ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA Y DIDACTICA GENETICA

NUÑEZ ESPALLARGAS, J. Mª.
Escuela Universitaria de Magisterio de Barcelona.

SUMMARY

In this article, after discussing basic directions of the so-called genetical didactics, we speak in favour of a type of elementary geometry teaching which can balance strictly formal requirements with psychopedagogical ones. The important contributions which genetical didactics may offer to that teaching, whenever applied in a critical realistic way, are also outlined.

1. RASGOS PRINCIPALES DE LA DIDACTICA GENETICA

Es interesante señalar el hecho de que Jean Piaget, conocido en general por sus dotes de polígrafo y en particular por sus trabajos sobre psicología infantil, ha dedicado relativamente poco espacio impreso a explicitar sus ideas pedagógicas (1). Pero de sus concienzudos estudios sobre el desarrollo del pensamiento infantil se pueden deducir, y así lo han hecho diversos autores más o menos próximos a su órbita, numerosas e interesantes implicaciones de carácter pedagógico (2). Estas aportaciones a la obra piagetiana, por estar basadas en la psicología del niño, han llegado a constituir una auténtica doctrina de «didáctica psicológica», que es frecuentemente denominada *didáctica genética*, porque «no se limita a estudiar las reacciones en un período aislado de la infancia, sino que analiza, desde su nacimiento, la formación de los conceptos y las operaciones en la mente del niño» (3).

Para centrar la cuestión y sin pretender una descripción detallada de los argumentos esgrimidos por la didáctica genética, señalaremos en las líneas siguientes sus rasgos más característicos.

El primer aspecto destacable de una didáctica basada en las teorías evolutivas de Piaget es el constante recurso a la acción como engendradora de pensamiento. En efecto, recordemos que para Piaget la mente no es receptáculo pasivo, sino un sistema activo, organizativo y dinámico. Cada sistema de estímulos que nos llega del exterior debe pasar por el filtro de unas estructuras existentes, y al mismo tiempo ese paso modifica estas estructuras haciéndolas más estables en virtud de los procesos de asimilación y de acomodación. Las acciones que en el niño menor de dos años son exclusivamente exteriorizadas, posteriormente a esta edad, se interiorizan, primero como representaciones de objetos y hechos concretos, y finalmente, se organizan dando lugar al entramado lógico que caracteriza el pensamiento del adulto (4).

Ahora bien, las acciones engendradoras de conocimientos no se producen al azar, sino que generalmente estas acciones están dirigidas y tienen un propósito u objeto. Como es lógico, cuantas más ideas tiene el niño a su disposición, más preguntas se puede plantear y, en última instancia, más relaciones puede establecer. Es fundamental, por tanto, que el niño no sólo pueda manipular física y mentalmente los objetos de su entorno, sino que el educador le ponga en contacto con el mayor número de ellos, para estimular su curiosidad e incrementar así sus ideas.

Según la didáctica genética la labor del maestro deberá ir más allá que el simple dejar al niño en libertad para explorar y manipular y el ofrecer y presentar nuevos elementos de estímulo o de juego. Recordemos en este sentido que, para Piaget, cada encuentro con el mundo real modifica de alguna manera la estructura cognoscitiva. Estos cambios estructurales parecen depender de la creación de un estado en el niño, que Phillips llama de «conflicto cognoscitivo» (5), y también de los esfuerzos del niño para resolver este conflicto y restablecer de nuevo el equilibrio. Es importante observar que este conflicto cognoscitivo debe ofrecer una discrepancia óptima entre los estímulos ambientales y las estructuras cognoscitivas existentes, pues si la congruencia es total entre estímulo y estructura entonces no se produce la acomodación deseada y si, por el contrario, no encaja en absoluto el estímulo en la estructura, entonces no se asimila. Encontrar las cuestiones que planteen el conflicto cognoscitivo adecuado a la preparación y al nivel evolutivo del niño es la dificultad máxima a la que, desde el enfoque de la didáctica genética, se han de enfrentar los enseñantes.

A veces se ha querido resumir el mensaje de la pedagogía genética con la máxima: «el recurso a la acción» pero, como fácilmente se infiere de lo expuesto hasta aquí, esta frase no recoge la complejidad que encierra su verdadera puesta en práctica en las aulas. Según palabras del propio Piaget, «recurrir a la acción, no conduce del todo a un simple empirismo, prepara la deducción formal ulterior, con tal que se tenga presente que la acción, bien conducida, puede ser operatoria, y que la formalización más adelantada lo es también» (6).

Conviene igualmente señalar, que algunos autores han interpretado mal el alcance de esta metodología y la han adscrito fundamentalmente a los primeros años de la vida del niño; pues, si bien es cierto que es en el llamado período sensomotor donde las aportaciones de Piaget son más innovadoras, el «recurso a la acción» no debe entenderse literalmente como una constricción a la manipulación física de los objetos para así poder captar sus relaciones, sino que esta acción deberá tender gradualmente a ser mental, buscando entonces las relaciones, en el período de las operaciones concretas, a través preferentemente de la manipulación sobre representaciones de objetos y, en la etapa de las operaciones formales, en la manipulación ya exclusivamente mental sobre representaciones de objetos y sobre las propias relaciones.

No sería mínimamente completa esta breve descripción, si no hiciéramos alusión a que, junto al grupo de entusiastas divulgadores de la didáctica genética, hay también un nutrido grupo de autores que mantienen una actitud crítica. Estas reservas provienen de sectores diferentes (7), pero aquí nos limitaremos sólo a mencionar la crítica más difundida y que atañe al ámbito de esta metodología, es decir, a la insuficiencia para comprender el desarrollo de los aspectos no cognoscitivos del niño y, especialmente, los aspectos socioemocionales.

2. GEOMETRIA «MODERNA» VERSUS GEOMETRIA «CLASICA»

Para comprender la situación actual de la enseñanza de la geometria conviene que contemplemos la cuestión desde sus antecedentes históricos (8).

En la época clásica, es decir, en la antigua Grecia, la geometría se apoyaba totalmente en los recursos que se derivaban de la intuición espacial; sus más importantes logros se alcanzaron al margen de la aritmética empleando instrumentos elementales de dibujo (fundamentalmente la regla y el compás). A pesar de lo limitado de estos medios la geometría griega se elevó a un grado de desarrollo notablemente superior al de cualquier otra ciencia de su época. Estableció un completo sistema de conocimientos basado en unas pocas afirmaciones apriorísticas (axiomas y postulados) de las que por puro razonamiento lógico se deducían todas las demás (teoremas). Esta construcción recogida en el siglo III antes de J.C. por Euclides en sus famosos «Elementos» constituyó prácticamente todo el bagaje geométrico disponible por la humanidad hasta el siglo XVII. En este siglo, gracias a la introducción de los sistemas de referencia y a la utilización del álgebra, aparece la llamda geometría analítica, que permitió la aplicación de las técnicas geométricas en la resolución de múltiples problemas tanto en el campo de la ciencia como en el de la técnica. De tal modo fue fructífero el maridaje entre la geometría y el álgebra, que a partir de este momento no va a cesar de acrecentarse el interés por el empleo de métodos estrictamente algebraicos en la interpretación de cuestiones y problemas geométricos. Junto a este proceso de «algebrización» de la geometría aparecen otros hechos que van a contribuir, si no a un rechazo total por parte de los matemáticos de la antigua geometría griega, sí a su progresiva marginación, arrinconándola en los estudios primarios y profesionales. Entre los hechos que provocan este cambio de actitud debemos señalar el descubrimiento de «nuevas» geometrías. Este proceso si bien se inició también en el siglo XVII con los trabajos de Desargues sobre geometría proyectiva, alcanza su culminación a lo largo del XIX con los estudios de Bolyai, Lovachevsky y Riemann sobre las geometrías no euclídeas, los de Moebius y del mismo Riemann sobre topología y con la generalización de los resultados obtenidos en el espacio ordinario de tres dimensiones que lleva a Cayley y a Grassmann a la construcción de espacios multidimensionales. Esta eclosión de la panorámica geométrica trajo consigo una preocupación, compartida por las restantes ramas de la matemática, por hallar una sólida fundamentación teórica y una estructuración que integrará todos estos avances. Por impulso esencialmente de Hilbert se sometió a un riguroso análisis formal los cimientos del edificio geométrico para adecuarlo a las exigencias contemporáneas de formalización. Y se encontró en la teoría de conjuntos desarrollada por Cantor a fines del pasado siglo una doctrina que permitía asentar sólidamente el vasto edificio matemático, así como el elemento unificador que permitía relacionar ramas tan dispares como la estadística, la geometría, el álgebra y el análisis. Esta labor de estructuración fue llevada a cabo fundamentalmente por Bourbaki.

Por las implicaciones didácticas que ha tenido debemos señalar aquí el modelo aleborado por Klein en 1872 para relacionar las distintas geometrías. Según este modelo las geometrías se pueden clasificar a partir de los grupos de transformaciones, entendiendo por transformación a toda aplicación biyectiva de los puntos de un espacio en si mismo. Así una geometría es básicamente un conjunto de puntos de un espacio y un grupo de transformaciones definido sobre él. En el espacio ordinario de tres dimensiones se consideran normalmente las geometrías siguientes: euclídea, equiforme, afín, proyectiva y topológica. Por encima de las diferentes propiedades que caracterizan a cada una de estas geometrías existe un nexo que permite relacionarlas, ya que el grupo de transformaciones euclídeo está contenido como subgrupo en el equiforme, éste en el afín, éste en el proyectivo y éste en el topológico, siguiendo este orden de inclusión aproximadamente el orden histórico en que hicieron su aparición las citadas geometrías (9).

¿Cómo se refleja todo este cúmulo de acontecimientos en la enseñanza de la geometría elemental? Hasta aproximadamente mediados del presente siglo los contenidos geométricos que aparecen en los programas educativos apenas han sufrido modificaciones sustanciales siguiendo aún casi literalmente a los «Elementos» de Euclides. Además, la enseñanza de la geometría y de la aritmética se contemplan por separado.

En la década de los 50 y por distintas razones, se levantaron voces pidiendo una profunda revisión de la enseñanza de la matemática para adaptarla a los espectaculares progresos que hemos comentado (10). Se acusó a la geometría clásica de ser excesivamente descriptiva y de carecer del necesario rigor sus demostraciones, así como, de apoyarse desmesuradamente en la intuición visual. Para la renovación se propugnó una orientación que tuviera en cuenta los trabajos llevados a cabo por los bourbakistas. Esta orientación, bajo el epígrafe de matemática «moderna», insiste más en los aspectos formales y estructurales que en los meramente intuitivos y prácticos. La teoría de conjuntos se introduce en la escuela como lenguaje básico y unificador de la aritmética y de la geometría.

En nuestro país este movimiento de reforma no ha llegado a imponerse totalmente, bien por la falta de comprensión por parte de los enseñantes de las razones que lo motivaron, bien por la escasa adaptación a la realidad escolar o bien por la simple inercia del sistema educativo. No obstante, hoy en día, que ya pueden contrastarse las experiencias llevadas a cabo en los países o en los centros impulsores de la matemática moderna, tiende a extenderse la opinión de que hay muchas cuestiones que requieren una revisión.

En lo que se refiere a la enseñanza de la geometría en las escuelas primarias las críticas que la matemática moderna hacía de la geometría clásica deben matizarse. Es totalmente cierto que las exigencias de rigor en la matemática actual son mucho más estrictas que lo fueron en el mundo griego. Pero, también es verdad, que la misma noción de rigor es relativa o, como señala René Thom, «el rigor es una propiedad local del razonamiento» (11). En cuanto al exceso de intuición espacial que caracteriza a la geometría clásica hay que reconocer que el mero recurso a la intuición puede inducir a errores que una construcción axiomática elimina totalmente. Pero recordemos, que, por una parte, sin esa «intuición» difícilmente se hubieran realizado notables descubrimientos matemáticos (12) y, por otra, que, según ha demostrado ampliamente la psicopedagogía, el razonamiento del niño no es el del adulto y que antes de basarse en operaciones con relaciones el niño maneja representaciones de los objetos y, aún antes, la inteligencia sensomotora se construye manipulando los objetos. Por lo tanto, el niño debe pasar necesariamente una etapa en la cual, no sólo es necesario el recurso a la intuición espacial para comprender las relaciones de los objetos, sino que también es imprescindible esa etapa para permitir desarrollar más adelante la inteligencia propiamente operatoria.

3. LA DIDACTICA GENETICA Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA

Ante esta polémica, ¿qué postura defiende la didáctica genética? Si nos fijamos en Piaget, tenemos pruebas de que no duda en decantarse hacia los postulados preconizados por la matemática moderna: «Resulta totalmente posible y deseable la realización de una profunda reforma de la enseñanza en la didáctica de la matemática en la dirección de las matemáticas modernas» (13). Las razones de esta actitud deben buscarse en la evidente influencia que los bourbakistas tuvieron sobre las teorías piagetianas (14). El mismo Piaget reconoce «que existe un cierto parentesco entre las tres estructuras fundamentales o 'estructuras madres' de Bourbaki y las estructuras más elementales que se elaboran en el curso del desarrollo de las operaciones lógico-matemáticas en el niño» (15).

Ciñéndonos más a la geometría, podemos constatar que Piaget conoce la clasificación de Klein y, no sólo la acepta en su totalidad (16), sino que descubre al estudiar el desarrollo cognoscitivo del niño que la evolución de su pensamiento espacial recorre una trayectoria semejante en cuanto a la creación de los diversos espacios geométricos: «Si estudiamos la geometría espontánea del niño nos damos cuenta de que la formación de las intuiciones y de las operaciones no sigue en absoluto el orden histórico (métrica euclídea, seguida de los espacios proyectivos y, finalmente, las estructuras topológicas), sino que está mucho más cerca del orden teórico: Las primeras intuiciones tienen un carácter topológico para, sólo más tarde, constituirse conjuntamente y apoyándose mútuamente las estructuras proyectivas y la métrica euclídea del espacio» (17).

Estos estudios de Piaget impulsaron la creación de una didáctica de la geometría basada en los grupos de transformaciones (18). Pero esta didática, a pesar de sus fundamentos psicológicos, tiene algunos inconvenientes que sus propagadores no han detectado, llevados quizás, por el entusiasmo que deriva de la indudable belleza y simplicidad del modelo kleiniano. Esencialmente señalaremos la difícil barrera que hay que superar, si tras los juegos y ejercicios iniciales con transformaciones topológicas, afines y proyectivas, se pretende seguir con una construcción geométrica que pueda enlazar de un modo natural con los contenidos de la enseñanza secundaria, centrados claramente en la geometría analítica.

La preferencia de Piaget, que hemos comentado, por la metodología preconizada por el movimiento de la matemática moderna parece poco consecuente con sus teorías psicológicas, ya que, en el caso de la enseñanza de la geometría elemental, se encuentra más próxima a su doctrina evolutiva una metodología didáctica empírica y creativa con una apoyatura inicial en la intuición espacial, que no una didáctica con un punto de mira excesivamente fijado en los aspectos formales y estructurales, que deben constituir precisamente el último eslabón del proceso evolutivo seguido por el pensamiento del niño. Es de esperar que los trabajos de la didáctica genética sepan adaptar de un modo más crítico y realista las teorías evolutivas de Piaget a la enseñanza de la geometría que requiere nuestra sociedad. Y especialmente ahora, que son muchos los autores que piden volver a la inclusión de los contenidos de la geometría clásica en los programas de la enseñanza primaria: «Así pues la tendencia actual de sustituir la geometría por el álgebra es totalmente nefasta desde un punto de vista pedagógico, y debería ser invertida» (19). Aunque esto no implica que debe enseñarse la geometría con métodos clásicos, es decir, presentando al niño una lista de postulados y teoremas con sus respectivas demostraciones para que los memorice. Se trata de hacer una enseñanza de la geometría menos memorística y más creativa, entroncada con problemas cercanos al entorno del niño, o, haciendo una paráfrasis del título de un conocido artículo de Freudenthal, hacer una «enseñanza moderna de la geometría antes que una enseñanza de la geometría moderna» (20). Y en esta orientación, las aportaciones metodológicas de la didáctica genética tienen su verdadero campo de aplicación, pues las posibilidades por parte del niño de manipular tanto física como mentalmente las figuras geométricas y sus propiedades son prácticamente ilimitadas, igual que los grados de dificultad con los que pueden plantearse problemas y actividades (21). De acuerdo con los descubrimientos de la psicología evolutiva en los primeros años de escolaridad, al predominar la construcción del espacio sensomotor, las actividades que se propongan al niño deben tener en cuenta este hecho e insistir antes en cuestiones de carácter topológico y proyectivo que en las propiamente euclídeas. Pero cuando el niño entre en la etapa de las operaciones concretas las posibilidades que ofrecen los contenidos son extraordinarias y constituyen, además, el puente imprescindible para la introducción en la enseñanza secundaria de la geometría analítica.

Notas

(1) Junto a una serie de artículos dispersos la obra en la que expone quizás más extensamente sus ideas pedagógicas es PIAGET, J. *Educación e instrucción*. Buenos Aires, Proteo, 1968.

(2) Véase AEBLI, H.: *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Buenos Aires, Kapelusz, 1973 (8ª imp.); FURTH, H.G.: *Las ideas de Piaget. Su aplicación en el aula*. Buenos Aires, Kapelusz, 1974 (2ª imp.) y FURTH, H.G. — WACHS, H.: *La teoría de Piaget en la práctica*. Buenos Aires, Kapelusz, 1978.

(3) AEBLI, H.: *Ob. cit.* Pág. 4.

(4) Véase PIAGET, J.: *Introducción a la epistemología genética. 1 El pensamiento matemático*. Buenos Aires, Paidos, 1975

(5) PHILLIPS, J.L.: *Los orígenes del intelecto según Piaget*. Barcelona, Fontanella, 1977, Pág. 145.

(6) Citado por CASTELNUOVO, E.: *Didáctica de la matemática moderna*. México, Trillas, 1979 (4ª imp.). Pág. 28.

(7) Véase un análisis crítico desde un enfoque filosófico en PALOP, P. *Epistemología genética y filosofía*. Barcelona, Ariel, 1981 y unas interesantes acotaciones a la metodología experimental en LOVELL, K.: *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en el niño*. Madrid, Morata, 1977. Pág. 122.

(8) Véase la antología de textos seleccionada por NEWMANN, J.R.: *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Vol. I. Barcelona, Grijalbo, 1976.

(9) Véase una descripción elemental de la clasificación de Klein en ESTEVE, F.: «Sobre l'ensenyament de la geometria». *Perspectiva Escolar*. Barcelona. Nº 14. Págs. 9-15 y en LOVELL, K.: *Ob. cit.* Págs. 116 y ss..

(10) Algunas de estas razones se analizan en KLINE, M.: *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid, Siglo XXI, 1976.

(11) THOM, R.: «¿Son las matemáticas «modernas» un error pedagógico y filosófico?». *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid, Alianza Editorial, 1978. Pág. 122.

(12) Véase LAKATOS, I.: *Pruebas y refutaciones. La lógica del descrubrimiento matemático*. Madrid, Alianza Editorial, 1978.

(13) PIAGET, J.: «La iniciación matemática, las matemáticas modernas y la psicología del niño». *La enseñanza de la matemática moderna*. Madrid, Alianza Editorial, 1978. Pág. 184.

(14) Varios de los miembros de Bourbaki fueron íntimos amigos de Piaget, especialmente Dieudonné, uno de los fundadores del grupo.

(15) PIAGET, J. y otros: *Psicología, lógica y comunicación*. Buenos Aires, Nueva Visión, 1970. Pág. 64.

(16) Una buena guía de las ideas geométricas de Piaget es HOLLOWAY, G.: *Concepción de la geometría en el niño según Piaget*. Buenos Aires, Paidos, 1969.

(17) PIAGET, J.: *Art. cit.* Págs. 183 y s..

(18) Véase DIENES, Z.P. - GOLDING, E.: *La geometría proyectiva y afín*. Vol. 2: *Geometría euclidiana*. Vol. 3: *Grupos y coordenadas*. Barcelona, Teide, 1976 (3ª.).

(19) El artículo al que se hace referencia es FREUDENTHAL, H.: «¿Enseñanza de las matemáticas modernas o enseñanza moderna de las matemáticas». *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid, Alianza Editorial, 1978. Págs. 159-173.

(21) Una excelente obra que incide en esta dirección es CASTELNUOVO, E.: *La matemàtica. La geometria*. Barcelona, Ketres, 1981.