0)$ podem veure que el valor inicial de la inversió és

$$V_{(x,y)}(0) = S(0).$$

Sigui ara $VaR^{\alpha}(X)$ el valor en risc per la inversió d'una sola unitat d'accions, que hem vist a l'inici de la secció, aleshores amb la fórmula calculada de $VaR^{\alpha}(X_{(x,y)})$ tenim

$$\begin{aligned} VaR^{\alpha}(X_{(x,y)}) &= V_{(x,y)}(0) - xe^{-rT}q^{\alpha}(S(T)) - y \\ &= xS(0) - xe^{-rT}q^{\alpha}(S(T)) \\ &= xVaR^{\alpha}(X) < VaR^{\alpha}(X). \end{aligned}$$

Aleshores amb això podem concloure que diversificar una inversió entre l'acció i l'actiu lliure de risc **redueix el VaR.**

Per últim un altre idea per reduir el VaR és comprar opcions de venda Europea. Suposem que en el moment zero comprem x unitats d'accions i z opcions de venda amb preu d'exercici K. El valor d'aquesta inversió és

$$V_{(x,z)} = xS(T) + zH(t),$$

i el guany descomptat és

$$\begin{aligned} X_{(x,z)} &= e^{-rT}V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0) \\ &= e^{-rT}(xS(T) + z(K - S(T))^{+}) - V_{(x,z)}(0). \end{aligned}$$

Lema 6.4. *Si* $0 < z \leq x$ *aleshores*

$VaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - e^{-rT}(xq^{\alpha}(S(T)) + z(K - q^{\alpha}(S(T)))^{+}).$

Demostració

Com $0 < z \leq x$, podem veure que $X_{(x,z)}$ es pot expressar com una funció no decreixent de S(T),

$$X_{(x,z)} = f(S(T))$$

on

$$f(\zeta) = e^{-rT}(x\zeta + z(K - \zeta)^{+}) - V_{(x,y)}(0),$$

Pel Lema 3.7 tenim

$$\begin{aligned} VaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) &= -f(q^{\alpha}(S(T))) \\ &= e^{-rT}(-xq^{\alpha}(S(T)) - z(K - q^{\alpha}(S(T)))^{+}) + V_{(x,z)}(0). \end{aligned}$$

□

En general no tenim plena llibertat per escollir el preu d'exercici d'una opció de venda, i generalment s'ha d'escollir entre les opcions disponibles al mercat.

Per tant ara suposem que podem invertir en n opcions de venda amb preus d'exercici $K_1, \ldots, K_n$ i venciment T. Denotarem $H_i(t)$ el pagament d'una opció de venda amb preu d'exercici K_i, en particular

$$H_i(0) = P(r, T, K_i, S(0), \sigma),$$
$$\mathrm{H}_i(T) = (K_i - S(T))^{+}.$$

Suposem que comprem x accions i z_i opcions de venda amb preus d'exercici K_i per $i = 1, \ldots, n$. Prenem z, 1, H(t) per t = 0,T vectors de $\mathbb{R}^n$ definits com

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) \\ \vdots \\ H_n(t) \end{pmatrix}$$

Aleshores el valor de la nostra inversió en el moment t és

$$V_{(x,z)}(t) = xS(t) + z^T H(t).$$

Veurem per tant en la següent proposició com calcular el VaR per

$$X_{(x,z)} = e^{-rT} V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0).$$

Proposició 6.5. *Si* $z_i \geq 0$ *per* $i = 1, \ldots, n$ *i* $\sum_{i=1}^{n} z_i = z^T 1 \leq x$, *aleshores*

$$VaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - e^{-rT}(xq^{\alpha}(S(T)) - z^T q^{\alpha}(-H(T))),$$

on

$$q^{\alpha}(-H(t)) = -\begin{pmatrix} (K_1 - q^{\alpha}(S(T)))^{+} \\ \vdots \\ (K_n - q^{\alpha}(S(T)))^{+} \end{pmatrix}$$

Demostració

Primer cal comentar que la fórmula de $q^{\alpha}(-H(T))$ prové del Lema 6.1.

Com $z^T 1 \leq x$, la funció

$$\zeta \to e^{-rT}(x\zeta + \sum_{i=1}^{n} z_i(K_i - \zeta)^{+}) - V_{(x,y)}(0)$$

és no decreixent, tenim que pel Lema 3.7

$$VaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - e^{-rT}(xq^{\alpha}(S(T)) + \sum_{i=1}^{n} z_i(K_i - q^{\alpha}(S(T)))^{+}).$$

□

Ara fixem x, i veurem com podem **minimitzar** $VaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$ escollint un z.

Suposem que tenim V_0 a la nostra disposició per la inversió i la cobertura. Això vol dir que gastem

$$c = V_0 - xS(0)$$

en opcions de venda.

Ara suposem que no prenem posicions curtes en accions o opcions de venda, i el nombre d'accions no supera el nombre d'accions a la cartera. Aleshores sota aquestes suposicions **minimitzar** $VaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$ és equivalent al següent problema

$$\min z^T q^{\alpha}(-H(T))$$

tenint en compte

$$z^T H(0) = c,$$
$$\mathrm{z}^T 1 \leq x,$$
$$\mathrm{z}_0, \ldots, z_n \geq 0.$$

6.2 AVaR en el model Black-Scholes

Recordem que en aquest model, el preu futur de les accions en el moment T és

$$S(T) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ són paràmetres i Z és una variable aleatòria amb distribució normal estàndard N(0,1).

Abans de calcular l'AVaR, veiem un lema.

Lema 6.6. *Per qualsevol* $q \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(S(T)|Z \leq q) = \frac{1}{N(q)} S(0)e^{\mu T} N(q - \sigma\sqrt{T}),$$

on N(q) és la funció normal estàndard, és a dir,

$$N(q) = \int_{-\infty}^{q} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Demostració

Com $P(Z \leq q) = N(q) > 0$, aleshores

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S(T)|Z \leq q) &= \frac{1}{P(Z \leq q)} \int_{-\infty}^{q} S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_{-\infty}^{q} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2\sigma\sqrt{T}x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_{-\infty}^{q} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2\sigma\sqrt{T}x + \sigma^2 T}{2} + \frac{\sigma^2 T}{2}} dx \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0)e^{\mu T} \int_{-\infty}^{q} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0)e^{\mu T} \int_{-\infty}^{q - \sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0)e^{\mu T} N(q - \sigma\sqrt{T}).
\end{aligned}$$

□

Viem ara el calcul de l'AVaR en el model Black - Scholes, per els diferents casos. Primer ho farem per una inversió en accions.

Per això necessitem considerar una nova mesura de risc, similar al AVaR definit a la Proposició 5.9.

Definició 6.7. *Definim la* **cua condicional d'esperança (TCE)** de X com

$$TCE^{\alpha}(X) = -\mathbb{E}(X|X \leq q^{\alpha}(X)) = -\mathbb{E}(X|X \leq -VaR^{\alpha}(X)).$$

Quan F_X és continua aleshores tenim $\alpha = P(X \leq q^{\alpha}(X)) = P(X < q^{\alpha}(X)$, i per tant quan F_X és continua, tenim $TCE^{\alpha}(X) = AVaR^{\alpha}(X)$.

Aquest resultat l'usarem per demostrar el següent Lema.

Lema 6.8. *Pel guany descomptat*

$$X = e^{-rT}S(T) - S(0)$$

tenim

$$AVaR^{\alpha}(X) = S(0) - \tfrac{1}{\alpha}S(0)e^{(\mu-r)T}N(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}).$$

Demostració

Pel Lema 6.1, sabem

$$q^{\alpha}(S(T)) = S(0)e^{((\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}q^{\alpha}(Z))}.$$

Per tant

$$\{X \leq q^{\alpha}(X)\} = \{e^{-rT}S(T) - S(0) \leq q^{\alpha}(e^{-rT}S(T) - S(0))\},$$

per la Proposició 2.3

$$\begin{aligned} &= \{e^{-rT}S(T) - S(0) \leq e^{-rT}q^{\alpha}(S(T)) - S(0)\} \\ &= \{S(T) \leq q^{\alpha}(S(T))\} \\ &= \{Z \leq q^{\alpha}(Z)\}. \end{aligned}$$

Com X té una distribució contínua, tenim

$$\begin{aligned} AVaR^{\alpha}(X) &= TCE^{\alpha}(X) \\ &= -\mathbb{E}(X|X \leq q^{\alpha}(X)) \\ &= -\mathbb{E}(e^{-rT}S(T) - S(0)|Z \leq q^{\alpha}(Z)) \\ &= S(0) - e^{-rT}\mathbb{E}(S(T)|Z \leq q^{\alpha}(Z)) \\ &= S(0) - \frac{1}{\alpha}S(0)e^{(\mu-r)T}N(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}). \end{aligned}$$

Aquesta última igualtat ve donada per el Lema 6.6.

□

Ara veurem com funciona AVaR amb opcions de venda Europees. Suposem que en el moment zero comprem x accions i z opcions de venda Europees amb preu d'exercici K i data de venciment T. El valor de la inversió ve donat a t = 0, T per

$$V_{(x,z)}(t) = xS(t) + zH(t),$$

on H(T) és el pagament de l'opció de venda

$$H(T) = (K - S(T))^+,$$

i H(0) és el preu de l'opció de venda

$$H(0) = P(r, T, K, S(0), \sigma) = Ke^{-rT}N(-d_-) - S(0)N(-d_+),$$

El guany descomptat de la inversió és

$$X_{(x,z)} = e^{-rT}V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0)$$

Com que volem calcular $AVaR^\alpha(X_{(x,z)})$, introduïm primer una notació

$$\begin{aligned}
d_-^\mu &= d_-(\mu, T, K, S(0), \sigma), \\
d_+^\mu &= d_-^\mu + \sigma\sqrt{T}, \\
d_-^{\mu,\alpha} &= max(d_-^\mu, -q^\alpha(Z)), \\
d_+^{\mu,\alpha} &= d_-^{\mu,\alpha} + \sigma\sqrt{T}, \\
P^\alpha(K) &= Ke^{-\mu T}N(-d_-^{\mu,\alpha}) - S(0)N(-d_+^{\mu,\alpha}).
\end{aligned}$$

Proposició 6.9. *Si* $z \in [0, x]$*, aleshores*

$$AVaR^\alpha(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - \tfrac{1}{\alpha}e^{(\mu-r)T}[xS(0)N(q^\alpha(Z) - \sigma\sqrt{T}) + zP^\alpha(K)].$$

Demostració

Primer veiem que

$$\begin{aligned}
X_{(x,z)} &= e^{-rT}V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0) \\
&= e^{-rT}(xS(T) + z(K - S(T))^+) - V_{(x,z)}(0).
\end{aligned}$$

Ara, com $z \leq x$, veiem que

$$s \to e^{-rT}(xs + z(K - s)^+) - V_{(x,z)}(0)$$

és una funció no decreixent de s. A més tenim que,

$$\xi \to S(0)\exp((\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi)$$

és una funció creixent. Aleshores amb això i el Lema 2.5 obtenim,

$$\{X_{(x,z)} \leq q^\alpha(X_{(x,z)})\} = \{S(T) \leq q^\alpha(S(T))\} = \{Z \leq q^\alpha(Z)\}.$$

Separarem el cas de la desigualtat estricte i el cas de la igualtat. Primer demostrarem el cas $z < x$, tenim

$$s \to e^{-rT}(xs + z(K-s)^+) - V_{(x,z)}(0)$$

és estrictament creixent, per tant

$$P(X_{(x,y)} < q^\alpha(X_{(x,y)})) = P(S(T) < q^\alpha(S(T))) = \alpha,$$

i per la Proposició 5.5, podem veure

$$\begin{aligned}
AVaR^\alpha(X_{(x,z)}) &= -\mathbb{E}(X_{(x,z)}|X_{(x,z)} \leq q^\alpha(X)) \\
&= -\mathbb{E}(X_{(x,z)}|Z \leq q^\alpha(Z)) \\
&= V_{(x,z)}(0) - e^{-rT}x\mathbb{E}(S(T)|Z \leq q^\alpha(Z)) - e^{-rT}z\mathbb{E}((K-S(T))^+|Z \leq q^\alpha(Z)).
\end{aligned}$$

Com $S(T) = S(0)e^{((\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}Z)}$, aleshores sabem

$$\{S(T) \leq K\} = \{Z \leq -d_-^\mu\},$$

Calculem ara,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((K-S(T))^+|Z \leq q^\alpha(Z)) &= \mathbb{E}((K-S(T))1_{\{Z\leq -d_-^\mu\}}|Z \leq q^\alpha(Z)) \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\min(q^\alpha(Z),-d_-^\mu)} (K - S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}dx
\end{aligned}$$

(com $\min(a,b) = -\max(-a,-b)$)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{-d_-^{\mu,\alpha}} K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}dx - \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{-d_-^{\mu,\alpha}} S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}dx \\
&= \frac{1}{\alpha}KN(-d_-^{\mu,\alpha}) - \frac{1}{\alpha}P(Z \leq -d_-^{\mu,\alpha})\mathbb{E}(S(T)|Z \leq -d_-^{\mu,\alpha}) \\
&= \frac{1}{\alpha}KN(-d_-^{\mu,\alpha}) - \frac{1}{\alpha}S(0)e^{\mu T}N(-d_-^{\mu,\alpha} - \sigma\sqrt{T}) \\
&= \frac{1}{\alpha}e^{\mu T}(Ke^{-\mu T}N(-d_-^{\mu,\alpha}) - S(0)N(-d_+^{\mu,\alpha})).
\end{aligned}$$

Per aquestes igualtats anteriors hem usat també el Lema 6.6.

Substituint a la fórmula, de l'inici de la demostració, del càlcul de $AVaR^\alpha(X_{(x,z)})$ i amb el Lema 6.6 obtenim el resultat.

Considerem ara el cas en què $z = x$.

Com per qualsevol $\beta \in (0,1)$, tenim

$$\lim_{z\nearrow x} q^\beta(X_{(x,z)}) = q^\beta(X_{(x,x)}),$$

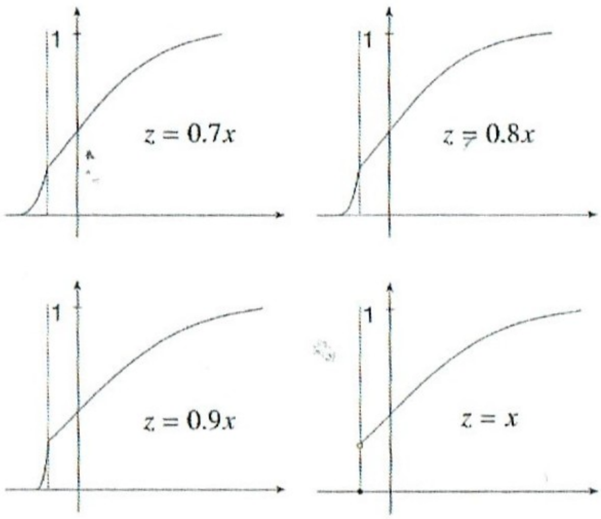

Figura 4: Funció de distribució per diversos z

Aleshores, obtenim

$$\begin{aligned}\lim_{z\nearrow x} AVaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) &= \lim_{z\nearrow x} -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X_{(x,z)})d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q^{\beta}(X_{(x,x)})d\beta \\ &= AVaR^{\alpha}(X_{(x,x)}).\end{aligned}$$

Aleshores podem deduir el resultat a partir del fet que la fórmula per $AVaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$ en aquest cas és continua respecte a z.

$\square$

Veiem ara que passa quan no tenim plena llibertat per escollir el preu d'exercici. Suposem que podem invertir en n opcions de venda Europea, amb data de venciment T i preus d'exercici $K_1, \ldots, K_n$. Denotem el valor en el moment t de l'opció amb preu d'exercici K_i com $H_i(t)$ i escriurem

$$H(t) = (H_1(t), \ldots, H_n(t)).$$

Suposem que comprem x accions i z_i opcions de venda amb preu d'exercici K_i, per $i = 1, \ldots, n$. La posició en opcions de venda ve determinada pel vector

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}.$$

El valor de la inversió en l'instant t és

$$V_{(x,z)}(t) = xS(t) + z^T H(t),$$

i el guany descomptat és

$$X_{(x,z)} = e^{-rT} V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0).$$

Aleshores de la mateixa manera que hem demostrar la Proposició 6.9, podem obtenir el següent Lema.

Proposició 6.10. *Si $z_i \geq 0$ per $i = 1, \dots, n$ i $z_1 + \dots + z_n \leq x$, aleshores*

$$AVaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - \frac{1}{\alpha} e^{(\mu - r)T} [xS(0)N(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}) + z^T P^{\alpha}],$$

on $P^{\alpha} = (P^{\alpha}(K_1), \dots, P^{\alpha}(K_n))$.

Suposem ara que x està fixat. Mirem com **minimitzar** $AVaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$ escollint z. Suposem que invertim V_0, i vol dir que podem gastar

$$c = V_0 - xS(0)$$

en opcions de venda. Suposem que no prenem posicions curtes en accions o opcions de venda, i que el nombre total d'opcions no supera el nombre d'accions de la nostra cartera.

Sota aquests supòsits i per la fórmula de la proposició anterior, **minimitzar** $AVaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$ és equivalent a trobar

$$\min z^T P^{\alpha},$$

tenint en compte que

$$z^T H(0) = c,$$
$$\mathrm{z}^T 1 \leq x,$$
$$\mathrm{z}_0, \dots, z_n \geq 0.$$

6.3 Exemple

Veurem ara un exemple en el qual calcularem el VaR i AVaR d'un model Black - Scholes, en el que no tenim llibertat per obtenir el preu d'exercici d'una opció de venda, i comprem x accions i z_i opcions de venda amb preus d'exercisi K_i per i = 1,2,3.

Considerem per tant el model Black-Scholes amb els següents paràmetres

$$S(0) = 100$$
$$\mu = 10\%$$
$$\sigma = 0.2$$
$$\mathrm{r} = 3\ \%$$

Suposem que volem invertir $V_0 = 1000$ en accions i opcions de venda, amb preus d'exercicis

$$K_1 = 75$$
$$K_2 = 90$$
$$K_3 = 110$$

i venciment T = 1, per $\alpha = 0.05$, i prenent c = 0, 10, 30, 50 i 80.

Començarem amb el càlcul de $VaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$, ho calcularem per els diferents valors de la següent taula.

c	x	z_1	z_2	z_3
0	10	0.00	0.00	0.00
10	9.9	0.00	3.61	0.00
30	9.7	0.00	9.36	0.34
50	9.5	0.00	6.95	2.55
80	9.2	0.00	3.32	5.88

La fòrmula que usarem per calcular el VaR és la següent:

$$VaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - e^{-rT}[xq^{\alpha}(S(T)) - z^T q^{\alpha}(-H(T))].$$

Per això utilitzarem les diverses fòrmules que hem vist a l'apartat 6.1.

$$\begin{aligned}
V_{(x,z)}(0) &= xS(0) + z^T H(0), \\
H_i(0) &= P(r, T, K_i, S(0), \sigma) = K_i e^{-rT} N(-d_-) - S(0)N(-d_+), \\
q^{\alpha}(S(T)) &= S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(\alpha)}, \\
q^{\alpha}(-H(t)) &= -\begin{pmatrix} (K_1 - q^{\alpha}(S(T)))^+ \\ \vdots \\ (K_n - q^{\alpha}(S(T)))^+ \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les dades que podem extreure de manera general, que no depenen de x ni de z_i són les següents,

$$H(0) = \begin{pmatrix} 0.406 \\ 2.769 \\ 12.042 \end{pmatrix}$$

Com sabem que $N^{-1}(0.05)$ = -1.645, aleshores podem calcular

$$q^{\alpha}(S(T)) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(\alpha)} = 77.96$$

i també podem trobar,

$$q^{\alpha}(-H(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -12.04 \\ -32.04 \end{pmatrix}$$

Ara substituïnt a la fòrmula de l'inici, els valors trobats i els x i z_i corresponents a cada cas, ja podem trobar $VaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$.

c	x	z1	z2	z3	VaR$^{\alpha}$
0	10	0.00	0.00	0.00	243.44
10	9.9	0.00	3.61	0.00	208.81
30	9.7	0.00	9.36	0.34	146.23
50	9.5	0.00	6.95	2.55	120.68
80	9.2	0.00	3.32	5.88	82.35

Per tant observant les dades obtingudes, podem concloure que per obtenir un VaR més reduit serà necessari gastar més diners en opcions de venda.

Calcularem ara d'una manera similar $AVaR^{\alpha}(X_{(x,z)})$, a partir de les dades de la següent taula, que són molt similars a les anteriors.

c	x	z1	z2	z3
0	10	0.00	0.00	0.00
10	9.9	7.37	2.53	0.00
30	9.7	0.00	9.36	0.34
50	9.5	0.00	6.95	2.55
80	9.2	0.00	3.32	5.88

La fòrmula que usarem per calcular el AVaR és la següent:

$$AVaR^{\alpha}(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - \tfrac{1}{\alpha}e^{(\mu-r)T}[xS(0)N(q^{\alpha}(Z) - \sigma\sqrt{T}) + z^T P^{\alpha}].$$

Per això utilitzarem les diverses fòrmules que hem vist a l'apartat 6.2.

$$\begin{aligned} V_{(x,z)}(0) &= xS(0) + z^T H(0), \\ H(0) &= P(r,T,K,S(0),\sigma) = Ke^{-rT}N(-d_-) - S(0)N(-d_+), \\ P^{\alpha} &= (P^{\alpha}(K_1),\ldots,P^{\alpha}(K_n)) \\ P^{\alpha}(K) &= Ke^{-\mu T}N(-d_-^{\mu,\alpha}) - S(0)N(-d_+^{\mu,\alpha}) \end{aligned}$$

Aleshores, $H(0)$ és el mateix que hem calculat anteriorment per el VaR.

L'altre dada que podem obtenir de manera general és P^{α},

$$P^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0.140 \\ 0.819 \\ 1.724 \end{pmatrix}$$

Ara substituïnt a la fòrmula de $AVaR^\alpha(X_{(x,z)})$, els valors trobats i els x i z_i corresponents a cada cas, ja podem trobar el resultat.

c	x	z_1	z_2	z_3	AVaR^α
0	10	0.00	0.00	0.00	302.24
10	9.9	7.37	2.53	0.00	242.61
30	9.7	0.00	9.36	0.34	146.23
50	9.5	0.00	6.95	2.55	120.68
80	9.2	0.00	3.32	5.88	82.35

Per tant observant les dades obtingudes, podem concloure el mateix resultat que hem vist per VaR, per obtenir un AVaR més reduit serà necessari gastar més diners en opcions de venda.

Si comparem ara els resultats de $VaR^\alpha(X_{(x,z)})$ i $AVaR^\alpha(X_{(x,z)})$ en les dues primeres files de la taula, podem veure que quan c = 0 i c = 10, els resultats de AVaR són superiors que els de VaR. Això és degut a que el VaR ens dóna la mínima pèrdua i el AVaR ens dóna la pèrdua mitjana. Aquest és un dels inconvenients que hem tractat al treball.

7 Exemple índexs borsaris

Per últim veurem un exemple amb dades reals dels índexs borsaris, tractarem l'índex Ibex35 i el I.G Bolsa Madrid.

Un **índex borsari** és la ponderació matemàtica d'un grup de valors que cotitzen un mateix mercat, per mesurar el creixement o decreixement de les seves accions, per tant és molt útil per poder analitzar variacions del preu en vàries empreses. En altres paraules, un índex borsari és un valor numèric que es calcula segons els preus de mercat de cada un dels valors que componen aquest índex en un moment determinat. [9] [10]

Serveix per representar l'evolució de les empreses d'un país, un determinat sector de l'economia o un tipus d'actiu financer.

Permet que els inversors puguin fer un seguiment dels canvis en el valor de mercat d'accions, a més, els índexs també proporcionen un punt de referència útil per mesurar l'èxit de mitjans d'inversió.

Els índexs borsaris es van començar a utilitzar a finals del segle XIX, gràcies a Charles H. Dow, un periodista d'Estats Units, que va ser un gran observador del mercat de valors. Després d'observar que les accions de la majoria d'empreses baixaven o pujaven juntes de preu va decidir expressar la tendència o nivell de mercat de valors en termes del preu mitjà d'unes quantes accions representatives.

Trobem tres principals formes per construir un índex borsari:

1. Índex de preus ponderats: és la mitjana aritmètica del preu dels valors que componen l'índex.
2. Índex de capitalització ponderada: es construeix segons la capitalització borsària de cadascun dels valors que formen l'índex.
3. Índexs d'igual ponderació: Es calcula com la mitjana aritmètica de la rendibilitat de cada un dels valors que componen l'índex.

Definim ara els dos índexs que tractem a l'exemple.

L'**Ibex 35** és el principal índex borsari espanyol. Per això és utilitzat com a referent nacional i internacional per conèixer la situació de la borsa espanyola. Ibex és un acrónim de Ïberian Index". Es va iniciar el 14 de gener del 1992. Està compost per les 35 empreses amb més liquiditat que cotitzen el sistema d'Interconnexió Borsària integrat per les quatre Borses espanyoles (Madrid, Barcelona, València i Bilbao).

Les companyies amb més liquiditat són aquelles que diariament són objecte de més compres i vendes. És a dir, aquelles que reben un major interès per part dels inversors. Les 35 companyies que més moviment experimenten en les borses espanyoles són les que formen l'Ibex 35, independentment del sector econòmic a què pertanyen. L'Ibex 35 es representa mitjançant un índex ponderat per capitalització borsària. Aquest càlcul ponderat vol dir que no totes les empreses que el cotitzen tenen el mateix pes en l'evolució de l'índex. De fet, només 5 de les 35 companyies representen un 65% de l'índex : Telefònica, Banc Santander, BBVA, Iberdrola y Repsol. Per tant els moviments de pujada i baixada d'aquests cinc valors influeix determinadament a les pujades i baixades de l'Ibex 35. [12]

L'**índex general de la Bolsa de Madrid** és un índex borsari que representa les empreses que han estat admeses a cotització a la borsa de Madrid. Està compost per un nombre fix d'empreses (normalment superior a 100) que pertanyen al mercat continu espanyol. Aquest índex es publica a finals del 1940, tot i que no és fins al 1986 que es comença a calcular. [11]

Les empreses que volen formar part d'aquest índex han de complir uns requisits determinats de liquiditat. Aquests requisits són els següents:

1. Que el volum de contractació sigui superior als 3 milions d'euros en el semestre anterior a la data de la revisió.
2. Que la rotació capital de l'empresa sigui major al 10% de la seva capitalització en base anual.
3. Que tingui una alta freqüència de contractació.

Per realitzar els càlculs de l'exemple hem estat recollint dades dels preus de l'Ibex 35 i el I.G bolsa Madrid durant 14 dies [13] . I amb aquestes dades hem calculat el VaR teòric, el VaR històric, i l'AVaR, podrem així analitzar les diferències entre ells. [8]

Començarem primer amb els càlculs per l'Ibex 35. Les dades recollides són les següents:

DADES IBEX35	
DIA	PREU
24-des	9635
25-des	9661,8
26-des	9661,8
27-des	9675
28-des	9700,5
29-des	9700,5
30-des	9660
31-des	9549,2
1-gen	9549,2
2-gen	9697
3-gen	9607
4-gen	9646,6
5-gen	9646,6
6-gen	9600,9

Volem primer obtenir el **VaR teòric**. Per això necessitem calcular els rendiments, la seva mitjana, i la seva desviació estàndard. Ho fem amb l'excel i obtenim els següents resultats

Mitjana dels rendiments = -0,00025235

Desviació estàndard dels rendiments = 0,006644854

Una vegada tenim aquests càlculs ja podem trobar el VaR teòric. El calcularem amb probabilitats de 90% i 95%. Obtenim els següents resultats.

VaR al 10% en percentatge = 0,876807%

VaR al 5% en percentatge = 1,118216%

Per tant analitzant els resultats podem extreure que si fem una inversió podem patir una pèrdua màxima del 0,88% amb probabilitat 90% o equivalentment la probabilitat de perdre més del 0,88% és del 10%. I a més també hem pogut veure que podem patir una pèrdua màxima del 1,12% amb probabilitat 95% o equivalentment la probabilitat de perdre més de l' 1,12% és del 5%.

Més concretament, si fem una inversió de 10000 euros, aleshores podem patir una pèrdua màxima de 88 euros amb probabilitat 90% o bé la probabilitat de perdre més de 88 euros és del 10%. I per tant podem patir una pèrdua màxima de 112 euros amb probabilitat 95% o bé la probabilitat de perdre més de 112 euros és del 5%.

Ara calculem el **VaR històric** , per veure si trobem una millor aproximació de la pèrdua. Com només tenim 14 dades, el calcularem únicament al 10%. Fent els càlculs obtenim el següent resultat:

VaR històric al 10% = 1,081335 %.

Per tant analitzant els resultats podem extreure que si fem una inversió podem patir una pèrdua màxima de l' 1,08% amb probabilitat 90% o equivalentment la probabilitat de perdre més de l' 1,08% és del 10%.

Tornant a l'exemple anterior, si fem una inversió de 10000 euros, aleshores podem patir una pèrdua màxima de 108 euros amb probabilitat 90% o bé la probabilitat de perdre més de 108 euros és del 10%.

Comparant-lo amb el resultat anterior podem veure que ens dóna més informació. Això és degut al fet que el VaR teòric suposa que les variables que estudiem segueixen una distribució N(0,1), l'històric no, per tant amb això podem extreure que les variables no segueixen la distribució N(0,1).

Per últim realitzem el càlcul de l' **AVaR** , que ho hem fet calculant el TCE, ja que en l'apartat anterior hem vist que TCE = AVaR. De la mateixa manera que abans, només el calcularem al 10%. Obtenim el següent resultat:

AVaR al 90% = 1,146998%

Per tant analitzant els resultats podem extreure que si fem una inversió podem patir una pèrdua mitjana màxima de l' 1,15% amb probabilitat 90% o equivalentment la probabilitat de perdre de mitja més de l' 1,15% és del 10%.

Tornant a l'exemple anterior, si fem una inversió de 10000 euros, aleshores podem patir una pèrdua mitjana màxima de 150 euros amb probabilitat 90% o bé la probabilitat de perdre de mitja més de 150 euros és del 10%.

Comparant els tres càlculs realitzats podem veure que el càlcul de l'AVaR ens dóna més informació que els dos anteriors, ja que el VaR ens dóna la mínima pèrdua del 10% i l'AVaR ens dóna la pèrdua mitjana del 10%.

Veiem ara els càlculs per l'I.G Bolsa Madrid. Les dades recollides són les següents:

DADES I.G BOLSA MADRID	
	PREU
	959,03
	961,09
	961,09
	961,83
	964,45
	964,45
	960,64
	950,94
	950,94
	966,18
	957,23
	961,12
	961,12
	956,79

Seguirem el mateix procediment que en l'exemple anterior, primer obtenim el **VaR teòric**. Per tant calculem rendiments, la seva mitjana i desviació estàndard. Obtenim els següents resultats

Mitjana dels rendiments = -0,00016033

Desviació estàndard dels rendiments = 0,006514835

Una vegada tenim aquests càlculs ja podem trobar el VaR teòric. El calcularem amb probabilitats de 90% i 95%. Obtenim els següents resultats.

VaR al 10% en percentatge = 0,850943%

VaR al 5% en percentatge = 1,087628%

Per tant analitzant els resultats podem extreure que si fem una inversió podem patir una pèrdua màxima del 0,85% amb probabilitat 90% o equivalentment la probabilitat de perdre més del 0,85% és del 10%. I a més també hem pogut veure que podem patir una pèrdua màxima de l' 1,09% amb probabilitat 95% o equivalentment la probabilitat de perdre més de l' 1,09% és del 5%.

Fem un exemple més concret, si fem una inversió de 10000 euros aleshores podem patir una pèrdua màxima de 85 euros amb probabilitat 90% o bé la probabilitat de perdre més de 85 euros és del 10%. I per tant podem patir una pèrdua màxima de 109 euros amb probabilitat 95% o bé la probabilitat de perdre més de 109 euros és del 5%.

Ara calculem el **VaR històric**, per veure si trobem una millor aproximació de la pèrdua. Tornarem a calcular-ho únicament al 10%. Fent els càlculs obtenim el següent resultat:

VaR històric al 10% = 0,984719 %.

Per tant analitzant els resultats podem extreure que si fem una inversió podem patir una pèrdua màxima del 0,99% amb probabilitat 90% o equivalentment la probabilitat de perdre més del 0,99% és del 10%.

Tornant a l'exemple anterior, si fem una inversió de 10000 euros, aleshores podem patir una pèrdua màxima de 99 euros amb probabilitat 90% o bé la probabilitat de perdre més de 99 euros és del 10%.

Comparant-lo amb el resultat anterior podem extreure les mateixes conclusions que en l'exemple de l'Ibex 35, ens dóna més informació. Això és degut al fet que el VaR teòric suposa que les variables que estudiem segueixen una distribució N(0,1), l'històric no, per tant amb això podem extreure que les variables no segueixen la distribució N(0,1).

Per últim realitzem el càlcul del **AVaR**, de la mateixa manera que abans, calculem el TCE al 10%. Obtenim el següent resultat:

AVaR al 90% = 1,009744%

Per tant analitzant els resultats podem extreure que si fem una inversió podem patir una pèrdua mitjana màxima de l' 1,01% amb probabilitat 90% o equivalentment la probabilitat de perdre de mitja més de l' 1,01% és del 10%.

Tornant a l'exemple anterior, si fem una inversió de 10000 euros, aleshores podem patir una pèrdua màxima de 101 euros amb probabilitat 90% o bé la probabilitat de perdre més de 101 euros és del 10%.

Comparant els tres càlculs realitzats tornem a extreure les mateixes conclusions que per l'Ibex 35, l'AVaR ens proporciona més informació que el VaR.

Referències

[1] John C.Hull, *Introducción de mercados futuros y opciones (8ª edición).*

[2] Maciej j.Capinski i Ekkehard Kopp, *Portafolio Theory and risk management.*

[3] *https://www.mundofinanzas.es/riesgo-financiero*

[4] *https://www.master-finanzas-cuantitativas.com/riesgo-financiero-master-en-finanzas/*

[5] *https://www.emprendepyme.net/riesgos-financieros-de-una-empresa.html*

[6] *https://www.inbestme.com/blog/como-medir-el-riesgo-de-una-cartera/*

[7] *https://economipedia.com/definiciones/valor-en-riesgo-var.html*

[8] *https://www.youtube.com/watch?v=ykCEWHRmrlI*

[9] *https://www.economiasimple.net/glosario/indice-bursatil*

[10] *https://economipedia.com/definiciones/indice-bursatil.html*

[11] *https://economipedia.com/definiciones/indice-general-de-la-bolsa-de-madrid-igbm.html*

[12] *https://www.gedesco.es/blog/que-es-el-ibex-35/*

[13] *https://es.investing.com/indices/major-indices*

[14] *https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/emel/cours/sd/node8.html*

[15] *http://www.eumed.net/cursecon/libreria/drm/1d.htm*

[16] *https://economipedia.com/definiciones/modelo-black-scholes.html*

[17] *https://economipedia.com/definiciones/valor-en-riesgo-var.html*

[18] *https://www.ucm.es/data/cont/docs/518-2016-11-25-VALOR%20EN%20RIESGO.pdf*

[19] *https://bestpractices.com.py/como-entender-y-calcular-el-riesgo-de-mercado-con-el-valor-en-riesgo-var/*