

Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

**VALORACIÓ I COBERTURA D'OPCIONS
FINANCERES. EL MODEL DISCRET DE COX-
ROSS-RUBINSTEIN I EL MODEL DE BLACK-
SCHOLES, COM A PAS AL LÍMIT DE
L'ANTERIOR**

Marc Lagunas Merino

Director: Josep Vives Santa-Eulàlia
Realitzat a: Departament de Probabilitat,
Lògica i Estadística. UB
Barcelona, 21 de juny de 2013

Índex

1	Introducció	4
1.1	Accions i derivats financers	4
1.1.1	Accions	4
1.1.2	Futurs	5
1.1.3	Opcions	6
1.2	Història dels mercats financers i origen de les opcions	10
1.3	Estratègies d'inversió	12
1.3.1	Valoració d'opcions europees	13
1.3.2	Cobertura d'opcions europees	14
2	El model de mercat discret	16
2.1	Teoria de martingales	17
2.2	El principi de no-arbitratge	20
2.2.1	Fórmula de paritat call/put	25
2.3	Viabilitat d'un mercat financer	27
2.4	Completesa d'un mercat financer	31
3	Models binomials de mercat discret	35
3.1	Model Binomial d'un sol període	37
3.2	Model Binomial de diversos períodes	41

<i>ÍNDIX</i>	3
4 El model discret de Cox-Ross-Rubinstein	44
5 El model continu de Black-Scholes	51
A	60
A.1 Altres definicions i conceptes	60
A.2 Teorema de separació dels conjunts convexos a $\mathbb{R}^n$	60

Capítol 1

Introducció

Al llarg d'aquest primer capítol, s'introduiran els conceptes econòmics bàsics sobre els quals es construirà posteriorment tota la teoria de valoració i cobertura d'opcions.

1.1 Accions i derivats financers

S'anomena derivat financer a tot producte financer el valor del qual està supeditat al valor d'un altre actiu financer que rep el nom d'actiu subjacent i que poden ser accions, índexs bursatils, tipus d'interès... Aquests productes, com poden ser els contractes de futurs i opcions, tenen la propietat de ser sempre liquidats en un futur.

1.1.1 Accions

Es diu acció al títol representatiu d'una de les fraccions iguals en que es divideix el capital social d'una societat anònima. Poden estar representades per mitjà d'un títol o bé d'anotacions en un compte

Una acció d'una certa empresa atorga al seu tinent legítim la condició de soci d'aquesta i li atribueix, com a mínim, els següents drets:

- Participar en el repartiment dels beneficis socials i en el patrimoni resultant de la liquidació.
- La subscripció permanent en la emissió de noves accions.

- Assistir i votar, excepte si son accions sense vot, en les juntes generals de la empresa.

Observem que hi ha diferents tipus d'accions que atorguen diferents tipus de drets als propietaris d'aquestes. Les accions comuns (proveeixen els drets ja esmentats), accions preferents (com el seu nom indica hi ha una preferència en la repartició dels dividendes), accions de vot limitat, *etc.*

Les accions no tenen un preu fix, aquest es defineix als mercats financers i ve determinat pel preu que els inversionistes estan disposats a pagar per adquirir-les. Hi ha diversos factors que influeixen en la variació del preu d'una acció i que fan que els inversionistes estiguin disposats a pagar-les més cares o menys, entre aquests factors, els més rellevants, són els següents:



- El creixement de les vendes o ingressos de l'empresa, també denominat creixement brut.
- El creixement dels beneficis de la companyia, també denominat creixement net.
- El mètode d'administració de l'empresa.
- La situació de l'economia i els mercats financers.
- La situació del sector de la indústria en el qual s'ubica l'empresa.

Al llarg d'aquest treball notarem el preu d'una acció en un instant de temps t determinat, amb: S_t

1.1.2 Futurs

Un contracte de futur és un acord que involucra dues persones en el qual es negocia la compra/venda d'un actiu financer a una data específica en el futur i a un preu acordats per les dues parts de la transacció.

Es poden mantenir dues posicions davant d'un contracte de futurs. Si la part negociant decideix comprar l'actiu a la part venedora es diu que adquireix una posició llarga en un contracte de futurs. Mentre que si el negociant acorda vendre un actiu, a un comprador es diu que adquireix una posició curta en un contracte de futurs. Tal i com diuen els noms, la posició llarga fa referència a l'expectativa que té el comprador que el preu incrementi i la posició curta fa referència a l'expectativa que té el venedor de que el preu disminueixi.

Totes les transaccions de compra/venda de futurs es realitzen al mercat de futurs, que està regulat per una cambra de compensació.

L'origen dels mercats de futurs es remunta a l'edat mitjana i es van crear per permetre els agricultors i negociants assegurar-se un preu assequible per abastir-se de productes bàsics. Permetien l'agricultor assegurar-se vendre la seva collita a un preu acordat independentment del rendiment de la collita aquell any. En cas que hi hagués un excedent de producció i això fes baixar el preu de la collita l'agricultor hauria protegit la venda d'aquesta, havent acordat amb un comprador un preu satisfactori per les dues parts sobre aquell bé. D'altra banda, en cas que aquell any hi hagués hagut un dèficit de producció permetia el comprador protegir-se d'un augment desorbitat del preu de venda i adquirir el producte a un preu acordat mesos abans amb l'agricultor.

1.1.3 Opcions

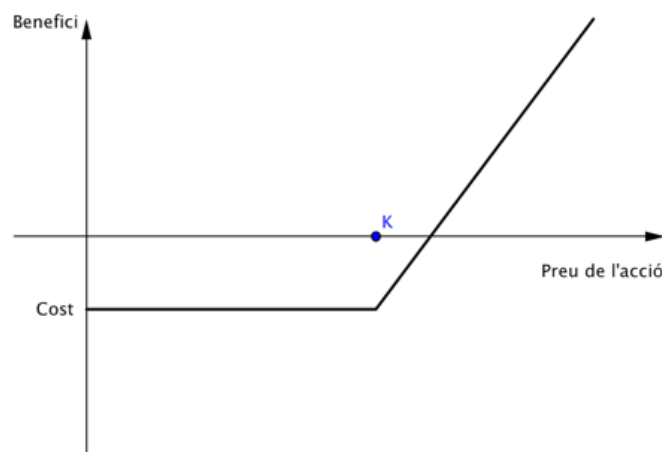
Una opció és un contracte que proporciona el dret, però no la obligació al posseïdor de comprar, si és una opció de compra, o de vendre, si és una opció de venda, un actiu subjacent¹ a un preu K .

Distingim entre dos tipus d'opcions: les opcions europees, que es poden exercir únicament en la seva data de venciment i les opcions americanes que es poden exercir en qualsevol moment des de que s'adquireix l'opció i fins a la data de venciment. Tot el treball es centrarà en l'estudi de les opcions europees exclusivament. No considerarem les opcions americanes tot i que es pot desenvolupar una teoria anàloga per a la valoració i la cobertura d'aquest tipus d'opció.

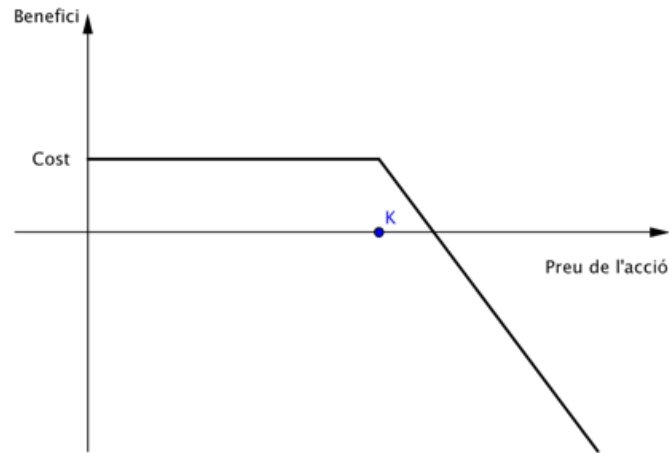
¹Suposarem per tal de fixar idees que els actius subjacents de les opcions amb les quals es treballarà, són les accions d'una certa empresa que cotitza en borsa i que no reparteix dividends.

Opcions de compra: també coneguda amb el sobrenom de *call*, una opció de compra atorga al posseïdor d'aquesta, la possibilitat d'adquirir una acció a una data de venciment T i a un preu d'exercici K , altrament conegut com a preu *strike*. Un cop arribada la data de venciment, poden donar-se tres possibles situacions:

- Si el preu d'exercici de la opció és $S_T > K$, el comprador exercirà la opció de compra obtenint un benefici de $S_T - K$. Aquest benefici s'obté d'exercir la opció de compra adquirint l'acció a un preu K i vendre-la instantàniament al preu S_T que s'està pagant per l'acció en aquell instant. El moment en el que es produeix el fet $K < S_T$, es diu que la opció està "*in the money*".
- Si el preu d'exercici de la opció és $K = S_T$, el comprador pot, o no, exercir la opció de compra, ja que és obvi que no obtindrà cap benefici. El moment en el que es produeix el fet $K = S_T$, es diu que la opció està "*at the money*".
- Per últim si el preu d'exercici de la opció és $K > S_T$, el comprador no exercirà la opció de compra al preu K , ja que pot trobar la mateixa acció més barata al mercat, en concret a un preu S_T . Quan es produeix el fet $K > S_T$, es diu que la opció està "*out of the money*".



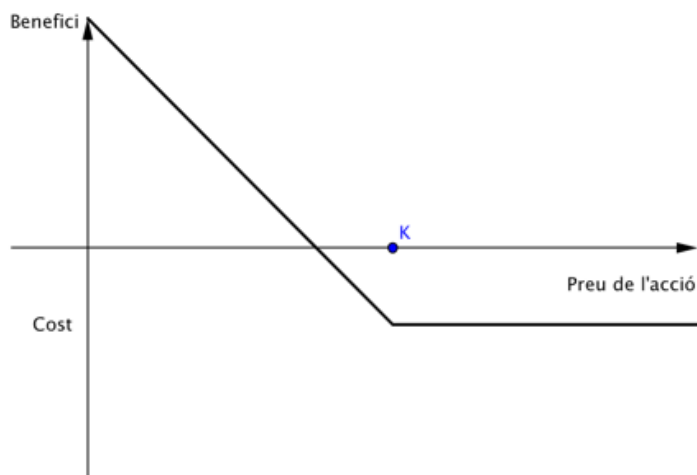
Gràfic del benefici de la compra d'un call.



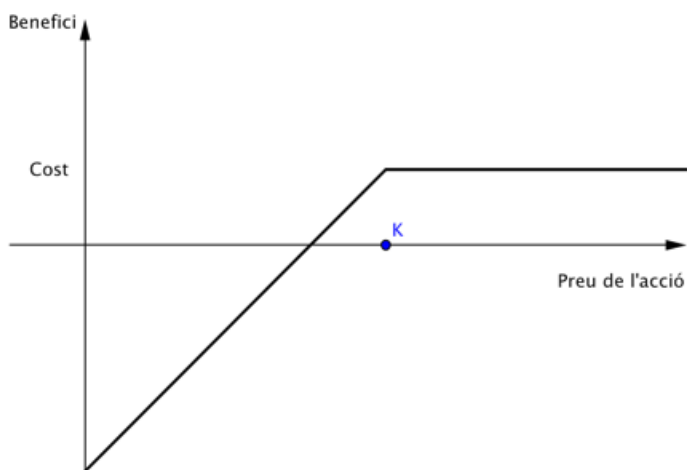
Gràfic del benefici de la venda d'un call.

Opcions de venda: també coneguda amb el sobrenom de *put*, una opció de venda atorga al posseïdor el dret, però no la obligació, de vendre una acció en un instant futur de temps T i un preu d'exercici K determinats. Com abans, un cop arribada la data de venciment del contracte, poden donar-se tres possibles situacions:

- Si el preu d'exercici de la opció és $K > S_T$, el venedor exercirà el dret a vendre obtenint un benefici de $K - S_T$. Aquest benefici s'obté comprant una acció al mercat al preu S_T al qual s'està cotitzant i exercir el dret a vendre aquesta opció a un preu més car. Quan es produeix aquesta situació es diu que l'opció està "*in the money*".
- Si el preu d'exercici de la opció és $K = S_T$, el venedor pot, o no, exercir la opció de venda, ja que és obvi que no obtindrà cap benefici. El moment en el que això passa, es diu que l'opció està "*at the money*".
- Finalment si el preu d'exercici és $K < S_T$, el venedor no exercirà l'opció ja que podria vendre l'acció al mercat obert, més cara del que li ho permet fer l'opció. Quan es produeix aquesta situació, es diu que l'opció està "*out of the money*".



Gràfic del benefici de la compra d'un put.



Gràfic del benefici de la venda d'un put.

1.2 Història dels mercats financers i origen de les opcions

Els mercats de futurs es remunten a l'Edat Mitjana. En un principi es van crear per satisfer les necessitats dels agricultors i negociants. Si considerem la situació d'un agricultor que a l'abril d'un cert any conrearà una certa quantitat coneguda de gra, hi ha una incertesa sobre el preu que l'agricultor rebrà pel gra al juny, quan la collita estigui a punt. En èpoques de poca abundància podria obtenir preus relativament alts, sobretot si l'agricultor no té pressa per vendre. D'altra banda, en èpoques de superabundància el gra només es vendria a preus de liquidació. Per tant l'agricultor està clarament exposat a un gran risc.

Ara considerem el cas d'una empresa que té una necessitat de comprar gra constantment per poder produir el seu producte. L'empresa també està exposada al risc del preu d'aquesta matèria. Alguns anys, en una situació de superabundància hi hauria una situació favorable cap a l'empresa degut al baix preu del gra, però d'altres anys quant la collita fos escassa i hi hagués una gran demanda de gra, l'empresa hauria de pagar preus desorbitats per tal de poder abastir-se de gra.

Per tant té sentit que l'agricultor i l'empresa es trobin a l'abril i negociïn un preu sobre la producció de gra de l'agricultor al juny. Això implica que estableixin el que es coneix actualment com un contracte de futurs. Aquest contracte ofereix a cada part l'oportunitat d'eliminar el risc sobre la incertesa del preu del gra.

Els mercats de Derivats, tenen el seu origen als Estats Units del segle XIX i en un principi estaven orientats al comerç de les matèries primeres, fonamentalment als cereals.

El Chicago Board of Trade (CBT), fou el primer mercat físic organitzat de contractes de futurs en constituïr-se al 1848, als Estats Units. El CBT va normalitzar aquests contractes sobre el blat, la civada, el gra i d'altres productes agrícoles, definint l'import exacte de cada contracte. Els especuladors es van interessar ràpidament en aquest tipus de contractes i van descobrir que la seva negociació era una alternativa atractiva. En l'actualitat, la CBT ofereix contractes de futurs sobre diversos actius subjacents, com blat, soja, bons del tresor, or, divises, accions i d'altres.

Aquestes postures especulatives van provocar una de les moltes crisis que s'han produït en aquest tipus de mercats de derivats, com és la crisi de la tulipa o, també coneguda com a tulipamania.

La tulipamania va ser l'eufòria especuladora que hi va haver als Països Baixos al segle XVII amb la recent importació de tulipes i va ser un dels primers fenòmens especulatius a gran escala del que es té consciència.

Aquesta flor va arribar procedent de Turquia i s'apreciava molt per la seva raresa i bellesa. Es va començar a cultivar als Països Baixos quan es va aconseguir un bulb capaç de sobreviure a les condicions climàtiques de la zona. A partir d'aleshores la cotització del bulb va créixer ràpidament, ja que la possessió de la flor es veia com un senyal de prestigi i riquesa.

El 1636 es van establir mercats per a la venda de tulipes a la borsa d'Amsterdam entre d'altres ciutats. Un gran nombre de comerciants van fer fortuna especulant amb el preu del bulb d'aquesta flor, aprofitant les diverses pujades i baixades en el preu de compra i venda del bulb. Molts particulars demanaven grans préstecs avalats amb les tulipes i d'altres mal-venien la casa i les terres a preus infravalorats per a poder ser partíceps del negoci de la flor i especular per obtenir grans quantitats de diners. Amb aquest mateix motiu varen arribar molts immigrants als Països Baixos, fet que va provocar una entrada massiva de diners al país, que va tenir com a conseqüència la pujada dels preus d'articles de primera necessitat així com els preus de les vivendes. Al mateix any també, es va declarar una epidèmia de pesta bubònica que va fer disminuir la població holandesa, fet que va contribuir a augmentar encara més el preu del bulb de tulipa. Tal va ser l'eufòria, que es va crear un mercat de futurs, a partir de bulbs encara no recol·lectats. De manera que els compradors s'endeutaven i s'hipotecaven per adquirir les flors, i va arribar un moment en què ja no s'intercanviaven bulbs sinó notes de crèdit. Totes les classes socials, tant l'alta burgesia com els artesans, es van veure implicats en aquest fenòmen.

Però a finals de 1637, per causes desconegudes, diverses persones van començar a vendre les tulipes que tenien i van abandonar el negoci. D'aquesta manera en veure que paulatinament s'anava abandonant el negoci, es va estendre el pànic, i es va començar una frenètica cursa per vendre i així desfer-se de tots els actius en bulbs que tenia cada particular. Però com més venia la gent, més queien els preus. D'aquesta manera, moltes persones es van trobar amb grans préstecs a pagar i amb uns bulbs de tulipa, el preu dels quals era ridícul.

Aquest fet va provocar una enorme depressió en l'economia del país que va durar anys. Tot i que el cultiu de tulipes ha seguit en funcionament fins a l'actualitat, va desaparèixer l'eufòria especulativa dels seus inicis.

1.3 Estratègies d'inversió

L'èxit dels mercats de derivats financers rau en bona part en el fet que han estat capaços d'atraure diferents tipus de negociants i, a més, pel fet de tenir molta liquiditat. De manera que quan un inversionista vol prendre part en un contracte, en general, no hi haurà cap problema en trobar algú disposat a ser l'altra part del contracte.

Es poden identificar, principalment, tres tipus de negociants: coberturistes, especuladors i arbitratgistes.

— *Coberturistes.*

Utilitzen els contractes de futurs i les opcions financeres, per tal de reduir el risc al qual han de fer front per possibles canvis futurs en una variable de mercat. D'aquesta manera, una empresa és capaç de limitar les seves pèrdues.

És a dir, un coberturista intenta minimitzar les pèrdues que pot tenir una empresa i que venen derivades del risc de la seva activitat com, per exemple, la possible variació en el preu de matèries primeres essencials per a l'empresa per tal de poder manufacturar el seu producte.

La limitació d'aquest risc es duu a terme mitjançant la compra-venda de futurs i opcions sobre aquestes matèries primeres.

— *Especuladors.*

Utilitzen els contractes de futurs i les opcions financeres, per apostar sobre la direcció futura de la cotització als mercats dels actius com matèries primeres, divises, accions, bons...

Mentre el coberturista intenta evitar una exposició a canvis adversos en el preu d'un actiu, l'especulador intentarà prendre una posició al mercat, és a dir, apostarà a que el preu d'un determinat actiu pujarà o bé baixarà.

Cal diferenciar aquí l'especulació sobre futurs i sobre opcions. Quan un especulador utilitza futurs, la possibilitat tant de pèrdua com de guany és molt gran. Ara bé, quan s'utilitzen opcions, no afecta lo malament

que puguin anar les coses, ja que la pèrdua de l'especulador es limita a la quantitat total de diners pagada per adquirir les opcions.

— *Arbitratgistes.*

Aquest grup de negociants constitueixen un tercer tipus molt important de participants en els mercats de futurs i opcions.

L'arbitratge implica assegurar una utilitat lliure de risc, realitzant simultàniament diverses transaccions en dos o més mercats. L'existència d'aquest tipus de negociants, fa improbable que, hi pugui haver una gran disparitat entre els preus de dos actius relacionats entre ells, pel fet de ser de la mateixa empresa o d'altres motius, i que cotitzen en diversos mercats alhora.

En altres paraules, el que fa l'arbitratgista és intentar obtenir avantatge d'un estat descompensat entre diversos mercats mitjançant la combinació de transaccions complementaries que capitalitzen el desequilibri de preus. Aquesta pràctica comporta el reestabliment de la compensació i cohesió entre els mercats ràpidament, degut a la gran quantitat de negociants d'aquest tipus, la transparència informativa i la facilitat de negociació que proporcionen els nous sistemes informàtics.

Gràcies a això, més endavant podrem suposar el principi de no arbitratge, és a dir, la no existència d'oportunitats d'arbitratge al mercat o equivalentment, la impossibilitat d'obtenir un benefici sense córrer cap tipus de risc. Aquesta suposició ens facilitarà la construcció dels models de valoració d'opcions financeres.

1.3.1 Valoració d'opcions europees

Siguin S_T el preu *spot* de l'acció subjacent a temps $t = T$, *i.e.* el preu al qual es cotitza l'acció als mercats en l'instant $t = T$ i K és el preu d'exercici d'una opció sobre l'acció.

Definim $C_T = (S_T - K)^+ = \max\{0, S_T - K\}$ com el benefici d'una opció de compra, o *call* i $P_T = (K - S_T)^+ = \max\{0, K - S_T\}$ el benefici d'una opció de venda, o *put*. De vegades quan no s'especifiqui si l'opció és un put o un call farem servir H_T per referir-nos al benefici de l'opció i se sobreentendrà que ens estem referint a $H_T = (S_T - K)^+$ si l'opció és un call o bé a $H_T = (K - S_T)^+$ en el cas d'un put. Aquests beneficis també es coneixen amb el nom de valor intrínsec de l'opció.

A l'hora de subscriure una opció, i tenint en compte la variació del valor temporal d'aquesta, se'ns planteja el següent problema:

Quin és el preu que ha de pagar un comprador per adquirir una opció? En altres paraules com es pot atorgar un preu a temps $t = 0$ a una opció sobre una acció que val $(S_T - K)^+$ a temps $t = T$, on T és la data d'expiració de l'opció?

La principal dificultat que ens trobem en el problema de la valoració de les opcions europees, és que el valor final del derivat a la data d'expiració, ens és desconegut a temps $t = 0$. Aquest valor depèn única i exclusivament del preu spot de l'acció a temps $t = T$. Per a resoldre aquest problema i desenvolupar els models financers binomials i de Black-Scholes, farem diverses suposicions.

Considerarem l'absència d'oportunitats d'arbitratge en el mercat financer, *i.e.* no hi ha cap oportunitat d'obtenir beneficis sense risc. També assumirem que es poden demanar préstecs i prestar a una taxa d'interès constant $r > 0$. Cal dir, que és obvi que un banc no presta diners a la mateixa taxa d'interès que la taxa que proporciona per fer un dipòsit, però per a grans empreses la diferència és molt petita, de manera que podem fer aquesta suposició sense que això varii tot el que es desenvoluparà al llarg dels propers capítols.

1.3.2 Cobertura d'opcions europees

Suposem, sense perdre generalitat, que un inversor adquireix una opció de compra amb data de venciment d'aquí a 3 mesos, que ha emès una certa entitat financera a un preu determinat H_0 . Com acabem de veure, això vol dir comprar per un valor H_0 a dia d'avui, un benefici de $(S_T - K)^+$ d'aquí a 3 mesos. A efectes pràctics la conseqüència d'això és que un cop assolida la data de venciment es donarà una de les dues possibles situacions:

- Que el preu de l'acció S_T en aquell moment compleixi que $S_T > K$ i per tant el banc hagi de pagar al comprador de l'opció la diferència $S_T - K$ quan l'inversor exerceixi el seu dret de compra.
- Que el preu de l'acció S_T en aquell moment compleixi just el contrari, *i.e.* $S_T \leq K$ de manera que l'inversor no exercirà el seu dret de compra ja que el preu real de l'actiu subjacent és igual o més barat que el preu d'exercici del call. D'aquesta manera el banc no haurà de pagar res a l'inversor.

Ara per eliminar el risc al que està exposat el banc, aquest ha de fer el que s'anomena una cobertura de la cartera ², que consisteix a determinar una estratègia formada per una quantitat inicial de diners i un cert nombre d'acions, de tal manera que a la data de venciment aquesta estratègia d'inversió proporcioni un benefici de $S_T - K$, que s'utilitzarà per fer front al pagament en cas que s'exerceixi el dret de compra per part de qui té el call.

²Els conceptes de cartera o estratègia d'inversió així com el de valor d'una cartera es veuran al llarg dels següents capítols.

Capítol 2

El model de mercat discret

Sigui $\{S_t\}_{t \geq 0}$ un procés estocàstic discret, *i.e.* una successió de variables aleatòries definides en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que defineix el preu d'una acció a temps $t \in [0, T]$.

Com el valor de la opció està supeditada, només, al preu spot, ja que K és constant, el preu a pagar per la opció inicialment vindrà determinat pel benefici que l'opció acabi proporcionant a la data del venciment:

$$\begin{aligned}C_T &= (S_T - K)^+ . \\P_T &= (K - S_T)^+ .\end{aligned}$$

El que intentarem fer amb els models dels capítols següents serà determinar el preu inicial a pagar per adquirir una opció en l'instant de temps $t = 0$ i sense conèixer $\{S_i\}_{i \geq 1}$ amb $i = 1, \dots, T$.

Per a fer això ens caldrà fer un breu repàs de la teoria de martingales, ja que ens permetrà desenvolupar el principi de no arbitratge sobre el qual es fonamenten els models binomials de mercat discret i d'aquesta manera trobar, el que anomenarem mesura neutral al risc i que ens servirà per a fer una valoració i una posterior cobertura de les opcions financeres.

2.1 Teoria de martingales

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat finit, on

- Ω és l'espai d'estats de l'economia i és tal que $\text{Card}(\Omega) < +\infty$.
- $\mathcal{F}$ és una σ -àlgebra.
- P una probabilitat tal que $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) > 0$.

Considerem una successió creixent de σ -àlgebres

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F},$$

que anomenarem *filtració* i denotem per $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. La σ -àlgebra $\mathcal{F}_t$ representa la informació sobre els preus de l'actiu que disposem a temps t .

2.1.1 Definició. Donada una successió de variables aleatòries $S = (S_t)_{t \geq 0}$, també conegut com a procés, es diu que és adaptada si S_t és $\mathcal{F}_t$ -mesurable $\forall t \geq 0$.

2.1.2 Definició. Sigui $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$ una successió de variables aleatòries. Es diu que S és una martingala respecte la filtració $\mathbb{F}$ si compleix:

1. S_t és $\mathcal{F}_t$ -mesurable per a tot $t \geq 0$ (aleshores es diu que S està adaptada a la filtració $\mathbb{F}$).
2. $E(|S_t|) < \infty$ per a tot $t \geq 0$.
3. Per a tot $t \geq 0$,

$$E(S_{t+1} | \mathcal{F}_t) = S_t.$$

La tercera condició també es pot escriure com

$$E(\Delta S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0,$$

per a tot $t \geq 1$ i on $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$.

2.1.3 Definició. Sigui $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$ un procés adaptat a la filtració $\mathbb{F}$. Es diu que S és:

- Una submartingala si $E(S_{t+1}|\mathcal{F}_t) \geq S_t$, per a tot $t \geq 0$.
- Una supermartingala si $E(S_{t+1}|\mathcal{F}_t) \leq S_t$, per a tot $t \geq 0$.

Vegem tot seguit algunes propietats elementals sobre les martingales, que deriven de la definició d'esperança condicionada.

1. *La propietat de torre:* Donades dues σ -àlgebres $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+p}$ es compleix

$$E(E(S_u|\mathcal{F}_{t+p})|\mathcal{F}_t) = E(S_u|\mathcal{F}_t).$$

2. (S_t) és una martingala si, i només si, per a tot $u \geq t$ tenim que

$$E(S_u|\mathcal{F}_t) = S_t.$$

Demostració.

De fet, per a $u > t + 1$

$$\begin{aligned} E(S_u|\mathcal{F}_t) &= E(E(S_u|\mathcal{F}_{u-1})|\mathcal{F}_t) \\ &= E(S_{u-1}|\mathcal{F}_t) = \dots = E(S_{t+1}|\mathcal{F}_t) = S_t. \end{aligned}$$

3. Si (S_t) és una martingala, aleshores $E(S_t) = E(S_0)$, $\forall t \geq 1$.

La demostració és anàloga a la de la propietat anterior.

4. (S_t) és una submartingala si, i només si, $(-S_t)$ és una supermartingala.

Demostració.

$\Rightarrow$: Si $(S_t)_t$ és submartingala aleshores es compleix que $(S_t)_t$ és $\mathcal{F}_t$ -mesurable, que $E(|S_t|) < +\infty$ i que $E(S_{t+1}|\mathcal{F}_t) \geq S_t \Rightarrow -E(S_{t+1}|\mathcal{F}_t) \leq -S_t \Rightarrow E(-S_{t+1}|\mathcal{F}_t) \leq -S_t$. Per tant $-S_t$ és supermartingala ja que $-S_t$ també $\mathcal{F}_t$ -mesurable de la mateixa manera que $E(|-S_t|) < +\infty$.

$\Leftarrow$: es demostra de manera anàloga.

5. Si (S_t) és una martingala i φ és una funció convexa, definida en un interval obert, tal que $E(|\varphi(S_t)|) < +\infty$ per a tot $t \geq 0$, aleshores $(\varphi(S_t))$ és una submartingala.

Demostració.

És immediat veure-ho aplicant la desigualtat de Jensen per a l'esperança condicionada ja que

$$E(\varphi(S_{t+1})|\mathcal{F}_t) \geq \varphi(E(S_{t+1}|\mathcal{F}_t)) = \varphi(S_t).$$

2.1.4 Definició. Sigui $\mathbb{F}$ una filtració. Es diu que $(\varphi_t)_{t \geq 1}$ és un procés previsible *i.e.* una successió de variables aleatòries previsibles si per a tot $t \geq 1$, φ_t és $\mathcal{F}_{t-1}$ -mesurable.

Intuitivament, aquesta propietat del procés, ve a dir que a temps $t-1$, nosaltres coneixem el valor que prendrà el procés a temps t . Això no contradiu el fet que sigui un procés aleatori, ja que el valor S_t a temps t , només el podem conèixer un instant de temps abans, i no prèviament.

2.1.5 Definició. Sigui $\mathbb{F}$ una filtració i $(S_t)_{t \geq 0}$ una martingala respecte aquesta filtració. Donat un procés previsible $(\varphi_t)_{t \geq 1}$ respecte la mateixa filtració es defineix la transformada d'una martingala $(S_t)_{t \geq 0}$ per (φ_t) com la seqüència

$$(\varphi \cdot S)_t = S_0 + \sum_{j=1}^t \varphi_j \Delta S_j; \quad t \geq 1.$$

2.1.6 Proposició. Si $(S_t)_{t \geq 0}$ és una martingala i $(\varphi_t)_{t \geq 1}$ és un procés previsible de variables aleatòries acotades i no negatives, aleshores la transformada de la martingala $(\varphi \cdot S)_t$ és, també, una martingala.

Demostració.

És evident que per a tot $t \geq 0$ la variable aleatòria definida per $(\varphi \cdot S)_t$ és $\mathcal{F}_t$ -mesurable i integrable. A més, $\forall t \geq 0$, tenim que:

$$E(\Delta(\varphi \cdot S)_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E(\varphi_{t+1}\Delta S_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \varphi_{t+1}E(\Delta S_{t+1}|\mathcal{F}_t) = 0.$$

2.2 El principi de no-arbitratge

Un cop vistes les definicions i propietats de les martingales i abans de començar a construir el model binomial desenvoluparem dues hipòtesis, que facilitaran la construcció dels posteriors models:

Suposarem cert el principi de no arbitratge i.e. suposarem que al mercat no hi ha oportunitats d'arbitratge.

Tot seguit s'introduiran diverses definicions i proposicions que permetran enunciar matemàticament el principi de no arbitratge.

Suposarem que el mercat financer està format per $d + 1$ actius financers, on l'actiu lliure de risc, és a dir, el compte bancari serà l'actiu 0 i la resta $1, \dots, d$ seran els actius amb risc com accions, *etc.*

Els preus dels actius a temps t vindran donats per les variables aleatòries no negatives $S_0(t), S_1(t), \dots, S_d(t)$, $\mathcal{F}_t$ -mesurables, *i.e.* a temps t coneixem els preus $S_i(t)$. Escriurem $S(t) = (S_0(t), S_1(t), \dots, S_d(t))'$ per a referir-nos al vector de preus a temps t .

Amb tot això ens referirem al conjunt format per l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, les dates d'inversió $[0, 1, \dots, T]$, el procés de preus $S(t)$ i l'estructura de l'informació o filtració $\mathbb{F}$, com el model de mercat $\mathcal{M}$ o simplement un mercat $\mathcal{M}$.

Començarem definint S_0 com l'actiu lliure de risc, que anomenarem el compte bancari de l'inversor, i suposarem que el valor actual de la unitat monetària és 1, *i.e.* $S_0(0) = 1$. Definirem un factor de descompte $\beta := \frac{1}{1+r}$ que multiplicat pel preu d'un actiu $S_i(t)$, $\forall i \in 1, \dots, d$ o qualsevol altre valor, ens proporcionarà el valor real de l'actiu a temps $t - 1$ tenint en compte el canvi del valor dels diners respecte el temps.

Nota. Al llarg del treball es farà servir β o $\frac{1}{1+r}$ per a referir-nos al factor de descompte, segons convingui en el context.

2.2.1 Definició. Una estratègia de gestió φ és un vector de processos estocàstics de dimensió $\mathbb{R}^{d+1}$, definit per

$$\varphi = (\varphi(t))_{t=1}^T = ((\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t)))_{t=1}^T,$$

previsible, *i.e.* que cada $\varphi_i(t)$ és $\mathcal{F}_{t-1}$ -mesurable $\forall t \geq 1$. D'altra banda $\varphi_i(t)$ denota el nombre d'accions de cada actiu del mercat que hi ha a la cartera de valors de l'inversor a temps t .

L'estratègia de gestió, *i.e.* el nombre d'accions d'un actiu es determina en base a la informació disponible abans del temps t , és a dir, l'inversor escull el nombre d'accions de cada actiu a temps t observant els preus $S(t-1)$.

2.2.2 Definició. El valor de la cartera a temps t és el producte escalar

$$V_\varphi(t) = \varphi(t) \cdot S(t) := \sum_{i=0}^d \varphi_i(t) \cdot S_i(t); t = 1, 2, \dots, T$$

i on $V_\varphi(0) = \varphi(1) \cdot S(0)$.

El procés $(V_\varphi(t))_{t=1}^T$ s'anomena riquesa de l'estratègia de gestió φ . La riquesa inicial $V_\varphi(0)$, s'anomena la inversió inicial feta per l'inversor.

Ara $\varphi(t) \cdot S(t-1)$, reflecteix el valor de la cartera al mercat després del temps $t-1$, mentre que $\varphi(t) \cdot S(t)$ és el valor just després que s'hagin observat els preus a temps t , però abans que s'hagin fet els canvis a la cartera.

2.2.3 Definició. El procés de benefici acumulat G_φ d'una estratègia de gestió φ , ve donat per

$$G_\varphi(t) := \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot (S(\tau) - S(\tau-1)) = \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot \Delta S(\tau); t = 1, \dots, T.$$

Definim $\tilde{S}(t) = (1, \beta^t S_1(t), \dots, \beta^t S_d(t))'$ com el vector de preus descomptats i per extensió definim el procés de valors descomptats com

$$\tilde{V}_\varphi(t) := \beta(t) (\varphi(t) \cdot S(t)) = \varphi(t) \cdot \hat{S}(t); t = 1, 2, \dots, T,$$

i el procés de beneficis descomptats

$$\tilde{G}_\varphi(t) := \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot (\hat{S}(\tau) - \hat{S}(\tau-1)) = \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot \Delta \hat{S}(\tau); t = 1, 2, \dots, T.$$

2.2.4 Definició. Una estratègia φ és auto-finançada, si

$$\varphi(t) \cdot S(t) = \varphi(t+1) \cdot S(t), \forall t = 1, 2, \dots, T.$$

2.2.5 Definició. Una estratègia φ és admissible, si és auto-finançada i, a més, $V_\varphi(t) \geq 0$, per a tot $t = 1, 2, \dots, T$.

Notació. Denotarem Φ pel conjunt d'estratègies auto-finançades i $\tilde{\Phi} \subseteq \Phi$ pel conjunt de les estratègies admissibles.

2.2.6 Proposició. (*Invariància del factor de descompte*)

Sigui β un factor de descompte. Una estratègia d'inversió φ és auto-finançada respecte l'evolució dels preus $S(t)$ si, i només si, φ és auto-finançada respecte $\tilde{S}(t) = \beta^t \cdot S(t)$.

Demostració.

$$\begin{aligned} \varphi(t) \cdot S(t) &= \varphi(t+1) \cdot S(t); \forall t = 1, 2, \dots, T-1 \\ \Leftrightarrow \varphi(t) \cdot \beta^t S(t) &= \varphi(t+1) \cdot \beta^t S(t); \forall t = 1, 2, \dots, T. \quad \square \end{aligned}$$

2.2.7 Proposició. *Una estratègia d'inversió és auto-finançada, $\varphi \in \Phi$ si, i només si, $\tilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(t)$, $\forall t = 1, 2, \dots, T$.*

Demostració.

$\Rightarrow$: Suposem que $\varphi \in \Phi$. Ara utilitzant la relació de la definició 2.2.4, d'estratègia auto-finançada, la proposició d'invariancia del factor de descompte i el fet que $S(0) = 1$, tenim que

$$\begin{aligned} V_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(t) &= \varphi(1) \cdot \tilde{S}(0) + \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot (\tilde{S}(\tau) - \tilde{S}(\tau-1)) \\ &= \varphi(1) \cdot \tilde{S}(0) + \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot \tilde{S}(\tau) - \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot \tilde{S}(\tau-1) \\ &= \varphi(1) \cdot \tilde{S}(0) + \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot \tilde{S}(\tau) - \sum_{\tau=2}^t \varphi(\tau) \cdot \tilde{S}(\tau-1) \\ &\quad - \varphi(1) \cdot \tilde{S}(0) \\ &= \varphi(t) \cdot \tilde{S}(t) + \sum_{\tau=1}^{t-1} \varphi(\tau) \cdot \tilde{S}(\tau) - \sum_{\tau=2}^t \varphi(\tau) \cdot \tilde{S}(\tau-1) \end{aligned}$$

imposant que φ és auto-finançada,

$$\begin{aligned}
&= \varphi(t) \cdot \tilde{S}(t) + \sum_{\tau=1}^{t-1} \varphi(\tau+1) \cdot \tilde{S}(\tau) - \sum_{\tau=2}^t \varphi(\tau) \cdot \tilde{S}(\tau-1) \\
&= \varphi(t) \cdot \tilde{S}(t) + \sum_{\tau=1}^{t-1} \varphi(\tau+1) \cdot \tilde{S}(\tau) - \sum_{l=1}^{t-1} \varphi(l+1) \cdot \tilde{S}(l) \\
&= \varphi(t) \cdot \tilde{S}(t) = \tilde{V}_\varphi(t).
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$: (Per inducció sobre t). Si suposem certa la igualtat $\tilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(t)$, per la proposició d'invariancia del factor de descompte és suficient veure la versió de la definició 2.2.4 sota el valor descomptat $\forall t = 1, 2, \dots, T-1$.

Per a $t = 2$, la igualtat anterior s'escriu

$$\varphi(2) \cdot \tilde{S}(2) = \varphi(1) \cdot \tilde{S}(0) + \varphi(1) \cdot (\tilde{S}(1) - \tilde{S}(0)) + \varphi(2) \cdot (\tilde{S}(2) - \tilde{S}(1)).$$

Ara, restant $\varphi(2) \cdot \tilde{S}(2)$ ambdues bandes de la igualtat, obtenim que

$$\varphi(2) \cdot \tilde{S}(1) = \varphi(1) \cdot \tilde{S}(1).$$

Per inducció, es pot veure que efectivament $\varphi(t) \tilde{S}(t) = \varphi(t+1) \tilde{S}(t)$, $\forall t = 1, 2, \dots, T-1$. $\square$

2.2.8 Proposició. Si un procés $\hat{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))' \in \mathbb{R}^d$ és previsible i V_0 és $\mathcal{F}_0$ -mesurable, aleshores hi ha un únic procés previsible $(\varphi_0(t))_{t=1}^T$ tal que $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_d)' \in \mathbb{R}^{d+1}$ és auto-finançada amb valor inicial de la cartera $V_\varphi(0) = V_0$.

Demostració.

Si φ és auto-finançada, aleshores per la proposició anterior, tenim que

$$\tilde{V}_\varphi(t) = V_0 + \tilde{G}_\varphi(t) = V_0 + \sum_{\tau=1}^t \left(\varphi_1(\tau) \Delta \tilde{S}_1(\tau) + \dots + \varphi_d(\tau) \Delta \tilde{S}_d(\tau) \right),$$

També es pot escriure, de manera anàloga, amb la notació de producte escalar com

$$\tilde{V}_\varphi(t) = V_0 + \tilde{G}_\varphi(t) = V_0 + \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot \Delta \tilde{S}(\tau).$$

D'altra banda,

$$\tilde{V}_\varphi(t) = \varphi(t) \cdot \tilde{S}(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) \tilde{S}_1(t) + \dots + \varphi_d(t) \tilde{S}_d(t).$$

Ara, com $\Delta \tilde{S}_0(\tau) = 0$ i $\tilde{S}_0(\tau) = 1 \forall \tau$, si igualement les dues expressions de $\tilde{V}_\varphi(t)$ s'obté

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= V_0 + \sum_{\tau=1}^t \left(\varphi_1(\tau) \Delta \tilde{S}_1(\tau) + \dots + \varphi_d(\tau) \Delta \tilde{S}_d(\tau) \right) \\ &\quad - \left(\varphi_1(t) \tilde{S}_1(t) + \dots + \varphi_d(t) \tilde{S}_d(t) \right) \\ &= V_0 + \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot \Delta \tilde{S}(\tau) - \varphi(t) \cdot \tilde{S}(t), \end{aligned}$$

de manera que $\varphi_0(t)$ queda determinada de manera única. $\square$

El principi central dels models que es desenvolupen a continuació és l'absència d'oportunitats d'arbitratge, *i.e.* la impossibilitat d'aconseguir beneficis sense córrer cap tipus de risc. Aquest principi és absolutament central i necessari per a construir qualsevol model de mercat i tot seguit es defineix la versió matemàtica d'aquest principi econòmic.

2.2.9 Definició. Una estratègia $\varphi \in \tilde{\Phi}$, s'anomena una oportunitat d'arbitratge, si satisfà

1. $V_\varphi(0) = 0$.
2. $P\{V_\varphi(T) > 0\} > 0$.

Per tant una oportunitat d'arbitratge, és una estratègia auto-finançada amb valor inicial 0, que produeix un valor final no negatiu amb probabilitat 1 i amb probabilitat positiva de que el valor final sigui estrictament més gran que 0. Observem que les oportunitats d'arbitratge sempre estan definides respecte una classe d'estratègies de gestió auto-finançades.

2.2.10 Definició. Diem que un mercat $\mathcal{M}$ és lliure d'oportunitats d'arbitratge, si la classe $\tilde{\Phi}$ d'estratègies de gestió auto-finançades i admisibles no conté cap oportunitat d'arbitratge.

2.2.1 Fórmula de paritat call/put

Com a conseqüència del principi de no arbitratge tot seguit enunciaré i demostrare el principi econòmic de paritat entre opcions de compra i venda, també conegut com a fórmula de paritat call/put. Aquesta segona relació ens servirà després per construir els models binomials dels capítols posteriors.

Observem en les gràfiques de les corbes de benefici del *Capítol 1* que un put i un call, per definició, tenen un comportament oposat davant la variació del preu de l'actiu subjacent a l'opció. Com a conseqüència d'aquest fet s'obté l'equació de paritat entre un put i un call. Deduirem aquesta relació entre els dos tipus d'opcions fent servir un raonament purament econòmic.

Considerem una opció de compra i una de venda amb valors C_t , P_t respectivament amb data de venciment $t = T$ i un preu d'exercici K per ambdues opcions.

Si considerem una cartera formada per una acció amb valor S_t a temps t , una posició llarga en un put i una posició curta en un call, aleshores tenim que el valor de la cartera a temps t ve donat per

$$V(t) = S_t + P_t - C_t.$$

D'aquesta manera, el valor a temps $t = T$ de la cartera que hem considerat, depèn de la relació entre S_T i K .

$$\text{Si } S_T \geq K : S_T + 0 - (S_T - K) = K$$

$$\text{Si } S_T \leq K : S_T + (K - S_T) - 0 = K$$

Observem que independentment del valor de l'actiu a la data de venciment, aquesta cartera garanteix sempre un benefici K però, a més, volem saber quin és el seu valor a temps $t < T$. Notem que l'única manera de garantir un benefici K a temps $t = T$, sota el principi de no arbitratge, és dipositant al banc $\beta^{T-t}K$ a temps t i no fer cap altre operació.

Sota el principi de no arbitratge, el valor de la cartera a temps t ha de ser de $\beta^{T-t}K$ ja que a temps $t = T$ el valor de la cartera ha de ser K i, a més, actua com un compte bancari i qualsevol benefici diferent d'aquest seria una oportunitat d'arbitratge.

En efecte, si el valor de la cartera fos diferent de $\beta^{T-t}K$ a temps t , tindriem el següent:

1. Si $V(t) < \beta^{T-t}K$, aleshores podríem demanar al banc un préstec per valor de $\beta^{T-t}K$ i adquirir la cartera que hem creat prèviament pel valor de $V(t)$, de manera que la diferència $\beta^{T-t}K - V(t) > 0$ s'ingressaria al banc.

Finalment a temps $t = T$, el valor de la cartera és $V(T) = K$, mentre que el deute amb el banc ha augmentat fins a K , de manera que podem pagar-lo amb el benefici de $V(T) = K$ i obtenir un benefici net de $\beta^{T-t}(K\beta^{T-t} - V(t)) > 0$, que és la quantitat de diners que havíem ingressat al banc més els interessos. Notem que no hi ha cap risc d'aquesta manera, ja que obtenim un benefici sense córrer cap tipus de risc, *i.e.* és una oportunitat d'arbitratge.

2. Si d'altra banda, $V(t) > \beta^{T-t}K$, aleshores podem fer justament el contrari que en el cas anterior, és a dir, vendre en curt la cartera $V(t)$ i posar-ho al banc en dos comptes diferents. En el primer posaríem $\beta^{T-t}K$ i en el segon compte hi ingresseu la diferència $V(t) - \beta^{T-t}K$, de manera que a temps $t = T$, el valor del primer compte és K i ens permet recomprar la cartera que ara té valor $V(T) = K$, retornar-la i, a més, obtenir un benefici de $\beta^{T-t}(V(t) - \beta^{T-t}K) > 0$ que correspon a la quantitat ingressada al banc del segon compte més els interessos corresponents. Observem que d'aquesta manera, si és donés aquest fet, també parlariem d'una oportunitat d'arbitratge.

Per tant l'únic preu raonable pel valor de la cartera a temps t és $V(t) = \beta^{T-t}K$. Qualsevol altre preu diferent a aquest, suposaria l'existència d'oportunitats d'arbitratge, fet que entraria en contradicció amb la nostra primera hipòtesi consistent en suposar que al mercat no hi ha oportunitats d'arbitratge. Com a conclusió tenim la proposició següent.

2.2.11 Proposició. *Donat un actiu S_t , un put i un call amb un preu strike K es té que*

$$S_t + P_t - C_t = \beta^{T-t}K.$$

2.3 Viabilitat d'un mercat financer

2.3.1 Definició. Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es diu que una probabilitat Q és equivalent a P ($Q \sim P$) si, i només si, $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$.

2.3.2 Definició. Sigui $P^* : \Omega \rightarrow [0, 1]$ a $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ una probabilitat equivalent a P . Denotem per $\mathcal{P}(\tilde{S})$ la classe de mesures equivalents sota les quals el procés de preus $\tilde{S}$ és una martingala.

2.3.3 Proposició. Sigui $P^* \in \mathcal{P}(\tilde{S})$ i $\varphi \in \Phi$ qualsevol. Aleshores, el procés de riquesa $\tilde{V}_\varphi(t)$ associat al procés de preus $\tilde{S}(t)$ és una P^* -martingala respecte la filtració $\mathbb{F}$.

Demostració.

Per la propietat de ser φ una estratègia auto-finançada es té

$$\tilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(t) \quad \forall t = 0, 1, \dots, T.$$

Aleshores, per $\varphi \in \Phi$, $\tilde{V}_\varphi(t)$ és la transformada de la P^* -martingala $\tilde{S}$ per la funció φ i la transformada d'una martingala per un procés previsible φ segueix sent una martingala. Per tant tenim que $\tilde{V}_\varphi(t)$ és P^* -martingala. $\square$

Finalment, podem introduir la versió matemàtica del principi de no-arbitratge.

2.3.4 Definició. (de no-arbitratge) Es diu que un mercat $\mathcal{M}$ està lliure d'oportunitats d'arbitratge si existeix una probabilitat P^* equivalent a P , sota la qual el procés d -dimensional dels valors descomptats de cada actiu $\left(\tilde{S}_i(t)\right)_{t=1}^T \quad \forall i = 1, \dots, d$, és una P^* -martingala.

2.3.5 Definició. Un mercat $\mathcal{M}$ es diu que és viable si és lliure d'oportunitats d'arbitratge.

2.3.6 Teorema. Un mercat $\mathcal{M}$ és viable si, i només si, existeix una probabilitat P^* equivalent a P sota la qual tot procés de preus actualitzats és martingala¹.

¹Aquest teorema va ser demostrat per M. Harrison i S. Pliska [6] l'any 1981.

Demostració.

$\Leftarrow$: Suposem que existeix una probabilitat P^* equivalent a P sota la qual el procés de preus $\tilde{S}_t$ és una martingala. Aleshores per a tota estratègia de gestió auto-finançada φ , es té per la Proposició 2.2.7 que

$$\tilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot \Delta \tilde{S}(\tau),$$

i hem demostrat prèviament a la proposició 2.1.6, que $\tilde{V}_\varphi(t)$ és una martingala sota la mesura P^* .

Per tant,

$$E_{P^*}(\tilde{V}_\varphi(T)) = E_{P^*}(\tilde{V}_\varphi(0)) = \tilde{V}_\varphi(0).$$

Ara, si l'estratègia de gestió és admissible, és a dir, no és una oportunitat d'arbitratge, i té valor inicial $\tilde{V}_\varphi(0) = 0$, es té que $E_{P^*}(\tilde{V}_\varphi(T)) = 0$, amb $\tilde{V}_\varphi(T) \geq 0$, d'on $\tilde{V}_\varphi(T) = 0$, ja que $P(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in \Omega$.

$\Rightarrow$: Sigui Γ el con convex² de les variables aleatòries positives i no nul·les. El mercat $\mathcal{M}$ és viable si, i només si, per a tota estratègia $\varphi \in \tilde{\Phi}$ tenim que

$$V_\varphi(0) = 0 \Rightarrow \tilde{V}_\varphi(T) \notin \Gamma.$$

Com ja hem esmentat abans, a tota estratègia de gestió se li associa un procés de benefici $\tilde{G}_\varphi(t)$, definit per

$$\tilde{G}_\varphi(t) = \sum_{\tau=1}^t \varphi(\tau) \cdot \Delta \tilde{S}(\tau),$$

on $\tilde{G}_\varphi(T)$ és el benefici acumulat al llarg de tota l'estratègia auto-finançada. Per la Proposició 2.2.8 existeix un únic procés previsible $(\varphi_0(t))_{t=1}^T$ tal que φ és una estratègia de gestió auto-finançada amb valor inicial de la cartera $V_\varphi(0) = V_0 = 0$. Ara per la hipòtesi de viabilitat del mercat tenim que si $\tilde{G}_\varphi(t) \geq 0$ per a tot $t = 1, \dots, T$, aleshores $\tilde{G}_\varphi(T) = 0$.

El lema que ve a continuació i abans de proseguir amb la demostració, demostra que sense la hipòtesi $\tilde{G}_\varphi(t) \geq 0, \forall t = 1, \dots, T$ se segueix implicant que $\tilde{G}_\varphi(T) \notin \Gamma$. Ens servirà per acabar de demostrar la implicació que falta i d'aquesta manera concloure la demostració del teorema.

²La definició de con convex així com la de conjunt convex, es troben al capítol 6: *Apèndix*.

2.3.7 Lema. *Si el mercat $\mathcal{M}$ és viable, tot procés previsible $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ verifica que:*

$$\tilde{G}_\varphi(T) \notin \Gamma.$$

Demostració.

Suposem que $\tilde{G}_\varphi(T) \in \Gamma$, aleshores hi ha una clara contradicció per la definició de viabilitat si $\tilde{G}_\varphi(t) \geq 0$, per a tot $t = 1, \dots, T$, ja que si el procés de beneficis acumulats de l'estratègia φ compleix que $\tilde{G}_\varphi(T) \in \Gamma$, aleshores $P(\tilde{V}_\varphi(T) \geq 0) \geq 0$. Això implica que, per definició φ és una oportunitat d'arbitratge i per tant el mercat $\mathcal{M}$ no és viable.

Si aquesta última proposició no es produeix, *i.e.* $\tilde{G}_\varphi(t) < 0$, procedirem a demostrar el contrarrecíproc, és a dir, construirem una estratègia ψ a partir de φ de manera que el procés de beneficis acumulats $\tilde{G}_\psi(T) \in \Gamma$ i veurem que aleshores el mercat no és viable.

Introduïm l'enter

$$t_0 = \sup \left\{ t \mid P \left(\tilde{G}_\varphi(t) < 0 \right) > 0 \right\}.$$

Tenim:

$$t_0 \leq T - 1, P \left(\tilde{G}_\varphi(t_0) < 0 \right) > 0 \text{ i } \forall m > t_0, \tilde{G}_\varphi(m) \geq 0.$$

Podem definir, per tant, un nou procés ψ que ve donat per

$$\psi_\omega(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq t_0 \\ \mathbb{I}_A(w) \varphi_\omega(j) & \text{si } j > t_0, \end{cases}$$

on A és l'esdeveniment $\left\{ \tilde{G}_\varphi(t_0) < 0 \right\}$. Si utilitzem que φ és un procés previsible i el fet que A és $\mathcal{F}_{t_0}$ -mesurable, tenim com a conseqüència que ψ és també un procés previsible.

D'altra banda

$$\tilde{G}_\psi(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq t_0 \\ \mathbb{I}_A \left(\tilde{G}_\varphi(j) - \tilde{G}_\varphi(t_0) \right) & \text{si } j > t_0. \end{cases}$$

Aleshores, es veu que $\tilde{G}_\psi(j) \geq 0$ per a tot $j \in \{0, \dots, T\}$ i que $\tilde{G}_\psi(T) > 0$ sobre A que contradiu la viabilitat i acaba la demostració del lema. $\square$

Tornant a la demostració, ens falta veure ara que sota la probabilitat P^* equivalent a P el procés de preus $\tilde{S}_t$ és una martingala. Recordem, també, que de moment sabem que el mercat $\mathcal{M}$ és viable per hipòtesi i hem demostrat que el procés $\tilde{G}_\varphi(T) \notin \Gamma$.

És clar que el conjunt $\mathcal{V} = \{\tilde{G}_\varphi(T) \text{ v.a. } |\varphi \in \tilde{\Phi} \text{ i } V_\varphi = 0\}$ de les variables aleatòries de la forma $\tilde{G}_\varphi(T)$, amb φ estratègia de gestió previsible i a valors en $\mathbb{R}^d$ és un subespai vectorial de l'espai format per totes les variables aleatòries reals definides a Ω . Aquesta propietat del conjunt $\mathcal{V}$ és immediata pel fet que la combinació lineal de dues variables aleatòries $X, Y \in \mathcal{V}$ compleixen que $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{V}$ per definició del conjunt $\mathcal{V}$.

A més, pel lema 2.3.7 que acabem de demostrar, es té que el subespai $\mathcal{V}$ compleix $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$, i òbviament $\mathcal{V} \cap K = \emptyset$, on $K = \{X \in \Gamma | \sum_\omega X(\omega) = 1\} \subset \Gamma$.

D'això en resulta, pel *teorema de separació de conjunts convexos*³, que existeix $(\lambda(\omega))_{\omega \in \Omega}$ tal que:

1. $\forall X \in K, \sum_\omega \lambda(\omega) X(\omega) > 0$.
2. $\forall \varphi$ previsible: $\sum_\omega \lambda(\omega) \tilde{G}_\varphi(T)(\omega) = 0$.

De la propietat 1. en deduïm que $\lambda(\omega) > 0$ per a tot $\omega \in \Omega$, de manera que la probabilitat P^* definida per

$$P^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}$$

és equivalent a P .

A més, per la propietat 2 tenim que $\forall$ procés previsible $\hat{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$ a valors en $\mathbb{R}^d$

$$E_{P^*} \left(\sum_{\tau=1}^T \hat{\varphi}(\tau) \cdot \Delta \tilde{S}(\tau) \right) = 0.$$

³Veure *Apèndix*.

Deduïm immediatament que per a tot índex $i \in \{1, \dots, d\}$ i tot procés previsible $\varphi_i(t)$ a valors reals, es té que

$$E_{P^*} \left(\sum_{\tau=1}^T \varphi_i(\tau) \cdot \Delta \tilde{S}_i(\tau) \right) = 0,$$

i per la Proposició 2.3.3, els preus actualitzats $(\tilde{S}_t^1), \dots, (\tilde{S}_t^d)$ són martingala sota la probabilitat P^* . $\square$

2.4 Completesa d'un mercat financer

2.4.1 Definició. Diem que una opció, amb perfil de benefici, h és replicable si existeix una estratègia admissible, $\varphi \in \tilde{\Phi}$, tal que $\tilde{V}_\varphi(T) = h$.

Nota. En un mercat viable, per a que un derivat amb perfil de benefici h sigui replicable és suficient que existeixi una estratègia auto-finançada tal que $\tilde{V}_\varphi(T) = h$.

En efecte, si φ és una estratègia auto-finançada, *i.e.* $\varphi \in \Phi$, i si P^* és una probabilitat equivalent a P sota la qual el procés de preus $(\tilde{S}_t)$ és martingala, aleshores $\tilde{V}_\varphi(T)$ és martingala, com hem vist prèviament i per tant tenim que $\forall t \in 1, \dots, T$, $\tilde{V}_\varphi(t) = E_{P^*}(\tilde{V}_\varphi(T) | \mathcal{F}_t)$. Aleshores, si $\tilde{V}_\varphi(T) = h$, com que $\tilde{V}_\varphi(t) \geq 0$, per a tot $t \geq 0$, l'estratègia φ és admissible, *i.e.* $\varphi \in \tilde{\Phi}$.

2.4.2 Definició. Diem que el mercat $\mathcal{M}$ és complet si tota opció és replicable.

La idea intuïtiva que hi ha darrera aquesta definició és que, un mercat és complet si per a cada un dels derivats que hi cotitzen existeix una estratègia auto-finançada tal que el seu valor a temps $t = T$ vingui donat per $\tilde{V}_\varphi(T) = h$, on h és el valor d'un derivat, és a dir, que el valor final de l'estratègia permeti fer front al pagament d'aquest derivat.

2.4.3 Teorema. *Un mercat viable $\mathcal{M}$ és complet si, i només si, existeix una única probabilitat P^* equivalent a P sota la qual el procés de preus actualitzats $\tilde{S}_t$ és una martingala.*

Demostració.

$\Rightarrow$: Suposem que el mercat viable $\mathcal{M}$ és complet, és a dir que per a tota variable aleatòria h que sigui $\mathcal{F}_T$ -mesurable i no negativa, podem escriure $h = \tilde{V}_\varphi(T)$, on $\varphi \in \tilde{\Phi}$ és una estratègia admissible que replica l'opció de valor h . Notem que tot això deriva de la definició de completesa del mercat $\mathcal{M}$.

Com que φ és una estratègia auto-finançada tenim que

$$\beta^T h = \tilde{V}_\varphi(T) = V_\varphi(0) + \sum_{j=1}^T \varphi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j.$$

Aleshores, si P_1 i P_2 són dues probabilitats sota les quals el procés de preus actualitzats $\tilde{S}$ és martingala, el procés del valor de l'estratègia $\tilde{V}_\varphi(t)$, $\forall t \in 0, 1, \dots, T$ també és martingala sota P_1 i P_2 a la vegada, per ser la transformada de $\tilde{S}$ pel procés previsible φ .

Ara per $i = 1, 2$ es té que

$$E_{P_i}(\tilde{V}_\varphi(T)) = E_{P_i}(\tilde{V}_\varphi(0)) = V_\varphi(0).$$

Per tant, tenim que

$$E_{P_1}(\beta^t h) = E_{P_2}(\beta^t h),$$

en particular podem prendre $h = \mathbb{I}_B$, $\forall B \in \mathcal{F}_T$, aleshores tenim que $P_1 = P_2$.

Per tant queda vist que existeix una única probabilitat P^* equivalent a P , sota la qual $\tilde{S}_t$ és una martingala.

$\Leftarrow$: (*Pel contrarrecíproc*). Suposem que el mercat viable $\mathcal{M}$ no és complet de manera que existeix una variable aleatòria no negativa $h \geq 0$ tal que no és replicable. Aleshores, hem de veure que no existeix una única probabilitat P^* equivalent a P sota la qual el procés de preus $(\tilde{S}_t)$ és una P^* -martingala.

El que farem a continuació és construir una mesura P^{**} equivalent a P i diferent de P^* sota la qual, el procés de preus actualitzats sigui una P^{**} -martingala. Amb això haurem vist que no existeix una única mesura sota la qual els preus actualitzats són martingala, ja que n'haurem construït una segona.

Denotem $\tilde{\mathcal{V}}$ com l'espai de les variables aleatòries de la forma

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{U_0 + \sum_{t=1}^T \varphi_t \cdot \Delta \tilde{S}_t\},$$

on U_0 és $\mathcal{F}_0$ -mesurable i φ és previsible a valors a $\mathbb{R}^d$.

Sabem per la proposició 2.2.8 que "si un procés, $\hat{\varphi}_t$, és previsible i V_0 és $\mathcal{F}_0$ -mesurable, aleshores existeix un únic procés previsible $(\varphi_0(t))_{0 \leq t \leq T}$, tal que φ és auto-finançada i $V_\varphi(0) = V_0$ ". Per tant, notem que $\tilde{\mathcal{V}}$ és l'espai de les variables aleatòries que representen el valor final d'una estratègia auto-finançada.

Notem que, per definició de la variable aleatòria h , es compleix que $h \notin \tilde{\mathcal{V}}$, ja que h no és replicable per hipòtesi i també notem que $\tilde{\mathcal{V}}$ és un subespai de l'espai de les variables aleatòries definides a $(\Omega, \mathcal{F})$. Com $\tilde{\mathcal{V}}$ és un subespai de $(\Omega, \mathcal{F})$ tenim que existeix $\tilde{\mathcal{V}}^\perp \neq \emptyset$ subespai de $(\Omega, \mathcal{F})$, ortogonal a $\tilde{\mathcal{V}}$.

Aleshores, si P^* és una probabilitat equivalent a P sota la qual els preus actualitzats $\tilde{S}_t$ són martingala, tenim que $\forall Y \in \tilde{\mathcal{V}}$, existeix $X \in (\Omega, \mathcal{F})$ no nul·la, tal que

$$(X, Y) \mapsto E_{P^*}(XY) = 0$$

al dotar $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ d'aquest producte escalar. Veiem que existeix aquesta variable aleatòria X no nul·la, ortogonal a $\tilde{\mathcal{V}}$.

Podem escriure doncs,

$$P^{**}(\{\omega\}) = (1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty})P^*(\{\omega\}),$$

on $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$. Com que $E_{P^*}(X) = E_{P^*}(1 \cdot X) = 0$, ja que $1 \in \tilde{\mathcal{V}}$, hem definit d'aquesta manera una nova probabilitat P^{**} , equivalent a P i diferent de P^* . A més, per construcció es té que per a tot $Y \in \tilde{\mathcal{V}}$

$$\begin{aligned} E_{P^{**}}(Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P^{**}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) (1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}) P^*(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P^*(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2\|X\|_\infty} Y(\omega) X(\omega) P^*(\{\omega\}) \\ &= E_{P^*} Y + \frac{1}{2\|X\|_\infty} E_{P^*}(X \cdot Y) = 0, \end{aligned}$$

per a qualsevol procés previsible (φ_t) . Tenim, doncs, que $\tilde{S}_t$ és una P^{**} -martingala. Per tant, un cop haguem vist que P^{**} és una probabilitat, haurérem vist que existeixen dues probabilitats diferents i equivalents a P , sota les quals el procés de preus és una martingala.

Vegem que P^{**} és una probabilitat.

- Vegem que $P^{**}(\Omega) = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} P^{**}(\{\omega\}) &= \sum_{\omega \in \Omega} \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) P^*(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P^*(\{\omega\}) + \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P^*(\{\omega\}) \\ &= 1 + \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) E_{P^{**}}(X) = 1. \end{aligned}$$

- La σ -additivitat es té per construcció de P^{**} .
- Només resta veure que P^{**} està ben definida, és a dir, que $\forall \omega \in \Omega$ $P^{**}(\{\omega\}) \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq P^{**}(\{\omega\}) \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) P^*(\{\omega\}) \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \leq 1 \end{aligned}$$

$0 \leq \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \Leftrightarrow -1 \leq \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty} \Leftrightarrow -2\|X\|_\infty \leq X(\omega)$. Aquesta última desigualtat és evident per la definició de $\|X\|_\infty$.

Si $P^*(\{\omega\}) \neq 0$, aleshores $\left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) P^*(\{\omega\}) \leq 1 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \leq \frac{1}{P^*(\{\omega\})} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-P^*(\{\omega\})}{P^*(\{\omega\})}$.

D'aquesta manera hem vist que P^{**} és probabilitat i és diferent de P^* ja que existeix com a mínim algun $\omega \in \Omega$ tal que $P^*(\{\omega\}) \neq P^{**}(\{\omega\})$. Això acaba la demostració. $\square$

Capítol 3

Models binomials de mercat discret

Un cop tractats el principi de no-arbitratge i la fórmula de paritat, considerarem el cas d'un mercat amb un únic actiu financer, és a dir, considerarem $d = 1$. Començarem construint un model binomial de valoració d'opcions d'un sol període de temps, *i.e.* el conjunt $\mathbb{T}$ de dates possibles per a dur a terme operacions bursàtils està format per $\mathbb{T} = \{0, T\}$. Com tampoc coneixem l'evolució del preu de l'acció (S_t) , la definirem com un procés de variables aleatòries no negatives sobre l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Amb tot això podrem afrontar el problema de determinar el preu $H_0 = \{C_0, P_0\}$ d'una opció. Si considerem l'instant actual de la compra d'un call com $t = 0$, resulta evident que $(S_t)_{t \geq 0}$ ens és desconegut, però pel que hem vist al capítol anterior referent al principi de no arbitratge, podem estimar H per $E_{P^*}(\beta H)$, on β és el factor de descompte, *i.e.* estimem H per la mitjana del seu valor descomptat sota una certa probabilitat P^* .

Per tant el problema de la valoració d'opcions, es redueix a determinar una probabilitat P^* que anomenarem probabilitat neutral al risc, sota la qual el procés de preus $(S_t)_{t \geq 0}$ sigui una martingala.

Vegem, tot seguit, un exemple de com determinar la probabilitat sota la qual el procés $(S_t)_{t \geq 0}$ de preus d'una certa acció és una martingala.

3.0.4 Exemple. Suposem que el preu d'un actiu financer és de $S_0 = 10\text{€}$ i que als 3 mesos prenen un dels dos possibles valors: $S_T^{(u)} = 20\text{€}$, o bé $S_T^{(d)} = 7.5\text{€}$. Si el tipus d'interès és del 0.01 anual, vegem quin és el valor d'una opció de compra $H = (S_T - K)^+$ amb preu d'exercici 15€ , sota la hipòtesi de no arbitratge.

Tal i com hem definit el factor de descompte prèviament, tenim que com 3 mesos corresponen a $1/4$ d'un any $r = \frac{0.01}{4}$ i per tant $\beta^{-1} = (1 + r) = 1.0025$.

Ara podem expressar el preu de l'acció als 3 mesos com

$$S_T = \begin{cases} S_T^{(u)} = 20\text{€} = S_0 \cdot u = S_0 \cdot \frac{20}{10} \\ S_T^{(d)} = 7.5\text{€} = S_0 \cdot d = S_0 \cdot \frac{7.5}{10}. \end{cases}$$

És obvi que la funció H proporcionarà un benefici $h^{(u)} = 5\text{€}$ si $S_T = S_T^{(u)} = 20\text{€}$, o bé $h^{(d)} = 0\text{€}$ si $S_T = S_T^{(d)} = 7.5\text{€}$

$$H = \begin{cases} 5\text{€}, & \text{si } S_T = 20\text{€} \\ 0\text{€}, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Ara, fent servir el principi de no arbitratge, sabem que existeix una probabilitat Q equivalent a P , sota la qual el procés de preus S és una martingala, és a dir,

$$E_Q((1 + r)^{-1} S_T) = E_Q(S_0) = S_0.$$

Si ara definim $p = Q(S_T = S_0 \cdot u)$ i $(1 - p) = Q(S_T = S_0 \cdot d)$ tenim que podem fer el càlcul de $E_Q(S_T)$:

$$\begin{aligned} E_Q((1 + r)^{-1} S_T) &= (1 + r)^{-1} E_Q(S_T) = S_0 \Rightarrow (1 + r) S_0 = E_Q(S_T) \\ (1 + r) S_0 &= (S_0 \cdot u) p + (S_0 \cdot d) (1 - p). \end{aligned}$$

Ara, com coneixem totes les incògnites de l'equació, excepte p , si l'aïllem obtenim que

$$p = \frac{(1 + r) - d}{u - d} = 0.202 \text{ i } (1 - p) = \frac{u - 1 - r}{1 - d} = 0.798.$$

Un cop determinada la probabilitat Q , que anomenarem probabilitat neutral al risc, veiem que el preu a pagar per l'opció a temps $t = 0$ ve donat per

$$\begin{aligned} H_0 &= E_Q(\beta(S_T - K)^+) = \beta E_Q((S_T - K)^+) \\ &= \frac{1}{1.0025}(h^{(u)} \cdot p + h^{(d)} \cdot (1 - p)) = \frac{1}{1.0025}(5p + 0(1 - p)) \\ &= 1.0075 \text{ €} \simeq 1 \text{ €}. \end{aligned}$$

3.1 Model Binomial d'un sol període

Suposem que el preu d'una acció pren el valor S_0 , conegut a temps $t = 0$ i un altre valor aleatori S_T a temps $t = T$, ja que aquests són els dos únics períodes d'inversió que té el model.

Sabent que el preu de l'acció S_T i el pagament d'una opció $H = C_T$ o bé $H = P_T$ són dues variables aleatòries, cal trobar una estratègia d'inversió que permeti fer front al pagament H a temps $t = T$, això és que $V_T = H$.

Per tal d'aconseguir-ho, construirem una cartera a temps $t = 0$, que consisteix en un nombre θ d'accions i η unitats de capital, de manera que el valor inicial de la cartera V_0 es pot escriure com

$$V_0 = \eta + \theta S_0.$$

Vegem que s'ha de complir la condició $V_T = \eta + \theta S_T = H$ a temps $t = T$. Equivalentment, en termes del valor descomptat vegem que $\tilde{V}_T = \tilde{H}$.

Si $V_T = \eta + \theta S_T$ ha de ser H , aleshores tenim, de manera trivial, que

$$\eta = H - \theta S_T,$$

i per tant podem expressar V_T com

$$V_T = \eta + \theta S_T = (H - \theta S_T) + \theta S_T = H,$$

Ara, només resta determinar l'estratègia d'inversió (θ, η) , *i.e.* determinar aquestes dues constants, de manera que no hi hagi la necessitat de recórrer a cap fons monetari extra per a fer front al pagament de H , a temps $t = T$.

Recordem que el valor de la nostra cartera inicialment, a temps $t = 0$, té la forma

$$V_0 = \eta + \theta S_0,$$

i quan deixem passar el temps $t = 0 \longrightarrow t = T$, esdevé

$$H = \eta\beta^{-1} + \theta S_T = V_0 + \theta\Delta S.$$

Observem que per fer una cobertura de la cartera, de manera que el seu valor V_T a temps $t = T$ sigui H només hem de determinar θ en funció del preu de l'actiu al mercat.

Un model molt senzill, s'obté de prendre ΔS com una partició binomial de l'espai mostral, *i.e.* prenent S_T com una variable aleatòria en l'espai de probabilitats Ω , de manera que S_T vingui determinada per

$$S_T = \begin{cases} (1+b) S_0, & \text{amb probabilitat } p \\ (1+a) S_0, & \text{amb probabilitat } (1-p). \end{cases}$$

amb $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a < r < b$ (per tal d'evitar oportunitats d'arbitratge) i $0 < p < 1$, tals que

$$P(S_T = (1+b) S_0) = p \text{ i } P(S_T = (1+a) S_0) = 1-p.$$

Ara per a qualsevol valor de H podem trobar θ i V_0 , tals que

$$P(\tilde{H} = V_0 + \theta\Delta\tilde{S}) = 1,$$

de la següent manera.

Escriurem $H = h^b$ quan $S_T = (1+b) S_0 = S^b$ i anàlogament $H = h^a$ quan $S_T = (1+a) S_0$. Ara hem d'escollir θ i V_0 , per satisfer

$$\begin{cases} \beta h^b = V_0 + \theta(\beta(1+b) S_0 - S_0) \\ \beta h^a = V_0 + \theta(\beta(1+a) S_0 - S_0) \end{cases} \quad (3.1)$$

Ara restant,

$$\begin{aligned}
 \beta (h^b - h^a) &= \theta (\beta (1 + b) S_0 - S_0 - \beta (1 + a) S_0 + S_0) \Rightarrow \beta (h^b - h^a) \\
 &= \theta (\beta (b - a) S_0) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \theta &= \frac{h^b - h^a}{(b - a) S_0} = \frac{h^b - h^a}{S^b - S^a} = \frac{\delta V}{\delta S},
 \end{aligned}$$

on aquesta última expressió denota el canvi relatiu en V respecte el canvi en el preu de l'acció. Aquest paràmetre també s'anomena paràmetre *delta*.

Podem determinar la inversió inicial V_0 necessària per a dur a terme l'estratègia de cobertura mitjançant (3.1) de la següent manera

Per (3.1) tenim que $V_0 = \beta h^a - \theta (\beta (1 + a) S_0 - S_0)$ i substituint θ per l'expressió que hem trobat tenim

$$V_0 = \beta h^a - \left(\frac{h^b - h^a}{S^b - S^a} \right) (\beta S^a - S_0) = \beta \left(h^b \frac{\beta^{-1} S_0 - S^a}{S^b - S^a} + h^a \frac{S^b - \beta^{-1} S^a}{S^b - S^a} \right) \quad (3.2)$$

En particular, quan $\beta = (1 + r)^{-1}$, obtenim

$$V_0 = \frac{1}{1 + r} \left(h^b \frac{(1 + r) S_0 - S^a}{S^b - S^a} + h^a \frac{S^b - (1 + r) S_0}{S^b - S^a} \right).$$

Podem introduir ara el concepte de volatilitat σ que desenvoluparem més en profunditat al capítol del Model de Black-Scholes, ja que jugarà un paper molt important a l'hora de desenvolupar el model. La volatilitat mesura la variabilitat del preu de l'acció S i es pot calcular fent el quocient de $S_T/S_0 = 1 + \xi$, on la variable aleatòria de Bernoulli ξ pren valors entre b i a , amb probabilitats p i $(1 - p)$, respectivament. Per tant σ es pot calcular com

$$\sigma^2 = (b - a)^2 p (1 - p),$$

ja que la volatilitat σ és la varianza de la variable aleatòria $\xi \in (a, b)$ i que té una distribució de Bernoulli de paràmetre p . Per tant $\sigma = \text{Var}[\xi]$ on $\xi \sim \text{Ber}(p)$.

3.1.1 Exemple. Considerarem el cas en que $H = C_T = (S_T - K)^+$ és una opció de compra europea amb un preu strike K . A més, suposarem que $(1 + a) S_0 < K < (1 + b) S_0$ i que la taxa d'interès lliure de risc $r \in (a, b)$ és constant, de manera que $\beta = (1 + r)^{-1}$. Aleshores tenim que

$$h^b = (1 + b) S_0 - K \text{ i } h^a = 0,$$

de manera que

$$\theta = \frac{h^b - h^a}{S_0(b - a)} = \frac{(1 + b) S_0 - K}{S_0(b - a)}.$$

Amb tot això, tenim que el preu neutral al risc de l'opció és

$$V_0 = \frac{1}{1 + r} \left(\frac{r - a}{b - a} \right) (S_0(1 + b) - K).$$

Per (3.2), sabem que $V_0 = \beta \left(h^b \frac{\beta^{-1} S_0 - S^a}{S^b - S^a} + h^a \frac{S^b - \beta^{-1} S^a}{S^b - S^a} \right) = \beta \left(h^b \frac{\beta^{-1} S_0 - S^a}{S^b - S^a} \right)$, ja que $h^a = 0$. Ara

$$\begin{aligned} \beta \left(h^b \frac{\beta^{-1} S_0 - S^a}{S^b - S^a} \right) &= \frac{1}{1 + r} \left(\frac{(1 + r) S_0 - (1 + a) S_0}{(1 + b) S_0 - (1 + a) S_0} \right) h^b \\ &= \frac{1}{1 + r} \left(\frac{r - a}{b - a} \right) h^b \\ &= \frac{1}{1 + r} \left(\frac{r - a}{b - a} \right) (S_0(1 + b) - K). \end{aligned}$$

Notem que la diferenciació respecte b i a , respectivament mostra en aquest cas que el preu de l'opció augmenta amb b i disminueix amb a .

Vegem un exemple pràctic sobre un cas real.

Suposem que la taxa d'interès lliure de risc és $r = 0$, $S_0 = 1 = K$, on K és el preu *strike*, de manera que $V_0 = \frac{-ab}{(b-a)}$.

Per $b = -a = 0.05$, tenim que $V_0 = 0.025$, *i.e.*

$$S_T = \begin{cases} 1.05 S_0 \\ 0.95 S_0 \end{cases} \Rightarrow V_0 = 0.025,$$

i la volatilitat del preu de l'acció és $\sigma^2 = 0.1p(1 - p)$.

3.2 Model Binomial de diversos períodes

Ara considerem un model binomial de valoració d'opcions però amb dates d'operació $0, 1, 2, \dots, T$, *i.e.* $T \in \mathbb{N}; T > 1$. Amb això volem dir que el preu de l'acció pren valors $S_0, S_1, S_2, \dots, S_T$ i $\forall t \leq T$, tenim que

$$S_t = \begin{cases} (1+b) S_{t-1}, \text{ amb probabilitat } p \\ (1+a) S_{t-1}, \text{ amb probabilitat } (1-p), \end{cases}$$

on, de la mateixa manera que abans, $r > 0$ és la taxa d'interès lliure de risc (de manera que $\beta = (1+r)^{-1}$) i $a < r < b$.

De nou, suposarem que H_T és el pagament que s'ha d'efectuar a temps $t = T$. Considerem el valor de H_{T-1} a temps $t = T-1$, és a dir, un període abans que arribi la data de venciment $t = T$. Podem considerar-ho com el valor inicial del pagament al model binomial d'un sol període que acabem de construir en l'apartat anterior, de manera que existeix una única estratègia d'inversió (θ, η) que permetrà fer front al pagament H_T en el conjunt de dates $\{T-1, T\}$ i una mesura neutral de risc Q . Per tant podem calcular el valor de βH com la seva esperança sota la probabilitat Q , *i.e.* $H_{T-1} = E_Q(\beta H_T)$.

Per ser més concrets, suposem que $H_T = (S_T - K)^+$ és un call amb preu strike K i data de venciment $t = T$. De la mateixa manera que ho hem fet amb el model binomial d'un sol període i per tal de simplificar la notació, definim $h^b = H_T$, si $S_T = (1+b) S_{T-1}$ i $h^a = H_T$, de manera anàloga, si $S_T = (1+a) S_{T-1}$. Aleshores el valor d' H_{T-1} ve donat per

$$H_{T-1} = E_Q(\beta H_T) = E_Q\left(\frac{H_T}{1+r}\right),$$

on Q és la mesura que ve donada per $(q, 1-q)$, per tant

$$H_{T-1} = \frac{1}{1+r} (qh^b + (1-q)h^a),$$

amb

$$q = \frac{(1+r)S_{T-1} - (1+a)S_{T-1}}{(1+b)S_{T-1} - (1+a)S_{T-1}} = \frac{r-a}{b-a}.$$

De nou, això ens mostra perquè hem anomenat Q com la mesura neutral de risc, ja que un inversor neutre de risc, és aquell que és indiferent a una inversió amb un cert grau de benefici, d'una altra la qual la incertesa del grau de benefici té el mateix valor estimat, és a dir, sota Q , l'esperança de S_T , suposant que $S_{T-1} = S$, ve donada per la següent expressió

$$E_Q(S_T | S_{T-1} = S) = q(1+b)S + (1-q)(1+a)S = (1+r)S.$$

Per conèixer la V_0 que ens permetrà fer front al pagament d' H a la data de venciment $t = T$, només hem d'anar iterant aquest procés, canviant el conjunt de dates de manera successiva per: $\{T-1, T\}, \{T-2, T-1\}, \dots, \{1, 0\}$.

Farem com a cas particular el model de dos períodes.

$$S_T = \begin{cases} (1+b) S_{T-1} = \begin{cases} (1+b)^2 S_{T-2} \\ (1+a)(1+b) S_{T-2} \end{cases} \\ (1+a) S_{T-1} = \begin{cases} (1+b)(1+a) S_{T-2} \\ (1+a)^2 S_{T-2} \end{cases} \end{cases}$$

Notem que $(1+a)(1+b) S_{T-2} = (1+b)(1+a) S_{T-2}$, per tant només hi ha tres valors possibles a prendre. Ara aplicarem aquest anàlisi al valor V_{T-2} del Call H a temps $t = T-2$.

L'acció, el valor de la qual és S_{T-2} l'escriurem com S per facilitar la notació, i pot prendre els tres únics valors que acabem de veure: $(1+b)^2 S$, $(1+b)(1+a) S$, $(1+a)^2 S$ a temps $t = T$. Per tant, el call H ha de tenir un d'aquests tres valors a la data de venciment. Podem escriure aquests valors com h^{bb}, h^{ab}, h^{aa} respectivament, per tal de simplificar la notació.

Ara de l'expressió (3.2) de V_0 i utilitzant la definició de q

$$q = \frac{\beta^{-1} S_0 - S^a}{S^b - S^a}, 1 - q = \frac{S^b - \beta^{-1} S_0}{S^b - S^a},$$

podem extreure'n els possibles valors de V_{T-1} , ja que

$$\begin{aligned} V^b &= \beta (qh^{bb} + (1-q)h^{ab}) \\ V^a &= \beta (qh^{ab} + (1-q)h^{aa}) \end{aligned}$$

respectivament.

Per cada un d'aquests casos haurem trobat el valor de l'opció a temps $t = T-1$ i per tant podrem escollir una estratègia d'inversió (θ, η) adequada com abans. El valor dels paràmetres θ i η es determinen a cada pas de la mateixa manera que ho hem fet en el model binomial d'un sol període per tal de no haver de ingressar diners al compte per fer front al pagament d' H a la data $t = T$ de venciment del call.

Obtenim doncs que

$$\begin{aligned} V_{T-2} &= \beta (qV^b + (1-q)V^a) \\ &= \beta \{q\beta (qh^{bb} + (1-q)h^{ab}) + (1-q)\beta (qh^{ab} + (1-q)h^{aa})\} \\ &= \beta^2 \left\{ q[(1+b)^2 S - K]^+ + 2q(1-q)[(1+a)(1+b)S - K]^+ \right. \\ &\quad \left. + (1-q)^2 [(1+a)^2 S - K]^+ \right\}. \end{aligned}$$

Per tant, el valor actual del pagament està únicament determinat per quantitats conegudes per l'inversor a temps $t = T - 2$.

Capítol 4

El model discret de Cox-Ross-Rubinstein

Observant el desenvolupament de l'expressió de V_{T-2} en el model binomial de diversos períodes del capítol anterior, podem continuar la recursió cap enrere per tal de calcular el procés de valors $V = (V_t)$, per a tot $t \leq T$.

Prenent $\beta = (1+r)^{-1}$ com a factor de descompte, la inversió inicial necessària per a fer front al pagament d'una opció de compra europea de benefici C_T , és a dir, el valor V_0 ve donat per la següent expressió

$$\begin{aligned} V_0 &= \beta^T \sum_{t=0}^T \frac{T!}{t!(T-t)!} q^t (1-q)^{T-t} \left[(1+b)^t (1+a)^{T-t} S_0 - K \right]^+ \\ &= S_0 \sum_{t=A}^T \frac{T!}{t!(T-t)!} q^t (1-q)^{T-t} \left[\frac{(1+b)^t (1+a)^{T-t}}{(1+r)^T} \right] \\ &\quad - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{t=A}^T \frac{T!}{t!(T-t)!} q^t (1-q)^{T-t}, \end{aligned}$$

on $A = \inf \left\{ k \in \mathbb{Z} \mid S_0 (1+b)^k (1+a)^{T-k} > K \right\}$.

Observem que utilitzant $q = \frac{(r-a)}{(b-a)}$ i $q' = q \frac{(1+b)}{(1+r)}$, obtenim que $q' \in (0, 1)$ i $(1-q') = \frac{(1-q)(1+a)}{(1+r)}$. D'aquesta manera podem escriure el preu neutral al risc d'un call, com

$$V_0 = S_0 \Psi(A; T, q') - K (1+r)^{-T} \Psi(A; T, q). \quad (4.1)$$

on Ψ és la funció de distribució binomial complementària, és a dir, ve definida

com

$$\Psi(m; n, p) = \sum_{j=m}^n \frac{n!}{j! (n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}.$$

La fórmula (4.1) és el que es coneix com a fórmula de *Cox-Ross-Rubinstein* de valoració binomial d'un call europeu.

Però veurem tot seguit una variant d'aquesta fórmula que s'obté de calcular directament l'esperança d' H sota la mesura Q neutral de risc utilitzant la propietat de martingala del procés de preus descomptats $(\tilde{S}_t)$, sota aquesta mesura.

Abans però, veurem com fer la cobertura d'un call fent-ne la seva valoració amb aquest model. És a dir, hem de determinar una estratègia d'inversió (η_t, θ_t) .

Està clar que el valor V_t de l'opció a temps $t \leq T$ ve donat per la fórmula

$$V_t = S_t \Psi(A_t; T-t, q') - K (1+r)^{-(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q),$$

on, de nou, $A_t = \inf \left\{ k \in \mathbb{Z} : S_t (1+b)^k (1+a)^{T-t} > K \right\}$. Ara l'estratègia d'inversió (θ_t, η_t) a l'interval de temps $[t-1, t)$ per tal de fer front a V_t és

$$V_t = \theta_t S_t + \eta_t (1+r).$$

Per tant V_t ve determinat per S_{t-1} i el moviment del preu a l'interval $[t-1, t)$ de manera que prenen dos possibles valors, depenent de si $S_t = (1+b) S_{t-1}$ o bé $S_t = (1+a) S_{t-1}$. Escrivint V_t^b i V_t^a respectivament, hem de resoldre el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \theta_t (1+b) S_t + \eta_t (1+r) = V_t^b \\ \theta_t (1+a) S_t + \eta_t (1+r) = V_t^a \end{cases}$$

Un altre cop obtenim que

$$\theta_t = \frac{V_t^b - V_t^a}{(b-a) S_{t-1}}, \quad \eta_t = \frac{(1+b) V_t^a - (1+a) V_t^b}{(1+r)(b-a)}.$$

Ara podem escriure, de manera anàloga com ho vam fer en la cobertura del model binomial d'un sol període, les expressions binomials de V_t^a i V_t^b , i

acabar determinant (θ_t, η_t) .

$$\begin{aligned}
\theta_t &= \frac{V_t^b - V_t^a}{(b-a) S_{t-1}} \\
&= \frac{(1+b) S_{t-1} \Psi(A_t; T-t, q') - K(1+r)^{-(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q)}{(b-a) S_{t-1}} \\
&\quad - \frac{(1+a) S_{t-1} \Psi(A_t; T-t, q') - K(1+r)^{-(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q)}{(b-a) S_{t-1}} \\
&= \frac{((1+b) - (1+a)) S_{t-1} \Psi(A_t; T-t, q')}{(b-a) S_{t-1}} \\
&= \Psi(A_t; T-t, q') \\
&= \sum_{s=A_t}^{T-t} \frac{(T-t)!}{s! (T-t-s)!} (q')^s (1-q)^{T-t-s}.
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\eta_t &= \frac{(1+b) V_t^a - (1+a) V_t^b}{(b-a)(1+r)} \\
&= \frac{(1+b) \left[(1+a) S_{t-1} \Psi(A_t; T-t, q') - K(1+r)^{-(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q) \right]}{(b-a)(1+r)} \\
&\quad - \frac{(1+a) \left[(1+b) S_{t-1} \Psi(A_t; T-t, q') - K(1+r)^{-(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q) \right]}{(b-a)(1+r)} \\
&= \frac{(1+b) \left(-K(1+r)^{-(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q) \right)}{(b-a)(1+r)} \\
&\quad - \frac{(1+a) \left(-K(1+r)^{-(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q) \right)}{(b-a)(1+r)} \\
&= \frac{-K(1+r)^{-(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q)}{(1+r)}.
\end{aligned}$$

Finalment tenim que les expressions de θ_t i η_t són

$$\begin{aligned}
\theta_t &= \sum_{s=A_t}^{T-t} \frac{(T-t)!}{s! (T-t-s)!} (q')^s (1-q)^{T-t-s}, \\
\eta_t &= -K(1+r)^{-(T-t)} \sum_{s=A_t}^{T-t} \frac{(T-t)!}{s! (T-t-s)!} (q')^s (1-q)^{T-t-s}.
\end{aligned}$$

Vegem ara, el model binomial de Cox-Ross-Rubinstein desde un altre punt de vista que ens proporcionarà un exemple de la importància de la teoria de martingales que hem desenvolupat prèviament.

Recordem que el model ha estat desenvolupat sobre un actiu, és a dir, que hem pres per tal de simplificar els càlculs $d = 1$ i per tant només considerarem un únic actiu $S_1 = S$, a part de l'actiu lliure de risc, és a dir, el compte bancari. Recordem que prenem una taxa d'interès lliure de risc $r > 0$, de manera que prenent $S_0(t) = (1 + r)^t$, per a tot $t \leq T$ i per tant $\beta(t) = (1 + r)^{-t}$.

Hem vist també que, les successives variables aleatòries que determinen el preu de l'actiu $S(t) \forall t \leq T$ segueixen una distribució de Bernoulli, és a dir, per a tot $t \leq T$, $S_t = (1 + b)S_{t-1}$ o bé $S_t = (1 + a)S_{t-1}$, on $b > a > -1$ estan fixades, mentre que $S_0(0)$ és constant. Per tant podem escollir l'espai mostral convenientment de la següent manera

$$\Omega = \{1 + a, 1 + b\}^T; \mathbb{T} = \{1, 2, \dots, T\},$$

juntament amb la filtració de σ -àlgebres escollida a l'inici del capítol ($\mathcal{F}_t$) on, recordem, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_t = \{S(u); u \leq t\}$ per a tot $t \leq T$. Notem que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F} = 2^\Omega$ és la σ -àlgebra de tots els subconjunts de Ω , i.e. $\mathcal{P}(\Omega)$.

La probabilitat P a Ω és la induïda pels canvis del preus S_t . Definim $R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$, de manera que ara per a tot $\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)\} \in \Omega$, definim

$$P(\{\omega\}) = P(R_t = \omega_t; t = 1, 2, \dots, T).$$

Per a qualsevol mesura Q a $(\Omega, \mathcal{F})$, el fet que el procés de preus descomptats sigui una Q -martingala, és a dir, $E_Q(\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \tilde{S}_{t-1}$ és equivalent a que

$$E_Q(R_t | \mathcal{F}_{t-1}) = (1 + r),$$

ja que $\beta_t / \beta_{t-1} = 1 + r$. Per tant si Q és una mesura de probabilitat equivalent sota la qual el procés de preus S_t és una martingala, tenim que $E_Q(R_t) = (1 + r)$. D'altra banda, R_t només pren els valors $1 + a$ i $1 + b$, per tant el seu valor promig pot ser $1 + r$ només si $a < r < b$.

Hem provat prèviament, en el *Capítol 2. Model de mercat discret* que:

1. Per a tenir una mesura de probabilitat equivalent, al model binomial, sota la qual el procés de preus S_t sigui una martingala s'ha de tenir que $a < r < b$.

2. Quan el model binomial és viable, hi ha una única mesura equivalent Q sota la qual, S és una Q -martingala. Podem construir aquesta mesura veient el lema següent:

4.0.1 Lema. $\tilde{S}$ és una Q -martingala si, i només si, les variables aleatòries (R_t) són i.i.d. (independents idènticament distribuïdes) amb $Q(R_1 = 1 + b) = q$ i $Q(R_1 = 1 + a) = 1 - q$, on $q = (r - a) / (b - a)$.

Demostració.

$\Leftarrow$: Per veure-ho, notem que, sota la independència de les variables aleatòries (R_t) , es satisfarà la igualtat

$$E_Q(R_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E_Q(R_t) = q(1 + b) + (1 - q)(1 + a) = q(b - a) + 1 + a = 1 + r.$$

Per tant pel que hem vist abans, $\tilde{S}$ és una Q -martingala.

$\Rightarrow$: Si $E_Q(R_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 1 + r$, aleshores, com R_t pren només els valors $1 + a$, $1 + b$ tenim que

$$(1 + a)Q(\{R_t = 1 + a\} | \mathcal{F}_{t-1}) + (1 + b)Q(\{R_t = 1 + b\} | \mathcal{F}_{t-1}) = 1 + r,$$

mentres que

$$Q(\{R_t = 1 + a\} | \mathcal{F}_{t-1}) + Q(\{R_t = 1 + b\} | \mathcal{F}_{t-1}) = 1.$$

Si $q = Q(\{R_t = 1 + b\} | \mathcal{F}_{t-1})$, aleshores obtenim que

$$(1 + a)(1 - q) + (1 + b)q = 1 + r,$$

Per tant $q = (r - a) / (b - a)$. La independència de les variables aleatòries R_t es demostra per inducció sobre $t > 0$, ja que $\forall \omega \in \Omega$; $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$

$$Q(R_1 = \omega_1, R_2 = \omega_2, \dots, R_T = \omega_T) = \prod_{i=1}^t q_i,$$

on $q_i = q$ quan $\omega_i = 1 + b$ i és igual a $1 - q$ quan $\omega_i = 1 + a$. Per tant les variables aleatòries (R_t) són i.i.d.

La fórmula de valoració de Cox-Ross-Rubinstein:

La fórmula que hem obtingut a l'inici del capítol per mitjà de l'argument d'anar calculant l'estratègia d'inversió a cada pas, es pot deduir, també, mitjançant la formulació de martingales calculant l'esperança sota la mesura Q d'una opció de compra europea.

Més generalment, el valor del call $C_T = (S_T - K)^+$ a temps $t \leq T$ ve donat per

$$V_t(\theta) = \beta_t^{-1} E_Q(\beta_T H | \mathcal{F}_t),$$

és a dir,

$$V_T = \beta_T^{-1} E_Q(\beta_T C_T | \mathcal{F}_T).$$

Com $S_T = S_t \prod_{u=t+1}^T R_u$, per la definició de R_u , podem calcular la seva esperança de manera senzilla, ja que S_t és $\mathcal{F}_t$ -mesurable i cada R_u amb ($u > t$) és independent de $\mathcal{F}_t$:

$$\begin{aligned} V_T &= \beta_t^{-1} \beta_T E_Q \left(\left(S_t \prod_{u=t+1}^T R_u - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right) \\ &= (1+r)^{t-T} E_Q \left(\left(S_t \prod_{u=t+1}^T R_u - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right) = v(t, V_t), \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} v(t, x) &= (1+r)^{t-T} E_Q \left(\left(x \prod_{u=t+1}^T R_u - K \right)^+ \right) \\ &= (1+r)^{-(T-t)} \sum_{u=0}^T \frac{T!}{u! (T-t-u)!} q^u (1-q)^{T-t-u} \\ &\quad \cdot \left(x (1+b)^u (1+a)^{T-t-u} - K \right)^+. \end{aligned}$$

En particular, el preu a temps $t = 0$ del call ve donat per

$$\begin{aligned} &E_Q(\tilde{C}_T) = v(0, S_0) \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{u=A}^T \left[\frac{T!}{u! (T-u)!} q^u (1-q)^{T-u} \cdot \left(S_0 (1+b)^u (1+a)^{T-u} - K \right) \right] \end{aligned}$$

on A és el primer natural $k \in \mathbb{N}$ pel qual $S_0 (1+b)^k (1+a)^{T+k} > K$. Per tant hem escrit la fórmula de *Cox-Ross-Rubinstein* en termes de l'esperança del valor del call respecte la mesura Q , sota la qual el procés de preus S_t és una martingala. Aquesta mesura Q se l'anomena mesura neutral al risc.

Aquest model conegut pel nom de model de Cox-Ross-Rubinstein va ser desenvolupat per tres economistes, John Carrington Cox, Stephen A. Ross i Mark Rubinstein i presentat al 1979 en forma d'article sota el títol "*Option pricing: A simplified approach*"[10] i publicat al *Journal of financial economics*.

Capítol 5

El model continu de Black-Scholes

El que voldríem fer a continuació és, no tan sols quedar-nos amb un nombre finit de valors de S_t en l'interval de n períodes $[0, T]$, amb n finit i desenvolupar tota la teoria a partir d'aquí, sinó portar el model binomial que hem desenvolupat al límit, és a dir, si teniem n períodes de llargada T/n en els quals es dividia l'interval $[0, T]$ que representava la vida de l'opció, volem fer tendir aquest n a infinit i deixar T fixada.

Per tant el que farem és veure que el model de *Black-Scholes* és el resultat de portar el model de *Cox-Ross-Rubinstein* al límit.

Considerem el procés de preus $S = (S_t)$, $\forall t \in [0, T]$, un put i un call amb perfil de benefici $P_T = (K - S_T)^+$, $C_T = (S_T - K)^+$ respectivament. Prenem una partició de l'interval $[0, T]$, de mida $\frac{T}{N}$, de manera que $t_i^{(N)} = i \cdot \frac{T}{N}$, $\forall i \in \{0, \dots, N\}$ i reescrivim el procés de valors de l'actiu com

$$S_i = S_{t_i}.$$

Prenem $r_N = r \cdot \frac{T}{N}$ com a taxa d'interès lliure de risc de manera que el preu d'1€ a dia d'avui esdevé $(1 + r_N)$ €, al cap d'un període de mida $\frac{T}{N}$.

De la mateixa manera que hem fet al model binomial, considerem que el preu de l'actiu pot variar al llarg d'un període de la següent manera, és a dir, donant lloc a dos possibles escenaris:

$$S_0 = \begin{cases} S_0 u, & \text{tal que } u = (1 + r_N) e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \\ S_0 d, & \text{tal que } d = (1 + r_N) e^{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}} \end{cases}$$

Igual que amb els models vistos en els capítols anteriors, observem que

$$d < (1 + r_N) < u.$$

D'altra banda, resulta evident que podem escriure

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^n T_i^N,$$

on $T_i \in \{u, d\}$. També sabem que

$$\begin{aligned} P(T_i^N = u) &= p_N = \frac{1 + r_N - d}{u - d} = \frac{1 - e^{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}}} \\ P(T_i^N = d) &= 1 - p_N = \frac{u - 1 - r}{u - d} = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - 1}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}}}. \end{aligned}$$

Definim tot fent un canvi d'escala, les variables aleatòries $X_i^N := \log(\frac{T_i^N}{1+r_N})$, de manera que $X_i^N \sim \text{Ber}(p)$, sobre $\{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\}$. Podem, doncs, reescriure S_n com

$$\begin{aligned} S_N &= S_0 \prod_{i=1}^N (1 + r_N) e^{X_i^N} \\ \Rightarrow \log(S_N) &= \log(S_0) + \sum_{i=1}^N \log(1 + r_N) X_i^N \\ \Rightarrow \log(S_N) &= \log(S_0) + \log(1 + r_N)^N + \sum_{i=1}^N X_i^N. \end{aligned}$$

Vegem què passa quan fem tendir $N \rightarrow \infty$, mentres que deixem T fixada, és a dir, estudiem com es comporta l'expressió que hem obtingut de S_n quan n tendeix a infinit.

Estudiem per separat cada part del sumand de l'expressió quan $N \rightarrow \infty$

$$- \log(1 + r_N)^N \rightarrow rT \text{ quan } n \rightarrow \infty, \text{ ja que } (1 + r_N)^N = (1 + r \frac{T}{N}) \rightarrow e^{rT} \text{ quan } n \rightarrow \infty.$$

Ara, observem que

$$\begin{aligned} \mu &= \lim_{N \rightarrow +\infty} E\left(\sum_{i=1}^N X_i^N\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma \sqrt{N} (2p_N - 1) \\ v &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i^N\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} 4\sigma^2 p_N (1 - p_N), \end{aligned}$$

on $p_N = \frac{1 - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}$. En efecte, fent servir els desenvolupaments de Taylor de l'exponencial quan $x \approx 0$ tenim que

$$\begin{aligned} p_N &= \frac{1 + r_N - d}{u - d} = \frac{1 - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}} \\ &= \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^3 \dots}{2\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{2}{3!}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^3 + \frac{2}{5!}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^5 \dots} \rightarrow \frac{1}{2}; N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Coneguda la probabilitat quan $N \rightarrow +\infty$ és immediat que podem conèixer μ i v , que són els paràmetres esperança i variància de la llei que regula el procés de preus S_T

$$\begin{aligned} \mu &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma \sqrt{N} (2p_N - 1) \rightarrow \frac{-\sigma^2}{2}; N \rightarrow +\infty \\ v &= \lim_{N \rightarrow +\infty} 4\sigma^2 p_N (1 - p_N) \rightarrow \sigma^2; N \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Demostració.

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} N \cdot E(X^N) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{N} \sigma (2p_N - 1) \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} N \cdot \text{Var}(X^N) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma^2 4p_N (1 - p_N), \end{aligned}$$

si $p_N \rightarrow \frac{1}{2}$ es té

$$\begin{aligned} N \cdot E(X^N) &\sim \infty \cdot 0 \\ \sigma^2 \cdot 4p_N (1 - p_N) &\rightarrow \sigma^2, \text{ quan } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Per tant

$$v = \sigma^2.$$

Ara demostrem el valor del límit de l'esperança μ .

$$\begin{aligned} 2p_N - 1 &= \frac{2 - 2e^{-\sigma/\sqrt{N}} - e^{\sigma/\sqrt{N}} + e^{-\sigma/\sqrt{N}}}{e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}} \\ &= \frac{\frac{2\sigma}{\sqrt{N}} - \frac{\sigma^2}{N} + 2o(\frac{1}{N\sqrt{N}}) - \frac{2\sigma}{\sqrt{N}} - o(\frac{1}{N\sqrt{N}})}{2\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + o(\frac{1}{N\sqrt{N}})} \\ &= \frac{-\frac{\sigma^2}{N} + o(\frac{1}{N\sqrt{N}})}{2\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + o(\frac{1}{N\sqrt{N}})} = \frac{-\frac{\sigma^2}{\sqrt{N}} + o(\frac{1}{N})}{2\sigma + o(\frac{1}{N})} \\ \Rightarrow \sqrt{N}\sigma(2p_N - 1) &= \frac{-\frac{\sigma^2}{\sqrt{N}} + o(\frac{1}{N})}{2\sigma + o(\frac{1}{N})} \longrightarrow -\frac{\sigma^2}{2} = \mu. \quad \square \end{aligned}$$

Per tant,

$$\sum_{i=1}^N X_i^N \longrightarrow N\left(\frac{-\sigma^2}{2}, \sigma^2\right), \text{ convergeix en llei quan } N \rightarrow +\infty.$$

Demostració.

Sigui Y_N la variable aleatòria definida per $Y_N := \sum_{i=1}^N X_i^N$, sabem que per a tot N les variables aleatòries X_i^N són independents i idènticament distribuïdes a valors a:

$$\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\},$$

Aleshores sigui $\phi_{Y_N}(u)$ la funció característica¹ de la variable aleatòria Y_N , de manera que tenim

$$\begin{aligned} \phi_{Y_N}(u) &= E(e^{iuY_N}) = \prod_{j=1}^N E(e^{iuX_j^N}) \\ &= (E(e^{iuX_1^N}))^N \\ &= \left(1 + iu\mu_N - \frac{\sigma^2 u^2}{2N} + o(1/N)\right)^N. \end{aligned}$$

¹Es pot trobar una proposició sobre la funció característica d'una variable aleatòria a l'Apèndix.

Ara, fent el pas al límit, tenim que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \phi_{Y_N}(u) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + iu\mu_N - \frac{\sigma^2 u^2}{2N} + o(1/N)\right)^N \\ &= e^{iu\mu - \frac{u^2 \sigma^2}{2}} = \varphi(u), \end{aligned}$$

on $\varphi(u)$ és la funció característica d'una variable aleatòria amb distribució $N(\mu, \sigma^2)$. $\square$

Desfent el canvi de variable, tenim que

$$S_T = \log(S_N) \longrightarrow N(\log(S_0) + rT, \sigma^2).$$

Amb la llei que regula el procés de preus $(S_t)_{t \geq 0}$ coneguda, ara podem afrontar el problema de la valoració de qualsevol derivat. Notem que si definim $C_T = (S_T - K)^+$ o anàlogament $P_T = (K - S_T)^+$, i $f = C_T, S_T$,

$$f \text{ convergeix en llei} \Leftrightarrow E(f(\log(S_N))) \rightarrow E[(f(Z))]; N \rightarrow +\infty,$$

on $Z \sim N(\mu, v)$, $\forall f \in C_b$, és a dir, el conjunt de funcions contínues i acotades. Observem però que $C_T \notin C_b$, ja que un call no és una funció acotada, en canvi $P_T(X) = (K - X)^+$ compleix que $K \geq (K - X)^+ \geq 0$ i per tant tenim que $P_T(X) \in C_b$. Per tant, farem la valoració d'un put i la valoració d'un call s'obindrà de la fórmula de la paritat call/put.

Per tant calculem el valor del put:

$$\begin{aligned} P_0^{(N)} &= \left(1 + \frac{rT}{N}\right)^{-N} E_Q(K - S_0 \prod_{j=1}^N T_j^N)^+ \\ &= E_Q\left(\left(1 + \frac{rT}{N}\right)^{-N} K - S_0 e^{\sum_{j=1}^N X_j^N}\right)^+. \end{aligned}$$

Definim $\varphi(y) := (Ke^{-rT} - S_0 e^y)^+ \in [0, Ke^{-rT}]$, de manera que

$$P_0^{(N)} = E_Q(\varphi(\sum_{j=1}^N X_j^N)) \Rightarrow P_0^{(N)} - E_Q(\varphi(\sum_{j=1}^N X_j^N)) \rightarrow 0,$$

quan $N \rightarrow +\infty$. Ara, com que $|(\alpha - S_0 e^y)^+ - (\beta - S_0 e^y)^+| \leq |\alpha - \beta|$, per a tot $\alpha, \beta, S_0 e^y$, tenim que $|P_0 - E_Q(\varphi(\sum_{j=1}^N X_j^N))| \leq K|(1 + \frac{rT}{N})^{-N} - e^{-rT}| \rightarrow 0$, quan $N \rightarrow +\infty$. Per tant,

$$E[\varphi(\sum_{j=1}^N X_j^N)] \longrightarrow E[\varphi(Z)]; \quad Z \sim N(\mu, v).$$

Amb això podem donar una primera versió de la fórmula de valoració de *Black-Scholes*:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}} dy &= \int_{\mathbb{R}} (Ke^{-rT} - S_0 e^y)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^y} Ke^{-rT} - S_0 e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}} dy. \end{aligned}$$

El que segueix ara és només un intent d'arreglar l'expressió obtinguda per tal de simplificar-la i expressar-la en termes de la funció de distribució de la llei normal, que regula el procés de preus (S_t) . Per tant, fem el canvi de variables $u = \frac{y}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}$, de manera que $y = \sigma(u - \frac{\sigma}{2})$ i $dy = \sigma du$.

$$\begin{aligned} &= \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma(u-\frac{\sigma}{2})}} Ke^{-rT} - S_0 e^{\sigma(u-\frac{\sigma}{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\sigma(u-\frac{\sigma}{2})+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}} \sigma du \\ &= \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma(u-\frac{\sigma}{2})}} Ke^{-rT} - S_0 e^{\sigma(u-\frac{\sigma}{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma(u-\frac{\sigma}{2})}} Ke^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &\quad - \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma(u-\frac{\sigma}{2})}} S_0 e^{\sigma(u-\frac{\sigma}{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

Ara ens ocupem d'arreglar el primer sumand fent servir el canvi $u = z \sim N(0, 1)$:

$$\begin{aligned}
& \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma(u - \frac{\sigma}{2})}} Ke^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= Ke^{-rT} \mathbb{P}(Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma z} e^{-\frac{\sigma}{2}}) = Ke^{-rT} \mathbb{P}(S_0 e^{\sigma z} \leq Ke^{-rT} e^{\frac{\sigma}{2}}) \\
&= Ke^{-rT} \mathbb{P}(e^{\sigma z} \leq \frac{Ke^{-rT} e^{\frac{\sigma}{2}}}{S_0}) = Ke^{-rT} \mathbb{P}(\sigma z \leq \log(\frac{K}{S_0}) - rT + \frac{\sigma^2}{2}) \\
&= Ke^{-rT} \mathbb{P}(z \leq \frac{1}{\sigma} \log(\frac{K}{S_0}) - \frac{rT}{\sigma} + \frac{\sigma^2}{2}).
\end{aligned}$$

Si definim $\alpha := \frac{1}{\sigma} \log(\frac{K}{S_0}) - \frac{rT}{\sigma}$, aleshores

$$= Ke^{-rT} \mathbb{P}(z \leq \alpha + \frac{\sigma^2}{2}) = Ke^{-rT} \Phi(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}).$$

Un cop arreglat el primer sumand i expressat en termes de la funció de distribució de la llei $N(0, 1)$, fem el mateix amb el segon sumand.

$$\begin{aligned}
& - \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma(u - \frac{\sigma}{2})}} S_0 e^{\sigma(u - \frac{\sigma}{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= - \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma(u - \frac{\sigma}{2})}} S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\sigma(u - \frac{\sigma}{2}) - \frac{u^2}{2}} du.
\end{aligned}$$

Notem que $\sigma(u - \frac{\sigma}{2}) - \frac{u^2}{2} = -\frac{y^2}{2} \Leftrightarrow u^2 + \sigma^2 - 2\sigma u = y^2 \Leftrightarrow (u - \sigma)^2 = y^2 \Leftrightarrow u - \sigma = y \Leftrightarrow u = y + \sigma$. Ara si fem el canvi $u = y + \sigma$, tenim que

$$= - \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma((y+\sigma) - \frac{\sigma}{2})}} S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = - \int_{Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma y + \frac{\sigma^2}{2}}} S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

De la mateixa manera que amb l'anterior sumand definim $z = y \sim N(0, 1)$. Aleshores

$$\begin{aligned}
 &= -S_0 \mathbb{P}(Ke^{-rT} \geq S_0 e^{\sigma z + \frac{\sigma^2}{2}}) = -S_0 \mathbb{P}(S_0 e^{\sigma z} \leq Ke^{-rT} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}) \\
 &= -S_0 \mathbb{P}(e^{\sigma z} \leq \frac{Ke^{-rT} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}}{S_0}) = -S_0 \mathbb{P}(\sigma z \leq \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - rT - \frac{\sigma^2}{2}) \\
 &= -S_0 \mathbb{P}(z \leq \frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - rT - \frac{\sigma^2}{2})
 \end{aligned}$$

Recordem ara que hem definit prèviament $\alpha := \frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - rT$, per tant és immediat que la igualtat següent és

$$= -S_0 \mathbb{P}(z \leq \alpha - \frac{\sigma^2}{2}) = -S_0 \Phi(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}).$$

Finalment si ajuntem l'expressió manipulada dels dos sumands tenim que la fórmula de la valoració d'un put pel model de Black-Scholes es pot expressar de manera reduïda com

$$P_0 = Ke^{-rT} \Phi(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}) - S_0 \Phi(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}).$$

Ara veiem l'expressió d'un call, fent servir la fórmula de paritat call/put. Sabem que

$$S_0 + P_0 - C_0 = Ke^{-rT},$$

per tant, tal i com acabem de veure $P_0 = Ke^{-rT} \Phi(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}) - S_0 \Phi(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})$. D'aquesta manera si substituïm a l'equació de paritat, tenim que

$$\begin{aligned}
 C_0 &= S_0 + P_0 - Ke^{-rT} \\
 &= S_0 + Ke^{-rT} \Phi(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}) - S_0 \Phi(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}) - Ke^{-rT} \\
 &= S_0(1 - \Phi(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})) - Ke^{-rT}(1 - \Phi(\alpha + \frac{\sigma^2}{2})) \\
 &= S_0(\Phi(x > \alpha - \frac{\sigma^2}{2})) - Ke^{-rT}(\Phi(x > \alpha + \frac{\sigma^2}{2})).
 \end{aligned}$$

Finalment, per la simetria de la funció de la distribució normal, tenim que $\Phi(x > \alpha - \frac{\sigma^2}{2}) = \Phi(x \leq -\alpha + \frac{\sigma^2}{2})$ i $\Phi(x > \alpha + \frac{\sigma^2}{2}) = \Phi(x \leq -\alpha - \frac{\sigma^2}{2})$. Per tant tenim que podem escriure el call de manera anàloga com

$$C_0 = S_0 \Phi(-\alpha + \frac{\sigma^2}{2}) - K e^{-rT} \Phi(-\alpha - \frac{\sigma^2}{2}).$$

Apèndix A

A.1 Altres definicions i conceptes

A.1.1 Definició. Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ un subespai, es diu que S és convex si per a tota parella de punts $x, y \in S$ i per a tot $t \in [0, 1]$, tot punt del camí

$$\sigma(t) = (1 - t)x + ty \in S.$$

A.1.2 Definició. Sigui $C \subset \mathbb{R}^n$ un subespai, C rep el nom de con convex si per a tota parella d'escalars $\alpha, \beta \geq 0$ i tot $x, y \in C$ es compleix que

$$\alpha x + \beta y \in C.$$

A.2 Teorema de separació dels conjunts convexos a $\mathbb{R}^n$

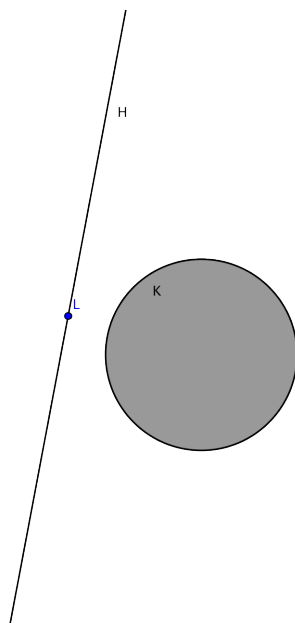
Nota: Aquest teorema també es coneix amb el nom de *Teorema de l'hiperplà separador*.

A.2.1 Teorema. Sigui $L \subset \mathbb{R}^n$ un subespai sigui $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt convex i compacte tal que $K \cap L = \emptyset$. Aleshores podem separar L i K per un hiperplà que conté L , és a dir, existeix un funcional $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, acotat i definit per

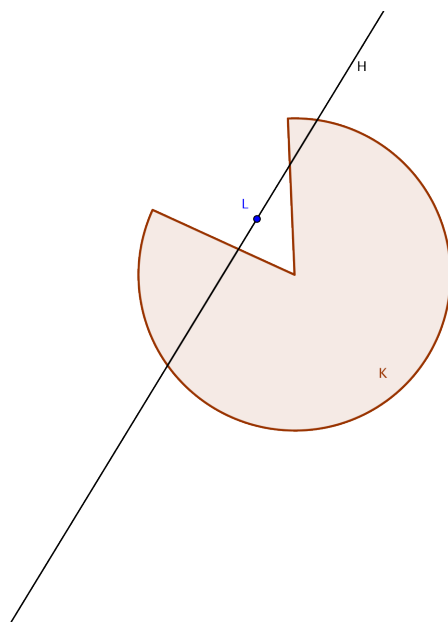
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in L \\ a > 0 & \text{si } x \in K. \end{cases}$$

Interpretació geomètrica a $\mathbb{R}^2$:

Suposem sense perdre generalitat que L és un punt de $\mathbb{R}^2$.



Si K és convex existeix un hiperplà H que conté a L i no intersecta K .



Si K no és convex qualsevol hiperplà H que conté a L , intersecta K .

Nota: Es pot trobar aquesta demostració a [8] R.J. Elliott i P. Kopp.

Demostració.

Sigui $C \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunt tancat i convex tal que no conté el vector nul. Volem veure que existeix $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = 0$ si $x \in K$. Per tant hem de construir aquest funcional de manera que $\ker(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) = 0\}$ compleixi que $\ker(\phi) \cap C = \emptyset$, d'aquesta manera veurem que $L \cap C = \emptyset$.

Considerem $B(0, r) \in \mathbb{R}^n$ la bola de centre $x = 0$ i radi $r > 0$, amb r prou gran com perquè $B \cap C \neq \emptyset$. D'aquesta manera $B \cap C$ és un conjunt no buit, tancat, acotat i per tant és compacte a $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$.

D'aquesta manera és clar que, si $|\cdot|$ representa la norma euclidiana, com que $|x| > r$ per a tot $x \notin B$ tenim que $|x| \geq |z|$, per a tot $z \in B \cap C$, i en particular per a tot $x \in C \setminus B \cap C$.

Ara com C és convex, per definició de conjunt convex, sabem que $\exists \lambda \in [0, 1]$ tal que $y = \lambda x + (1 - \lambda)z \in C, \forall x \in C$. Per tant $|y| \geq |z|$, i d'aquesta manera

$$|\lambda x + (1 - \lambda)z|^2 \geq |z|^2.$$

Si escrivim $a \cdot b$ per designar el producte escalar de a i b , aleshores desenvolupant les dues bandes de la igualtat obtenim que

$$\begin{aligned} \lambda^2 x \cdot x + (1 - \lambda)^2 z \cdot z + 2\lambda(1 - \lambda)x \cdot z &\geq z \cdot z \\ \lambda^2 x \cdot x + (1 + \lambda^2 - 2\lambda)z \cdot z + 2\lambda(1 - \lambda)x \cdot z &\geq z \cdot z \\ \lambda^2 x \cdot x + 2\lambda(1 - \lambda)x \cdot z &\geq -\lambda(\lambda - 2)z \cdot z \\ 2(1 - \lambda)x \cdot z - 2z \cdot z + \lambda(x \cdot x + z \cdot z) &\geq 0. \end{aligned}$$

Això és cert per a tot $\lambda \in [0, 1]$, de manera que si fem $\lambda \rightarrow 0$, aleshores tenim que

$$x \cdot z \geq z \cdot z = |z|^2 \geq 0.$$

D'aquesta manera, si definim el funcional

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cdot z\end{aligned}$$

Tenim automàticament que $\phi(x)$ està acotat inferiorment per $|z|^2$. Notem que $\phi(x)$ també està acotat superiorment com qualsevol altre funcional a $\mathbb{R}^n$.

Si considerem ara $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunt compacte i convex tal que $K \cap L = \emptyset$, podem definir $C = K - L = \{x \in \mathbb{R}^n; x = k - l \text{ per } k \in K, l \in L\}$.

Aleshores C és convex ja que K i L ho són i C és tancat. Per a veure això hem de veure que la successió definida per $x_n = k_n - l_n$ convergeix a alguna $x \in \mathbb{R}^n$, aleshores com K és compacte, $(k_n)_{n \geq 0}$ té una parcial $k_{n_r} \rightarrow k$ convergent a un $k \in K$. Per tant $x_{n-r} = k_{n_r} - l_{n_r} \rightarrow x$ quan $r \rightarrow \infty$ i $k_{n_r} \rightarrow k$, de manera que $l_{n_r} = k_{n_r} - x_{n_r} \rightarrow k - x$. Finalment tenim que $l = k - x \in L$, ja que L és tancat.

Ara com C , per construcció, no conté el zero, podem aplicar la primera part de la demostració i obtenir d'aquesta manera un funcional ϕ acotat a $\mathbb{R}^n$, tal que $\phi(x) \geq |z|^2 > 0$. En altres paraules, escrivim

$$\phi(x) = \phi(k) - \phi(l) \geq |z|^2 > 0.$$

Això s'ha de complir $\forall x \in C$. D'aquesta manera tenim que com $\phi(l) = 0$, $\forall l \in L$ i $\ker(\phi) = \{x; \phi(x) = 0\}$ aleshores $L \subseteq \ker(\phi)$, mentres que $\phi(k) > 0$, ja que està acotat inferiorment per $|z|^2 > 0$. $\square$

A.2.2 Proposició. *Segui X una variable aleatòria amb moment d'ordre k , i.e. $E|X|^k < +\infty$. Si ara prenem el desenvolupament de Taylor de la funció e^{itx} fins a ordre k , obtenim*

$$e^{itx} = 1 + itx + \cdots + \frac{(itx)^k}{k!} + o(t^k),$$

d'aquesta manera, per linealitat tenim que

$$\phi(t) = E(e^{itx}) = 1 + itE(X) + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}E(X^k) + e(t),$$

on $\phi(t)$ és la funció característica de la variable aleatòria X i $e(t)$ és l'esperança dels termes de l'error del desenvolupament de Taylor.

Bibliografia

- [1] HULL, J.C.: *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*. Prentice Hall, 2008.
- [2] LAMBERTON, D., LAPEYRE, B.: *Introduction au Calcul Stochastique appliqué à la Finance*. Ellipses, 1997.
- [3] NEFTCI, S.N.: *Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, 1996.
- [4] CAPIŃSKI, M., KOPP, E.: *Discrete Models of Financial Markets*. Cambridge, 2012.
- [5] ROMAN, S.: *Introduction to the Mathematics of Finance*. Springer, 2010.
- [6] PLISKA, S. R.: *Discrete Models of Financial Markets*. Cambridge, 2012.
- [7] BINGHAM, N.H., RÜDIGER KIESEL: *Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer, 2000.
- [8] ELLIOT, Robert J., KOPP, P. Ekkehard: *Mathematics of Financial Markets*. Springer, 1998.
- [9] DANA, Rose-Anne, JEANBLANC, Monique: *Financial Markets in Continuous Time*. Springer, 2007.
- [10] COX, J.C., ROSS, S.A., RUBINSTEIN, M.: *Option pricing: A simplified approach*. Journal of financial economics, 1979.
- [11] DUDLEY, R.M.: *Real Analysis and Probability*. Cambridge, 2002.
- [12] BAUER, Heinz.: *Probability Theory and Elements of Measure*. Academic Press Inc, 1981.
- [13] NUALART, D., SANZ M.: *Curs de Probabilitats*. PPU, 1990.