UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

DOBLE GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Treball final de grau

EL MOVIMENT BROWNIÀ APLICAT A LES FINANCES: EL MODEL BLACK-SCHOLES

Autor: Judit Algué Font

Director: Dr. Josep Vives Santa-Eulàlia
i Anna Jové Campabadal

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 15 de gener de 2025

Abstract

This paper aims to explore Brownian motion, its mathematical foundations, and its applications in finance, particularly in the Black-Scholes model.

A Brownian motion is a continuous time stochastic process with no memory, that is, its future evolution depends only on its present state. Due to the fact that its trajectories are continuous but nowhere differentiable, classical calculus is not sufficient to handle its dynamics. This led to the development of Itô calculus, which enables the definition of stochastic integrals and the solution of stochastic differential equations. These tools are essential for modeling the evolution of asset prices in financial markets, as in the Black-Scholes model. Its derivation, based on the dynamics of Brownian motion and Itô calculus, is presented along with the pricing formulas for financial options. The discussion also addresses the model's limitations, particularly its treatment of volatility, and introduces alternative approaches to better capture market complexities.

Resum

Aquest treball té com a objectiu explorar el moviment brownià, els seus fonaments matemàtics i les seves aplicacions en les finances, especialment en el model de Black-Scholes.

Un moviment brownià és un procés estocàstic en temps continu sense memòria, és a dir, la seva evolució futura depèn únicament del seu estat present. Atès que les seves trajectòries són contínues però enlloc diferenciables, el càlcul clàssic no és suficient per tractar-ne la dinàmica. Això va motivar el desenvolupament del càlcul d'Itô, que permet definir integrals estocàstiques i resoldre equacions diferencials estocàstiques. Aquestes eines són essencials per modelar l'evolució dels preus dels actius en els mercats financers, com en el model de Black-Scholes. Es presenta la seva deducció, basada en la dinàmica del moviment brownià i el càlcul d'Itô, juntament amb les fórmules de valoració d'opcions financeres. A més, es discuteixen les limitacions del model, en particular el tractament de la volatilitat, i s'introdueixen aproximacions alternatives per captar millor la complexitat dels mercats.

2020 Mathematics Subject Classification. 60J65, 60G15, 60H05, 60H10, 91G20, 91G30

Agraïments

M'agradaria agrair a la meva família i als meus amics, que m'han recolzat constantment al llarg d'aquests mesos i, en general, durant els anys que he passat a la universitat.

També vull donar les gràcies als meus tutors, a l'Anna Jové i al Dr. Josep Vives per la dedicació, la paciència i l'ajuda que m'han brindat durant tot el procés de desenvolupament d'aquest treball.

Índex

Introducció

L'objectiu principal d'aquest treball és explorar el moviment brownià i les seves aplicacions en les finances, amb un èmfasi especial en el model de Black-Scholes i les seves limitacions. El model de Black-Scholes, desenvolupat el 1973 per Fischer Black, Myron Scholes i Robert Merton, va marcar un punt d'inflexió en les matemàtiques financeres en proporcionar una metodologia per a valorar opcions financeres.

Una *opció* és un contracte financer el valor del qual depèn del preu d'un actiu subjacent. Aquest contracte atorga al titular el dret, però no l'obligació, de comprar (*call*) o vendre (*put*) l'actiu a un preu específic, conegut com a *preu d'exercici*, abans o en una data concreta. Per simplicitat, el model se centra en les *opcions europees*, que només es poden exercir en la data de venciment.

Un dels conceptes clau del model és la *volatilitat* (σ) que mesura la magnitud de les fluctuacions en el preu de l'actiu subjacent i que es considera constant al llarg del temps. Aquest paràmetre, juntament amb altres factors com el temps i la *taxa d'interès lliure de risc* r (el rendiment d'inversions sense risc), permeten descriure l'evolució del preu de les opcions mitjançant l'equació de Black-Scholes.

Teorema. (Equació de Black-Scholes) *Sigui S_t el preu de l'actiu subjacent a temps $t \in \mathbb{R}_+$ i $V(t, S_t)$ una funció dues vegades diferenciable que dona el valor d'una opció. Se suposa σ la volatilitat constant de l'actiu i r la taxa lliure de risc constant. Aleshores, el preu d'una opció al llarg del temps t es pot expressar a través de la següent equació diferencial parcial*

$$r \cdot V = \frac{\partial V}{\partial t} + r \cdot S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}.$$

Aquesta equació permet construir una cartera d'inversió que imita, o "replica", exactament el valor i el comportament d'una opció financera. En aquest context, una cartera està formada per la combinació de dos tipus d'actius: un actiu subjacent (com ara accions) i un bo sense risc (un tipus d'inversió segura). La proporció entre aquests dos components es va ajustant contínuament per tal que la cartera pugui reproduir en tot moment el valor de l'opció.

Aquesta estratègia es coneix com a *autofinançada* perquè no requereix injeccions externes de diners per fer ajustos. Això és possible perquè qualsevol canvi en la proporció dels actius es finança amb els propis recursos de la cartera, venent una part d'un actiu per comprar-ne una part de l'altre.

Per tal d'aplicar el model descrit fins ara, és imprescindible dotar l'evolució del preu de l'actiu subjacent d'una estructura matemàtica. Això és degut a que el preu d'aquest actiu no segueix una trajectòria lineal o determinista, sinó que està subjecte a fluctuacions aleatòries i constants. Aquestes fluctuacions es modelitzen mitjançant el moviment brownià geomètric. Abans de definir-lo, però, és necessari explicar primer el moviment brownià estàndard, que és la base matemàtica sobre la qual es fonamenta.

Va ser Louis Bachelier, a principis del segle XX, el primer a reconèixer el potencial del moviment brownià en el context financer, establint les bases per a la seva aplicació en l'anàlisi de mercats. No obstant això, el que resulta sorprenent és que aquest mateix model matemàtic ja havia permès descriure, dècades abans, el moviment erràtic de les partícules de pol·len en un líquid, un fenomen observat pel botànic escocès Robert Brown.

Definició. (Moviment brownià) El *moviment brownià estàndard 1-dimensional* és un procés estocàstic $\{B_t, t \geq 0\}$ Gaussià, amb esperança $E(B_t) = 0$ i covariància $Cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s) = \min(s,t) = s \wedge t$ amb $s \geq 0$.

En primer lloc, la propietat de *martingala* indica que, en qualsevol instant de temps, el valor esperat del preu d'un actiu en el futur, condicionat per la informació disponible fins al moment present, és igual al preu actual de l'actiu. Això implica que els preus dels actius no tenen "memòria": la seva evolució futura no depèn del comportament passat, sinó únicament de l'estat actual i de la informació disponible.

La següent propietat rellevant del moviment brownià és que les seves trajectòries són *contínues* quasi segurament. Aquesta propietat garanteix que les trajectòries del moviment brownià no presenten salts ni desconnexions. En el context del model de Black-Scholes, aquesta característica és fonamental, ja que assegura que els preus dels actius varien de manera contínua al llarg del temps, fet necessari per aplicar el model a les opcions financeres.

Finalment, tot i que les trajectòries del moviment brownià són contínues, el seu comportament és prou irregular com perquè no es pugui definir la seva derivada en cap instant de temps. Més formalment, sigui $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment brownià, la seva trajectòria quasi segurament no serà diferenciable en cap $t \geq 0$ (Teorema 2.2.2).

Aquest fet el distingeix dels models deterministes i, alhora, planteja reptes per analitzar-lo utilitzant eines del càlcul diferencial clàssic.

Tot i amb això, per si sol, el moviment brownià estàndard no és suficient per modelitzar directament els preus dels actius financers. El seu comportament aleatori sense un component de creixement constant (anomenat *drift*) fa que no sigui aplicable en entorns financers reals, on els actius tendeixen a mostrar una tendència de creixement o decreixement a llarg termini. Per solucionar aquesta limitació, es recorre al moviment brownià geomètric, que incorpora aquest terme determinista, el *drift*, així com un component que reflecteix la volatilitat del mercat. Aquesta formulació garanteix que els preus dels actius no siguin negatius i proporciona una trajectòria més realista per a fenòmens financers.

Definició. (Moviment brownià geomètric) Un moviment brownià geomètric és un procés estocàstic $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$ representat per

$$S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t},$$

on S_0 és el preu inicial, μ és el *drift*, σ és la volatilitat de l'actiu i B_t és un moviment brownià estàndard.

Aquesta fórmula és la solució de l'equació diferencial estocàstica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

En el context del model de Black-Scholes, es pren $\mu = r$, on r és el tipus d'interès sense risc que s'ha definit anteriorment. Això es deu a que una de les suposicions del model és que els preus dels actius creixen a una taxa r en absència de risc.

Cal tenir en compte que s'acaba de definir el moviment brownià geomètric com a una solució d'una equació diferencial estocàstica en la que apareix la derivada de B_t. No obstant això, unes línies més amunt s'ha afirmat que les trajectòries del moviment brownià no són diferenciables en cap instant de temps, la qual cosa sembla crear una contradicció: com és possible utilitzar la derivada d'un procés no diferenciable?

La resposta és que no s'està utilitzant el càlcul clàssic, sinó que s'aplica el càlcul estocàstic, una branca del càlcul que permet treballar amb processos no diferenciables com el moviment brownià.

Per formalitzar-ho, es considera $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment brownià definit en un espai de probabilitat $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ amb $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ la filtració natural associada a B.

Teorema. (**Lema d'Itô**) *Sigui* $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ *un procés estocàstic i* $f(X_t, t)$ *una funció depenent de dues variables tal que es compleix la següent equació diferencial estocàstica*

$$dX_t = \bar{\sigma} dB_t + bdt$$

on b *és el terme de creixement determinista (*drift*)* $\bar{\sigma}$ *és la volatilitat del procés* X_t *a temps* t *i* B_t *és un moviment brownià estàndard.*

A més a més, se suposa que f *és una funció dues vegades diferenciable amb derivades contínues. Aleshores, a l'equació diferencial anterior se la coneix com a procés d'Itô i la diferencial d'*f *ve donada per*

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \cdot b\ dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \cdot \bar{\sigma}^2\ dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \cdot \bar{\sigma}\ dB_t.$$

El Lema d'Itô (Teorema 3.2.4) és essencial per al model de Black-Scholes ja que permet calcular la variació del valor d'una opció en funció del temps t i del preu de l'actiu subjacent S_t. Aquest càlcul facilita derivar l'equació diferencial estocàstica que descriu l'evolució del preu de les opcions, tenint en compte tant el creixement determinista r com la volatilitat del preu de l'actiu σ. Així, el lema permet modelar de manera precisa la dinàmica dels preus en els mercats financers.

Per concloure, tot i que el model de Black-Scholes ha estat fonamental en la valoració d'opcions, presenta limitacions importants. En primer lloc, l'assumpció d'una volatilitat constant no reflecteix la realitat, ja que aquesta depèn de factors dinàmics com l'oferta i la demanda. A més, l'equació és aplicable només a opcions europees, ja que no permet exercir-les abans del venciment, a diferència de les opcions *americanes*. Finalment, el model assumeix una variació contínua dels preus, cosa que no permet capturar salts sobtats que poden aparèixer en mercats amb alta volatilitat o davant d'esdeveniments inesperats.

Per superar, almenys en part, la limitació relacionada amb la volatilitat constant, s'utilitza la *volatilitat implícita*. Aquest concepte fa referència al nivell de volatilitat que cal suposar perquè, en introduir-la a l'equació de Black Scholes, el preu teòric que s'obté coincideixi exactament amb el preu de mercat actual de l'opció. Obtenir aquest valor no és trivial i requereix mètodes numèrics, com el mètode de Newton-Raphson.

Estructura del treball

Aquest treball està estructurat en quatre capítols, cadascun amb un enfocament específic. El primer pretén donar una idea general dels conceptes preliminars necessaris, incloent els fonaments de la probabilitat i una introducció als processos estocàstics.

El segon capítol està dedicat al moviment brownià. Es comença presentant la seva definició formal, basada en la idea d'un moviment aleatori amb increments independents i distribucions normals. Un cop definit, s'exploren les seves propietats més rellevants, com la variació quadràtica, que mesura la irregularitat del procés, i el seu comportament com a martingala, per a les aplicacions financeres.

El tercer capítol aprofundeix en el càlcul d'Itô, una eina fonamental per treballar amb processos estocàstics com el moviment brownià. Aquesta teoria introdueix una integral que permet operar amb trajectòries altament irregulars i desenvolupar fórmules útils per a la resolució d'equacions diferencials estocàstiques i rep el nom d'integral estocàstica. Aquest tipus d'equacions són fonamentals en la modelització de la dinàmica dels preus dels actius financers, establint un vicle natural amb el capítol següent.

El quart i últim capítol està dedicat al model de Black-Scholes, un dels pilars de les matemàtiques financeres modernes. Es comença explicant les suposicions del mercat que en sustenten la formulació, com la idea d'un mercat sense friccions i amb informació perfecta. Després, es detalla la deducció de l'equació fonamental del model i com aquesta condueix a les fórmules per valorar opcions. Finalment, es discuteixen les limitacions del model, posant un èmfasi especial en com tracta la volatilitat i en les possibles extensions que permeten una modelització més precisa dels mercats reals.

Capítol 1

Preliminars

En aquest capítol, s'introdueixen els conceptes bàsics que permetran, no només exposar la teoria elemental del treball, sinó també oferir un recordatori clar i concís dels fonaments necessaris per construir els arguments que es desenvoluparan en els capítols següents.

S'usarà $\mathbb{T}$ com a conjunt per denotar el temps. Si el temps és discret es prendrà $\mathbb{T} := \{0, 1, ..., n\}$ i si el temps és continu, $\mathbb{T} := [0, t]$, per $t \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{T} := [0, +\infty)$.

El contingut d'aquest capítol es pot trobar als manuals [1] i [2], així com a [4, Capítol 1].

1.1 Conceptes bàsic de probabilitat i notació

La teoria de la probabilitat analitza fenòmens dels quals es coneixen els possibles resultats, però no se'n pot predir amb certesa quin es produirà. Aquest tipus de fenòmens, anomenats *fenòmens aleatoris*, són fonamentals en moltes disciplines, en particular, en models matemàtics aplicats a l'economia i les finances.

Per poder descriure i quantificar la incertesa associada a aquests fenòmens, és indispensable disposar d'eines formals. Tanmateix, abans de posar-les en pràctica, és imprescindible establir els conceptes bàsics que fonamenten aquesta teoria.

1.1.1 L'espai de probabilitat

Un *espai de probabilitat* és una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, complint les següents propietats.

1. S'anomena *espai mostral* Ω al conjunt de tots els possibles resultats d'un experiment aleatori.
2. La família de subconjunts observables de Ω es denota per $\mathcal{F}$ i està formada per *esdeveniments*. La estructura que la caracteritza reflecteix la seva observabilitat: si $F \in \mathcal{F}$ (F és observable), també ho és el seu complementari, F^C; i si $F_1, F_2, ... \in \mathcal{F}$, la seva unió $F_1 \cup F_2 \cup ...$ també és observable. Per tant, $\mathcal{F}$ és una σ-àlgebra, és a dir, una col·lecció de subconjunts de Ω que compleix:
    - $\varnothing \in \mathcal{F}$;

- si un conjunt F pertany a $\mathcal{F}$, el seu complementari $F^C = \Omega \setminus F$ també pertany a $\mathcal{F}$;
- si $\{F_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$, es compleix que $\bigcup_{n\geq 1} F_n \in \mathcal{F}$.

3. L'últim element és la probabilitat

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1],$$

una aplicació que assigna a cada esdeveniment un valor a l'interval $[0,1]$ i compleix les següents propietats

(a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(b) ($\sigma - additivitat$): si $\{F_n, n \geq 1\}$ és una successió de conjunts de $\mathcal{F}$ disjunts dos a dos, aleshores

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(F_n).$$

Un espai mostral pot ser molt divers i, en molts casos, incloure un gran nombre d'elements, la qual cosa fa difícil treballar directament amb esdeveniments aleatoris. Sovint no interessa considerar tot el conjunt, sinó només algunes de les seves característiques específiques o un subconjunt d'esdeveniments rellevants.

Per simplificar l'estudi d'aquests fenòmens aleatoris, s'introdueix el concepte de variable aleatòria, que associa un valor numèric a cada resultat de l'espai mostral. En el cas de voler capturar més d'una característica o propietat, es treballa amb vectors aleatoris, que generalitzen les variables aleatòries a dimensions superiors.

1.1.2 Variables aleatòries

Per poder associar números reals als resultats d'un fenomen aleatori, és necessari definir una estructura que permeti treballar amb subconjunts de $\mathbb{R}$ de manera rigorosa dins del context probabilístic. Aquesta estructura és la σ-àlgebra de Borel i es denota per $\mathcal{B}$. Es tracta de la σ-àlgebra més petita que conté tots els conjunts oberts de $\mathbb{R}$ segons la topologia euclidiana. Això permet identificar els conjunts mesurables, als quals es poden assignar probabilitats de manera rigorosa.

Definició 1.1.1. Una *variable aleatòria* és una aplicació $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que compleix

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Observació 1.1.2. La σ-àlgebra de Borel també es pot descriure de manera més senzilla com la σ-àlgebra generada per les semirectes de la forma $(-\infty, t]$, amb $t \in \mathbb{R}$. Aquesta descripció és vàlida perquè qualsevol conjunt obert en $\mathbb{R}$ es pot expressar com una unió numerable d'intervals oberts disjunts i aquests, a la vegada, es poden descompondre com

$$(a,b) = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^C,$$

on $(-\infty, a]$ és una semirecta tancada a l'esquerra i $(-\infty, a]^C$ és el complementari d'una altra semirecta tancada a l'esquerra. D'aquesta manera, els conjunts de la forma $(-\infty, t]$ generen tota la σ-àlgebra de Borel.

Aquest resultat permet reduir $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \ \forall B \in \mathcal{B}$, a la condició $X^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{F}, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Llei d'una variable aleatòria

A l'espai original, la probabilitat $\mathbb{P}$ està definida sobre els esdeveniments de $(\Omega, \mathcal{F})$. Mitjançant la variable aleatòria X, que associa cada element de Ω a un nombre real, es pot induir una nova probabilitat sobre $\mathbb{R}$ que descrigui el comportament dels valors de X.

Definició 1.1.3. La *llei d'una variable aleatòria* és la probabilitat definida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ que es denota per $\mathbb{P}_X$ i es calcula com

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Aquest concepte permet obtenir l'espai de probabilitat $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ amb

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1].$$

En particular,

$$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Així doncs, la variable aleatòria X permet passar de l'espai de probabilitat original $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ a un espai de probabilitat més numèric $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ on $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$.

Un concepte molt lligat a la llei d'una variable aleatòria és el de funció de distribució associada a X.

Definició 1.1.4. Sigui X una variable aleatòria, s'anomena *funció de distribució* de X a la funció

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

definida per

$$F_X(x) := \mathbb{P}\{X \leq x\}.$$

Aquesta expressió també es pot escriure com

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, x])) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]).$$

És a dir, considera el valor de $\mathbb{P}_X$ sobre les semirectes $(-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}$ i satisfà les següents propietats.

Proposició 1.1.5. *Sigui F_X la funció de distribució d'una variable aleatòria X. Llavors,*

1. *F_X és creixent,*
2. *F_X és contínua per la dreta,*
3. *$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.*

Per tal de donar estructura a aquest tipus de funcions es dona el següent resultat.

Proposició 1.1.6. *Sigui $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ una funció de distribució. Es denota per $\mathcal{D}$ el conjunt finit o numerable dels seus punts de discontinuïtat. Aleshores, es pot expressar F com*

$$F(x) = F_d(x) + F_c(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On F_d representa la part discontínua

$$F_d(x) = \sum_{\{y \in \mathcal{D},\ y \leq x\}} (F(y) - F(y^-))$$

i F_c és la part contínua

$$F_c(x) = F(x) - F_d(x).$$

Aquesta proposició permet distingir dos tipus de variables aleatòries. Si la funció de distribució $F(x)$ té només una part discontínua, llavors tindrà salts en els punts de discontinuïtat i la variable aleatòria serà discreta. En canvi, si només té una part contínua, $F(x)$ serà contínua a tot $\mathbb{R}$.

Definició 1.1.7. Una variable aleatòria X és *contínua* si la seva funció de distribució F_X és contínua.

Proposició 1.1.8. Una variable aleatòria X es diu que és *contínua* si

$$\mathbb{P}(\{X = x\}) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'aquesta proposició es dedueix que la probabilitat que la variable aleatòria contínua X prengui qualsevol valor concret dins de l'espai $\mathbb{R}$ és zero.

En el context del moviment brownià, només és necessari enfocar-se en variables aleatòries contínues. La part discontínua de la descomposició de la funció de distribució no serà rellevant.

Variables aleatòries absolutament contínues

Per tal de descriure les probabilitats associades a intervals de valors, es fa servir la funció de densitat.

Definició 1.1.9. Una funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ s'anomena *funció de densitat* si compleix les següents condicions:

1. f és no negativa,
2. f és integrable en el sentit de Riemann a $\mathbb{R}$,
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Tot i que no totes les variables aleatòries contínues tenen funció de densitat, en aquest estudi només és necessari centrar-se en aquelles que sí en tenen: les variables aleatòries absolutament contínues.

Definició 1.1.10. Una variable aleatòria X és *absolutament contínua* i té densitat f_X si la seva funció de distribució F_X es pot expressar com

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy.$$

Un dels exemples més importants de variable aleatòria absolutament contínua és la que segueix una distribució normal. Aquesta distribució serà especialment rellevant més endavant, ja que es farà servir per modelar el comportament del moviment brownià, fonamental en el model de Black-Scholes.

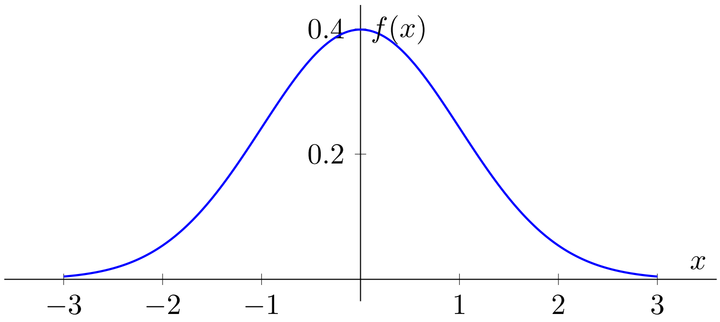

Figura 1.1: Funció de densitat de la llei $\mathcal{N}(0,1)$.

Aquesta distribució es caracteritza per la seva forma simètrica en forma de campana i per estar completament definida per dos paràmetres: l'esperança μ i la desviació estàndard σ.

Definició 1.1.11. Sigui X una variable aleatòria absolutament contínua, amb una funció de densitat f_X, complint $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x)dx < +\infty$. Es defineix l'*esperança* de X com

$$\mu = E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

La esperança, també anomenada "valor esperat", representa el valor mitjà ponderat de la variable aleatòria, tenint en compte la seva funció de densitat.

Definició 1.1.12. Sigui X una variable aleatòria absolutament contínua tal que $E(X^2) < +\infty$. Es defineix la *variància* de X com

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2.$$

La variància mesura la dispersió de la variable aleatòria respecte al seu valor esperat. Com més gran sigui la variància, més dispersos seran els valors possibles de la variable aleatòria.

A continuació, es defineix formalment la variable aleatòria amb distribució normal.

Definició 1.1.13. Una variable aleatòria X té *distribució normal (o Gaussiana),* amb paràmetres $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$, si és absolutament contínua, amb densitat

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right), \ x \in \mathbb{R}.$$

Es denota $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1.1.3 Vectors aleatoris

Els vectors aleatoris són conjunts de variables aleatòries que permeten mesurar diverses propietats de manera simultània. En aquest treball, es tracten processos estocàstics, com el moviment brownià, els quals es modelen utilitzant vectors aleatoris.

Definició 1.1.14. Un *vector aleatori n-dimensional* és una aplicació $X = (X_1, ..., X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on cada component $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, ..., n$, és una variable aleatòria.

A partir d'aquí, es segueix el mateix raonament i les mateixes distincions que en el cas de les variables aleatòries, adaptant-les al context dels vectors aleatoris.

Funció de distribució d'un vector aleatori

Definició 1.1.15. Sigui X un vector aleatori n-dimensional. La *funció de distribució cojunta* de X, és la aplicació $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ definida per

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\} \cap \cdots \cap \{X_n \leq x_n\}),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Aquesta funció dona la probabilitat que el vector aleatori es trobi dins d'una regió específica de l'espai $\mathbb{R}^n$. Aquest concepte serà útil al llarg del treball per tal de modelar les relacions temporals, caracteritzar el procés estocàstic complet i estudiar les correlacions i dependències entre preus.

Vectors aleatoris absolutament continus

Definició 1.1.16. Una funció $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és una *funció de densitat* en $\mathbb{R}^n$ si compleix:

1. $f \geq 0$,
2. f és integrable en el sentit de Riemann a $\mathbb{R}^n$,
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1.$

Definició 1.1.17. Un vector aleatori X n-dimensional és *absolutament continu* si la seva funció de distribució es pot expressar com

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(x)\ dx, \qquad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

on f és una funció de densitat en $\mathbb{R}^n$.

Com que el moviment brownià és un procés Gaussià, l'exemple de vector absolutament continu que s'utilitza en aquest treball és la distribució normal multivariant. Per a la caracterització d'aquesta distribució, serà necessari l'estudi de dos paràmetres fonamentals: l'esperança i la covariància.

Definició 1.1.18. Si $X = (X_1, ..., X_n)$ és un vector aleatori i cada component X_i té esperança $E(X_i),\ 1 \leq i \leq n$, aleshores el vector

$$\mu = E(X) = (E(X_1), E(X_2), ..., E(X_n))$$

és l'*esperança* de X.

Definició 1.1.19. Si X és un vector aleatori amb components amb variància finita, aleshores la *matriu de covariàncies* Σ és simètrica i de dimensió $n \times n$, on cada entrada (i, j) es defineix com

$$\Sigma_{ij} = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))].$$

Quan $i = j$ (la diagonal de la matriu Σ), es té la variància de cada component

$$\Sigma_{ii} = Var(X_i) = E[(X_i - E(X_i))^2].$$

Finalment, es pot introduir el concepte de distribució normal multivariant, que generalitza la distribució normal unidimensional (Definició 1.1.13) a dimensions superiors.

Definició 1.1.20. Un vector aleatori $X \in \mathbb{R}^n$ té *distribució normal multivariant,* amb paràmetres $\mu \in \mathbb{R}^n$ i $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si la seva funció de densitat conjunta és

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right),$$

on $|\Sigma|$ denota el determinant de la matriu Σ i Σ^{-1} és la seva inversa.

Per tant, la matriu Σ ha de ser invertible ($|\Sigma| \neq 0$) i semidefinida positiva, de manera que la funció de densitat sigui coherent.

En aquest context, el vector aleatori es denota $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$.

1.2 Processos estocàstics

Els processos estocàstics són sistemes dinàmics que evolucionen de manera aleatòria al llarg del temps. A diferència dels sistemes deterministes, on el futur està completament determinat per l'estat inicial, en un procés estocàstic el futur es presenta amb un grau d'incertesa.

Formalment, es poden entendre com una col·lecció de variables aleatòries indexades pel temps, o, equivalentment, com un vector aleatori amb dimensió infinita, on cada component representa l'estat del sistema en un instant determinat.

Definició 1.2.1. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat, un *procés estocàstic* X és una aplicació mesurable

$$X : (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{T} \longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}$$

que compleix que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}$ per a tot conjunt borelià $B \in \mathcal{B}$.

Observació 1.2.2. Un procés estocàstic depèn tant del temps com d'un element d'un espai de probabilitat, de la manera següent.

- Si es fixa $t_1 \in \mathbb{T}$, es té que X_{t_1} és una variable aleatòria definida en l'espai de probabilitat Ω amb valors en $\mathbb{R}$. Per tant, un procés estocàstic es pot veure com una família o successió de variables aleatòries indexades per $\mathbb{T}$.
- Si es fixa $\omega \in \Omega$, es té una família de funcions $X(\omega, \cdot) : t \in \mathbb{T} \longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}$ mesurables, que es coneix com la *trajectòria* de X.

Un exemple senzill de procés estocàstic és una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes (i.i.d.). Tot i que en aquest cas no hi ha dependència entre el passat, el present i el futur, molts models del món real requereixen representar situacions en què els canvis al llarg del temps estan relacionats. S'usarà la terminologia següent per expressar formalment aquesta dependència.

Definició 1.2.3. Sigui $X = \{X_t,\, t \in \mathbb{T}\}$ un procés estocàstic.

1. Es diu que X té *increments independents* si, per qualsevol $t_1 < ... < t_n$, les variables aleatòries $X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ són independents.
2. Es diu que X té *increments estacionaris* si, per qualsevol $t_1 < t_2$, la llei de probabilitat de la variable aleatòria $X_{t_2} - X_{t_1}$ depèn únicament de $t_2 - t_1$, és a dir, la llei de $X_{t_2} - X_{t_1}$ és la mateixa que la de $X_{t_2-t_1} - X_0$.

1.2.1 La llei dels processos estocàstics

La descripció probabilística completa d'un procés estocàstic es troba en les seves distribucions conjuntes de dimensió finita. Aquestes distribucions permeten entendre com interactuen les variables aleatòries del procés en diversos instants de temps, descrivint no només propietats individuals, sinó també la seva dependència mútua i el comportament global del sistema.

Definició 1.2.4. La *distribució conjunta de dimensió finita* d'un procés estocàstic $\{X_t,\, t \in \mathbb{T}\}$ és la col·lecció de totes les distribucions conjuntes associades als vectors aleatoris $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$, per a qualsevol elecció de $\{t_1, ..., t_n\} \subset \mathbb{T}$ i $n \in \mathbb{N}$.

En el cas dels processos estocàstics Gaussians, aquesta descripció és particularment senzilla, ja que les distribucions conjuntes de dimensió finita corresponen a distribucions normals multivariants (Definició 1.1.20).

Definició 1.2.5. Un procés estocàstic $\{X_t,\, t \in \mathbb{T}\}$ és *Gaussià* si tota distribució conjunta de dimensió finita és Gaussiana. És a dir, si per qualsevol conjunt finit de temps $\{t_1, ..., t_n\} \subset \mathbb{T}$ amb $n \in \mathbb{N}$, el vector aleatori $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ segueix una distribució $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, on

$$\mu = (E(X_{t_1}), ..., E(X_{t_n})),$$

$$\Sigma_{ij} = Cov(X_{t_i}, X_{t_j}).$$

Capítol 2

El moviment brownià

Què tenen en comú el moviment caòtic de les partícules en un fluid, la propagació de la calor i les fluctuacions dels preus a la borsa? Encara que a primer cop d'ull semblin fenòmens completament diferents, tenen una cosa en comú: es poden descriure amb les mateixes eines matemàtiques.

A principis del segle XIX, el matemàtic francès Jean-Baptiste-Joseph Fourier va revolucionar la ciència i les matemàtiques modelant la propagació de la calor. Dècades més tard, un botànic escocès, Robert Brown, va observar sota el microscopi el moviment erràtic de partícules de pol·len suspeses en aigua, un fenomen que a dia d'avui es modela a través del moviment brownià.

Al 1900, Louis Bachelier, un matemàtic francès amb formació en física, va adaptar aquestes idees per a modelar l'evolució dels preus financers. Inspirat per l'aleatorietat inherent als mercats, va desenvolupar un model que va anomenar "radiació de probabilitat", establint les bases de l'anàlisi estocàstica moderna.

En aquest capítol s'explorarà el moviment brownià, les seves propietats fonamentals i el seu paper com a eina essencial en la modelització financera. L'objectiu és comprendre no només la seva rellevància teòrica, sinó també el seu impacte pràctic en problemes com la valoració d'opcions financeres.

Tot i que el moviment brownià és caòtic, presenta propietats estadístiques ben definides. Cada canvi en la posició és independent del passat i segueix una distribució normal, caracteritzada per increments aleatoris amb esperança zero. Així, tot i la seva imprevisibilitat local, el moviment brownià s'ha convertit en un model matemàtic fonamental, aplicable tant al comportament de partícules en fluids com a l'evolució dels preus financers.

La base del contingut d'aquest capítol es pot trobar al manual [4]. Per ampliar alguns conceptes, també s'han utilitzat els llibres [5], [6] i [8].

2.1 Definicions del moviment brownià

El moviment brownià pot entendre's a partir de la idea d'un punt que es desplaça de manera completament aleatòria en qualsevol direcció. Més formalment, es defineix passeig aleatori de la manera següent.

Definició 2.1.1. Un *passeig aleatori discret* és un procés estocàstic $\{S_n,\ n \geq 0\}$ definit com una successió de variables aleatòries amb condició inicial $S_0 = 0$ i

$$S_n = X_0 + \sum_{i=0}^{n} X_i$$

on $\{X_i,\ i \geq 1\}$ són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes (i.i.d.), que representen els increments o els passos del procés.

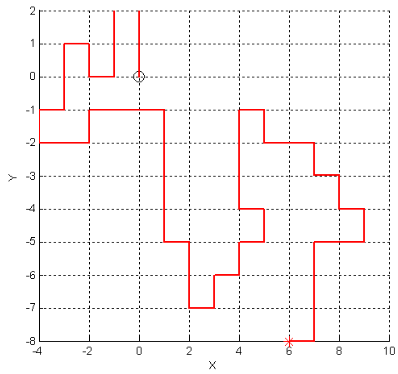

Figura 2.1: Passeig aleatori discret en 2D [19].

En un passeig aleatori discret, aquest punt realitzaria moviments successius, per exemple, cap a l'esquerra o la dreta, cap amunt o cap avall, amb passos de mida fixa en intervals de temps regulars. Tanmateix, què passaria si aquests intervals de temps es fessin infinitament petits i els passos proporcionalment menors? El procés convergeix al moviment brownià: una trajectòria contínua però completament irregular, sense cap patró previsible. Més formalment,

Definició 2.1.2. El *moviment brownià estàndard 1-dimensional* és un procés estocàstic $\{B_t, t \geq 0\}$ Gaussià, amb esperança $E(B_t) = 0$ i covariància $Cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s) = \min(s,t) = s \wedge t$ amb $s \geq 0$.[1]

La següent proposició proporciona una definició equivalent a l'anterior, però amb un enfocament més orientat al moviment brownià com a model per al moviment aleatori de partícules.

Proposició 2.1.3. *Un procés estocàstic a temps continu $\{B_t,\ t \geq 0\}$ és un moviment brownià si i només si*

1. $B_0 = 0$ *quasi segurament,*[2]
2. *els increments són independents i estacionaris,*
3. $B_t - B_s$ *amb* $0 \leq s < t$ *segueixen una distribució* $\mathcal{N}(0, t-s)$*.*

D'una manera més informal, aquesta última proposició caracteritza el moviment brownià com un procés amb una evolució aleatòria, que comença a temps $t = 0$ i posició $x = 0$,

[1] La definició general de la covariància és $\text{Cov}(B_t, B_s) = E[(B_t - E[B_t])(B_s - E[B_s])]$. Com que el moviment brownià té esperança zero, queda simplificada a $\text{Cov}(B_t, B_s) = E(B_t B_s)$.

[2] És a dir, que B_0 val zero excepte en un conjunt de mesura zero.

que els canvis en el procés només depenen de la duració de l'interval i no de la seva posició en el temps (*estacionarietat*) i que la posició futura del procés és independent de la passada (*propietat de Markov*).

Demostració de la Proposició 2.1.3. $\Longrightarrow$) Se suposa que $\{B_t,\ t \geq 0\}$ és un moviment brownià i es comproven les tres propietats:

1. $E(B_t) = 0\ \forall t \geq 0$, per tant, en el cas concret de $t = 0$, es té també $E(B_0) = 0$. Aleshores,

$$E(B_0 B_0) = E(B_0^2) = min(0, 0) = 0$$

   i això implica que $B_0 = 0$ q.s.

2. Es prenen dos increments $B_{t_2} - B_{t_1}$ i $B_{t_4} - B_{t_3}$ on $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$. Aleshores, amb la linealitat de l'esperança, es té

$$Cov[(B_{t_2}-B_{t_1})(B_{t_4}-B_{t_3})] = E[(B_{t_2}-B_{t_1})(B_{t_4}-B_{t_3})]-E(B_{t_2}-B_{t_1})\cdot E(B_{t_4}-B_{t_3}) = E(B_{t_2}B_{t_4}) - E(B_{t_1}B_{t_4}) - E(B_{t_2}B_{t_3}) + E(B_{t_1}B_{t_3}) - 0 = t_2 - t_1 - t_2 + t_1 = 0$$

   que dona la independència dels increments.

   Per veure que són estacionaris, s'ha de provar que la seva distribució només depèn de l'interval $t - s$, és a dir, $\forall\ 0 \leq s < t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. En efecte,

$$E(B_t - B_s) = E(B_t) - E(B_s) = 0 - 0 = 0,$$

$$E[(B_t-B_s)^2] = E(B_t^2)+E(B_s^2)-2\cdot E(B_tB_s) = t+s-2\cdot min(s,t) = t+s-2s = t-s.$$

3. Es té directament ja que el moviment brownià és un procés Gaussià, els increments són independents i la covariància $E[(B_t - B_s)^2] = t - s$.

$\Longleftarrow$) Se suposen certes les tres propietats i es prova que $\{B_t,\ t \geq 0\}$ és un moviment brownià.

- Donat que els increments són normals i $B_0 = 0$, $\forall\ B_t$ és una suma d'increments normals, que en ser independents, fan de B_t un procés Gaussià.

- Com $B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0, t - 0)$ i $B_0 = 0$, $E(B_t) = E(B_t - B - 0) + E(B_0) = 0 + 0 = 0$, el procés té esperança 0.

- Es té

$$E(B_tB_s) = E[(B_s + (B_t - B_s)) \cdot B_s] = E(B_s^2) + E(B_t - B_s) \cdot E(B_s) = s + 0 = s = min(s, t).$$

  Aleshores, la covariància del procés és $s \wedge\ t$.

$\square$

La definició matemàtica del moviment brownià és elegant i concisa, però, com en qualsevol construcció formal, la seva existència no és trivial. Demostrar que aquest procés tan particular pot existir dins del marc de la teoria de la probabilitat ha estat un dels reptes fonamentals de les matemàtiques del segle XX. De fet, s'han desenvolupat diversos enfocaments.

Un dels més destacats és el de Kolmogorov, que parteix d'una família consistent de distribucions finitodimensionals. Aquest mètode utilitza propietats com l'estacionarietat, la independència i la normalitat dels increments per construir una mesura de probabilitat i un procés en un espai mesurable adequat. Aquest enfocament tot i ser directe, és tècnicament exigent.

Una aproximació més elegant per al moviment brownià, que explota la seva naturalesa Gaussiana, es basa en la teoria d'espais de Hilbert. Aquest mètode està estretament relacionat amb la construcció original de Wiener (1923), posteriorment modificada per Lévy (1948) i simplificada per Ciesielski (1961). Tot i que aquest enfocament no és essencial per a moltes aplicacions pràctiques, proporciona una visió teòrica sofisticada i demostra explícitament que les trajectòries són contínues quasi segurament.

Finalment, el principi d'invariància de Donsker connecta els processos discrets amb el moviment brownià continu. En aquest cas, el moviment brownià es pot obtenir com el límit d'una seqüència de passeigs aleatoris simples a mesura que la mida del pas tendeix a zero. Aquest enfocament destaca per la seva intuïció.

Teorema 2.1.4. (Principi d'invariància de Donsker) *Sigui* $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ *un camí aleatori definit per*

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

on $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ *són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb* $E(X_k) = 0$ *i* $E(X_k^2) = 1$.

Es considera $Y_t \in \mathcal{C}(0, +\infty)$ [3] *el procés estocàstic a temps continu definit per la interpolació lineal de* $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$, *és a dir,*

$$Y_t = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor) \cdot (S_{\lfloor t \rfloor - 1} - S_{\lfloor t \rfloor}), \quad \forall t \geq 0.$$

Es defineix també el procés estocàstic escalat $K_t^{(n)} = \dfrac{Y_{nt}}{\sqrt{n}} \in C[0, 1]$. *Aleshores,* $K_t^{(n)}$ *convergeix en llei a un moviment brownià estàndard* $\{B_t, t \in [0, 1]\}$ *a l'espai* $C[0, 1]$ *de funcions contínues sobre* $[0, 1]$, *amb la mètrica induïda per la norma del suprem.*

Es pot trobar una demostració detallada d'aquest resultat a [6, pàg. 71].

Aquests enfocaments, tot i ser diferents, mostren que el moviment brownià no només és un objecte matemàticament possible, sinó que es pot construir des de diverses perspectives que ressalten diferents aspectes de la seva naturalesa probabilística i geomètrica. Aquestes tres construccions estan desenvolupades amb detall a [6, Capítol 2].

[3] La trajectòria del procés aleatori Y_t pertany a l'espai de funcions contínues definides a l'interval $(0, +\infty)$, és a dir, per a cada $\omega \in \Omega$, la funció $t \mapsto Y_t(\omega)$ és contínua a tot $(0, +\infty)$.

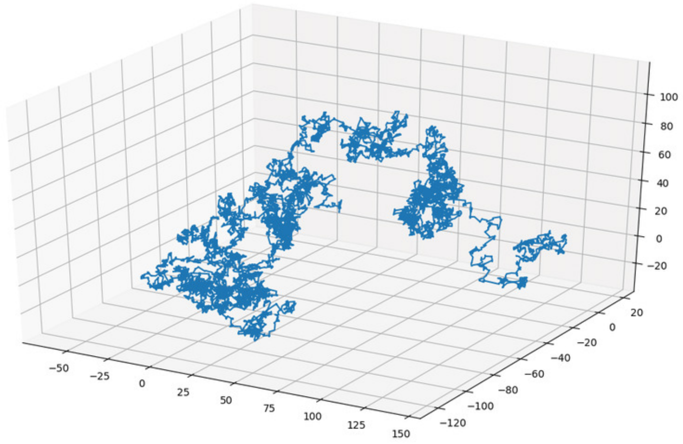

Figura 2.2: Trajectòria d'un moviment brownià [20].

2.2 Propietats de les trajectòries del moviment brownià

En aquest apartat, s'analitzaran les propietats matemàtiques que defineixen les trajectòries del moviment brownià que, lluny de ser meres curiositats, són essencials per comprendre la seva complexitat i estructura.

La primera propietat destacable de les trajectòries del moviment brownià és el seu comportament fractal, una característica que reflecteix la seva estructura altament irregular i complexa. Abans de presentar la proposició que formalitza aquesta propietat, es defineix de forma breu i informal què és un fractal.

Un fractal és un conjunt que es caracteritza per les següents propietats.

- Presenta una estructura detallada a escales arbitràriament petites.
- És massa irregular per descriure's amb el llenguatge geomètric clàssic, tant a nivell local com global.
- Sovint mostra algun tipus d'autosimilitud.
- La seva dimensió de Hausdorff sempre és més gran que la seva dimensió topològica.
- En molts casos, es pot definir de manera senzilla, sovint de forma recursiva.

La següent proposició dona propietats específiques de les seves trajectòries que expliquen perquè poden considerar-se fractals.

Proposició 2.2.1. *Sigui* $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ *un moviment brownià,*

1. $-B = \{-B_t,\ t \geq 0\}$ *també és un moviment brownià.*
2. *Per qualsevol* $\lambda > 0$*, el procés* $B^\lambda = \{\frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t},\ t \geq 0\}$ *també ho és.*
3. *Per qualsevol* $a > 0$*,* $B^{+a} = \{B_{t+a} - B_a,\ t \geq 0\}$ *també ho és.*

En primer lloc, la simetria respecte a l'origen $(-B)$ garanteix que les trajectòries no tenen una direcció preferent, reflectint-ne la irregularitat. En segon lloc, la propietat d'escala (B^λ) assegura que el moviment brownià és autosimilar: independentment de si t'acostes o t'allunyes d'una part de la trajectòria, el seu comportament es manté idèntic. Finalment, la propietat de translació temporal (B^{+a}) mostra que les trajectòries del moviment brownià tenen la mateixa estructura independentment del punt de partida. Aquestes característiques, considerades en termes de la seva distribució de probabilitat, compleixen les condicions matemàtiques necessàries per afirmar que les trajectòries d'un moviment brownià són fractals.

Demostració de la Proposició 2.2.1. S'ha de comprovar que cada procés dels anteriors compleix les condicions de la Proposició 2.1.3.

1. Es pren $\tilde{B}_t = -B_t \ \forall t \in \mathbb{T}$.

   (a) $\tilde{B}_0 = -0 = 0$ quasi segurament.

   (b) Se suposa que $\forall\ 0 \leq s < t$, la variable aleatòria $B_t - B_s$ és independent de B_r, $0 \leq r < s$. Aleshores, els increments de $\tilde{B}$ són

   $$\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = -B_t + B_s = -(B_t - B_s)$$

   i en ser una transformació lineal, no afecta a la independència, per tant, $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s$ és independent de $\tilde{B}_r$.

   (c) Es considera que $B_t - B_s$ amb $0 \leq s < t$ segueixen una $\mathcal{N}(0, t-s)$. Els increments de $\tilde{B}$ són $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = -(B_t - B_s)$. Aleshores, com les combinacions lineals de variables aleatòries Gaussianes també segueixen una distribució Gaussiana, $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

   $\tilde{B}$ és un moviment brownià ja que compleix les propietats de la Proposició 2.1.3.

2. (a) Per a $t = 0$ es té $B_0 = 0$ i també $B_0^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 \cdot 0} = \frac{1}{\lambda} B_0 = 0$ q.s.

   (b) Es parteix de que $\forall\ 0 \leq s < t$, la variable aleatòria $B_t - B_s$ és independent de B_r, $0 \leq r < s$. Aleshores, els increments de B^λ són

   $$B_t^\lambda - B_s^\lambda = \tfrac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 \cdot t} - \tfrac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 \cdot s} = \tfrac{1}{\lambda} \cdot (B_{\lambda^2 \cdot t} - B_{\lambda^2 \cdot s})$$

   i $(B_{\lambda^2 \cdot t} - B_{\lambda^2 \cdot s})$ és un increment independent de $B_{\lambda^2 \cdot r}$. Finalment, com que multiplicar per $\frac{1}{\lambda}$ no afecta a la independència, els increments de B^λ també són independents.

   (c) $B_t - B_s$ amb $0 \leq s < t$ segueixen una $\mathcal{N}(0, t-s)$. Com ja s'ha vist al punt anterior, els increments de B^λ són de la forma $B_t^\lambda - B_s^\lambda = \frac{1}{\lambda} \cdot (B_{\lambda^2 \cdot t} - B_{\lambda^2 \cdot s})$ i $B_{\lambda^2 \cdot t} - B_{\lambda^2 \cdot s} \sim \mathcal{N}(0, \lambda^2(t-s))$. Al multiplicar per $\frac{1}{\lambda}$ s'obté $B_t^\lambda - B_s^\lambda \sim \mathcal{N}(0, \frac{\lambda^2(t-s)}{\lambda^2}) = \mathcal{N}(0, t-s)$. Queda comprovat que els increments de B^λ són normals, amb mitjana 0 i variança proporcional a la mida de l'interval.

   B^λ és un moviment brownià ja que compleix les propietats de la Proposició 2.1.3.

3. (a) $B_0^{+a} = B_{0+a} - B_a = 0$ q.s.

   (b) Se suposa que $\forall\ 0 \leq s < t$, la variable aleatòria $B_t - B_s$ és independent de B_r, $0 \leq r < s$. Aleshores, els increments de B^{+a} són

   $$B_t^{+a} - B_s^{+a} = (B_{t+a} - B_a) - (B_{s+a} - B_a) = B_{t+a} - B_{s+a}$$

   i $B_{t+a} - B_{s+a}$ és un increment independent de B_{r+a}.

(c) $B_t - B_s$ amb $0 \leq s < t$ segueixen una $\mathcal{N}(0, t-s)$. Com ja s'ha vist al punt anterior, els increments de B^{+a} són de la forma $B_t^{+a} - B_s^{+a} = B_{t+a} - B_{s+a}$, que segueixen una $\mathcal{N}(0, t-s)$.

B^{+a} és un moviment brownià ja que compleix les propietats de la Proposició 2.1.3.

□

Tot i que ja s'ha vist que les trajectòries són contínues, el seu comportament és prou irregular com per a que no sigui possible definir la seva derivada en cap instant de temps.

Teorema 2.2.2. *Sigui $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment brownià, la seva trajectòria quasi segurament no serà diferenciable en cap $t \geq 0$.*

La demostració d'aquest resultat no es presenta en aquest treball. No obstant això, el lector interessat pot trobar una demostració detallada a [5, p. 52]. Aquest fet és fonamental per justificar l'ús de les tècniques de càlcul estocàstic que es presentaran al Capítol 4.

2.2.1 Variació quadràtica

Aquí s'introdueix la idea de variació quadràtica, un concepte matemàtic que descriu la irregularitat local de les funcions. En aquest cas específic, s'aplica a les trajectòries del moviment brownià i és fonamental tant per comprendre la seva naturalesa no diferenciable com per analitzar la volatilitat dels actius financers, proporcionant una base per modelitzar el preu de les opcions en el model de Black-Scholes.

Definició 2.2.3. Sigui $X = \{X_t,\, t \in \mathbb{T}\}$ un procés estocàstic i sigui $[0, t)$ l'interval de definició de X. Es considera una successió de particions de $[0, t)$

$$\mathcal{P}^n = \{t_{0,n} = 0 < t_{1,n} < ... < t_{k_n,n} = t\},$$

on $n \in \mathbb{N}$ és l'índex de partició i k_n representa el nombre de subintervals en la partició. Se suposa la seva norma

$$|\mathcal{P}^n| := \max_{i=1,\dots,k_n} \{t_{i,n} - t_{i-1,n}\} \longrightarrow 0$$

quan $n \to +\infty$. Aleshores, es diu que X té *variació quadràtica* en $[0, t)$ si existeix el límit en $L^2(\Omega)$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{k_n} (X_{t_{i,n}} - X_{t_{i-1,n}})^2 = [X]_{0,t}.$$

A més, aquest límit és independent de la successió de particions sempre que $|\mathcal{P}^n| \to 0$.

Observació 2.2.4. Que el límit convergeixi a $L^2(\Omega)$ significa que s'assoleix un tipus de convergència específic en l'espai L^2, habitualment emprat per analitzar variables aleatòries. En particular, aquesta convergència implica que:

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[(S_n - [X]_{0,t})^2\right] = 0,$$

on E denota l'esperança matemàtica. Això vol dir que la distància quadràtica esperada entre S_n i $[X]_{0,t}$ es redueix progressivament fins a desaparèixer quan $n \to +\infty$.

Tot seguit es demostra que la variació quadràtica d'un moviment brownià estàndard és t.

Teorema 2.2.5. *Sigui* $\{B_t,\ t \geq 0\}$ *un moviment brownià,* $[B]_t = t$ *quasi segurament.*

Demostració. Es considera una successió de particions de $[0, t)$

$$\mathcal{P}^n = \{t_{0,n} = 0 < t_{1,n} < ...t_{k_n,n} = t\},\ \ n \in \mathbb{N}$$

i se'n calcula la suma de les diferències quadrades

$$S_n = \sum_{i=1}^{k_n} (B_{t_{i,n}} - B_{t_{i-1,n}})^2.$$

En ser B_t un moviment brownià, $(B_{t_{i,n}} - B_{t_{i-1,n}}) \sim \mathcal{N}(0, t_{i,n} - t_{i-1,n})$ que implica que

$$E[(B_{t_{i,n}} - B_{t_{i-1,n}})^2] = t_{i+1} - t_i$$

i d'aquí s'obté el valor esperat de S_n,

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{k_n} E[(B_{t_{i,n}} - B_{t_{i-1,n}})^2] = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i,n} - t_{i-1,n}) = -t_{0,n} + t_{k_n,n} = t.$$

$\square$

A mesura que es fa més petita la partició de l'interval de temps, la suma dels quadrats dels increments tendeix a t. Per tant, tot i que les trajectòries són altament irregulars, tenen una variació quadràtica ben definida que creix linealment en el temps.

2.2.2 La propietat de martingala del moviment brownià

En termes generals, la propietat de martingala indica que, en qualsevol instant de temps, el valor esperat del procés en el futur, condicionat per la informació disponible fins al moment present, és igual al valor actual del procés. Aquesta característica implica que el procés no té "memòria", és a dir, l'evolució futura no depèn del passat, sinó només de l'estat actual. Aquesta idea resulta especialment útil en les aplicacions financeres, com es veurà en el següent capítol.

Definició 2.2.6. Una *filtració* associada a un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és una família $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ de σ-àlgebres de $\mathcal{F}$ tals que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, per qualsevol $0 \leq s \leq t$.

La idea darrere d'una filtració és que $\mathcal{F}_t$ representa el conjunt d'esdeveniments observables fins al temps t. Quan un espai de probabilitat incorpora una filtració associada, es denomina *espai de probabilitat filtrat*.

Definició 2.2.7. Un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és *complet* si $\mathcal{F}$ conté tots els subconjunts dels conjunts de probabilitat zero de $\mathcal{F}$.

Qualsevol espai de probabilitat es pot estendre de manera única a un espai de probabilitat complet (la seva completació), ampliant la σ-àlgebra per incloure tots els conjunts $A \subset \Omega$ tals que $B \subseteq A \subseteq C$, on $B, C \in \mathcal{F}$ compleixen $\mathbb{P}(C \setminus B) = 0$.

Definició 2.2.8. Donat un procés estocàstic $X = \{X_t,\, t \in \mathbb{T}\}$, la seva *filtració natural* es defineix com la família de σ-àlgebres $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ 0 \leq s \leq t)$ amb $t \geq 0$, és a dir, les σ-àlgebres generades per les pròpies variables del procés.

Una de les principals motivacions per introduir les nocions anteriors és permetre la definició rigorosa d'un procés estocàstic adaptat, que formalitza la idea que la informació disponible fins a un cert moment condiciona l'evolució del procés.

Definició 2.2.9. Un procés estocàstic $X = \{X_t,\, t \in \mathbb{T}\}$ definit sobre un espai de probabilitat filtrat és *adaptat* si per qualsevol $t \in \mathbb{T}$, X_t és una variable aleatòria $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Observació 2.2.10. Tot procés estocàstic està adaptat a la seva filtració natural.

A continuació ja es pot donar la definició de martingala per a processos estocàstics continus.

Definició 2.2.11. Un procés estocàstic $M = \{M_t,\ t \geq 0\}$ és una *martingala* respecte una filtració $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ si:

1. M és un procés adaptat a $\mathbb{F}$;

2. totes les variables aleatòries M_t del procés són integrables, és a dir, pertanyen a $L^1(\Omega)$;

3. $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$.

Observació 2.2.12. La segona propietat és equivalent a que el procés estocàstic $M = \{M_t,\ t \geq 0\}$ compleixi $E(|M_t|) < +\infty\ \forall t \geq 0$.

Observació 2.2.13. La tercera propietat es pot reescriure de la següent manera:

$$\forall\ 0 \leq s \leq t,\ E(M_t - M_s|\mathcal{F}_s) = 0.$$

Per tal d'argumentar-ho, es fa ús de les següents propietats de la probabilitat condicionada respecte a σ-àlgebres.

1. *Linealitat*: per qualsevol X, Y variables aleatòries i $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$E(aX + bY|\mathcal{F}) = a \cdot E(X|\mathcal{F}) + b \cdot E(Y|\mathcal{F}).$$

2. Si X és una variable aleatòria $\mathcal{F}$-mesurable, aleshores,

$$E(X|\mathcal{F}) = X.$$

En aquest cas, com M_s és $\mathcal{F}_s$-mesurable, aplicant la propietat (2) es té $(M_s|\mathcal{F}_s) = M_s$. Finalment, aplicant la propietat (1) s'obté

$$E(M_t - M_s|\mathcal{F}_s) = E(M_t|\mathcal{F}_s) - E(M_s|\mathcal{F}_s) = E(M_t|\mathcal{F}_s) - M_s.$$

Proposició 2.2.14. *Un moviment brownià estàndard té la propietat de martingala.*

Demostració. Sigui $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment brownià, s'ha de veure que compleix les tres propietats de la Definició 2.2.11.

1. Per definició, $\mathcal{F}_t$ conté tota la informació del procés fins al temps t. Això implica que B_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable i, per tant, és adaptat a la filtració.

2. Com que $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, $E(B_t) < +\infty$ per qualsevol $t \geq 0$.

3. Per a $0 \leq s \leq t$ a la Observació 2.2.13 s'ha vist que

$$E(B_t|\mathcal{F}_s) - B_s = E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s).$$

Aleshores, com que $B_t - B_s$ compleix la propietat d'increments independents respecte a $\mathcal{F}_s$,

$$E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s).$$

Finalment, com que $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, la seva esperança és zero:

$$E(B_t - B_s) = 0.$$

Per tant, B compleix les tres condicions per ser martingala.

□

2.2.3 Propietat de Markov del moviment brownià

Un procés té la propietat de Markov si, en qualsevol moment, el seu comportament futur depèn exclusivament de l'estat actual i no de la seva història passada. Aquesta característica es formalitza a continuació.

Definició 2.2.15. Un procés estocàstic $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ $\mathbb{F}$-adaptat, satisfà la *propietat de Markov* si $\forall s, t$ amb $s \leq t$ $E(X_t|\mathcal{F}_s) = E(X_t|X_s)$. És a dir, donat el valor X_s, la informació passada continguda en $\mathcal{F}_s$ és irrellevant per a la predicció de X_t.

Lema 2.2.16. *Un moviment brownià té la propietat de Markov.*

Demostració. Sigui $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment brownià i $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$ la filtració natural associada. S'ha de comprovar que $E(B_t \mid \mathcal{F}_s) = E(B_t \mid B_s)$ per a tot $0 \leq s \leq t$.

Per les propietats del moviment brownià, es pot escriure

$$B_t = B_s + (B_t - B_s),$$

on l'increment $B_t - B_s$ és independent de $\mathcal{F}_t$ i té una distribució $\mathcal{N}(0, t - s)$.

Per la linealitat de l'esperança condicionada,

$$E(B_t \mid \mathcal{F}_s) = E(B_s + (B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s) = E(B_s \mid \mathcal{F}_s) + E(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s),$$

on

$$E(B_s \mid \mathcal{F}_s) = B_s$$

ja que B_s és mesurable respecte $\mathcal{F}_s$ i

$$E(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s) = 0$$

per ser un increment independent amb esperança 0. Per tant,

$$E(B_t \mid \mathcal{F}_s) = B_s.$$

Falta provar que $E(B_t \mid B_s) = B_s$. Prenent la mateixa descomposició per B_t i tenint en compte el que s'ha mencionat per la primera part,

$$E(B_t \mid B_s) = E(B_s + (B_t - B_s) \mid B_s) = E(B_s \mid B_s) + E(B_t - B_s \mid B_s) = B_s + 0 = B_s.$$

Això implica que

$$E(B_t \mid \mathcal{F}_s) = E(B_t \mid B_s),$$

demostrant que el moviment brownià satisfà la propietat de Markov. $\square$

Capítol 3

La integral estocàstica i el càlcul d'Itô

Motivació

La idea és estendre als processos estocàstics, eines de càlcul clàssiques com la derivació i la integració. Concretament, es vol definir $\partial[f(B_t)]$ on f és una funció infinitament diferenciable de tal manera que s'obtingui una propietat anàloga a la que ens dona el següent teorema:

Teorema. (**Teorema Fonamental del Càlcul**) *Sigui f una funció contínua en un interval $[a,b]$, aleshores la funció $F(x)$ definida com*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b,$$

compleix $F'(x) = f(x)$.

Per què el càlcul clàssic no serveix?

El motiu de necessitar aquesta construcció per als processos estocàstics, és que si s'intenten utilitzar els mètodes de càlcul clàssic, la regla de la cadena

$$d[f(B_t)] = f'(B_t) \cdot dB_t$$

no serveix. Això es deu a que el moviment brownià, introduït en el capítol anterior, és un exemple de procés estocàstic que, tot i tenir trajectòries contínues, no és diferenciable enlloc. Aquí és on entra en joc el càlcul d'Itô.

La necessitat d'una nova integral

Les equacions diferencials estocàstiques permeten descriure la dinàmica del moviment brownià i s'expressen com

$$\begin{cases} dX_t = u_t dB_t + v_t dt \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on B_t és un moviment brownià i u i v són processos estocàstics que, com es veurà més endavant, estan subjectes a certs supòsits.

Solucionar el sistema d'equacions anterior implica trobar un procés estocàstic $\{X_t,\ t \geq 0\}$ que compleixi per a qualsevol $t \in \mathbb{R}_+$,

$$X_t = x_0 + \int_0^t u_s \ dB_s + \int_0^t v_s \ ds,$$

on la primera integral correspon a una integral estocàstica i la segona, a una integral determinista.

- Per una banda, la integral $\int_0^t v_s ds$ és una integral clàssica. Fixant $\omega \in \Omega$, es té $X_{t_1}(\omega)$ una trajectòria específica per t_1 que permet resoldre la integral amb la teoria de càlcul convencional.
- Per altra banda, la integral $\int_0^t u_s dB_s$ necessita la derivada de B_s, que no es pot obtenir mitjançant el càlcul determinista. S'ha d'introduir, doncs, una nova definició: la integral d'Itô.

Relació amb el model de Black-Scholes

En el cas concret del model de Black-Scholes, el procés X_t descriu el preu de l'actiu subjacent S_t. La volatilitat σ, constant, substitueix el terme u_s, mentre que la taxa lliure de risc r, també constant, pren el lloc de v_s. Així, l'equació diferencial estocàstica es pot simplificar com

$$\begin{cases} dS_t = \sigma S_t \, dB_t + r S_t \, dt, \\ S_0 = s_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

que també es pot expressar de manera integral

$$S_t = s_0 + \int_0^t S_s \cdot (\sigma \ dB_s + r \ ds).$$

El contingut d'aquest capítol es pot trobar als llibres [7], [8], [9], [10] i [11].

3.1 Construcció de la integral estocàstica

Per formalitzar el que s'ha introduït prèviament, es considera $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment brownià definit en un espai de probabilitat $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ amb $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ la filtració natural associada a B.

La integral d'Itô es construeix per un tipus concret de processos estocàstic, definits a continuació.

Definició 3.1.1. Sigui T un nombre real finit i estrictament positiu. L'espai $L^2_{a,T}$ està format pels processos estocàstics $H = \{H_t,\ t \in [0, T]\}$ que compleixen les següents propietats.

1. H és un procés adaptat (Definició 2.2.9).[1]

2. La funció $(t,\omega) \mapsto H(t,\omega)$ és mesurable respecte al producte de σ-àlgebres $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}$.

3. El procés té quadrat integrable en l'interval [0,T], és a dir, $\int_0^T E(H_t^2)dt < +\infty$.

Definició 3.1.2. Els processos que pertanyen a l'espai $L^2_{a,T}$ s'anomenen *processos de mitjana quadràtica integrable.*

Per tal de construir la integral, és necessari identificar primer els processos més senzills sobre els quals es pot definir la integral estocàstica i, posteriorment, es pot estendre a tot l'espai $L^2_{a,T}$.

3.1.1 Integrals definides: els processos simples

Els *processos simples* són processos estocàstics que prenen valors constants en intervals finits de temps.

Definició 3.1.3. Un procés $H = \{H_t, t \in [0,T]\}$ és un *procés simple* si es pot expressar com

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\omega) \cdot \mathbb{I}_{(t_{i-1},t_i]}(t),$$

on $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ i ϕ_i variables aleatòries $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurables i de quadrat integrable.

Cal tenir en compte que, mentre que la integral d'una funció real definida en un interval és un nombre, un procés és una funció que pren variables aleatòries com a valors. Per tant, és natural que la integral d'un procés simple, com veurem a continuació, també sigui una variable aleatòria.

Definició 3.1.4. Si $H = \{H_t, t \in [0,T]\}$ és un procés simple, es defineix la seva *integral estocàstica* com

$$\int_0^T H_t(\omega)dB_t = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\omega) \cdot (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Es defineix $E \subset L^2_{a,T}$ com el subespai de processos simples. Aleshores, la integral defineix una isometria entre aquests dos espais.

Lema 3.1.5. (Propietat d'isometria per a processos simples) *Per a qualsevol procés $H \in E \subset L^2_{a,T}$, es compleix*

$$E\left[\left(\int_0^T H_t dB_t\right)^2\right] = E\left(\int_0^T H_t^2 dt\right).$$

[1] És equivalent a que $\forall t \in [0,T]$ les variables aleatòries H_t depenen només de la informació disponible fins a temps t

La demostració es pot trobar a [11, pàg.44].

Aquesta propietat no només valida la definició de la integral estocàstica per a processos simples, sinó que també permet estendre aquesta definició a tot l'espai $L^2_{a,T}$. Tot i que no es desenvoluparan aquí els detalls d'aquesta construcció, cal destacar que aquesta extensió es fonamenta en la possibilitat d'aproximar qualsevol procés en $L^2_{a,T}$ mitjançant una seqüència de processos simples.

3.1.2 Integrals indefinides

L'enfocament d'aquest treball s'orienta més cap a l'aplicació de la integral estocàstica, per tant, no s'aprofundirà en el desenvolupament complet de les propietats. Tanmateix, és interessant mencionar-ne algunes que poden ser útils com a part del marc teòric en capítols posteriors.

Aquestes propietats no només s'apliquen a processos simples, sinó que, es poden aplicar a processos més generals que pertanyin a $L^2_{a,T}$. És per això que és necessari definir-ne la *integral estocàstica indefinida.*

Definició 3.1.6. Sigui un procés $H \in L^2_{a,T}$ es defineix la seva *integral estocàstica* com

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dB_s = \int_0^T H_s \mathbb{I}_{[0,t]}(s) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

Lema 3.1.7. (Propietat de martingala) *El procés* $\{I(H)_t,\ t \in [0,T]\}$ *és una martingala respecte a la filtració natural associada al moviment brownià.*

La demostració es pot trobar a [11, pàg.53].

Lema 3.1.8. (Variació quadràtica de la integral estocàstica) *Per a qualsevol procés* $H \in L^2_{a,T}$

$$\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2 - \int_0^t H_s^2 ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

és una martingala respecte a la filtració natural associada al moviment brownià.

Lema 3.1.9. (Continuïtat de la integral) *El procés* $\{I(H)_t,\ t \in [0,T]\}$ *té trajectòries contínues quasi segurament.*

La demostració es pot trobar a [11, pàg.55].

3.2 Fórmules d'Itô

El càlcul diferencial basat en la integral estocàstica, conegut com a càlcul d'Itô, constitueix una eina fonamental per al desenvolupament de la teoria matemàtica financera.

Es continua suposant $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment brownià definit en un espai de probabilitat $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ amb $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ la filtració natural associada a B. Es farà referència, al llarg de la secció, a expansions de processos estocàstics amb la següent definició:

Definició 3.2.1. Un procés $X = \{X_t, 0 \le t \le T\}$ es diu que és un *procés d'Itô* si satisfà l'equació

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s \tag{3.2.1}$$

on

- X_0 és $\mathcal{F}_0$-mesurable*,*
- u_t i v_t són $\mathcal{F}_t$-adaptats*,*
- $\displaystyle\int_0^T |u_s| ds < +\infty$, quasi segurament*,*
- $\displaystyle\int_0^T |v_s|^2 ds < +\infty$, quasi segurament*.*

Aquest tipus de processos són especialment rellevants perquè la seva descomposició permet identificar una integral trajectorial (el terme integrat respecte al temps) i una integral estocàstica (el terme integrat respecte al moviment brownià). Aquesta estructura els fa adequats per modelar fenòmens que evolucionen al llarg del temps amb components tant previsibles com incerts, com els preus dels actius financers.

Observació 3.2.2. La forma diferencial de l'equació (3.2.1) és

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t.$$

La fórmula que es presenta a continuació permet diferenciar funcions de la forma $t \mapsto f(B_t)$, on f és una funció amb derivades contínues de segon ordre. Aquesta és una versió estocàstica de la regla de la cadena del càlcul diferencial habitual.

Teorema 3.2.3. (**Lema d'Itô I**) *Sigui f una funció dues vegades diferenciable i $B = \{B_t,\ t \ge 0\}$ un moviment brownià, llavors*

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial B_t} dB_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial B_t^2} dt.$$

Tant $f(B_0)$ com $f''(B_s)$ es poden obtenir mitjançant mètodes de càlcul ordinaris. El terme que porta problemes és $\int_0^t f'(B_s) dB_s$ ja que, com s'ha comentat anteriorment, els moviments brownians no són diferenciables en general.

La demostració d'aquest resultat no es desenvolupa aquí, però el lector interessat pot trobar una demostració detallada a [12, pàg. 4].

Per establir la connexió entre el càlcul diferencial estocàstic introduït en el Lema d'Itô I i la seva aplicació a la derivada de l'equació de Black-Scholes en el següent capítol, es presenta una versió generalitzada del lema, que permet treballar amb funcions que depenen tant del procés estocàstic X_t com del temps t.

Teorema 3.2.4. (**Lema d'Itô II**) *Sigui $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ un procés estocàstic i $f(t, X_t)$ una funció depenent de dues variables tal que es compleix l'equació diferencial estocàstica*

$$dX_t = \bar{\sigma} dB_t + bdt,$$

*on b és el terme de creixement determinista (*drift*), $\bar{\sigma}$ és la volatilitat del procés X_t a temps t i B_t és un moviment brownià estàndard.*

A més a més, se suposa que f és una funció dues vegades diferenciable amb derivades contínues. Aleshores, a l'equació diferencial anterior se la coneix com a procés d'Itô i la diferencial d'f ve donada per

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \cdot b\ dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \cdot \bar{\sigma}^2\ dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \cdot \bar{\sigma}\ dB_t.$$

La seva demostració no es presenta en aquest treball, però es pot consultar a [12, pàg. 6].

Aquest resultat és essencial per a la descripció de l'evolució de funcions de processos d'Itô i constitueix una eina clau en la modelització financera, com es veurà en el següent capítol.

Capítol 4

El model Black-Scholes

El model de Black-Scholes, desenvolupat per Fischer Black, Myron Scholes i Robert Merton, és un dels més coneguts i influents en les finances matemàtiques a temps continu. Aquest model permet valorar opcions tant des d'un punt de vista teòric com pràctic, fet que l'ha convertit en una eina clau als mercats financers.

Tot i la seva simplicitat i popularitat, presenta limitacions importants quan s'aplica a mercats reals. La hipòtesi de la volatilitat constant, el comportament idealitzat dels mercats i l'ús del moviment brownià com a base per modelar els preus dels actius han estat objecte de debat i millores posteriors.

En aquest capítol s'introduiran els conceptes bàsics de les opcions i les assumpcions del model. Es demostrarà l'equació de Black-Scholes i es presentaran les seves solucions per a opcions de compra i venda. Finalment, s'analitzaran les seves limitacions i s'estudiaran conceptes com la volatilitat implícita i la superfície de la volatilitat.

El contingut d'aquest capítol es pot trobar a [9], [13], [14], [16] i [17].

4.1 Els bàsics del model

Una *opció* és un contracte financer, el valor del qual es deriva del preu d'un actiu subjacent, d'aquí el nom de derivats que s'atribueix a aquest tipus de contracte. Dona el dret, al seu titular, però no la obligació, de comprar o vendre un instrument subjacent a un preu concret, conegut com a *preu d'exercici*, abans o en una data específica, segons el tipus d'opció.

El segon participant en el contracte d'opcions és l'*emissor*, que ha de complir l'acord de compra o venda de l'actiu en el cas que el titular decideixi exercir el seu dret.

La classificació de les opcions varia en funció de la seva flexibilitat i el seu abast en termes de comportament.

- L'*opció call* dona al comprador el dret de comprar l'actiu subjacent a un preu fixat durant un període de temps concret.
- L'*opció put* dona al comprador el dret de vendre l'actiu subjacent a un preu fixat durant un període de temps concret.

Aquestes opcions es compren i es venen a través de corredors en línia o minoristes i la tarifa que paga el comprador s'anomena *prima*.

Actualment s'ofereixen en el mercat dos tipus d'opcions, que són les europees i les americanes. Tenen característiques similars però diferències importants. Els propietaris d'*opcions d'estil americà* poden exercir en qualsevol moment abans de la data d'expiració de la opció, mentre que les *opcions d'estil europeu* només es poden exercir a la data de venciment. D'aquí la simplicitat a l'hora de modelar les opcions europees, que són les que s'utilitzen al llarg del capítol.

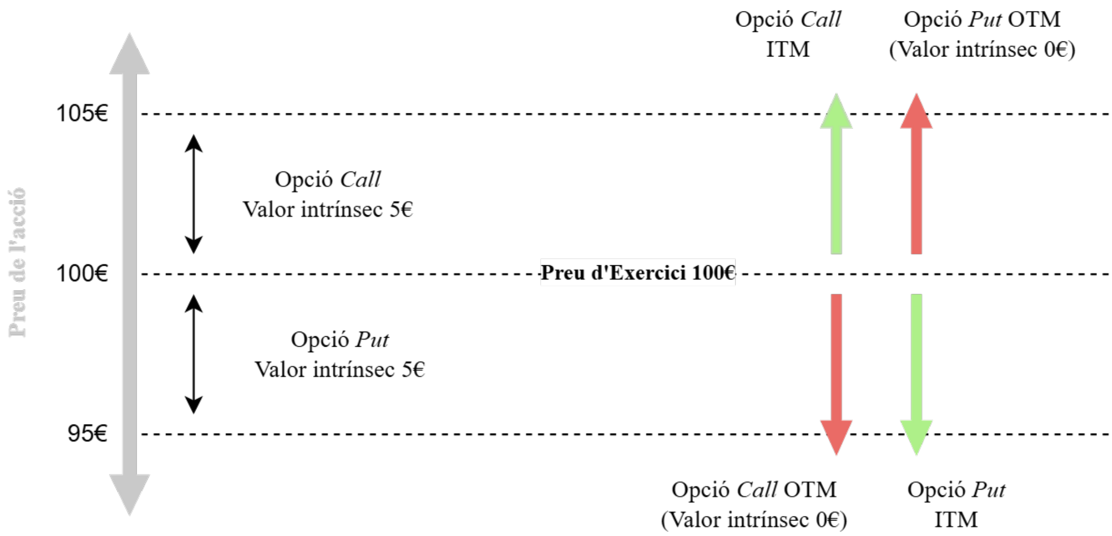

Figura 4.1: Exemple de funcionament de les opcions depenent del preu de l'acció i del preu d'exercici.

En funció de la relació entre el preu de mercat de l'actiu subjacent i el preu d'exercici de l'opció, també s'estableixen tres principals categories recollides sota el terme financer *moneyness*.

- *At-the-money* (ATM). El preu de l'actiu subjacent és similar al preu d'exercici, independentment del tipus de contracte (*call* o *put*). En ambdós casos, descriu una situació de paritat entre els preus.

- *In-the-money* (ITM). L'opció té valor pel comprador, ja que el preu de l'actiu s'ha mogut a favor seu, generant beneficis potencials. Té valor intrínsec.

  En el cas d'una *call*, això passa quan la cotització de l'actiu al mercat és superior al preu d'exercici.

  En el cas d'una *put*, quan el preu de l'actiu està per sota del preu d'exercici, ja que permet al comprador vendre l'actiu a un preu més alt que el de mercat.

- *Out-of-the-money* (OTM). L'opció no té valor pel comprador, ja que el preu de l'actiu s'ha mogut en contra seva i, per tant, no genera beneficis (no és rentable la seva execució). No té valor intrínsec.

  En el cas d'una *call*, el preu de l'actiu cau per sota del preu d'exercici.

  En el cas d'una *put*, el preu de l'actiu cotitza per sobre del preu d'exercici.

4.2 Suposicions

Abans d'endinsar-nos en la teoria, a part dels conceptes introductoris tractats en la secció anterior, també és essencial comprendre les assumpcions en què es van basar Black, Scholes i Merton. Com succeeix en altres models matemàtics, aquestes ens definiran el marc teòric sobre el que es treballarà.

Absència de restriccions

L'activitat en el mercat financer es realitza sense costos de transacció, com comissions, corretatges o riscos de liquiditat, i no existeixen restriccions legals per negociar opcions o actius subjacents. A més, els actius es consideren perfectament divisibles, la qual cosa permet fragmentar-los en unitats més petites per implementar estratègies d'inversió i cobertura amb precisió.

Mercat eficient i sense oportunitats d'arbitratge

S'assumeix que el mercat és eficient, el que significa que els preus dels actius reflecteixen tota la informació disponible en tot moment. Així doncs, no existeixen oportunitats d'arbitratge, és a dir, no es poden obtenir beneficis sense risc mitjançant la compra i venda simultània d'un mateix actiu en diferents mercats o formats. Aquest principi garanteix que les opcions de compra i venda compleixen la paritat corresponent en tot moment, i que les estratègies d'inversió no poden generar rendiments extraordinaris sense exposar-se a riscos addicionals.

Distribució lognormal del preu de l'actiu

En teoria de la probabilitat, una *distribució lognormal* és una distribució de probabilitat continua d'una variable aleatòria X, el logaritme de la qual es distribueix normalment. És a dir, $\ln(X)$ té una distribució normal.

Se suposa que el preu de l'actiu subjacent segueix un moviment brownià geomètric, definit de la següent manera.

Definició 4.2.1. Un *moviment brownià geomètric* és un procés estocàstic $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$ representat per

$$S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, \tag{4.2.1}$$

on S_0 és el preu inicial, μ és el *drift*, σ és la volatilitat de l'actiu i B_t és un moviment brownià estàndard. Aquesta fórmula és la solució de l'equació diferencial estocàstica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Prenent el logaritme natural de l'expressió (4.2.1) s'obté

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma B_t,$$

formada per la suma de termes constants i del moviment brownià B_t que segueix una distribució normal. Per tant $\ln(S_t)$ és una variable aleatòria normal i el preu de l'actiu segueix una distribució lognormal.

Degut a que l'exponencial de qualsevol nombre real sempre és positiu, S_t queda limitat per zero i no pot prendre valors negatius. Això genera una asimetria cap a la dreta i un cert grau de curtosi[1].

En aquest cas, es té una distribució amb curtosi alta, és a dir, amb cua gruixuda, indicant una probabilitat més gran d'obtenir valors allunyats de la mitjana, també coneguts com a esdeveniments extrems.

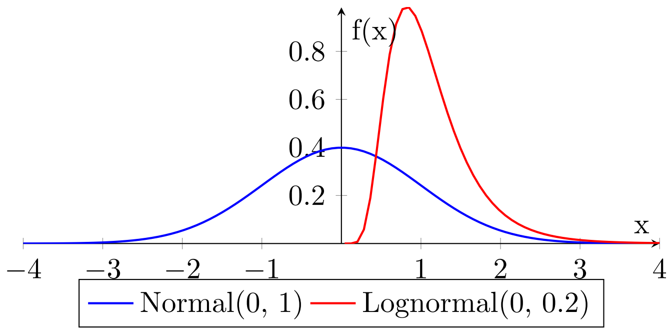

Figura 4.2: Comparació gràfica de les distribucions esmentades.

Distribució normal del rendiment de l'actiu

Atès que els preus dels actius segueixen una distribució log-normal, es pot comprovar ràpidament que els seus rendiments es distribueixen segons una normal.

El rendiment d'un actiu financer es defineix com

$$R_t = ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right).$$

Substituint en aquesta expressió l'equació (4.2.1) s'obté

$$R_t = ln\left(\frac{S_0 \cdot e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t}}{S_0}\right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t,$$

que és una combinació lineal d'una constant i del moviment brownià B_t, que segueix una distribució normal.

Per tant, els rendiments es poden descriure mitjançant una distribució simètrica al voltant de la mitjana, amb una probabilitat més gran de veure canvis petits en el preu i una probabilitat decreixent per canvis molt grans.

Volatilitat constant

El *retorn* d'un actiu financer és el canvi percentual en el seu preu durant un període de temps determinat. És a dir, representa el guany o la pèrdua obtinguda per l'inversor.

[1]És la mesura de la forma i el grau d'apuntament d'una distribució de probabilitat, posant èmfasi en el gruix de les seves cues

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \cdot 100.$$

Aleshores, es pot definir la *volatilitat* com una mesura estadística de la dispersió dels retorns per a un valor o índex de mercat determinat.

En aquest model es considerarà que la volatilitat dels actius és constant al llarg del temps. Això implica que les fluctuacions del preu d'un actiu es mantenen dins d'uns límits previsibles, cosa que facilita l'avaluació d'opcions i altres derivats.

Taxa d'interès lliure de risc lliure constant

S'assumeix que la taxa d'interès lliure de risc (r) és constant durant tota la vida de l'opció. Per tant, el rendiment d'inversions sense risc, com els Bons del Tresor, es manté estable durant el període en què l'opció és vigent. Aquesta condició és clau per determinar el valor temporal de l'opció, ja que la taxa d'interès lliure de risc s'utilitza per actualitzar els fluxos de caixa futurs al seu valor present.

Sense dividends

Es parteix de la idea que els actius subjacents no generen pagaments addicionals durant la vida de l'opció, com ara dividends o altres rendiments. De fet, els dividends podrien alterar la relació entre opcions de compra (*call*) i de venda (*put*) segons la paritat put-call, per aquest motiu, el model de Black-Scholes original treballa sota aquesta hipòtesi. Si es volguessin incorporar dividends, caldria ajustar el model.

4.3 Estratègies d'autofinançament

L'equació de Black-Scholes permet descriure l'evolució temporal del valor d'una opció $V(t, S_t)$. Aquesta equació s'obté aplicant el Teorema 3.2.4 a una cartera de cobertura auto-finançada, que és una estratègia de trading on es combina un actiu subjacent (que comporta risc) amb bons sense risc. Aquesta estratègia permet cobrir l'opció i eliminar el risc associat a l'evolució del preu de l'actiu subjacent, de manera que la cartera replicant pot imitar el comportament de l'opció de manera precisa.

Una *estratègia* és un pla que especifica com distribuir els recursos disponibles entre diferents actius financers al llarg del temps. Matemàticament s'expressa de la següent manera.

Definició 4.3.1. Siguin H_t^0 i H_t^1 les quantitats invertides d'actiu lliure de risc i d'actiu amb risc, respectivament. Una *estratègia* es modela com un procés estocàstic

$$H = \{H_t, t \geq 0\} = \{(H_t^0, H_t^1), t \geq 0\}$$

tal que H_t és $\mathbb{F}$-adaptada amb $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtració natural del moviment brownià.

Per tant, les decisions d'inversió en el temps t només depenen de la informació disponible fins aquell moment.

Es considera ara el vector de preus

$$\{P_t, t \geq 0\} = \{(S_t^0, S_t), t \geq 0\},$$

on els components es defineixen com segueix.

- El preu de l'actiu lliure de risc, S_t^0, es modela mitjançant una funció exponencial del temps amb una taxa d'interès constant r:

$$S_t^0 = S_0^0 \cdot e^{rt},$$

  on se suposarà, per simplicitat i sense pèrdua de generalitat, que $S_0^0 = 1$.

- El preu de l'actiu subjacent, S_t, és el valor de l'actiu que es modela com un moviment brownià geomètric.

Definició 4.3.2. El *valor total de la cartera* a temps t ve donat per

$$\Pi_t = H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Quant l'estratègia té com a objectiu intentar aconseguir beneficis amb la compra-venda dels actius financers, s'anomena *estratègia de trading* i pot ser de dos tipus.

- Estàtica: quan l'estratègia no s'ajusta amb el pas del temps.
- Dinàmica: quan l'estratègia s'ajusta segons els canvis en les condicions del mercat.

En aquest context, l'estratègia de *trading* serà dinàmica ja que és necessari per tal de poder replicar el valor de les opcions. També es considerarà que és *autofinançada*, és a dir, els canvis en la composició de la cartera un cop està en marxa l'estratègia, es realitzaran amb els propis recursos de la cartera, sense injeccions de capital extern. L'equació que ens dona la condició d'autofinançament és

$$d\Pi_t(H) = H_t^0 \ dS_t^0 + H_t^1 \ dS_t = H_t^0 \ dS_t^0 + H_t^1 \ S_t(\sigma dB_t + rdt).$$

És a dir, qualsevol canvi en el valor total de la cartera es deu exclusivament a les variacions dels preus dels actius que la componen.

El model de Black-Scholes està dissenyat per evitar oportunitats d'arbitratge, assegurant que, en un mercat eficient, els preus de les opcions siguin coherents i reflecteixin el seu valor just.

Per garantir l'absència d'arbitratge i determinar el preu just d'una opció, és essencial construir una cartera que repliqui exactament el comportament de l'actiu subjacent. Aquesta cartera, que ja s'ha mencionat anteriorment, es coneix com a *cartera replicant* i consisteix en una combinació d'actius subjacents i de bons sense risc. L'objectiu és ajustar les quantitats d'aquests dos actius perquè el valor de la cartera sigui igual al valor de l'opció en tot moment.

4.4 L'equació de Black-Scholes

Amb els conceptes fonamentals del model establerts, es pot avançar ja cap al teorema que descriu l'evolució del preu de l'opció en funció de l'actiu subjacent. La demostració d'aquest teorema ens porta a derivar l'equació que regeix el preu de les opcions en el marc de Black-Scholes i així obtenir-ne l'equació diferencial parcial.

Teorema 4.4.1. (L'equació de Black-Scholes) *Sigui S_t el preu de l'actiu subjacent a temps $t \in \mathbb{R}_+$ i $V(t, S_t)$ una funció dues vegades diferenciable que dona el valor d'una opció. Se suposa σ la volatilitat constant de l'actiu i r la taxa lliure de risc constant. Aleshores, el preu d'una opció al llarg del temps t es pot expressar a través de la següent equació diferencial parcial:*

$$r \cdot V = \frac{\partial V}{\partial t} + r \cdot S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}.$$

Demostració. L'objectiu de la demostració és arribar al resultat final, partint d'una funció general de dues variables que compleixi el Teorema 3.2.3 i comparant-la amb la cartera replicant.

En primer lloc es defineix l'actiu sense risc a partir d'una equació diferencial ordinària

$$dD_t = rD_t dt. \tag{4.4.1}$$

També s'assumeix que S_t segueix un moviment brownià geomètric

$$dS_t = \mu \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t dB_t, \tag{4.4.2}$$

amb una part determinista que presenta el creixement proporcional al preu actual a una taxa constant r i una part estocàstica que representa el component aleatori proporcional a la volatilitat del preu de l'actiu, modelat mitjançant un moviment brownià B_t.

Es denotarà $V(t, S_t)$ al preu de la opció que depén del preu de l'actiu subjacent i del temps. Per veure com evoluciona, s'aplica el Lema d'Itô i s'obté

$$dV(t, S_t) = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} d < S_t, S_t >,$$

on $d < S_t, S_t >$ és la variació quadràtica de S_t que mesura la magnitud de les fluctuacions aleatòries d'un procés estocàstic. És a dir,

$$d < S_t, S_t >= d < \sigma \cdot S_t dB_t, \sigma \cdot S_t dB_t >= \sigma^2 S_t^2 dt.$$

Substituint aquesta última igualtat i l'equació (4.4.2) s'obté

$$\begin{aligned} dV(t, S_t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} (\mu \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t dB_t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 \cdot S_t^2 dt \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu \cdot S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right] dt + \left[\sigma \cdot S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \right] dB_t \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Per descartar l'arbitratge, es considera una estratègia de negociació d'autofinançament que produeixi el mateix benefici que el derivat i en la qual en cada moment t la cartera es defineixi amb l'equació

$$\Pi_t = \Delta_t S_t + \beta_t D_t \tag{4.4.4}$$

on Δ_t és la quantitat d'actiu subjacent i β_t és la quantitat invertida en l'actiu sense risc. S'ajustarà Δ_t i β_t de forma que la cartera pugui replicar el valor de l'opció i elimini el risc estocàstic dB_t. Es pren, doncs, el canvi en la cartera

$$d\Pi_t = \Delta_t dS_t + \beta_t dD_t = \Delta_t(\mu \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t dB_t) + \beta_t(r \cdot D_t dt)$$

$$= [\Delta_t \mu S_t + \beta_t r D_t]dt + [\Delta_t \sigma S_t]dB_t,$$

que permet equiparar els termes deterministes i aleatoris de la cartera amb els de l'equació de l'opció (4.4.3) obtenint

$$\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S_t},$$

$$\beta_t r D_t = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}.$$

Prenent (4.4.4) i tenint en compte que Π_t i V_t han de tenir la mateixa dinàmica sigui quin sigui el temps t es té

$$V_t = \Pi_t = \Delta_t S_t + \beta_t D_t. \tag{4.4.5}$$

Multiplicant aquesta expressió per r,

$$r \cdot V_t = r \cdot \Delta_t S_t + r \cdot \beta_t D_t,$$

permet substituir els valors de Δ_t i $\beta_t r D_t$ directament, obtenint l'equació diferencial parcial de Black-Scholes

$$rV = \frac{\partial V}{\partial t} + r \cdot S_t \cdot \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}.$$

□

Aquesta equació permet calcular el preu teòric d'una opció sense dependre de suposicions subjectives sobre el comportament futur del mercat.

A part de la construcció de la cartera replicant, també es pot aprofundir en la seva unicitat.

Unicitat de la cartera replicant

Proposició 4.4.2. *Sota el supòsit d'absència d'arbitratge i seguint les mateixes condicions que en el Teorema 4.4.1, existeix una única combinació de Δ_t i β_t que pot replicar el preu d'una opció en qualsevol moment t.*

Demostració. Se suposa l'existència de dues carteres replicants del preu d'una mateixa opció en el mateix instant de temps t

$$\Pi_t^1 = \Delta_t^1 S_t + \beta_t^1 D_t$$

$$\Pi_t^2 = \Delta_t^2 S_t + \beta_t^2 D_t$$

Se suposa $\Delta_t^1 \neq \Delta_t^2$ i $\beta_t^1 \neq \beta_t^2$ i es busca una contradicció per tal de concloure la igualtat entre Π_t^1 i Π_t^2.

Es considera la diferència entre les dues carteres

$$\Pi_t^1 - \Pi_t^2 = (\Delta_t^1 - \Delta_t^2)S_t + (\beta_t^1 - \beta_t^2)D_t.$$

L'evolució en el temps d'aquesta diferència ve donada per la derivada

$$d(\Pi_t^1 - \Pi_t^2) = (\Delta_t^1 - \Delta_t^2)dS_t + (\beta_t^1 - \beta_t^2)dD_t.$$

Substituint les equacions (4.4.1) i (4.4.2), s'obté

$$d(\Pi_t^1 - \Pi_t^2) = (\Delta_t^1 - \Delta_t^2)(r \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t dB_t) + (\beta_t^1 - \beta_t^2) r D_t dt$$

- Si $\Delta_t^1 \neq \Delta_t^2$, el terme $(\Delta_t^1 - \Delta_t^2)\sigma \cdot S_t dB_t$ és no nul i, per tant, existeix una component aleatòria que comporta risc.
- Si $\beta_t^1 \neq \beta_t^2$, el terme $(\beta_t^1 - \beta_t^2) r D_t dt$ no és zero, el que comporta una diferència determinista en els rendiments d'ambdues carteres, és a dir, evolucionen de manera diferent i els inversors podrien construir una estratègia d'arbitratge obtenint benefici sense risc.

La contradicció a la que s'arriba és, per una banda, la violació del supòsit d'absència d'arbitratge i, per altra banda, la inconsistència en la estratègia de replicació. El que conclou que la cartera replicant és única. $\square$

Fórmules de Black-Scholes per a opcions Call i Put

Un cop demostrada l'equació de Black-Scholes i la seva unicitat, és possible obtenir una solució analítica per a opcions europees. Aquesta solució proporciona una fórmula explícita per al preu de l'opció tant en el cas de compra (*call*) com en el cas de venda (*put*).

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2),$$

$$P(t, S_t) = e^{-r(T-t)} K N(-d_2) - S_t N(-d_1),$$

on

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

és la funció de distribució de la normal estàndard i d_1 i d_2 són paràmetres calculats a partir de S_t, K (preu d'exercici de l'opció), r, σ i T (temps de venciment):

$$d_1 = \frac{ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Relació entre opcions *call* i *put*: Paritat *Put-Call*

A partir de les fórmules analítiques, és possible establir una relació fonamental entre tots dos preus, coneguda com la Paritat *Put-Call*. Aquesta relació assegura la consistència dels preus de les opcions a mercats eficients i sense arbitratge. S'expressa com

$$C(t, S_t) + K \cdot e^{-rt} = S_t + P(t, S_t),$$

on $K \cdot e^{-rt}$ és el valor actualitzat del preu d'exercici. Aquests fluxos de caixa futurs s'actualitzen utilitzant la taxa de descompte r, i com més gran sigui, menor serà el valor present d'aquests fluxos.

Reorganitzant l'equació, el preu d'una opció de venda europea es pot obtenir mitjançant la fórmula

$$P(t, S_t) = C(t, S_t) + K \cdot e^{-rt} - S_t,$$

si es coneix el preu de l'opció de compra europea $C(t, S_t)$.

4.5 Limitacions

El model tractat en aquest capítol va revolucionar el preu de les opcions a tot el món gràcies a la seva senzilla aplicació. Tanmateix, el seu desenvolupament purament teòric limita la seva capacitat per produir prediccions precises quan es prova empíricament.

Una de les principals mancances del model és la manera com es calcula la volatilitat, fet que pot portar a prediccions imprecises. En la pràctica, la volatilitat depèn de factors com l'oferta i la demanda, cosa que ha motivat el desenvolupament de models més avançats, com la volatilitat implícita. A més, l'equació de Black-Scholes només és aplicable a opcions europees, ja que no considera la possibilitat d'exercir l'opció abans del venciment, com és el cas de les opcions americanes. Finalment, el model assumeix que els preus dels actius varien de manera contínua, sense capturar els salts bruscos, una suposició que no resulta adequada en mercats amb alta volatilitat o esdeveniments inesperats.

En resum, tot i que el model presenta certes deficiències quan es tracta de predir amb precisió el preu de les opcions de forma pràctica, la intuïció que el sustenta continua sent rellevant dins de la teoria. Així, constitueix un punt de referència fonamental per avaluar i comparar models més sofisticats.

4.6 Volatilitat implícita

Aquest concepte s'introdueix com una correcció pràctica al model que s'ha tractat al llarg de tot el capítol i permetrà una millor aproximació dels preus observats en el mercat. Tot i que el model de Black-Scholes assumeix una volatilitat constant, l'experiència del mercat demostra que aquesta varia segons diferents factors, com el preu d'exercici i el temps a venciment. Per això és necessari definir la volatilitat implícita.

Es segueix assumint que S_t, el preu de l'actiu subjacent, es comporta com un moviment brownià geomètric amb taxa d'interès i volatilitat constant, K el preu d'exercici i T el temps fins al venciment.

Es reanomena

$$C_{BS}(S_t, K, T, r, \sigma) := S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2) \tag{4.6.1}$$

i, per qualsevol preu de mercat d'una opció de compra d'estil europeu $C_M(S_t, K, T)$, existeix una única[2] solució $\sigma_i(K, T)$ tal que

$$C_{BS}(S_t, K, T, \sigma_i(K, T)) = C_M(S_t, K, T), \tag{4.6.2}$$

on $\sigma_i(K, T)$ és la *volatilitat implícita.*

Segons el model de Black-Scholes, la volatilitat implícita es mantindria constant amb $\sigma_i(K, T) = \sigma$, una suposició que no resulta realista a la pràctica. En realitat, la volatilitat depèn de diversos factors econòmics i financers, com ara les condicions macroeconòmiques i el comportament dels inversors. A més, els preus dels actius no segueixen un camí completament previsible i poden experimentar canvis sobtats, la qual cosa provoca que la volatilitat sigui variable al llarg del temps.

És per això que per tal d'obtenir les solucions de (4.6.2) s'utilitzen mètodes numèrics com el mètode de la secant, el de la bisecció o el de Newton-Raphson. Tot i que no sempre convergeix i el càlcul de les derivades pot arribar a ser costós, Newton-Raphson és el més eficient quan es compleixen les condicions per aplicar-lo.

Aquest mètode iteratiu, permetrà aproximar la solució d'una equació del tipus

$$C_{BS}(S_t, K, T, \sigma_i) - C_M(S_t, K, T) = 0. \tag{4.6.3}$$

4.6.1 Mètodes Numèrics: Newton-Raphson

Mètode iteratiu que permet obtenir les arrels d'una funció f, que són solucions de l'equació

$$f(x) = 0,$$

on $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció $\mathcal{C}^1(U)$, (és a dir diferenciable amb continuïtat) on U és un conjunt obert.

Se suposa que té un zero $\bar{x}$ ($f(\bar{x}) = 0$) i es fa el desenvolupament de Taylor de f al voltant d'un $x^{(k)}$ proper a $\bar{x}$ obtenint

$$0 = f(\bar{x}) \approx f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\bar{x} - x^{(k)}).$$

Com que $x^{(k)}$ està a prop de $\bar{x}$, els termes $\frac{f''(x^{(k)})}{2!}(\bar{x} - x^{(k)})^2 + ...$ es poden ignorar.

Resolent el sistema $0 = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$ en x, s'obté una nova aproximació de $\bar{x}$,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [f'(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)}), \quad \forall k \geq 0.$$

D'aquí es dedueix el següent mètode iteratiu, anomenat Mètode de Newton-Raphson. Donat $x^{(0)} \in U$ es defineix $x^{(k+1)}$, per a $k = 0, 1, 2, ...$ com

[2]Suposant que no hi ha arbitratge, la fórmula de Black Scholes és continua i creixent en σ (es comprovarà més endavant).

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Com es pot observar, aquest mètode presenta una limitació important: requereix conèixer la derivada de f. Si aquesta és propera a zero, el mètode pot no convergir, i si és exactament zero, el mètode no es pot aplicar.

4.6.2 La superfície de la volatilitat

Aplicant el mètode de Newton-Raphson (o altres mètodes numèrics) a l'equació (4.6.3), es calcula la volatilitat implícita per cada combinació de $C_M(S_t, K, T)$, K i T. Cadascun d'aquests valors es converteix en un punt de la *superfície de la volatilitat implícita*, que es representa a través d'un gràfic tridimensional on l'eix vertical dona el valor de la volatilitat implícita per a cada combinació dels paràmetres K i T. Així doncs, resolent l'equació per a totes les opcions disponibles del mercat, es construeix aquesta superfície.

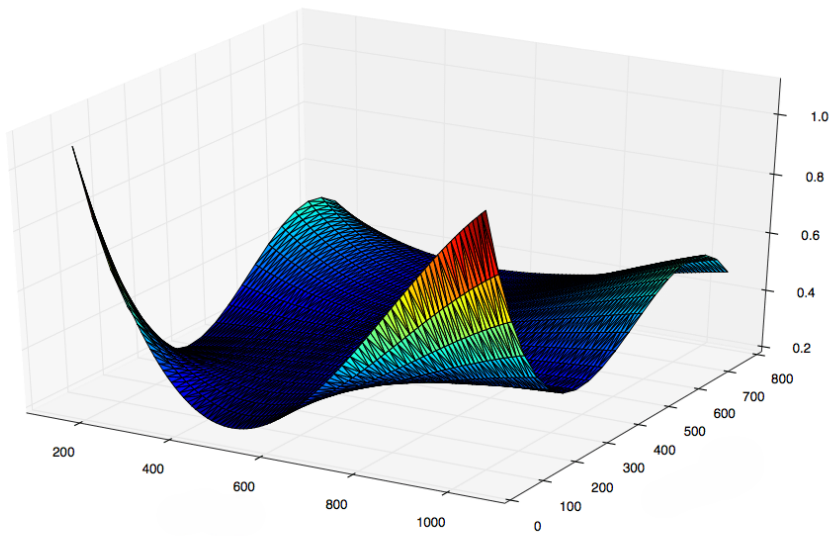

Figura 4.3: Exemple de superfície de la volatilitat [21].

Depenent de la relació que tingui el preu d'exercici K amb la volatilitat implícita, es poden observar dues formes gràfiques principals: el *somriure de la volatilitat* i la *inclinació de la volatilitat*. Matemàticament, es pot veure com un pla de la superfície de volatilitat per a un temps fix $T = c$.

El somriure de la volatilitat

Va aparèixer per primer cop en les opcions valorades després del crac del 1987. Abans d'això, no es detectaven aquests tipus de comportaments en els mercats dels EUA, fet que reflecteix la confiança i la gran acceptació que es tenia del model de Black-Scholes, que suposava una volatilitat constant en el temps. Aquest punt d'inflexió, va fer que els *traders* es donessin compte que els esdeveniments extrems eren possibles i que era necessari tenir-los en compte en la valoració de les opcions.

A la figura 4.4 es pot observar que la volatilitat implícita augmenta quan l'opció és OTM o ITM, en comparació amb quan és ATM. Això implica que les opcions amb menor

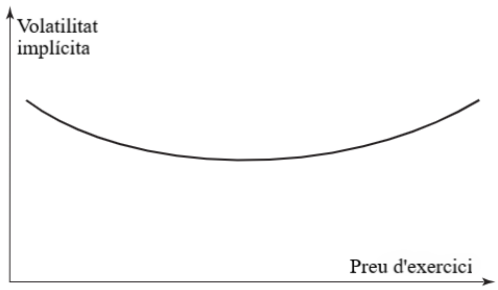

Figura 4.4: Volatilitat somrient [15].

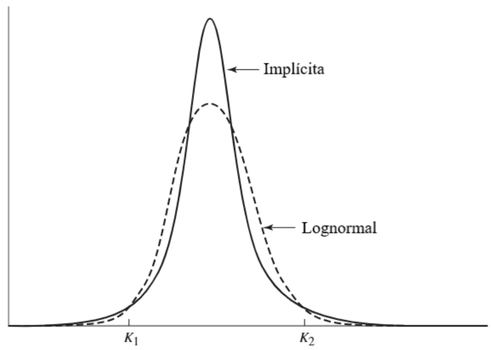

Figura 4.5: Distribució de la volatilitat implícita comparada amb la distribució lognormal [15].

volatilitat implícita són aquelles amb el preu d'exercici al voltant de l'ATM. L'existència d'aquesta forma gràfica indica que les opcions OTM i ITM tenen una demanda més alta que les ATM.

A la imatge de la dreta, en canvi, es compara la distribució lognormal, assumida en el model Black-Scholes, amb la distribució implícita obtinguda a partir dels preus del mercat. En el cas d'aquesta última, s'observen cues més pesades que les de la distribució lognormal, és a dir, que s'estenen més enllà. Això implica que la probabilitat que es produeixin esdeveniments extrems és més alta del que s'esperaria en el cas de la distribució lognormal.

Aquest tipus de gràfiques s'observen principalment en opcions sobre actius amb un nivell elevat de risc en períodes d'alta incertesa econòmica, com els actius volàtils o poc líquids. A més, la forma del somriure de la volatilitat pot variar en funció de la dinàmica de l'oferta i la demanda del mercat, donant lloc a deformitats.

La inclinació de la volatilitat

El principal motiu de l'existència d'aquest gràfic són les expectatives dels participants del mercat. A diferència de la corba simètrica anterior, aquesta té una tendència predominant en una direcció específica.

Pot prendre dues formes en funció del comportament del mercat i les opcions involucrades:

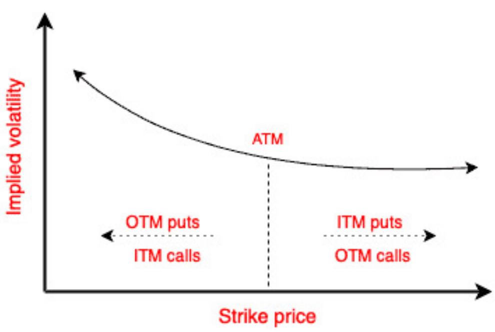

Figura 4.6: Volatilitat amb pendent negativa [18].

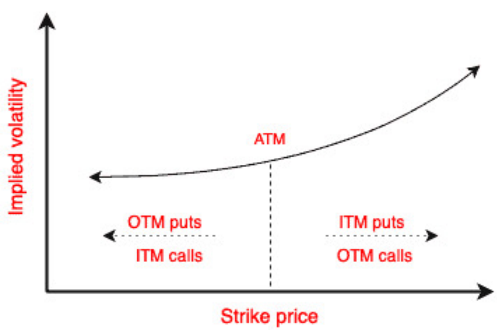

Figura 4.7: Volatilitat amb pendent positiva [18].

La figura 4.6 mostra una gràfica descendent anomenada *reversed skew* o *skew* negativa. Sol descriure mercats alcistes on els inversors esperen que els preus pugin.

- *OTM puts*: Permeten als compradors vendre l'actiu subjacent a un preu d'exercici més alt que el seu valor de mercat, servint de protecció en el cas de caiguda dels preus. Davant crisis econòmiques, els inversors prefereixen comprar opcions com a forma de protecció, augmentant la demanda i, per tant, la seva volatilitat implícita.
- *ITM calls*: Ja tenen valor perquè el preu d'exercici és inferior al preu de mercat, oferint beneficis immediats als compradors. Com que tenen un alt potencial de rendiment, genera una demanda major que, al seu temps, implica una volatilitat implícita més alta.
- *OTM calls*: Estan lluny de generar beneficis immediats ja que el preu del mercat hauria de pujar significativament per sobre del preu d'exercici. Com que aquestes pujades són menys probables, pels inversors són poc valuoses i la demanda és baixa, això redueix la seva volatilitat implícita.
- *ITM puts*: El valor intrínsec d'aquestes vendes disminueix degut a la poca diferència que existeix entre el preu d'exercici i el preu de mercat. Això provoca una caiguda de la seva demanda i de la seva volatilitat implícita.

En canvi, la figura de la dreta mostra una gràfica ascendent, també coneguda com a *forward skew* o *skew positiva.* Es troba principalment en mercats de matèries primeres on es preveu una pujada de preus.

- *OTM puts*: En moments de forta demanda o tensions en la producció, els preus de les matèries primeres es solen moure cap a munt. Per això, aquestes opcions tenen poc valor i una volatilitat implícita baixa.
- *ITM calls*: Al ser el preu de mercat superior al preu d'exercici, ja són opcions amb un valor considerable. La poca possibilitat de grans caigudes en els preus, no afecta excessivament a les opcions de compra, és per això que no solen experimentar augments de la demanda ni en la volatilitat implícita.
- *OTM calls*: Les matèries primeres solen experimentar pujades de preu en situacions d'escassetat o d'alta demanda. Els inversors compren aquest tipus d'opcions per tal de protegir-se o beneficiar-se d'aquest possible augment. Aquesta demanda creixent genera una pujada de la seva volatilitat implícita.
- *ITM puts*: Ofereixen protecció davant possibles caigudes dels preus de les matèries primeres. En períodes d'incertesa econòmica, els inversors les utilitzen per cobrir-se contra fluctuacions desfavorables, cosa que augmenta la seva demanda i la seva volatilitat implícita.

El crac del 1987, esdeveniment que s'ha mencionat anteriorment en l'anàlisi del somriure de la volatilitat, va provocar una important inclinació negativa de la corba de la volatilitat. Davant l'augment sobtat de la incertesa i el risc de caigudes addicionals dels mercats, molts inversors van precipitar-se a comprar opcions OTM *put* per protegir-se de futures pèrdues, incrementant notablement la seva demanda i, conseqüentment, la seva volatilitat implícita.

Conclusions

En aquesta secció final, faig una revisió global del projecte i comento alguns dels resultats d'una manera més personal i propera que al llarg del desenvolupament formal de la memòria.

D'entrada, el moviment brownià és un tema amb múltiples vessants, tant teòriques com aplicades. La seva anàlisi m'ha permès recuperar conceptes ja treballats en assignatures com Probabilitats i Estadística, alhora que m'ha donat l'oportunitat d'explorar àmbits nous per a mi, com els processos estocàstics i el càlcul d'Itô. Ha estat interessant veure com aquests fonaments s'integren per construir una base sòlida per al model de Black-Scholes.

Pel que fa al càlcul estocàstic, tot i que només he pogut introduir-ne les bases, ha estat suficient per entendre el seu paper en la modelització financera, especialment en el model de Black-Scholes. Fins ara, només havia treballat amb el càlcul clàssic durant la carrera, i descobrir aquesta extensió matemàtica ha estat interessant i enriquidor.

D'altra banda, el model de Black-Scholes m'ha permès aprofundir en coneixements adquirits a l'assignatura de Direcció Financera, especialment pel que fa a la valoració d'opcions, amb un nivell de detall i rigor que no havia vist fins ara. Aspectes com la demostració del teorema de Black-Scholes, la unicitat de la cartera replicant o la relació entre les suposicions del model i les fórmules finals, han estat claus per poder exposar les limitacions del model.

En definitiva, durant el desenvolupament del treball, he tingut la sensació d'estar explorant només una petita part d'un camp molt ampli. Tot i així, he pogut apreciar com les matemàtiques, sovint considerades abstractes, poden proporcionar respostes útils a qüestions del món real.

Espero que aquest treball hagi permès al lector captar tant la profunditat teòrica com l'interès pràctic que ofereix el moviment brownià en el camp de les finances.

Bibliografia

[1] Corcuera, J. M.: *Apunts de l'assignatura Probabilitats*, Grau de Matemàtiques, Facultat de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona.

[2] Sanz, M.: *Apunts de l'assignatura Probabilitats*, Grau de Matemàtiques, Facultat de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, 1996.

[3] Mandelbrot, B.; Hudson, R. L.: *Fractales y Finanzas: Una aproximación matemática a los mercados, arriesgar, perder y ganar*, Traducció d'Ambrosio García Leal, Tusquets Editores, Primera edició, 2006.

[4] Sanz, M.: *An Introduction to Stochastic Calculus*, Facultat de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Desembre 22, 2020.

[5] Hida, T.: *Brownian Motion*, Springer-Verlag, 1980.

[6] Karatzas, I.; Shreve, S.E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1991.

[7] Brzeźniak, Z.; Zastawniak, T.: *Basic Stochastic Processes*, Springer-Verlag London, 1999.

[8] Shreve, S. E.: *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004.

[9] Nualart, D.: *The Malliavin Calculus and Related Topics*, 2nd ed., Springer, 2006.

[10] Capinski, M.; Kopp E.; Traple J.: *Stochastic Calculus for Finance*, Cambridge University Press, 2012.

[11] Kuo, H. H.: *Introduction to Stochastic Integration*, Springer, 2006.

[12] Yoo, Y.: *Stochastic calculus and Black-Scholes model*, Disponible a: `https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Yoo.pdf`.

[13] Capinski, M.; Ekke, T.: *The Black-Scholes Model*, Cambridge University Press, 2012.

[14] Shiryayev, A.: *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific, 1999.

[15] Hull, J.: *Options, Futures, and Other Derivatives*, [Il·lustració]. Pearson 9th Edition, 2014.

[16] Chen, R.: *The Black-Scholes Option Pricing Model*, November 20, 2020.

[17] Nie, J.: *Random Walks, Brownian Motions, and the Black-Scholes Equation*, Master's thesis, California State Polytechnic University, Pomona, 2021.

[18] Trading Interview: *Implied Volatility,* [Il·lustració]. Disponible a: https://www.tradinginterview.com/interview-questions/forward-skew/.

[19] Burkardt, J.: *Random walks,* [Il·lustració]. Disponible a: https://www.statsref.com/HTML/random_walks.html#randomtreewalks.

[20] Millo, F.: *Brownian motion and Einstein model,* [Il·lustració]. Disponible a: https://www.researchgate.net/publication/342851703_Brownian_motion_and_Einstein_model.

[21] marketXLS: *Volatility Surface Chart (It's Impact On The Profitability Of Option Trades),* [Il·lustració]. Disponible a: https://marketxls.com/implied-volatility-surface-chart.