



Treball de final de grau

Grau de Matemàtiques

Facultat de Matemàtiques

Universitat de Barcelona

**El teorema dels nombres primers
i el teorema de Lee-Yang**

Arnau Quera Bofarull

Directora: Pilar Bayer i Isant
Departament d'Àlgebra i Geometria. UB
Barcelona, 30 de juny de 2015

Introduction

It is not easy to establish when a particular mathematical discipline is born, however, we can say that analytic number theory was born with Euler's definition of the zeta function and with Dirichlet theorem on primes in arithmetic progressions. Between the end of the 17th and the beginning of the 18th centuries, Legendre, Gauss and Dirichlet hypothesized about the distribution of the prime numbers. Their conjectures showed equivalent to what we know nowadays as the prime number theorem, which is one of the most important accomplishments of analytic number theory. Nevertheless, it was not until the middle of the 19th century that the Russian mathematician Chebyshev proved a slightly weaker version of the theorem, taking a step forward to the search of the final proof. It was Riemann who later used the most important analytic tool we have to study the prime numbers, that is, the Riemann ζ function, whose former definition as real function goes back to Euler analytic proof of the existence of infinitely many prime numbers. Hadamard and de la Vallée-Poussin applied the Riemann theory to prove, independently, the prime number theorem. In their proof they both used complex analysis tools as well as the fact that no zeros of the function $\zeta(s)$ lie on the line $\Re(s) = 1$.

The first objective of this work is to present a detailed study on the Riemann ζ function as a complex function, which includes its analytic continuation, functional equation and those necessary properties to prove in the following chapter the prime number theorem. The second objective is to write a self contained proof of the prime number theorem, discarding the superfluous results found in the references to achieve a clear and concise proof. In that regard, we also include our own graphics to help the understanding of the behavior of the functions that appear in the proof. Lastly, we consider the Riemann hypothesis, qualified as one of the Millennium Problems by the Clay Institute and a key point in the development of modern number theory.

The second part of this work aims to find physical applications of the mathematical methods used in this work of analytic number theory. On this subject we present the Casimir effect, which is a first example on renormalization in quantum theories and in which we show that the analytic continuation of the ζ function

plays an important role. The second case is Lee-Yang theory. Although in this last case there is no direct application of the methods studied in the mathematical part of the work, it shows the importance of studying the distribution of zeros of certain functions. Therefore, Lee-Yang theory could be a very interesting bridge between two apparently very different disciplines such as statistical mechanics and number theory. In fact, in the development of this work, we unexpectedly discovered that Lee and Yang based a part of their proof of the circle theorem presented here on a Pólya article ([11]) on the integral representations of the Riemann ζ function, as Kac mentions in a comment of the same article. Lastly, we have applied the Lee-Yang theory to the one and two dimensional Ising models. We have been able to compute the distribution of the zeros of the partition functions, which has enabled us the study of the phase transitions of these thermodynamic systems.

Introducció

És difícil establir el naixement exacte d'una disciplina matemàtica però no errem gaire si considerem que la teoria analítica de nombres té els seus inicis en la definició d'Euler de la funció zeta i en el teorema de Dirichlet sobre els primers en les progressions aritmètiques. Entre finals del segle XVIII i principis del segle XIX, Legendre, Gauss i Dirichlet van conjecturar l'avui conegut com a teorema dels nombres primers, un dels fruits més importants que ens ha donat la teoria analítica de nombres. Tot i així, no va ser fins ben entrat el segle XIX que el matemàtic rus Chebyshev va aconseguir demostrar una versió més dèbil del teorema, fent un pas en ferm cap a la demostració final. Havia de ser Riemann qui posteriorment introduís l'eina analítica més important que disposem per a l'estudi dels nombres primers, la funció ζ de Riemann com a funció de variable complexa, emprada ja inicialment per Euler com a funció de variable real en una demostració analítica de la infinitat dels nombres primers. En fer ús de les idees de Riemann, Hadamard i de la Vallée-Poussin trobaren de manera independent dues demostracions del teorema l'any 1896. Totes dues apliquen mètodes de l'anàlisi complexa a la teoria de nombres i tenen com a punt clau que la funció $\zeta(s)$ no s'anul·la en la recta $\Re(s) = 1$.

El primer objectiu d'aquest treball és presentar un estudi detallat de la funció ζ de Riemann, que inclou la seva perllongació analítica, l'equació funcional i totes les propietats necessàries per a la posterior demostració del teorema dels nombres primers. El segon objectiu és demostrar el teorema dels nombres primers de manera autocontinguda, filtrant els resultats superflus trobats a les referències per tal de tenir una exposició el més clara i concisa possible. Així mateix, hem afegit gràfics d'elaboració pròpia per tal de facilitar la comprensió de les funcions auxiliars emprades en la demostració. Per últim introduïm la hipòtesi de Riemann, considerat un dels Problemes del Mil·lenni per l'Institut Clay i una de les peces clau per a entendre el desenvolupament de la teoria de nombres moderna.

La segona part del treball té com a objectiu trobar aplicacions físiques de les tècniques utilitzades de la teoria analítica de nombres. En aquest sentit presentem l'efecte Casimir, que ens proporciona un primer exemple de renormalització en teories quàntiques i on hi veiem que la prolongació analítica de la funció ζ hi juga

un paper important. El segon cas que introduïm és la teoria de Lee-Yang. Malgrat que en aquest darrer cas no hi ha una aplicació directa de cap tècnica estudiada a la part purament matemàtica, sí que és un exemple que visualitza la importància de l'estudi de les distribucions dels zeros de certes funcions. Així doncs, la teoria de Lee-Yang pot esdevenir un pont interessant entre la teoria de nombres i la mecànica estadística. De fet, en el desenvolupament d'aquest treball hem trobat que els mateixos Lee i Yang van basar-se en l'article de Pólya ([11]) sobre les representacions integrals de la funció ζ de Riemann per a demostrar el teorema del cercle de Lee-Yang, tal com esmenta Kac en un comentari del mateix article. Per acabar, hem aplicat la teoria de Lee-Yang al model d'Ising i hem computat les distribucions de zeros per a les funcions de partició d'aquest model en una i dues dimensions, la qual cosa ens ha permès estudiar les transicions de fase d'aquest sistema termodinàmic.

Agraïments

Vull donar les gràcies a la Dra. Pilar Bayer per la seva dedicació en aquest treball. L'entusiasme i alegria amb què transmet els seus coneixements matemàtics m'ha servit de motivació per continuar treballant i aprenent. També agraeixo molt el suport rebut pel Dr. Tomeu Fiol en guiar-me en el treball de final de grau de física, així com en tantes altres coses.

És ben clar que sense el suport incondicional de la meua família no haguera estat possible arribar fins aquí. Per això els hi vull donar les gràcies de tot cor, en especial als meus pares i a la meua parella Sara.

Índex

1	La funció zeta de Riemann	1
1.1	Sèries de Dirichlet	1
1.2	Convergència, perllongació analítica i representacions de $\zeta(s)$	9
1.3	L'equació funcional de $\zeta(s)$	15
1.4	Abscència de zeros en la recta $\sigma = 1$	18
2	El teorema dels nombres primers	21
2.1	Resultats previs	26
2.2	Demostració del teorema dels nombres primers	34
2.3	La hipòtesi de Riemann	36
3	Aplicacions a la física	37
3.1	L'efecte Casimir	37
3.2	La teoria de Lee-Yang	42
	Índex alfabètic	49
	Bibliografia	51

Capítol 1

La funció zeta de Riemann

1.1 Sèries de Dirichlet

Definició 1.1. Una funció aritmètica és una funció $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definició 1.2. Direm que una funció aritmètica f és **multiplicativa** si se satisfà que $f(1) = 1$ i per a tot $a, b \in \mathbb{N}$ coprimers $f(ab) = f(a)f(b)$. Direm que la funció aritmètica és **completament multiplicativa** si la segona condició se satisfà per a qualssevol a i b .

Definició 1.3. Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

on $f(n)$ és una funció aritmètica i $s \in \mathbb{C}$.

Escriurem $s = \sigma + it$ amb σ i t reals. Amb aquesta notació,

$$n^s = e^{s \log n} = e^{(\sigma + it) \log n} = n^\sigma e^{it \log n},$$

d'on resulta que $|n^s| = n^\sigma$.

Definició 1.4. Donat $a \in \mathbb{R}$, el conjunt de punts $s = \sigma + it$ tals que $\sigma > a$ s'anomena el **semplà definit per a**.

Estudiem ara la convergència de les sèries de Dirichlet. Observem que si $\sigma \geq a$ tenim que $|n^s| = n^\sigma \geq n^a$, per tant

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \frac{|f(n)|}{n^a}.$$

És a dir, si una sèrie de Dirichlet és absolutament convergent per a $s = a + ib$ aleshores pel criteri de comparació també ho serà per a tot s amb $\sigma \geq a$.

Convergència i productes d'Euler

Proposició 1.1. *Suposem que la sèrie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^{-s}|$ no convergeix arreu o bé no divergeix arreu. Aleshores existeix un nombre real σ_a tal que la sèrie convergeix absolutament si $\sigma > \sigma_a$ i no convergeix absolutament si $\sigma < \sigma_a$. Anomenarem σ_a l'abscissa de convergència absoluta.*

Demostració. Sigui D el conjunt de tots els nombres reals σ tal que la sèrie divergeix. D és no buit per hipòtesi, ja que la sèrie no convergeix per a tot s , i D està fitat superiorment, ja que la sèrie no divergeix per a tot s . Per tant D té suprem que anomenarem σ_a . Si $\sigma < \sigma_a$ aleshores $\sigma \in D$ altrament σ seria una cota superior més petita que el suprem. Si $\sigma > \sigma_a$ aleshores $\sigma \notin D$ ja que σ_a n'és el suprem. $\square$

Suposem que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ convergeix absolutament per a $\sigma > \sigma_a$. Denotarem per $F(s)$ la funció suma on s pertany al semiplà definit per a σ_a .

Teorema 1.1 (Teorema d'unicitat). (cf.[1]) *Siguin $F(s)$ i $G(s)$ dues sèries de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

ambdues absolutament convergents per a $\sigma > \sigma_a$. Si $F(s) = G(s)$ per a cada s en una successió infinita $\{s_k\}$ tal que $\sigma_k \rightarrow +\infty$ quan $k \rightarrow \infty$, aleshores $f(n) = g(n)$ per a tot n .

Corol·lari 1.1. *Sigui $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ i suposem que $F(s) \neq 0$ per a algun s amb $\sigma > \sigma_a$. Aleshores existeix un semiplà $\sigma > c \geq \sigma_a$ en el qual $F(s)$ no és mai zero.*

Demostració. Suposem que no existeix aquest semiplà. Aleshores podem construir una successió infinita $\{s_k\}$ tal que per a tot k $F(s_k) = 0$. Aplicant el teorema d'unicitat anterior, obtenim que $f(n) = 0$ per a tot n , contradient la hipòtesi que $F(s) \neq 0$ per algun s . $\square$

El resultat següent ens permet relacionar el producte de sèries de Dirichlet amb la convolució de Dirichlet dels seus coeficients.

Proposició 1.2. *Donades dues funcions $F(s)$ i $G(s)$ representades per sèries de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ per a } \sigma > a,$$

i

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \text{ per a } \sigma > b.$$

Aleshores en el semiplà on ambdues sèries convergeixen absolutament tenim que

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

on $h = f * g$, que és la convolució de Dirichlet de f i g ,

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Recíprocament, si $F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)n^{-s}$ per a tot s en una seqüència $\{\alpha_k\}$ amb $\sigma_k \rightarrow +\infty$ quan $k \rightarrow \infty$ aleshores $\alpha = f * g$.

Demostració. La segona equivalència és immediata pel teorema d'unicitat. Per provar la primera considerem el producte per a qualsevol s ,

$$F(s)G(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}.$$

Atès que les sèries convergeixen absolutament, podem reordenar els termes sense alterar la suma. Agrupem els termes pels quals mn és constant, $mn = k$. Tenim, doncs, que

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{mn=k} f(n)g(m) \right) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)k^{-s},$$

on $h(k) = \sum_{mn=k} f(n)g(m) = (f * g)(k)$. □

El teorema següent ens dóna una expressió de la sèrie de Dirichlet en un productori estès sobre els nombres primers.

Proposició 1.3. *Sigui f una funció aritmètica multiplicativa tal que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ és absolutament convergent. Aleshores la suma de la sèrie pot ser expressada com un producte infinit convergent,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots),$$

on el producte s'estén sobre tots els primers. Si, a més, f és completament multiplicativa podem escriure

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(p)^n \right) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)}.$$

Demostració. Considerem el producte finit

$$P(x) = \prod_{p \leq x} \{1 + f(p) + f(p^2) + \cdots\}$$

estès sobre tots els primers $p \leq x$. Cada terme del productori és una sèrie absolutament convergent. Per tant podem reordenar la suma sense alterar-ne el resultat. Un terme del productori serà de la forma $f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_r^{a_r})$, atès que f és multiplicativa, aquest producte és igual a $f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r})$. Pel teorema fonamental de l'aritmètica és possible escriure que

$$P(x) = \sum_{n \in A} f(n),$$

on A és el conjunt format per aquells n amb tots els seus factors primers més petits o iguals que x . Considerant B com el conjunt de tots els n amb factors primers majors que x , obtenim que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) = \sum_{n \in B} f(n).$$

En prendre mòduls se segueix que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) \right| \leq \sum_{n \in B} |f(n)| \leq \sum_{n > x} |f(n)| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

atès que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ és convergent. Tenim, doncs, que $P(x) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ quan $x \rightarrow \infty$. Falta veure que convergeix absolutament. Un productori infinit de la forma $\prod (1 + a_n)$ convergeix absolutament si la corresponent sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix absolutament. Hem de veure que $\sum_p |f(p) + f(p^2) + \cdots|$ convergeix. Fixem-nos que les derivades parcials satisfan que

$$\sum_{p \leq x} |f(p) + f(p^2) + \cdots| \leq \sum_{p \leq x} (|f(p)| + |f(p^2)| + \cdots) \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|,$$

per tant estan acotades i tenim convergència absoluta. □

En aplicar el teorema anterior a les sèries de Dirichlet absolutament convergents obtenim el corol·lari següent.

Corol·lari 1.2. *Suposem que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ convergeix absolutament per a $\sigma > \sigma_a$. Si f és multiplicativa tenim que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left\{ 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right\}, \quad \text{si } \sigma > \sigma_a,$$

i si f és completament multiplicativa tenim que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}, \quad \text{si } \sigma > \sigma_a.$$

Els dos lemes següents ens ajudaran a demostrar l'existència d'un semiplà de convergència per a les sèries de Dirichlet.

Lema 1.1 (Reducció d'una integral Riemann-Stieltjes a una suma finita). (cf.[2]) *Sigui α una funció esglaonada definida en $[a, b]$ amb salts α_k a x_k on $x_1, \dots, x_n$ són els punts de discontinuïtat. Sigui f una funció definida en $[a, b]$ tal que f i α no són alhora discontinues per la dreta o per l'esquerra a cada x_k . Aleshores la integral Riemann-Stieltjes, $\int_a^b f d\alpha$, existeix i tenim que*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \alpha_k.$$

Proposició 1.4. Identitat d'Abel *Per a qualsevol funció aritmètica $a(n)$, considerem $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$, on $A(x) = 0$ si $x < 1$. Suposem que f té derivada contínua a l'interval $[y, x]$ amb $0 < y < x$. Aleshores,*

$$\sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

Demostració. Com que $A(x)$ és una funció esglaonada amb salts $f(n)$ a cada n , podem expressar la suma com una integral de Riemann-Stieltjes d'acord amb el lema anterior. Per tant,

$$\sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) = \int_y^x f(t) dA(t).$$

Podem integrar per parts i obtenim que

$$\begin{aligned} \sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) &= f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)df(t) = \\ &= f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt. \end{aligned}$$

□

Lema 1.2. *Sigui $s_0 = \sigma_0 + it_0$ i suposem que la sèrie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s_0}$ té sumes parcials acotades,*

$$\left| \sum_{n \leq x} f(n)n^{-s_0} \right| \leq M, \quad \text{per a tot } x \geq 1.$$

Aleshores per a cada s amb $\sigma > \sigma_0$ tenim que

$$\left| \sum_{n \leq x} f(n)n^{-s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right).$$

Demostració. Sigui $a(n) = f(n)n^{-s_0}$ i $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$ d'on resulta que $f(n)n^{-s} = a(n)n^{s_0-s}$. En aplicar la identitat d'Abel considerant $f(x) = x^{s_0-s}$ obtenim que

$$\sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} = A(b)b^{s_0-s} - A(a)a^{s_0-s} - (s_0 - s) \int_a^b A(t)t^{s_0-s-1} dt.$$

Atès que $|A(x)| \leq M$ se segueix que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} \right| &\leq Mb^{\sigma_0-\sigma} + Ma^{\sigma_0-\sigma} + |s - s_0|M \int_a^b t^{\sigma_0-\sigma-1} dt \\ &\leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} + |s - s_0|M \left| \frac{b^{\sigma_0-\sigma} - a^{\sigma_0-\sigma}}{\sigma_0 - \sigma} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2. *Si la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ convergeix per a $s_0 = \sigma_0 + it_0$ aleshores també convergeix per a tot s amb $\sigma > \sigma_0$. Si divergeix per a $s_0 = \sigma_0 + it_0$ aleshores també divergeix per a tot s amb $\sigma < \sigma_0$.*

Demostració. Suposem que la sèrie convergeix per a $s_0 = \sigma_0 + it_0$. Prenem qualsevol s amb $\sigma > \sigma_0$, hem de veure que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ és convergent. A tal fi, comprovarem que la successió de sumes parcials és de Cauchy. En aplicar el lema anterior obtenim que

$$\left| \sum_{n=1}^b f(n)n^{-s} - \sum_{n=1}^a f(n)n^{-s} \right| = \left| \sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} \right| \leq Ka^{\sigma_0-\sigma},$$

on K és independent de a . Com que $\sigma_0 > \sigma$, tenim que $a^{\sigma_0-\sigma} \rightarrow 0$ quan $a \rightarrow +\infty$. La segona afirmació del teorema és conseqüència directa de la primera ja que, si no divergís per a $\sigma < \sigma_0$, no podria divergir per a s_0 . □

Corol·lari 1.3. Si la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ no convergeix arreu o no divergeix arreu, aleshores existeix un nombre real σ_c tal que la sèrie convergeix per a tot s en el semiplà $\sigma > \sigma_c$ i divergeix per a tot s en el semiplà $\sigma < \sigma_c$. Anomenarem **abscissa de convergència** al nombre real σ_c . Si la sèrie convergeix arreu denotarem $\sigma_c = -\infty$, així mateix, si la sèrie divergeix arreu, denotarem $\sigma_c = +\infty$.

Les abscisses de convergència i convergència absoluta tenen una relació interessant en les sèries de Dirichlet com mostra el resultat següent.

Proposició 1.5. Per a qualsevol sèrie de Dirichlet amb σ_c finita, tenim que

$$0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq 1.$$

Demostració. Hem de veure que si una sèrie de Dirichlet, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ convergeix per algun s_0 , aleshores convergeix absolutament per a tot s amb $\sigma > \sigma_0 + 1$. Sigui A una cota superior de $|f(n)n^{-s_0}|$. Tenim que

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right| \left| \frac{1}{n^{s-s_0}} \right| \leq \frac{A}{n^{\sigma-\sigma_0}},$$

d'on resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^{-s}|$ és convergent, ja que podem aplicar el test de comparació amb $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma_0-\sigma}$, que és convergent per $\sigma > \sigma_0$. $\square$

Propietats analítiques

Les propietats analítiques de les sèries de Dirichlet se segueixen del teorema següent.

Teorema 1.3. Sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions analítiques en un subconjunt obert S del pla complex i suposem que $\{f_n\}$ convergeix uniformement en cada compacte de S a una funció límit f . Aleshores f és analítica en S i la seqüència de derivades $\{f'_n\}$ convergeix uniformement en cada subconjunt compacte de S a la derivada f' .

Demostració. Degut a l'analicitat de f_n en S podem aplicar la fórmula integral de Cauchy,

$$f_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(z)}{z-a} dz,$$

on D és qualsevol disc compacte contingut en S , ∂D és la seva frontera orientada positivament i a és un punt interior de D . Degut a la uniformitat de la convergència tenim que

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

que implica l'analiticitat de f dins D . Anàlogament, per a les derivades obtenim que

$$f'_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(z)}{(z-a)^2} dz \quad \text{i} \quad f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

i per tant $f'_n(a) \rightarrow f'(a)$ uniformement en cada subconjunt compacte de S . $\square$

Corol·lari 1.4. *Una sèrie de Dirichlet convergeix uniformement en tot subconjunt compacte a l'interior del semiplà de convergència $\sigma > \sigma_c$. La funció $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ és analítica en el semiplà de convergència $\sigma > \sigma_c$ i la seva derivada $F'(s)$ és representada en aquest semiplà per la també sèrie de Dirichlet*

$$F'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \log n}{n^s},$$

obtinguda en derivar terme a terme.

Demostració. És suficient demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ convergeix uniformement en cada rectangle compacte, $R = [\alpha, \beta] \times [c, d]$ amb $\alpha > \sigma_c$. A tal fi veurem que la successió de sumes parcials és una successió uniformement de Cauchy. En utilitzar el resultat del lema 1.2 obtenim que

$$\left| \sum_{n=1}^b f(n)n^{-s} - \sum_{n=1}^a f(n)n^{-s} \right| = \left| \sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0 - \sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right),$$

on $s_0 = \sigma_0 + it_0$ és qualsevol punt dins del semiplà de convergència $\sigma > \sigma_c$ i s és qualsevol punt amb $\sigma > \sigma_0$. Escollim $s_0 = \sigma_0$ on $\sigma_c < \sigma_0 < \alpha$. Si s és dins del rectangle, tenim que $\sigma - \sigma_0 \geq \alpha - \sigma_0$ i $|s_0 - s| < C$ amb C una constant que depèn de s_0 però no de s . Per tant, podem escriure una cota pel terme de Cauchy que no depèn del punt,

$$\left| \sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0 - \alpha} \left(1 + \frac{C}{\alpha - \sigma_0} \right) = Ba^{\sigma_0 - \alpha},$$

amb B independent de s . Concloem que $a^{\sigma_0 - \alpha} \rightarrow 0$ quan $a \rightarrow +\infty$, demostrant així que la successió de sumes parcials és uniformement de Cauchy i per tant $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ convergeix uniformement en cada subconjunt compacte a l'interior del semiplà de convergència. $\square$

Acabem amb dos resultats (cf. [1]). El primer s'aplica a les sèries de Dirichlet amb coeficients positius i ens servirà per detectar les singularitats d'aquestes. El segon ens mostra que si tenim una sèrie de Dirichlet que no s'anul·la a arreu i compleix $f(1) \neq 0$, aleshores la sèrie és l'exponencial d'una altra sèrie de Dirichlet.

Proposició 1.6. (cf.[1]) *Sigui $F(s)$ una funció representada en el semiplà $\sigma > c$ per la sèrie de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

on c és finit. Supposem que $f(n) \geq 0$ per a tot $n \geq n_0$. Si $F(s)$ és analítica en un disc al voltant del punt $s = c$, aleshores la sèrie de Dirichlet convergeix en el semiplà $\sigma > c - \varepsilon$ per a algun $\varepsilon > 0$. Conseqüentment, si la sèrie de Dirichlet té una abscissa de convergència σ_c , aleshores $F(s)$ té una singularitat a l'eix real en $s = \sigma_c$.

Proposició 1.7. *Sigui $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ una sèrie de Dirichlet absolutament convergent per a $\sigma > \sigma_a$ tal que $f(1) \neq 0$. Si, a més, $F(s) \neq 0$ per a $\sigma > \sigma_0 \geq \sigma_a$, aleshores per a $\sigma > \sigma_0$ tenim que $F(s) = e^{G(s)}$, amb*

$$G(s) = \log(f(1)) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{\log n} n^{-s},$$

on f^{-1} és la inversa de f respecte la convolució de Dirichlet i $f'(n) = f(n) \log n$.

Finalment,

Definició 1.5. *Anomenarem **funció ζ de Riemann** la sèrie de Dirichlet donada $f(n) = 1$, $n \geq 1$, és a dir,*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1.2 Convergència, perllongació analítica i representacions de $\zeta(s)$

L'objectiu d'aquesta secció és estudiar l'analiticitat de la funció zeta de Riemann, donar-ne l'equació funcional i perllongar-la analíticament utilitzant diverses representacions integrals d'ella mateixa. Abans, però, farem un incís en la funció gamma d'Euler que ens serà d'utilitat.

La funció gamma d'Euler

Definició 1.6. *La funció Γ d'Euler Γ és la funció solució de l'equació funcional*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

amb $s = \sigma + it$.

Per a $\sigma > 0$, la funció gamma té la representació integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx. \quad (1.2.1)$$

La funció gamma també satisfà una altra equació funcional

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \quad (1.2.2)$$

d'on observem, que $\Gamma(s)$ és analítica en tot el pla complex excepte en els punts $s = 0, -1, -2, \dots$ on té pols simples de residu $(-1)^n/n!$ per $s = -n$.

Farem servir aquestes dues equacions funcionals i la representació integral per a l'estudi de $\zeta(s)$.

Primer de tot veiem un teorema bàsic sobre la convergència de $\zeta(s)$.

Teorema 1.4. *La funció $\zeta(s)$ convergeix absolutament per a $\sigma > 1$. La convergència és uniforme en tot semiplà $\sigma \geq 1 + \delta$ amb $\delta > 0$. Per tant $\zeta(s)$ és una funció analítica en s en el semiplà $\sigma > 1$.*

Demostració. Hem de veure que $\sum_{n=1}^\infty \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma}$ convergeix per a $\sigma > 1$. Pel test integral de convergència, és suficient veure que la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma+\varepsilon}} dx$$

és finita. Això és immediat ja que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma+\varepsilon}} dx = \left[\frac{x^{1-\sigma-\varepsilon}}{1-\sigma-\varepsilon} \right]_1^\infty < \infty \text{ atès que } \sigma > 1.$$

En aplicar el corol·lari 1.3 i el teorema 1.3, obtenim la convergència uniforme i l'analiticitat en el semiplà $\sigma > 1$. $\square$

Per a obtenir una representació integral de $\zeta(s)$ necessitarem el lema següent.

Lema 1.3 (Convergència de Levi). (cf.[2]) *Sigui $\{g_n\}$ una successió de funcions integrables en sentit Lebesgue en un interval I tal que:*

1. *Cada funció g_n és no negativa gairebé arreu en I .*
2. *La sèrie $\sum_{n=1}^\infty \int_I g_n$ convergeix.*

Aleshores la sèrie $\sum_{n=1}^\infty g_n$ convergeix gairebé arreu en I a una funció suma g integrable en sentit Lebesgue i se segueix que

$$\int_I g = \int_I \sum_{n=1}^\infty g_n = \sum_{n=1}^\infty \int_I g_n.$$

En fer ús de la funció gamma d'Euler podem trobar una representació integral pel producte $\Gamma(s)\zeta(s)$.

Teorema 1.5. *Per a $\sigma > 1$ tenim la representació integral*

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}dx. \quad (1.2.3)$$

Demostració. Primer de tot mantindrem la variable s real, $s > 1$ i després estendrem el resultat a tot el pla complex per continuació analítica. En la representació integral 1.2.1 fem el canvi de variable $x = (n+1)t$, amb $n \geq 0$, i obtenim que

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx = (n+1)^s \int_0^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1}dt,$$

en passar el terme $(n+1)^s$ a l'altre costat i en sumar per a tot $n \geq 0$, arribem a

$$\sum_{n=0}^\infty (n+1)^{-s}\Gamma(s) = \zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nt}e^{-t}t^{s-1}dt,$$

essent la sèrie de la dreta convergent per a $\sigma > 1$. En prendre la integral en sentit Lebesgue, podem aplicar el lema anterior de convergència de Levi amb la successió $\{g_n\} = \{e^{-nt}e^{-t}t^{s-1}\}$. El lema ens diu que la sèrie $\sum_{n=0}^\infty g_n$ és convergent gairebé arreu a una funció suma integrable en sentit Lebesgue i podem intercanviar el sumatori amb la integral. Obtenim, doncs, que

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-nt}e^{-t}t^{s-1}dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-nt}e^{-t}t^{s-1}dt.$$

Atès que $t > 0$, tenim que $0 < e^{-t} < 1$ i podem sumar la sèrie geomètrica

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-nt} = \frac{1}{1-e^{-t}}.$$

Així doncs,

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{s-1}}{1-e^{-t}}dt,$$

que prova el teorema per a $s > 1$ real. Per al cas general, és suficient veure, gràcies al principi de prolongació analítica, que la funció definida per la integral

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$$

és analítica en el semiplà $\sigma > 1$, ja que la funció $\Gamma(s)\zeta(s)$ també ho és i ambdues coincideixen en la semirecta $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$. Així doncs, veurem que la integral és uniformement convergent en tots els subconjunts del semiplà $\sigma > 1$ de la forma $1 + \delta \leq \sigma \leq c$, amb $c > 1$ i $\delta > 0$. Sigui $s \in \mathbb{C}$ un punt qualsevol tenim que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \frac{e^{-t} t^{s-1}}{1 - e^{-t}} \right| dt &= \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{\sigma-1}}{1 - e^{-t}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-t} t^{\sigma-1}}{1 - e^{-t}} dt + \int_1^\infty \frac{e^{-t} t^{\sigma-1}}{1 - e^{-t}} dt. \end{aligned}$$

Considerem la primera integral. Si $0 \leq t \leq 1$, tenim que $t^{\sigma-1} \leq t^\delta$, a més a més, $e^t - 1 \geq t$ per a tot $t \geq 0$, de manera que

$$\int_0^1 \frac{e^{-t} t^{\sigma-1}}{1 - e^{-t}} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t} t^\delta}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^1 \frac{t^\delta}{e^t - 1} dt \leq \int_0^1 t^{\delta-1} dt = \frac{1}{\delta}.$$

Pel que fa a la segona integral, si $t \geq 1$ tenim que $t^{\sigma-1} \leq t^{c-1}$ i se segueix que

$$\int_1^\infty \frac{e^{-t} t^{\sigma-1}}{1 - e^{-t}} dt \leq \int_1^\infty \frac{e^{-t} t^{c-1}}{1 - e^{-t}} dt \leq \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{c-1}}{1 - e^{-t}} dt = \Gamma(c)\zeta(c),$$

on l'última igualtat la podem escriure ja que el resultat està demostrat per $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$. En resum, hem obtingut una fita uniforme (no depèn del punt s) de la integral del valor absolut, provant que la integral és absolutament convergent. Per tant, la integral convergeix uniformement en totes les bandes $1 + \delta \leq \sigma \leq c$ i consegüentment és analítica en cada banda, que implica que ho és en tot el semiplà $\sigma > 1$. $\square$

Per a l'extensió analítica necessitem encara d'una altra representació de $\zeta(s)$ en termes d'una integral de contorn.

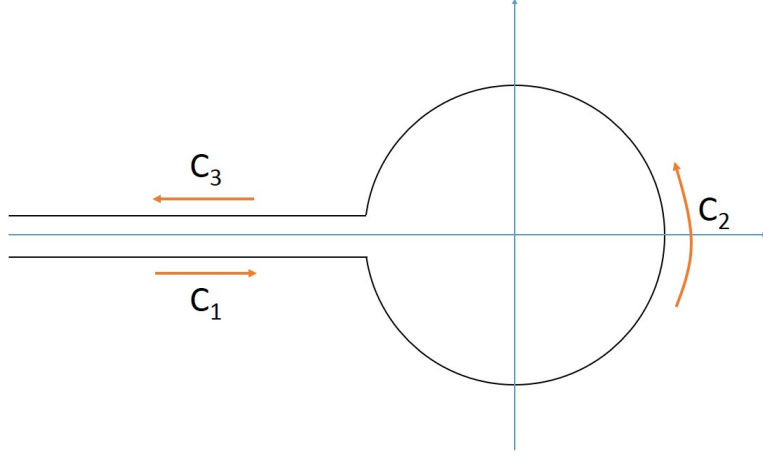
Considerem el camí C format per tres camins C_1 , C_2 i C_3 , C_1 ve parametritzat per $z = re^{-\pi i}$ mentre que parametritzem C_3 per $z = re^{\pi i}$ en ambdós casos r varia de c a ∞ , amb $0 < c < 2\pi$. Per últim, C_2 serà un cercle positivament orientat de radi c amb centre l'origen de manera que tanca el cicle tal com mostra la figura 1.1.

Teorema 1.6. *Si $0 < a \leq 1$, la funció definida per la integral de contorn*

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1} e^z}{1 - e^z} dz$$

és una funció entera. A més a més, tenim que

$$\zeta(s) = \Gamma(1 - s)I(s) \quad \text{si } \sigma > 1. \quad (1.2.4)$$

Figura 1.1: Camí d'integració C format per C_1 , C_2 i C_3

Demostració. Considerem un disc compacte arbitrari format pels punts $|s| \leq M$. Demostrarem que la integral al llarg de C_1 i C_2 convergeix uniformement en el disc. Al llarg de C_1 tenim, per a $r \geq 1$, que

$$|z^{s-1}| = r^{\sigma-1} |e^{-\pi i(\sigma-1+it)}| = r^{\sigma-1} e^{\pi t} \leq r^{M-1} e^{\pi M},$$

on hem utilitzat que $|s| \leq M$. De la mateixa manera, al llarg de C_3 tenim, per a $r \geq 1$, que

$$|z^{s-1}| = r^{\sigma-1} |e^{\pi i(\sigma-1+it)}| = r^{\sigma-1} e^{-\pi t} \leq r^{M-1} e^{\pi M}.$$

Per tant, en ambdós casos, per a $r \geq 1$ se satisfà que

$$\left| \frac{z^{s-1} e^z}{1 - e^z} \right| \leq \frac{r^{M-1} e^{\pi M} e^{-r}}{1 - e^{-r}} = \frac{r^{M-1} e^{\pi M}}{e^r - 1}.$$

Observem que si $r > \log 2$ tenim que $e^r - 1 > e^r/2$. Concloem que l'integrand està acotat per $A r^{M-1} e^{-r}$ on $A = \frac{1}{2} e^{\pi M}$. Com que $\int_c^\infty r^{M-1} e^{-r} dr$ és convergent per a $c > 0$, tenim que la integral de l'enunciat convergeix uniformement, ja que convergeix absolutament en un conjunt compacte. Com que l'integrand és analític, el podem representar en sèrie de potències en la variable s , $\sum_{n=0}^\infty a_n(z) s^n$. Gràcies a la convergència uniforme se segueix que

$$I(s) = \int_{C_i} \left(\sum_{n=0}^\infty a_n(z) s^n \right) dz = \sum_{n=0}^\infty \int_{C_i} a_n(z) s^n dz = \sum_{n=0}^\infty \left(\int a_n(z) dz \right) s^n,$$

on C_i fa referència a cada camí, $i = 1, 3$. Concloem, doncs, que $I(s)$ és una funció entera, ja que el procediment anterior és vàlid per a qualsevol disc. Per a provar l'expressió 1.2.4, escrivim que

$$2\pi i I(s) = \int_{\gamma} z^{s-1} g(z) dz,$$

on hem definit $g(z) = e^z/(1 - e^z)$. Al llarg de C_1 i C_3 , tenim que

$$g(z) = \frac{e^z}{1 - e^z} = \frac{e^{re^{\pm\pi i}}}{1 - e^{re^{\pm\pi i}}} = \frac{e^{-r}}{1 - e^{-r}} = g(-r).$$

Al llarg de C_2 , parametritzem $z = ce^{i\theta}$ amb $\theta \in [-\pi, \pi]$. En calcular la integral al llarg de $\gamma = C_1 + C_2 + C_3$,

$$2\pi i I(s) = \int_{-\infty}^c r^{s-1} e^{-\pi i s} g(-r) dr + i \int_{-\pi}^{\pi} c^{s-1} e^{(s-1)i\theta} ce^{i\theta} g(ce^{i\theta}) d\theta + \int_c^{\infty} r^{s-1} e^{\pi i s} g(-r) dr.$$

En utilitzar que $e^{\pi i s} - e^{-\pi i s} = 2i \sin(\pi s)$ resulta que

$$2\pi i I(s) = \sin(\pi s) \int_{-\infty}^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr + ic^s \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\theta} g(ce^{i\theta}) d\theta.$$

Ocupem-nos ara de la primera integral, en prendre el límit quan $c \rightarrow 0$ obtenim per a $\sigma > 1$ que

$$\lim_{c \rightarrow 0} \int_c^{\infty} r^{s-1} \frac{e^{-r}}{1 - e^{-r}} dr = \Gamma(s) \zeta(s),$$

on hem utilitzat la igualtat 1.2.3. Vegem ara que la segona integral s'anul·la quan $c \rightarrow 0$. Observem que $g(z)$ és una funció meromorfa al subconjunt $|z| < 2\pi$ amb un únic pol de primer ordre en $z = 0$. Per tant $zg(z)$ és analítica en tal subconjunt i en conseqüència acotada, $|g(z)| \leq A/|z|$, amb $|z| = c < 2\pi$ i A una constant. En prendre el mòdul a la segona integral,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\theta} g(ce^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{c^{\sigma}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\theta} \frac{A}{c} d\theta \leq Ae^{\pi|t|} c^{\sigma-1} \xrightarrow{c \rightarrow 0} 0,$$

on l'última igualtat és certa si $\sigma > 1$. En tenir en compte el resultat 1.2.2, arribem a

$$\pi I(s) = \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s) \rightarrow \zeta(s) = \frac{\pi I(s)}{\sin(\pi s) \Gamma(s)} = \Gamma(1-s) I(s).$$

□

En l'equació 1.2.4, vàlida per a $\sigma > 1$, les funcions $I(s)$ i $\Gamma(1-s)$ tenen sentit per a tot complex s . Per tant, podem utilitzar aquesta equació per definir $\zeta(s)$ per a $\sigma \leq 1$. Cal veure, però, que aquesta perllongació és, en efecte, analítica.

Teorema 1.7. *La funció $\zeta(s)$ definida per $\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s)$ és analítica per a tot $s \in \mathbb{C}$ excepte per a $s = 1$ on hi té un pol simple de residu 1.*

Demostració. Com que $I(s)$ és una funció entera, les singularitats de $\zeta(s)$ vindran donades, en principi, pels pols de $\Gamma(1-s)$, és a dir, pels punts $s = 1, 2, 3, \dots$. Ara bé, pel teorema 1.4, $\zeta(s)$ és analítica per a $s = \sigma > 1$. Tenim, doncs, que l'únic pol possible és $s = 1$. Vegem ara que $s = 1$ correspon a un pol de residu 1. Si s és enter, posem $s = n$, l'integrand de $I(s)$ pren els mateixos valors al llarg de C_1 que de C_3 cancelant mutuament les respectives integrals. Tenim doncs que

$$I(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{z^{n-1}e^z}{1-e^z} dz = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z^{n-1}e^z}{1-e^z}.$$

En particular, quan $n = 1$, tenim que

$$I(1) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^z}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^{-z} - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{e^{-z}} = -1.$$

Per a trobar el residu de $\zeta(s)$ a $s = 1$ calculem el límit

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = -\lim_{s \rightarrow 1} (1-s)\Gamma(1-s)I(s) = -\lim_{s \rightarrow 1} (1-s) \frac{\Gamma(2-s)}{1-s} I(s) = -I(1)\Gamma(1) = 1$$

Concloem que $\zeta(s)$ té un pol simple en $s = 1$ amb residu 1. $\square$

1.3 L'equació funcional de $\zeta(s)$

Procedirem ara a trobar l'equació funcional de $\zeta(s)$. Necessitarem un lema previ.

Lema 1.4. *Segui $S(r)$ la regió del pla complex obtinguda en remoure d'aquest tots els discs de radi r , $0 < r < \pi$ amb centre a $z = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. Aleshores la funció*

$$g(z) = \frac{e^z}{1-e^z}$$

està acotada en $S(r)$ per una cota que depèn de r .

Demostració. Denotarem $z = x + iy$. Considerem el rectangle foradat

$$Q(r) = \{z \text{ tal que } |x| \leq 1, |y| \leq \pi, |z| \geq r\}.$$

La funció g està acotada dins de $Q(r)$ ja que aquest és compacte. Observem que $|g(z + 2\pi i)| = |g(z)|$. Això ens permet assegurar que g també està acotada en la

prolongació del rectangle verticalment, és a dir, g està acotada en la banda infinita foradada

$$\{z \text{ tal que } |x| \leq 1, |z - 2n\pi i| \geq r, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Manca veure que g està acotada fora d'aquesta banda. Suposem $|x| \geq 1$, tenim que

$$|g(z)| = \left| \frac{e^z}{1 - e^z} \right| = \frac{e^x}{|1 - e^z|} \leq \frac{e^x}{|1 - e^x|} \leq \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

□

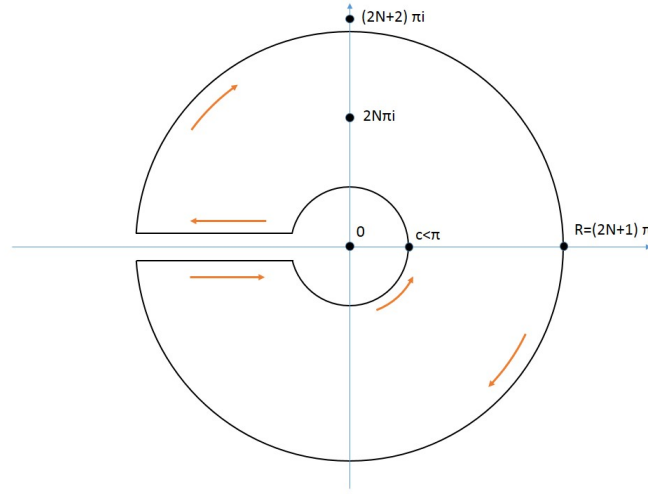


Figura 1.2: Camí d'integració $C(N)$

Teorema 1.8. Per a tot $s \in \mathbb{C}$ tenim que

$$\zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s), \quad (1.3.1)$$

equivalentment en canviar s per $1 - s$,

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1 - s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1 - s). \quad (1.3.2)$$

Demostració. Considerem la funció

$$I_N(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(N)} \frac{z^{s-1} e^z}{1 - e^z} dz,$$

on $C(N)$ és el contorn de la figura 1.2 i N es un enter. Primer veurem que $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(s) = I(s)$ si $\sigma < 0$. En comparar el camí d'integració amb el de la figura 1.1 és suficient veure que la integral sobre el cercle exterior tendeix a 0 quan $N \rightarrow \infty$. En aquest cercle exterior, la parametrització és $z = Re^{i\theta}$ amb $-\pi \leq \theta \leq \pi$ i $R = (2N + 1)\pi$, per tant

$$|z^{s-1}| = |R^{s-1}e^{i\theta(s-1)}| = R^{\sigma-1}e^{-t\theta} \leq R^{\sigma-1}e^{\pi|t|}$$

i obtenim que

$$\left| \int_C \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z} dz \right| \leq R^{\sigma-1}e^{\pi|t|} \int_C \left| \frac{e^z}{1-e^z} \right| dz$$

Ara bé, C es refereix al cercle exterior que està contingut en el conjunt $S(r)$ del lema anterior. Aplicant el lema, obtenim una cota A per la integral de la dreta i conseqüentment la cota $2\pi Ae^{\pi|t|}R^\sigma$ pel terme de la dreta. Atès que estem fixant-nos en el cas $\sigma < 0$, aquesta cota tendeix a 0 quan $N \rightarrow \infty$. Substituint s per $s-1$ arribem a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(1-s) = I(1-s) \quad \text{si } \sigma > 1.$$

Calcularem ara explícitament $I(1-s)$ mitjançant el teorema dels residus. Denotem

$$R(n) = \operatorname{Res}_{z=2n\pi i} \left(\frac{z^{-s}e^z}{1-e^z} \right)$$

i tenim que

$$I_N(1-s) = - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n=-N}}^N R(n) = - \sum_{n=1}^N \{R(n) + R(-n)\}.$$

Calculem $R(n)$

$$R(n) = \lim_{z \rightarrow 2n\pi i} (z - 2n\pi i) \frac{z^{-s}e^z}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow 2n\pi i} \left(\frac{z^{1-s}e^z}{1-e^z} - 2n\pi i \frac{z^{-s}e^z}{1-e^z} \right),$$

en fer ús de la regla de l'Hôpital,

$$R(n) = \lim_{z \rightarrow 2n\pi i} \left(\frac{(1-s)z^{-s}}{-1} - z^{1-s} - (2n\pi i)sz^{s-1} + (2n\pi i)z^{-s} \right) = \frac{-1}{(2n\pi i)^s}.$$

Per tant tenim que

$$I_N(1-s) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(2n\pi i)^s} + \frac{1}{(-2n\pi i)^s} \right),$$

en tenir en compte que $i^{-s} = e^{-\pi is/2}$,

$$I_N(1-s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \left(\frac{1}{(2\pi)^s} (e^{-\pi is/2} + e^{\pi is/2}) \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \left(\frac{1}{(2\pi)^s} 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \right).$$

En prendre el límit $N \rightarrow \infty$, finalment arribem a l'equació funcional

$$\zeta(1-s) = \Gamma(s)I(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s).$$

□

En prendre $s = 2n + 1$ en l'equació 1.3.1 el factor $\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ s'anul·la i tenim els anomenats **zeros trivials** de la zeta de Riemann.

$$\zeta(-2n) = 0 \text{ per a } n = 1, 2, 3, \dots$$

1.4 Abscència de zeros en la recta $\sigma = 1$

L'estudi de la funció zeta de Riemann a l'entorn de la recta $\sigma = 1$ és clau per a la demostració del teorema dels nombres primers que presentarem al proper capítol. Primer de tot, trobarem fites superiors per a $|\zeta(s)|$ i $|\zeta'(s)|$ en un entorn de la recta $\sigma = 1$.

Lema 1.5. *Per a qualsevol enter $N \geq 0$ i $\sigma \geq 0$, tenim que*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^\infty \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx. \quad (1.4.1)$$

A més a més, en derivar terme a terme obtenim que

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^N \frac{\log n}{n^s} + s \int_N^\infty \frac{(x - [x]) \log x}{x^{s+1}} dx - \int_N^\infty \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx - \frac{N^{1-s} \log N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}. \quad (1.4.2)$$

Demostració. De la identitat d'Abel 1.4 prenem $a(n) = 1$ per a tot $n \geq 1$ i tenim que $A(x) = [x]$. Així doncs tenim que

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = f(x)[x] - f(y)[y] - \int_y^x [t] f'(t) dt.$$

En integrar per parts resulta que

$$\int_y^x t f'(t) dt = x f(x) - y f(y) - \int_y^x f(t) dt$$

i obtenim la fórmula

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x (t - [t]) f'(t) dt + f(x)([x] - x) - f(y)([y] - y),$$

coneguda com la **fórmula de sumació d'Euler**. En aplicar aquesta expressió a $f(t) = \frac{1}{t^s}$, $y = N$ i en prendre el límit $x \rightarrow \infty$ obtenim el resultat del lema. $\square$

Proposició 1.8. *Segui s un nombre complex amb $\sigma \geq 1/2$ tal que satisfà*

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\log t} \quad \text{amb } t \geq e.$$

Aleshores per a cada $A > 0$, existeix una constant M que depèn de A tal que

$$|\zeta(s)| \leq M \log t, \quad |\zeta'(s)| \leq M \log^2 t.$$

Demostració. Si $\sigma \geq 2$ tenim que $|\zeta(s)| \leq \zeta(2)$ i $|\zeta'(s)| \leq |\zeta'(2)|$ i la proposició se satisfà. Per tant podem suposar que $\sigma < 2$ i $t \geq e$. El resultat s'obté en aplicar el lema anterior i en tenir en compte la desigualtat de la hipòtesi de la proposició. $\square$

A continuació demostrarem que la funció ζ no té cap zero en la recta $\sigma = 1$. Abans, però, necessitem un lema.

Lema 1.6. *Si $\sigma > 1$ es té que*

$$\zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1. \quad (1.4.3)$$

Demostració. En aplicar la proposició 1.7 a la funció ζ de Riemann, tenim que $f(n) = 1$, $f'(n) = \log n$ i es pot comprovar fàcilment, gràcies a la proposició 1.2, que $f^{-1}(n) = \mu(n)$, on $\mu(n)$ és la funció de Möbius. Per tant,

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \log d \mu(n/d)}{\log n} n^{-s} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}.$$

En resum, la funció $\zeta(s)$ pot ser escrita com

$$\zeta(s) = e^{G(s)} = \exp \left[\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} \right] = \exp \left[\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-imt \log p}}{mp^{m\sigma}} \right].$$

En prendre el mòdul queda

$$|\zeta(s)| = \exp \left[\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt \log p)}{mp^{m\sigma}} \right].$$

En substituir a la fórmula anterior $s = \sigma$, $s = \sigma + it$ i $s = \sigma + 2it$ i en fer el producte de l'enunciat de la proposició tenim que

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma + it)|^4|\zeta(\sigma + 2it)| = \exp \left[\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4 \cos(mt \log p) + \cos(2mt \log p)}{mp^{m\sigma}} \right].$$

En tenir en compte la identitat trigonomètrica $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta = 3 + 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1 = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0$ obtenim la desigualtat buscada. $\square$

Teorema 1.9. *Se satisfà que $\zeta(1 + it) \neq 0$ per a tot t real.*

Demostració. Considerem $t \neq 0$ ja que $\zeta(1)$ correspon a un pol i el teorema se satisfà trivialment. Reescrivim la desigualtat de la proposició anterior multiplicant de forma adient per $\sigma - 1$,

$$[(\sigma - 1)\zeta(\sigma)]^3 \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq \frac{1}{\sigma - 1}, \quad (1.4.4)$$

on hem considerat $\sigma > 1$ per a què no canviï el signe de la igualtat. Prenem ara el límit per la dreta $\sigma \rightarrow 1$. Atès que $\zeta(s)$ té un pol de residu 1 a $s = 1$, el primer factor tendeix a 1. El tercer factor tendeix a $|\zeta(1 + 2it)|$. Si $\zeta(1 + it)$ pogués ser zero per a algun t , podríem sumar aquest terme al segon factor de manera que

$$\left| \frac{\zeta(\sigma + it) - \zeta(1 + it)}{\sigma - 1} \right|^4 \xrightarrow{\sigma \rightarrow 1^+} |\zeta'(1 + it)|^4.$$

Per tant, el terme de l'esquerra de 1.4.4 tendeix a $|\zeta'(1 + it)|^4 |\zeta(1 + 2it)|$ quan $\sigma \rightarrow 1^+$ que és una quantitat finita. Ara bé, el terme de la dreta tendeix cap a ∞ , esdevenint així una contradicció. $\square$

Capítol 2

El teorema dels nombres primers

Sigui $\pi(x)$ el nombre de primers més petits o iguals que x . Gauss fou el primer en conjecturar que $\pi(x)$ es comporta, asimptòticament, com

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log(u)} du.$$

Atès que

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),$$

la conjectura que fa Gauss es pot expressar com

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

que és l’afirmació coneguda com el teorema dels nombres primers. A la figura 2.1 podem veure una representació gràfica del teorema.

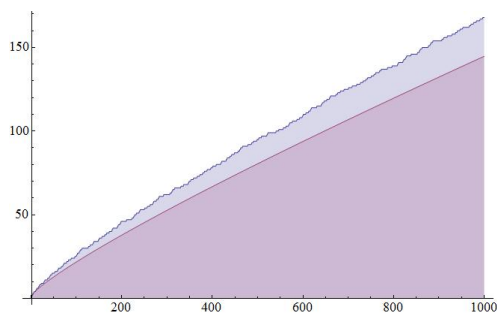


Figura 2.1: Representació de $\pi(x)$ (gràfic superior) i $\frac{x}{\log x}$ per a $x \leq 1000$.

A continuació definirem un seguit de funcions que ens seran d’ajuda en la demostració del teorema.

Definició 2.1. Per a cada natural $n \geq 1$ definim la **funció de Mangoldt** $\Lambda(n)$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^m \text{ per a algun primer } p \text{ i algun } m \geq 1, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

A la figura 2.2 podem veure una representació de la funció de Mangoldt per a $n \leq 125$.

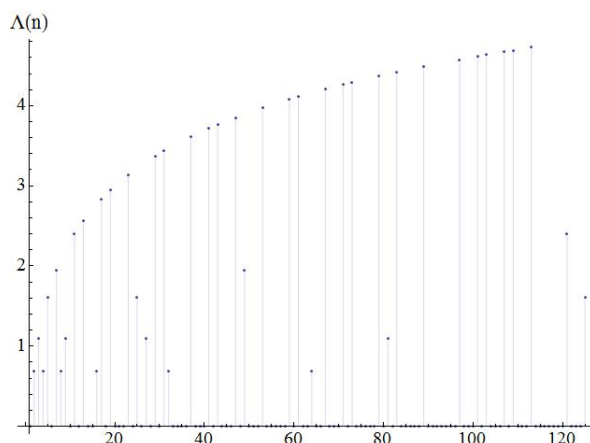


Figura 2.2: Representació de la funció de Mangoldt fins a $n = 125$.

Definició 2.2. Per a $x > 0$ definim la **funció $\psi(x)$ de Chebyshev** per

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Definició 2.3. Per a $x > 0$ definim la **funció θ de Chebyshev** per

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

on el sumatori recorre tots els primers menors o iguals que x .

Les dues funcions de Chebyshev són representades a la figura 2.3.

La proposició següent ens permet relacionar els quocients $\psi(x)/x$ i $\theta(x)/x$.

Proposició 2.1. Per a $x > 0$, tenim que

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x} \log 2}.$$

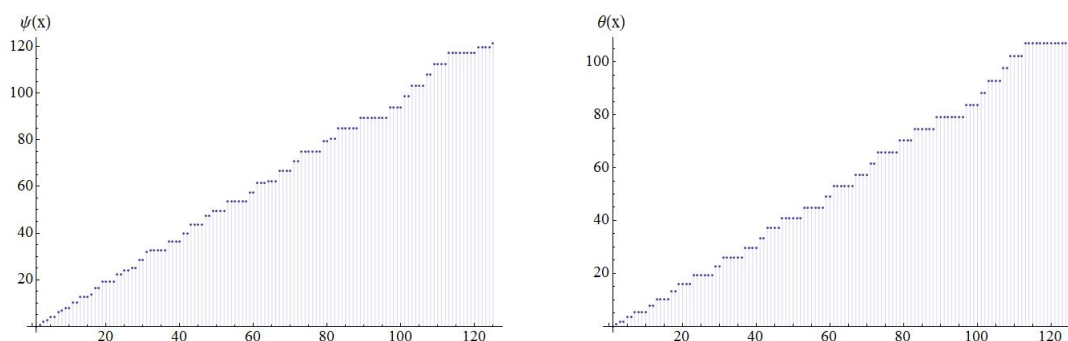


Figura 2.3: Funcions $\psi(x)$ i $\theta(x)$ de Chebyshev respectivament per a $x \leq 125$

En conseqüència, se satisfà que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \right) = 0.$$

Demostració. La funció de Mangoldt, $\Lambda(n)$, és zero si n no és una potència d'un primer p . Això ens permet donar una expressió alternativa de la funció ψ de Chebyshev,

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{m=1, p^m \leq x}^{\infty} \sum_p \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p.$$

Fixem-nos que en realitat la suma sobre m és finita, ja que el sumatori sobre p s'aturarà si $x^{1/m} < 2$, és a dir, si $m > \frac{\log x}{\log 2} = \log_2 x$. Per tant, tenim que

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2(x)} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p = \sum_{m \leq \log_2 x} \theta(x^{1/m}).$$

D'aquí és fàcil veure que

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} \theta(x^{1/m}).$$

A més, atès que $\pi(x) < x$, tenim que

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x \leq x \log x.$$

Concloem que

$$0 \leq \frac{\psi(x) - \theta(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} x^{1/m} \log(x^{1/m}) \leq \frac{1}{x} (\log_2 x) \sqrt{x} \log \sqrt{x} =$$

$$\sqrt{x} \frac{\log x}{\log 2} \frac{\log x}{2} = \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x} \log 2}.$$

□

La proposició següent ens permet relacionar $\theta(x)$ i $\pi(x)$.

Proposició 2.2. *Per a $x \geq 2$ tenim que*

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt,$$

a més a més,

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t} dt.$$

Demostració. Sigui $\chi(n)$ la funció característica dels nombres primers, és a dir,

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ és un nombre primer,} \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Així doncs podem escriure que $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{1 < n \leq x} \chi(n)$ i que $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = \sum_{1 < n \leq x} \chi(n) \log n$. Les funcions $\pi(x)$ i $\theta(x)$ són funcions esglaonades amb salts a cada nombre primer de valor 1 i $\log p$ respectivament. En prendre $f(x) = \log x$, podem aplicar el lema d'Abel (1.4) amb $y = 1$ i obtenim que

$$\theta(x) = \sum_{1 < n \leq x} \chi(n) \log n = \pi(x) \log x - \pi(1) \log 1 - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt = \pi(x) - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt,$$

ja que $\pi(t) = 0$ per a $t < 2$. Això prova la primera igualtat. Per a demostrar la segona igualtat, definim $a(n) = \chi(n) \log n$, que ens permet escriure

$$\pi(x) = \sum_{3/2 < n \leq x} a(n) \frac{1}{\log n}$$

i $\theta(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$. Anàlogament, prenem $f(x) = 1/\log x$ i $y = 3/2$ i apliquem el lema d'Abel per a obtenir

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log(x)} - \frac{\theta(3/2)}{\log 3/2} + \int_{3/2}^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t} dt = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t} dt,$$

atès que $\theta(t) = 0$ per a $t < 2$.

□

El resultat següent vincula la certesa del teorema dels nombres primers al fet que $\psi(x) \sim x$ quan $x \rightarrow \infty$.

Proposició 2.3. *Les relacions següents són equivalents*

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1,$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Demostració. L'equivalència entre (2) i (3) se segueix fàcilment de la proposició 2.1 donat que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^2 x}{\sqrt{x}} = 0$. De les expressions de la proposició 2.2, obtenim que

$$\begin{aligned} \frac{\theta(x)}{x} &= \frac{\pi(x) \log x}{x} - \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt, \\ \frac{\pi(x) \log x}{x} &= \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t} dt. \end{aligned}$$

Suposem que se satisfà (1). Aleshores tenim que $\frac{\pi(t)}{t} \sim \frac{1}{\log t}$ per a $t \geq 2$. Per tant tenim que

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \sim \frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Ens interessa acotar aquesta darrera integral. Per a tal fi dividim la regió d'integració en dos subinterval·ls,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t}.$$

Fixem-nos que

$$\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} \leq (\sqrt{x} - 2) \sup_{t \in (2, \sqrt{x})} \frac{1}{\log t} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\log 2} < \frac{\sqrt{x}}{\log 2},$$

de la mateixa manera, $\int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{x - \sqrt{x}}{\log x}$, i per tant resulta que

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \leq \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\log \sqrt{x}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Això implica que $\frac{\theta(x)}{x} \sim \frac{\pi(x) \log x}{x} \sim 1$. Hem vist, doncs, que (1) implica (2). Per a veure el recíproc, que (2) implica (1), hem de demostrar que si se satisfà (2) es té que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t} dt = 0.$$

Si se satisfà (2), tenim que $\theta(t) \sim t$, i per tant

$$\frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t} dt \sim \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{1}{\log^2 t} dt.$$

En procedir de la mateixa manera que abans, podem acotar la segona integral per

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\log^2 \sqrt{x}},$$

que implica que

$$\frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Així doncs, (1) i (2) també són equivalents. $\square$

Acabem de provar que demostrar l'afirmació $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ és equivalent a demostrar que $\psi(x) \sim x$. La relació $\psi(x) \sim x$ s'il·lustra a la figura 2.4. A la propera secció, enunciem un seguit de resultats necessaris per a la demostració del teorema dels nombres primers.

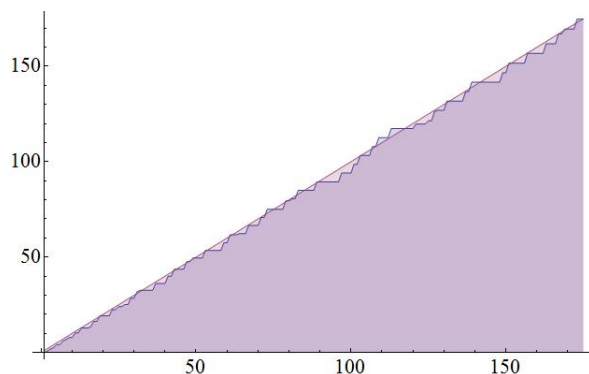


Figura 2.4: Representació de $\psi(x)$ i x per a $x \leq 175$.

2.1 Resultats previs

Lema 2.1. *Per a qualsevol funció aritmètica $a(n)$ considerem*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n),$$

on $A(x) = 0$ si $x < 1$. Aleshores

$$\sum_{n \leq x} (x - n)a(n) = \int_1^x A(t)dt. \quad (2.1.1)$$

Demostració. El lema és immediat aplicant la identitat d'Abel 1.4, que ens porta a

$$\sum_{n \leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt,$$

on f és una funció amb derivada continua en $[1, x]$. En prendre $f(t) = t$, el terme de l'esquerra es redueix a

$$\sum_{n \leq x} a(n)f(n) = \sum_{n \leq x} na(n)$$

i, el primer terme de la dreta,

$$A(x)f(x) = x \sum_{n \leq x} a(n).$$

Concloem, doncs, que

$$\sum_{n \leq x} (x - n)a(n) = \int_1^x A(t)dt.$$

□

Lema 2.2. *Si sigui $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$ i sigui $A_1(x) = \int_1^x A(t)dt$. Suposem que $a(n) \geq 0$ per a tot n . Si se satisfà l'expressió asimptòtica,*

$$A_1(x) \sim Lx^c \text{ quan } x \rightarrow \infty,$$

per algun $c > 0$ i $L > 0$, aleshores també se satisfà,

$$A(x) \sim Lx^{c-1} \text{ quan } x \rightarrow \infty.$$

Demostració. La funció suma parcial $A(x)$ és creixent ja que $a(n) \geq 0$. Escollim $\beta > 1$ i considerem la resta $A_1(\beta x) - A_1(x)$. Tenim que

$$A_1(\beta x) - A_1(x) = \int_x^{\beta x} A(u)du \geq \int_x^{\beta x} A(x)du = A(x)(\beta x - x) = x(\beta - 1)A(x).$$

En aïllar $x A(x)$ tenim que

$$xA(x) \leq \frac{1}{\beta - 1}(A_1(\beta x) - A_1(x)).$$

En dividir per x^c resulta que

$$\frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1} \left(\frac{A_1(\beta x)}{(\beta x)^c} \beta^c - \frac{A_1(x)}{x^c} \right).$$

Prenem el límit superior $x \rightarrow \infty$ en la desigualtat anterior. Obtenim que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1} (L\beta^c - L) = L \frac{\beta^c - 1}{\beta - 1},$$

on hem utilitzat la hipòtesi que $A_1(x) \sim Lx^c$ quan $x \rightarrow \infty$. Fixem-nos ara en la derivada de la funció x^c en el punt $x = 1$. Aquesta derivada és el resultat del límit

$$c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^c - 1}{h} = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\beta^c - 1}{\beta - 1}.$$

Per tant, el terme de la dreta de la desigualtat és cL en prendre el límit per la dreta $\beta \rightarrow 1$. Anàlogament, podem considerar qualsevol nombre α , $0 < \alpha < 1$ i la diferència $A_1(x) - A_1(\alpha x)$. En aquest cas arribem a

$$\liminf \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq L \frac{1 - \alpha^c}{1 - \alpha},$$

en prendre el límit per l'esquerra $\alpha \rightarrow 1$ el terme de la dreta tendeix a cL . Pel teorema del sandvitx el lema queda provat. $\square$

Denotem per $\psi_1(x)$ la integral de la funció de Chebyshev

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t) dt.$$

Proposició 2.4. *Se satisfà que*

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n) \Lambda(n). \quad (2.1.2)$$

A més a més, la relació $\psi_1(x) \sim x^2/2$ implica que $\psi(x) \sim x$ quan $x \rightarrow \infty$.

Demostració. Definim $a(n) = \Lambda(n)$, $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$ i $A_1(x) = \int_1^x A(t) dt = \psi_1(x)$. En aplicar el lema 2.1 obtenim que

$$\sum_{n \leq x} (x - n) \Lambda(n) = \int_1^x \psi(t) dt = \psi_1(x).$$

Com que $a(n) \geq 0$, podem també aplicar el lema 2.2, que afirma que si $\psi_1(x) \sim x^2/2$, aleshores l'afirmació també és certa per la derivada i $\psi(x) \sim x$. $\square$

A continuació volem expressar $\psi_1(x)/x^2$ com una integral de contorn amb la funció zeta de Riemann. Primerament necessitarem el lema següent.

Lema 2.3. Si $c > 0$ i $u > 0$, aleshores per a qualsevol enter $k \geq 1$ tenim

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz = \begin{cases} \frac{1}{k!}(1-u)^k & \text{si } 0 < u \leq 1, \\ 0 & \text{si } u > 1, \end{cases}$$

essent la integral absolutament convergent.

Demostració. Observem que el denominador de l'integrand es pot expressar com $\Gamma(z+k+1)/\Gamma(z)$ utilitzant la propietat $\Gamma(n+1) = n!$. Apliquem, doncs, el teorema integral de Cauchy per a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(R)} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}$$

on $C(R)$ és el contorn de la figura següent.

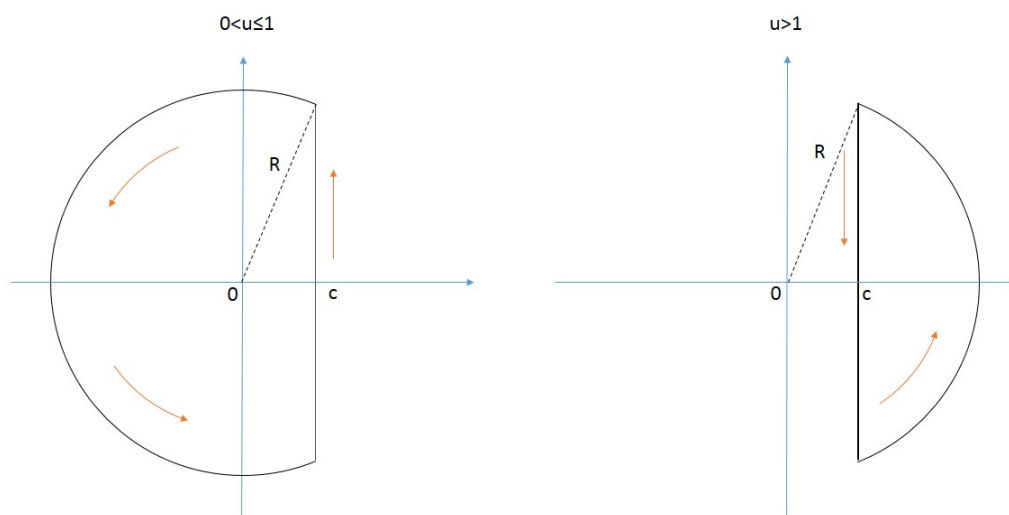


Figura 2.5: Camí d'integració $C(R)$ per a $0 < u \leq 1$ i $u > 1$

Observem que els pols de l'integrand seran a les posicions $z = 0, \dots, -k$ ja que a partir de $z = -k-1$ tindrem pols simples tant al numerador com al denominador. Prenem el radi R del cercle més gran que $2k + c$ per tal que tots els pols caiguin

dins el cercle. Veurem ara que la integral al llarg de cada arc circular tendeix a 0 quan $R \rightarrow \infty$. Denotem $z = x + iy$ i $|z| = R$. Podem fer l'acotació

$$\left| \frac{u^{-z}}{z(z+1)\dots(z+k)} \right| = \frac{u^{-x}}{|z|\dots|z+k|} \leq \frac{u^{-c}}{R|z+1|\dots|z+k|},$$

on hem utilitzat que $u^{-x} \leq u^{-c}$. Aquesta darrera desigualtat se segueix del fet que u^{-x} és creixent per a $0 < u \leq 1$ i, en aquesta situació, $x < c$. D'altra banda, u^{-x} és decreixent per a $u > 1$ i en aquest cas $x > c$. Podem acotar cada un dels factors del denominador. Si $1 \leq n \leq k$, del fet que $R > 2k$ tenim que

$$|z+n| \geq |z| - n = R - n \geq R - k \geq R/2.$$

En resum, la integral al llarg de cada arc és

$$\int_{\text{arc}} \frac{u^{-c}}{R \left(\frac{R}{2}\right)^k} = 2\pi R \frac{u^{-c}}{R \left(\frac{R}{2}\right)^k} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

En el cas $u > 1$ l'integrand és analític ja que no hi ha pols dins de $C(R)$ i per tant la integral és nul·la. En prendre $R \rightarrow \infty$ el lema queda provat per a $u > 1$. D'altra banda, si $0 < u \leq 1$, podem aplicar el teorema dels residus. L'integrand té $k+1$ pols simples per $n = 0, -1, \dots, -k$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(R)} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} dz &= \sum_{n=0}^k \operatorname{Res}_{z=-n} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} = \sum_{n=0}^k \frac{u^n}{\Gamma(k+1-n)} \operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{u^n (-1)^n}{(k-n)!n!} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (-u)^n = \frac{(1-u)^k}{k!}, \end{aligned}$$

on hem utilitzat que el residu de $\Gamma(z)$ a $z = -n$ és $(-1)^n/n!$ com hem comentat a la secció 1.2. En prendre $R \rightarrow \infty$ queda provat el lema. $\square$

Lema 2.4. Per a tot $s = \sigma + it$ amb $\sigma > 1$ se satisfà que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \quad (2.1.3)$$

Demostració. Veurem que

$$\zeta(s) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) = -\zeta'(s).$$

En efecte, derivant terme a terme tenim que $\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^s}$. D'altra banda,

$$\zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{d|n} \Lambda(d)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^s} = -\zeta'(s),$$

on hem utilitzat que $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$. $\square$

Procedim ara a trobar una representació en integral de contorn de $\psi_1(x)/x^2$.

Proposició 2.5. *Si $c > 1$ i $x \geq 1$ se satisfà que*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds. \quad (2.1.4)$$

Demostració. De l'equació 2.1.2 tenim que $\psi_1(x)/x = \sum_{n \leq x} (1 - n/x) \Lambda(n)$. En utilitzar el lema 2.3 amb $k = 1$ i $u = n/x$, si $n \leq x$, tenim que

$$1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds.$$

Multipliquem per $\Lambda(n)$ i sumem sobre tot $n \leq x$, trobem que

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds,$$

ja que la integral s'anul·la per a $n > x$ d'acord amb el lema 2.3. Denotem per $f_n(x, s)$ l'integrand amb el factor $1/(2\pi i)$, és a dir,

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} f_n(x, s) ds.$$

A continuació volem intercanviar el sumatori per la integral. Si ens fixem en 1.3, només cal comprovar que la sèrie

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} |f_n(x, s)| ds \quad (2.1.5)$$

és convergent. Per a tal fi, fixem-nos en les sumes parcials. Aquestes satisfan la desigualtat

$$\sum_{n=1}^N \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^c}{|s||s+1|} ds = \sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^c} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^c}{|s||s+1|} ds \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c},$$

amb A una constant. Atès que la darrera sèrie és convergent, ja que $c > 1$, obtenim la convergència de 2.1.5. Podem, doncs, intercanviar el sumatori i la integral i obtenim que

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x} &= \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds. \end{aligned}$$

on la darrera igualtat se segueix del lema 2.1.3. En dividir per x , la proposició queda provada. $\square$

Ens interessa encara una altra representació integral relacionada amb $\psi_1(x)$, que deduirem de l'anterior.

Proposició 2.6. *Si $c > 1$ i $x \geq 1$ tenim que*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds, \quad (2.1.6)$$

amb

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right).$$

Demostració. En utilitzar el lema 2.3 amb $k = 2$ obtenim que

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)} ds,$$

on $c > 0$. En fer el canvi $s \rightarrow s-1$ a la integral i restant el resultat al de la proposició 2.5 hem acabat. $\square$

En considerar la integral de la proposició anterior, podem parametritzar el camí d'integració per $s = c+it$, d'aquesta manera tenim que $x^{s-1} = x^{c-1} x^{it} = x^{c-1} e^{it \log x}$ i la representació integral queda

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2\pi} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} h(c+it) e^{it \log x} dt.$$

A continuació necessitem dos resultats d'anàlisi complexa, el primer fa referència a les singularitats de la derivada logarítmica; el segon és el conegut lema de Riemann-Lebesgue.

Lema 2.5. *Sigui $f(s)$ una funció definida sobre $\mathbb{C}$. Si $f(s)$ té un pol d'ordre k en $s = \alpha$, aleshores el quocient $f'(s)/f(s)$ té un pol de primer ordre en $s = \alpha$ amb residu $-k$.*

Demostració. Podem escriure f com $f(s) = g(s)/(s - \alpha)^k$ de tal manera que $g(s)$ és analítica i no s'anul·la per $s = \alpha$. Derivant respecte de s obtenim que

$$f'(s) = \frac{g'(s)(s - \alpha)^k - g(s)k(s - \alpha)^{k-1}}{(s - \alpha)^{2k}} = \frac{g(s)}{(s - \alpha)^k} \left[\frac{g'(s)}{g(s)} - \frac{k}{(s - \alpha)} \right],$$

d'on resulta que

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{g'(s)}{g(s)} - \frac{k}{s - \alpha},$$

d'on veiem que efectivament que el quocient $f'(s)/f(s)$ té un únic pol de primer ordre a $s = \alpha$ ja que $g'(s)/g(s)$ és analítica. $\square$

En aplicar el resultat anterior a la funció ζ de Riemann, resulta que

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

és analítica en $s = 1$. El motiu és que $\zeta(s)$ té un pol simple en $s = 1$ i per tant $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ té un pol de residu 1 en $s = 1$. Així doncs, en restar $\frac{1}{s-1}$ de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, el resultat és analític.

Teorema 2.1 (Lema de Riemann-Lebesgue). (cf. [2]) *Sigui f una funció de l'espai L^1 . Aleshores la seva transformada de Fourier s'anul·la a l'infinit, és a dir,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx} dt = 0.$$

Per últim, en tenir en compte la proposició 1.8 i el lema 1.6 arribem a un resultat que ens proporciona una cota superior per a $|1/\zeta(s)|$ i $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$.

Proposició 2.7. (cf.[1]). *Per a $\sigma \geq 1$ i $t \geq e$, existeix una constant $M > 0$ tal que*

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < M \log^7 t, \quad \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < M \log^9 t.$$

2.2 Demostració del teorema dels nombres primers

Teorema 2.2. Per a $x \geq 1$, se satisfà que

$$\psi(x) \sim x$$

quan $x \rightarrow \infty$.

Demostració. En la proposició 2.6 hem provat que si $c > 1$ i $x \geq 1$, tenim que

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds,$$

amb

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right).$$

Fixem-nos que la regió d'integració és la recta $\sigma = 1$ del pla complex. Primer de tot veurem que podem desplaçar aquesta regió d'integració a la recta $\sigma = c$. Per a tal fi, apliquem el teorema dels residus de Cauchy al rectangle R de la figura 2.6. La integral de $x^{s-1} h(s)$ al llarg del rectangle R és zero ja que l'integrand no té cap

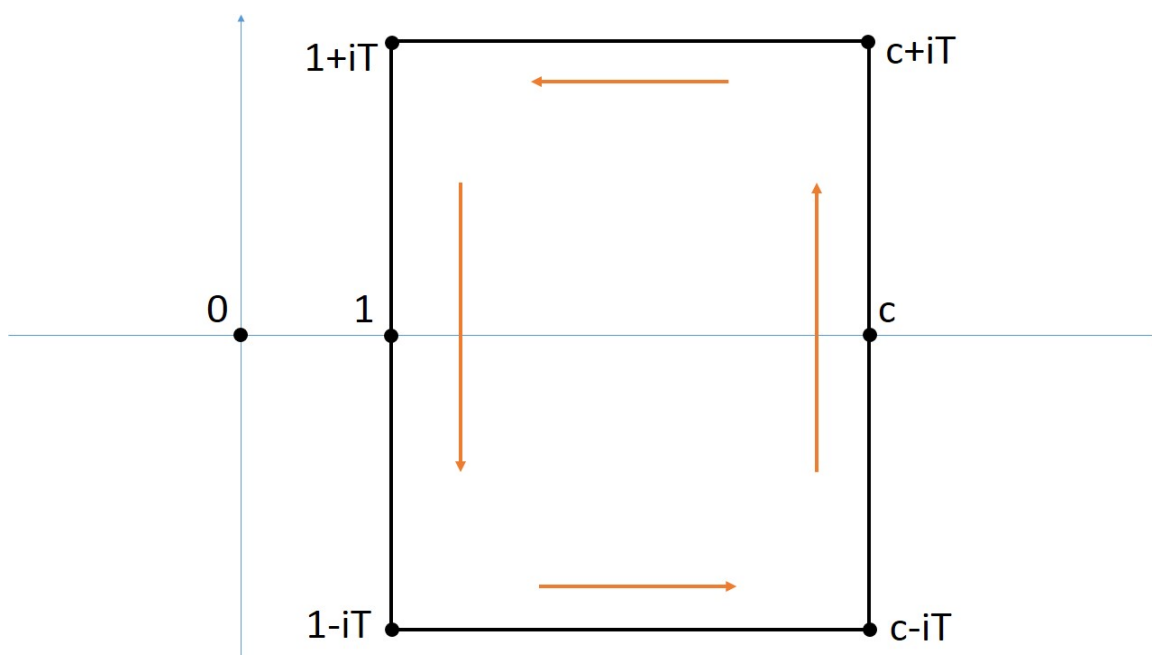


Figura 2.6: Rectangle que relaciona els camins d'integració $\sigma = 1$ i $\sigma = c$.

pol a l'interior. Vegem ara que les integrals al llarg dels costats horitzontals són 0 quan $T \rightarrow \infty$. Provarem que el valor absolut de la integral tendeix a 0. Com que els segments horitzontals són conjugats un de l'altre, i per tant tindran el mateix mòdul, és suficient considerar només el segment de dalt. Així doncs, podem acotar

$$\left| \frac{1}{s(s+1)} \right| \leq \frac{1}{T^2} \text{ i}$$

$$\left| \frac{1}{s(s+1)(s-1)} \right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2}.$$

Gràcies a la proposició 2.7, existeix una constant $M > 0$ tal que $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq M \log^9 t$ si $\sigma \geq 1$ i $t \geq e$. Per tant, si $T \geq e$,

$$|h(s)| = \left| \frac{1}{s(s+1)} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s(s+1)(s-1)} \right| \leq \frac{1}{T^2} (M \log^9 T + 1),$$

i la integral queda

$$\left| \int_1^c x^{s-1} h(s) ds \right| \leq \int_1^c x^{c-1} \frac{M \log^9 T + 1}{T^2} d\sigma = M x^{c-1} \frac{\log^9 T + 1}{T^2} (c-1) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Així doncs, tenim que la integral sobre la recta $\sigma = 1$ és igual a la integral sobre la recta $\sigma = c$. Parametritzem la recta $\sigma = 1$ per $s = 1 + it$ i tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{it} h(1+it) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it \log x} h(1+it) dt.$$

Volem veure ara que la integral convergeix en valor absolut. Dividirem la regió d'integració en 3 subintervalls tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(1+it) e^{it \log x} dt \right| = \int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt = \left(\int_{-\infty}^{-e} + \int_{-e}^e + \int_e^{\infty} \right) |h(1+it)|.$$

Ara bé,

$$\int_{-\infty}^{-e} |h(1+it)| dt \leq \int_{-\infty}^{-e} \frac{M \log^9 t + 1}{t^2} dt < \infty.$$

Similarment obtenim que les integrals de e a ∞ i de $-e$ a e convergeixen. Concloem doncs que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|$ és convergent. En aplicar el lema de Riemman-Lebesgue (teorema 2.1), tenim que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = 0,$$

per tant,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Per la proposició 2.1.2, això implica que $\psi(x) \sim x$ quan $x \rightarrow \infty$. Hem demostrat, doncs, el teorema dels nombres primers. $\square$

2.3 La hipòtesi de Riemann

Anteriorment hem vist que la funció ζ de Riemann s'anul·lava en els enters parells negatius. En els seus treballs, Riemann conjecturà que tots els zeros no trivials de la funció ζ de Riemann es troben sobre la recta crítica que correspon a $\sigma = 1/2$. Aquest enunciat es coneix com a **hipòtesi de Riemann**.

En aquest treball hem demostrat el teorema dels nombres primers sense tenir en compte el terme d'error. La demostració de de la Vallée Poussin de l'any 1899 és més completa i demostra que

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| = O\left(\frac{x}{\log x} e^{-a\sqrt{\log x}}\right),$$

amb a una certa constant. Ara bé, el terme d'error està fortament lligat a la hipòtesi de Riemann, ja que, aquesta és certa si, i només si,

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| = O(\sqrt{x} \log x).$$

Capítol 3

Aplicacions a la física

3.1 L'efecte Casimir

En física clàssica, entenem l'electromagnetisme com l'acció d'un camp governat per les lleis de Maxwell sobre les partícules carregades. Aquest camp pot oscil·lar en l'espai i en el temps i produir excitacions oscil·latòries que anomenem llum. Així mateix també entenem l'atracció gravitatòria com un camp governat per les equacions d'Einstein, malgrat que les ones gravitacionals encara no han estat observades. El naixement de la teoria quàntica elimina la distinció clàssica entre objectes que es comporten com a ones i objectes que es comporten com a partícules. En la teoria quàntica de camps, fins i tot la matèria es pensa com una excitació d'un camp quàntic i aquests passen a ser els objectes fonamentals per a descriure la realitat.

Les **equacions de Maxwell** per al camp electromagnètic en absència de fonts són

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Podem expressar-les de forma més compacta en utilitzar el tensor antisimètric de Faraday,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

és a dir, $F^{0i} = E^i/c$, $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$, on ϵ^{ijk} és el símbol de Levi-Civita. D'aquesta manera podem escriure les equacions de Maxwell com $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, on hem utilitzat el criteri de sumació d'Einstein i $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ amb $\mu = 0, 1, 2, 3$ i recordem que $x^0 = t$

i x^i són les coordenades espacials per a $i = 1, 2, 3$. Encara podem simplificar-ho més en introduir el vector potencial $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A})$ definit per

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \partial_0\vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Les equacions del moviment per a A^μ són $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$, on $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$. Observem que $A^\mu(x)$ està determinat excepte per una derivada total d'una funció, és a dir, si $A^\mu(x)$ és solució, també ho és $A^\mu(x) + \partial^\mu \chi$. Podem determinar de manera única $A^\mu(x)$ si imposen una condició extra. Això es coneix com escollir el *gauge*. Una elecció freqüent és el **gauge de Coulomb** que imposa que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Procedim ara amb la quantització del camp del fotó. Primer de tot introduïrem els operadors de creació i de destrucció. L'acció de l'operador de creació $a_{\vec{k},i}^\dagger$ sobre el buit, $|0\rangle$, és crear un fotó amb vector d'ona $\vec{k}$ i linealment polaritzat en la direcció $\hat{\epsilon}_{\vec{k},i}$, on i denota l'spin. Així mateix l'acció de l'operador de destrucció $a_{\vec{k},i}$ sobre l'estat que representa el fotó amb moment $\vec{k}$ és destruir-lo. Com que els fotons són bosons, aquests operadors segueixen les regles de commutació

$$[a_{\vec{k},i}, a_{\vec{k}',j}^\dagger] = \delta_{ij} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

i la resta zero. L'expressió del camp quantitzat en el gauge de Coulomb és (cf. [6]) $A^\mu = (0, \vec{A})$ amb

$$\vec{A}(x) = \sum_{\vec{k}} \sum_{i=1}^2 \left(a_{\vec{k},i} \hat{\epsilon}_{\vec{k},i} e_{\vec{k}}(x) + a_{\vec{k},i}^\dagger \hat{\epsilon}_{\vec{k},i} e_{\vec{k}}^*(x) \right),$$

on el primer sumatori és sobre tots els possibles vectors d'ona, $e_{\vec{k}}(x) = e^{-ik^\mu x_\mu} / \sqrt{2V\omega}$, essent ω la freqüència i V el volum. El hamiltonià d'aquest camp en termes dels operadors de creació i destrucció és

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_{i=1}^2 \hbar \omega(\vec{k}) \left(a_{\vec{k},i}^\dagger a_{\vec{k},i} + \frac{1}{2} \right).$$

Observem que, atès que el sumatori és sobre tots els possibles vectors d'ona, el terme $\sum_{\vec{k}} \frac{1}{2}$ resulta infinit. Hem de tenir en compte, però, que aquest infinit no té sentit físic ja que l'energia total d'un sistema no és quelcom mesurable sinó que només podem mesurar les diferències d'energies entre dues configuracions del mateix. Ara bé, malgrat que aquesta energia del buit no sigui observable, sí que ho seran les variacions derivades de canviar les condicions de contorn del nostre camp. Aquest fenomen és conegut com l'**efecte Casimir**.

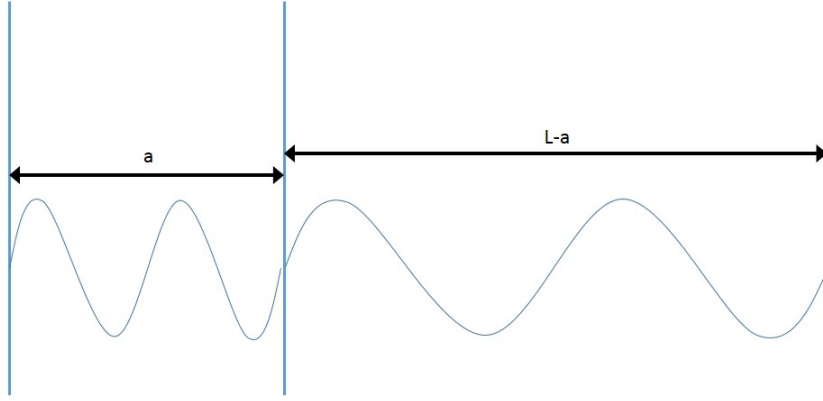


Figura 3.1: Caixa unidimensional de longitud L dividida en dues. S'hi representen les solucions de l'equació de Schrödinger de manera esquemàtica.

Considerem el cas d'una caixa unidimensional de longitud L . Dividim la caixa en dues subcaixes de dimensions a i $L - a$, tal com mostra la figura 3.1. Una partícula que es trobi dins d'una caixa es comporta com una partícula lliure, amb l'excepció que la funció d'ona ha de ser zero en els extrems. Així doncs, de la solució per a la partícula lliure, $\psi(x, t) = Ne^{-i(\omega t - kx)}$, on N és la constant de normalització, ω la freqüència i k el nombre d'ona, prenem només la solució senar, $\psi(x, t) = Nie^{-i\omega t} \sin(kx)$. En imposar que $\psi(0, t) = \psi(a, t) = 0$, tenim que $\sin(ka) = 0$, que ens restringeix els valors del vector d'ona a $k = \frac{n\pi}{a}$ amb $n \in \mathbb{N}$. L'energia de l'estat fonamental correspondrà doncs a

$$E = \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle = \frac{\hbar c}{2} \sum_{k \geq 1} k = \frac{\hbar c \pi}{2a} \sum_{n \geq 1} n.$$

Fem el mateix per la subcaixa de dimensió $L - a$ i obtenim $\mathcal{H} = \frac{\hbar c \pi}{2(L-a)} \sum_{n \geq 1} n$. La diferència entre les dues energies és

$$\Delta E = \frac{\hbar c \pi}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right) \sum_{n \geq 1} n.$$

Per tant la força derivada d'aquesta diferència d'energia és

$$F = -\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\hbar c \pi}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(L-a)^2} \right) \sum_{n \geq 1} n. \quad (3.1.2)$$

Físicament aquest resultat és inacceptable ja que una força infinita no té cap mena de sentit. El procediment habitual per corregir aquesta divergència és tallar

la sèrie argumentant que per a freqüències altes les parets de la caixa són transparents a la radiació i les condicions de contorn ja no són vàlides. Ara bé, veurem que si enlloc de fer aquest raonament físic, utilitzem els resultats que hem vist en aquest treball, arribem al mateix resultat. Aquest és un primer exemple on la prolongació analítica de la funció ζ de Riemann té aplicacions en la teoria de renormalització. D'acord amb [4], podem introduir un regulador basat en la funció ζ de Riemann escrivint

$$E(a) = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega_n \left(\frac{\omega_n}{\mu} \right)^{-s},$$

on μ és una constant arbitrària que ens serveix per a mantenir les dimensions correctes. Observem que recuperem el resultat que busquem en fer $s = 0$. En substituir $\omega_n = ck_n = \frac{c\pi}{a}n$, arribem a

$$E(a) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{c\pi}{a} \right)^{1-s} \mu^s \sum_n n^{1-s}.$$

Ara bé, sabem que per a $1 - s < -1$, el sumatori és $\zeta(s - 1)$, sembla natural doncs escriure, d'acord amb la prolongació analítica de la ζ de Riemann,

$$E(a) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{c\pi}{a} \right)^{1-s} \mu^s \zeta(s - 1).$$

Hem de calcular, doncs, quant val $\zeta(-1)$. Per a tal fi, enunciem un seguit de resultats que relacionen el càlcul de la funció zeta en certs punts al càlcul dels nombres de Bernoulli.

Definició 3.1. Per a qualsevol nombre complex x , definim les funcions $B_n(x)$ com

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n, \quad \text{amb } |z| < 2\pi. \quad (3.1.3)$$

Els nombres $B_n(0)$ s'anomenen **nombres de Bernoulli** i es donen per B_n . Així doncs,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1}, \quad \text{amb } |z| < 2\pi.$$

Proposició 3.1. Per a tot enter $n \geq 1$, se satisfà que

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

Demostració. Prenem a 1.2.4 $s = -n$ i resulta $\zeta(-n) = \Gamma(1+n)I(-n) = n!I(-n)$. Podem calcular $I(-n)$ explícitament emprant el teorema dels residus,

$$I(-n) = \text{Res}_{z=0} \left(\frac{z^{-n-1}e^z}{1-e^z} \right) = -\text{Res}_{z=0} \left(z^{-n-2} \frac{ze^z}{e^z-1} \right) \quad (3.1.4)$$

$$= -\text{Res}_{z=0} \left(z^{-n-2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(1)}{m!} z^m \right) = \frac{B_{n+1}(1)}{(n+1)!}, \quad (3.1.5)$$

on en la darrera igualtat hem utilitzat que en el límit $z \rightarrow 0$ l'únic terme del sumatori que sobreviu és el corresponent a $m = n+1$. Veurem ara que $B_n(0) = B_n(1)$. De la identitat

$$z \frac{e^{(x+1)z}}{e^z-1} - z \frac{e^{xz}}{e^z-1} = ze^{xz},$$

sumem a banda i banda i tenim que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^{n+1}.$$

En igualar els coeficients de z^n obtenim que $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$. En fer $x = 0$ tenim que $B_n(0) = B_n(1)$ per a $n \geq 2$. □

A fi de calcular $\zeta(-1)$ ens interessa, doncs, el bernoulli B_2 . La següent proposició ens dóna una fórmula per calcular els nombres de Bernoulli de manera recursiva.

Proposició 3.2. (cf.[1]) *Si $n \geq 2$ tenim que*

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

En prendre el límit $z \rightarrow 0$ i $x = 0$ a 3.1.3 obtenim que $B_0 = 1$. En fer ús de la proposició anterior, tenim que

$$B_2 = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_2 \rightarrow B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$B_3 = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{3} B_3 \rightarrow B_2 = \frac{1}{6}.$$

En definitiva, $\zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12}$. Així doncs, el càlcul de l'energia per a $s = 0$ queda

$$E(a) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{c\pi}{a} \right) \zeta(-1) = -\frac{\hbar c\pi}{24a}$$

i, per tant, la força de Casimir és

$$F(a) = -\frac{\hbar c \pi}{24} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(L-a)^2} \right).$$

L'any 2002, aquesta força va ser mesurada experimentalment (veure [13]). Així doncs, concloem que la teoria que hem estudiat de la prolongació analítica de la funció ζ de Riemann té aplicacions en la renormalització, que ens permet tractar quantitats infinites que apareixen en sistemes quàntics per tal d'obtenir resultats ben definits matemàticament amb sentit físic.

3.2 La teoria de Lee-Yang

A continuació veurem un exemple de com l'estudi de la localització dels zeros de certes funcions és molt útil a l'hora de descriure el comportament termodinàmic d'un sistema. Sigui, doncs, un sistema de N partícules amb un hamiltonià $\mathcal{H}$ els valors propis del qual són les energies E_r . La probabilitat que el sistema es trobi en un microestat particular amb energia E_r i temperatura T és $p_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{Z_N(T, V)}$, on $\beta = 1/k_B T$, essent k_B la constant de Boltzmann, i $Z_N(T, V)$ és la **funció de partició canònica** definida com

$$Z_N(T, V) = \sum_r e^{-\beta E_r},$$

on la suma és sobre tots els possibles microestats del sistema i Z_N depèn de la temperatura T explícitament i del volum V a través de l'energia $E_r(V, N)$. Si el nombre de partícules del sistema no és fix, és útil treballar en la col·lectivitat macrocanònica, la funció de partició de la qual és la **funció de partició gran canònica** que ens permet descriure el sistema amb les variables potencial químic μ , V i T . És convenient introduir la fugacitat $z = e^{\beta \mu}$. L'expressió de la funció de partició gran canònica és

$$\mathcal{Q}_M(z, V, T) = \sum_{n=0}^M Z_n(V, T) z^n, \quad (3.2.1)$$

on M és el nombre màxim de partícules que caben en el volum V . Observem que si $M < \infty$, $\mathcal{Q}_M$ és un polinomi en z . Podem establir una connexió entre la descripció microscòpica del sistema amb el formalisme de col·lectivitats i la descripció macroscòpica de la termodinàmica. Tanmateix, aquesta correspondència només està ben definida en el **límit termodinàmic** que correspon a $V \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$

amb $N/V = \text{constant}$. La pressió p i la densitat ρ són

$$\frac{p(z)}{k_B T} = \lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{V} \log \mathcal{Q} \right), \quad (3.2.2)$$

$$\rho(z) = \lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial \ln z} \frac{1}{V} \log \mathcal{Q} \right). \quad (3.2.3)$$

L'existència formal d'aquests límits no era clara però, en [15] Yang i Lee van enunciar dos teoremes que ens asseguruen l'existència d'aquests en el límit termodinàmic.

Teorema 3.1. (cf.[15]) *Suposem que el volum V és de la forma tal que l'àrea de la seva frontera no creix més ràpid que $V^{2/3}$. Aleshores, per a tot valor positiu real de z , $\frac{\log \mathcal{Q}}{V}$ tendeix, quan $V \rightarrow \infty$, a un límit independent de la forma de V . A més a més, aquest límit és una funció contínua i monòtonament creixent en z .*

Teorema 3.2. (cf.[15]) *Suposem que en el pla complex de la variable z existeix una regió R que conté un segment de l'eix real positiu i no conté cap zero del polinomi 3.2.1, aleshores, en aquesta regió, quan $V \rightarrow \infty$, totes les quantitats*

$$\left(\frac{\partial}{\partial \log z} \right)^k \frac{\log \mathcal{Q}}{V} \text{ amb } k = 0, 1, \dots$$

tendeixen a límits que són analítics respecte z . A més a més, els operadors $\frac{\partial}{\partial \log z}$ i $\lim_{V \rightarrow \infty}$ commuten en R .

Atès que $\mathcal{Q}_M$ és un polinomi en z amb coeficients positius quan M és finit, $\mathcal{Q}_M$ no pot tenir arrels reals positives. Concloem, doncs, que $\log \mathcal{Q}_M$ és una funció analítica i per tant no esperem cap singularitat ni discontinuïtat en la pressió i la densitat per a $V < \infty$. Atès que una **transició de fase** del sistema té lloc quan tenim una discontinuïtat d'algun ordre en una de les magnituds termodinàmiques com ara la pressió o la densitat, això ens permet afirmar que no hi ha transicions de fase en sistemes finits. Les arrels de 3.2.1 depenen dels paràmetres V , T i del tipus d'interacció entre les partícules del sistema que es reflecteix en l'energia E_T . A mida que incrementem el volum i, per tant, el nombre màxim M de partícules que hi caben, és possible que una successió d'arrels convergeixin cap a un punt de l'eix real, diguem t . Qualsevol entorn del punt t no seria una regió R lliure d'arrels i per tant el teorema 3.2 no seria aplicable i t seria un candidat per a representar una transició de fase del sistema. Per a confirmar que realment t correspon al punt de separació entre dues fases cal estudiar cada sistema concret amb més detall.

Així doncs, la teoria de Lee-Yang ens permet establir una connexió entre l'estudi de les transicions de fase i la distribució de les arrels de la funció de partició gran canònica. Tanmateix, com hem vist en el cas de la funció zeta de Riemann, aquest estudi pot ser molt complicat. A continuació veurem un cas en què la distribució dels zeros és remarcablement senzilla.

El model d'Ising i el teorema del cercle de Lee-Yang

Considerem un graf n dimensional amb N vèrtexs. A cada vèrtex del graf hi assignem una variable $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ que representa l'spin del vèrtex, avall o amunt respectivament. Cada vèrtex i interacciona amb el seu primer veí j amb energia $-J\sigma_i\sigma_j$. Considerem també un camp magnètic extern H que actua sobre tots els llocs de manera uniforme i constant. Aquest sistema termodinàmic es coneix com el **model d'Ising** i el seu hamiltonià és

$$\mathcal{H} = -J \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i, \quad (3.2.4)$$

on (ij) indica la suma sobre totes les arestes i μ és el moment magnètic (que dependrà del tipus de partícula que es trobi en el vèrtex). Ens restringirem al cas $J > 0$ que per definició correspon al règim ferromagnètic. Reescriurem el hamiltonià amb unes variables més adequades per al càlcul de la funció de partició. Denotarem per N_+ i N_- el nombre de spins amunt i avall respectivament. Així mateix, N_{++} , N_{--} i N_{+-} representen el nombre de parelles de veïns primers amb els dos spins amunt, avall o un de cada respectivament. Suposarem que el nombre q de veïns primers és el mateix per a tots els vèrtexs, és a dir que el graf és regular. De manera senzilla es tenen les següents relacions

$$\begin{aligned} qN_+ &= 2N_{++} + N_{+-}, \\ qN_- &= 2N_{--} + N_{+-}, \\ N_- &= N - N_+, \\ N_{+-} &= qN_+ - 2N_{++}, \\ N_{--} &= \left(\frac{1}{2}qN - qN_+ + N_{++} \right). \end{aligned}$$

A continuació podem reescriure el hamiltonià 3.2.4 amb les variables N_+ i N_{++} ,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_N(N_+, N_{++}) = -J \left(\frac{1}{2}qN - 2qN_+ + 4N_{++} \right) + \mu H(N - 2N_+).$$

Sigui $g_N(N_+, N_{++})$ el nombre de configuracions del sistema compatibles amb els valors fixats N_+ i N_{++} ; és a dir, la degeneració del sistema fixats N_+ i N_{++} . La funció de partició canònica és aleshores

$$\begin{aligned} Z_N(H, T) &= \sum \exp \{ -\beta \mathcal{H}_N(N_+, N_{++}) \} \\ &= e^{\beta N(\frac{1}{2}qJ - \mu H)} \sum_{N_+=0}^N e^{-2\beta(qJ - \mu H)N_+} \sum_{N_{++}} g_N(N_+, N_{++}) e^{4\beta J N_{++}}, \end{aligned}$$

on la prima del segon sumatori s'ha d'entendre com que la suma és sobre tots els valors de N_{++} compatibles amb un N_+ fixat. Fixem-nos que si denotem $z = \exp\{-2\beta(qJ - \mu H)\}$ la funció de partició es pot expressar com

$$Z_N(H, T) = \sum_{N_+=0}^N G_{N_+} z^{N_+}, \quad (3.2.5)$$

on

$$G_{N_+} = e^{\beta N(\frac{1}{2}qJ - \mu H)} \sum_{N_{++}} g_N(N_+, N_{++}) e^{4\beta J N_{++}}.$$

És a dir, la funció de partició canònica del model d'Ising es pot expressar com la funció de partició gran canònica d'un sistema amb fugacitat z i funció de partició canònica G_{N_+} . Aquest sistema correspon al **gas reticular**. Així doncs, ja podem aplicar el formalisme de Lee-Yang a la funció 3.2.5 per a estudiar les transicions de fase del model d'Ising, atès que els zeros de la funció de partició canònica ens indicaran els punts candidats a representar transicions de fase.

Teorema 3.3 (Teorema de Lee-Yang). *Per a un model d'Ising ferromagnètic finit, les arrels de la funció de partició canònica es troben situats sobre el cercle unitat en el pla complex de la fugacitat z .*

Demostració. Per conveniència en la demostració, deixarem que el camp magnètic prengui valors diferents a cada vèrtex h_i i finalment farem que $h_i = H$ per a tot i . De l'expressió 3.2.4 podem trobar una expressió alternativa a la funció de partició canònica del model d'Ising que hem trobat abans. Tenim que

$$Z_N(H, T) = \frac{1}{2^N} \exp\left(\beta J L + \beta \mu \sum_i h_i\right) P(\beta, h_i),$$

on L és el nombre total d'interaccions (arestes) i

$$P(\beta, h_i) = \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp\left[\beta J \sum_{(ij)} (\sigma_i \sigma_j - 1) + \beta \mu \sum_i h_i (\sigma_i - 1)\right].$$

Definim les variables $\rho_i = e^{-2\beta \mu h_i}$ i $\tau = e^{-2\beta J}$. D'aquesta manera, P és un polinomi de grau 1 en cada una de les ρ_i i de grau L en τ , que mantindrem fix. Observem que el polinomi P compta el nombre d'estats del sistema assignant a cada estat un cert pes segons la configuració dels spins. Ara bé, és clar que el terme d'aquest pes que correspon ρ_i , és invariant sota la transformació que inverteix tots els spins. Això ens permet afirmar que un cop fem $\rho_i = \rho$, el polinomi P serà palindròmic en ρ . Les

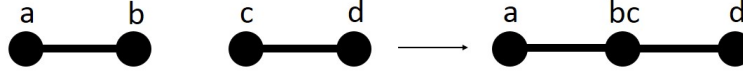


Figura 3.2: Construcció d'un graf de tres vèrtexs a partir de dos elementals.

arrels de P com a polinomi en ρ_i , correspondran a les arrels de Z_N . L'expressió del polinomi P pel graf més senzill de dos vèrtexs enllaçats és $P = 1 + \tau(\rho_1 + \rho_2) + \rho_1\rho_2$. És clar que qualsevol graf pot ser construït en unir grafs de dos vèrtexs i identificant els vèrtexs pels quals unim, com mostra la figura 3.2 Ara veurem com obtenim el polinomi P del nou graf a partir dels dels seus components que ens referirem com P_1 i P_2 . Observem que P_i és afí en ρ_i i per tant podem escriure $P_1 = B_+ + \rho_b B_-$ on B_+ expressa la contribució amb $\sigma_b = +1$ i B_- amb $\sigma_b = -1$. Anàlogament, tenim que $P_2 = C_+ + \rho_c C_-$. Quan b i c són identificats, tenim una nova variable, ρ_{bc} , que assignem al vèrtex bc . El polinomi total abans de la identificació és el producte de P_1 i P_2 atès que les funcions de partició són multiplicatives

$$P_{12} = B_+C_+ + \rho_b B_-C_+ + \rho_c B_+C_- + \rho_b\rho_c B_-C_-.$$

El polinomi després de la identificació és, doncs,

$$P_{bc} = B_+C_+ + \rho_{bc} B_-C_- \equiv A_{++} + \rho_{bc} A_{--}.$$

Aquest procés de contracció ens permet obtenir el polinomi P de qualsevol graf a partir del més elemental. Demostrarem el teorema pel graf de dos vèrtexs i veurem que la veracitat del teorema sobreviu el procés de contracció i per tant el teorema quedarà provat. El polinomi $P = 1 + \tau(\rho_1 + \rho_2) + \rho_1\rho_2$ s'anul·la si

$$\rho_1 = \frac{1 + \tau\rho_2}{\tau + \rho_2}.$$

És immediat comprovar que si $|\rho_2| > 1$, aleshores $|\rho_1| < 1$ i viceversa. Així doncs el polinomi no es pot anul·lar si ambdós ρ_1 i ρ_2 tenen mòdul menor o major que 1. Quan fem $h_i = H$ per a tot i , correspon a $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ i el polinomi només s'anul·la per $|\rho| = 1$. El teorema queda provat per a $N = 2$. Hem de comprovar que aquesta propietat sobreviu el procés de contracció. Per a tal fi, prenem $\rho_b = \rho_c = \rho$ i mantenim els altres ρ_i constants. El polinomi abans de la identificació es pot escriure com

$$P_{12} = A_{++} + \rho(A_{-+} + A_{+-}) + \rho^2 A_{--}.$$

Suposem que $P_{12}(a) \neq 0$ quan $|\rho_i| < 1$ per a tot i . De la fórmula per a les equacions de segon grau veiem que

$$|a| = \frac{|A_{++}|}{|A_{--}|} > 1, \quad |A_{++}| > |A_{--}|$$

i per tant el polinomi després de la identificació, $P_{bc} = A_{++} + \rho A_{--}$ no s'anul·la per a $|\rho| < 1$. Si ara fem $\rho_i = \rho$ per a tot i , el polinomi P_{bc} és un polinomi palindròmic tal com hem comentat abans. Si a és una arrel d'un polinomi palindròmic, $1/a$ també ho és. Concloem que P_{bc} no s'anul·la per a $|\rho| < 1$ i $|\rho| > 1$ i el teorema queda demostrat. $\square$

El teorema del cercle ens permet afirmar que el model d'Ising té, com a molt, una transició de fase, ja que el cercle unitat només talla en un punt al semieix real positiu. El cas del model d'Ising unidimensional té solució analítica ben coneguda. L'estratègia que se segueix per a trobar una expressió analítica de la funció de partició és veure que aquesta correspon a la traça de la matriu

$$M^N = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+\mu h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-\mu h)} \end{pmatrix}^N.$$

En diagonalitzar la matriu M s'obtenen els dos valors propis

$$\lambda_{\pm} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \pm \left(\tau^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{1/2},$$

amb $\theta = \frac{-i\beta\mu H}{2} \in \mathbb{C}$. Les solucions de l'equació $Z_N(\theta) = \lambda_+^N + \lambda_-^N = 0$ venen donades per $\cos\theta = -\tau^2 + (1 - \tau^2)\cos[(2k-1)\pi/N]$ amb $k \in \mathbb{N}$. Veiem, doncs, que a mida que augmenta N la distribució de zeros es fa més densa. Ara bé, el cercle només es tanca cap a l'eix positiu en el límit $\tau \rightarrow 0$ ($\cos\theta = 1$) que correspon a $T = 0$. Això demostra que el model unidimensional no té cap transició de fase per a $T > 0$. Aquesta situació s'il·lustra a la figura 3.3.

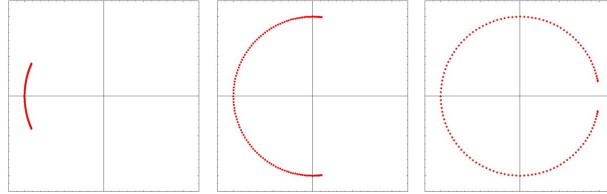


Figura 3.3: Arrels de la funció de partició del model d'Ising unidimensional.

El model d'Ising en dos dimensions és molt més complicat. Encara no existeix cap solució analítica per al cas $H \neq 0$. L'any 1941 Kramers i Wannier (veure [8]) van demostrar que per al cas d'una xarxa quadrada amb $H = 0$, la funció de partició canònica a una temperatura T , $Z(0, T)$, i una a una temperatura T^* , $Z(0, T^*)$, estan connectades per

$$Z(0, T^*) = \left[\frac{\cosh(2\gamma^*)}{\cosh(2\gamma)} \right]^N Z(0, T), \quad (3.2.6)$$

on $\gamma = J/k_B T$, i T^* i T estan connectades per

$$\tanh \gamma^* = \exp(-2\gamma). \quad (3.2.7)$$

Observem que si $T \rightarrow \infty$, tenim que $T^* \rightarrow 0$, per tant aquesta equació ens relaciona valors baixos de la temperatura amb valors alts. Alguns autors (cf.[7]) suggereixen identificar la dualitat de Kramers-Wannier amb l'equació funcional de la funció ζ de Riemann. Si existeix un valor de la temperatura, T_0 , per al qual la distribució de zeros convergeix cap a un punt de l'eix real, aleshores degut a 3.2.6 això també és cert per a T_0^* . Tanmateix, atès que pel teorema de Lee-Yang només pot haver-hi una transició de fase, aquesta ha de tenir lloc en el punt fix de la transformació 3.2.7, $\tanh \gamma_c = \exp(-2\gamma_c)$, que implica que $\gamma_c = \frac{1}{2} \log(\sqrt{2} + 1)$. Els mateixos Kramers i Wanier demostren en un segon article [9] que aquest punt certament correspon a una transició de fase del sistema.

Índex alfabètic

- abscissa
 - de convergència, 7
 - de convergència absoluta, 2
- efecte Casimir, 38
- equacions de Maxwell, 37
- fórmula de sumació d'Euler, 19
- funció
 - ψ de Chebyshev, 22
 - θ de Chebyshev, 22
 - ζ de Riemann, 9
 - aritmètica, 1
 - aritmètica multiplicativa, 1
 - de Mangoldt, 22
 - de partició canònica, 42
 - de partició gran canònica, 42
 - gamma d'Euler, 9
- gas reticular, 45
- gauge de Coulomb, 38
- hipòtesi de Riemann, 36
- identitat d'Abel, 5
- límit termodinàmic, 42
- model d'Ising, 44
- nombres de Bernoulli, 40
- sèrie de Dirichlet, 1
- semplic, 1
- transició de fase, 43
- zeros trivials, 18

Bibliografia

- [1] Apostol, Tom M., *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, 1976.
- [2] Apostol, Tom M., *Mathematical Analysis*, 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Co., 1974.
- [3] Bayer, P., La hipòtesi de Riemann, en el llibre *Els set problemes del mil·lenni*, Fundació Caixa Sabadell, 2007.
- [4] Bressi, G., Carugno, G., Onofrio, R. and G. Ruoso, Measurement of the Casimir Force between Parallel Metallic Surfaces., *Phys. Rev. Lett.* **88**(2002), 4 041804.
- [5] Chandrasekharan, K. *Introduction to Analytic Number Theory*, 1st. ed. Springer-Verlag, 1968.
- [6] Garrido, Lluís, *Física d'altres energies*, Universitat de Barcelona, 2015.
- [7] Julia, B. Statistical Theory of Numbers., *Springer Proceedings in Physics.* **47**(1990), 276-292.
- [8] Kramers, H.A. and Wannier, G.H., Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I., *Phys. Rev.* **60**(1941), 252-262.
- [9] Kramers, H.A. and Wannier, G.H., Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part II., *Phys. Rev.* **60**(1941), 263-276.
- [10] Pathria, R.K. *Statistical Mechanics*, 1st. ed. International Series in Natural Philosophy, volume 45, Pergamon Press, 1972.
- [11] Pólya, G., Bemerkung über die Integraldarstellung der Riemannschen ζ -Funktion, *Acta Mathematica* **48**(1926), 305-317.
- [12] Rudin, W. *Principios de análisis matemático*, Ediciones del Castillo, s.a., 1966.
- [13] Schwartz, Matthew D., *Quantum Field Theory and the Standard Model*, 1st ed. Cambridge University Press, 2014.

- [14] Travesa, A. *Teoria de Nombres*. Text electrònic 1991-92 a <https://atlas.mat.ub.edu/personals/travesa/TN.pdf>.
- [15] Yang, C. N. and Lee, T.D, Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation., *Phys. Rev.* **87**(1952), 404-409.
- [16] Yang, C.N. and Lee, T.D., Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model., *Phys. Rev.* **87**(1952), 410-419.