UNIVERSITAT DE BARCELONA

ESCOLA UNIVERSITÀRIA D'ESTUDIS EMPRESARIALS
DEPARTAMENT D'ECONOMIA I ORGANITZACIÓ D'EMPRESES

INTERPRETACION ECONOMICA DEL ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Dunia Durán Juvé
Profesora Titular

1ª Edición de 1995: Publicada sobre papel con número de depósito legal B-14.049-95. Impresor: Servicio de publicaciones E.U.E.E.
2ª Edición de 1996: Publicada sobre papel (versión revisada) con número depósito legal B-30.628-96. Imprime: Servicio de Fotocopias E.U.E.E.

INDICE

INTERPRETACION ECONOMICA DEL ANALISIS DE SENSIBILIDAD

1.- CONCEPTOS GENERALES

En la Empresa hay una gran cantidad de decisiones empresariales en las que los responsables deben asignar recursos limitados para lograr un objetivo.

Generalmente, se trata de resolver un problema considerando las distintas alternativas de solución y buscando la mejor asignación posible con la que se consiga satisfacer más eficientemente los objetivos empresariales, respetando las limitaciones presentes en el problema.

En ocasiones, resulta aplicable la programación lineal que es uno de los procedimientos más eficientes para resolver aquéllos problemas en los que, tanto el objetivo como las restricciones, pueden expresarse mediante funciones lineales.

Un modelo de programación lineal se representa de la siguiente forma:

Función objetivo: $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots\ldots + c_n x_n$

Restricciones:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots. + a_{1n} x_n =\leq\geq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots. + a_{2n} x_n =\leq\geq b_2$$
$$. \qquad . \qquad .$$
$$. \qquad . \qquad .$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots. + a_{mn} x_n =\leq\geq b_m$$

Condición de no negatividad: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n \geq 0$

En un modelo de programación lineal podemos diferenciar tres bloques:

a) FUNCION OBJETIVO que nos indica el objetivo que queremos alcanzar. Cuando hablamos de optimizar una función objetivo hablamos de maximizar o minimizar.

b) RESTRICCIONES DEL MODELO que son las limitaciones o requerimientos que forman el entorno de la empresa que estamos estudiando.

Las expresiones que encontraremos al final de estas restricciones son las siguientes:

$\leq$ entonces hablamos de limitaciones o disponibilidades máximas (Materia prima, mano de obra, maquinaria, etc.).

$\geq$ entonces hablamos de requerimientos (exigencias legales técnicas, etc. que la empresa deberá cumplir).

c) LA CONDICION DE NO NEGATIVIDAD

Que nos indica que todas las variables tienen que ser no negativas, es decir mayores o iguales a cero, ya que en caso de no serlo, la solución al modelo no sería factible, puesto que cada variable nos indica la cantidad de cada producto a producir por la empresa y, por tanto, como mínimo la empresa no producirá nada.

Existen varias formas de solucionar el problema, pero de entre todas ellas utilizaremos el Método Simplex porque reduce la posibilidad de cometer errores y agiliza el proceso de solución.

Este método consiste en un modelo matemático que analiza distintas soluciones hasta llegar a la óptima mediante un proceso iterativo.

Existen tres aspectos importantes en el método simplex:

a) Determinación de la primera solución básica.
b) Determinación del criterio de optimalidad.
c) Determinación del criterio de modificación de la nueva solución respetando dos condiciones.

- Mejorar la solución anterior.
- Mantener la factibilidad (La condición de no negatividad de las variables) en la nueva solución.

La tabla correspondiente a la primera solución básica podríamos representarla de la siguiente manera:

		c_1	c_k	c_j	c_n	c_{n+1}	c_{n+i}	c_{n+k}	c_{n+m}	
x^b	c^b	x_1	x_k	x_j	x_n	x_{n+1}	x_{n+i}	x_{n+k}	x_{n+m}	b_i
x_{n+1}	c_{n+1}	a_{11}	a_{1k}	a_{1j}	a_{1n}	1	0	0	0	b_1
x_{n+i}	c_{n+i}	a_{i1}	$a_{i\,k}$	a_{ij}	a_{in}	0	1	0	0	b_i
x_{n+k}	c_{n+k}	a_{k1}	a_{kk}	a_{kj}	a_{kn}	0	0	1	0	b_k
x_{n+m}	c_{n+m}	a_{m1}	a_{mk}	a_{mj}	a_{mn}	0	0	0	1	b_m
		z_1	z_k	z_j	z_n	z_{n+1}	z_{n+i}	z_{n+k}	z_{n+m}	z_0
		c_1-z_1	c_k-z_k	c_j-z_j	c_n-z_n	0	0	0	0	

La tabla correspondiente a las posteriores soluciones básicas se puede representar de la siguiente manera:

		c_1	c_k	c_j	c_n	c_{n+1}	c_{n+i}	c_{n+k}	c_{n+m}	
x^b	c^b	x_1	x_k	x_j	x_n	x_{n+1}	x_{n+i}	x_{n+k}	x_{n+m}	b_i
x_{n+1}	c_{n+1}	a_{11}	0	a_{1j}	a_{1n}	1	0	$a_{1,n+k}$	0	b_1
x_{n+i}	c_{n+i}	a_{i1}	0	a_{ij}	a_{in}	0	1	$a_{i,n+k}$	0	b_i
x_{n+k}	c_{n+k}	a_{k1}	1	a_{kj}	a_{kn}	0	0	$a_{k,n+k}$	0	b_k
x_{n+m}	c_{n+m}	a_{m1}	0	a_{mj}	a_{mn}	0	0	$a_{m,n+k}$	1	b_m
		z_1	z_k	z_j	z_n	z_{n+1}	z_{n+i}	z_{n+k}	z_{n+m}	z_0
		c_1-z_1	0	c_j-z_j	c_n-z_n	0	0	c_{n+k} -z_{n+k}	0	

Aunque el significado económico de las variables y coeficientes que aparecen, tanto en el modelo inicial como en las tablas de soluciones básicas ya las hemos estudiado[1].

En el análisis que realizaremos a continuación veremos, además, la importancia que tiene en la empresa la modificación de algún recurso y coste o margen de beneficios.

En esta publicación, estudiaremos el significado económico del análisis de sensibilidad, que nos indica lo que puede ocurrir en la solución óptima si algún recurso disponible se modifica (b_i) o bien si se modifica algún margen de beneficios de la función objetivo (c_i). Dicho de otra manera, puede ocurrir que alguno de los coeficientes de la función objetivo varie y puede ocurrir que alguno de los términos independientes de alguna restricción varie. Si esto ocurre, puede darse el caso que la tabla factible y óptima obtenida inicialmente deje de serlo, bien porque alguna variable tome valor negativo afectando a la condición de no negatividad de las variables (factibilidad) o bien porque algún c_j-z_j, que representa el beneficio marginal que puede obtenerse con la inclusión de determinada variable en la solución, tome un valor que afecte a la optimalidad, en el primer caso la solución dejaría de ser factible y en el segundo caso dejaría de ser óptima. En el caso de que variasen,

---

1 TARRAGO SABATE, Francisco (1989): *Fundamentos de Economía de la Empresa*. Barcelona: Ed. Hispano Americana. Pag. 729 y ss.

simultáneamente, varios coeficientes de las variables de la función objetivo o variasen, simultáneamente, varios recursos disponibles (caso de máximo) o varios requerimientos u obligaciones (caso de mínimo), que son los términos independientes de las restricciones del modelo inicial, entonces sería preciso realizar un Análisis paramétrico , que no estudiaremos en esta publicación.

El análisis de sensibilidad consiste en analizar lo que sucedería a la tabla óptima, si uno solo de los coeficientes de la función objetivo variase, o bien uno solo de los términos independientes de las restricciones iniciales del modelo se modificase. Si la variación es exacta, es decir, que la variación de uno de los coeficientes de la función objetivo o uno de los términos independientes toma un valor concreto, tanto en uno como en otro caso, podemos ir directamente a la tabla óptima para realizar los nuevos cálculos **(Análisis Post-óptimo)**. Si la variación es no exacta, es decir, que la variación del coeficiente de la función objetivo o la variación de uno de los términos independientes no toma un valor concreto, deberemos calcular el intervalo dentro del cual la composición de la tabla óptima se mantiene **(Análisis de sensibilidad propiamente dicho)**.

En el caso de que la variación, o bien se produzca en varios de los coeficientes de la función objetivo, o bien en varios de los términos independientes, en ambos casos, de forma simultánea, estaremos ante un Análisis paramétrico.

Sólo analizaremos el análisis de sensibilidad tanto de variaciones exactas como no exactas y utilizaremos para ello un ejemplo de un modelo de programación lineal que hay que maximizar.

2.- ANALISIS POST-OPTIMO PARA UN PROBLEMA DE MAXIMO (VARIACION EXACTA)

Tomaremos como modelo el del Dr. FRANCISCO TARRAGO SABATE[2]:

Max. $z = 3\,x_1 + 5\,x_2$

$2\,x_1 + x_2 \leq 20$

$2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 44$

$x_1, x_2 \geq 0$

Cuyo problema es el siguiente:

1.- La función a optimizar es un problema de maximizar el beneficio de la empresa, teniendo en cuenta que cada unidad producida de A representa un margen de beneficios de 3 unidades monetarias y cada unidad producida de B representa un margen de beneficios de 5 unidades monetarias.

2.- La primera restricción representa el número de unidades del factor F_1 que se necesitan por cada unidad de producto y el máximo de unidades del factor F_1 disponibles. En el ejemplo se necesitan 2 unidades del factor F_1 necesarias para producir cada unidad del producto A, y 1 unidad del mismo factor necesarias para producir cada unidad del producto B, sabiendo que como máximo disponemos de 20 unidades del factor F_1 en la empresa.

[2] TARRAGO SABATE, F(1989): Op. Cit. pags. 761 y ss.

3.- La segunda restricción representa el número de unidades del factor F_2 que se necesitan para producir cada uno de los productos que quiere fabricar la empresa y el número máximo de unidades del factor F_2 que dispone la empresa . En el ejemplo se necesitan 2 unidades para producir cada unidad del producto A y 4 unidades para producir cada unidad del producto B, sabiendo que la empresa dispone como máximo de 44 unidades del factor F_2.

4.- Debido a que la empresa espera producir dos productos, que son A y B, el número de unidades a producir de cada uno de los productos, lógicamente, como mínimo serán de cero, de ahí que las variables deben ser mayores o iguales a cero.

Lo primero que se debe hacer para resolver el modelo, es convertir las desigualdades en igualdades añadiendo a las restricciones y a la función objetivo las variables de holgura (restricciones del tipo menor-igual), variables excedentes y artificiales (restricciones del tipo mayor-igual), y variables artificiales (restricciones del tipo igual). Al tratarse de un modelo en el que todas las restricciones son del tipo menor-igual, a las restricciones deberemos añadir variables de holgura y en la función objetivo las añadiremos con coeficiente cero de la siguiente forma:

$$\text{Max. } z = 3\,x_1 + 5\,x_2 + 0\,x_3^H + 0\,x_4^H$$
$$2\,x_1 + x_2 + x_3^H = 20$$
$$2\,x_1 + 4\,x_2 + x_4^H = 44$$
$$x_1, x_2, x_3^H, x_4^H \geq 0$$

La solución óptima de ese modelo, hallada mediante el método simplex viene indicada por la siguiente tabla:

		3	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	3	1	0	2/3	-1/6	6
X_2	5	0	1	- 1/3	1/3	8
		3	5	1/3	7/6	58
		0	0	-1/3	- 7/6	

Según los datos obtenidos resulta lo siguiente:

1.- La empresa para obtener el máximo beneficio debe producir 6 unidades del producto A y 8 unidades del producto B, de esta forma obtiene un beneficio igual a 58 unidades monetarias.

2.- Si sustituimos el valor de cada una de esas variables en las restricciones del modelo inicial resulta que la empresa utiliza, de esta forma, todos los recursos que tiene disponibles, y por tanto, no le queda ningún sobrante de recursos, es decir, no le queda ninguna cantidad del factor F_1 ni del F_2 ocioso, con lo que cada una de las variables de holgura toma un valor igual a cero en la solución óptima.

2.1.- EJEMPLO DE VARIACION EXACTA DE UNO DE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO (C_j)

El análisis lo efectuaremos a través de un ejemplo, tomando, para ello, el modelo anterior.

a) Vamos a suponer que c_1 incrementa en 1 unidad; en este caso el nuevo valor de ese coeficiente será de 4 unidades, con lo cual podemos dirigirnos directamente a la tabla óptima inicialmente obtenida y tendremos:

		<u>4</u>	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	<u>4</u>	1	0	2/3	-1/6	6
X_2	5	0	1	- 1/3	1/3	8
		<u>4</u>	5	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>64</u>
		0	0	- <u>1</u>	- <u>1</u>	

Los valores que en la tabla cambian son los que aparecen subrayados, de manera que si el incremento del primer coeficiente es de una unidad, el beneficio de la empresa pasa a ser 64 unidades monetarias. Por tanto, el incremento que experimenta el beneficio será de 6 unidades monetarias, el c_j-z_j correspondiente a la variable de holgura x_3^H disminuye en 2/3 y el c_j-z_j correspondiente a la variable de holgura x_4^H aumenta en 1/6. Precisamente varían de acuerdo con los valores de los coeficientes técnicos (a_{ij}) tercero y cuarto que aparecen en la primera fila de la tabla óptima inicial, precisamente porque el valor de C_1 ha variado tan solo en una unidad. También observamos en la tabla que los valores de las variables básicas no varian, ello es lógico por cuanto al modificarse alguno de los coeficientes de la función objetivo no se modificarán, en principio, los valores de las variables básicas; sí se modificarán si la tabla deja de ser óptima.

En definitiva, si c_1 incrementa en una unidad, entonces:

z incrementa en 6 unidades monetarias
c_3-z_3 disminuye en 2/3 unidades monetarias
c_4-z_4 aumenta en 1/6 unidades monetarias

y, por tanto:
c_1 = 4 unidades monetarias de margen
z = 64 unidades monetarias (incrementa en 6 unidades monetarias).
x_1 = 6 unidades físicas (permanece inalterada la producción del producto A).
x_2 = 8 unidades físicas (permanece inalterada la producción del producto B).

b) Supongamos, ahora, que c_1 disminuye en 1 unidad*, en este caso el nuevo valor de ese coeficiente será de 2 unidades, con lo cual si nos dirigimos, igualmente, a la tabla tendremos:

		<u>2</u>	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	<u>2</u>	1	0	2/3	-1/6	6
X_2	5	0	1	- 1/3	1/3	8
		<u>2</u>	5	- <u>1/3</u>	<u>4/3</u>	<u>52</u>
		0	0	<u>1/3</u>	- <u>4/3</u>	

* Si disminuyera el coeficiente C_1 en 1/2 unidad, el c_3-z_3 tomaría un valor igual a 0 y sería la tabla límite. La variable de holgura x_3^H es una variable secundaria, al igual que la x_4^H, (Ver págs.31 y 32), porque el c_3-z_3 y el c_4 -z_4 toman un valor distinto de cero. Si la disminución de ese coeficiente es mayor que 1/2 unidad, entonces la solución, como vemos en este apartado b), deja de ser óptima. Ello lo podremos demostrar al obtener el intervalo dentro del cual se mantiene la composición de la tabla (EN EL APARTADO CORRESPONDIENTE A LA VARIACION NO EXACTA DE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO)(Ver págs.33-35).

Los valores que en la tabla cambian son los que aparecen subrayados, de manera que si la disminución del primer coeficiente es de una unidad, el beneficio de la empresa pasa a ser 52 unidades monetarias, por tanto, se produce una disminución del beneficio de 6 unidades monetarias, el c_j-z_j correspondiente a la variable de holgura x_3^H aumenta en 2/3 pasando a tomar valor positivo, por tanto la tabla deja de ser óptima, aunque al no variar los valores de las variables básicas, la tabla sigue siendo factible. El c_j-z_j correspondiente a la variable de holgura x_4^H disminuye en 1/6, precisamente varian de acuerdo con los valores de los coeficientes técnicos tercero y cuarto que aparecen en la primera fila de la solución óptima inicial. También observamos en la tabla que los valores de las variables básicas, como en el caso anterior, no varian.

En definitiva, si c_1 disminuye en 1 unidad, entonces:

z disminuye en 6 unidades monetarias

c_3-z_3 aumenta en 2/3 unidades monetarias

c_4-z_4 disminuye en 1/6 unidades monetarias

y, por tanto:

c_1 = 2 unidades monetarias de margen

z = 52 unidades monetarias (disminuye en 6 unidades monetarias).

x_1 = 6 unidades físicas (permanece inalterada la producción del producto A).

x_2 = 8 unidades físicas (permanece inalterada la producción del producto B).

Por tanto, si C_1 disminuye en 1 unidad, entonces la tabla deja de ser óptima y se debe volver a aplicar el método simplex, empezando por la determinación de la variable entrante y saliente. En el ejemplo la variable entrante será la x_3^H y la variable saliente es la x_1 siendo la nueva solución óptima la siguiente:

		2	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_3^H	0	3/2	0	1	-1/4	9
X_2	5	1/2	1	0	1/4	11
		5/2	5	0	5/4	55
		-1/2	0	0	- 5/4	

La nueva solución óptima obtenida nos ofrece la siguiente interpretación:

1.- Al disminuir el margen del producto A en una unidad y pasar a tomar el valor de 2 unidades monetarias, según la nueva tabla resulta que la empresa, para obtener el máximo beneficio debe producir 11 unidades del producto B y no producir ninguna del producto A.

Según la nueva solución óptima, la variable de holgura que acompaña a la primera restricción del modelo inicial (x_3^H) toma un valor de 9 unidades físicas, que representa el número de unidades del factor F_1 que quedan ociosas, utilizándose todas las unidades del factor F_2 para producir el segundo de los productos, tal como se demuestra si sustituimos los valores obtenidos en las restricciones del modelo inicial:

1ª restricción del factor F_1: $2\ x_1 + 1\ x_2 + x_3^H = 2 \text{ x } 0 + 1 \text{ x } 11 + 1 \text{ x } 9 = 20$
2ª restricción del factor F_2: $2\ x_1 + 4\ x_2 + x_4^H = 2 \text{ x } 0 + 4 \text{ x } 11 + 1 \text{ x } 0 = 44$

2.- Si sustituimos los valores en la función objetivo, resulta que el beneficio que obtenemos es de 55 unidades monetarias, es decir, el modelo inicial era:

$z = 3\ x_1 + 5\ x_2 + 0\ x_3^H + 0\ x_4^H$

Al disminuir en una unidad el primer coeficiente, tendremos:

$z = 2\ x_1 + 5\ x_2 + 0\ x_3^H + 0\ x_4^H = 2 \times 0 + 5 \times 11 + 0 \times 9 + 0 \times 0 = 55$ unidades monetarias

c) Supongamos, ahora, que c_1 incrementa en 8 unidades. En este caso el nuevo valor de ese coeficiente será de 11 unidades monetarias de margen, con lo cual la tabla quedará de la siguiente forma:

		11	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	11	1	0	2/3	-1/6	6
X_2	5	0	1	- 1/3	1/3	8
		11	5	17/3	- 1/6	106
		0	0	- 17/3	1/6	

Si el incremento del primer coeficiente es de ocho unidades, aunque el beneficio de la empresa pasa a ser 106 unidades monetarias, el incremento que experimenta el beneficio es de 48 unidades monetarias, el c_j-z_j correspondiente a la variable de holgura x_3^H disminuye en 16/3 y el c_j-z_j correspondiente a la variable de holgura x_4^H aumenta en 4/3, pasando a tomar el c_4-z_4 valor positivo, la solución deja de ser óptima, si bien, al no variar los valores de las variables básicas, la solución sigue siendo factible.

En definitiva, si c_1 incrementa en 8 unidades, entonces la solución deja de ser óptima y deberemos volver a aplicar el método simplex, empezando por la determinación de la variable entrante y la saliente. En el ejemplo la variable entrante será la x_4^H y la variable saliente la x_2, siendo la nueva solución óptima la siguiente:

		11	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	11	1	1/2	1/2	0	10
X_4^H	0	0	3	- 1	1	24
		11	11/2	11/2	0	110
		0	- 1/2	- 11/2	0	

La solución óptima obtenida nos ofrece las siguiente interpretación:

1.- Al aumentar el margen del producto A en 8 unidades y pasar a tomar el valor de 11 unidades monetarias, según la nueva tabla resulta que, la empresa, para obtener el máximo beneficio debe producir 10 unidades del producto A, y no producir ninguna del producto B.

Según la nueva solución óptima, la variable de holgura que acompaña a la segunda restricción del modelo inicial (x_4^H) toma un valor de 24, que representa las unidades que quedan ociosas del factor F_2, utilizándose todas las unidades del factor F_1 para producir el primero de los productos, tal como se demuestra si sustituimos los valores obtenidos en las restricciones del modelo inicial:

1ª restricción (Factor F_1): $2x_1 + x_2 + x_3^H = 2 \times 10 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 20$

2ª restricción (Factor F_2): $2x_1 + 4x_2 + x^{4H} = 2 \times 10 + 4 \times 0 + 1 \times 24 = 44$

2.- Si sustituimos los valores en la función objetivo, resulta que el beneficio que obtenemos es de 110 unidades monetarias, es decir, el modelo inicial era:

$z = 3\ x_1 + 5\ x_2 + 0\ x_3^H + 0\ x_4^H$

Al aumentar en 8 unidades el primer coeficiente, tendremos:

$z = 11\ x_1 + 5\ x_2 + 0\ x_3^H + 0\ x_4^H = 11 \times 10 + 10 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 24 = 110$ unidades monetarias

El mismo proceso podríamos seguir en el caso de que el coeficiente que variase fuese el que, en la función objetivo acompaña a la segunda variable. Para no cansar al lector omitimos el proceso.

2.2.- EJEMPLO DE VARIACION EXACTA DE UNO DE LOS TERMINOS INDEPENDIENTES (b_j)

Siguiendo con el mismo ejemplo:

a) Vamos a suponer que b_1 incrementa en una unidad y por tanto el valor de b_1 pasa a ser 21 unidades físicas de disponibilidad máxima del factor F_1, aunque como veremos al analizar la variación no exacta de los términos independientes, la tabla seguirá siendo factible al calcular el intervalo.

Al tratarse de una variación concreta, podemos verificarlo directamente a través de la solución óptima inicial. Para ello, tenemos que tener en cuenta, que la solución óptima de un modelo de programación lineal, podemos obtenerla, también de forma matricial y precisamente si varía un término independiente sólo afectará a los valores de las variables básicas pero no afectará ni a los coeficientes técnicos (a_{ij}) ni a los c_j-z_j de la solución óptima, por tanto, tenemos que los valores de las variables básicas pueden obtenerse matricialmente aplicando la fórmula:

$$x_i^B = B^{-1}.\ b'$$

en donde,

- B^{-1} son los coeficientes técnicos de las variables de holgura (caso restricciones del tipo menor o igual) y artificiales (caso de restricciones del tipo mayor o igual e igual) con su signo y variables excedentes (caso de restricciones del tipo mayor o igual) con signo contrario, en todos los casos, de la solución óptima.
- b' son los valores de los términos independientes de las restricciones del modelo inicial, pero teniendo en cuenta el nuevo valor, es decir, el incremento o disminución que experimenta el factor.

En el ejemplo, tenemos dos variables de holgura, por tanto, los coeficientes técnicos, al aplicar la fórmula, deberemos de tomarlos con el mismo signo que corresponde en la tabla, es decir, con su signo:

$$x_i^B \ = \ B^{-1}.\ b' \ = \ \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 21 \\ 44 \end{pmatrix} \ = \ \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 20/3 \\ 23/3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (X_1) \\ (X_2) \end{array} \end{array}$$

y sustituyendo estos valores en la solución óptima, tendremos:

		3	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	3	1	0	2/3	- 1/6	20/3
X_2	5	0	1	- 1/3	1/3	23/3
		3	5	1/3	7/6	175/3
		0	0	- 1/3	- 7/6	

Como vemos, la composición de la tabla se mantiene, manteniéndose la optimalidad, puesto que los c_j-z_j no cambian y siguen cumpliendo la condición de máximo, y se sigue manteniendo la factibilidad, puesto que los valores de las variables básicas, aunque han cambiado, siguen siendo mayores que cero.

Según la nueva tabla obtenida, la empresa si aumenta en una unidad la disponibilidad del factor F_1, puede pasar a producir 20/3 de unidades físicas del producto A frente a las 6 que inicialmente producía, por tanto puede incrementarse su producción en 2/3 de unidades físicas; y en cuanto al producto B puede pasar a producir 23/3 frente a las 8 unidades físicas de la solución óptima inicial, produciéndose en este último caso una disminución de 1/3 de unidades físicas.

Sustituyendo los datos en el modelo inicial, teniendo en cuenta que el valor del primer término independiente pasa a ser 21 unidades físicas de disponibilidad máxima, tendremos:

Máx. $z = 3\ x_1 + 5\ x_2 + 0\ x_3^H + 0\ x_4^H = 3 \times 20/3 + 5 \times 23/3 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 175/3$ unidades monetarias

1ª restricción (Factor F_1): $2\ x_1 + x_2 + x_3^H = 2 \times 20/3 + 1 \times 23/3 + 1 \times 0 = 21$

2ª restricción (Factor F_1): $2\ x_1 + 4\ x_2 + x_4^H = 2 \times 20/3 + 4 \times 23/3 + 1 \times 0 = 44$

b) Supongamos, ahora, que b_1 disminuye en una unidad y por tanto el valor de b_1 pasa a ser de 19 unidades físicas de disponibilidad máxima, como veremos al realizar el análisis para una variación no exacta, esta cantidad estará dentro del intervalo que se obtenga, por lo que se seguirá manteniendo la composición de la tabla, pero al tratarse de una variación exacta, podemos ir directamente a la solución óptima y hallar los nuevos valores. Para ello, deberemos de operar como en el caso a) sabiendo que la solución óptima de un modelo de programación lineal, podemos obtenerla, también de forma matricial y precisamente si varía un término independiente sólo afectará a los valores de las variables básicas pero no afectará ni a los coeficientes técnicos ni a los c_j-z_j de la solución óptima, por tanto, deberemos de aplicar la misma fórmula anterior, es decir:

$$x_i^B = B^{-1}.\ b'$$

En el ejemplo, tenemos dos variables de holgura, por tanto, los coeficientes técnicos, al aplicar la fórmula, deberemos de tomarlos con el mismo signo que corresponde en la solución óptima inicial, como en el caso anterior, es decir, con su signo:

$$x_i^B = B^{-1}.\ b' = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 19 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 16/3 \\ 25/3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \end{array}$$

y sustituyendo estos valores en dicha solución óptima, tendremos:

		3	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	3	1	0	2/3	- 1/6	16/3
X_2	5	0	1	- 1/3	1/3	25/3
		3	5	1/3	7/6	173/3
		0	0	- 1/3	- 7/6	

Vemos que, como en el caso anterior, la composición de la tabla se mantiene, manteniéndose la optimalidad, puesto que los c_j-z_j no cambian y siguen cumpliendo la condición de máximo, y se sigue manteniendo la factibilidad, puesto que las variables básicas siguen siendo mayores que cero.

Según la nueva tabla obtenida, la empresa si disminuye en una unidad la disponibilidad de materias primas, puede pasar a producir 16/3 de unidades físicas del producto A frente a las 6 que inicialmente producía, por tanto disminuye su producción en 2/3 de unidades físicas; y en cuanto al producto B puede a pasar a producir 25/3 frente a las 8 unidades físicas de la tabla inicial, produciéndose en este último caso un incremento de 1/3 de unidades físicas. Sustituyendo los valores en el modelo inicial, teniendo en cuenta que el valor del primer término pasa a ser de 19 unidades físicas de disponibilidad máxima, tendremos:

Máx. $z = 3\ x_1 + 5\ x_2 + 0\ x_3^H + 0\ x_4^H = 3 \times 16/3 + 5 \times 25/3 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 173/3$ unidades monetarias

1ª restricción (Factor F_1): $2\ x_1 + 1\ x_2 + x_3^H = 2 \times 16/3 + 1 \times 25/3 + 1 \times 0 = 19$

2ª restricción (Factor F_2): $2\ x_1 + 4\ x_2 + x_4^H = 2 \times 16/3 + 4 \times 25/3 + 1 \times 0 = 44$

c) Vamos a suponer que b_1 incrementa en 25 unidades y por tanto el valor de b_1 pasa a ser 45 unidades físicas de disponibilidad máxima, como veremos al analizar las variaciones no exactas de los términos independientes, esta cantidad no está dentro del intervalo que vamos a obtener, por tanto la tabla dejará de ser factible porque alguna de las variables básicas tomará un valor negativo.

Vamos a comprobarlo analíticamente sabiendo que la variación de dicho término independiente es de un valor concreto, y por tanto, es exacto:

$$x_i^B \quad = \quad B^{-1} \cdot b' = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 44 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 68/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \end{array}$$

La nueva solución quedaría pues, de la siguiente manera:

		3	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	3	1	0	2/3	- 1/6	68/3
X_2	5	0	1	- 1/3	1/3	- 1/3
		3	5	1/3	7/6	199/3
		0	0	- 1/3	- 7/6	

Según los nuevos datos subrayados, la composición de la tabla no se mantiene, ya que se incumple la condición de no negatividad de las variables, el valor de la variable x_2 es negativo, aunque se mantenga la optimalidad, puesto que los c_j-z_j no cambian y siguen cumpliendo la condición de máximo, por lo que la variación del término independiente provoca el incumplimiento de la condición de factibilidad, así que lo que deberemos de aplicar es el método simplex dual para la determinación de la variable entrante y la saliente, que difiere del método simplex en que la variable saliente en el simplex sirve para mantener la factibilidad y en el simplex dual para avanzar hacia la factibilidad, y la variable entrante en el simplex dual sirve para mantener la optimalidad de la tabla y en el simplex sirve para avanzar hacia la optimalidad, por lo que el método de cálculo de una y otra variable son diferentes en ambos métodos, aunque el cálculo del elemento pivote y de las filas nuevas de la tabla, sigue siendo el mismo.

2.2.1.- METODO SIMPLEX DUAL: Cálculo de la variable entrante y la variable saliente

Variable saliente

La variable saliente en este método sirve para avanzar hacia la condición de no negatividad de las variables. Para su cálculo bastará con tomar aquella variable básica cuyo valor sea más negativo, en el ejemplo es la x_2 que toma un valor igual a -1/3 de unidades físicas.

Variable entrante

La variable entrante según este método sirve para mantener la optimalidad de la tabla. Para su cálculo, deberemos de distinguir entre un problema de máximo y un problema de mínimo.

- CASO MAXIMO

Máx $-\frac{C_J - Z_J}{a_{tj}}, \; a_{tj} < 0$

- CASO MINIMO

Mín $-\frac{C_J - Z_J}{a_{tj}}, \; a_{tj} < 0$

En el ejemplo, al tratarse de un problema de máximo, se debe aplicar la primera de las fórmulas, es decir:

$$\text{Máx} \quad -\frac{C_J - Z_J}{a_{tj}}, \ a_{tj} < 0$$

El coeficiente técnico de la fila de la variable saliente que es negativo es -1/3 que corresponde a la columna de la variable de holgura x_3^H y el valor del c_j-z_j que corresponde a esa columna es -1/3, por tanto,

$$\text{Máx} \quad -\frac{-1/3}{-1/3} \quad = \quad -1 \text{ (que corresponde a la } x_3^H\text{)}$$

Como es el único valor que obtenemos, puesto que si hubieran más coeficientes técnicos negativos en dicha fila tomaríamos el valor máximo, la variable entrante será la x_3^H, por tanto:

Variable entrante = x_3^H
Variable saliente = x_2

A continuación operaremos de la misma forma que en el método simplex, de manera que la nueva tabla óptima y factible será la siguiente:

		3	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	3	1	2	0	1/2	22
X_3^H	0	0	- 3	1	- 1	1
		3	6	0	3/2	66
		0	- 1	0	- 3/2	

La interpretación de esta nueva solución será:

1) La empresa si aumenta en 25 unidades las disponibilidades del Factor F_1, situándose su valor en 45 unidades físicas, podrá aumentar la producción del producto A en 16 unidades físicas más que en la solución óptima anterior, por contra, deberá de dejar de producir el producto B quedando almacenada 1 unidad física, que es el valor que corresponde a la variable de holgura x_3^H, ello se puede verificar sustituyendo estos valores en las restricciones iniciales, una vez convertidas las desigualdades en igualdades:

1ª restricción (Factor F_1):$2\ x_1 + x_2 + x_3^H = 2 \text{ x } 22 + 1 \text{ x } 0 + 1 \text{ x } 1 = 45$
2ª restricción (Factor F_2):$2\ x_1 + 4\ x_2 + x_4^H = 2 \text{ x } 22 + 4 \text{ x } 0 + 1 \text{ x } 0 = 44$

2) Si sustituimos los valores en la función objetivo, resulta que el beneficio que obtenemos es de 66 unidades monetarias, es decir:

Función objetivo: Máx. $z = 3\ x_1 + 5\ x_2 + 0\ x_3^H + 0\ x_4^H = 3 \text{ x } 22 + 5 \text{ x } 0 + 0 \text{ x } 1 + 0 \text{ x } 0 = 66$ u.m.

d) Vamos a suponer que b_1 disminuye en 10 unidades y por tanto el valor de b_1 pasa a ser de 10 unidades físicas de disponibilidad máxima, como veremos al analizar las variaciones no exactas de los términos independientes, esta cantidad, tampoco estará dentro del intervalo que vamos a obtener, por tanto la tabla dejará de ser factible porque alguna de las variables básicas tomará un valor negativo. Vamos a comprobarlo analíticamente sabiendo que la variación de dicho término independiente es de un valor en concreto, y por tanto, es exacto.

$$x_i^B = B^{-1} . b' = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 10 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 34/3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to x_1 \\ \to x_2 \end{array}$$

La nueva solución quedaría, pues, de la siguiente manera:

		3	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_1	3	1	0	2/3	- 1/6	- 2/3
X_2	5	0	1	- 1/3	1/3	34/3
		3	5	1/3	7/6	164/3
		0	0	- 1/3	- 7/6	

Al igual que en el caso anterior, la composición de la tabla tampoco se mantiene, ya que se incumple la condición de no negatividad de las variables, el valor de la variable x_1 es negativo, aunque se mantenga la optimalidad puesto que los c_j-z_j no cambian y siguen cumpliendo la condición de máximo, por lo que deberíamos de aplicar el método simplex dual para la determinación de la variable entrante y la saliente que, como sabemos difiere del método simplex.

Variable saliente

De acuerdo con el procedimiento visto en el punto anterior, la variable saliente es la x_1 que toma un valor igual a -2/3 de unidades físicas.

Variable entrante

La variable entrante según este método, al tratarse de un problema de máximo, deberemos de aplicar la siguiente fórmula:

- CASO MAXIMO

$$\text{Máx} \quad -\frac{C_J - Z_J}{a_{tj}}, \quad a_{tj} < 0$$

El coeficiente técnico de la fila de la variable saliente que es negativo es -1/6 que corresponde a la columna de la variable de holgura x_4^H y el valor del c_j-z_j que corresponde a esa columna es -7/6, por tanto,

$$\text{Máx} \quad -\frac{-7/6}{-1/6} \quad = \quad \text{-7 (que corresponde a la } x_4^H\text{)}$$

Como es el único valor que obtenemos, puesto que si hubieran más coeficientes técnicos negativos en dicha fila tomaríamos el valor máximo, la variable entrante será la x_4^H, por tanto:

Variable entrante = x_4^H

Variable saliente = x_1

A continuación operaremos de la misma forma que en el método simplex, de manera que la nueva tabla óptima y factible será la siguiente:

		3	5	0	0	
X^B	C^B	X_1	X_2	X_3^H	X_4^H	b_i
X_4^H	0	- 6	0	- 4	1	4
X_2	5	2	1	1	0	10
		10	5	5	0	50
		- 7	0	- 5	0	

La interpretación de esta nueva solución será:

1) La empresa si disminuye en 10 unidades las disponibilidades del factor F_1, situándose su valor en 10 unidades físicas, podrá aumentar la producción del producto x_2 en 2 unidades físicas más que en la solución óptima anterior, por contra, deberá de dejar de producir el producto A quedando almacenadas 4 unidades físicas, que es el valor que corresponde a la variable de holgura x_4^H, ello se puede verificar sustituyendo estos valores en las restricciones iniciales, una vez convertidas las desigualdades en igualdades:

   1ª restricción (Factor F_1):$2\ x_1 + x_2 + x_3^H = 2 \text{ x } 0 + 1 \text{ x } 10 + 1 \text{ x } 0 = 10$
   2ª restricción (Factor F_2):$2\ x_1 + 4\ x_2 + x_4^H = 2 \text{ x } 0 + 4 \text{ x } 10 + 1 \text{ x } 4 = 44$

2) Si sustituimos los valores en la función objetivo, resulta que el beneficio que obtenemos es de 50 unidades monetarias, es decir:

   Función objetivo: Máx. $z = 3\ x_1 + 5\ x_2 + 0\ x_3^H + 0\ x_4^H = 3 \text{ x } 0 + 5 \text{ x } 10 + 0 \text{ x } 0 + 0 \text{ x } 4 = 50$ u.m.

3.- ANALISIS DE SENSIBILIDAD PARA LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO (VARIACION NO EXACTA DE LOS C_J)

A continuación realizaremos el análisis de una variación no exacta de un coeficiente de la función objetivo, es decir, que el coeficiente no toma un valor concreto, sabemos que puede variar pero no se sabe exactamente la cantidad para que se siga manteniendo la composición de la tabla.

Como los c_j se utilizan para calcular los c_j-z_j puede ocurrir que la tabla deje de ser óptima, no obstante, la tabla seguirá siendo factible puesto que no afectará, este análisis, a ningún valor que afecte a la condición de no negatividad de las variables. Antes de comprobarlo a través del ejemplo, vamos a distinguir entre los c_j-secundarios y los c_j-básicos.

Los c_j-secundarios son los coeficientes que acompañan a las variables que no son básicas, y que, por tanto, toman un valor igual a cero, esto quiere decir que la empresa no producirá nada de ese producto y por tanto esa variable no contribuirá a la obtención del beneficio máximo o a la minimización del coste.

Los c_j-básicos son los coeficientes que acompañan a las variables que son básicas y que por tanto aparecen en la solución óptima y toman un valor distinto de cero, esto es, que la empresa debe producir una cantidad determinada de ese producto y por tanto contribuirá a la obtención del beneficio máximo o a la minimización del coste.

a) Variación de algún c_j-secundarios

Si varía un c_j-secundario, es decir, uno de los coeficientes de las variables cuyo valor en la tabla óptima es igual a cero, o dicho de otra forma, cuyos c_j-z_j son distintos de cero, entonces para obtener el intervalo deberemos de distinguir lo que ocurre si se trata de maximizar o de minimizar la función objetivo.

- Caso Máximo

$$-\infty \leq \Delta c_j^S \leq -(c_j - z_j)$$

- Caso Mínimo

$$-(c_j - z_j) \leq \Delta c_j^S \leq +\infty$$

b) Variación de algún c_j-básicos

Si varia un c_j-básico, es decir, uno o más coeficientes de alguna variable básica que toma un valor distinto de cero en la tabla óptima, o dicho de otra forma, cuyos c_j-z_j son iguales a cero, entonces para obtener el intervalo dentro del cual la composición de la tabla óptima se mantiene depende, al igual que en el caso anterior, de si se trata de maximizar o minimizar la función objetivo.

- Caso de máximo

$$\text{Máx} \left\{ \frac{C_J - Z_J}{|a_{ij}|} \right\} \leq \Delta C_j^B \leq \text{Mín} \left\{ -\frac{C_j - Z_j}{|a_{ij}|} \right\}$$

siendo $a_{ij} > 0$ siendo $a_{ij} < 0$

- <u>Caso de mínimo</u>

$$\text{Máx} \left\{ -\frac{C_j - Z_j}{|a_{ij}|} \right\} \leq \Delta C_j^B \leq \text{Mín} \left\{ \frac{C_J - Z_J}{|a_{ij}|} \right\}$$

siendo $a_{ij} < 0$ siendo $a_{ij} > 0$

En todos los casos anteriores si la variación que experimenta el coeficiente se sale fuera de dichos intervalos, quiere decir, que la tabla deja de ser óptima y, por tanto, la composición de la tabla cambia porque algún c_j-z_j tomará valor positivo (en caso de que el objetivo sea maximizar la función) o bien tomará un valor negativo (en caso de que el objetivo sea minimizar la función), en estos casos, se debe volver a aplicar el críterio de la variable entrante y variable saliente del método simplex con el objeto de llegar a una nueva solución óptima que hará que las variables que en la tabla óptima inicial eran básicas ahora al obtener una nueva tabla nos dará como básicas otras variables. No obstante, ambas tablas seguirán siendo factibles puesto que la variación de los coeficientes de la función objetivo no afecta a la condición de no negatividad (factibilidad).

3.1.- EJEMPLO DE VARIACION NO EXACTA DE UNO DE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO

Siguiendo con el ejemplo inicial, vamos a suponer que el c_1 varía, es decir, que el coeficiente, correspondiente a la primera variable que, en el ejemplo, representa el margen de beneficios que se obtiene al producir cada unidad de A se modifica; entonces deberemos de ver lo que sucede en la tabla óptima.

Deberemos de calcular el intervalo dentro del cual se mantiene la composición de la tabla:

Al tratarse de un coeficiente, que acompaña a una de las variables básicas, la x_1, y de un problema de máximo, deberemos de utilizar la siguiente fórmula:

$$\text{Máx} \left\{ \frac{C_J - Z_J}{|a_{ij}|} \right\} \leq \Delta C_j^B \leq \text{Mín} \left\{ -\frac{C_j - Z_j}{|a_{ij}|} \right\}$$

siendo $a_{ij} > 0$ siendo $a_{ij} < 0$

Para aplicar la fórmula del intervalo en el ejemplo, tendremos que fijarnos, primero, en la fila de la tabla óptima correspondiente a la variable que acompaña al coeficiente que se modifica, en el ejemplo será la primera fila que corresponde a la primera de las variables, es decir, a la x_1 y después deberemos de fijarnos en la fila de los c_j-z_j, y de esta última deberemos de ver los c_j-z_j que son distintos de cero.

EXTREMO INFERIOR

Según la fórmula, en el denominador del extremo inferior del intervalo deberemos de tomar los a_{ij} que sean mayores que cero y lo consideraremos en valor absoluto, en el ejemplo es 1 y 2/3 (ver pág.11), (no tendremos en cuenta el 1 porque es el punto de intersección de la variable x_1 consigo misma), por tanto será 2/3 y luego colocaremos el valor del c_j-z_j correspondiente a esa columna en el numerador con el signo más delante que, en el ejemplo, es -1/3, es decir:

$$\text{Máx} \left\{ \frac{C_J - Z_J}{|a_{ij}|} \right\} = \text{Máx} \left\{ \frac{-1/3}{|2/3|} \right\} = -1/2$$

siendo $a_{ij} > 0$

El extremo inferior del intervalo es de -1/2 unidad monetaria.

Si hubieran otros coeficientes técnicos y otros c_j-z_j mayores que cero, entonces deberemos de tomar, como extremo inferior, el cociente que nos diera el valor máximo.

EXTREMO SUPERIOR

Según la fórmula, en el denominador del extremo superior del intervalo deberemos de tomar las a_{ij} que sean menores que cero de la misma fila que el anterior y lo consideraremos en valor absoluto, en el ejemplo es -1/6, y luego colocaremos el valor del c_j-z_j correspondiente a esa columna que es -7/6 en el numerador, es decir:

$$\text{Mín} \left\{ -\frac{C_j - Z_j}{|a_{ij}|} \right\} = \text{Mín} \left\{ -\frac{-7/6}{|1/6|} \right\} = 7$$

siendo $a_{ij} < 0$

El extremo superior del intervalo es de 7 unidades monetarias.

Si hubieran otros coeficientes técnicos y otros c_j-z_j mayores que cero, entonces deberemos de tomar, como extremo superior, el resultado del cociente que nos diera un valor mínimo.

Por tanto, el intervalo dentro del cual se mantiene la composición de la tabla vendrá comprendido entre la variación -1/2 y 7, quiere esto decir que el coeficiente que acompaña a la primera variable no podrá sufrir una disminución superior a 1/2 unidad monetaria de margen ni un incremento superior a 7 unidades monetarias, en caso contrario la tabla seguiría siendo factible pero dejaría de ser óptima porque algún c_j-z_j podría tomar valor negativo afectando a la optimalidad de la tabla. Si fuera este el caso, entonces deberíamos de volver a aplicar el método simplex aplicando el críterio de la variable entrante y saliente para obtener una nueva solución óptima cuyas variables básicas podrían llegar a ser distintas y con distinto valor. El intervalo, pues, en el ejemplo, es:

$$-1/2 \leq \Delta c_1 \leq 7$$

y si en el modelo inicial el valor de ese coeficiente era de 3 unidades monetarias, al sumarle el incremento y restarle la disminución obtenida en el intervalo, nos daría:

$$5/2 \leq c_1 \leq 10$$

es decir, que el margen de beneficios del producto A sólo puede tomar valores entre 5/2 y 10 para que se siga manteniendo la composición de la tabla óptima.

Si el incremento o disminución hace que el coeficiente tome un valor fuera de ese intervalo, la tabla óptima dejará de serlo ya que algún c_j-z_j tomará un valor que incumple la optimalidad, en ese caso deberemos de volver a aplicar el método simplex calculando la variable entrante y la saliente y hallando los nuevos valores de las nuevas variables básicas, es decir, llegando a una nueva tabla óptima.

4.- ANALISIS DE SENSIBILIDAD PARA LOS TERMINOS INDEPENDIENTES DE LAS RESTRICCIONES EN EL MODELO INICIAL (VARIACION NO EXACTA DE LOS b_i)

A continuación realizaremos el análisis de una variación no exacta de uno de los términos independientes de una restricción inicial, por tanto, sabemos que puede variar pero no sabemos exactamente la cantidad para que se siga manteniendo la composición de la tabla.

Como los términos independientes se utilizan para obtener en la tabla del simplex los valores de las variables básicas, que representan la cantidad que la empresa debe producir de cada uno de los productos, puede ser que alguna variable básica tome valor negativo afectando a la condición de no negatividad de las variables (factibilidad) y, sabemos, que las variables no pueden ser negativas puesto que la empresa, como mínimo, no producirá ninguna cantidad de un determinado producto, es decir producirá cero unidades, pero no podrá producir un número negativo de unidades de un producto, por tanto, para obtener el intervalo dentro del cual la tabla siga siendo óptima, aunque puede dejar de ser factible, en primer lugar, deberemos de ver la restricción a la cual corresponde ese término independiente que se ha modificado y, por tanto, si corresponde a una restricción del tipo mayor-igual, menor-igual, o igual, porque la forma de obtener el intervalo será diferente. No deberemos de distinguir entre caso de máximo y mínimo puesto que no afectará la variación del término independiente a la optimalidad, sí en cambio puede afectar a la condición de no negatividad (factibilidad).

a) <u>Variación de un b_i correspondiente a una restricción del tipo menor-igual e igual</u>

$$\text{Máx} \left\{ -\frac{bí}{|a_{í,n+r}|} \right\} \leq \Delta b_i \leq \text{Mín} \left\{ \frac{bí}{|a_{í,n+r}|} \right\}$$

siendo $a_{í,n+r} > 0$ siendo $a_{í,n+r} < 0$

b) <u>Variación de un b_i correspondiente a una restricción del tipo mayor-igual</u>

$$\text{Máx} \left\{ -\frac{bí}{|a_{í,n+r}|} \right\} \leq \Delta b_i \leq \text{Mín} \left\{ \frac{bí}{|a_{í,n+r}|} \right\}$$

siendo $a_{í,n+r} < 0$ siendo $a_{í,n+r} > 0$

Si la variación del término independiente se sale del intervalo correspondiente entonces el valor que tomará la variable básica será negativo por lo que incumplirá la condición de no negatividad, en este caso, deberemos de aplicar el método simplex dual para la determinación de la variable entrante y la variable saliente. Dicho método, ya sabemos que, difiere con respecto al método simplex puesto que en el simplex dual la variable saliente se determina para avanzar hacia la factibilidad y la variable entrante para mantener la optimalidad, en cambio en el simplex, la variable entrante se determina para avanzar hacia la optimalidad y la variable saliente para mantener la factibilidad, por lo que la forma de calcular las variables entrante y saliente en uno y otro método son distintos.

4.1.- EJEMPLO DE VARIACION NO EXACTA DE UNO DE LOS TERMINOS INDEPENDIENTES DE LAS RESTRICCIONES INICIALES DEL MODELO

Siguiendo, también, con el ejemplo inicial, supongamos que b_1 varía, es decir, que el término independiente de la primera restricción se modifica, en el ejemplo, representa las disponibilidades máximas del factor F_1, que son de 20 unidades físicas en el modelo inicial, entonces deberemos de ver lo que sucede con dicha tabla.

Deberemos de calcular el intervalo dentro del cual se mantiene la composición de la tabla:

Al tratarse de un término independiente que se encuentra en una restricción del tipo menor o igual deberemos de aplicar el siguiente intervalo:

$$\text{Máx}\left\{-\frac{b_í}{|a_{í,n+r}|}\right\} \leq \Delta b_i \leq \text{Mín}\left\{\frac{b_í}{|a_{í,n+r}|}\right\}$$

siendo $a_{í,n+r} > 0$ siendo $a_{í,n+r} < 0$

Para aplicar la fórmula del intervalo, en el ejemplo, deberemos de fijarnos, en primer lugar, en los coeficientes técnicos, de la solución óptima, de la columna correspondiente a la variable de holgura añadida en esa restricción, que es la variable x_3^H. Dichos coeficientes son: 2/3 y -1/3 (ver pág.11). Después nos fijaremos en los valores de las variables básicas que son, en el ejemplo, 6 y 8.

EXTREMO INFERIOR

Para obtener el extremo inferior del intervalo deberemos de empezar por el denominador, tomando el valor del coeficiente técnico que sea mayor que cero y que, en el ejemplo, son 2/3, siempre en valor absoluto, luego nos fijaremos en el valor de la variable básica de la fila correspondiente a ese coeficiente, que es 6. Como se trata del extremo inferior deberemos de anteponer al cociente el signo menos:

$$\text{Máx} \left\{ -\frac{bí}{|a_{í,n+r}|} \right\} = \text{Máx} \left\{ -\frac{6}{|2/3|} \right\} = -9$$

siendo $a_{í,n+r} > 0$

El extremo inferior de dicho intervalo es de -9 unidades físicas

EXTREMO SUPERIOR

Para obtener el extremo superior del intervalo, deberemos de fijarnos en el coeficiente técnico menor que cero que, en el ejemplo, es -1/3, pero, como siempre, lo tomaremos en valor absoluto, después deberemos ver el valor de la variable básica a la cual corresponde la fila de ese coeficiente y que es 8. Al tratarse del extremo superior deberemos de anteponer al cociente el signo más:

$$\text{Mín} \left\{ \frac{bí}{|a_{í,n+r}|} \right\} = \text{Mín} \left\{ \frac{8}{|1/3|} \right\} = 24$$

siendo $a_{í,n+r} < 0$

Como extremo superior nos da 24 unidades físicas

Por tanto las disponibilidades máximas del factor F_1 podrán sufrir un incremento o disminución entre -9 y 24 unidades físicas, como máximo, para que se siga manteniendo la composición de la solución óptima, es decir,

$$-9 \leq \Delta b_1 \leq 24$$

lo cual significa que el valor del primer término independiente no podrá ser inferior a 11 unidades ni mayor que 44 unidades físicas para que las variables básicas no cambien y por tanto se siga manteniendo la composición de la tabla, es decir:

$$11 \leq b_1 \leq 44$$

En caso de que la variación del término independiente se salga fuera del intervalo, aunque no afectará, en principio, a la optimalidad de la tabla, ésta dejará de ser factible afectando a la condición de no negatividad de las variables, por lo que deberemos de aplicar el método simplex dual como hemos visto en las variaciones exactas.

5.- BIBLIOGRAFIA

FERNANDEZ LECHON, R. y CASTRODEZA, C. *Programación lineal*. Barcelona: Ed. Ariel, 1989.

GUERRERO CASAS, F.M. *Curso de optimización. Programación matemática*. Barcelona: Ed. Ariel, 1994.

RIOS INSUA, S. *Investigación Operativa. Optimización*. Madrid: Ed. Centro de estudios Ramón Areces, 1993.

TARRAGO SABATE, F. *Fundamentos de Economía de la Empresa*. Barcelona: Ed. Hispano Americana, 1989.