



Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

Análisis real no estándar

Autor: Marcos Salgado Corbillón

Director: Dr. Josep Maria Font Llovet

Realitzat a: Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística

Barcelona, 27 de junio de 2015

Mathematics Subject Classification (2010): 26E35, 03H05, 28E05

Key words and phrases: non-standard analysis, non-archimedean field, hyperreal, infinitesimal, infinitely close, transfer principle, ultrafilter

«We know that mathematicians care no more for logic than logicians for mathematics. The two eyes of exact science are mathematics and logic, the mathematical sect puts out the logical eye, the logical sect puts out the mathematical eye; each believing that it sees better with one eye than with two.» (A. De Morgan, *Review of «T. M. Wilson, Elementary Geometry»*. The Athenaeum, Vol. 2, No. 2125 (1868), pp. 71-73).

Abstract

The aim of this Final Degree Project is to develop a presentation of the so-called «nonstandard real analysis», a 20th-century logical theory that builds real analysis on a non-archimedean ordered field extension ${}^*\mathbb{R}$ of the real numbers $\mathbb{R}$, that contains in particular infinitely small and infinitely large numbers. In Introduction, we contextualize its origin, justify our approach, comment the bibliography, detail some applications and fix some notation. In Chapter 1, we show how ultrafilters are a natural tool for the construction of ${}^*\mathbb{R}$. In Chapter 2, we set up all the needed facts about them. In Chapter 3, we explain the construction of ${}^*\mathbb{R}$ and its basics. In Part II, we deal with some topics on real analysis using our new tools, remarkably the useful characterizations of the completeness of $\mathbb{R}$ and the compactness of subsets of $\mathbb{R}$, as well as the algebraic account of limits and the possibilities of hyperfinite methods.

Resumen

El objetivo de este Trabajo Final de Grado es elaborar una presentación del llamado «análisis real no estándar», una teoría erigida en el siglo XX con herramientas lógicas que desarrolla el análisis real en una extensión de cuerpos ordenada y no arquimediana ${}^*\mathbb{R}$ del cuerpo real $\mathbb{R}$, conteniendo en particular elementos infinitamente pequeños (infinitesimales) e infinitamente grandes. En la Introducción contextualizamos su origen, justificamos el enfoque tomado, comentamos la bibliografía, destacamos algunas de sus aplicaciones y fijamos algunas notaciones. En el primer capítulo, mostramos heurísticamente como la noción de ultrafiltro puede proveer un marco de trabajo natural para la construcción de ${}^*\mathbb{R}$. En el segundo, establecemos todos los resultados necesarios sobre dicha noción. En el tercero, exponemos la construcción de ${}^*\mathbb{R}$ y sus propiedades elementales. En la segunda parte, cubrimos varios de los tópicos propios de un curso clásico de análisis real, pero mediante nuestras nuevas herramientas. Entre éstos, destacamos la caracterización de la completitud de $\mathbb{R}$ mediante sombras, el criterio de compacidad de Robinson, la algebraización de la noción de límite y las posibilidades de los métodos hiperfinitos.

Agradecimientos. A mi tutor, por aguantar mis parrafadas, y a mis padres, por aguantarme todo entero y, pese a ello, no echarme de casa (aún).

Sumario

Introducción	I
Contexto histórico	I
Sobre este TFG	III
Convenios de notación	VI
 I Fundamentos	 1
1. El problema de los hiperreales	3
1.1. Infinitesimal e ilimitado	3
1.2. Ideas para su construcción	5
1.3. Propuesta	6
2. Filtros	9
2.1. Rudimentos	9
2.2. Filtro generado	10
2.3. Intersección y unión	11
2.4. Extensiones maximales	13
3. El cuerpo de los hiperreales	15
3.1. Construcción	15
3.2. Extensión de relaciones	18
3.2.1. Subconjuntos	18
3.2.2. Aplicaciones parciales	21
3.3. Principio de Transferencia	22
3.4. Aritmética y álgebra	25
 II Análisis	 29
4. Sucesiones	31
4.1. Extendiendo definiciones	31
4.1.1. Convergencia	31
4.1.2. Divergencia a infinito	32
4.1.3. Principio de desbordamiento	32
4.1.4. Acotación	33
4.2. Completitud	34
4.2.1. Cauchy	34
4.2.2. Dedekind	35
4.3. Propiedades límites	36
4.4. Puntos límites	38
4.4.1. Rudimentos	38
4.4.2. Principio de subdesbordamiento	38
4.4.3. Bolzano-Weierstrass y monotonía	39
4.4.4. Límite superior e inferior	41

4.5. Series	42
5. Topología	45
5.1. Puntos de un conjunto	45
5.2. Abiertos y cerrados	46
5.3. Compactos	48
6. Límites de aplicaciones	51
6.1. Rudimentos	51
6.2. Continuidad	53
6.3. Derivabilidad	55
7. Particiones hiperfinitas	57
7.1. Teorema del Valor Intermedio	57
7.2. Integral de Riemann	58
7.2.1. Construcción y ejemplos	58
7.2.2. Propiedades	60
A. Lógica matemática	63

Introducción

El objetivo de este Trabajo Final de Grado, en adelante TFG, es elaborar una presentación del llamado «análisis real no estándar», una teoría erigida en el siglo XX con herramientas lógicas que desarrolla el análisis real en una extensión de cuerpos ordenada y no arquimediana ${}^*\mathbb{R}$ del cuerpo real $\mathbb{R}$, conteniendo en particular elementos infinitamente pequeños (infinitesimales) e infinitamente grandes. En la primera parte de esta Introducción, exponemos someramente el contexto histórico que ha llevado al surgimiento de esta teoría desde la Antigua Grecia. En la segunda parte, justificamos la aproximación elegida a partir de las fuentes consultadas y otras referencias, y exponemos la labor realizada y el contenido de los distintos capítulos y secciones. Finalmente, resumimos varios convenios de notación.

Contexto histórico

Nota. Esta sección bebe principalmente de [Ed79] (especialmente de los capítulos 2, 4, 5 y de 8 a 10) así como [Ro66, Chapter 10] y la introducción de [BeNe07], donde pueden encontrarse todos los detalles y referencias aquí omitidos. En cuanto a los artículos de Robinson citados, todos ellos están disponibles en [LuK679].

Los orígenes del análisis son eminentemente geométricos y aplicados. Así, e.g., en los trabajos de Arquímedes podemos encontrar la cuadratura y cubatura de diferentes objetos geométricos calculada mediante el método de exhaustión,¹ aprovechando en cada caso sus particularidades geométricas y concluyendo por arquimedianidad vía una doble reducción al absurdo.² Procedimiento, este último, sustituto primitivo de nuestra actual noción de límite, concebido precisamente para evitar cualquier mención al mismo.³

De hecho, fue la superación explícita de dicho rechazo al infinito lo que permitió a los matemáticos del siglo XVII progresar en sus investigaciones, llevando hasta sus últimas consecuencias el método de exhaustión. Así, e.g., Kepler (*Nova stereometria doliorum vinariorum*, 1615) descompone una figura dada en otras de más simples e infinitesimales, como resultado de un proceso de subdivisión sucesiva, para entonces reagruparlas convenientemente, facilitando así su suma.⁴ Por otra parte, Cavalieri (*Geometria indivisibilibus*, 1635) descompone dos figuras dadas en figuras de una dimensión menor (e.g., el cono en círculos), que denomina indivisibles, y establece entonces una relación entre éstos, que extrapola a las figuras iniciales. Más aún, Cavalieri conjetura el valor del área bajo la curva x^n en un intervalo $[0, a]$ (con $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$) considerando la figura en cuestión como suma formal de sus indivisibles, lo que fue pronto probado por Fermat, Pascal y Roberval mediante razonamientos más aritméticos, haciendo uso de un cierto límite calculado a la Arquímedes. Por último, John Wallis (*Arithmetica Infinitorum*, 1656), que tendría una influencia decisiva en Newton, aborda sistemáticamente dicha clase de problemas, reduciéndolos a sumas de sucesiones cuyo límite calcula de manera empírico-numérica.

¹I.e., *grosso modo*, el cálculo de áreas y volúmenes mediante su aproximación sucesiva por polígonos y pirámides respectivamente. E.g., aproximando la esfera por pirámides con vértice su centro, formando así sus bases un poliedro inscrito en la esfera, haciendo sus alturas de radio.

²Más concretamente, probando por arquimedianidad que no son posibles ni $a > b$ ni $a < b$ para concluir $a = b$.

³El método de Arquímedes nos sugiere, no obstante, que las nociones de infinito e infinitamente pequeño sí eran utilizadas heurísticamente junto a ciertas intuiciones mecánicas.

⁴Dicho trabajo inspiró a Leibniz su Ley de Continuidad, la cual guarda una íntima relación con el Principio de Transferencia del análisis no estándar.

Paralelamente, Fermat (*Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*, 1636) expone un algoritmo, involucrando igualdades aproximadas e incrementos, para la obtención de extremos relativos de funciones, que emplea a su vez en la construcción de rectas tangentes y en la resolución de varios problemas físicos.⁵ Trabajos que contienen implícitamente la noción de derivada, y que marcan el inicio de un cambio de paradigma culminado con la creación del cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz durante el último tercio del siglo XVII, reduciendo (vía el Teorema Fundamental del Cálculo) el problema de la cuadratura de curvas (i.e., hallar el área bajo una curva, su integral definida) al de la construcción de rectas tangentes a dichas curvas (i.e., al cómputo de su derivada).

Los nuevos métodos infinitesimales continuaron su camino con gran provecho hasta alcanzar su cenit a mediados del siglo XVIII con Euler, pero para entonces la falta de una fundamentación adecuada, clara y rigurosa era innegable, y la preocupación por hallar tal se extendió a toda la comunidad matemática. Así, e.g., en 1784 la Academia de Ciencias de Berlín ofrece 50 ducados a quien pueda solucionar la cuestión, Lagrange propone como nueva base fundadora la expansión de funciones a sus series de Taylor (suponiendo erróneamente que ello siempre es posible), y d'Alembert da un paso adelante hacia una definición precisa de límite. Esta última dirección fue continuada por Cauchy en su curso de 1821, punto ambiguamente intermedio entre el análisis con y sin infinitesimales, y concluida por Weierstrass en la actual formulación ϵ - δ a lo largo del siglo XIX.⁶ Y en el proceso, un nuevo cambio de paradigma sedimenta: el axioma «natura non facit saltus» de Leibniz se supera en pos de la noción de función continua y la completitud de $\mathbb{R}$.

Pero, ¿en qué consiste esencialmente la formalización ϵ - δ que utilizamos hoy día? En sustituir la idea de *un* valor arbitrariamente pequeño por la posibilidad de tomar *varios* valores distintos, cada uno más pequeño que varias cotas elegidas a voluntad. Así, e.g., mientras que Leibniz calcularía la derivada $f'(x)$ haciendo $g_x(dx)$ para dx un número infinitesimal no nulo, con $g_x(h) = (f(x+h) - f(x))/h$, nosotros fijamos un error (o cota) $\epsilon > 0$ y buscamos una distancia $\delta > 0$ para la cual la diferencia $|g_x(h) - l| < \epsilon$ siempre que $0 < |h| < \delta$, suponiendo que tengamos un candidato a límite l (i.e., vemos que es posible reducir el error que cometemos al aproximar l por $g_x(h)$ cuanto queramos reduciendo convenientemente la distancia).⁷ Esto es, un retorno al método de exhaustión (convenientemente depurado) más que una formalización del fructífero concepto de infinitesimal.

Resulta natural, pues, preguntarse si no existen (en $\mathbb{R}$ o en una extensión natural) valores que sean, por sí mismos, arbitrariamente pequeños (i.e., menores que cualquier cota, véase 1.1.7).⁸ Así, e.g., Du Bois-Reymond, coetáneo y paisano de Weierstrass, e inspirado también por Cauchy (especialmente por su identificación de los infinitesimales con las funciones tendiendo a cero), produce una elaborada teoría de órdenes de magnitud para el comportamiento asintótico de funciones con la esperanza de formalizar tales ideas, mientras que Stolz trata de desarrollar una teoría de operaciones aritméticas para tales entidades, ambos sin éxito.

No obstante, dicha perspectiva fue retomada por Skolem en su construcción de un modelo no estándar de $\mathbb{N}$ (que denota $\mathbb{N}^*$) en 1934 con el propósito de mostrar que ningún sistema axiomático podía caracterizar categóricamente $\mathbb{N}$, así como por Schmieden en su construcción de un anillo conteniendo infinitesimales (que coincide con nuestro ejemplo 1.12, y que fue desarrollada durante los 1950s y publicada en 1958 en colaboración con Laugwitz, véase [La01]) al sentir que el análisis a la Weierstrass no era adecuado para sus investigaciones en matemática

⁵Su método fue aclarado y refinado en sucesivas memorias, como *Doctrinam tangentium* (1640), y es similar al posteriormente propuesto por Barrow, el mentor de Newton.

⁶De hecho, aunque desconocido por sus coetáneos, Bolzano precedió a ambos en su artículo de 1817 sobre el teorema de valores intermedios, si bien la falta de una fundamentación de $\mathbb{R}$ le impidió (al igual que a Cauchy) dar una prueba rigurosa del mismo.

⁷Por supuesto, lo habitual es reducir el cálculo de $f'(x)$ al cálculo de ciertos límites usando las propiedades de éstos, etc. Pero dado que las definiciones centrales del análisis se formulan en dichos términos mediante el concepto unificador de límite, que incluso hace su aparición en nociones más topológicas como los cerrados y compactos, en última instancia todo se reduce a esta clase de argumentos, que pueden volverse inmanejables cuando la cantidad de cotas a controlar se dispara, cómo sucede especialmente en el *hard analysis*. Para una discusión más detallada sobre éste y como el análisis no estándar puede ser de utilidad en estos casos, véase [Ta08, Articles 2.3, 2.5].

⁸De hecho, y dado que estamos en un cuerpo, tanto da comenzar por lo arbitrariamente pequeño que por lo arbitrariamente grande (véase 1.2.6), y así lo haremos por comodidad expositiva. No en balde, recordamos, éstos tampoco son precisamente ajenos al análisis, apareciendo con frecuencia en forma de límites al infinito.

aplicada (viz.: aerodinámica, hidrodinámica y vibraciones no lineales).⁹ Paralelamente, en 1948 Hewitt construye por medios algebraicos y con fines topológicos una extensión de cuerpos de $\mathbb{R}$ no arquimediana (y, por ende, con elementos arbitrariamente grandes), acuñando el término *hyper-real*, mientras que en 1955 Łoś introduce las ultrapotencias (cocientes de productos inducidos por ultrafiltros) en su investigación sobre las clases definibles de álgebras y su relación con la lógica, construcción que se superpone a la de Hewitt.¹⁰

Y en el otoño de 1960, Abraham Robinson, experto en aerodinámica y teoría de modelos, y con una imagen global de la situación, se percató de que el análisis con infinitesimales en una extensión de $\mathbb{R}$ es posible. Así lo hace notar en su artículo seminal de 1961, seguido por una exposición completa de la teoría en 1966, [Ro66], y su primera aplicación importante, un problema de subespacio invariante propuesto por Halmos. Más aún, en [Ro66, Section 10.5] nota que un resultado de Cauchy que históricamente se había considerado incorrecto tiene una clara y veraz interpretación en el contexto del análisis no estándar, abriendo las puertas a una nueva relectura de los clásicos.¹¹

Desde entonces, las técnicas introducidas por Robinson han sido ampliadas y aplicadas con éxito en análisis real, funcional y estocástico, topología, teoría de la medida y probabilidad, finanzas, física, teoría de números, etc. como dan buena cuenta de ello las colecciones de artículos [ArCuHe97] y [BeNe07], así como la bibliografía de [Go98]. Más aún, la nueva disciplina se abrió camino entre el público no especializado con la aparición, en 1976, del primer libro de texto de pregrado sobre cálculo con herramientas no estándar, [Ke86]; para ello, Keisler restringe el Principio de Transferencia al universo $\mathbb{R}$ y a fórmulas expresables como sistemas de ecuaciones o desigualdades, minimizando los conocimientos lógicos necesarios para su entendimiento y haciendo más accesibles sus fundamentos.¹² Paralelamente, a mediados de los 1970s comienzan a aparecer los primeros tratamientos axiomáticos, que también ayudaron a la difusión de los nuevos métodos al resto de la comunidad matemática. Por último, cierta línea de investigación iniciada por [HeKe86], y continuada en [BeNe07, Article 1], sugiere que pueden existir resultados únicamente demostrables mediante argumentos no estándar:

«To sum up, nonstandard analysis still takes place within ZFC, but in practice it uses a larger portion of full ZFC than is used in standard mathematical proofs.»

Sobre este TFG

Este TFG está dividido en dos partes: una primera sobre fundamentación, en la que construimos ${}^*\mathbb{R}$ y abordamos sus propiedades básicas, y una segunda sobre aplicaciones, donde estudiamos sus posibilidades en la práctica del análisis real.

Como hemos dicho antes, el análisis no estándar surge de la teoría de modelos, y en [Ro66] se dedican unas cuarenta páginas a introducirla antes de comenzar a hacer ninguna clase de análisis.¹³ Es por ello que en este TFG, y siguiendo la filosofía iniciada en [Ke86, HuLo85], hemos

⁹Como se puntualiza en [Ro66, Section 9.4], «In the theory of continuous media, the language of infinitesimals has a long tradition. This tradition remained unbroken even though infinitesimals had been abandoned in pure Analysis. For example, the derivation of Euler's equations of motion is frequently based on the consideration of the balance of forces acting on a *very small* cube and several laws of Fluid Mechanics are expressed in terms of *fluid particles* whose dimensions are supposed to be infinitely small. Again, a doublet is defined by letting two sources of equal and opposite strength move infinitely close to each other while the strength of the sources varies in a suitable manner. It is usually taken for granted, and sometimes shown explicitly, that the use of infinitesimal language can be avoided.».

¹⁰La construcción de Hewitt no fue la primera de su tipo, que se remonta a 1907 por parte de H. Hahn, pero sí la primera apta para los propósitos del análisis no estándar.

¹¹Destacamos que dicho proyecto se está llevando a cabo desde 2010 y de manera sistemática por el grupo de autores de [BHKNS14], véase <http://u.cs.biu.ac.il/~katzmik/infinitesimals.html>.

¹²Como queda claro en la introducción de [HuLo85], dicho enfoque inspiró la organización de sus contenidos, presentando la susodicha restricción a $\mathbb{R}$ (i.e., al análisis real) antes de abordar el caso general para aplicaciones más avanzadas, que es desde entonces un tratamiento habitual en los textos introductorios (e.g., [Go98, Go12, ArCuHe97]). Destacamos además que dicha restricción, a pesar de su simplicidad, puede resultar útil también en investigación, como se puntualiza en [Ta08, Article 2.5].

¹³Más concretamente, [Ro66] demuestra el teorema de compacidad de la lógica de primer orden (vía ultrafiltros) para después generalizarlo a estructuras de orden superior (teoría de tipos mediante) y, finalmente, utilizarlo en la construcción de las extensiones deseadas. El enfoque conjuntístico y vía superestructuras, hoy usual, fue introducido junto a Zakon en 1967.

preferido centramos en el caso real, que sirve a su vez como ilustración de la fuerza del análisis no estándar y como motivación y guía para el estudio del caso general. En cuanto a su fundamentación, y para facilitar la transición de un posible matemático sin formación lógica, hemos optado por su construcción vía ultrafiltros, que puede encontrarse en [HuLo85, Sections 1.1-1.6, 1.15, Appendix], [Go98, Part I], [Go12, Chapters 1-2] y [ArCuHe97, Article 1, Sections 2-3].¹⁴ La introducción de éstos, sin embargo, resulta algo brusca en [HuLo85], [Go12] y [ArCuHe97, Article 1], por lo que nos hemos apoyado especialmente en [Go98], añadiendo en el proceso nuevos enfoques.

En el primer capítulo, tras introducir brevemente nuestro objeto de estudio, discutimos diferentes aproximaciones a su construcción basadas en los conocimientos provistos durante el grado. A pesar de resultar más o menos estériles, éstas nos llevan en última instancia al ejemplo clave 1.12 y a la definición clave aunque informal 1.8, la cual enlazamos con la teoría de la medida, motivando así la definición clave 1.10.¹⁵ Y es en el sencillo proceso de formalizar 1.8 (véase 1.11) y estudiar la viabilidad de la propuesta (véase 1.13, 1.14) donde surgen de manera natural las nociones de filtro, ultrafiltro, filtro propio maximal, etc. así como una cierta intuición de que el proyecto es posible.¹⁶

La demostración de dicha intuición, no obstante, ha de pasar por un estudio más atento de dichas ideas en el segundo capítulo, que hemos construido enteramente a partir de las listas de ejemplos y propiedades de [Go98], añadiendo en el proceso sus demostraciones y algunos nuevos resultados.¹⁷ Así, en la primera sección reintroducimos ordenada y formalmente las nociones anteriormente discutidas para, a continuación, desarrollar todos los hechos que eventualmente necesitaremos sobre ellas, partiendo cada vez de observaciones o preguntas que surgen de manera completamente natural de la misma definición de filtro o de la línea trazada en el capítulo anterior.¹⁸

Una vez resueltas estas cuestiones técnicas, retomamos las ideas del primer capítulo en el tercero, donde exponemos la construcción y propiedades básicas de ${}^*\mathbb{R}$. A diferencia de las citadas referencias, hemos preferido separar los diferentes pasos que llevan a su construcción para hacer hincapié en que muchos de los resultados siguen siendo ciertos para filtros (y de ahí la construcción de Schmieden), así como introducir antes las extensiones de aplicaciones y relaciones como inmediata generalización del caso de las operaciones de $\mathbb{R}$. En la segunda sección se estudian con más detalle dichas extensiones (a través de los ejercicios propuestos en [Go98]) con el fin de infundir en el lector la intuición de que un cierto principio de transferencia entre las propiedades de $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$ existe. La demostración de éste se lleva a cabo en la tercera sección, y no se basa en ninguna referencia concreta más allá de las herramientas adquiridas en la asignatura *Lògica Matemàtica* (que bebe principalmente de [En01]), de la que damos un breve resumen en el anexo A para facilitar su lectura.¹⁹ Finalmente, en la última sección estudiamos la aritmética de ${}^*\mathbb{R}$ e intro-

¹⁴Para una discusión más superficial o heurística, véase también [Ta08, Article 2.5], donde se motiva la noción de ultrafiltro como un sistema de gobierno, pensando los límites como resultados de una votación electoral. Destacamos además que [ArCuHe97, Article 1] se distancia del tratamiento aquí seguido, partiendo de una definición axiomático-geométrica de extensión no estándar, que generaliza sección a sección hasta llegar al caso general, y presuponiendo que el lector está familiarizado con la teoría de los ultrafiltros a la hora de construirlas.

¹⁵En [Go98] no se presuponen conocimientos de teoría de la medida (que, por otra parte, sólo utilizamos como motivación o a nivel heurístico), por lo que 1.10 no se introduce hasta la sección 3.14, tras haber utilizado varias instancias de la misma. Tampoco se suponen conocimientos de análisis funcional, por lo que el único vínculo entre la construcción de $\mathbb{R}$ por sucesiones de Cauchy (que toma como punto de partida amparándose en la historia) y 1.8 pasa por un «Clearly then we need a very different kind of equivalence relation among sequences». La discusión sobre la posibilidad de obtener ${}^*\mathbb{R}$ como una extensión de $\mathbb{R}$ generada por un infinitesimal no nulo tampoco consta en las referencias citadas.

¹⁶Intuición no del todo disponible en [Go98], quien precisamente pregunta con cierta sorna antes de introducir formalmente la noción de filtro: «Can there in fact be such a notion of largeness, and if so, how do we show it?». La diferencia radica en la añadidura de 1.14.

¹⁷*Modus operandi* habitual a lo largo de este TFG, aunque no se explicita cada vez.

¹⁸Aunque es cierto que podríamos habernos contenido (e.g., limitándonos a 2.8, la noción de PIF y la mitad de la última sección, o siguiendo a [HuLo85, Appendix]), hemos creído que esta era una buena oportunidad (desaprovechada en la bibliografía consultada) para introducir al lector a una herramienta tan potente como la de los ultrafiltros, que además de su importancia en lógica encuentra muchas de sus aplicaciones en topología (e.g., en el trabajo antes mentado de Hewitt).

¹⁹De hecho, [Go98] no da ninguna demostración del mismo y, como en [HuLo85] y [Go12], únicamente lo motiva a través de ejemplos en lugar de por analogía con las extensiones de relaciones y aplicaciones, mientras que [Go12] simplemente indica que se procede por inducción. Dado que, como ya dijimos, [Ro66] y [ArCuHe97, Article 1] siguen tratamientos muy distintos a los aquí expuestos, redirigimos al lector interesado en una redacción alternativa del mismo

ducimos los conceptos esenciales de halo y sombra, así como la congruencia $\simeq$ en $\mathbb{R}$ que indica que dos números están infinitamente próximos, terminando con ello nuestros fundamentos.

En cuanto a la segunda parte de este TFG, hemos estudiado cómo podemos aplicar estas herramientas al análisis real, y el lector podrá encontrar más información al respecto en [Ro66, Chapter 3], [Ke86], [HuLo85, Sections 1.8-1.14], [Go98, Part II], [Go12, Chapters 3-7] y [ArCuHe97, Article 2].²⁰ También hemos querido comparar el nuevo tratamiento con el habitual, y de ahí que varios resultados vayan precedidos por dos demostraciones: una mediante los métodos del Análisis No Estándar (que indicaremos por sus siglas en inglés, NSA) y otra sin ellos (indicada con las siglas SA).²¹ Por último, hemos intentado maximizar todo lo posible las aplicaciones de nuestros reducidas herramientas, algo que en las obras consultadas (salvo, a su nivel, [Ke86]) se obvia en favor de una discusión más general, introduciendo nueva maquinaria lógica.²²

En el cuarto capítulo abordamos el estudio de las sucesiones reales, y comenzamos dando versiones equivalentes (en el marco de trabajo NSA) de las nociones de convergencia, divergencia a infinito, acotación, etc. Dichos resultados, pues, actúan como diccionario entre el enfoque NSA y el SA, y nos permiten dar demostraciones alternativas de los resultados clásicos, así como tener otra perspectiva (más próxima a su origen histórico y a nuestra intuición) de las definiciones ya conocidas.²³ Así, e.g., vemos que una sucesión converge a $l \in \mathbb{R}$ ssi para índices infinitos está infinitamente próxima a l , que tiene punto límite l ssi para algún índice infinito está infinitamente próxima a l , que es de Cauchy ssi todos sus términos de índices infinitos están infinitamente próximos entre sí, que es acotada ssi todos sus términos de índices infinitos son finitos, etc. En particular, obtenemos fácilmente varias propiedades sobre límites usando la aritmética de ${}^*\mathbb{R}$ y la congruencia «ser infinitamente próximo» $\simeq$, obviando con ello las manipulaciones ϵ - δ a veces algo artificiosas.²⁴ Otros ejemplos menos triviales de aplicación son la obtención de las diferentes caracterizaciones de la completitud de $\mathbb{R}$, logrando demostraciones especialmente simples del Criterio de Cauchy y del Teorema de Bolzano-Weierstrass, evitando así los cargantes argumentos vía intervalos encajados. El capítulo se concluye con un breve estudio sobre series, que gracias a nuestra algebraización de la noción de límite pueden pensarse formalmente como «sumas infinitas» o, como es más habitual nombrarlas en la literatura, «sumas hiperfinitas», pues heredan muchas propiedades de las sumas finitas por transferencia, pero se consideran para un número de sumandos hipernatural (posiblemente infinito).

En el capítulo quinto damos un breve recuento de las ideas básicas de topología general, dando caracterizaciones NSA de los puntos interiores y de acumulación de un conjunto, así como demostraciones alternativas de las propiedades básicas de abiertos y cerrados. Además, destacamos el que posiblemente sea el resultado NSA más potente y elegante tratado en este TFG: el criterio de compacidad de Robinson, que nos permite sustituir las aparatosas construcciones de subrecubrimientos finitos por razonamientos puntuales. Más concretamente, si *A es la extensión no estándar de A , entonces A es compacto ssi todo punto de *A es infinitamente próximo a algún punto de A . Ello nos permite trivializar los teoremas de Heine-Borel y Heine-Cantor.²⁵

En el capítulo sexto tratamos rápidamente la noción de límite en el contexto más general de las aplicaciones, y en particular trabajamos algunos resultados elementales sobre continuidad y derivabilidad, obteniendo caracterizaciones enormemente intuitivas. Así, e.g., vemos que f es continua en $p \in \mathbb{R}$ ssi todo punto infinitamente próximo a p tiene su imagen por f infinitamente próxima a $f(p)$, y que f es uniformemente continua en A ssi todo par de puntos de *A infinitamente próximos tienen imágenes por f infinitamente próximas (o, en otras palabras, ssi f es continua en *A). Además, recuperamos de manera natural y formal la definición de derivada

estilo a [HuLo85, Section 1.15].

²⁰Salvo [Ke86] (que, como ya dijimos, cubre el material típico de los cursos de cálculo de primero y segundo de carrera), todos ellos abarcan más o menos los mismos tópicos, con diferentes niveles de detalle pero enfoques similares.

²¹Las versiones SA se basan en la asignatura *Anàlisi Matemàtica* y la bibliografía principal de la misma, [Or02, Ru80], además de las referencias complementarias y más personales [Cl12, Pe08].

²²E.g., introducimos los principios de *overflow* y *underflow* para $\mathbb{R}$, damos varias caracterizaciones NSA de ínfimo y de punto de acumulación de un conjunto, etc.

²³De hecho, esta ha sido precisamente la dinámica seguida a lo largo de toda la segunda parte: tomar un curso típico de análisis real, traducir sus definiciones al contexto NSA, y emplear sus técnicas para obtener una demostración alternativa.

²⁴Hemos de reconocer, sin embargo, que esto no ha sido siempre posible, y que eventualmente hemos tenido que recurrir al estilo SA. Para más detalles, véase 4.20.

²⁵Como se puntualiza en [HeKe86], «Experience suggests that it is easier to work with nonstandard objects at a lower level than with sets at a higher level. This underlies the success of nonstandard methods in discovering new results.».

como cociente de incrementos infinitesimales.

Por último, en el capítulo séptimo insistimos de nuevo en los métodos hiperfinitos, esta vez aplicados a las particiones. Más concretamente, construimos una partición equidistante con norma infinitesimal de un intervalo I , y utilizamos esta «malla hiperfinita» para determinar cuando una propiedad se cumple por última vez, obteniendo así, e.g., el valor intermedio del Teorema del Valor Intermedio. El uso de la misma partición en las sumas inferiores, superiores y ordinarias de Riemann nos permite obtener la integral de Riemann como suma hiperfinita cuando las susodichas son infinitamente próximas entre sí.

Convenios de notación

- Las tuplas y sucesiones se denotarán mediante paréntesis.
- Los símbolos $:=$ y $:\Leftrightarrow$ se leen respectivamente «igual por definición» y «equivalente por definición», y únicamente se utilizarán al dar una definición.
- Indicaremos el conjunto potencia de A por $\mathcal{P}(A)$.
- Indicaremos el cardinal de A por $\#A$, y escribiremos $\#A = \infty$ como abreviación de « A es infinito».
- Escribiremos $A \uplus B$ en lugar de $A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$ (i.e., $C = A \uplus B$ ssi $C = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$).
- Escribiremos $A \subset B$ si A es subconjunto de B (posiblemente igual a B), y $A \subsetneq B$ si A es subconjunto estricto de B .
- Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado, $A \subset X$ y $b \in X$. Definimos entonces $A_{>b} := \{a \in A : a > b\}$, y análogamente para $\leq, <, \geq$.
- Como es relativamente común en análisis (e.g., [Or02, Definición 0.1]), convendremos que $0 \notin \mathbb{N}$.
- Si $A \subset X$, entonces $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ denota la función característica de A , definida como $\chi_A(x) = 1 :\Leftrightarrow x \in A$.
- Dadas dos aplicaciones $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$, denotaremos su composición por $g \circ f$.
- Ocasionalmente indicaremos el final de una demostración por *reductio ad absurdum* mediante el símbolo !!!.

A continuación damos un índice de símbolos para mayor facilidad de lectura.

Nomenclatura

$\mathbb{A}$	Subconjunto de los números apreciables, página 3
$\mathcal{F}^{\text{co}}$	Filtro cofinito, página 10
$\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$	Filtro generado por $\mathcal{G}$, página 10
$\text{hal}(x)$	Clase de equivalencia de $\simeq$, página 26
X_{∞}^{-}	Subconjunto de los números ilimitados negativos de un cuerpo ordenado X , página 3
X_{∞}^{+}	Subconjunto de los números ilimitados positivos de un cuerpo ordenado X , página 3
X_{∞}	Subconjunto de los números ilimitados de un cuerpo ordenado X , página 3
$\simeq$	Relación de infinita proximidad, página 26
c_{00}	Sucesiones con un número finito de términos no nulos, página 6
X_0^{-}	Subconjunto de los números infinitesimales negativos de un cuerpo ordenado X , página 3
X_0^{+}	Subconjunto de los números infinitesimales positivos de un cuerpo ordenado X , página 3
X_0	Subconjunto de los números infinitesimales de un cuerpo ordenado X , página 3
$\mathbb{L}$	Subconjunto de los números limitados de un cuerpo ordenado, página 3
φ	Extensión de $\mathbb{R}$ en ${}^*\mathbb{R}$, página 17
$\llbracket R(r^i)_{i=1}^k \rrbracket$	Subconjunto de $\mathbb{N}$ que cumple $R(r_n^i)_{i=1}^k$, página 16

Parte I

Fundamentos

Capítulo 1

El problema de los hiperreales

De acuerdo con lo explicado en la Introducción, en este capítulo investigamos las posibilidades de introducir elementos infinitesimales en $\mathbb{R}$ o en una extensión suya, por lo que empezamos con una serie de definiciones naturales y sus consecuencias inmediatas.

1.1. Infinitesimal e ilimitado

Nota. Fijamos para toda la sección X un cuerpo ordenado, y recordamos que, en particular, X contiene una copia de $\mathbb{Q}$ (véase [Or02, Teorema 1.9]).

Definición 1.1. Diremos que $x \in X$ es:

1. **limitado**, y escribiremos $x \in \mathbb{L}$, ssi $\exists n \in \mathbb{N}, |x| < n$.
2. **ilimitado positivo**, y escribiremos $x \in X_\infty^+$, ssi $\forall n \in \mathbb{N}, n < x$.
3. **ilimitado negativo**, y escribiremos $x \in X_\infty^-$, ssi $\forall n \in \mathbb{N}, x < -n$.
4. **ilimitado** ssi $x \in X_\infty := X_\infty^- \cup X_\infty^+$ (i.e., $\forall n \in \mathbb{N}, n < |x|$).
5. **infinitesimal positivo**, y escribiremos $x \in X_0^+$, ssi $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x < \frac{1}{n}$.
6. **infinitesimal negativo**, y escribiremos $x \in X_0^-$, ssi $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n} < x < 0$.
7. **infinitesimal** ssi $x \in X_0 := X_0^- \cup \{0\} \cup X_0^+$ (i.e., $\forall n \in \mathbb{N}, |x| < \frac{1}{n}$).
8. **apreciable** ssi $x \in \mathbb{A} := \mathbb{L} \setminus X_0$ (i.e., $\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < |x| < n$).

Observación 1.2. Se tiene:

1. Si $H \in X_\infty^-, a \in \mathbb{A}_{<0}, \epsilon \in X_0^-, \delta \in X_0^+, b \in \mathbb{A}_{>0}, K \in X_\infty^+$, entonces $H < a < \epsilon < 0 < \delta < b < K$.
2. En particular, $X_\infty^+ = X_\infty \cap X_{>0}$, $X_\infty^- = X_\infty \cap X_{<0}$, $X_0^+ = X_0 \cap X_{>0}$, $X_0^- = X_0 \cap X_{<0}$.
3. Claramente $X_0 \subsetneq \mathbb{L}$, $\mathbb{L} = X_\infty^c$,¹ $\mathbb{A} = X_\infty^c \cap X_0^c = (X_\infty \cup X_0)^c$, $\{X_\infty, X_0, \mathbb{A}\}$ es una partición de X , $\{X_0^-, \{0\}, X_0^+\}$ es una partición de X_0 y $\{X_\infty^-, X_\infty^+\}$ es una partición de X_∞ (son disjuntos por 1).
4. Sea $f: X \rightarrow X$ tal que $|f| = |\text{Id}|$ (e.g., $f(x) = |x|$ ó $f(x) = -x$). Entonces $f(x) \in X_\infty \Leftrightarrow x \in X_\infty$, $f(x) \in X_0 \Leftrightarrow x \in X_0$ y $f(x) \in \mathbb{A} \Leftrightarrow x \in \mathbb{A}$.
5. En particular (usando 1, 2 y $\text{Im } |\cdot| = X_{\geq 0}$), si $\epsilon \in X_0, a \in \mathbb{A}, H \in X_\infty$, entonces $0 \leq |\epsilon| < |a| < |H|$.

¹Más explícitamente, $\exists n \in \mathbb{N}, |x| < n \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, |x| \leq m$ (tomando $n = m + 1$).

6. Claramente $x \in X_\infty^+ \Rightarrow x^{-1} \in X_0^+$, $x \in X_0^+ \Rightarrow x^{-1} \in X_\infty^+$, $x \in X_0^- \Rightarrow x^{-1} \in X_\infty^-$, $x \in X_\infty^- \Rightarrow x^{-1} \in X_0^-$.²

7. Obviamente $X_\infty \neq \emptyset$ ssi X no es arquimediano,³ donde, por 6, $X_\infty \neq \emptyset$ ssi $X_0 \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

Proposición 1.3. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado arquimediano contenido en X (e.g., $\mathbb{Q}$). Entonces:

1. $x \in \mathbb{L}$ ssi $\exists p, q \in \mathbb{K}, p < x < q$.
2. $x \in X_\infty^+$ ssi $\forall p \in \mathbb{K}, p < x$.
3. $x \in X_\infty^-$ ssi $\forall p \in \mathbb{K}, x < p$.
4. $x \in X_0^+$ ssi $\forall p \in \mathbb{K}_{>0}, 0 < x < p$.
5. $x \in X_0^-$ ssi $\forall p \in \mathbb{K}_{<0}, p < x < 0$.
6. $x \in \mathbb{A}$ ssi $\exists p, q \in \mathbb{K}_{>0}, p < |x| < q$.

Demostración. Veamos los primeros como ejemplo (el resto son análogos).

1. $[\Rightarrow]$ Obvio, pues $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$ y $|x| < n \Leftrightarrow -n < x < n$. $[\Leftarrow]$ Por hipótesis, $\exists n \in \mathbb{N}, |x| < \max\{|p|, |q|\} < n$.
2. $[\Leftarrow]$ Obvio, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$. $[\Rightarrow]$ Por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}, n < x$ y $\exists m \in \mathbb{N}, p \leq |p| < m$.
3. $[\Leftarrow]$ Obvio, pues $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$. $[\Rightarrow]$ Por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}, x < -n$ y $\exists m \in \mathbb{N}, -p \leq |p| < m$ (i.e., $-m < p$).
4. $[\Leftarrow]$ Obvio, pues $\mathbb{Q}_{>0} \subset \mathbb{K}_{>0}$. $[\Rightarrow]$ Por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n}$ y $\exists m \in \mathbb{N}, \frac{1}{p} = \left| \frac{1}{p} \right| < m$ (i.e., $\frac{1}{m} < p$).

□

Observación 1.4. Sea $\mathbb{K}$ como antes. Entonces $\mathbb{K} \cap X_\infty = \mathbb{K}_\infty$ y $\mathbb{K} \cap X_0 = \mathbb{K}_0$. Y por 1.2.7, $\mathbb{K} \cap X_\infty = \emptyset$ (luego $\mathbb{K} \subset X_\infty^c = \mathbb{L}$) y $\mathbb{K} \cap X_0 = \{0\}$ (ergo $\mathbb{K} \setminus \{0\} \subset X_0^c$). Y juntando ambos resultados, $\mathbb{K} \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}$.

Nota. Aunque en 1.1 definimos X_∞, X_0 únicamente para X un cuerpo ordenado, la observación anterior nos sugiere la siguiente generalización.

Definición 1.5. Si $A \subset X$, entonces $A_\infty := A \cap X_\infty$ y $A_0 := A \cap X_0$.

Nota. A diferencia del término «infinitesimal», de uso marginal en el análisis estándar,⁴ el término «infinito» es considerablemente frecuente: no sólo en la jerga y notación del análisis estándar (que eventualmente lo introduce formalmente, como sucede con la recta real extendida), sino también en topología (compactificación de Alexandroff), geometría proyectiva (hiperplano del infinito), teoría de conjuntos (cardinal), etc. De ahí que, para evitar confusiones, hayamos decidido utilizar en su lugar el término «ilimitado», aunque mantengamos la sugerente notación X_∞ .

²Más explícitamente, $x \in X_\infty^+ \Rightarrow \forall n, n < x \Rightarrow \forall n, x^{-1} < \frac{1}{n} \Rightarrow x^{-1} \in X_0^+$, donde $x \in X_{>0} \Rightarrow x^{-1} \in X_{>0}$ por ser X cuerpo ordenado (pues si no, entonces $1 = xx^{-1} < 0$!!!).

³Recordamos que X es arquimediano ssi $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N}, x < n$.

⁴Algunos libros de texto (e.g., [Or02, Definición 2.4]) todavía mantienen la definición de infinitesimal del *Cours d'Analyse* de Cauchy, a modo de herramienta para el cálculo de límites.

1.2. Ideas para su construcción

Nota 1.6. Así como la unidad imaginaria i no pertenece a los reales $\mathbb{R}$ (el único cuerpo ordenado, arquimediano y completo por sucesiones salvo isomorfismo, véase [Or02, Teorema 1.10]), tampoco los ilimitados (y por ende los infinitesimales no nulos, véase 1.2.7) tienen cabida en él.

Y así como es posible ampliar $\mathbb{R}$ a un cuerpo más rico y fructífero como el de los complejos $\mathbb{C}$ que comprende a i (y con él, «camino más cortos»)⁵ a costa de perder el orden⁶ pero conservando la completitud por sucesiones (como espacio métrico) y la arquimedianoidad (como espacio normado), parece natural pensar que podemos ampliar $\mathbb{R}$ a un cuerpo $^*\mathbb{R}$ que contenga ilimitados al precio de renunciar a Arquímedes (¿y Cauchy?) pero preservando el orden, «superando» o «excediendo» así a $(\mathbb{R}, \leq)$, y que, por ende, llamaremos hiper-reales.⁷

Pregunta. ¿Cómo podemos obtener tal extensión?

Observación. Puesto que $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$, y siguiendo con nuestra analogía, uno podría proponer a $\mathbb{R}(\epsilon)$ como el cuerpo buscado, con $\epsilon \neq 0$ infinitesimal. Sin embargo, ello presupone que existe una extensión de $\mathbb{R}$ en la que vive ϵ , que es precisamente lo que estamos tratando de hallar.

En el caso de i ello no supone un problema pues sabemos que i vive en la clausura algebraica de $\mathbb{R}$ o que lo podemos pensar como $(0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$, que puede pensarse a su vez como una extensión de cuerpos de $\mathbb{R}$. Pero con ϵ no podemos decir lo mismo, pues la clausura algebraica de $\mathbb{R}$ es precisamente $\mathbb{C}$ (y obviamente $\epsilon \notin \mathbb{C}$)⁸ y no podemos salirnos de la recta 1-dimensional sin poner en riesgo el orden.

De hecho, como $\epsilon \notin \mathbb{C}$, aunque halláramos una tal extensión tendríamos que $\mathbb{R}(\epsilon)$ es trascendente y por ende isomorfo (como cuerpo) a $\mathbb{R}(x)$ el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios $\mathbb{R}[x]$ (con x una indeterminada), luego no nos perderíamos nada si trabajáramos directamente con $\mathbb{R}(x)$ pensando a x como un infinitesimal no nulo, lo que ciertamente no parece una respuesta especialmente satisfactoria.⁹

Peor aún, recordamos que $\mathbb{R}(\epsilon)$ es la menor extensión de $\mathbb{R}$ que contiene ϵ , luego es perfectamente posible que existan cuerpos conteniendo ϵ mucho mayores que $\mathbb{R}(\epsilon)$ (como sucede, e.g., con $\mathbb{Q}(i)$ respecto de i), en cuyo caso quedarnos simplemente con $\mathbb{R}(\epsilon)$ supondría perder una riqueza y potencia que podríamos echar mucho en falta de cara a sus posibles aplicaciones.

En resumen, nuestra analogía tiene importantes limitaciones y nuestras rudimentarias herramientas de la asignatura de *Equacions Algebraiques* no nos podrán ayudar demasiado en este viaje, sino que será necesario explorar un camino completamente distinto.

Pregunta. ¿Qué otras construcciones de cuerpos conocemos, aparte de las vistas en *Equacions Algebraiques*?

Nota. En la asignatura *Llenguatge i Raonament Matemàtic* obtuvimos el anillo $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ mediante un proceso de «simetrización» respecto de la suma, y procedimos análogamente con el cuerpo $\mathbb{Q}$ respecto de $\mathbb{Z}$ y el producto.¹⁰ No obstante, este mecanismo resulta poco alentador para nuestro propósito, pues ¿de quién, y respecto de qué operación, sería simétrico ϵ ?

Pero no abandonemos todavía los dominios del álgebra, pues sabemos de la asignatura *Estructures Algebraiques* que podemos obtener cuerpos como cocientes de anillos por ideales maximales, lo que nos remite a su vez a la construcción de $\mathbb{R}$ de Cantor por sucesiones de Cauchy.

⁵«Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe» (Paul Painlevé, *Analyse des travaux scientifiques*, 1900).

⁶Si bien podemos ordenar a $\mathbb{C}$ de varias maneras diferentes (lexicográfica, geométrica, etc.), ninguna relación dará a $\mathbb{C}$ la estructura de cuerpo ordenado, pues $i^2 = -1$ y los cuadrados en un cuerpo ordenado son necesariamente positivos.

⁷Nótese que este mismo argumento valdría cambiando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$. Nuestra elección obedece simplemente a que $\mathbb{R}$ es un marco de trabajo más apto para el análisis que $\mathbb{Q}$ (del mismo modo que $\mathbb{R}(i)$ es más apto que $\mathbb{Q}(i)$ para tales propósitos).

⁸Aunque obviáramos el hecho de que $\mathbb{C}$ no es ordenado amparándonos en que las nociones de ilimitado e infinitesimal tienen sentido para cualquier espacio normado, recordamos que $\mathbb{C}$ es arquimediano pensado como tal.

⁹Aunque no vamos a entrar en ello, esta no es una vía completamente muerta. De hecho, el cuerpo de Levi-Civita (con el cual se puede hacer algo de análisis con infinitesimales) se mueve (en cierto modo) en esta dirección. Para más información sobre éste, cuyos orígenes se remontan a finales del siglo XIX y para el cual se han encontrado recientemente aplicaciones en computación, véase [ShBe10].

¹⁰En otras palabras, vimos que $\mathbb{Q}$ es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}$ o, en el lenguaje de la asignatura *Introducció a l'Àlgebra Commutativa*, que $\mathbb{Q}$ es el simetrizado del anillo $\mathbb{Z}$ respecto del sistema multiplicativamente cerrado $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, con $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}) = \{0\}$ el conjunto de los divisores de cero de $\mathbb{Z}$.

Hecho 1.7. (véase [Or02, Apèndix. Construcció i unicitat del cos dels nombres reals]) Recordemos, pues, que si $\mathcal{A}$ es el anillo conmutativo con unidad de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ y $\mathcal{N} := \{r \in \mathcal{A} : r \rightarrow 0\}$ (cuyos elementos Cauchy denomina «cantidades infinitesimales»), entonces $\mathcal{N}$ es un ideal maximal de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Más aún (desafortunadamente para nosotros), si $\tilde{\mathcal{A}}$ es el anillo conmutativo con unidad de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ y $\tilde{\mathcal{N}} := \{r \in \tilde{\mathcal{A}} : r \rightarrow 0\}$, entonces $\tilde{\mathcal{N}}$ es un ideal maximal de $\tilde{\mathcal{A}}$ y $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{N}}$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Observación. De hecho, al identificar los elementos de $\tilde{\mathcal{N}}$ con 0 al cocientar $\tilde{\mathcal{A}}$ por $\tilde{\mathcal{N}}$ era obvio que no conseguiríamos diferenciar éstos de $\mathbb{R}$. Sin embargo, la clave podría consistir en cambiar $\tilde{\mathcal{N}}$ por una relación de equivalencia más adecuada sobre $\tilde{\mathcal{A}}$ o, para evitar limitaciones demasiado restrictivas, sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto (y de hecho anillo, véase 3.1) de las sucesiones de $\mathbb{R}$; una relación de equivalencia que sí hiciese distinción.

Nota. Cuatro espacios de Banach particularmente importantes estudiados en la asignatura *Anàlisi Real i Funcional* que puede ser conveniente tener presentes son $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$ los subconjuntos de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (o $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en nuestro caso, si se me permite la licencia) tal que sus elementos: tienen únicamente un número finito de términos diferentes de 0, convergen a 0, convergen, y están acotados, respectivamente. Así, $c = \tilde{\mathcal{A}}$ (por la completitud por sucesiones de $\mathbb{R}$) y $c_0 = \tilde{\mathcal{N}}$. Y dado que queremos una relación de equivalencia más fina que la inducida por c_0 , parece natural pensar en conjuntos (ideales del anillo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, preferentemente) más pequeños que c_0 , como lo es c_{00} , que nos induciría la siguiente relación de equivalencia: $r \equiv s \Leftrightarrow r - s \in c_{00} \Leftrightarrow \#\{n \in \mathbb{N} : r_n - s_n \neq 0\} < \infty \Leftrightarrow \#\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\}^c < \infty$. En particular, $r \equiv s \Rightarrow \#\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} = \infty$.¹¹

En otras palabras, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ identifica dos sucesiones si la cantidad de términos no coincidentes es «pequeña» o, lo que vendría a ser lo mismo, si la cantidad de términos coincidentes es «grande». No obstante, y como acabamos de ver, con la medida del cardinal dichas nociones no son equivalentes (entendiendo «pequeño» como finito y, por ende, «grande» como infinito). Aún peor, y como se pone de manifiesto en la paradoja de Galileo (hay tantos cuadrados como naturales), el cardinal es una medida harto imprecisa, lo que nos lleva a mantener de momento los términos informales «grande» y «pequeño» para evitar limitaciones demasiado restrictivas.¹²

1.3. Propuesta

Definición 1.8. Sean, pues, $r, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y definamos $r \equiv s \Leftrightarrow \llbracket r = s \rrbracket \in \mathcal{G}$, donde $\llbracket r = s \rrbracket := \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\}$ y $\mathcal{G}$ (de grande) es algún subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ que hace de $\equiv$ una relación de equivalencia y que contiene únicamente a los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que, en algún sentido aún por determinar, son «grandes».

Observación. Así, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ (que sería nuestro candidato a ${}^*\mathbb{R}$) es el conjunto de las sucesiones de $\mathbb{R}$ módulo aquellas que son iguales entre sí para «muchos» términos.

Nota 1.9. La idea detrás de nuestra definición coincide con la de que una propiedad (en nuestro caso, la igualdad entre sucesiones) se cumpla «casi en todas partes» (usualmente abreviado a.e., por *almost everywhere*) en teoría de la medida, que concuerda a su vez con el «casi seguramente» de teoría de la probabilidad. Por ejemplo, fijado (X, Σ, μ) un espacio de medida completo (que será de probabilidad ssi $\mu(X) = 1$), decimos que una sucesión de funciones medibles (o variables aleatorias) $(f_n)_n$ converge a.e. a f ssi $\mu(\{x \in X : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}) = 0$, y que $f = g$ a.e. ssi $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ (o simplemente $\mu(\{f = g\}) = 1$, si μ es una probabilidad),¹³ siendo la igualdad a.e. una relación de equivalencia (como nos gustaría que lo fuera $\equiv$). De hecho, si μ es una probabilidad, nos basta particularizar $X = \mathbb{N}$, $f(n) = r_n$, $g(n) = s_n$ y cambiar

¹¹La prueba se sigue de que $\mathbb{N} = A \uplus A^c$, $\#\mathbb{N} = \infty$ y $\#(A \uplus A^c) = \#A + \#A^c$, con $A \subset \mathbb{N}$ cualquiera. El recíproco es claramente falso, pues el conjunto de los pares es el complementario del de los impares y ambos son conjuntos infinitos.

¹²Ello no significa, por supuesto, que los conjuntos «grandes» no vayan a ser en particular infinitos, como ocurre en el ejemplo anterior, sino que pedir únicamente que sean infinitos no nos basta.

¹³Si $\mu(X) = \infty$, entonces no podemos garantizar en general que $\mu(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(A)$ y, por ende, que $\mu(A^c) = 0$ ssi $\mu(A) = \mu(X)$. Y si $\mu(X) < \infty$, entonces podemos suponer sin restricción $\mu(X) = 1$.

$\{A \in \Sigma : \mu(A) = 1\}$ por $\mathcal{G}$ (ambos sinónimos de «grande», aunque *a priori* no tengan nada que ver) para recuperar nuestra definición.

Ello nos invita, por una parte, a preguntarnos si $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}$ definido como $\mu(A) = 1 : \Leftrightarrow A \in \mathcal{G}$ es una probabilidad y, por ende, ambos conceptos coinciden (en el sentido de que μ define $\mathcal{G}$ y viceversa) y, por otra, a generalizar nuestra definición a cualquier propiedad, y no sólo a la igualdad de dos elementos (después de todo, recordamos, queremos que ${}^*\mathbb{R}$ sea ordenado, luego necesitamos al menos definir un orden).

Definición 1.10. Si R es una relación k -aria en $\mathbb{R}$ y $(r^i)_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces $\llbracket R(r^i)_{i=1}^k \rrbracket := \{n \in \mathbb{N} : R(r_n^i)_{i=1}^k\}$ y ${}^*R(r^i)_{i=1}^k : \Leftrightarrow \llbracket R(r^i)_{i=1}^k \rrbracket \in \mathcal{G}$.

Notación. Como es usual, utilizaremos la notación de infijo para las relaciones binarias (i.e., escribiremos aRb en lugar de $R(a, b)$ siempre que nos convenga). Además, escribiremos $\preceq$ en vez de ${}^*\leq$.

Antes de continuar por este camino, veamos primero qué condiciones ha de satisfacer $\mathcal{G}$ para que $\equiv$ sea una relación de equivalencia no trivial.

Observación 1.11. Se tiene:

1. Como $\llbracket r = s \rrbracket = \llbracket s = r \rrbracket$ por la simetría de la igualdad, tenemos que $\equiv$ es simétrica para cualquier $\mathcal{G}$.
2. Y puesto que $\llbracket r = r \rrbracket = \mathbb{N}$ por la reflexividad de la igualdad, obtenemos que $\equiv$ es reflexiva ssi $\mathbb{N} \in \mathcal{G}$.
3. Por último, $\llbracket r = s \rrbracket \cap \llbracket s = t \rrbracket \subset \llbracket r = t \rrbracket$ por la transitividad de la igualdad, luego nos basta exigir que

$$A, B \in \mathcal{G}, A \cap B \subset C \Rightarrow C \in \mathcal{G}$$

para garantizar la transitividad de $\equiv$. En particular (tomando $C = A \cap B$ y $B = A$ respectivamente):

- a) $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$.
- b) $A \in \mathcal{G}, A \subset C \Rightarrow C \in \mathcal{G}$.

4. De hecho, a partir de **3a** y **3b** (que son propiedades ciertamente propias del $\mathcal{G}$ buscado) podemos recuperar la propiedad original, luego las caracterizaciones son equivalentes.
5. Más aún, podemos obtener **2** de **3b** si $\mathcal{G} \neq \emptyset$.
6. Finalmente, $\emptyset \notin \mathcal{G}$, pues en caso contrario $\mathcal{G} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ por **3b** (pues el vacío es subconjunto de todo conjunto), de modo que la relación de equivalencia $\equiv$ identificaría todas las sucesiones con todas, i.e., sería la trivial. De hecho, $\emptyset \in \mathcal{G}$ ssi $\mathcal{G} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ejemplo 1.12. (Inspirado en c_{00}) $\mathcal{G} := \{A \subset \mathbb{N} : \#A^c < \infty\}$. Es decir, $A \in \mathcal{G}$ ssi A contiene «casi todo» $\mathbb{N}$ (i.e., todo salvo a lo sumo un número finito), lo que ciertamente nos da conjuntos «grandes».

Demostración. Las condiciones más asequibles **2** y **6** son obvias (pues $\#\mathbb{N}^c = \#\emptyset < \infty$ y $\#\emptyset^c = \#\mathbb{N} = \infty$). Las condiciones más restrictivas de **3** se siguen de:

1. $\#(A \cap B)^c \stackrel{\text{De Morgan}}{=} \#(A^c \cup B^c) \leq \#A^c + \#B^c$.
2. $A \subset C \Rightarrow C^c \subset A^c \Rightarrow \#C^c \leq \#A^c$.

□

Observación. Por construcción, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ es exactamente $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/c_{00}$. En particular, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ es un anillo.¹⁴

¹⁴Aunque ahora mismo no nos preocupa, podríamos ver fácilmente que esta es, de hecho, una propiedad general de los subconjuntos no vacíos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ cumpliendo **1.11.3** (véase **3.4**).

Problema 1.13. Supongamos por un momento que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ es, además, un cuerpo. Nosotros queremos también que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ sea ordenado. Ahora bien (y siguiendo el contraejemplo de la nota al pie 11), si

$$r_n = \begin{cases} 0, & n \in 2\mathbb{N} \\ 1, & n \notin 2\mathbb{N} \end{cases}, s_n = \begin{cases} 0, & n \notin 2\mathbb{N} \\ 1, & n \in 2\mathbb{N} \end{cases}$$

con $2\mathbb{N} := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\llbracket r = s \rrbracket = \emptyset \notin \mathcal{G}$, i.e., $r \neq s$. Sin embargo, no parece que ninguna de las dos sucesiones sea mayor que la otra en ningún sentido, ni siquiera en el introducido en 1.10, pues $\llbracket r \leq s \rrbracket = 2\mathbb{N} \notin \mathcal{G}$ y $\llbracket r \leq s \rrbracket^c \notin \mathcal{G}$.¹⁵

La reacción más inmediata a este problema sería olvidarnos de 1.12 y añadir una nueva exigencia a $\mathcal{G}$, a saber:

$$\forall A \subset \mathbb{N}, (A \in \mathcal{G}) \vee (A^c \in \mathcal{G})$$

pues en tal caso siempre tendremos que $\llbracket r \leq s \rrbracket$ ó $\llbracket r \leq s \rrbracket^c$ es de $\mathcal{G}$, i.e., $r \preceq s$ ó $r \succ s$, donde, de hecho, la disyunción es excluyente (por 1.11.3a y 1.11.6).¹⁶ Sin embargo, no es para nada evidente que existan tales $\mathcal{G}$, especialmente teniendo en cuenta el significado informal que le hemos atribuido, y que vendría a decir en el caso anterior que el conjunto de los pares o el de los impares es «pequeño». Ahora bien, y como ya dijimos en su momento, la infinitud no es una condición suficiente para nuestra noción de «grande», luego no demos aún todo por perdido.

Observación 1.14. Sea nuevamente $\mathcal{G}$ como en 1.12. Que r, s no sean comparables no es en absoluto el problema, pues simplemente podemos forzar $r \preceq s$ cambiando $\mathcal{G}$ por $\mathcal{G} \cup \{2\mathbb{N}\}$. El problema es, primero, si $\mathcal{G} \cup \{2\mathbb{N}\}$ mantiene las propiedades que nos interesaban de $\mathcal{G}$ (o, en definitiva, si podemos añadir a $\mathcal{G}$ todos los conjuntos que sean necesarios para que esto sea así) y, segundo, si podemos repetir dicho proceso hasta conseguir un $\mathcal{G}'$ que haga $\preceq$ total (e.g., un $\mathcal{G}'$ cumpliendo la propiedad introducida en 1.13). Y aunque este procedimiento es sin duda impreciso, nos lleva de manera natural a la idea de maximal y, por ende, al Lema de Zorn.

Es más, como la disyunción de 1.13 es excluyente y $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, tenemos que $\mathcal{G}'$ no contiene conjuntos finitos, luego podríamos decir que $\mathcal{G}'$ está formada por conjuntos relativamente «grandes». ¹⁷ Así, si propusiéramos como definición precisa de «grande» el no contener conjuntos finitos, nuestro problema se reduciría a hallar $\mathcal{G}'$ conteniendo $\mathcal{G}$ y satisfaciendo 1.11.2, 1.11.3, 1.11.6 y 1.13. Y para averiguar cómo podemos llevar a cabo dicha extensión de $\mathcal{G}$, estudiaremos primero de manera general a los subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ cumpliendo dichas propiedades.

¹⁵Por supuesto, tendríamos que probar además que $\preceq$ no depende del representante y que es una relación de orden, aunque ello no nos supondría ninguna dificultad (véase 3.9 y 3.10).

¹⁶Es más, bajo dicha condición es fácil probar la existencia de inversos (véase 3.13), luego también tendríamos que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ es cuerpo (el que sea ordenado es trivial).

¹⁷En efecto, no nos costaría demasiado ver que la condición $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$ es suficiente para demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ contiene ilimitados en el sentido introducido en 1.1 (véase 3.18).

Capítulo 2

Filtros

Resumen. En la sección 2.1 reintroduciremos de manera formal y ordenada las ideas de la sección anterior, mientras que en las secciones 2.2 y 2.3 investigaremos más en profundidad nuestros objetos de estudio, lo que nos permitirá en última instancia hallar la extensión buscada. De hecho, la sección 2.3 no es estrictamente necesaria para completar nuestro objetivo, y aunque haremos referencia a sus resultados de manera tangencial en alguna ocasión, su lectura puede postergarse sin reparos hasta llegar a la sección 3.2.

2.1. Rudimentos

Definición 2.1. Un **filtro** $\mathcal{F}$ sobre un conjunto I es un subconjunto no vacío de $\mathcal{P}(I)$ tal que

1. (Axioma de intersección) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.
2. (Axioma de superconjunto) $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

y diremos que es **propio** ssi

3. $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{P}(I)$.

Si además

4. $\forall A \subset I, (A \in \mathcal{F}) \vee (A^c \in \mathcal{F})$.

decimos que $\mathcal{F}$ es **ultrafiltro** sobre I .

Ejemplo. Claramente $\mathcal{P}(I)$ es el mayor filtro sobre I .

Observación. (véase 1.11.5) Como $\mathcal{F} \neq \emptyset$, existe $A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$, luego $I \in \mathcal{F}$ por el axioma de superconjunto. Por tanto, todo filtro sobre I contiene a I . Y como obviamente $\{I\}$ es un filtro sobre I , podemos resumir:

Proposición 2.2. $\{I\}$ es el menor filtro sobre I .

Corolario. $\{\emptyset\}$ es el único filtro sobre $\emptyset$. En otras palabras, no perdemos nada en suponer $I \neq \emptyset$.

Demostración. $\{\emptyset\}$ es filtro sobre $\emptyset$ por la proposición anterior, y es el único filtro sobre $\emptyset$ pues $I = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(I) = \{\emptyset\}$. $\square$

Observación. (véase 1.11.6) Como el vacío es subconjunto de todo conjunto, si éste pertenece a $\mathcal{F}$ se sigue del axioma de superconjunto que $\mathcal{P}(I) \subset \mathcal{F}$, ergo $\emptyset \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{P}(I)$. Así,

Proposición 2.3. Un filtro $\mathcal{F}$ es propio ssi $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Nota. La definición de filtro se basa en 1.8 o, lo que es lo mismo (por 1.11.4 y 1.11.5), en 1.11.3 (abstrayendo $\mathbb{N}$), mientras que la de ultrafiltro se inspira en 1.13 al tiempo que hace hincapié en 1.11.6. En otras palabras, nuestro interés último recae sobre los ultrafiltros cuyos elementos sean «grandes» en algún sentido aún por determinar (o bien en el sentido ya introducido de no contener conjuntos finitos) y en su posible obtención como extensiones de:

Ejemplo 2.4. El filtro cofinito,¹ o de Fréchet, sobre I : $\mathcal{F}^{\text{co}} := \{A \subset I : \#A^c < \infty\}$, véase 1.12.

Corolario 2.5. El filtro $\mathcal{F}^{\text{co}}$ es propio ssi $\#I = \infty$.

Demostración. Inmediata de 2.3, usando que $\#\emptyset^c = \#I$. □

Observación. Si $I = \mathbb{N}$ ya vimos en 1.13 que $\mathcal{F}^{\text{co}}$ no es ultrafiltro (pues no contiene ni a pares ni a impares), luego no todo filtro es ultrafiltro. De hecho, $\mathcal{F}^{\text{co}}$ no es ultrafiltro sobre ningún I en ZFC (pues bajo el axioma de elección podemos asegurar que todo conjunto infinito puede expresarse como unión disjunta de conjuntos infinitos).

Proposición 2.6. (véase 1.13) Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre I . Se tiene: $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I ssi $\forall A \subset I, A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{F}$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Si no, entonces $\exists A \subset I, A \cap A^c \in \mathcal{F}$ por el axioma de intersección, en contra de $\mathcal{F}$ propio.

$[\Leftarrow]$ Como $I \in \mathcal{F}$ por 2.2, tenemos por hipótesis que $\mathcal{F}$ es propio. Y como $A \in \mathcal{F}$ ó $A \notin \mathcal{F}$ para todo $A \subset I$, tenemos por hipótesis que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro. □

Corolario 2.7. (véase 1.14) Sea $\mathcal{F}$ ultrafiltro. Se tiene: $\mathcal{F}^{\text{co}} \subset \mathcal{F}$ ssi $\mathcal{F}$ no contiene conjuntos finitos.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Si A es finito, entonces $A^c \in \mathcal{F}^{\text{co}} \subset \mathcal{F}$, luego $A = (A^c)^c \notin \mathcal{F}$.

$[\Leftarrow]$ Si $A \in \mathcal{F}^{\text{co}}$, entonces $A^c \notin \mathcal{F}$ por hipótesis, luego $A = (A^c)^c \in \mathcal{F}$. □

2.2. Filtro generado

Lema. Sea $\{\mathcal{F}_x\}_{x \in X}$ una familia no vacía de filtros sobre I . Entonces

$$\bigcap_{x \in X} \mathcal{F}_x := \{A : \forall x \in X, A \in \mathcal{F}_x\}$$

es un filtro sobre I .

Demostración. 0) Como $\forall x \in X, \mathcal{F}_x \subset \mathcal{P}(I), \mathcal{F}_x \neq \emptyset$, lo mismo vale para $\bigcap_{x \in X} \mathcal{F}_x$.

1) Si $A \subset B \subset I$ y $A \in \bigcap_{x \in X} \mathcal{F}_x$, entonces $\forall x \in X, A \in \mathcal{F}_x$, luego, por el axioma de superconjunto, lo mismo vale para B .

2) Si $A, B \in \bigcap_{x \in X} \mathcal{F}_x$, entonces $\forall x \in X, A, B \in \mathcal{F}_x$, luego, por el axioma de intersección, lo mismo vale para $A \cap B$. □

Definición. Dado $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(I)$, sea F la colección de todos los filtros sobre I que contienen a $\mathcal{G}$. Entonces $\mathcal{F}^{\mathcal{G}} := \bigcap F$ es el **filtro generado por $\mathcal{G}$ (sobre I)**.

Observación. Como $F \neq \emptyset$ al ser $\mathcal{P}(I) \in F$, tenemos en efecto que $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ existe y es filtro por el lema. Más aún, es el menor filtro sobre I conteniendo $\mathcal{G}$ por construcción.

Pregunta. Por 2.2, sabemos que $\mathcal{F}^{\mathcal{G}} = \{I\}$ si $\mathcal{G} = \emptyset$, pero ¿qué forma tiene $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ en general?

Observación. Aplicando repetidamente el axioma de intersección (o por inducción) obtenemos que:

$$\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$$

Así, y por el axioma de superconjunto, para demostrar que $B \in \mathcal{F}$ es suficiente hallar $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ tal que $\bigcap_{i=1}^n A_i \subset B$ (el recíproco es trivial, pues $B \subset B$), lo que nos sugiere:

Lema 2.8. Sea $\mathcal{G}$ (de generador) un subconjunto no vacío de $\mathcal{P}(I)$. Entonces

$$\mathcal{F}^{\mathcal{G}} = \{A \subset I : \exists \{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{G}, \bigcap_{i=1}^n A_i \subset A\}$$

¹Contracción de «complementario finito».

Demostración. 1) Por construcción, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ (pues $\forall A \in \mathcal{G}, A \subset A$). En particular, $\mathcal{F}^{\mathcal{G}} \neq \emptyset$ (pues $\mathcal{G} \neq \emptyset$).

2) Sean $A, B \in \mathcal{F}^{\mathcal{G}}$, de modo que $\exists \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{G}, \cap_{i=1}^n A_i \subset A, \cap_{j=1}^m B_j \subset B$. Entonces $(\cap_{i=1}^n A_i) \cap (\cap_{j=1}^m B_j) \subset A \cap B$, ergo $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ es cerrado por intersecciones. Y como claramente $\mathcal{F}^{\mathcal{G}} \subset \mathcal{P}(I)$ y es cerrado por superconjuntos, tenemos que $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ es un filtro sobre I .

3) Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre I conteniendo $\mathcal{G}$ y sea $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{G}}$, de modo que $\exists \{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{G}, \cap_{i=1}^n A_i \subset A$. Entonces, como $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tenemos que $A \in \mathcal{F}$ por las propiedades de filtro. $\square$

Definición. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(I)$ está compuesto por un sólo conjunto, digamos $G \subset I$, entonces $\mathcal{F}^{\mathcal{G}} = \mathcal{F}^{\{G\}} = \{A \subset I : G \subset A\}$ es el **filtro principal generado por G** , que denotaremos simplemente por $\mathcal{F}^G$ si no hay peligro de confusión. Y si dicho G está compuesto por un sólo elemento, digamos $g \in I$, entonces $\mathcal{F}^{\mathcal{G}} = \mathcal{F}^{\{G\}} = \mathcal{F}^{\{g\}} = \{A \subset I : g \in A\}$ es el **ultrafiltro principal generado por g** , que denotaremos simplemente por $\mathcal{F}^g$.

En efecto:

Lema 2.9. Si $g \in I$, entonces $\mathcal{F}^g$ es un ultrafiltro sobre I .

Demostración. 1) Si $A \subset I$, entonces A ó A^c es de $\mathcal{F}^g$, pues $g \in I = A \cup A^c$.

2) Como $\emptyset$ no contiene ningún elemento (mucho menos g), tenemos que $\emptyset \notin \mathcal{F}^g$, luego $\mathcal{F}^g$ es propio. $\square$

Nota 2.10. El ultrafiltro $\mathcal{F}^g$ contiene conjuntos de cualquier cardinal no nulo menor que $\#I$ (viz.: $\{g\}, \{g, i_1\}, \{g, i_1, i_2\}$, etc., con $i_j \in I$), luego no está formado únicamente por lo que uno llamaría conjuntos «grandes» (que es, recordamos, el tipo de ultrafiltros que buscamos).² De hecho, si I es finito, pongamos $n = \#I$, tenemos que $\forall k \in \mathbb{N}, \#\{A \in \mathcal{F}^g : \#A = k\} = \binom{n}{k-1}$, y si I es infinito, entonces $\forall k \in \mathbb{N}_{>1}, \#\{A \in \mathcal{F}^g : \#A = k\} = \infty$.

Observación. Análogamente a 2.9, $\emptyset \in \mathcal{F}^G \Leftrightarrow G \subset \emptyset \Leftrightarrow G = \emptyset$, luego $\mathcal{F}^G$ es propio ssi $G \neq \emptyset$. No obstante, $\mathcal{F}^G$ no es ultrafiltro para ningún G formado por más de un elemento, pues entonces existen $g_1, g_2 \in G$ diferentes y por ende $\{g_1\} \notin \mathcal{F}^G, \{g_1\}^c \notin \mathcal{F}^G$. Así, hemos generalizado 2.9 a:

Proposición 2.11. Si $G \subset I$, entonces $\mathcal{F}^G$ es ultrafiltro ssi $\#G = 1$, y es propio ssi $G \neq \emptyset$.

Corolario. En particular, $\mathcal{F}^{\{\emptyset\}} = \mathcal{P}(I)$.

Observación. Más en general, $\emptyset \in \mathcal{F}^{\mathcal{G}} \Leftrightarrow \exists \{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{G}, \cap_{i=1}^n A_i \subset \emptyset \Leftrightarrow \exists \{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{G}, \cap_{i=1}^n A_i = \emptyset$. Por tanto, $\emptyset \notin \mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ ssi cualquier intersección finita de conjuntos de $\mathcal{G}$ es no vacía.

Definición. Diremos que $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(I)$ tiene la **Propiedad de Intersección Finita** (PIF en adelante) ssi cualquier intersección finita de conjuntos de $\mathcal{G}$ es no vacía.

Corolario 2.12. Así, $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(I)$ tiene la PIF ssi $\emptyset \notin \mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ ssi $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ es propio.

Nota. En particular, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(I)$ satisface la PIF, entonces $\emptyset \notin \mathcal{G}$ (por absurdo, pues $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}^{\mathcal{G}}$). El recíproco, sin embargo, es falso en general (e.g., tomando $\mathcal{G} = \{2\mathbb{N}, (2\mathbb{N})^c\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tenemos que $\emptyset \in \mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ pero $\emptyset \notin \mathcal{G}$).

2.3. Intersección y unión

Pregunta. Si bien el recíproco del axioma de superconjunto es trivialmente cierto si lo pensamos como «existe un $A \subset I$ tal que...» pero trivialmente falso pensado como «para todo $A \subset B$, se cumple...», ¿qué hay del recíproco del axioma de intersección?

Proposición 2.13. Dado $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(I)$ no vacío, se tiene: $\mathcal{C}$ es un filtro sobre I ssi $\forall A, B \subset I, A \cap B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow A, B \in \mathcal{C}$.

²Peor aún, no nos costaría demasiado probar que el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ obtenido con $\mathcal{F}^g$ es isomorfo a $\mathbb{R}$, véase 3.21.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Por el axioma de intersección, nos basta ver $A \cap B \in \mathcal{C} \Rightarrow A, B \in \mathcal{C}$. Ahora bien, como $A \cap B \subset A, B \subset I$, el axioma de superconjunto concluye la prueba.

$[\Leftarrow]$ Es suficiente establecer el axioma de superconjunto, pues el otro es un caso particular de nuestra hipótesis. Sean, pues, $A \subset B \subset I$ con $A \in \mathcal{C}$. Entonces $A \cap B = A \in \mathcal{C}$, luego $B \in \mathcal{C}$ por hipótesis. $\square$

Corolario 2.14. (véase 2.6) Dado $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(I)$ no vacío, se tiene: $\mathcal{C}$ es un ultrafiltro sobre I ssi para todo $A, B \subset I$ se cumplen:

1. $A, B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$.
2. $A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{C}$.

Corolario 2.15. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I y $A, B \subset I$, entonces $A \cup B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A \in \mathcal{F}) \vee (B \in \mathcal{F})$.

Demostración. (Por contrarrecíproco) $A, B \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c, B^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \cap B^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A^c \cap B^c)^c \notin \mathcal{F}$, luego De Morgan concluye. $\square$

Nota. De hecho, $[\Leftarrow]$ vale trivialmente para todo filtro por el axioma de superconjunto, pues $A, B \subset A \cup B$. Por otra parte, un argumento similar nos permite intercambiar la condición 1 de 2.14 por la condición de 2.15.

Corolario 2.16. (Por inducción de 2.13 y 2.15) Dado $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I y $\{A_i\}_{i=1}^n \subset I$, se cumple:

1. $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}, A_j \in \mathcal{F}$.
2. $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\}, A_j \in \mathcal{F}$.

Observación 2.17. (Generalización parcial) Dado $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I y $\{A_i\}_{i \in J} \subset I$, como $\forall j \in J, \bigcap_{i \in J} A_i \subset A_j \subset \bigcup_{i \in J} A_i$, se sigue del axioma de superconjunto que:

1. $\bigcap_{i \in J} A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall j \in J, A_j \in \mathcal{F}$.
2. $\exists j \in J, A_j \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in J} A_i \in \mathcal{F}$.

Pregunta. En 2.16.2, ¿cuándo la existencia de j es única?

Observación. Si $A_j, A_k \in \mathcal{F}$, con $\mathcal{F}$ ultrafiltro sobre I , entonces $A_j \cap A_k \in \mathcal{F}$ y, en particular, $A_j \cap A_k \neq \emptyset$. Por tanto, obtenemos por contrarrecíproco que:

Proposición 2.18. Si $\{A_i\}_{i=1}^n \subset I$ son disjuntos 2 a 2 y $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$, entonces $\exists! j, A_j \in \mathcal{F}$.

Observación. El recíproco es falso.

Demostración. (Por contraejemplo) Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\{1\}}$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ y $A_3 = \{3, 4\}$, entonces A_1 es el único A_j de $\mathcal{F}$ pero $A_2 \cap A_3 = \{3\} \neq \emptyset$. $\square$

Observación. Si un ultrafiltro $\mathcal{F}$ contiene a algún conjunto finito,³ pongamos $G = \{g_i\}_{i=1}^n = \bigcup_{i=1}^n \{g_i\}$, entonces $\exists! j \in \{1, \dots, n\}, \{g_j\} \in \mathcal{F}$ (pues $\{\{g_i\}\}_{i=1}^n$ son 2 a 2 disjuntos) y, por 2.8, $\mathcal{F}^g \subset \mathcal{F}$, con $g = g_j$. Es más, se tiene la igualdad: $A \in \mathcal{F} \xrightarrow{\{g\} \in \mathcal{F}} A \cap \{g\} \in \mathcal{F} \xrightarrow{\emptyset \notin \mathcal{F}} A \cap \{g\} \neq \emptyset \Rightarrow g \in A \Rightarrow A \in \mathcal{F}^g$.

En resumen,

Lema 2.19. Todo ultrafiltro conteniendo a un conjunto finito es principal. Y por contrarrecíproco, un ultrafiltro no principal no contiene ningún conjunto finito o, equivalentemente por 2.7, contiene $\mathcal{F}^{co}$.

Observación. El recíproco también es cierto, pues ya vimos en 2.10 que todo ultrafiltro principal contiene conjuntos finitos, luego:

Proposición 2.20. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro. Se tiene: $\mathcal{F}$ es no principal ssi $\mathcal{F}^{co} \subset \mathcal{F}$.

Nota. Otra consecuencia interesante de 2.19 es que no perdemos nada en suponer I infinito, ya que por 2.2:

Proposición 2.21. Si I es finito y $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I , entonces $\mathcal{F}$ es principal.

³Recordamos que en 1.14 propusimos como definición formal de $\mathcal{F}$ «grande» precisamente que $\mathcal{F}$ no contuviera conjuntos finitos.

2.4. Extensiones maximales

Nota. Llegados hasta aquí ya estamos en condiciones de retomar 1.14, donde discutimos la posibilidad de extender el filtro propio $\mathcal{F}^{\text{co}}$ (supuesto que $\#I = \infty$) a un ultrafiltro (que proponíamos como firme candidato para obtener ${}^*\mathbb{R}$ vía 1.8) a base de añadir todos los conjuntos que fueran necesarios. Este proceso, aunque impreciso, nos lleva de manera natural a la noción de filtro propio maximal, y es fácil ver que todo ultrafiltro lo es, pero para probar el recíproco necesitaremos de un lema previo.

Pensemos en ello: si $\mathcal{F}$ es un filtro propio maximal, entonces será igual a cualquier filtro propio que lo contenga. Y como $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}}$, nos basta ver que $\mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}}$ es propio con $\mathcal{G} = \{A^c\}$ bajo la hipótesis $A \notin \mathcal{F}$.

Lema 2.22. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro propio sobre I y $A \subset I$ arbitrario. Se tiene: $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ tiene la PIF ssi $A \notin \mathcal{F}$.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ (Por contrarrecíproco) Si $A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \{A^c\}}$, como $A^c \in \mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \{A^c\}}$, tenemos que $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \{A^c\}}$, luego $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ no tiene la PIF.

$[\Leftarrow]$ (Por contrarrecíproco) Por hipótesis, $\exists \{F_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F} \cup \{A^c\}$, $\cap_i F_i = \emptyset$. Y como $\{F_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cap_i F_i \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$, podemos suponer que $\cap_{i=1}^n F_i = (\cap_{j=1}^m F'_j) \cap A^c$ con $F'_j \in \mathcal{F}$. Ahora bien, $(\cap_{j=1}^m F'_j) \cap A^c = \emptyset \Leftrightarrow \cap_{j=1}^m F'_j \subset A$, luego $A \in \mathcal{F}$ por las propiedades de filtro. $\square$

Teorema 2.23. *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I ssi $\mathcal{F}$ es un filtro propio maximal sobre I .*

Demostración. $[\Leftarrow]$ Si $A \notin \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ satisface la PIF por el lema, ergo $\mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \{A^c\}}$ es propio y, por hipótesis, $\mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \{A^c\}} \subset \mathcal{F}$, luego $A^c \in \mathcal{F}$.

$[\Rightarrow]$ (Por absurdo) Sea $\mathcal{F}'$ un filtro propio tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$, de modo que existe $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$. Entonces $A^c \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ por hipótesis, de manera que $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}'$, en contra de $\mathcal{F}'$ propio. $\square$

Nota. A continuación veremos vía el Lema de Zorn que existe algún filtro propio maximal sobre I , que será además ultrafiltro por 2.24. Más aún, lo construiremos de tal manera que contenga a $\mathcal{F}$ un filtro propio sobre I dado, obteniendo así el ultrafiltro buscado cuando $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\text{co}}$ con $\#I = \infty$ (véase 2.5).

Lema. *Sea $\{\mathcal{F}_x\}_{x \in X}$ una colección no vacía de filtros sobre I totalmente ordenada respecto de $\subset$. Entonces*

$$\cup_{x \in X} \mathcal{F}_x := \{A : \exists x \in X, A \in \mathcal{F}_x\}$$

es un filtro sobre I . Además, $\cup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ es propio ssi todos los $\mathcal{F}_x$ lo son.

Demostración. 0) Como $\forall x \in X, \mathcal{F}_x \subset \mathcal{P}(I)$, $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$, lo mismo vale para $\cup_{x \in X} \mathcal{F}_x$.

1) Si $A \subset B \subset I$ y $A \in \cup_{x \in X} \mathcal{F}_x$, entonces $\exists x_1 \in X, A \in \mathcal{F}_{x_1}$ y, como $\mathcal{F}_{x_1}$ es filtro, $B \in \mathcal{F}_{x_1} \subset \cup_{x \in X} \mathcal{F}_x$.

2) Sean $A, B \in \cup_{x \in X} \mathcal{F}_x$, de manera que $\exists x_1, x_2 \in X, A \in \mathcal{F}_{x_1}, B \in \mathcal{F}_{x_2}$. Entonces podemos suponer por hipótesis que $\mathcal{F}_{x_1} \subset \mathcal{F}_{x_2}$, luego $A, B \in \mathcal{F}_{x_2}$ y, como $\mathcal{F}_{x_2}$ es filtro, $A \cap B \in \mathcal{F}_{x_2} \subset \cup_{x \in X} \mathcal{F}_x$.

3) (Por contrarrecíproco) $\emptyset \in \cup_{x \in X} \mathcal{F}_x \Leftrightarrow \exists x \in X, \emptyset \in \mathcal{F}_x$. $\square$

Observación. Que $\{\mathcal{F}_x\}_{x \in X}$ sea totalmente ordenada únicamente se utiliza en (2), pero es claro que en dicho punto nos basta con que $\exists x_3 \in X, \mathcal{F}_{x_1}, \mathcal{F}_{x_2} \subset \mathcal{F}_{x_3}$. Es decir, el resultado es cierto más en general para cualquier colección (de filtros sobre I) dirigida superiormente respecto $\subset$.

Teorema 2.24. *Existe $\mathcal{M}$ filtro propio maximal sobre I conteniendo a $\mathcal{F}$ un filtro propio sobre I dado.*

Demostración. Sea P la colección de todos los filtros propios sobre I que contienen a $\mathcal{F}$, que está parcialmente ordenada por $\subset$. Sea también $P' \subset P$ tal que $(P', \subset)$ es total. Entonces $\cup_{A \in P'} A$ es un filtro propio por el lema, que claramente contiene $\mathcal{F}$ y es cota superior de P' , luego es una cota superior de P' en P . Por tanto, P tiene un elemento maximal $\mathcal{M}$ por el Lema de Zorn, que en particular contiene $\mathcal{F}$.

Veamos finalmente que $\mathcal{M}$ es un filtro propio maximal sobre I . Si $\mathcal{F}'$ es un filtro propio sobre I tal que $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}'$, entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, luego $\mathcal{F}' \in P$. Y por la maximalidad de $\mathcal{M}$ en P , concluimos que $\mathcal{M} = \mathcal{F}'$. $\square$

Teorema 2.25. Si $\#I = \infty$, entonces existe $\mathcal{F}$ ultrafiltro sobre I conteniendo $\mathcal{F}^{\text{co}}$.

Observación. De hecho, la condición $\#I = \infty$ es también necesaria (véase 2.21).

Nota. Recordamos que, por 2.20 y 2.7, un ultrafiltro $\mathcal{F}$ contiene $\mathcal{F}^{\text{co}}$ ssi es no principal ssi no contiene conjuntos finitos, luego, por brevedad, nos referiremos a ellos simplemente como a los ultrafiltros no principales.

Veamos para terminar algunas consecuencias o refinamientos interesantes de estos hechos:

Proposición. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(I)$ tiene la PIF, entonces existe $\mathcal{F}$ ultrafiltro sobre I conteniendo $\mathcal{C}$.

Demostración. Obvio de 2.24 y 2.23, pues $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}^{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}$ es un filtro propio si $\mathcal{C}$ tiene la PIF. $\square$

Nota. Todo filtro propio $\mathcal{F}$ sobre I es un subconjunto de $\mathcal{P}(I)$ con la PIF por 2.12 (pues $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\mathcal{F}}$), pero no viceversa (e.g., $\{A\}$ con $\emptyset \neq A \subsetneq I$ tiene la PIF pero no es filtro sobre I). Por tanto, la proposición anterior es una generalización de los resultados anteriores.

Corolario. Dado $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(I)$ con la PIF y $A \subset I$ cualquiera, se tiene: $\mathcal{C} \cup \{A\}$ ó $\mathcal{C} \cup \{A^c\}$ tiene la PIF.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro conteniendo a $\mathcal{C}$, de modo que A ó A^c es de $\mathcal{F}$ y, por ende, $\mathcal{F}^{\mathcal{C} \cup \{A\}} \subset \mathcal{F}$ sin restricción. Entonces: $\emptyset \notin \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{F}^{\mathcal{C} \cup \{A\}} \Rightarrow \mathcal{C} \cup \{A\}$ tiene la PIF. $\square$

Corolario. Dado $A \subset I$, existe $\mathcal{F}$ ultrafiltro no principal sobre I conteniendo A ó A^c .

Demostración. Tomando $\mathcal{C} = \mathcal{F}^{\text{co}}$ en el corolario anterior. $\square$

Lema. Sea $f: I \rightarrow I$ una aplicación biyectiva y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal sobre I . Entonces $f(\mathcal{F}) := \{f(C) : C \in \mathcal{F}\}$ es un ultrafiltro no principal sobre I .

Demostración. Pongamos $\mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$ y verifiquemos las condiciones de 2.14.

- 1) Claramente $\mathcal{F}' \subset \mathcal{P}(I)$ y es no vacío.
- 2) Sean $A, B \subset I$. Como f es biyectiva, $f(A), f(B) \in \mathcal{F}' \Leftrightarrow A, B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f(A \cap B) \in \mathcal{F}' \Leftrightarrow f(A) \cap f(B) \in \mathcal{F}'$.
- 3) Análogamente, $f(A) \in \mathcal{F}' \Leftrightarrow f(A)^c \notin \mathcal{F}'$.
- 4) Por último, como los elementos de $\mathcal{F}'$ tienen el mismo cardinal que los de $\mathcal{F}$ por ser f biyectiva, tenemos que $\mathcal{F}'$ es no principal usando la caracterización de no contener conjuntos finitos. $\square$

Corolario. Existe $\mathcal{F}$ ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ conteniendo a los impares, e ídem para los pares.

Observación 2.26. Los recíprocos de 2.17 son falibles.

Demostración. (Por contraejemplo) Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal sobre I . Entonces:

- $\forall i \in I, \{i\}^c \in \mathcal{F}^{\text{co}} \subset \mathcal{F}$, pero $\bigcap_{i \in I} \{i\}^c = (\bigcup_{i \in I} \{i\})^c = I^c = \emptyset \notin \mathcal{F}$.
- $\bigcup_{i \in I} \{i\} = I \in \mathcal{F}$, pero $\forall i \in I, \{i\} \notin \mathcal{F}$.

$\square$

Nota. En 1.9 nos preguntábamos si $\mu: \mathcal{P}(I) \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\mu(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$ es una probabilidad, con $\mathcal{F}$ ultrafiltro sobre I . Ahora bien, aunque 2.18 prueba que μ es aditiva, 2.2 que $\mu(I) = 1$ y 2.3 que $\mu(\emptyset) = 0$, 2.26 nos da un contraejemplo para la σ -aditividad de μ (y, de hecho, para la σ -subaditividad). Más explícitamente, $1 = \mu(\mathbb{N}) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}) > \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0$.

Capítulo 3

El cuerpo de los hiperreales

3.1. Construcción

Tras haber solventado en el capítulo anterior los problemas técnicos surgidos en el primero, ha llegado la hora de revisarlo y culminar al fin nuestro primer objetivo: la construcción de una extensión ordenada de $\mathbb{R}$ conteniendo ilimitados.

Nota. Fijamos para el resto del capítulo $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ (que existe por 2.25).

Observación 3.1. Claramente $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con neutro $\mathbf{0} := (0)_{n \in \mathbb{N}}$ y unidad $\mathbf{1} := (1)_{n \in \mathbb{N}}$ tomando

$$\begin{cases} (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (s_n)_{n \in \mathbb{N}} := (r_n + s_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \odot (s_n)_{n \in \mathbb{N}} := (r_n \cdot s_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ -(r_n)_{n \in \mathbb{N}} := (-r_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

pues hereda las propiedades correspondientes de $\mathbb{R}$. Sin embargo, no es un dominio de integridad (mucho menos un cuerpo), pues tomando r, s como en 1.13 (que son no nulos) nos queda $r \odot s = \mathbf{0}$. De hecho, ninguna sucesión con algún término nulo es invertible.

Definición 3.2. (véase 1.8) $\forall r, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, r \equiv s :\Leftrightarrow \llbracket r = s \rrbracket \in \mathcal{F}$, con $\llbracket r = s \rrbracket := \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\}$, y en tal caso se dice que r, s coinciden sobre un conjunto grande, o casi en todas partes modulo $\mathcal{F}$, o en casi todo $\mathbb{N}$.

Observación. La relación $\equiv$ es de equivalencia en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por construcción (véase 1.11), luego podemos considerar el conjunto de sus clases de equivalencia.

Definición 3.3. El conjunto de los hiperreales: ${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \equiv$.

Notación. Denotaremos por $[r]$ la clase de equivalencia de $\equiv$ asociada a $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Eventualmente, y abusando de la notación, si $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ escribiremos $[r_n]$ en lugar de $[r]$. Por tanto, $[r] = [s]$ ssi $r \equiv s$.

Teorema 3.4. La relación $\equiv$ es una congruencia sobre $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$.

Demostración. En efecto,

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv r' \\ s \equiv s' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r \oplus s \equiv r' \oplus s' \\ r \odot s \equiv r' \odot s' \end{array}$$

pues

$$\frac{\llbracket r \oplus s = r' \oplus s' \rrbracket}{\llbracket r \odot s = r' \odot s' \rrbracket} \supset \llbracket r = r' \rrbracket \cap \llbracket s = s' \rrbracket \stackrel{\text{hip}}{\in} \mathcal{F}$$

ya que

$$\left. \begin{array}{l} r_n = r'_n \\ s_n = s'_n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_n + s_n = r'_n + s'_n \\ r_n \cdot s_n = r'_n \cdot s'_n \end{array}$$

□

Nota. 3.4 vale en general para cualquier filtro.

Corolario 3.5. La terna $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con neutro $[0]$ y unidad $[1]$ tomando

$$\begin{cases} [r] + [s] := [r \oplus s] = [(r_n + s_n)_n] = [r_n + s_n] \\ [r] \cdot [s] := [r \odot s] = [(r_n \cdot s_n)_n] = [r_n \cdot s_n] \\ -[r] := [-r] = [(-r_n)_n] = [-r_n] \end{cases}$$

Demostración. 3.4 garantiza que nuestras operaciones están bien definidas (i.e., que no dependen del representante: $[r] = [r'], [s] = [s'] \Rightarrow [r] \star [s] = [r'] \star [s']$), y es rutinario comprobar que ${}^*\mathbb{R}$ hereda la estructura de anillo de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, del mismo modo que ésta heredaba la de $\mathbb{R}$. $\square$

Más en general,

Definición 3.6. Sea $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación k -aria en $\mathbb{R}$ y $(r^i)_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Definimos entonces ${}^*f: ({}^*\mathbb{R})^k \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ como ${}^*f([r^i])_{i=1}^k := [f \circ (r^i)_{i=1}^k] = [(f(r_n^i)_{i=1}^k)_n] = [f(r_n^i)_{i=1}^k]$.

Lema 3.7. Si f es una aplicación k -aria en $\mathbb{R}$, entonces *f está bien definida en ${}^*\mathbb{R}$.

Demostración. Siguiendo a 3.4,

$$\forall i, r_n^i = s_n^i \Rightarrow f(r_n^i)_{i=1}^k = f(s_n^i)_{i=1}^k$$

luego

$$\cap_{i=1}^k \llbracket r^i = s^i \rrbracket \subset \llbracket f(r^i)_{i=1}^k = f(s^i)_{i=1}^k \rrbracket$$

y por ende

$$\forall i, r^i \equiv s^i \Rightarrow f \circ (r^i)_{i=1}^k \equiv f \circ (s^i)_{i=1}^k$$

$\square$

Definición 3.8. (véase 1.10) Dado $R \subset \mathbb{R}^k$ una relación k -aria en $\mathbb{R}$ y $(r^i)_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definimos ${}^*R \subset ({}^*\mathbb{R})^k$ como ${}^*R([r^i])_{i=1}^k := \llbracket R(r^i)_{i=1}^k \rrbracket \in \mathcal{F}$, con $\llbracket R(r^i)_{i=1}^k \rrbracket := \{n \in \mathbb{N} : R(r_n^i)_{i=1}^k\}$.

Lema 3.9. Si R es una relación k -aria en $\mathbb{R}$, entonces *R está bien definida en ${}^*\mathbb{R}$.

Demostración. Siguiendo a 3.7,

$$\left. \begin{array}{l} \forall i, r_n^i = s_n^i \\ R(r_n^i)_{i=1}^k \end{array} \right\} \Rightarrow R(s_n^i)_{i=1}^k$$

luego

$$(\cap_{i=1}^k \llbracket r^i = s^i \rrbracket) \cap \llbracket R(r^i)_{i=1}^k \rrbracket \subset \llbracket R(s^i)_{i=1}^k \rrbracket$$

y por ende

$$\left. \begin{array}{l} \forall i, r^i \equiv s^i \\ {}^*R([r^i])_{i=1}^k \end{array} \right\} \Rightarrow {}^*R([s^i])_{i=1}^k$$

$\square$

Pregunta. ¿Qué propiedades hereda *R de R ?

Observación 3.10. Se tiene:

1. Si R es reflexiva, entonces $\forall r \in \text{Dom } R, \llbracket rRr \rrbracket = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ y por ende *R es reflexiva.
2. Si R es irreflexiva, entonces $\forall r \in \text{Dom } R, \llbracket rRr \rrbracket = \emptyset \notin \mathcal{F}$ y por ende *R es irreflexiva.
3. Si R es simétrica, entonces $\llbracket rRs \rrbracket = \llbracket sRr \rrbracket$ y por ende *R es simétrica.
4. Si R es antisimétrica, entonces $\llbracket rRs \rrbracket \cap \llbracket sRr \rrbracket \subset \llbracket r = s \rrbracket$ y por ende *R es antisimétrica.
5. Si R es transitiva, entonces $\llbracket rRs \rrbracket \cap \llbracket sRt \rrbracket \subset \llbracket rRt \rrbracket$ y por ende *R es transitiva.

6. Si R es total, entonces $\llbracket rRs \rrbracket \subset \llbracket sRr \rrbracket$. Y como $\llbracket rRs \rrbracket = \llbracket rRs \rrbracket^c$ (pues $n \in \llbracket rRs \rrbracket^c \Leftrightarrow r_n R s_n$) y $\llbracket rRs \rrbracket^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \llbracket rRs \rrbracket \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow (r, s) \notin {}^*R$ (por ser ultrafiltro), tenemos que *R es total.

Nota. 1, 3, 4, 5 valen en general para cualquier filtro, y 2 únicamente utiliza que $\mathcal{F}$ es propio.

Corolario 3.11. La relación ${}^*\leq$ es de orden total en ${}^*\mathbb{R}$.

Notación 3.12. Dado que $r \equiv s \Leftrightarrow [r] = [s]$, de modo que ${}^* =$ coincide con $=$ en ${}^*\mathbb{R}$, resulta natural denotar ${}^*\leq$ simplemente por $\leq$ siempre que no haya peligro de confusión.

Teorema 3.13. El conjunto de los hiperreales con la estructura $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, [0], [1], \leq)$ es un cuerpo ordenado.

Demostración. Por 3.5 y 3.11, sólo nos falta demostrar que todo elemento no nulo $[r]$ tiene inverso y que $({}^*\mathbb{R}, \leq)$ es ordenado:

- Como $[r] \neq [0] \Leftrightarrow \llbracket r = 0 \rrbracket \notin \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{F} \text{ ultra}} \llbracket r \neq 0 \rrbracket \in \mathcal{F}$, tomando $s_n = \begin{cases} r_n^{-1}, & n \in \llbracket r \neq 0 \rrbracket \\ 0, & n \in \llbracket r = 0 \rrbracket \end{cases}$ obtenemos que $[s] \neq [0]$ y $[r] \cdot [s] = [1]$ (pues $\llbracket s \neq 0 \rrbracket = \llbracket r \odot s = 1 \rrbracket = \llbracket r \neq 0 \rrbracket \in \mathcal{F}$), luego $[s] = [r]^{-1}$.¹
- Como $(\mathbb{R}, \leq)$ es ordenado, se tiene: $\llbracket 0 \leq r \rrbracket \cap \llbracket 0 \leq s \rrbracket \subset \llbracket 0 \leq rs \rrbracket$ y $\llbracket r \leq s \rrbracket \subset \llbracket r + t \leq s + t \rrbracket$, luego $[0] \leq [r], [s] \Rightarrow [0] \leq [r] \cdot [s]$ y $[r] \leq [s] \Rightarrow [r] + [t] \leq [s] + [t]$.

□

Nota 3.14. Recordamos que en todo cuerpo ordenado $(\mathbb{K}, \leq)$ podemos definir un valor absoluto.

Más concretamente, podemos definir la aplicación $|\cdot|_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ como $|x|_{\mathbb{K}} := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Además, puede probarse que todo valor absoluto satisface la desigualdad triangular y la desigualdad triangular inversa, i.e., que $\forall x, y \in \mathbb{K}, ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

Observación 3.15. Si $|\cdot|$ denota $|\cdot|_{\mathbb{R}}$, entonces ${}^*|\cdot| = |\cdot|_{{}^*\mathbb{R}}$.

Demostración. Como $\llbracket |r| = r \rrbracket = \llbracket r \geq 0 \rrbracket$, tenemos que $\llbracket |r| \rrbracket = [r] \Leftrightarrow [r] \geq [0]$, luego

$${}^*|\llbracket r \rrbracket| = \llbracket |r| \rrbracket = \begin{cases} [r], & [r] \geq [0] \\ -[r], & [r] < [0] \end{cases}$$

□

Nota. Recordamos que, como $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$ son cuerpos y todo morfismo de cuerpos es inyectivo, para probar que ${}^*\mathbb{R}$ es una extensión de cuerpos de $\mathbb{R}$ nos basta hallar un morfismo de cuerpos $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$. Ahora bien, en tal caso tendremos en particular que $\varphi(0) = [0]$, $\varphi(1) = [1]$ y $\varphi(r) = \varphi(s) \Leftrightarrow r = s$, lo que nos lleva a:

Teorema 3.16. La aplicación $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}, r \mapsto [r]$, con $\mathbf{r} = (r)_{n \in \mathbb{N}}$, es una extensión de cuerpos de $\mathbb{R}$ que preserva el orden y, de hecho, cualquier relación k -aria.

Demostración. 1) Es claro de 3.5 que φ es morfismo y, por ende, una extensión de $\mathbb{R}$.

2) Sea $R \subset \mathbb{R}^k$. Entonces ${}^*R(\varphi(r_i))_{i=1}^k \Leftrightarrow \llbracket R(\mathbf{r}_i)_{i=1}^k \rrbracket \in \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{O} \notin \mathcal{F}} R(r_i)_{i=1}^k$ y, recíprocamente, $R(r_i)_{i=1}^k \Rightarrow \llbracket R(\mathbf{r}_i)_{i=1}^k \rrbracket = \mathbb{N} \in \mathcal{F} \Rightarrow {}^*R(\varphi(r_i))_{i=1}^k$. □

Notación. Por tanto, identificaremos $r \in \mathbb{R}$ con $\varphi(r) \in {}^*\mathbb{R}$ (del mismo modo que $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ identifica $x \in \mathbb{R}$ con $(x, 0) \in \mathbb{C}$).

Corolario 3.17. Si $R \subset \mathbb{R}^k$, entonces *R es una extensión de R .

¹Como ya notamos en 1.9, la definición de $r \equiv s$ es similar a la de $f = g$ a.e., y de ahí que no sólo compartamos jerga, sino también técnicas: a saber, el hecho de sólo tener que preocuparnos por lo que ocurre en casi todo punto.

Demostración. Como ${}^*R(r_i)_{i=1}^k \Leftrightarrow R(r_i)_{i=1}^k$ si $(r_i)_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$, tenemos que ${}^*R \cap \mathbb{R}^k = R \cap \mathbb{R}^k = R$. $\square$

Notación. Por tanto, podríamos identificar $R \subset \mathbb{R}^k$ con ${}^*R \subset ({}^*\mathbb{R})^k$, y así lo haremos con cualquier relación concreta no unaria (como $=, \neq, \leq, >$, etc., de modo que el abuso de notación de 3.12 es completamente legítimo y no da nunca lugar a confusión). El motivo por el cual no identificamos todas las relaciones unarias con su extensión es para poder distinguir entre $x \in \mathbb{R}$ y $x \in {}^*\mathbb{R}$.

Antes de estudiar algunos ejemplos particularmente interesantes de extensiones de relaciones, veamos que ${}^*\mathbb{R}$ cumple con todas nuestras expectativas:

Lema 3.18. Sea $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\omega \rightarrow +\infty$. Entonces $[\omega] \in {}^*\mathbb{R}_{\infty}^+$.

Demostración. Por hipótesis, $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \omega_n \in \mathbb{R}_{>m}$, ergo $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, [\omega > m] \supset \{1, \dots, n_0 - 1\}^c \in \mathcal{F}^{\text{co}}$ y, por el axioma de superconjunto, $\forall m \in \mathbb{N}, [\omega > m] \in \mathcal{F}^{\text{co}} \subset \mathcal{F}$ (pues $\mathcal{F}$ es no principal). Así, $\forall m \in \mathbb{N}, [\omega] > m$, i.e., $[\omega] \in {}^*\mathbb{R}_{\infty}^+$. $\square$

Nota. 3.18 vale en general para cualquier filtro conteniendo $\mathcal{F}^{\text{co}}$ y, en particular, para el propio $\mathcal{F}^{\text{co}}$. Y como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv_{\mathcal{F}^{\text{co}}}$ es anillo por 3.4 (o por 1.12), obtenemos una construcción particularmente simple de un anillo conteniendo ilimitados. Para más información sobre éste, véase [La01].

Teorema 3.19. El cuerpo ${}^*\mathbb{R}$ de los hiperreales contiene ilimitados y, por 1.2.7, infinitesimales.

Demostración. Tomando $\omega = (n)_n$ en el lema, pues si $m \in \mathbb{N}$ y $n \geq m + 1$, entonces $\omega_n > m$. $\square$

Nota 3.20. Análogamente, podríamos ver que:

1. $\omega \rightarrow -\infty \Rightarrow [\omega] \in {}^*\mathbb{R}_{\infty}^-$, y tomar como ejemplo $\omega = (-n)_n$.
2. $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow [\epsilon] \in {}^*\mathbb{R}_0$, $\epsilon \in c_{00} \Rightarrow [\epsilon] = 0$ y $\#[\epsilon = 0] < \infty \Rightarrow [\epsilon] \neq 0$ (pues $\mathcal{F}$ no contiene conjuntos finitos), y tomar como ejemplo $\epsilon = \left(\frac{1}{n}\right)_n$.

Corolario. $\mathbb{R} \subsetneq {}^*\mathbb{R}$.

Demostración. Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{L} = ({}^*\mathbb{R}_{\infty})^c$ por 1.4, ningún elemento de ${}^*\mathbb{R}_{\infty}$ es de $\mathbb{R}$. $\square$

Observación. Salvo en el teorema anterior, hasta ahora no habíamos utilizado la no principalidad de $\mathcal{F}$, lo que nos lleva a sospechar:

Proposición 3.21. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim_n$, con $r \sim_n s :\Leftrightarrow [r = s] \in \mathcal{F}^n$. Entonces $\mathbb{K} \cong \mathbb{R}$.

Demostración. Por la observación anterior ya sabemos que $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}$ es una extensión de cuerpos, luego nos basta ver que $\forall [y] \in \mathbb{K}, \exists x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = [y]$. En efecto, $\varphi(x) = [y] \Leftrightarrow [x = y] \in \mathcal{F}^n$, ergo tomando $x = y_n$ hemos terminado. $\square$

3.2. Extensión de relaciones

3.2.1. Subconjuntos

Observación. Del mismo modo que hemos extendido $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$, resulta natural preguntarse si podemos extender $A \subset \mathbb{R}$ a ${}^*A \subset {}^*\mathbb{R}$. Ahora bien, considerando el conjunto A como a una relación unaria sobre $\mathbb{R}$, ya sabemos que ésta se extiende a *A de la manera siguiente: ${}^*A([r]) \Leftrightarrow [A(r)] \in \mathcal{F}$, i.e., $[r] \in {}^*A \Leftrightarrow [r \in A] \in \mathcal{F}$.

Pregunta. Dado que $\mathbb{R} \subsetneq {}^*\mathbb{R}$, cabe preguntarse si este es un hecho general. Es decir, ¿ $A \subsetneq {}^*A$ siempre?

Ejemplo 3.22. Si $\omega = (n)_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $[\omega \in \mathbb{N}] = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ y, por ende, $[\omega] \in {}^*\mathbb{N}$. Y como ya vimos que $[\omega] \in {}^*\mathbb{R}_{\infty} \setminus \mathbb{R}$, tenemos en particular que $[\omega] \in {}^*\mathbb{N}_{\infty} \setminus \mathbb{N}$.

Más en general, y siguiendo a 3.20.2:

Proposición 3.23. Dado $A \subset \mathbb{R}$, se tiene: $\#A = \infty$ ssi ${}^*A \setminus A \neq \emptyset$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Por hipótesis existe $r \in A^{\mathbb{N}}$ con todos sus términos distintos, luego

$$\forall s \in A, \llbracket r = s \rrbracket = \begin{cases} \emptyset, & s \notin \{r_n\}_n \\ \{n_0\}, & r_{n_0} = s \end{cases}$$

y por ende $\forall s \in A, \llbracket r = s \rrbracket \notin \mathcal{F}$, i.e., $[r] \notin A$. Y como obviamente $\llbracket r \in A \rrbracket = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, obtenemos que $[r] \in {}^*A \setminus A$.

$[\Leftarrow]$ (Por absurdo) Sea $[r] \in {}^*A \setminus A$ y supongamos que A es finito, digamos $A = \{a_i\}_{i=1}^k$. Entonces $\forall i, \llbracket r \in A \rrbracket, \llbracket r = a_i \rrbracket^c \in \mathcal{F}$, ergo $(\cap_{i=1}^k \llbracket r = a_i \rrbracket^c) \cap \llbracket r \in A \rrbracket \in \mathcal{F}$, donde claramente $(\cap_{i=1}^k \llbracket r = a_i \rrbracket^c) \cap \llbracket r \in A \rrbracket = \emptyset$!!!² $\square$

Definición. Diremos que $[x]$ es un

- **elemento no estándar de A** ssi $[x] \in {}^*A \setminus A$.
- **hipernatural** ssi $[x] \in {}^*\mathbb{N}$.
- **hiperentero** ssi $[x] \in {}^*\mathbb{Z}$.
- **hiperracional** ssi $[x] \in {}^*\mathbb{Q}$.

Corolario 3.24. A es infinito ssi *A es infinito.

Demostración. $[\Leftarrow]$ (Por contrarrecíproco) Si A es finito, entonces $A = {}^*A$.

$[\Rightarrow]$ Si A es infinito, como $A \subset {}^*A$, también lo es *A . $\square$

Pregunta. Acabamos de ver que nuestras extensiones de conjuntos se comportan bien respecto del cardinal, pero ¿qué hay del resto de operaciones conjuntistas?

Proposición 3.25. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Entonces:

1. $A \subset B \Leftrightarrow {}^*A \subset {}^*B$.
2. $A = B \Leftrightarrow {}^*A = {}^*B$.
3. ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$.
4. ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$.
5. ${}^*(A^c) = ({}^*A)^c$.
6. ${}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$.
7. ${}^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$.
8. ${}^*(A^2) = ({}^*A)^2$.
9. ${}^*\emptyset = \emptyset$.

Demostración. En efecto,

1. $[\Leftarrow]$ Por 3.17, $A = {}^*A \cap \mathbb{R}$ y $B = {}^*B \cap \mathbb{R}$, luego la hipótesis es concluyente (intersecando por $\mathbb{R}$).
 $[\Rightarrow]$ Si $r \in {}^*A$, entonces $\llbracket r \in A \rrbracket \in \mathcal{F}$. Y como $\llbracket r \in A \rrbracket \subset \llbracket r \in B \rrbracket$ por hipótesis, tenemos que $r \in {}^*B$.
2. Obvio de 1, pues $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.
3. Por 2.15, nos basta ver que $\llbracket r \in A \cup B \rrbracket = \llbracket r \in A \rrbracket \cup \llbracket r \in B \rrbracket$. En efecto, $n \in \llbracket r \in A \rrbracket \cup \llbracket r \in B \rrbracket$ ssi $n \in \llbracket r \in A \rrbracket$ ó $n \in \llbracket r \in B \rrbracket$ ssi $r_n \in A$ ó $r_n \in B$ ssi $r_n \in A \cup B$ ssi $n \in \llbracket r \in A \cup B \rrbracket$.

²De hecho, esta última comprobación nos sugiere que nuestras extensiones se comportan bien respecto de la intersección, como veremos en breve.

4. Análogamente, $\llbracket r \in A \cap B \rrbracket = \llbracket r \in A \rrbracket \cap \llbracket r \in B \rrbracket$, luego 2.13 concluye.
5. Como $\llbracket r \in A \rrbracket = \llbracket r \in A^c \rrbracket^c$,³ tenemos que $[r] \in {}^*(A^c) \Leftrightarrow \llbracket r \in A^c \rrbracket \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \llbracket r \in A^c \rrbracket^c \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \llbracket r \in A \rrbracket \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow [r] \notin {}^*A \Leftrightarrow [r] \in ({}^*A)^c$.
6. Obvio de 4 y 5, pues $A \setminus B = A \cap B^c$.
7. Por 4, nos basta ver que $\llbracket (r^1, r^2) \in A \times B \rrbracket = \llbracket r^1 \in A \rrbracket \cap \llbracket r^2 \in B \rrbracket$. En efecto, $n \in \llbracket r^1 \in A \rrbracket \cap \llbracket r^2 \in B \rrbracket$ ssi $r_n^1 \in A$ y $r_n^2 \in B$ ssi $(r_n^1, r_n^2) \in A \times B$ ssi $n \in \llbracket (r^1, r^2) \in A \times B \rrbracket$.
8. Obvio de 7, tomando $B = A$.
9. Como $[r] \in {}^*\emptyset \Leftrightarrow \llbracket r \in \emptyset \rrbracket \in \mathcal{F}$ y $\llbracket r \in \emptyset \rrbracket = \emptyset \notin \mathcal{F}$, nos queda que ${}^*\emptyset = \emptyset$.

□

Notación. Por tanto, podemos escribir homogéneamente 5 como ${}^*A^c$ y 8 como ${}^*A^2$.

Corolario 3.26. Si A ó A^c es finito, entonces ${}^*A = A$ y ${}^*A^c = A^c$.

Nota 3.27. Por 2.16, es claro que 3 y 4 (y en particular 7) se extienden por inducción a colecciones finitas, y por 2.17, que una de las dos inclusiones es cierta para colecciones arbitrarias. Sin embargo, y siguiendo a 2.26 y 3.23, es fácil hallar contraejemplos para la otra inclusión:

- $\mathbb{N} = \cup_n \{n\} = \cup_n {}^*\{n\}$, pero ${}^*(\cup_n \{n\}) = {}^*\mathbb{N}$ (que son distintos por ser $\mathbb{N}$ infinito).
- $(2\mathbb{N})^c = \cap_{n \in 2\mathbb{N}} \{n\}^c = \cap_{n \in 2\mathbb{N}} {}^*\{n\}^c$, pero ${}^*(\cap_{n \in 2\mathbb{N}} \{n\}^c) = ({}^*2\mathbb{N})^c$ (por De Morgan).
- $\prod_{n \in 2\mathbb{N}} {}^*\{n\}^c = \prod_{n \in 2\mathbb{N}} \{n\}^c \neq {}^*(\prod_{n \in 2\mathbb{N}} \{n\}^c)$.

Observación. Siguiendo con la filosofía de 3.15, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$, entonces:

1. ${}^*(\chi_A) = \chi_{{}^*A}$, pues ${}^*\chi_A([r]) = 1 \Leftrightarrow \llbracket \chi_A(r) = 1 \rrbracket \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \llbracket r \in A \rrbracket \in \mathcal{F} \Leftrightarrow [r] \in {}^*A \Leftrightarrow \chi_{{}^*A}([r]) = 1$.
2. ${}^*(\mathbb{R}_{>a}) = ({}^*\mathbb{R})_{>a}$, pues $[x] \in {}^*(\mathbb{R}_{>a}) \Leftrightarrow \llbracket a < x \rrbracket \in \mathcal{F} \Leftrightarrow [x] \in ({}^*\mathbb{R})_{>a}$.
3. ${}^*(A_{>a}) = ({}^*\mathbb{R}_{>a} \cap A) = ({}^*\mathbb{R})_{>a} \cap {}^*A = ({}^*A)_{>a}$.
4. ${}^*[a, b] = ({}^*\mathbb{R}_{\geq a} \cap \mathbb{R}_{\leq b}) = ({}^*\mathbb{R})_{\geq a} \cap ({}^*\mathbb{R})_{\leq b} = \{[x] \in {}^*\mathbb{R} : a \leq [x] \leq b\}$.

Notación. Por tanto, podemos escribir homogéneamente 3 como ${}^*A_{>a}$.

Nota 3.28. 3.25 nos sugiere que, en cierto modo, $\llbracket \cdot \rrbracket$ preserva las conectivas lógicas del cálculo proposicional (e.g., pensando $[r] \in {}^*A \cap {}^*B$ como a la conjunción de las variables proposicionales $[r] \in {}^*A, [r] \in {}^*B$). Y dado que $[r] \in {}^*A \Leftrightarrow \llbracket r \in A \rrbracket \in \mathcal{F}$, ello nos sugiere que podemos transferir de manera automática ciertas propiedades de $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$.

De hecho, este ha sido básicamente nuestro método de trabajo desde 3.4 o, inclusive, desde el capítulo sobre filtros (pensando el axioma de superconjunto como a una suerte de *modus ponens*, el axioma de intersección como a una caracterización de la conjunción, y a la condición de ultrafiltro como a la ley del tercero excluido).

Antes de abordar esta cuestión en toda su generalidad y formalidad en la sección siguiente, estudiaremos primero otro ejemplo importante de extensión de relaciones.

³Esta igualdad es, de hecho, un caso particular de la vista en 3.10.6.

3.2.2. Aplicaciones parciales

Observación. Del mismo modo que ${}^*\mathbb{R}$ preserva la estructura algebraica y de orden de $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, cabe preguntarse si *A preserva también la estructura de $(A, +, \cdot, \leq)$ (en caso de tenerla). Ahora bien, como $A \subset \mathbb{R}$ y por ende ${}^*A \subset {}^*\mathbb{R}$, nos basta ver:

- Si A es cerrado bajo $\star$ y $[r], [s] \in {}^*A$, entonces $\llbracket s \star r \in A \rrbracket \supset \llbracket r \in A \rrbracket \cap \llbracket s \in A \rrbracket \in \mathcal{F}$, luego *A es cerrado bajo $\star$, donde $\star$ es una operación de A .
- Si A es cerrado por opuestos y $[r] \in {}^*A$, entonces $\llbracket -r \in A \rrbracket = \llbracket r \in A \rrbracket \in \mathcal{F}$, luego *A es cerrado por opuestos.
- Si A es cerrado por inversos y $[r] \in {}^*A \setminus \{0\} = {}^*(A \setminus \{0\})$, entonces $\llbracket r^{-1} \in A \rrbracket \supset \llbracket r \in A \setminus \{0\} \rrbracket \in \mathcal{F}$, luego *A es cerrado por inversos.
- Si A es un anillo (cuerpo) ordenado, entonces *A también (argumentando como en 3.13).

Corolario. El conjunto ${}^*\mathbb{Z}$ es un subanillo ordenado de ${}^*\mathbb{R}$. El conjunto ${}^*\mathbb{Q}$ es un subcuerpo ordenado de ${}^*\mathbb{R}$.

Nota. La observación anterior nos invita a volver a 3.6 en vistas a la subsección anterior, esto es, a estudiar como podemos extender aplicaciones parciales de $\mathbb{R}$ (i.e., aplicaciones que no están definidas en todo $\mathbb{R}$) o, más en general, aplicaciones entre subconjuntos de potencias de $\mathbb{R}$. Para ello, recordamos primero que:

- Una relación (o correspondencia) R de A en B es un subconjunto de $A \times B$, que podemos pensar como una relación $(m+k)$ -aria en $\mathbb{R}$ si $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^k$. Definimos el dominio e imagen de R como:
 - $\text{Dom } R := \{x \in A : \exists y \in B, R(x, y)\}$.
 - $\text{Im } R := \{y \in B : \exists x \in A, R(x, y)\}$.
- Una relación funcional (o función) R de A en B es una correspondencia de A en B tal que $R(x, y), R(x, z) \Rightarrow y = z$, en cuyo caso es legítimo escribir $R(x, y)$ como $R(x) = y$. Así, y para evitar confusiones, denotaremos el conjunto R por $G(R)$, que denominaremos grafo de R .
- Una aplicación f de A en B , notada $f: A \rightarrow B$, es una función de A en B tal que $\text{Dom } f = A$.

Notación. Fijamos para el resto de la subsección $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^k$.

Observación. Se tiene:

- Si R es una relación de A en B , entonces *R es una relación de *A en *B , pues $R \subset A \times B \Rightarrow {}^*R \subset ({}^*A \times {}^*B) = {}^*(A \times B)$.
- Si R es funcional, entonces $\llbracket rRs \rrbracket \cap \llbracket rRt \rrbracket \subset \llbracket s = t \rrbracket$, luego *R es funcional.
- Si R es inyectiva, entonces $\llbracket rRs \rrbracket \cap \llbracket tRs \rrbracket \subset \llbracket r = t \rrbracket$, luego *R es inyectiva.

Proposición 3.29. Si R es una relación de A en B , entonces:

1. ${}^*(\text{Dom } R) = \text{Dom } {}^*R$.
2. ${}^*(\text{Im } R) = \text{Im } {}^*R$.

Demostración. 1) Recordemos primero de todo que:

- $[r] \in {}^*\text{Dom } R \Leftrightarrow \llbracket r \in \text{Dom } R \rrbracket \in \mathcal{F}$.
- $[r] \in \text{Dom } {}^*R \Leftrightarrow \exists [s] \in {}^*B, {}^*R([r], [s])$.

[$\subset$] Pongamos $F = \llbracket r \in \text{Dom } R \rrbracket$, de modo $\forall n \in F, r_n \in \text{Dom } R$, i.e., $\forall n \in F, \exists s_n \in B, R(r_n, s_n)$. Sea ahora $s' = (s_n \chi_F(n))_n$. Entonces, por construcción:

- $F \subset \llbracket s' \in B \rrbracket$, ergo $[s'] \in {}^*B$ al ser $F \in \mathcal{F}$.
- $F \subset \llbracket R(r, s') \rrbracket$, ergo ${}^*R([r], [s'])$ al ser $F \in \mathcal{F}$.

[$\supset$] Obvio, pues $\llbracket R(r, s) \rrbracket \subset \llbracket r \in \text{Dom } R \rrbracket$.

2) Análogamente. □

Corolario. Si f es una aplicación de A en B , entonces *f es una aplicación de *A en *B . Si f es además exhaustiva (i.e., $\text{Im } f = B$), entonces *f también.

Observación. La construcción de s' es paradigmática: $f: A \rightarrow B$ se extiende a ${}^*f: {}^*A \rightarrow {}^*B$ haciendo ${}^*f([r_n]) = [f(r_n)\chi_{\llbracket r \in A \rrbracket}(n)]$. En particular, tomando $A = \mathbb{R}^k$, recuperamos 3.6.

Demostración. Si $[r_n] \in {}^*A = {}^*\text{Dom } f$, imitando la demostración anterior (donde s_n no es otra cosa que $f(r_n)$) obtenemos que $([r_n], [f(r_n)\chi_{\llbracket r \in A \rrbracket}(n)]) \in {}^*G(f)$, i.e., ${}^*f([r_n]) = [f(r_n)\chi_{\llbracket r \in A \rrbracket}(n)]$. □

Observación. (véase 3.17) Si f es una aplicación de A en B , entonces *f es extensión de f (i.e., ${}^*f \upharpoonright A = f$).

Notación. Por tanto, podríamos identificar $f: A \rightarrow B$ con su extensión ${}^*f: {}^*A \rightarrow {}^*B$, y así lo haremos siempre que no haya ambigüedad. En particular, ${}^*+$, ${}^*\cdot$ se escriben simplemente por $+$, $\cdot$ respectivamente, y coinciden exactamente con las operaciones introducidas en 3.5. Similarmente, ${}^*|\cdot|$ se escribe $|\cdot|$.

Nota. Un caso particularmente importante de aplicación es aquel cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{N}$, y en tal caso decimos que f es una sucesión de B . Y dado que podemos identificar f con su grafo, $G(f) = \{(n, b) \in A \times B : f(n) = b\} = \{(n, f(n)) : n \in A\} = \{(n, f(n))\}_{n \in A}$, la denotaremos por $(f_n)_{n \in A}$, con $f_n = f(n)$, o simplemente $(f_n)_n$ si $A = \mathbb{N}$ ó $(f_n)_{n \geq n_0}$ si $A = \mathbb{N}_{\geq n_0}$, con $n_0 \in \mathbb{N}$ dado.

Corolario. Siempre podemos considerar términos de índices ilimitados de una sucesión real dada (véase 3.22).⁴

Nota. Siguiendo la filosofía de 3.28, la demostración de 3.29 nos sugiere que $\llbracket \cdot \rrbracket$ también preserva el cuantificador existencial y, por ende, cualquier fórmula de primer orden sobre $\mathbb{R}$. Formalizar y verificar esta intuición es el objetivo de la siguiente sección.

3.3. Principio de Transferencia

Nota. Para esta sección supondremos cierta familiaridad con la asignatura *Lògica Matemàtica* (véase anexo A).

Notación. Fijamos para el resto de la sección:

1. Un lenguaje $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ tal que
 - todo $r \in \mathbb{R}$ tiene asociado un elemento de $\mathcal{C}$, pongamos c_r .
 - toda aplicación k -aria en $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, tiene asociado un elemento de $\mathcal{F}$, pongamos F_f .
 - toda relación k -aria en $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^k$, tiene asociado un elemento de $\mathcal{R}$, pongamos R_A
2. La $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ de universo $\mathbb{R}$ tal que $(c_r)^{\mathfrak{A}} = r$, $(F_f)^{\mathfrak{A}} = f$, $(R_A)^{\mathfrak{A}} = A$.
3. La $\mathcal{L}$ -estructura ${}^*\mathfrak{A}$ de universo ${}^*\mathbb{R}$ tal que $(c_r)^{{}^*\mathfrak{A}} = \varphi(r) = [r]$, $(F_f)^{{}^*\mathfrak{A}} = {}^*f$, $(R_A)^{{}^*\mathfrak{A}} = {}^*A$.

Observación. Aunque no lo utilizaremos, es interesante notar que $\mathfrak{A}$ es una subestructura de ${}^*\mathfrak{A}$ y que φ es un homomorfismo inyectivo de $\mathfrak{A}$ en ${}^*\mathfrak{A}$.

⁴Este hecho será fundamental para nuestro estudio no estándar de las sucesiones reales.

Definición. Dada s una interpretación en $\mathfrak{R}$, definimos su extensión a ${}^*\mathfrak{R}$ como $s' : V \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ tal que $v \mapsto \varphi(s(v))$.

Lema. Sean $t \in \text{Term}(\mathcal{L})$, $(r^i)_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\{v_i\}_{i=1}^k \subset V$, s una interpretación en $\mathfrak{R}$, s' la extensión de s a ${}^*\mathfrak{R}$, $\sigma_n = s(v_1 | r_n^1) \dots (v_k | r_n^k)$, $\sigma = s'(v_1 | [r^1]) \dots (v_k | [r^k])$. Entonces $\bar{\sigma}(t) = [(\bar{\sigma}_n(t))_n]$.

Demostración. Por inducción completa sobre la complejidad del término t :

- Si $t \in \mathcal{C}$, entonces $\bar{\sigma}(t) = t^{*\mathfrak{R}} = [(t^{\mathfrak{R}})_n] = [(\bar{\sigma}_n(t))_n]$.
- Si $t = v_i$, entonces $\bar{\sigma}(t) = [r^i] = [(r_n^i)_n] = [(\bar{\sigma}_n(t))_n]$.
- Si $t \in V \setminus \{v_i\}_{i=1}^k$, pongamos $t = v$, entonces $\bar{\sigma}(t) = s'(v) = [(s(v))_n] = [(\bar{\sigma}_n(t))_n]$.
- Sea $t = f t_1 \dots t_m$, con $f \in \mathcal{F}$ de aridad m y $t_1, \dots, t_m \in \text{Term}(\mathcal{L})$ tales que $\bar{\sigma}(t_j) = [(\bar{\sigma}_n(t_j))_n]$ (HI). Entonces, notando que $f^{*\mathfrak{R}} = {}^*f^{\mathfrak{R}}$ y usando 3.6, obtenemos: $\bar{\sigma}(t) = f^{*\mathfrak{R}}(\bar{\sigma}(t_j))_{j=1}^m \stackrel{\text{HI}}{=} f^{*\mathfrak{R}}([(\bar{\sigma}_n(t_j))_n]_{j=1}^m) = [(f^{\mathfrak{R}}(\bar{\sigma}_n(t_j))_{j=1}^m)_n] = [(\bar{\sigma}_n(t))_n]$.

□

Teorema. (de Loś, 1955) Sean $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, con $L(\phi) = \{v_i\}_{i=1}^k$, $(r^i)_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y σ, σ_n como antes. Entonces ${}^*\mathfrak{R} \models \phi[\sigma]$ ssi $\{n : \mathfrak{R} \models \phi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$.

Demostración. Por inducción completa sobre la complejidad de la fórmula ϕ :

1. Si $\phi = R t_1 \dots t_m$, con $R \in \mathcal{R}$ de aridad m y $t_1, \dots, t_m \in \text{Term}(\mathcal{L})$, entonces son equivalentes:

- ${}^*\mathfrak{R} \models \phi[\sigma]$.
- $(\bar{\sigma}(t_j))_{j=1}^m \in R^{*\mathfrak{R}}$ (por definición).
- $([(\bar{\sigma}_n(t_j))_n]_{j=1}^m) \in {}^*R^{\mathfrak{R}}$ (por el lema, pues $R^{*\mathfrak{R}} = {}^*R^{\mathfrak{R}}$).
- $\{n : (\bar{\sigma}_n(t_j))_{j=1}^m \in R^{\mathfrak{R}}\} \in \mathcal{F}$ (véase 3.8).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \phi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (por definición).

2. Si $\phi = t_1 \approx t_2$, con $t_1, t_2 \in \text{Term}(\mathcal{L})$, entonces son equivalentes:

- ${}^*\mathfrak{R} \models \phi[\sigma]$.
- $\bar{\sigma}(t_1) = \bar{\sigma}(t_2)$ (por definición).
- $[(\bar{\sigma}_n(t_1))_n] = [(\bar{\sigma}_n(t_2))_n]$ (por el lema).
- $\{n : \bar{\sigma}_n(t_1) = \bar{\sigma}_n(t_2)\} \in \mathcal{F}$ (véase 3.2).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \phi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (por definición).

3. Si $\phi = \neg\psi$, con ψ cumpliendo la propiedad (HI), entonces son equivalentes:

- ${}^*\mathfrak{R} \models \phi[\sigma]$.
- ${}^*\mathfrak{R} \not\models \psi[\sigma]$ (por definición).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n]\} \notin \mathcal{F}$ (por contrarrecíproco de HI).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n]\}^c \in \mathcal{F}$ (por ser ultrafiltro).
- $\{n : \mathfrak{R} \not\models \psi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (pues obviamente $\{n : \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n]\}^c = \{n : \mathfrak{R} \not\models \psi[\sigma_n]\}$).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \phi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (por definición).

4. Si $\phi = \psi \wedge \chi$, con ψ, χ cumpliendo la propiedad (HI), entonces son equivalentes:

- ${}^*\mathfrak{R} \models \phi[\sigma]$.
- ${}^*\mathfrak{R} \models \phi[\sigma]$ y ${}^*\mathfrak{R} \models \chi[\sigma]$ (por definición).

- $\{n : \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ y $\{n : \mathfrak{R} \models \chi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (por HI).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n]\} \cap \{n : \mathfrak{R} \models \chi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (véase 2.15).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n], \mathfrak{R} \models \chi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (pues obviamente son el mismo conjunto).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \phi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (por definición).

5. Sea $\phi = \exists v\psi$, con ψ cumpliendo la propiedad (HI), y distingamos casos:

a) Si $v \notin L(\phi)$, entonces son equivalentes:

- $^*\mathfrak{R} \models \phi[\sigma]$.
- Existe $[a] \in ^*\mathbb{R}$, $^*\mathfrak{R} \models \psi[\sigma(v|[a])]$ (por definición).
- $^*\mathfrak{R} \models \psi[\sigma]$ (por A.16, pues $\sigma(v|[a]) \upharpoonright L(\phi) = \sigma \upharpoonright L(\phi)$ al ser $v \notin L(\phi)$).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (por HI).
- $\{n : \text{Existe } b \in \mathbb{R}, \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n(v|b)]\} \in \mathcal{F}$ (por A.16, pues $\sigma_n(v|b) \upharpoonright L(\phi) = \sigma_n \upharpoonright L(\phi)$ al ser $v \notin L(\phi)$).
- $\{n : \mathfrak{R} \models \phi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (por definición).

b) Si $v \in L(\phi)$, entonces son equivalentes:

- $^*\mathfrak{R} \models \phi[\sigma]$.
- Existe $[a] \in ^*\mathbb{R}$, $^*\mathfrak{R} \models \psi[\sigma(v|[a])]$ (por definición).
- Existe $[a] \in ^*\mathbb{R}$, $\{n : \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n(v|a_n)]\} \in \mathcal{F}$ (por HI).⁵
- $\{n : \text{Existe } b \in \mathbb{R}, \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n(v|b)]\} \in \mathcal{F}$ (argumentando como en 3.29).⁶
- $\{n : \mathfrak{R} \models \phi[\sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ (por definición).

□

Corolario. (Principio de Transferencia, PdT) Si $\phi \in \text{Sent}(\mathcal{L})$, entonces $^*\mathfrak{R} \models \phi$ ssi $\mathfrak{R} \models \phi$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Por LoS, $\{n : \mathfrak{R} \models \phi\} \in \mathcal{F}$. Y como $\emptyset \notin \mathcal{F}$, obtenemos $\mathfrak{R} \models \phi$.

$[\Leftarrow]$ Por hipótesis, $\{n : \mathfrak{R} \models \phi\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, luego LoS concluye.

□

Para terminar, veamos algunos ejemplos sencillos de aplicación del PdT, que será nuestra herramienta fundamental de trabajo durante la segunda parte de esta memoria.

Proposición. Sean $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, con $L(\phi) = \{v_i\}_{i=1}^k$, $A = \{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k : \mathfrak{R} \models \phi[a_1, \dots, a_n]\}$. Entonces $^*A = \{(a_1, \dots, a_k) \in ^*\mathbb{R}^k : ^*\mathfrak{R} \models \phi[a_1, \dots, a_n]\}$.

Demostración. Por hipótesis, $\mathfrak{R} \models \forall v_1 \dots \forall v_k (Av_1 \dots v_k \leftrightarrow \phi)$, luego el PdT concluye.

□

Ejemplo. $^*\mathbb{Q} = \{pq^{-1} : (p, q) \in ^*\mathbb{Z} \times ^*\mathbb{N}\}$

Observación. Aplicando PdT a la sentencia $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, obtenemos que $^*\mathbb{N}_0 = \emptyset$. Más en general:

Proposición 3.30. Los únicos hipernaturales no estándar son los ilimitados.

Demostración. Si $k \in ^*\mathbb{N}$ es limitado (i.e., si $\exists n \in \mathbb{N}, k < n$), entonces $k \in \mathbb{N}$ (aplicando PdT a $\forall m \in \mathbb{N} (m \leq n \rightarrow m = 1 \vee \dots \vee m = n)$, pensando n como una constante de $\mathfrak{R}$),⁷ ergo $^*\mathbb{N} \setminus ^*\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N}$ (pues la otra inclusión es obvia) y por ende $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = ^*\mathbb{N}_\infty$.

□

⁵Nótese que $\sigma(v|[a])$ es la interpretación que envía v_i a $[r^i]$ si $i \neq j$, con j tal que $v = v_j$, y que envía v_j a $[a]$ (y análogamente con $\sigma_n(v|a_n)$).

⁶Más explícitamente, $\{n : \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n(v|a_n)]\} \subset \{n : \text{Existe } b \in \mathbb{R}, \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n(v|b)]\}$ tomando $b = a_n$, y recíprocamente tomando $[a] = [b_n \chi_F(n)]$, con $F = \{n : \text{Existe } b \in \mathbb{R}, \mathfrak{R} \models \psi[\sigma_n(v|b)]\}$.

⁷Es decir, y más formalmente, aplicando el PdT a $\mathfrak{R} \models \forall m \in \mathbb{N} (m \leq c_n \rightarrow m = 1 \vee \dots \vee m = c_n)$, con $c_n \in \mathcal{C}$ tal que $(c_n)^{\mathfrak{R}} = n$.

Nota. Como insistiremos más adelante, la idea de pensar n (o, en fin, cualquier variable cuantificada con anterioridad a la fórmula en la que aplicamos el PdT) como una constante de $\mathfrak{R}$ será esencial en nuestro desarrollo del análisis no estándar.

Por otra parte, y como se puntualiza en [HeKe86], notamos que el PdT no se traduce en «cualquier teorema demostrable usando análisis no estándar puede demostrarse sin él», sino en «cualquier teorema demostrable usando análisis no estándar puede demostrarse en ZFC».

Por último, observamos que el PdT trivializa los resultados de las dos secciones anteriores, como por ejemplo que ${}^*\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado. Ello nos sugiere un camino alternativo a la construcción de los hiperreales mediante ultrafiltros, a saber: el enfoque original de Robinson vía el teorema de compacidad de la lógica de primer orden. Para más detalles, véase [En01, Section 2.8].

3.4. Aritmética y álgebra

Notación. Retomando las notaciones de 1.1, y dado que $\mathbb{N}_\infty$ y $\mathbb{R}_\infty$ son vacíos, escribiremos por simplicidad $\mathbb{N}_\infty$, $\mathbb{R}_\infty$ en lugar de ${}^*\mathbb{N}_\infty$, ${}^*\mathbb{R}_\infty$ respectivamente. Y como ${}^*\mathbb{N}_0 = \emptyset$, escribiremos $\mathbb{I}$ en lugar de ${}^*\mathbb{R}_0$.

Pregunta. En 1.2 vimos que $\{\mathbb{R}_\infty, \mathbb{I}, \mathbb{A}\}$ es una partición de ${}^*\mathbb{R}$, pero ¿cómo se comporta ésta respecto de la estructura algebraica de ${}^*\mathbb{R}$?

Proposición 3.31. Sean $\epsilon, \delta \in \mathbb{I}$, $a, b \in \mathbb{A}$, $H, K \in \mathbb{R}_\infty$. Entonces:

1. Suma:

- a) $\epsilon + \delta \in \mathbb{I}$.
- b) $a + \epsilon \in \mathbb{A}$.
- c) $H + \epsilon \in \mathbb{R}_\infty$.
- d) $a + b \in \mathbb{I}$.
- e) $H + a \in \mathbb{R}_\infty$.
- f) $H + K$ está indeterminado.

2. Opuestos: $\mathbb{I}, \mathbb{R}_\infty, \mathbb{A}$ son cerrados por opuestos.

3. Productos: $\mathbb{I}, \mathbb{R}_\infty, \mathbb{A}$ son cerrados por productos y, además,

- a) $\epsilon a \in \mathbb{I}$.
- b) ϵH está indeterminado.
- c) $Ha \in \mathbb{R}_\infty$.

4. Inversos:

- a) $\frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}_\infty$ si $\epsilon \neq 0$ (en caso contrario no está definido).
- b) $\frac{1}{a} \in \mathbb{A}$.
- c) $\frac{1}{H} \in \mathbb{I} \setminus \{0\}$.

Demostración. 4a, 4c se vieron (más en general, incluso) en 1.2.6, mientras que 4b es similar. 2 se vio en 1.2.4.

3) Obvio, pues $|x||y| = |xy|$ y $\mathbb{N}$ es cerrado por productos.

3a) Por hipótesis, $\forall m \in \mathbb{N}, |\epsilon||a| < \frac{1}{m}|a| < \frac{n}{m}$, luego $\forall k \in \mathbb{N}, |\epsilon a| < \frac{1}{k}$ (tomando $m = nk$).

3c) Por hipótesis, $\forall m \in \mathbb{N}, |H||a| > m|a| > \frac{m}{n}$, luego $\forall k \in \mathbb{N}, |Ha| > k$ (tomando $m = nk$).

3b) Obvio, pues, e.g., $0 \cdot H = 0 \in \mathbb{I}$ y $\epsilon \frac{1}{\epsilon} = 1 \in \mathbb{A}$ (con $\epsilon \neq 0$).⁸

⁸Más en general, $H(\frac{1}{H}\delta) = \delta, H(\frac{1}{H}a) = a, \epsilon(\frac{1}{\epsilon}K) = K, \epsilon(\frac{1}{\epsilon}a) = a$, con $\frac{1}{H}\delta, \frac{1}{H}a \in \mathbb{I}$ por 4c, 3, 3a y $\frac{1}{\epsilon}K, \frac{1}{\epsilon}a \in \mathbb{R}_\infty$ por 4a, 3, 3c.

1a) Por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}, |\epsilon| + |\delta| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$, luego $\forall m \in \mathbb{N}, |\epsilon + \delta| \leq |\epsilon| + |\delta| < \frac{1}{m}$ (tomando $n = 2m$).

1b) Por hipótesis, $\exists n \in \mathbb{N}, |a + \epsilon| \leq |a| + |\epsilon| < n + \frac{1}{n} \leq n + 1$, luego $a + \epsilon \in \mathbb{L}$. Análogamente, $|a + \epsilon| \geq ||a| - |\epsilon|| \stackrel{1,2,5}{=} |a| - |\epsilon| > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, luego $a + \epsilon \in \mathbb{A}$.

1c) Por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}, |H + \epsilon| \geq ||H| - |\epsilon|| \stackrel{1,2,5}{=} |H| - |\epsilon| > n - \frac{1}{n} \geq n - 1$, luego $\forall m \in \mathbb{N}, |H + \epsilon| > m$ (tomando $n = m + 1$).

1d) Por hipótesis, $\exists n, m \in \mathbb{N}, |a + b| \leq |a| + |b| < n + m$. Sin embargo, $a + b$ puede ser infinitesimal (e.g., tomando $b = -a + \epsilon$, que es apreciable por **1b** y **3**).

1e) Por hipótesis, $\forall m \in \mathbb{N}, |H + a| \geq ||H| - |a|| \stackrel{1,2,5}{=} |H| - |a| > m - n$, luego $\forall k \in \mathbb{N}, |H + \epsilon| > k$ tomando $m = k + n$.

1f) Tomando $K = -H + \epsilon$, $K = -H + a$ (que son de $\mathbb{R}_\infty$ por **1c**, **1e**, **2**), $K = H$, obtenemos todas las posibilidades (en el último caso, porque $H + H = 2H \in \mathbb{R}_\infty$ por **3c**). $\square$

Corolario. Las inclusiones de **1.4** son estrictas.

Demostración. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \epsilon \in \mathbb{I}^+$, entonces $a + \epsilon \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{R}$ (pues $a + \epsilon \in \mathbb{L}$ por **1b** al ser $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}$ por **1.4**, pero $a + \epsilon \in \mathbb{R} \Rightarrow \epsilon = (a + \epsilon) - a \in \mathbb{R}$!!!). Por tanto, $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{L}$ y por ende $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{A} \cap \mathbb{R} \cup \mathbb{I} \subsetneq \mathbb{L}$. $\square$

Observación. Aunque $\mathbb{I}, \mathbb{R}_\infty, \mathbb{A}$ son cerrados por productos y opuestos, sólo $\mathbb{I}$ lo es por la suma, luego sería subanillo de ${}^*\mathbb{R}$ si tuviese unidad. No obstante, $1 \in \mathbb{A}$, cuya suma cae en $\mathbb{L}$. Ahora bien, como $\mathbb{L} = \mathbb{A} \uplus \mathbb{I}$, es claro que $\mathbb{L}$ es cerrado por productos y opuestos (pues $\mathbb{I}, \mathbb{A}$ lo son), pero también por sumas (pues $\mathbb{I}$ lo es y ya dijimos que las sumas de $\mathbb{A}$ caen en $\mathbb{L}$). Por tanto, $\mathbb{L}$ es subanillo de ${}^*\mathbb{R}$.

Por otra parte, como $\mathbb{I}, \mathbb{L}$ son cerrados por la suma, cabe preguntarse si son ideales de ${}^*\mathbb{R}$. Sin embargo, como su producto con ilimitados es indeterminado o ilimitado (véase **3b** y **3c**), no es el caso. Ahora bien, como $\mathbb{I} \subset \mathbb{L}$ y por ende $(\mathbb{I}, +)$ es subgrupo de $(\mathbb{L}, +)$, tenemos que $\mathbb{I}$ sí es ideal de $\mathbb{L}$ (por **3**, **3a**, pues $\mathbb{L} = \mathbb{A} \uplus \mathbb{I}$), lo que motiva la siguiente definición.

Definición 3.32. Dados $x, y \in {}^*\mathbb{R}$, decimos que x, y son **infinitamente próximos**, y escribimos $x \simeq y$, ssi $x - y \in \mathbb{I}$. Además, definimos el **halo de** x como $\text{hal}(x) := \{y \in {}^*\mathbb{R} : y \simeq x\}$.

Observación. Aunque la observación anterior ya nos da automáticamente que $\simeq$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{L}$ (y, es más, que $\mathbb{L}/\simeq$ es un anillo), se tiene de hecho que $\simeq$ es una relación de equivalencia en todo ${}^*\mathbb{R}$ (y, por tanto, que $\text{hal}(x)$ es la clase de equivalencia de $\simeq$ asociada a $x \in {}^*\mathbb{R}$). En efecto, $\simeq$ es reflexiva por ser $0 \in \mathbb{I}$, simétrica por la conmutatividad de $({}^*\mathbb{R}, +)$ y transitiva por ser $\mathbb{I}$ cerrado por la suma. Más aún, el mismo argumento vale cambiando $\mathbb{I}$ por $\mathbb{L}$, lo que nos lleva a:

Definición. Dados $x, y \in {}^*\mathbb{R}$, decimos que x, y están **limitadamente distanciados**, y escribimos $x \sim y$, ssi $x - y \in \mathbb{L}$. Además, definimos la **galaxia de** x como $\text{gal}(x) := \{y \in {}^*\mathbb{R} : y \sim x\}$.

Nota. Como es fácil de prever, el comportamiento de $\sim$ será similar al de $\simeq$ en varios aspectos. Y dado que, de cara a la segunda parte del trabajo, estaremos más interesados en $\simeq$ que en $\sim$, obviaremos los análogos de $\sim$.

Observación 3.33. $\text{hal}(x) = \{y : y \simeq x\} = \{x + (y - x) : y - x \in \mathbb{I}\} = \{x + \epsilon : \epsilon \in \mathbb{I}\}$ y $\text{hal}(0) = \mathbb{I}$.

Corolario 3.34. (véase **3.31**) $\forall a \in \mathbb{L}, \text{hal}(a) \subset \mathbb{L}$.

Pregunta. ¿La relación $\simeq$ preserva la estructura algebraica y de orden de $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$?

Proposición 3.35. Sean $x \simeq x', y \simeq y'$ (i.e., $x' = x + \epsilon, y' = y + \delta$ con $\epsilon, \delta \in \mathbb{I}$). Entonces:

1. $x' + y' = (x + y) + (\epsilon + \delta) \simeq x + y$.
2. $-x' = -x - \epsilon \simeq -x$.
3. $cx' = c(x + \epsilon) = cx + c\epsilon \simeq cx$ si $c \in (\mathbb{R}_\infty)^c = \mathbb{L}$.

$$4. x'y' = (x + \epsilon)(y + \delta) = xy + x\delta + y\epsilon + \epsilon\delta \simeq xy \text{ si } x, y \in (\mathbb{R}_\infty)^c = \mathbb{L}.$$

$$5. \frac{1}{x'} = \frac{1}{x+\epsilon} = \frac{1}{x} - \epsilon \frac{1}{x(x+\epsilon)} \simeq \frac{1}{x} \text{ si } xx' \not\simeq 0.$$

Observación. Si $x \simeq x'$, entonces $xx' \not\simeq 0$ ssi $x \not\simeq 0$.

Demostración. Como $\{\mathbb{R}_\infty, \mathbb{I}, \mathbb{A}\}$ es una partición de ${}^*\mathbb{R}$, deducimos de 3.31 que: si $xx' \simeq 0$, entonces $x \simeq 0$ ó $x' \simeq 0$. Y como $x \simeq x'$, el recíproco también es cierto, luego $xx' \notin \mathbb{I}$ ssi $x, x' \notin \mathbb{I}$ (por contrarrecíproco), donde $x \notin \mathbb{I}$ ssi $x' \notin \mathbb{I}$ al ser $x \simeq x'$ (por contrarrecíproco). $\square$

Corolario. La relación $\simeq$ es una congruencia en $\mathbb{L}$.

Nota. Aunque no podemos esperar, como sucedía con $\equiv$, que $\simeq$ preserve cualquier aplicación f , sí podemos preguntarnos qué significa para f que se cumpla $x \simeq x' \Rightarrow f(x) \simeq f(x')$, i.e., que las imágenes de puntos infinitamente próximos sean infinitamente próximas. Ahora bien, cualquier matemático entrenado reconocerá en tal formulación la noción de continuidad uniforme, y así lo confirmaremos en Capítulo 6.

Observación. Dados $x \in {}^*\mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{I}, a \in \mathbb{L}$, se cumple:

1. $0 \leq x \leq \epsilon \Rightarrow x \in \mathbb{I}$.
2. $0 \leq x \leq a \Rightarrow x \in \mathbb{L}$.

Demostración. Obvio de 1.2.5 y de que $\{\mathbb{R}_\infty, \mathbb{I}, \mathbb{A}\}$ sea una partición de ${}^*\mathbb{R}$. $\square$

Lema 3.36. Sean $x, y, z \in {}^*\mathbb{R}$ tales que $x \leq y \leq z$, $x \simeq z$. Entonces $y \simeq x$.

Demostración. Por hipótesis, $0 \leq y - x \leq z - x \simeq 0$, luego la observación anterior concluye. $\square$

Observación. Supongamos que $x' \simeq x < y \simeq y'$. Entonces $x \simeq y$ (o equivalentemente, $x' \simeq y'$) si $y < x'$ (por 3.36). Y por contrarrecíproco, $y \geq x'$ si $x \not\simeq y$ (o equivalentemente, $x' \not\simeq y'$). Y como $y \geq x' \geq y' \Rightarrow x' \simeq y'$ (por 3.36), hemos probado que:

Proposición 3.37. Sean $x', x, y, y' \in {}^*\mathbb{R}$ tales que $x' \simeq x < y \simeq y'$. Entonces $x' < y'$ si $y' \not\simeq x'$ (o, equivalentemente, si $y \not\simeq x$).

Nota. La proposición vale trivialmente igual para $\leq$, pues si $x = y$ nunca se tiene $y \not\simeq x$.

Observación. Si $r, s \in \mathbb{R}$ distintos, entonces su diferencia cae en $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}$ y, en particular, $r \not\simeq s$, luego:

Corolario 3.38. Sean $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r \neq s$. Entonces:

1. $r < s \Rightarrow \forall a \in \text{hal}(r), \forall b \in \text{hal}(s), a < b$ (por 3.37).
2. $\exists a \in \text{hal}(r), \exists b \in \text{hal}(s), b \leq a \Rightarrow s \leq r$ (por contrarrecíproco).
3. $s \simeq b \leq r \Rightarrow s \leq r$ (tomando $a = r$).

Ejemplo 3.39. $x \simeq y \Rightarrow |x| \simeq |y|$.

Demostración. Pongamos $y = x + \epsilon$ (y por ende $x = y - \epsilon$), con $\epsilon \in \mathbb{I}$. Entonces $|y| \leq |x| + |\epsilon| \leq |y| + 2|\epsilon|$, ergo $|y| \simeq |x| + |\epsilon| \simeq |x|$ por 3.36. $\square$

Nota. Una de las propiedades definitorias de $\mathbb{R}$ que no podemos transferir a ${}^*\mathbb{R}$ es la propiedad del supremo, pues involucra cuantificadores sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ahora bien, ello no significa que no podamos obtener consecuencias de ella, e.g., en la definición de limitado (que sugiere fuertemente su uso).

Teorema 3.40. $\forall a \in \mathbb{L}, \exists! b \in \mathbb{R}, b \simeq a$.

Demostración. $[\exists]$ Recordemos, pues, que $a \in \mathbb{L} \Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{R}, r < a < s$, de manera que $\mathbb{R}_{<a} \neq \emptyset$ acotado superiormente por s y, por ende, $\exists b = \sup \mathbb{R}_{<a} \in \mathbb{R}$. Entonces $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, b - \epsilon < a \leq b + \epsilon$,⁹ luego $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, -\epsilon < a - b \leq \epsilon$, i.e., $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, |a - b| \leq \epsilon$. Por tanto, $a - b \in \mathbb{I}$, i.e., $a \simeq b$.
 $[!]$ Si $\exists c \in \mathbb{R}, a \simeq c$, entonces $c \simeq b$ por transitividad, luego $c - b \in \mathbb{R} \cap \mathbb{I} = \{0\}$ y por ende $c = b$. $\square$

Definición 3.41. Dado $a \in \mathbb{L}$, llamaremos **sombra de a** al único real de su halo, y lo denotaremos por $\text{sh } a$ (de *shadow*).

Nota. Por 3.40, podemos descomponer cualquier $a \in \mathbb{L}$ de forma única como suma de un real y un infinitesimal, a saber: $a = \text{sh } a + \epsilon$, con $\epsilon = a - \text{sh } a \in \mathbb{I}$. De ahí que la sombra de a sea también conocida como parte estándar de a (por analogía con la parte real e imaginaria del análisis complejo), denotada $\text{st}(a)$.

La introducción del término *shadow* al inglés se debe a Goldblatt, y como se explica en [Go98, Section 5.4], proviene a su vez del *ombre* de la escuela francesa de análisis no estándar fundada por George Reeb, donde se denota por $^o a$. Dicha escuela es también responsable del término halo, siendo la denominación y notación de Robinson *monad* y $\mu(a)$.

Observación 3.42. Se tiene:

1. Por 3.40, la aplicación $\text{sh}: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}$ que envía cada limitado a su sombra está bien definida.
2. Por definición de sombra, $\forall a \in \mathbb{L}, \text{hal}(a) \cap \mathbb{R} = \{\text{sh } a\}$.
3. Por tanto, dados $a \in \mathbb{L}, r \in \mathbb{R}$, se cumple: $r \simeq a \Leftrightarrow r = \text{sh } a$.
4. En particular, $\forall r \in \mathbb{R}, \text{sh } r = r$ (i.e., $\forall r \in \mathbb{R}, \text{hal}(r) \cap \mathbb{R} = \{r\}$).
5. Así, sh es exhaustiva (pues $\mathbb{R} \subset \mathbb{L}$), i.e., $\text{Im sh} = \mathbb{R}$.
6. Más aún, sh es un homomorfismo de anillos por 3, pues $\text{sh}(a) \star \text{sh}(b) \simeq a \star b$ por 3.35.
7. Por tanto, $\mathbb{L} / \ker(\text{sh}) \cong \text{Im sh} = \mathbb{R}$ por el teorema de isomorfía, con $\ker(\text{sh}) = \mathbb{I}$ por 3.
8. En particular, $\mathbb{I}$ es un ideal maximal de $\mathbb{L}$ y $\mathbb{R} \cong \bigcup_{a \in \mathbb{L}} \text{hal}(a) \stackrel{a \simeq \text{sh } a}{=} \bigcup_{a \in \mathbb{L}} \text{hal}(\text{sh } a) \stackrel{\text{Im sh} = \mathbb{R}}{=} \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \text{hal}(r)$.
9. Por otra parte, el mismo argumento de 6 vale para cualquier $f: A^n \rightarrow \mathbb{R}$ que preserve $\simeq$, pues en tal caso ${}^*f(a_i)_{i=1}^n \simeq {}^*f(\text{sh } a_i)_{i=1}^n$ y, como $\text{Im}({}^*f \upharpoonright \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, 3 concluye.
10. Finalmente, sh preserva el orden por 3.38.2 (con $r = \text{sh } a, s = \text{sh } b$, y discutiendo aparte el caso $r = s$).

⁹Recordatorio: 1) Por la minimalidad del supremo, $b - \epsilon < b \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}_{<a}, b - \epsilon < t \leq b$.

2) Como el supremo es cota, $\forall t \in \mathbb{R}_{<a}, t \leq b$. Pero $b + \epsilon > b$, luego $b + \epsilon \notin \mathbb{R}_{<a}$ por absurdo.

Parte II

Análisis

Capítulo 4

Sucesiones

4.1. Extendiendo definiciones

4.1.1. Convergencia

Definición. Decimos que $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (o, si queremos ser más explícitos, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$) **tiene límite (en $\mathbb{R}$)**, o que **converge (en $\mathbb{R}$)**, ssi $\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{>n_\epsilon}, |s_n - l| < \epsilon$, y en tal caso decimos que s tiene límite $l \in \mathbb{R}$ (o que s converge a $l \in \mathbb{R}$) y escribimos $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = l$ (ó $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$). En caso contrario, decimos que s **diverge (en $\mathbb{R}$)**.

Notación. Por simplicidad, $\lim_n s_n = l$ y $s_n \xrightarrow{n} l$ significarán por defecto $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = l$ y $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$. Y siempre que no haya peligro de confusión (e.g., cuando la sucesión esté indexada por un único subíndice), escribiremos simplemente $\lim s_n = l$ y $s_n \rightarrow l$.

Nota. La gracia de haber introducido rigurosamente las nociones de infinitesimal e ilimitado es que el análisis ha nacido y se ha forjado con dichas ideas en mente. De ahí que resulte completamente natural conjeturar que una sucesión converge a l ssi en el infinito es infinitamente próxima a l , i.e.:

Proposición 4.1. Sea $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, l \in \mathbb{R}$. Se tiene: $s_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \simeq l$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Fijado $N \in \mathbb{N}_\infty$, sabemos que $s_N \simeq l \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, |s_N - l| < \epsilon$. Ahora bien, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \in \mathbb{N}_{>n_\epsilon}, |s_m - l| < \epsilon$$

y por PdT (pensando l, ϵ, n_ϵ como constantes de $\mathfrak{R}$, fijándolos, véase 3.30)

$$\forall m \in {}^*\mathbb{N}_{>n_\epsilon}, |s_m - l| < \epsilon$$

En particular, $|s_N - l| < \epsilon$ (pues $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_\infty \subset {}^*\mathbb{N}_{>k}$). Y por la arbitrariedad de ϵ , hemos terminado.¹

$[\Leftarrow]$ Fijado $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, hemos de ver que $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}_{>n}, |s_m - l| < \epsilon$ o, equivalentemente (por PdT), que $\exists n \in {}^*\mathbb{N}, \forall m \in {}^*\mathbb{N}_{>n}, |s_m - l| < \epsilon$. Ahora bien, $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, {}^*\mathbb{N}_{>N} \subset \mathbb{N}_\infty$, luego tomando $n \in \mathbb{N}_\infty$ tenemos por hipótesis que $\forall m \in {}^*\mathbb{N}_{>n}, |s_m - l| < \epsilon$. $\square$

Definición 4.2. Llamamos **bola abierta en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ de centro $c \in \mathbb{R}$ y radio $r \in \mathbb{R}_{>0}$** al conjunto $B_r(c) := \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\} = (c - r, c + r)$.

Observación. Otra manera de pensar $|s_n - l| < \epsilon$ es como $s_n \in B_\epsilon(l)$, que podemos traducir a nuestro contexto NSA (de *Non-Standard Analysis*) como $s_n \in \text{hal}(l)$ si la pertenencia anterior es

¹Puesto que, obviamente, es lo mismo demostrar $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, |s_N - l| < \epsilon$ que $|s_N - l| < \epsilon$ para un $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ arbitrario fijado (y análogamente con el existencial), en adelante seremos mucho más directos a la hora de aplicar PdT, y a menudo pasaremos directamente de fórmulas del tipo $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}_{>n_\epsilon}, |s_m - l| < \epsilon$ a fórmulas del tipo $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall m \in {}^*\mathbb{N}_{>n_\epsilon}, |s_m - l| < \epsilon$ (donde dicho paso consiste esencialmente en fijar las variables de la primera parte de la fórmula como constantes de $\mathfrak{R}$, de modo que la segunda parte es una sentencia a la que podemos aplicar PdT).

para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. De hecho, $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \simeq l \Leftrightarrow \{s_N\}_{N \in \mathbb{N}_\infty} \subset \text{hal}(l)$, donde podríamos pensar $(s_N)_{N \in \mathbb{N}_\infty}$ como la cola «en el infinito» de s en nuestro enfoque NSA. Así, $s_n \rightarrow l$ ssi dicha cola vive en un «entorno infinitesimal» de l (i.e., en el halo de l).

Nota. Como ya explicamos en la Introducción, podemos entender la proposición anterior como una traducción de nuestra definición SA de convergencia a lo que bien podría ser una definición NSA de convergencia. La gracia de estas traducciones, y de manera similar a como sucede con el análisis complejo, es que nos permiten dar demostraciones alternativas de resultados SA, como por ejemplo:

Corolario 4.3. (Unicidad del límite) Si $s \in \mathbb{R}^N$ converge a $l, l' \in \mathbb{R}$, entonces $l = l'$.

Demostración. (NSA) Dado $N \in \mathbb{N}_\infty$, tenemos por hipótesis que $l \simeq s_N \simeq l'$, luego $l = \text{sh } s_N = l'$ por 3.42.3. $\square$

Demostración. (SA) Por hipótesis, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{>n_1}, |s_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{>n_2}, |s_n - l'| < \frac{\epsilon}{2}$, luego tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tenemos que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{>n_0}, |l - l'| = |l - s_n + s_n - l'| \leq |l - s_n| + |s_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, ergo $|l - l'| = 0$ y por ende $l = l'$. $\square$

Nota. La simplicidad de la definición NSA de convergencia nos facilita considerablemente jugar con ella. Por ejemplo, ¿qué significará en SA que $\exists N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \simeq l$? Intuitivamente, que l es «un límite» de s , pues no podemos asegurar que sea su (único) límite. Por otra parte, si $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \simeq l$, tenemos en particular que $\forall N, M \in \mathbb{N}_\infty, s_N \simeq s_M$ y que $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \in \mathbb{L}$ (por 3.34), lo que intuitivamente nos dice que s es de Cauchy y acotada respectivamente. ¿Y si $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \in \mathbb{L}^c = \mathbb{R}_\infty$? Esto sería como decir que s «converge a $\mathbb{R}_\infty$ ». Etc. Abordemos, pues, todas estas ideas, una por una:

4.1.2. Divergencia a infinito

Definición. Dado $s \in \mathbb{R}^N$, decimos que s **diverge a** $+\infty$, y escribimos $s_n \rightarrow +\infty$, ssi $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, s_n \in \mathbb{R}_{>m}$, y análogamente con $-\infty$ (cambiando $\mathbb{R}_{>m}$ por $\mathbb{R}_{<m}$). Además, decimos que s **diverge a** ∞ , y escribimos $s_n \rightarrow \infty$, ssi $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, |s_n| \in \mathbb{R}_{>m}$.

Nota. La idea es clara: $s \rightarrow +\infty$ ssi en el infinito, s es un ilimitado positivo. Más formalmente:

Proposición 4.4. Dado $s \in \mathbb{R}^N$, se tiene: $s_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \in \mathbb{R}_\infty^+$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Por hipótesis, $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, s_n \in \mathbb{R}_{>m}$, luego $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in {}^*\mathbb{N}_{\geq n_0}, s_n \in {}^*\mathbb{R}_{>m}$ por PdT y, en particular (pues $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_\infty \subset {}^*\mathbb{N}_{\geq k}$), $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_\infty, s_n \in {}^*\mathbb{R}_{>m}$, ergo $\forall n \in \mathbb{N}_\infty, s_n \in \mathbb{R}_\infty^+$.

$[\Leftarrow]$ Fijado $m \in \mathbb{N}$, hemos de ver que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, s_n \in \mathbb{R}_{>m}$ o, equivalentemente (por PdT), que $\exists n_0 \in {}^*\mathbb{N}, \forall n \in {}^*\mathbb{N}_{\geq n_0}, s_n \in {}^*\mathbb{R}_{>m}$. Ahora bien, $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, {}^*\mathbb{N}_{\geq N} \subset \mathbb{N}_\infty$, luego tomando $n_0 \in \mathbb{N}_\infty$ cualquiera tenemos por hipótesis que $\forall n \in {}^*\mathbb{N}_{\geq n_0}, s_n \in \mathbb{R}_{>m}$. $\square$

Observación. Por analogía, dado $s \in \mathbb{R}^N$, es fácil demostrar que:

- $s_n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_\infty, s_n \in \mathbb{R}_\infty^-$.
- $s_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_\infty, s_n \in \mathbb{R}_\infty$.

4.1.3. Principio de desbordamiento

Observación. Nótese que la demostración de 4.4 es calcada a la de 4.1. De hecho, el mismo argumento demuestra que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, R(s_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_\infty, {}^*R(s_n)$$

con $R \subset \mathbb{R}$ una relación unaria en $\mathbb{R}$. Más aún, podemos cambiar n y $R(s_n)$ por $n_1, n_2, \dots, n_k$ y $R(s_{n_i})_{i=1}^k$ respectivamente, con $k \in \mathbb{N}$ y $R \subset \mathbb{R}^k$ una relación k -aria en $\mathbb{R}$. Más en general todavía, y con las notaciones de la sección 3.3:

Proposición 4.5. (Principio de overflow o desbordamiento para $\mathfrak{R}$) Sea $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, con $L(\phi) = \{n_i\}_{i=1}^k$. Entonces $\mathfrak{R} \models \exists n_0 (n_0 \in \mathbb{N}) \forall n_1 (n_1 \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) \dots \forall n_k (n_k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) \phi$ ssi ${}^*\mathfrak{R} \models \forall n_1 (n_1 \in \mathbb{N}_\infty) \dots \forall n_k (n_k \in \mathbb{N}_\infty) \phi$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Por hipótesis, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{R} \models \forall n_1 (n_1 \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) \dots \forall n_k (n_k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) \phi$. Y por PdT, ${}^*\mathfrak{R} \models \forall n_1 (n_1 \in {}^*\mathbb{N}_{\geq n_0}) \dots \forall n_k (n_k \in {}^*\mathbb{N}_{\geq n_0}) \phi$. Pero como $n_0 \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathbb{N}_\infty \subset {}^*\mathbb{N}_{\geq n_0}$, luego hemos terminado.

$[\Leftarrow]$ Dado $n_0 \in \mathbb{N}_\infty$ cualquiera, tenemos que ${}^*\mathbb{N}_{\geq n_0} \subset \mathbb{N}_\infty$, luego, por hipótesis, ${}^*\mathfrak{R} \models \exists n_0 (n_0 \in {}^*\mathbb{N}) \forall n_1 (n_1 \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) \dots \forall n_k (n_k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}) \phi$. Por tanto, PdT concluye. $\square$

Nota. El término *overflow* proviene de [Go98], si bien el término *overspill* también es habitual en la literatura, cuando no se refieren a él simplemente como a uno de los varios principios de permanencia (denominación de Robinson) o principios de Cauchy (denominación de Luxemburg), véase [HuLo85, Chapter 2, Theorem 7.1], que actúan como diccionario entre ciertas propiedades de $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$. Además, el resultado es bastante más general (incluso restringiéndonos a $\mathfrak{R}$), pudiendo cambiar $\mathbb{N}$ por cualquier conjunto interno de ${}^*\mathbb{R}$, algo que no vamos a tratar en este TFG. Notamos por último que existen diversas formulaciones del mismo, aunque todas ellas comparten la misma filosofía: si una propiedad se cumple para valores mayores que una constante, entonces se cumple para valores ilimitados.

4.1.4. Acotación

Definición. Decimos que $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ está **acotada inferiormente (en $\mathbb{R}$)** ssi $\exists k \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, s_n \geq k$, y **superiormente** ssi $\exists k \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, s_n \leq k$. Además, decimos simplemente que s está **acotada (en $\mathbb{R}$)** ssi es acotada inferior y superiormente (en $\mathbb{R}$).

Nota. La idea es clara: s es acotada inferiormente ssi ninguno de sus términos es un ilimitado negativo.

Proposición 4.6. Sea $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Se tiene: s es acotada inferiormente en $\mathbb{R}$ ssi $\forall n \in {}^*\mathbb{N}, s_n \in \mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^+$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Fijado $n \in {}^*\mathbb{N}$, o bien $s_n \in \mathbb{L}$, o bien, en caso contrario, $s_n \in \mathbb{L}^c = \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R}_\infty^+ \cup \mathbb{R}_\infty^-$. Ahora bien, por hipótesis $\exists k \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, s_m \geq k$, ergo $\exists k \in \mathbb{R}, \forall m \in {}^*\mathbb{N}, s_m \geq k$ por PdT y, en particular, $s_n \notin \mathbb{R}_\infty^-$.

$[\Leftarrow]$ Por PdT, nos basta ver que $\exists k \in {}^*\mathbb{R}, \forall n \in {}^*\mathbb{N}, s_n \geq k$. Ahora bien, $\forall n \in {}^*\mathbb{N}, s_n \in \mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^+$ por hipótesis, luego tomando $k \in \mathbb{R}_\infty^-$ cualquiera hemos terminado (véase 1.2.1). $\square$

Observación. Por simetría, s es acotada superiormente en $\mathbb{R}$ ssi $\forall n \in {}^*\mathbb{N}, s_n \in \mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^-$.

Corolario. Sea $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Se tiene: s es acotada en $\mathbb{R}$ ssi $\forall n \in {}^*\mathbb{N}, s_n \in \mathbb{L}$.

Demostración. Usando los dos resultados anteriores, tenemos por hipótesis que $\forall n \in {}^*\mathbb{N}, s_n \in (\mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^+) \cap (\mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^-)$. Y aplicando la distributiva dos veces, obtenemos que $(\mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^+) \cap (\mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^-) = ((\mathbb{L} \cap (\mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^-)) \cup (\mathbb{R}_\infty^+ \cap (\mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^-))) = (\mathbb{L} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{L} \cap \mathbb{R}_\infty^-) \cup (\mathbb{R}_\infty^+ \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{R}_\infty^+ \cap \mathbb{R}_\infty^-) = \mathbb{L}$. $\square$

Observación 4.7. Como $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{L}$, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}_\infty, s_n \in A \Rightarrow \forall n \in {}^*\mathbb{N}, s_n \in \mathbb{L} \cup A$ al ser ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \mathbb{N}_\infty$, donde el recíproco es trivial si $\mathbb{L} \subset A$. Así, tomando $A \in \{\mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^+, \mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^-, \mathbb{L}\}$, obtenemos condiciones equivalentes de los resultados anteriores. Por otra parte, notamos que podemos reformular $\forall n \in \mathbb{N}_\infty, s_n \in \mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^+$ como $\nexists n \in \mathbb{N}_\infty, s_n \in (\mathbb{L} \cup \mathbb{R}_\infty^+)^c = \mathbb{R}_\infty^-$.

Nota. Resultados análogos pueden obtenerse para conjuntos. Por ejemplo:

Proposición 4.8. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es acotado (en $\mathbb{R}$) ssi ${}^*A \subset \mathbb{L}$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Por hipótesis, $\exists r \in \mathbb{R}, \forall a \in A, |a| \leq r$. Y por PdT, $\exists r \in \mathbb{R}, \forall a \in {}^*A, |a| \leq r$, i.e., ${}^*A \subset \mathbb{L}$.

$[\Leftarrow]$ (Por contrarrecíproco) Si $\forall r \in \mathbb{R}, \exists a \in A, |a| > r$, entonces $\forall r \in {}^*\mathbb{R}, \exists a \in {}^*A, |a| > r$ por PdT. En particular (tomando $r \in \mathbb{R}_\infty$), $\exists a \in {}^*A \setminus \mathbb{L}$. $\square$

Nota. A continuación vamos a dar varias caracterizaciones del ínfimo de un conjunto. La idea es la siguiente: c es cota inferior de A ssi $\forall a \in A, c \leq a$ ssi $\forall a \in {}^*A, c \leq a$ (por PdT) ssi c es cota inferior de *A , luego lo interesante será traducir el hecho de ser la mayor de todas ellas. Ahora bien, intuimos que en tal caso, y sólo en tal caso, c estará infinitamente próximo a algún elemento a de *A . Y como $a + k\epsilon$ con $k \in \mathbb{Z}, \epsilon \in \mathbb{I}^+$ es infinitamente próximo a a , ello será equivalente a que c sea infinitamente próximo a algún elemento que no es cota inferior de *A .

Proposición 4.9. Dado $A \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, son equivalentes:

1. c es la mayor cota inferior real de A .
2. c es cota inferior de A y $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists a \in A, a < c + \epsilon$.²
3. c es cota inferior de *A y $\exists x \in \text{hal}(c)$ que no es cota inferior de *A .
4. c es cota inferior de *A y $\exists a \in \text{hal}(c) \cap {}^*A$.
5. c es la mayor cota inferior de *A .

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Dado $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tenemos que $c < c + \epsilon$, luego $c + \epsilon$ no es cota inferior de A por hipótesis, i.e., existe $a \in A$ tal que $a < c + \epsilon$.

$[2 \Rightarrow 3]$ Por PdT, c es cota inferior de *A y $\forall \epsilon \in {}^*\mathbb{R}_{>0}, \exists a \in {}^*A, a < c + \epsilon$. En particular (tomando $\epsilon \in \mathbb{I}^+$), $\exists a \in {}^*A, a < c + \epsilon$, i.e., $\exists x = c + \epsilon \in \text{hal}(c)$ que no es cota inferior de *A .

$[3 \Rightarrow 4]$ Como x no es cota inferior de *A pero c sí, tenemos que $\exists a \in {}^*A, c \leq a < x \simeq c$ (pues $x \in \text{hal}(c)$ por hipótesis), luego $a \simeq c$ por 3.36.

$[4 \Rightarrow 5]$ (Por absurdo) Si no, entonces $\exists c' \in {}^*\mathbb{R}_{>c}$ cota inferior de *A , luego $\exists d \in \mathbb{R}_{>c}$ cota inferior de *A por PdT. En particular, $d \leq a \simeq c$, ergo $d \leq c$ por 3.38.3, en contra de $d > c$.

$[5 \Rightarrow 1]$ Por PdT, c es cota inferior de A , luego nos basta ver que es la mayor real de todas ellas. Sea, pues, $c' \in \mathbb{R}$ cota inferior de A , que es cota inferior de *A por PdT. Entonces $c' \leq c$ por hipótesis. $\square$

Definición. Dado $A \subset \mathbb{R}$, decimos que A **tiene ínfimo (en $\mathbb{R}$)** ssi existe $c \in \mathbb{R}$ cumpliendo cualquiera de las condiciones anteriores, y en tal caso decimos que c es ínfimo de A y lo denotamos por $\inf A$. Si además $\inf A \in A$, decimos que es **mínimo de A** y lo denotamos por $\min A$.

Nota. Cambiando mayor por menor e inferior por superior, se obtiene una versión análoga para el supremo de A .

4.2. Completitud

4.2.1. Cauchy

Definición. Decimos que $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy (en $\mathbb{R}$)** ssi $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, |s_m - s_n| < \epsilon$.

Proposición 4.10. Sea $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Se tiene: s es de Cauchy en $\mathbb{R}$ ssi $\forall n, m \in \mathbb{N}_{\infty}, s_n \simeq s_m$.

Demostración. Caso particular de 4.5. $\square$

Lema 4.11. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Demostración. (NSA) Por hipótesis, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, |s_m - s_n| < 1$, luego $|s_N| = |(s_N - s_{n_0}) + s_{n_0}| \leq |s_N - s_{n_0}| + |s_{n_0}| < 1 + |s_{n_0}| \in \mathbb{R}$ si $N \in \mathbb{N}_{\infty}$. Por tanto, $\forall N \in \mathbb{N}_{\infty}, s_N \in \mathbb{L}$. $\square$

Demostración. (SA) Por hipótesis, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, |s_n - s_m| < 1$, luego $|s_n| \leq |s_n - s_{n_0}| + |s_{n_0}| < 1 + |s_{n_0}|$ si $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. Por tanto, $c = \max\{|s_1|, \dots, |s_{n_0-1}|, 1 + |s_{n_0}|\}$ es cota de s . $\square$

²Más compactamente, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists a \in A, 0 \leq a - c < \epsilon$.

Nota. En esta ocasión, nuestro argumento NSA se basa en una definición SA (o, si se quiere, en la traducción de una definición NSA a una SA vía 4.5). Invitamos al lector a dar un argumento puramente NSA para convencerse de que, en ocasiones, es recomendable tener presente ambas visiones del análisis, y que nuestro objetivo no es tanto suplantarlo lo establecido como complementarlo, abriendo nuevos caminos y perspectivas. El siguiente resultado es un ejemplo más ilustrativo de ello.

Proposición 4.12. (*Criterio de convergencia de Cauchy*) Sea $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Se tiene: s converge en $\mathbb{R}$ ssi s es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Demostración. (NSA) $[\Rightarrow]$ Dados $n, m \in \mathbb{N}_{\infty}$ cualesquiera, tenemos que $\exists l \in \mathbb{R}, s_n \simeq l \simeq s_m$ por hipótesis.

$[\Leftarrow]$ Dado $m \in \mathbb{N}_{\infty}$, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}_{\infty}, s_n \simeq s_m$ por hipótesis y que $s_m \in \mathbb{L}$ por el lema. En particular, s_m tiene sombra y $\forall n \in \mathbb{N}_{\infty}, s_n \simeq s_m \simeq \text{sh } s_m$, luego $\lim_n s_n = \text{sh } s_m$. $\square$

Demostración. (SA) $[\Rightarrow]$ Por hipótesis, $\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_{\epsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_{\epsilon}}, |s_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$, luego $|s_n - s_m| = |s_n - l + l - s_m| \leq |s_n - l| + |l - s_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ si $n, m \geq n_{\epsilon}$ para cualquiera que sea $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

$[\Leftarrow]$ Esta implicación es equivalente a la completitud de $\mathbb{R}$, luego su prueba depende de como hayamos caracterizado $\mathbb{R}$ (véase [CI12]). Por ejemplo, y siguiendo el planteamiento de [Or02], está propiedad es cierta por definición de $\mathbb{R}$. $\square$

Observación. Para probar 4.12, el único resultado (que no traducción) que hemos utilizado es 3.40, que, por otra parte, se deducía directamente de la propiedad del supremo de $\mathbb{R}$. Por tanto, puesto que en la asignatura *Anàlisi Matemàtica* deducimos dicha propiedad de 4.12 (véase [Or02, Teorema 1.11]), tenemos de hecho que las tres propiedades son equivalentes y que, por ende, cualquiera de ellas caracteriza la completitud de $\mathbb{R}$. De ahí que 4.12 también se conozca como *Cauchy completitud*, y la propiedad del supremo como *Dedekind completitud*.

Así, y desde un punto de vista SA, lo que acabamos de dar es una demostración particularmente simple (modulo 3.40) de que la Dedekind completitud implica la Cauchy completitud. Una demostración SA de este hecho puede encontrarse en [Or02, Exercicis 13, 14 de la secció I.2] (vía convergencia monótona), [Ru80, Theorem 3.11] (vía intervalos encajados) y [CI12, Theorem 1.22], [Pe08, Teorema 7.29] (vía Bolzano-Weierstrass).

4.2.2. Dedekind

La observación anterior nos sugiere que podemos deducir directamente de 3.40 la Dedekind completitud de $\mathbb{R}$.³ Pensemos en ello:

Nota. (Idea) Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente, queremos ver que el conjunto $C = \{c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq c\}$ de cotas superiores de A tiene mínimo en $\mathbb{R}$. Y para ello, discretizamos C usando $A_n = \{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} \in C\}$, que podemos cortar en un cierto punto para poder aplicar el principio del primer elemento (pues dado $a_0 \in A$, tenemos que na_0 es cota inferior de A_n por construcción). Obtenemos así $(\frac{\min A_n}{n})_n$ una sucesión racional de «menores cotas superiores de A de la forma $\frac{k}{n}$ », cuyo límite será, conjeturamos, $\sup A$.

Proposición. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Entonces A tiene supremo en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sean $A \subset \mathbb{R}$ no vacío, $c \in \mathbb{R}$ una cota superior de A y $A_n = \{k \in \mathbb{Z} : \forall a \in A, a \leq \frac{k}{n}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A, \exists m \in \mathbb{N}, an \leq cn \leq m$ por la arquimedianidad de $\mathbb{R}$, de modo que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \neq \emptyset$. Por otra parte, como $A \neq \emptyset$, podemos tomar $a_0 \in A$, y claramente $A_n = \{k \in \mathbb{Z}_{\geq na_0} : \forall a \in A, an \leq k\}$, luego $\min A_n \in \mathbb{Z}_{\geq na_0}$ por el principio del primer elemento y podemos considerar la sucesión $(s_n)_n$ con $s_n = \min A_n$.

³Vista la observación anterior, uno podría cuestionar el interés de dicha demostración. Sin embargo, si uno quisiese elaborar un curso de análisis no estándar análogo a [Or02], resultaría natural caracterizar la completitud de $\mathbb{R}$ vía 3.40 y preguntarse entonces si no sería más sencillo demostrar la Dedekind completitud directamente en lugar de a través de la Cauchy completitud.

Fijemos ahora $N \in \mathbb{N}_\infty$ y veamos que $\frac{s_N}{N} \in \mathbb{L}$ por absurdo. Supongamos, pues, que $\frac{s_N}{N} \in \mathbb{L}^c = \mathbb{R}_\infty$ (HA). Entonces, como $\forall n \in {}^*\mathbb{N}, s_n \in {}^*\mathbb{Z}_{\geq na_0}$ por PdT, tenemos que $\frac{s_N}{N} \geq \frac{Na_0}{N} = a_0$ y por ende $\frac{s_N}{N} \notin \mathbb{R}_\infty^-$, luego $\frac{s_N}{N} \in \mathbb{R}_\infty^+$ por (HA). Por otra parte, se sigue de la minimalidad de s_N y PdT que $\exists a \in {}^*A, \frac{s_N-1}{N} < a$, con $\frac{s_N-1}{N} = \frac{s_N}{N} - \frac{1}{N} \in \mathbb{R}_\infty^+$, luego $a \in \mathbb{R}_\infty^+$, en contra de $\forall a \in {}^*A, a \leq c$ (por PdT).

Por tanto, podemos considerar $l = \text{sh } \frac{s_N}{N} \in \mathbb{R}$. Ahora bien, como $\frac{s_N}{N} - \frac{1}{N}$ no es cota superior de *A y $\frac{s_N}{N} - \frac{1}{N} \simeq \frac{s_N}{N} \simeq l$, nos basta ver (por 4.9.3) que l es cota superior de A para concluir $l = \sup A$. En efecto, dado $a \in A$ tenemos $a \leq \frac{s_N}{N}$ por construcción, luego $a \leq l$ por 3.38.3. $\square$

4.3. Propiedades límites

Definición 4.13. Si $s, t \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, entonces $s \leq t \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, s_n \leq t_n$.

Observación. (véase 4.5) Si $s, t \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, entonces $s \leq t \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_\infty, s_n \leq t_n$.

Nota. La relación $\leq$ es claramente reflexiva, transitiva y no total. Aunque no es antisimétrica, dado que sólo nos interesara el comportamiento límite de las sucesiones (i.e., su comportamiento para índices arbitrariamente grandes), podemos pensarla como tal.

Pregunta. ¿Cómo se comportan los límites respecto de $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \oplus, \odot, \leq)$?

Proposición 4.14. (Álgebra de límites) Si $\lim_n s_n = l \in \mathbb{R}$ y $\lim_n t_n = l' \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\lim_n (s_n \pm t_n) = l \pm l'$.
2. $\lim_n (s_n t_n) = ll'$.
3. $\lim_n (\frac{1}{s_n}) = \frac{1}{l}$ si $l \neq 0$.

Demostración. (NSA) Trivial de 3.35 (en el último caso, usando que $\mathbb{R} \cap \mathbb{I} = \{0\}$). Por ejemplo, fijado $n \in \mathbb{N}_\infty$, tenemos que $s_n \simeq l$ y $t_n \simeq l'$ por hipótesis, luego $s_n t_n \simeq ll'$ por 3.34 (o porque las sucesiones convergentes son acotadas por 4.11 y 4.12). $\square$

Demostración. (SA) Veamos el producto como ejemplo (el resto pueden encontrarse en [Or02, Teorema 1.7, 2.3]). Por 4.11 y 4.12, tenemos que $\exists k \in \mathbb{R}, |s_n| \leq k$, luego $|s_n t_n - ll'| \leq |s_n t_n - s_n l'| + |s_n l' - ll'| = |s_n| |t_n - l'| + |l'| |s_n - l| \leq k |t_n - l'| + |l'| |s_n - l|$. Y como por definición de límite $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, |t_n - l'| < \frac{\epsilon}{2k}, |s_n - l| < \frac{\epsilon}{2|l'|}$, hemos terminado. $\square$

Nota. Aunque no vamos a entrar en ello, el álgebra de límites se extiende de manera natural para $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, véase [Or02, Teorema 2.9].

Observación. Con las notaciones de 4.14, si $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = c$, con $c \in \mathbb{R}$ cualquiera, entonces $\lim_n t_n = c$ (por PdT, si se quiere) y por ende $\lim_n (s_n \pm c) = l \pm c$ y $\lim_n (s_n c) = lc$. Por otra parte, $\lim_n (\frac{t_n}{s_n}) = \lim_n (t_n \cdot \frac{1}{s_n}) = \frac{l'}{l}$ si $l \neq 0$. Finalmente, notamos que $\lim_n (s_n - t_n) = 0$ ssi $l = l'$.

Nota. Si bien es verdad que la versión NSA se basa fuertemente en un resultado anterior, también lo es que dicho resultado es intuitivamente claro, mientras que la demostración SA posiblemente no lo parezca tanto (salvo, claro, que uno se percate de su idea de fondo: $r_n \rightarrow l$ ssi $r_n - l \rightarrow 0$, y $s_n t_n \rightarrow 0$ si $s_n \rightarrow 0$ y t es acotada). De hecho, una de las gracias del análisis no estándar es que nos permite «algebraizar» muchas demostraciones, cambiando epsilons y desigualdades por la congruencia (en $\mathbb{L}$) «ser infinitamente próximo» $\simeq$. En particular, podemos traducir a nuestro contexto actual resultados como 3.39:

Proposición 4.15. Si $(s_n)_n$ converge en $\mathbb{R}$, entonces $(|s_n|)_n$ también y $\lim |s_n| = |\lim s_n|$.

Demostración. (NSA) Por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}_\infty, s_n \simeq l$, luego $\forall n \in \mathbb{N}_\infty, |s_n| \simeq |l|$. $\square$

Demostración. (SA) Por hipótesis, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \epsilon > |s_n - l| \geq ||s_n| - |l||$. $\square$

Nota. Para no aburrir al lector, en adelante sólo daremos las demostraciones SA cuando consideremos la diferencia relevante.

Observación. El recíproco es falso en general: $((-1)^n)_n$ no converge, pero $(|(-1)^n|)_n$ sí. Sin embargo:

Observación 4.16. Dado $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se tiene: $s_n \rightarrow 0$ ssi $|s_n| \rightarrow 0$.

Demostración. [$\Leftarrow$] Si $N \in \mathbb{N}_{\infty}$, entonces $|s_N| \simeq 0$ por hipótesis, luego $s_N \simeq 0$ por 1.2.4. $\square$

Proposición 4.17. Sean $s, t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergiendo en $\mathbb{R}$ a l, l' respectivamente. Se tiene: $s \leq t \Rightarrow l \leq l'$.

Demostración. (NSA) Si $n \in \mathbb{N}_{\infty}$, entonces $l \simeq s_n \leq t_n \simeq l'$ por hipótesis, luego $l = \text{sh } s_n \leq \text{sh } t_n = l'$ por 3.42. $\square$

Demostración. (SA) Como $s_n \rightarrow l$, tenemos que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, l - \frac{\epsilon}{2} < s_n < l + \frac{\epsilon}{2}$, y análogamente con $t_n \rightarrow l'$. Y como $s \leq t$, tenemos que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1}, l - \frac{\epsilon}{2} < s_n \leq t_n < l' + \frac{\epsilon}{2}$, luego $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, l < l' + \epsilon$ y por ende $l \leq l'$ (pues en caso contrario llegaríamos a contradicción tomando $\epsilon = l - l'$). $\square$

Lema 4.18. (del sándwich) Sean $r, s, t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que $r \leq s \leq t$, con r, t convergiendo en $\mathbb{R}$ a l . Entonces $s_n \rightarrow l$.

Demostración. (NSA) Como antes, $\forall n \in \mathbb{N}_{\infty}, l \simeq r_n \leq s_n \leq t_n \simeq l$, luego s está acotada (pues r, t lo están por ser convergentes) y por ende tiene sombra. Y como sh preserva el orden, hemos terminado. $\square$

Corolario 4.19. Dados $A \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, se tiene: $c = \inf A$ ssi c es cota inferior de A y existe $(s_n)_n \subset A$ tal que $s_n \rightarrow c$.

Demostración. [$\Rightarrow$] Por 4.9.2, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists s_n \in [c, c - \frac{1}{n}) \cap A$. Y como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, se sigue del álgebra de límites y el lema del sándwich que $s_n \rightarrow c$.⁴

[$\Leftarrow$] Dado $N \in \mathbb{N}_{\infty}$ tenemos que $s_N \in {}^*A \cap \text{hal}(c)$, luego $c = \inf A$ por 4.9.4. $\square$

Nota 4.20. En [$\Rightarrow$] hemos utilizando la caracterización SA del ínfimo. Por lo general, los resultados que involucren la construcción de sucesiones reales pasarán por argumentos SA, puesto que necesitamos «bajar» de alguna manera de $(s_N)_{N \in \mathbb{N}_{\infty}}$ (o más en general, de $a \in \text{hal}(c) \cap {}^*A$) a $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de modo similar a como sucedía en 4.11. Esta limitación, no obstante, podría solventarse parcialmente de dos maneras diferentes.⁵

- Encapsulando dicho argumento, ya sea por analogía con 4.5 (véase 4.25) o bien estudiando dichas construcciones con más detalle (véase 5.1), lo que nos llevara a estudiar las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$ desde un punto de vista NSA en el capítulo próximo.
- Introduciendo nuevas y más potentes herramientas del análisis no estándar, como los principios de permanencia, compresión y saturación (véase [Go98, Chapter 15]). Dicho estudio podría iniciarse a través de la natural pregunta «¿existe un análogo del Principio de Transferencia para estructuras de universo $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o, más en general, $\mathcal{P}(X)$?», lo cual nos llevaría a la noción de conjunto interno, véase [Go98, Part III].

Con el fin de mantener un equilibrio entre la fundamentación lógica y sus aplicaciones al análisis, así como motivar las susodichas generalizaciones, hemos optado por la primera opción.

⁴De hecho, $\forall N \in \mathbb{N}_{\infty}, c \leq s_N \leq c - \frac{1}{N} \simeq c$ por PdT, luego podemos deducir $s_n \rightarrow c$ de 3.36 sin hacer mención explícita del álgebra de límites o el lema del sándwich (quizá, incluso, de manera más clara).

⁵Digo «parcialmente» porque la cuestión no es del todo trivial, como se discute con más detalle en [BeNe07, Article 4].

4.4. Puntos límites

4.4.1. Rudimentos

Definición 4.21. Decimos que $l \in \mathbb{R}$ es un **punto límite de** $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ssi $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \# \llbracket s \in B_\epsilon(l) \rrbracket = \infty$.

Observación 4.22. Dados $l \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se tiene: l es un punto límite de s ssi $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}_{>m}, s_n \in B_\epsilon(l)$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Fijados $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, m \in \mathbb{N}$, supongamos que $\nexists n \in \mathbb{N}_{>m}, s_n \in B_\epsilon(l)$. Entonces $\llbracket s \in B_\epsilon(l) \rrbracket \subset \{1, \dots, m-1\}$, en contra de $\# \llbracket s \in B_\epsilon(l) \rrbracket = \infty$.

$[\Leftarrow]$ Fijado $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, y por hipótesis, $\exists n_1 \in \mathbb{N}_{>1}, s_{n_1} \in B_\epsilon(l)$ y $\exists n_2 \in \mathbb{N}_{>n_1}, s_{n_2} \in B_\epsilon(l)$ y etc. $\square$

Proposición 4.23. Dados $l \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se cumple: l es punto límite de s ssi $\exists N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \simeq l$.

Demostración. $[\Leftarrow]$ Fijados $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\exists N \in \mathbb{N}_\infty$ (y por ende $N > m$) tal que $s_N \simeq l$ (y por ende $s_N \in B_\epsilon(l)$), i.e., $\exists n \in {}^*\mathbb{N}_{>m}, s_n \in B_\epsilon(l)$. Así, aplicando PdT, hemos terminado.

$[\Rightarrow]$ Por hipótesis y PdT, $\forall \epsilon \in {}^*\mathbb{R}_{>0}, \forall m \in {}^*\mathbb{N}, \exists n \in {}^*\mathbb{N}_{>m}, |s_n - l| < \epsilon$, luego tomando $m \in \mathbb{N}_\infty$ y $\epsilon \in \mathbb{I}^+$ obtenemos que $\exists n \in \mathbb{N}_\infty, |s_n - l| < \epsilon \simeq 0$, luego 3.36 concluye. $\square$

Nota. De hecho, tomando ahora $m_1 > n$ en la demostración anterior y aplicando de nuevo la hipótesis transferida, obtendríamos $n_2 > n$ tal que $s_{n_2} \simeq l$. Y por iteración (poniendo $n_1 = n$), construiríamos $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $n_k \in \mathbb{N}_\infty, \forall k \in \mathbb{N}, n_k < n_{k+1}$ y $s_{n_k} \simeq l$. Ello nos sugiere:

Corolario 4.24. Dado $l \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se tiene: l es punto límite de s ssi s tiene una parcial convergiendo a l .

Demostración. $[\Leftarrow]$ Obvio vía PdT, usando la caracterización 4.23.

$[\Rightarrow]$ Por hipótesis (usando la caracterización 4.22), $\exists n_1 \in \mathbb{N}_{>1}, s_{n_1} \in B_1(l)$ y $\exists n_2 \in \mathbb{N}_{>n_1}, s_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(l)$ y $\exists n_3 \in \mathbb{N}_{>n_2}, s_{n_3} \in B_{\frac{1}{3}}(l)$ y etc. Por tanto, existe $(s_k)_k$ parcial de s tal que $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq |s_k - l| \leq \frac{1}{k}$, luego $|s_k - l| \rightarrow 0$ por el lema del sándwich y, por 4.16 y el álgebra de límite, $s_k \rightarrow l$.⁶ $\square$

4.4.2. Principio de subdesbordamiento

Observación. Nótese que la caracterización NSA de punto límite es muy similar a la de límite, lo que nos sugiere la posibilidad de un análogo existencial para 4.5. En efecto, analizando detenidamente la demostración de 4.23 podemos concluir que:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}_{>m}, R(s_n) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_\infty, {}^*R(s_n)$$

con $R \subset \mathbb{R}$ una relación unaria en $\mathbb{R}$. Más en general todavía, y con las notaciones de la sección 3.3:

Proposición 4.25. (Principio de underflow o subdesbordamiento para $\mathfrak{A}$) Sea $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, con $L(\phi) = \{n\}$. Entonces $\mathfrak{A} \models \forall m(m \in \mathbb{N}) \exists n(n \in \mathbb{N}_{>m}) \phi$ ssi ${}^*\mathfrak{A} \models \exists n(n \in \mathbb{N}_\infty) \phi$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Por hipótesis y PdT, ${}^*\mathfrak{A} \models \forall m(m \in {}^*\mathbb{N}) \exists n(n \in {}^*\mathbb{N}_{>m}) \phi$, luego particularizando a $m \in \mathbb{N}_\infty$ y usando que $\mathbb{N}_{>m} \subset \mathbb{N}_\infty$, se obtiene: ${}^*\mathfrak{A} \models \exists n(n \in \mathbb{N}_\infty) \phi$.

$[\Leftarrow]$ Dado $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, tenemos que $\mathbb{N}_\infty \subset \mathbb{N}_{>m}$, luego ${}^*\mathfrak{A} \models \exists n(n \in {}^*\mathbb{N}_{>m}) \phi$ por hipótesis. Y por PdT, $\mathfrak{A} \models \exists n(n \in \mathbb{N}_{>m}) \phi$, ergo $\mathfrak{A} \models \forall m(m \in \mathbb{N}) \exists n(n \in \mathbb{N}_{>m}) \phi$ por la arbitrariedad de m . $\square$

⁶De hecho, $\forall k \in \mathbb{N}_\infty, 0 \leq |s_k - l| \leq \frac{1}{k} \simeq 0$ por PdT, luego (como en 4.19) podemos deducir $s_k \rightarrow 0$ de 3.36 sin hacer mención explícita del álgebra de límites o el lema del sándwich.

Nota. Enunciamos el principio para una única variable libre, como de hecho es usual en la literatura, por simplicidad. Por otra parte, y siguiendo 4.22, podríamos ver que la condición $\#\{n : \mathfrak{A} \models \phi[n]\} = \infty$ es equivalente a las anteriores. En cuanto a la caracterización 4.24, dado que involucra la existencia de una infinidad de naturales (en forma de índices de una parcial con ciertas propiedades) o, si se prefiere, la existencia de una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (estrictamente creciente tal que $\forall n \in \mathbb{N}, s_{f(n)} \in R$), nos es imposible siquiera enunciarla en $\mathfrak{A}$ (pues no es una fórmula de primer orden). Por último, y como en 4.5, el término *underflow* proviene de [Go98] y se utiliza con cierta laxitud.

4.4.3. Bolzano-Weierstrass y monotonía

Definición. Sean $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado y $(x_n)_n \subset X$. Decimos que $(x_n)_n$ es:

- **creciente**, y escribimos $x_n \uparrow$, ssi $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \preceq x_{n+1}$.
- **estrictamente creciente**, y escribimos $x_n \uparrow\uparrow$, ssi $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \prec x_{n+1}$.
- **decreciente**, y escribimos $x_n \downarrow$, ssi $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \succeq x_{n+1}$.
- **estrictamente decreciente**, y escribimos $x_n \downarrow\downarrow$, ssi $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \succ x_{n+1}$.

En lo que a nosotros respecta, los conjuntos ordenados que nos interesan son $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subset)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$.

Definición. Decimos que $(I_n)_n$ es una **sucesión de intervalos encajados** ssi es una sucesión de intervalos cerrados no vacíos tales que $I_n \downarrow$ y $|I_n| \rightarrow 0$.

Observación. Si $l \in \mathbb{R}$ es punto límite de $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \simeq l$, ergo $l = \text{sh } s_N$ (véase 3.34, 3.40, 3.42). Recíprocamente, si $\exists N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \in \mathbb{L}$, entonces $\text{sh } s_N$ existe y, obviamente, es punto límite de s . Por tanto,

Proposición 4.26. Si $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y L_s es el conjunto de los puntos límites de s , entonces $L_s = \{\text{sh } s_N : s_N \in \mathbb{L}\}_{N \in \mathbb{N}_\infty}$.

Teorema. (de Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene un punto límite y una parcial convergiendo a él.

Demostración. (NSA) Sea $N \in \mathbb{N}_\infty$. Como s es acotada, tenemos que $s_N \in \mathbb{L}$, luego $\text{sh } s_N$ es punto límite de s y, por 4.24, s tiene una parcial convergiendo a él. $\square$

Demostración. (SA, véase [Or02, Teorema 2.12]) Por hipótesis, $\exists a, b \in \mathbb{R}, (s_n)_n \subset [a, b]$. Pongamos $I_1 = [a, b]$, $J_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $K_1 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, $J'_1 = \{n : s_n \in J_1\}$, $K'_1 = \{n : s_n \in K_1\}$. Entonces, como $I_1 = J_1 \cup K_1$, o bien $\#K'_1 = \infty$, en cuyo caso tomamos $I_2 = K_1$, o bien, en caso contrario, $\#J'_1 = \infty$ y tomamos $I_2 = J_1$. Así, $I_2 \subset I_1$, $|I_2| = \frac{|I_1|}{2}$ y I_2 contiene infinitos términos de $(s_n)_n$. E iterando el proceso, obtenemos una sucesión $(I_n)_n$ de intervalos encajados conteniendo infinitos términos de $(s_n)_n$.

Ahora ya estamos en condiciones de construir nuestra parcial convergente:

1. $\#I'_1 = +\infty \Rightarrow \exists n_1 \in I'_1, s_{n_1} \in I_1$.
2. $\#I'_2 = +\infty \Rightarrow \exists n_2 \in I'_2, s_{n_2} \in (I_2)_{>n_1}$.
3. etc.

Así, por construcción, $(s_{n_k})_k$ es una parcial de $(s_n)_n$ y $\forall k \in \mathbb{N}, s_{n_k} \in I_k$, con $|I_k| \rightarrow 0$, de modo que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}_{\geq k_0}, |I_k| < \epsilon$. Por tanto, $i, j \in \mathbb{N}_{\geq k_0} \xrightarrow{s_{n_k} \in I_k} s_{n_i}, s_{n_j} \in I_{k_0} \Rightarrow |s_{n_i} - s_{n_j}| \leq |I_{k_0}| < \epsilon$, i.e., $(s_{n_k})_k$ es de Cauchy y, en particular, converge. Más aún, $(s_{n_k})_k$ converge a un punto límite de s por 4.24. $\square$

Nota. Por 4.26, una sucesión s tiene algún punto límite ssi $\exists N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \in \mathbb{L}$ (i.e., ssi s no diverge a ∞). Sin embargo, en el teorema de Bolzano-Weierstrass utilizamos la hipótesis mucho más fuerte $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \in \mathbb{L}$ (i.e., s es acotada). Por tanto, podemos refinarlo a:

Corolario. Si s no diverge a ∞ , entonces tiene un punto límite y una parcial convergiendo a él.

Observación. Si $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ converge en $\mathbb{R}$, entonces tiene un único punto límite. Recíprocamente, si $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tiene un único punto límite, digamos $l \in \mathbb{R}$, entonces $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \in \text{hal}(l) \cup \mathbb{L}^c$. Por tanto,

Proposición 4.27. Sea $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $l \in \mathbb{R}$. Se tiene: $s_n \rightarrow l$ ssi s es acotada y tiene un único punto límite.

Nota. Esto también puede probarse por Bolzano-Weierstrass, ya que si s es acotada, entonces tiene punto límite y, por unicidad, converge a él.

El resultado anterior nos sugiere:

Teorema 4.28. (de convergencia monótona) Sea $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ acotado inferiormente en $\mathbb{R}$ tal que $s_n \downarrow$. Entonces $s_n \rightarrow \inf\{s_n\}_n$.

Demostración. (NSA) Sea $l \in \mathbb{R}$ un punto límite de s (que existe por Bolzano-Weierstrass, pues s está acotada inferiormente por hipótesis y superiormente por $s_1 \in \mathbb{R}$ al ser $s_n \downarrow$) y veamos que $l = \inf\{s_n\}_n$, de modo que $s_n \rightarrow l$ por 4.27.⁷ En efecto:

- Como $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \geq s_N \simeq l$ por ser $s_n \downarrow$, obtenemos que $\forall n \in \mathbb{N}, l \leq s_n$.
- Si $l' \in \mathbb{R}$ es otra cota inferior de s , entonces $\forall n \in {}^*\mathbb{N}, l' \leq s_n$ por PdT y, en particular, $l' \leq s_N \simeq l$, luego $l' \leq l$.

□

Demostración. (SA, véase [Or02, Corol-lari 1.13]) Sea $l = \inf\{s_n\}_n$, que existe por la Dedekind completitud de $\mathbb{R}$ al ser s acotado inferiormente, y veamos que $s_n \rightarrow l$. Por definición de ínfimo, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, s_{n_\epsilon} \in [l, l + \epsilon)$ y $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \geq l$, luego $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{>n_\epsilon}, l \leq s_n \leq s_{n_\epsilon} < l + \epsilon$. Y restando l a banda y banda, nos queda: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{>n_\epsilon}, 0 \leq s_n - l = |s_n - l| < \epsilon$. □

Corolario 4.29. Dado $a \in (0, 1)$, se cumple: $\lim_n a^n = 0$.

Demostración. (NSA) Pongamos $s = (a^n)_n$, que es claramente decreciente y acotada inferiormente por 0.⁸ Entonces $\exists l \in \mathbb{R}, s_n \rightarrow l$ por 4.28, ergo $a^N \simeq l \simeq a^{N+1}$ si $N \in \mathbb{N}_\infty$ (pues $N \in \mathbb{N}_\infty \Rightarrow N+1 \in \mathbb{N}_\infty$). Y como $a^{N+1} = aa^N$ (aplicando PdT a $\forall n \in \mathbb{N}, a^{n+1} = aa^n$), tenemos que $l \simeq a^N \Rightarrow al \simeq aa^N = a^{N+1} \simeq l$ (ya que $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{L}$, véase 3.35) y por ende $al = l$ (al ser ambos reales del mismo halo). Pero $a \neq 1$ por hipótesis, luego necesariamente $l = 0$. □

Demostración. (SA) Como antes, $\exists l \in \mathbb{R}, s_n \rightarrow l$. Y por la unicidad del límite, $\lim_n a^n = \lim_n a^{n+1}$. Ahora bien, $\lim aa^n = a \lim a^n$ por 4.14, luego $l = al$ y se concluye como antes. □

Nota. Por supuesto, uno puede demostrar el resultado anterior sin necesidad de aplicar el teorema de convergencia monótona, véase [Pe08, Ejercicio 7.4].

Teorema 4.30. (de los intervalos encajados) Si $(I_n)_n$ es una sucesión de intervalos encajados, entonces $\#(\cap_n I_n) = 1$.

Demostración. Pongamos $I_n = [a_n, b_n]$, $a = \sup a_n$, $b = \inf b_n$. Como $I_n \downarrow$, tenemos que $a_n \uparrow$, luego $a_n \rightarrow a$ al estar $(a_n)_n$ acotada superiormente por b_0 . Y por analogía, $b_n \rightarrow b$. Y como $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$, nos queda que $a \leq b$ y por ende $[a, b] \neq \emptyset$ y $\cap_n I_n = [a, b]$.⁹ Finalmente, como $|I_n| \rightarrow 0$, tenemos que $a = b$ por 4.16 y el álgebra de límites. □

⁷Una alternativa a esto (quizá más directa) podría ser la siguiente: como s es acotada, tenemos que $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, \text{sh}(s_N) \in \mathbb{R}$, luego nos basta ver que $\text{sh } s_N$ no depende de N (e.g., demostrando que $\text{sh } s_N = \inf\{s_n\}_n$).

⁸Más explícitamente, $x < y \stackrel{z \geq 0}{\Rightarrow} xz < yz$, pues $xz < yz \Leftrightarrow 0 < xz - yz = (x - y)z$, lo que es cierto si $x < y, 0 < z$ por los axiomas de cuerpo ordenado. Así, $0 < a \Rightarrow 0 < a^2$ y $a < 1 \Rightarrow a^2 < a < 1$, concluyendo por inducción.

⁹Más explícitamente, $[\subset]$ Si $c \in I_n$, entonces $a_n \leq c \leq b_n$ y por ende $c \in [a, b]$ (tomando límites).

$[\supset]$ Por definición de a, b , tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a, b \leq b_n$. Y como $a \leq b$, hemos terminado.

4.4.4. Límite superior e inferior

Proposición 4.31. Si $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es acotada y L_s es el conjunto de los puntos límites de s , entonces L_s tiene mínimo.

Demostración. Por Bolzano-Weierstrass ya sabemos que $L_s \neq \emptyset$, y por 4.26 tenemos que $L_s = \{\text{sh } s_N : N \in \mathbb{N}_\infty\}$. Así, si c es una cota inferior de s , tenemos por PdT que $c \leq s_N \simeq \text{sh } s_N$, luego c también es una cota inferior de L_s . Por tanto, L_s tiene ínfimo en $\mathbb{R}$ por la Dedekind completitud.

Más aún, como $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists l \in L_s, 0 \leq l - \inf L_s \leq \epsilon$ por 4.9.2, tenemos que $\forall \epsilon \in {}^*\mathbb{R}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}_\infty, 0 \leq \text{sh } s_N - \inf L_s \leq \epsilon$ por PdT, luego $\exists N \in \mathbb{N}_\infty, \text{sh } s_N = \inf L_s$ tomando $\epsilon \in \mathbb{I}^+$ y aplicando 3.36. Así, $\inf L_s \in L_s$. $\square$

Nota. Para una demostración SA de este resultado, véase [Or02, Teorema 2.13], que consiste en demostrar que la sucesión construida en el teorema de Bolzano-Weierstrass converge al mínimo de L_s .

Definición 4.32. En las condiciones anteriores, definimos el **límite inferior** de s como $\underline{\lim} s := \min L_s$.

Y traduciendo ahora al lenguaje SA vía los principios 4.5 y 4.25:

Proposición 4.33. Si $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es acotada, se cumple: $l = \underline{\lim} s$ si

1. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, l - \epsilon < s_n$.
2. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}_{>m}, s_n < l + \epsilon$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ 1) Fijemos $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Como l es cota inferior de L_s , tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}_\infty, l - \epsilon < l \leq \text{sh } s_n \simeq s_n$, luego $\forall n \in \mathbb{N}_\infty, l - \epsilon < s_n$ por 3.38.1. Así, 4.5 concluye.

2) Obvio de 4.22, pues $l \in L_s$.

$[\Leftarrow]$ Por hipótesis, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}_{>\max\{m, n_0\}}, l - \epsilon < s_n < l + \epsilon$, luego $l \in L_s$ por 4.22. Y por 4.5 e hipótesis, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall N \in \mathbb{N}_\infty, l - \epsilon < s_N$, luego tomando $\epsilon \in \mathbb{I}^+$ (por PdT) y aplicando sh a banda y banda, obtenemos que l es cota inferior de L_s . $\square$

Nota. Resultados análogos pueden obtenerse para $\overline{\lim} s := \max L_s$ el límite superior de s . En particular:

Corolario. Dado $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ acotado, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, s_n \in (\underline{\lim} s - \epsilon, \overline{\lim} s + \epsilon)$.

Nota. Para una demostración SA de 4.33, véase [Or02, Teorema 2.14].

Volviendo de nuevo sobre 4.31, es claro que:

Proposición. Sea $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ acotado, $l \in \mathbb{R}$. Se tiene: $\underline{\lim} s = \overline{\lim} s = l \Leftrightarrow s_n \rightarrow l$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Como $\min L_s = \underline{\lim} s = \overline{\lim} s = \max L_s$, tenemos $L_s = \{l\}$. Y como s es acotada, $s_n \rightarrow l$.

$[\Leftarrow]$ Si $s_n \rightarrow l$, entonces $L_s = \{l\}$ y por ende $\underline{\lim} s = \overline{\lim} s = l$. $\square$

Observación. Del mismo modo que L_s es no vacío y acotado si $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es acotado, también lo son las colas de s , luego $\forall m \in \mathbb{N}, \inf\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq m}} \in \mathbb{R}$ por la Dedekind completitud. Más aún, poniendo $S_m = \inf\{s_n\}_{n \geq m}$ y $S = (S_m)_m$, tenemos que S es creciente y acotada superiormente por cualquier cota superior de s , ergo $\lim S_m = \sup\{S_m\}_m$ por el teorema de convergencia monótona. Afirmando entonces que:

Proposición 4.34. Con las notaciones anteriores, $\underline{\lim} s = \lim S$.¹⁰

¹⁰Más explícitamente, $\inf L_s = \inf\{\text{sh } s_N\}_{N \in \mathbb{N}_\infty} = \text{sh } \inf\{s_n\}_{n \geq M} = \lim_m \inf\{s_n\}_{n \geq m}$ para cualquier $M \in \mathbb{N}_\infty$, lo que nos da una suerte de conmutatividad entre $\inf$ y sh .

Demostración. $[\geq]$ Por 4.31, $\exists N \in \mathbb{N}_\infty, \underline{\lim} s_n \simeq s_N$. Y por definición de S_m y PdT, $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}, S_m \leq s_n$ y, en particular, $\forall m \in \mathbb{N}, S_m \leq s_N \simeq \underline{\lim} s_n$, ergo $\underline{\lim} s_n$ es cota superior de S por 3.38.3. Pero $\lim S = \sup\{S_m\}_m$, i.e., es la menor cota superior de S , luego $\lim S \leq \underline{\lim} s_n$.

$[\leq]$ (Por absurdo) Supongamos que $\lim S < \underline{\lim} s_n$, de modo que $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \lim S < \underline{\lim} s_n - \epsilon$. Por 4.33, $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}, \underline{\lim} s_n - \epsilon < s_n$, i.e., $\underline{\lim} s_n - \epsilon$ es cota inferior de $\{s_n\}_{n \geq m}$, luego $\underline{\lim} s_n - \epsilon \leq S_m$ por definición de S_m . Así, $\lim S < S_m$, en contra de que $\lim S$ sea cota superior de S . $\square$

Definición 4.35. Aunque inicialmente hemos definido $\underline{\lim} s_n$ únicamente para $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ acotado, resulta natural extender nuestra definición a $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ cualquiera de la siguiente manera:

1. Si s no está acotado inferiormente, entonces $\exists N \in \mathbb{N}_\infty, s_N \in \mathbb{R}_\infty^-$ y ponemos $\underline{\lim} s_n = -\infty$.
2. Si no, s está acotado inferiormente (y por ende L_s) y se da uno de los siguientes:
 - a) $s_n \rightarrow +\infty$. Entonces $L_s = \emptyset$ y ponemos $\underline{\lim} s_n = +\infty$.
 - b) $s_n \not\rightarrow +\infty$. Entonces $L_s \neq \emptyset$ y podemos definir $\underline{\lim} s_n$ como en 4.32.

4.5. Series

Definición. Decimos que S es la serie asociada a $s \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ (o de término general s_n) ssi S es la sucesión de sumas parciales de s (i.e., $S = (\sum_{n=1}^m s_n)_{m \geq 1}$), y la denotamos por $\sum_{n \geq 1} s_n$ ó $\sum_n s_n$. Si $\sum_n s_n$ es convergente, denotamos por $\sum_{n=1}^\infty s_n$ a su límite.

Ejemplo. (Serie geométrica) Dado $c \in \mathbb{R}$, sea $S_n = \sum_{k=1}^n c^k$. Entonces $S_n - cS_n = c - c^{n+1}$ y, por ende, $S_n = \frac{c - c^{n+1}}{1 - c}$, con $n \in \mathbb{N}$ cualquiera. Por tanto, $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, S_N = \frac{c - c^{N+1}}{1 - c}$ por PdT. Y si $|c| < 1$, entonces $|c|^n \rightarrow 0$ por 4.29, luego $c^n \rightarrow 0$ por 4.16. Así, $S_N = \frac{c - c^{N+1}}{1 - c} \simeq \frac{c}{1 - c}$, i.e., $\lim S_n = \frac{c}{1 - c}$.

Antes de continuar, insistimos en que las series son un caso particular de sucesión, de modo que todos los resultados anteriores pueden enunciarse para series. Por ejemplo:

Proposición. (Criterio de convergencia de Cauchy) $\sum_k s_k$ converge ssi $\forall n, m \in \mathbb{N}_\infty, \sum_{k=n}^m s_k \simeq 0$.

Nota. Por simplicidad, cuando escribamos $\sum_{k=n}^m s_k$ supondremos siempre que $m \geq n$. De hecho, si asumimos el convenio de la suma vacía (i.e., $\sum_{k=n}^m s_k = 0$ si $m < n$), dicha suposición es innecesaria.

Corolario. Si $\sum_k s_k$ converge en $\mathbb{R}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}_\infty, \sum_{k=n}^\infty s_k \simeq 0$, i.e., $s_n \rightarrow 0$.

Demostración. Tomando $m = n$ en el criterio anterior. $\square$

Pregunta. ¿Es el recíproco cierto?

Ejemplo. (Serie armónica) Claramente $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ (pues $\forall H \in \mathbb{R}_\infty, \frac{1}{H} \in \mathbb{I}$), luego nos bastaría ver que $\sum_k \frac{1}{k}$ no converge para responder negativamente a la pregunta anterior. Ahora bien, como $\frac{1}{k} \downarrow$, podemos acotar inferiormente $\sum_{k=n}^m \frac{1}{k}$ por $\sum_{k=n}^m \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{m} \geq \frac{m-n}{m}$, con $m \geq n$. Así, tenemos que $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$, ergo $\sum_k \frac{1}{k}$ no converge.

Nota. Es interesante observar que explotar las indeterminaciones de 3.31 ha sido lo que nos ha permitido hallar un m adecuado.

Observación. Si $(s_n)_n \subset [0, \infty)$, entonces $\sum_{n=1}^m s_n \uparrow$ y, por el teorema de convergencia monótona, $\sum_n s_n$ converge ssi $\sum_n s_n$ está acotado superiormente.

Nota. De hecho, nosotros ya sabemos que si $\sum_n s_n$ converge entonces es acotada y, en particular, acotada superiormente, luego lo novedoso es el recíproco. Por otra parte, como $(s_n)_n \subset [0, \infty)$, ya tenemos que $\sum_n s_n$ está acotada inferiormente por 0 (o mejor aún, por s_1 , pues $\sum_{n=1}^m s_n \uparrow_m$), luego $\sum_n s_n$ es acotada ssi lo es superiormente.

Corolario. (Criterio de comparación) Sean $(s_n)_n, (t_n)_n \subset [0, \infty)$ tales que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \leq t_n$. Se tiene: Si $\sum_n t_n$ converge, entonces $\sum_n s_n$ también.

Demostración. Usando la observación anterior, pues $\sum_n s_n$ está acotada superiormente por $\sum_n t_n$, que está a su vez acotada por ser convergente $\square$

Proposición 4.36. (Refinamiento) Sean $s, t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que $\exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0}, 0 \leq s \leq ct$. Entonces $\sum_n s_n$ es convergente si $\sum_n t_n$ lo es.

Demostración. Por hipótesis, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, 0 \leq s_n \leq ct_n$ (véase 4.13), luego $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, 0 \leq \sum_{k=n}^m s_k \leq \sum_{k=n}^m ct_k$ por inducción, i.e., $\forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, 0 \leq \sum_{k=n}^m s_k \leq \sum_{k=n}^m ct_k$ (véase 4.5). Y como $\sum_{k=n}^m ct_k = c \sum_{k=n}^m t_k$ (por PdT de $\forall n, m \in \mathbb{N}, \sum_{k=n}^m ct_k = c \sum_{k=n}^m t_k$) y $c \sum_{k=n}^m t_k \simeq 0$ (por el criterio de Cauchy, pues $\sum_{k=n}^m t_k$ converge), obtenemos que $\sum_{k=n}^m s_k \simeq 0$ (véase 3.36), i.e., $\sum_n s_n$ converge. $\square$

Nota. La demostración anterior es un buen ejemplo de como el PdT y otros principios similares nos permiten tratar las series como «sumas infinitas» con propiedades análogas a las sumas finitas, y de ahí su nombre de «sumas hiperfinitas». Aunque algunos de estos argumentos pueden automatizarse, e incluso puede enunciarse un principio de inducción NSA para subconjuntos internos de $^*\mathbb{N}$ (véase [Go98, Theorem 11.3.2]), nosotros no vamos a entrar en ello.

Corolario 4.37. (Criterio de comparación por paso al límite) Sean $(s_n)_n \subset [0, \infty), (t_n)_n \subset (0, \infty)$ tales que $\left(\frac{s_n}{t_n}\right)_n \rightarrow l$. Se tiene:

1. Si $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces $\sum_n s_n$ converge si $\sum_n t_n$ converge.
2. Si $l \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces $\sum_n t_n$ converge si $\sum_n s_n$ converge.

Demostración. 1) Fijado $n \in \mathbb{N}_{\infty}$ tenemos por hipótesis que $\frac{s_n}{t_n} \simeq l$, luego $s_n = \frac{s_n}{t_n} t_n \simeq l t_n \leq (l+1)t_n$. Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}_{\infty}, s_n \leq ct_n$ con $c = l+1 \geq 0$, luego 4.36 concluye.

2) Análogo, notando que $\frac{1}{l} \in \mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{L}$ al ser $l \in \mathbb{R}_{>0}$ y, por ende, $l t_n \simeq s_n \Rightarrow t_n \simeq \frac{1}{l} s_n$. $\square$

Observación. Por hipótesis y PdT, $\forall n \in \mathbb{N}_{\infty}, 0 \leq \frac{s_n}{t_n} \simeq l$, luego $0 \leq l$ siempre. Y si $(s_n)_n \subset (0, \infty)$, entonces $0 < l$.

Nota. Para una demostración SA de los dos resultados anteriores, véase [Or02, Teorema 9.9, Corol·lari 9.10].

Teorema 4.38. (Criterio de Leibniz) Sea $(s_n)_n \subset [0, \infty)$ decreciente con $s_n \rightarrow 0$. Entonces $\sum_n (-1)^n s_n$ converge.

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ pares, de modo que su diferencia d también es par. Entonces $\sum_{k=n}^m (-1)^k s_k = \sum_{i=0}^{d-2} (s_{n+i} - s_{n+i+1}) + s_{n+d} \geq 0$ (pues $(s_{n+i} - s_{n+i+1}) \geq 0$ al ser $s \downarrow$ y $s_k \geq 0$ para todo k) y $\sum_{k=n}^m (-1)^k s_k = s_n + \sum_{i=1}^{d-1} (-s_{n+i} + s_{n+i+1}) \leq s_n$ (pues $(-s_{n+i} + s_{n+i+1}) \leq 0$ al ser $s \downarrow$). Y por analogía, $0 \leq \sum_{k=n}^m (-1)^k s_k \leq s_n$ si m es impar en vez de par, y $0 \leq -\sum_{k=n}^m (-1)^k s_k \leq s_n$ si n es impar (sea m par o no). Por tanto, $\forall n, m \in \mathbb{N}, |\sum_{k=n}^m (-1)^k s_k| \leq |s_n|$. Y tomando $n, m \in \mathbb{N}_{\infty}$ (por PdT) y usando que $|s_n| \simeq 0$ (por hipótesis), obtenemos que $|\sum_{k=n}^m (-1)^k s_k| \simeq 0$, luego el criterio de Cauchy concluye. $\square$

Capítulo 5

Topología

Antes de continuar adelante con el estudio de límites para aplicaciones más generales que las sucesiones, resulta conveniente establecer algunos resultados básicos sobre topología general.

5.1. Puntos de un conjunto

Problema. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$. Si bien $f(p)$ sólo tendrá sentido cuando $p \in A$, es natural preguntarse su valor «límite» también cuando $p \in A^c$ si existe $(x_n)_n \subset A$ tal que $x_n \rightarrow p$.

Proposición 5.1. Dado $A \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, son equivalentes:

1. $\exists (x_n)_n \subset A \cap \{p\}^c, x_n \rightarrow p$.
2. $\#(\text{hal}(p) \cap {}^*A) = \infty$.
3. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \#(B_\epsilon(p) \cap A) = \infty$.
4. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, B_\epsilon(p) \cap A \cap \{p\}^c \neq \emptyset$.
5. $\text{hal}(p) \cap {}^*A \cap \{p\}^c \neq \emptyset$.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Sin restricción, todos los x_n (con $n \in \mathbb{N}$) son distintos,¹ i.e., $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}, x_n \neq x_m$. Y por PdT, $\forall n \in \mathbb{N}_\infty, \forall m \in \mathbb{N}_\infty \setminus \{n\}, x_n \neq x_m$, i.e., todos los x_n (con $n \in \mathbb{N}_\infty$) son distintos. Y como hay infinitos de ellos y $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, x_N \in \text{hal}(p) \cap {}^*A \cap \{p\}^c$ (aplicando PdT a $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A \cap \{p\}^c$, véase 3.26), hemos terminado.

$[2 \Rightarrow 3]$ Dado $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, tenemos que $\text{hal}(p) \subset B_\epsilon(p) \subset {}^*B_\epsilon(p)$ (pues $x \simeq p \Rightarrow x - p \simeq 0 \Rightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, |x - p| < \epsilon$), ergo $\text{hal}(p) \cap {}^*A \subset {}^*B_\epsilon(p) \cap {}^*A$, luego $\#({}^*B_\epsilon(p) \cap {}^*A) = \infty$ por hipótesis. Así, 3.24 concluye.

$[3 \Rightarrow 4]$ Trivial.

$[4 \Rightarrow 1]$ Por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(p) \cap A \cap \{p\}^c$, luego $x_n \rightarrow p$ (ya que $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, |x_N - p| \leq \frac{1}{N} \simeq 0$ por PdT).²

$[2 \Rightarrow 5]$ Trivial.

$[5 \Rightarrow 4]$ Dado $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, tenemos que $\text{hal}(p) \subset B_\epsilon(p) \subset {}^*B_\epsilon(p)$, luego $\exists x \in \text{hal}(p) \cap {}^*A \cap \{p\}^c \subset {}^*B_\epsilon(p) \cap {}^*A \cap \{p\}^c$ por hipótesis. Y por PdT, $\exists y \in B_\epsilon(p) \cap A \cap \{p\}^c$. $\square$

Nota. Apréciase que 5.1 hace hincapié en una observación anterior, a saber: que el halo actúa a modo de «entorno infinitesimal», de modo que los resultados involucrando la colección $\{B_\epsilon(p)\}_{\epsilon>0}$ pueden restituirse en función únicamente de $\text{hal}(p)$.

Definición 5.2. Dado $A \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, decimos que p es un

¹Supongamos que $\#\{x_n\}_n < \infty$ y pongamos $\{x_n\}_n = \{x_{n_i}\}_{i=1}^m$ y $\delta = \min\{|x_{n_i} - p|\}_{i=1}^m$. Como $p \notin \{x_n\}_n$, tenemos que $\delta > 0$, luego $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - p| > \frac{\delta}{2} > 0$, en contra de $x_n \rightarrow p$. Por tanto, nos basta tomar $(x_{n_k})_k$ la parcial de $(x_n)_n$ que se obtiene al eliminar todas las repeticiones de $(x_n)_n$.

²Nótese que la prueba es esencialmente idéntica a 4.19 y 4.24, ambos resultados que motivaron esta proposición.

- **punto de acumulación de A** , y escribimos $p \in A'$, ssi cumple las condiciones de 5.1.
- **punto adherente de A** ssi $p \in \overline{A} := A \cup A'$.
- **punto aislado de A** ssi $p \in A \setminus A'$.

Observación 5.3. Dado $A \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, son equivalentes:

1. $p \in \overline{A}$.
2. $\exists (x_n)_n \subset A, x_n \rightarrow p$.
3. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, B_\epsilon(p) \cap A \neq \emptyset$.
4. $\text{hal}(p) \cap {}^*A \neq \emptyset$.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Si $p \in A$, es obvio. Y si $p \in A'$, se sigue de 5.1.

$[2 \Rightarrow 3]$ Trivial de la definición SA de límite.

$[3 \Rightarrow 4]$ Si $p \in A'$, se sigue de 5.1. Y si no, tenemos de 5.1 e hipótesis que $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, B_\epsilon(p) \cap A = \{p\}$ y, en particular, $p \in A \subset {}^*A$, luego $\text{hal}(p) \cap {}^*A \neq \emptyset$.

$[4 \Rightarrow 1]$ Si $p \in A'$, ya está. Y si no, tenemos de 5.1 e hipótesis que $\text{hal}(p) \cap {}^*A = \{p\}$ y, en particular, $p \in {}^*A \cap \mathbb{R} = A$. $\square$

Nota. Antes hemos utilizado repetidamente que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \text{hal}(p) \subset B_\epsilon(p)$, pero el recíproco también es cierto si consideramos bolas de radio infinitesimal. Ello nos sugiere:

Proposición 5.4. Dado $A \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, son equivalentes:

1. $\text{hal}(p) \subset {}^*A$.
2. $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, B_\epsilon(p) \subset A$.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Por 3.36, $|x - p| < \epsilon \simeq 0 \Rightarrow x \simeq p$, luego $\exists \epsilon \in {}^*\mathbb{R}_{>0}, \forall x \in {}^*\mathbb{R}(|x - p| < \epsilon \Rightarrow x \in {}^*A)$ por hipótesis (tomando $\epsilon \in \mathbb{I}^+$ cualquiera). Así, PdT concluye.

$[2 \Rightarrow 1]$ Sea $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_\epsilon(p) \subset A$ y, por ende, ${}^*B_\epsilon(p) \subset {}^*A$ (véase 3.25.1). Entonces, como $\text{hal}(p) \subset B_\epsilon(p) \subset {}^*B_\epsilon(p)$, hemos terminado. $\square$

Nota. Antes hemos hablado de «bolas de radio infinitesimal», pero en 4.2 definimos $B_r(c)$ únicamente para $r \in \mathbb{R}_{>0}$ y $c \in \mathbb{R}$. Ahora bien, resulta natural extender dicha definición a $B_r(c) := \{x \in {}^*\mathbb{R} : |x - c| < r\}$ si $r \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ y $c \in {}^*\mathbb{R}$ (para más información al respecto, véase [Go98, Section 10.5]), de modo que la demostración anterior quedaría como: « $\exists \epsilon \in {}^*\mathbb{R}_{>0}, \forall x \in {}^*\mathbb{R}(x \in B_\epsilon(p) \Rightarrow x \in {}^*A)$ se transfiere a $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in \mathbb{R}(x \in B_\epsilon(p) \Rightarrow x \in A)$ », lo que nos sugiere un Principio de Transferencia para subconjuntos de ${}^*\mathbb{R}$ definidos a partir de una fórmula de $\mathcal{L}$, con $\mathcal{L}$ como en la sección 3.3. A dichos conjuntos se los conoce como conjuntos internos (véase [HuLo85, Section II.6], [Go98, Section 11.7]), y son una herramienta fundamental del análisis no estándar, que, por cuestiones de tiempo y espacio, no abordamos en este TFG, como ya adelantamos en 4.20.

Definición 5.5. Decimos que $p \in \mathbb{R}$ es un **punto interior de A** , y escribimos $p \in A^\circ$, ssi cumple las condiciones de 5.4.

Observación 5.6. Claramente $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$.

5.2. Abiertos y cerrados

En la sección anterior hemos utilizado varios resultados de la subsección 3.2.1, concernientes, más concretamente, al cardinal y la inclusión. Ello nos sugiere explotar otras propiedades similares, como los análogos para la unión e intersección (véase 3.27). Por ejemplo:

Observación 5.7. Como $p \in A_i^\circ \Rightarrow \text{hal}(p) \subset {}^*A_i$, tenemos que $p \in \bigcap_{i=1}^n A_i^\circ \Rightarrow \text{hal}(p) \subset \bigcap_{i=1}^n {}^*A_i = {}^*\bigcap_{i=1}^n A_i$, i.e., $\bigcap_{i=1}^n A_i^\circ \subset (\bigcap_{i=1}^n A_i)^\circ$.³ Y por 5.6, $\bigcap_{i=1}^n A_i = (\bigcap_{i=1}^n A_i)^\circ$ si $\forall i, A_i = A_i^\circ$.

³Más aún, 3.27 nos sugiere que el resultado es falso para intersecciones arbitrarias, véase 5.13.

Definición. Decimos que $A \subset \mathbb{R}$ es un **abierto (de $\mathbb{R}$)**, y escribimos $A \in \tau$, ssi $A = A^\circ$.

Nota. La idea es clara: un conjunto A es abierto ssi todo punto p de A tiene un «entorno infinitesimal» (su halo) contenido en *A , i.e., ssi $\forall p \in A (x \simeq p \Rightarrow x \in {}^*A)$ o, en palabras, ssi los puntos infinitamente próximos a (algún punto de) A son de *A .

Proposición 5.8. *El conjunto τ es una topología abierta de $\mathbb{R}$.*

Demostración. 1) Por vacuidad, $\emptyset \in \tau$, y como $\forall p \in \mathbb{R}, \text{hal}(p) = \{p + \epsilon : \epsilon \in \mathbb{I}\} \subset {}^*\mathbb{R}$, también $\mathbb{R} \in \tau$.

2) Si $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, entonces $\cap_{i=1}^n A_i \in \tau$ por 5.7.

3) Por analogía, si $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$, con I arbitrario, entonces $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$. $\square$

Corolario. *Por las leyes de De Morgan, $\tau^c := \{A^c : A \in \tau\}$ es una topología cerrada de $\mathbb{R}$.*

Siguiendo la misma filosofía, esta vez para el complementario:

Observación 5.9. Dados $A \subset \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$, se tiene: $p \in \overline{A}^c$ ssi $\text{hal}(p) \cap {}^*A = \emptyset$ ssi $\text{hal}(p) \subset ({}^*A)^c = {}^*(A^c)$ ssi $p \in (A^c)^\circ$. Por tanto, $\overline{A}^c = (A^c)^\circ$, lo que nos lleva a:

Proposición 5.10. $\tau^c = \{A \subset \mathbb{R} : A = \overline{A}\}$.

Demostración. Como $A \in \tau^c$ ssi $A^c \in \tau$ ssi $A^c = (A^c)^\circ$, se sigue de la observación anterior que $A \in \tau^c$ ssi $A^c = \overline{A}^c$, i.e., ssi $A = \overline{A}$. $\square$

Definición. Decimos que A es un **cerrado (de $\mathbb{R}$)** ssi $A \in \tau^c$.

Nota. La idea es clara: un conjunto A es cerrado ssi todo punto p de $\mathbb{R}$ con un «entorno infinitesimal» (su halo) intersecando *A es de A (véase 5.3.4), i.e., ssi $\forall p \in \mathbb{R} (p \simeq x \in {}^*A \Rightarrow p \in A)$ o, en palabras, ssi los puntos infinitamente próximos a (algún punto de) *A son de A . De hecho, como $p \simeq x \Leftrightarrow p = \text{sh } x$ al ser $p \in \mathbb{R}$ (véase 3.34, 3.42), ello equivale a que las sombras de los elementos limitados de *A sean de A . Por último, y como es usual, obtenemos de 5.3.2 que A es cerrado ssi toda sucesión de A converge en A .

Ejemplo 5.11. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ distintos. Entonces $(a, b), (-\infty, a), (b, +\infty) \in \tau$.

Demostración. Si $p \in (a, b)$ y $x \simeq p$, entonces $x \in {}^*(a, b)$ por 3.38.1, y análogamente con $(-\infty, a), (b, +\infty)$. $\square$

Corolario. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $[a, b] = ((-\infty, a) \cup (b, +\infty))^c \in \tau^c$.

Proposición. *Los racionales son densos en los reales, i.e., $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Demostración. $[\subset]$ Es claro de 5.3 que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$, luego $\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

$[\supset]$ Por 5.3.2, usando que todo real tiene una representación decimal. $\square$

Corolario 5.12. Sean $p \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces existen $q \in \mathbb{Q}, s \in \mathbb{Q}_{>0}$ tales que $B_s(q) \subset B_r(p)$.

Demostración. Como $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$, tenemos que $\exists q \in B_r(p) \cap \mathbb{Q}$, luego $B_s(q) \subset B_r(p)$ tomando $s = |p + r - q|/2$. Y por arquimedianidad, $\exists n \in \mathbb{N}, B_{\frac{1}{n}}(q) \subset B_s(q)$. $\square$

Observación 5.13. Claramente ${}^*(\cap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) \neq \cap_{n \in \mathbb{N}} {}^*(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, pues $\cap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \mathbb{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$ y $\cap_{n \in \mathbb{N}} {}^*(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \mathbb{I} = \text{hal}(0)$.

Esta última igualdad nos sugiere:

Proposición. Dado $p \in \mathbb{R}$, se cumple: $\text{hal}(p) = \cap \{{}^*A : p \in A \in \tau\}$.

Demostración. $[\subset]$ Obvio, pues $\text{hal}(p) \subset {}^*A$ siempre que $p \in A \in \tau$.

$[\supset]$ (Por contrarrecíproco) Sea $x \notin \text{hal}(p)$ y hallemos $A \in \tau$ tal que $x \notin {}^*A$: como $x - p \neq 0$, tenemos que $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, |x - p| > \epsilon$, luego $x \notin {}^*B_\epsilon(p)$, con $B_\epsilon(p) \in \tau$ por 5.11. $\square$

Nota. Aunque no vamos a entrar en ello, si quisiéramos estudiar un espacio topológico (X, τ_X) cualquiera mediante herramientas no estándar, podríamos tomar la proposición anterior como definición, prescindiendo así de la noción de distancia inherente en nuestra definición de $\text{hal}(p)$, véase [Ro66, Chapter 4], [HuLo85, Chapter 3], [ArCuHe97, Article 3].

5.3. Compactos

Nota. (Idea) Acabamos de ver que $x \notin \text{hal}(p) \Rightarrow \exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, x \notin {}^*B_\epsilon(p)$, luego $x \notin \cup_{p \in A} \text{hal}(p) \Rightarrow \forall p \in A, \exists \epsilon_p \in \mathbb{R}_{>0}, x \notin {}^*B_{\epsilon_p}(p)$, donde claramente $\mathcal{R} = \{B_{\epsilon_p}(p)\}_{p \in A}$ es un recubrimiento por abiertos de A que, si $x \in {}^*A$, no tiene subrecubrimientos finitos (por absurdo y 3.27). En cuanto a la posibilidad de un recíproco, investigaremos primero las consecuencias inmediatas de esta condición.

Definición. Decimos que $A \subset \mathbb{R}$ es un **compacto (de $\mathbb{R}$)** ssi todo recubrimiento por abiertos de A tiene un subrecubrimiento finito.

Nota. Todo conjunto tiene recubrimientos por abiertos: $A \subset \cup_{p \in A} B_\epsilon(p)$, con $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ cualquiera.

Lema. Si $A \subset \mathbb{R}$ no es compacto, entonces A tiene un recubrimiento numerable por abiertos sin subrecubrimientos finitos.

Demostración. Sea $\mathcal{R} = \{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de A sin subrecubrimientos finitos, de manera que $\forall p \in A, \exists i_p \in I, p \in A_{i_p}$ y, como A_{i_p} es abierto, $\exists \epsilon_p \in \mathbb{R}_{>0}, B_{\epsilon_p}(p) \subset A_{i_p}$. De hecho, $\exists q_p \in \mathbb{Q}, \exists \delta_p \in \mathbb{Q}_{>0}, B_{\delta_p}(q_p) \subset B_{\epsilon_p}(p)$ por 5.12, obteniendo así $\mathcal{R}' = \{B_{\delta_p}(q_p)\}_{p \in A}$ un recubrimiento de A por intervalos abiertos de extremos racionales tal que $\forall B' \in \mathcal{R}', \exists B \in \mathcal{R}, B' \subset B$ (pues $\forall p \in A, p \in B_{\delta_p}(q_p) \subset B_{\epsilon_p}(p) \subset A_{i_p}$), de modo que $\mathcal{R}'$ no tiene subrecubrimientos finitos de A (pues en tal caso serían también subrecubrimientos de $\mathcal{R}$).

Ahora bien, el conjunto de todos los posibles intervalos con extremos racionales es numerable (pues $\mathbb{Q}$ es numerable y el producto cartesiano de numerables lo es), luego $\mathcal{R}'$ es numerable. Y por 5.11, $\mathcal{R}'$ es un recubrimiento por abiertos. $\square$

Teorema 5.14. (Criterio de compacidad de Robinson) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto ssi ${}^*A \subset \cup_{p \in A} \text{hal}(p)$ (i.e., ssi $\forall x \in {}^*A, \exists p \in A, x \simeq p$).

Demostración. $[\Rightarrow]$ (Por contrarrecíproco) Sea $x \in {}^*A \setminus \cup_{p \in A} \text{hal}(p)$, de modo que $\forall p \in A, \exists \epsilon_p \in \mathbb{R}_{>0}, x \notin {}^*B_{\epsilon_p}(p)$, con $\mathcal{R} = \{B_{\epsilon_p}(p)\}_{p \in A}$ un recubrimiento por abiertos de A , y supongamos que existe $\{B_{\epsilon_i}(p_i)\}_{i=1}^n$ un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$. Entonces ${}^*A \subset {}^*\cup_{i=1}^n B_{\epsilon_i}(p_i) = \cup_{i=1}^n {}^*B_{\epsilon_i}(p_i)$, luego $\exists i, x \in {}^*B_{\epsilon_i}(p_i)$!!! Por tanto, $\mathcal{R}$ es un recubrimiento por abiertos de A sin subrecubrimientos finitos, ergo A no es compacto.

$[\Leftarrow]$ (Por contrarrecíproco) Sea $\mathcal{R} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento numerable por abiertos de A sin subrecubrimientos finitos (que existe por el lema), de modo que $\forall m \in \mathbb{N}, A \not\subset \cup_{n=1}^m A_n$, i.e.:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists x \in A, \forall n \in \mathbb{N}_{\leq m}, x \in A_n^c$$

Entonces, dado $m \in \mathbb{N}_\infty$, tenemos que $\exists x \in {}^*A, \forall n \in {}^*\mathbb{N}_{\leq m}, x \in {}^*A_n^c$ por PdT y, en particular, $\forall n \in \mathbb{N}, x \in {}^*A_n^c$. Pero $x \notin \cup_{p \in A} \text{hal}(p)$, pues si $x \simeq p$ para algún $p \in A$, como $p \in A_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ por ser $\mathcal{R}$ un recubrimiento de A , tendríamos que $x \in {}^*A_k$ por ser A_k abierto !!! Por tanto, $x \in {}^*A \setminus \cup_{p \in A} \text{hal}(p)$. $\square$

Nota. Aunque no vamos a entrar en ello, y salvo por el lema, la demostración es considerablemente general, y podría adaptarse fácilmente a (X, τ_X) un espacio topológico cualquiera, véase [Ro66, 4.1.13], [HuLo85, Chapter 3, 2.2], [ArCuHe97, Article 3, 5.1]. En cuanto al lema, necesitaríamos más maquinaria lógica (más concretamente, las relaciones de concurrencia).

Ejemplo. Los conjuntos finitos son compactos por 3.23.

Observación. Como $x \simeq p \Leftrightarrow \text{sh } x = p$ al ser $p \in \mathbb{R}$, podemos reformular el criterio de Robinson como: todo elemento de *A tiene sombra en A . Ahora bien, recordando que A es cerrado ssi todo elemento limitado de *A tiene sombra en A , llegamos fácilmente a:

Teorema 5.15. (de Heine-Borel) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto ssi A es cerrado y acotado.

Demostración. (NSA) [$\Leftarrow$] Como A es acotado, todos los elementos de *A tienen sombra (véase 4.8). Y como A es cerrado, éstas caen en A .

[$\Rightarrow$] (Por contrarrecíproco) 1) Si $A \subset \mathbb{R}$ no es acotado, entonces $\exists x \in {}^*A \cap \mathbb{R}_\infty$, que por ende no tiene sombra, ergo A no puede ser compacto.

2) Si $A \subset \mathbb{R}$ no es cerrado, entonces $\exists a \in \overline{A} \setminus A$ y, por 5.3, $\exists x \in {}^*A \cap \text{hal}(a)$, con $\text{sh } x = a \notin A$, ergo A no puede ser compacto. $\square$

Corolario. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto ssi es secuencialmente compacto (i.e., ssi toda sucesión de A tiene una parcial convergiendo en A).*

Demostración. [$\Rightarrow$] Sea $(x_n)_n \subset A$, con A acotado y cerrado por Heine-Borel. Entonces $(x_n)_n$ tiene una parcial convergente por Bolzano-Weierstrass al ser A acotado, cuyo límite es de A por ser A cerrado.

[$\Leftarrow$] Por Heine-Borel, es suficiente ver:

1. $\overline{A} \subset A$. En efecto, si $p \in \overline{A}$, entonces existe $(x_n)_n \subset A$ tal que $x_n \rightarrow p$, que tiene una parcial $(x_k)_k$ convergiendo en A por hipótesis. Pero como $(x_n)_n$ converge a p , necesariamente $(x_k)_k$ también, luego $p \in A$.
2. A está acotada. Si no, entonces $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, |x_n| > n$ y, en particular, cualquier parcial de $(x_n)_n$ diverge a ∞ !!!

$\square$

Terminamos el capítulo recordando la demostración del teorema de Heine-Borel que se ve en la asignatura *Anàlisi Matemàtica* para que el lector pueda apreciar mejor la potencia del criterio de Robinson. Y para ello, probamos primero los siguientes lemas:

Lema. *El conjunto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es compacto para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$.*

Demostración. (NSA) Obvio de Heine-Borel, o usando que ${}^*[a, b] \subset \mathbb{L}$ y que sh preserva $\leq$. $\square$

Demostración. (SA) Por reducción al absurdo. Supongamos que $I_0 = [a, b]$ no es compacto, i.e., que existe $\{G_i\}_{i \in \Lambda}$ un recubrimiento por abiertos de I_0 del cual no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito. Entonces, como $I_0 = J_0 \cup K_0$ con $J_0 = [a, \frac{a+b}{2}]$, $K_0 = [\frac{a+b}{2}, b]$, tenemos que $\exists I_1 \in \{J_0, K_0\}$ del que tampoco se puede extraer ningún subrecubrimiento finito. E iterando el proceso, obtenemos una sucesión $(I_n)_n$ de intervalos encajados sin subrecubrimientos finitos, de modo que:

1. $\cap_n I_n \neq \emptyset$, i.e., $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x \in I_n \subset [a, b] \subset \cup_{i \in \Lambda} G_i$ (pues $I_n \downarrow$), de modo que $\exists k \in \Lambda, x \in G_k \in \tau$ y, por ende, $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, B_\delta(x) \subset G_k$.
2. $|I_n| \rightarrow 0$, i.e., $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, b_n - a_n < \epsilon$. Y como $\forall n \in \mathbb{N}, x \in I_n$, tomando $\epsilon = \delta$ y $n \geq n_0$ nos queda que $x - \delta < a_n$ y $b_n < x + \delta$,⁴ luego $I_n \subset B_\delta(x)$ y, por 1, podemos recubrir I_n por G_k !!!

$\square$

Lema. *Todo subconjunto cerrado A de un compacto B es compacto.*

Demostración. (NSA) Por 3.25.1, ${}^*A \subset {}^*B$, luego todo $x \in {}^*A$ tiene sombra en B por la compacidad de B . Y como A es cerrado, tenemos de hecho $\text{sh } x \in A$. $\square$

Demostración. (SA) Sea $\{A_i\}_i$ un recubrimiento por abiertos de A , de modo que $B \subset A \cup A^c \subset \cup_i A_i \cup A^c$, con $A^c \in \tau$ por hipótesis. Entonces $B \subset \cup_{j=1}^n A_{i_j} \cup A^c$ por compacidad, ergo $A = B \cap A \subset (\cup_{j=1}^n A_{i_j} \cup A^c) \cap A = ((\cup_{j=1}^n A_{i_j}) \cap A) \cup (A^c \cap A) \subset \cup_{j=1}^n A_{i_j}$. $\square$

Teorema. *(de Heine-Borel) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto ssi A es cerrado y acotado.*

⁴Más explícitamente, $x \in I_n \Rightarrow a_n \leq x \leq b_n \Rightarrow a_n - b_n \leq x - b_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq b_n - x \leq b_n - a_n < \delta \Rightarrow b_n < x + \delta$.

Demostración. (SA) [$\Leftarrow$] Como A es acotado, $\exists k \in \mathbb{R}_{>0}$, $A \subset [-k, k]$, luego los dos lemas anteriores concluyen.

[$\Rightarrow$] Vayamos por partes:

1. A es acotado pues:

- a) Como $A \subset \cup_{x \in A} B_1(x)$, por compacidad existe J finito tal que $A \subset \cup_{j \in J} B_1(x_j)$.
- b) Si $y \in B_1(x_j)$, entonces $|y - x_0| \leq |y - x_j| + |x_j - x_0| < 1 + |x_j - x_0|$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ cualquiera fijado.
- c) Por tanto, $r = \max_{j \in J} r_j$ es cota, con $r_j = 1 + |x_j - x_0|$, pues $\forall j \in J, B_1(x_j) \stackrel{(b)}{\subset} B_{r_j}(x_0)$ y por ende $A \subset \cup_{j \in J} B_1(x_j) \subset \cup_{j \in J} B_{r_j}(x_0) \subset B_r(x_0)$.

2. Para ver que A es cerrado, fijemos $p \in A^c$ y veamos que $\exists \delta > 0, B_\delta(p) \subset A^c$.

- a) Dado $q \in A$, sea $r_q = \frac{1}{2} |p - q|$, $V_q = B_{r_q}(p)$ y $W_q = B_{r_q}(q)$. Entonces:
 - 1) Como $A \subset \cup_{q \in A} W_q$, tenemos $A \subset \cup_{j=1}^n W_{q_j}$ por compacidad, luego $W^c \subset A^c$ con $W = \cup_{j=1}^n W_{q_j}$.
 - 2) Sea $V = \cap_{j=1}^n V_{q_j}$. Entonces $V = B_\delta(p)$ con $\delta = \min_j r_{q_j} = \frac{1}{2} \min_j |p - q_j|$.
- b) Afirimo que $V \cap W = \emptyset$, pues (por absurdo) si $\exists z \in V \cap W$, entonces:
 - 1) $z \in W \Rightarrow \exists k, z \in W_{q_k} \Rightarrow |z - q_k| < r_{q_k} = \frac{1}{2} |p - q_k|$.
 - 2) $z \in V \Rightarrow |z - p| < \min_j r_{q_j} = \frac{1}{2} \min_j |p - q_j| \leq \frac{1}{2} |p - q_k|$.
 - 3) Por tanto, $|p - q_k| < |p - z| + |z - q_k| < |p - q_k|$!!!
- c) Por tanto, $V \stackrel{(b)}{\subset} W^c \subset A^c$.

□

Capítulo 6

Límites de aplicaciones

6.1. Rudimentos

Notación. Fijamos para todo el capítulo $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$, $l \in \mathbb{R}$.

Definición 6.1. Decimos que l es el límite de f en a , y escribiremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, ssi $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\forall x \in A \cap B_\delta(a) \cap \{a\}^c$, $f(x) \in B_\epsilon(l)$ (i.e., $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $f(A \cap B_\delta(a) \cap \{a\}^c) \subset B_\epsilon(l)$).

Nota. La idea para nuestra traducción es clara: cambiar las bolas por halos, obteniendo así, como resulta natural, que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ssi todo punto de *A distinto de a pero infinitamente próximo a él tiene imagen por f infinitamente próxima a l .

Proposición 6.2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ssi $\forall x \in {}^*A \cap \text{hal}(a) \cap \{a\}^c$, $f(x) \simeq l$ (i.e., $f({}^*A \cap \text{hal}(p) \cap \{a\}^c) \subset \text{hal}(l)$).

Demostración. $[\Rightarrow]$ Fijemos $y \in {}^*A \cap \text{hal}(a) \cap \{a\}^c$ y $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces, por hipótesis y PdT, $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\forall x \in {}^*A \cap {}^*B_\delta(a) \cap \{a\}^c$, $f(x) \in {}^*B_\epsilon(l)$, luego $f(y) \in {}^*B_\epsilon(l)$ (pues $\forall \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\text{hal}(a) \subset {}^*B_\delta(a)$). Así, $f(y) \simeq l$ por la arbitrariedad de $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

$[\Leftarrow]$ Por PdT, nos basta ver que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\forall x \in {}^*A (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \in {}^*B_\epsilon(l))$. Ahora bien, dados $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $d \in \mathbb{I}^+$ y $x \in {}^*A$ tal que $0 < |x - a| < d$ cualesquiera, tenemos que $x \simeq a$ y, por hipótesis, $f(x) \simeq l$, luego $f(x) \in {}^*B_\epsilon(l)$. $\square$

Observación 6.3. Acabamos de probar que la condición

$$\exists d \in \mathbb{I}^+, \forall x \in {}^*A (0 < |x - a| < d \Rightarrow f(x) \simeq l)$$

implica $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. Ahora bien, como $|x - a| < d \simeq 0 \Rightarrow x \simeq a$, tenemos de hecho que los siguientes son equivalentes:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.
2. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\forall x \in A (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$.
3. $\exists d \in \mathbb{I}^+$, $\forall x \in {}^*A (0 < |x - a| < d \Rightarrow f(x) \simeq l)$.
4. $\forall x \in {}^*A (x \neq a, x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq l)$.

Más aún, como $l \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(x) \simeq l$ ssi $l = \text{sh } f(x)$ (y análogamente para a), luego 4 es equivalente a:

5. $\forall x \in {}^*A (x \neq a, \text{sh } x = a \Rightarrow \text{sh } f(x) = l)$.

Por otra parte, si $a \in A^\circ$, entonces (por 5.4) podemos cambiar la hipótesis $x \in {}^*A$ por $x \in {}^*\mathbb{R}$ en 3, 4 y 5, y la hipótesis $x \in A$ por $x \in \mathbb{R}$ en 2.

Definición. Dado $r \in \mathbb{R}_{>0}$, se definen $B_r(+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > c\}$, $B_r(-\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x < -c\}$, $B_r(\infty) := \{x \in \mathbb{R} : |x| > c\}$ los **entornos de $+\infty, -\infty, \infty$ asociados a r** , respectivamente.

Observación. Podemos generalizar 6.1 admitiendo $a \in \{+\infty, -\infty, \infty\}$, $l \in \{+\infty, -\infty, \infty\}$, y es fácil ver que su equivalencia NSA cambia $B_r(+\infty)$, $B_r(-\infty)$, $B_r(\infty)$ por $\mathbb{R}_\infty^+$, $\mathbb{R}_\infty^-$, $\mathbb{R}_\infty$ respectivamente, como resulta natural. Así, e.g., $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ssi f alcanza valores infinitos en el infinito o, más formalmente:

Proposición 6.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ssi $\forall x \in {}^*A_\infty, f(x) \in \mathbb{R}_\infty$ (i.e., $f({}^*A_\infty) \subset \mathbb{R}_\infty$).

Demostración. $[\Rightarrow]$ Fijemos $y \in {}^*A_\infty$ y $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces, por hipótesis y PdT, $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in {}^*A \cap {}^*B_\delta(\infty), f(x) \in {}^*B_\epsilon(\infty)$, luego $f(y) \in {}^*B_\epsilon(\infty)$ (pues $\forall r \in \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_\infty \subset {}^*B_r(\infty)$). Así, $f(x) \in \mathbb{R}_\infty$ por la arbitrariedad de $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

$[\Leftarrow]$ Por PdT, nos basta ver que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_{>0}, \forall x \in {}^*A (|x| > \delta \Rightarrow f(x) \in {}^*B_\epsilon(\infty))$. Ahora bien, dados $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, d \in \mathbb{R}_\infty^+$ y $x \in {}^*A$ tal que $|x| > d$ cualesquiera, tenemos que $x \in \mathbb{R}_\infty$ y, por hipótesis, $f(x) \in \mathbb{R}_\infty$, luego $f(x) \in {}^*B_\epsilon(\infty)$. $\square$

Nota. En 6.2, como $a \in A'$, ya teníamos que $A \cap B_\delta(a) \cap \{a\}^c$ y ${}^*A \cap \text{hal}(a) \cap \{a\}^c$ eran no vacíos. Sin embargo, si $a \in \{+\infty, -\infty, \infty\}$, las correspondientes condiciones deben imponerse, o en caso contrario las respectivas implicaciones serían triviales. Así, e.g., en la proposición anterior hemos supuesto ${}^*A \cap {}^*B_\delta(\infty)$ y ${}^*A_\infty$ no vacíos.

Por otra parte, y aunque no vamos a entrar en ello, la similitud entre las demostraciones de 5.4, 6.2 y 6.4 nos sugiere la existencia de ciertos principios generales de la misma clase que 4.5 y 4.25. Para más detalles, véase [Go98, Section 7.10], [HuLo85, Chapter 2, Theorem 7.1].

Proposición 6.5. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ssi $\lim_n f(x_n) = l$ para cualquier $(x_n)_n \subset A \cap \{a\}^c$ tal que $\lim x_n = a$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Dado $M \in \mathbb{N}_\infty$ y $(x_n)_n \subset A \cap \{a\}^c, x_n \rightarrow a$ (que existe por ser $a \in A'$), tenemos en particular que $x_M \in {}^*A \cap \text{hal}(a) \cap \{a\}^c$, luego $f(x_M) \simeq l$ por hipótesis.

$[\Leftarrow]$ (Por absurdo) Supongamos que $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \exists x \in A \cap B_\delta(a) \cap \{a\}^c, f(x) \notin B_\epsilon(l)$. En particular, $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A \cap B_{\frac{1}{n}}(a) \cap \{a\}^c, f(x_n) \notin B_\epsilon(l)$, ergo $x_n \rightarrow a$ con $(x_n)_n \subset A \cap \{a\}^c$ y, por hipótesis, $f(x_n) \rightarrow l$, en contra de $f(x_n) \notin B_\epsilon(l)$. $\square$

Observación 6.6. Como consecuencia, los límites de funciones heredan trivialmente muchas de las propiedades de los límites de sucesiones, como la unicidad o el buen comportamiento respecto $(\mathbb{R}^N, +, \cdot, \leq)$.

Ejemplo. El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ no existe, pero $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Demostración. 1) Dado $N \in \mathbb{N}_\infty$, sean $x = \frac{2}{(4N+1)\pi}, y = \frac{2}{(4N+3)\pi} \in \text{hal}(0) \setminus \{0\}$. Entonces $\sin \frac{1}{x} = 1$ (aplicando PdT a $\sin \frac{n\pi}{2} = 1$ si $n \equiv 1 \pmod{4}$) y, análogamente, $\sin \frac{1}{y} = -1$, en contra de la unicidad del límite. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ no existe.

2) Sea $x \in \text{hal}(0) \setminus \{0\}$. Como $\sin \frac{1}{x} \in \mathbb{L}$ (aplicando PdT a $\forall r \in \mathbb{R}, |\sin r| \leq 1$), tenemos que $x \sin \frac{1}{x} \simeq 0$. $\square$

Definición 6.7. Dados $B \subset A, b \in B'$, definimos $\lim_{x \rightarrow b, x \in B} f(x) := \lim_{x \rightarrow b} (f \upharpoonright B)(x)$ el **límite de f en b según B** .

Nota. Así, $\lim_{x \rightarrow b, x \in B} f(x) = l$ ssi $\forall x \in {}^*B \cap \text{hal}(b) \cap \{b\}^c, f(x) \simeq l$.

Observación. Dados $B \subset A, b \in B'$, si $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = l$, entonces $\lim_{x \rightarrow b, x \in B} f(x) = l$. Recíprocamente:

Proposición 6.8. Sean $A = \cup_{i=1}^n B_i, b \in B'_i$ para todo i . Si $\forall i, \lim_{x \rightarrow b, x \in B_i} f(x) = l$, entonces $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = l$.

Demostración. Si $x \in {}^*A \cap \text{hal}(b) \cap \{b\}^c$, como ${}^*A = \cup_{i=1}^n {}^*B_i$, tenemos que $\exists i, x \in {}^*B_i \cap \text{hal}(b) \cap \{b\}^c$, luego $f(x) \simeq l$ por hipótesis. $\square$

6.2. Continuidad

Definición 6.9. Sea $p \in A$. Si $p \in A'$, decimos que f es **continua en p** ssi $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$. Si no, decimos siempre que f es continua en p .

Observación 6.10. Dado $p \in A$, son equivalentes:

1. f es continua en p .
2. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in A (|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon)$.
3. $\exists d \in \mathbb{I}^+, \forall x \in {}^*A (|x - p| < d \Rightarrow f(x) \simeq f(p))$.
4. $\forall x \in {}^*A (x \simeq p \Rightarrow f(x) \simeq f(p))$.
5. $\forall x \in {}^*A (\text{sh } x = p \Rightarrow \text{sh } f(x) = f(\text{sh } x))$.
6. $f(x_n) \rightarrow f(p)$ siempre que $(x_n)_n \subset A$ y $x_n \rightarrow p$.

Demostración. Si $p \notin A'$, entonces todas las condiciones son triviales. Y si $p \in A'$, entonces se sigue de los resultados anteriores, notando que el caso $x = p$ es trivial. $\square$

Definición. Dado $B \subset A$, decimos que f es **continua en B** , y escribimos $f \in \mathcal{C}(B)$, ssi f es continua en todo punto de B .

Observación. Por 6.6, si $f, g \in \mathcal{C}(B)$, entonces $f + g, fg \in \mathcal{C}(B)$. Y si $0 \notin \text{Im } g$, también $g^{-1} \in \mathcal{C}(B)$. En particular, los polinomios son continuos en todo $\mathbb{R}$ (pues la función identidad lo es trivialmente), y también las funciones racionales en todo punto en que no se anule el denominador.

Proposición. Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(A) \subset B$, y supongamos que f es continua en A y g es continua en $f(A)$. Entonces $g \circ f$ es continua en A .

Demostración. Sea $p \in A, x \in {}^*A \cap \text{hal}(p)$. Entonces $f(x) \simeq f(p)$ por la continuidad de f , con $f(p) \in f(A)$ y $f(x) \in f({}^*A) = {}^*f(A) \subset {}^*B$ al ser $f(A) \subset B$, luego $g(f(x)) \simeq g(f(p))$ por la continuidad de g . $\square$

Ejemplo. Por 3.39, la aplicación valor absoluto es continua en $\mathbb{R}$.

Nota. Por el teorema de Bolzano (que veremos en el próximo capítulo), $\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists! y \in \mathbb{R}_{\geq 0}, y^n = x$. Dicho y se escribe $\sqrt[n]{x}$.

Ejemplo. Dado $n \in \mathbb{N}$, la aplicación raíz n -ésima $\sqrt[n]{\cdot}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Demostración. Dado $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sea $x \in {}^*\mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $x \simeq p$, de modo que $x \in \mathbb{L}$ y por ende $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{L}$ (e.g., porque $\sqrt[n]{\cdot}$ es creciente, o porque $\sqrt[n]{x} \leq \max\{x, 1\} \in \mathbb{L}$). Sea también $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $P_n(y) = y^n$, que es continua en tanto que polinomio. Entonces $\text{sh}(P_n(\sqrt[n]{x})) = P_n(\text{sh } \sqrt[n]{x})$ y, usando que $P_n(\sqrt[n]{x}) = x$ y aplicando $\sqrt[n]{\cdot}$ a banda y banda, $\sqrt[n]{\text{sh } x} = \text{sh } \sqrt[n]{x}$. $\square$

Ejemplo 6.11. La aplicación coseno es continua en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sean $p \in \mathbb{R}, x \simeq p$, y pongamos $x = p + \epsilon$ con $\epsilon \simeq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \cos x - \cos p &= \cos(p + \epsilon) - \cos p \\ &= \cos p \cos \epsilon - \sin p \sin \epsilon - \cos p \\ &= \cos p (\cos \epsilon - 1) - \sin p \sin \epsilon \end{aligned}$$

aplicando PdT a $\forall r, s \in \mathbb{R}, \cos(r + s) = \cos r \cos s - \sin r \sin s$. Por tanto, si demostramos que $\cos \epsilon \simeq 1$ y $\sin \epsilon \simeq 0$ (i.e., que $\cos, \sin$ son continuos en 0), habremos terminado. En efecto:

- $\forall r \in \mathbb{R}, |\sin r| \leq |r|$, luego $\forall r \in {}^*\mathbb{R}, |\sin r| \leq |r|$ y, en particular, $|\sin \epsilon| \leq |\epsilon| \simeq 0$, ergo $\sin \epsilon \simeq 0$.
- $\cos \epsilon = \sqrt{1 - (\sin \epsilon)^2} \simeq \sqrt{1 - 0^2} = 1$.

□

Teorema. (de Weierstrass) Sea $f \in \mathcal{C}(A)$ y K un compacto (de $\mathbb{R}$) contenido en A . Entonces $f(K)$ es un compacto.

Demostración. Sea $y \in {}^*f(K) = f({}^*K)$, de modo que $y = f(x)$ para algún $x \in {}^*K$ y, por compacidad, $\text{sh } x \in K$ y, por continuidad, $f(\text{sh } x) \simeq f(x) = y$. Entonces $\text{sh } y = f(\text{sh } x) \in f(K)$. □

Corolario 6.12. Sea $f \in \mathcal{C}(K)$, con K compacto no vacío. Entonces $f(K)$ tiene mínimo y máximo.

Demostración. Por Heine-Borel y Weierstrass, $f(K)$ es acotado y cerrado, luego tiene supremo e ínfimo por la Dedekind completitud, que se alcanzan por 4.19 al ser $f(K)$ cerrado. □

Definición. Dado $B \subset A$, decimos que f es **uniformemente continua en B** ssi $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x, y \in B (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$.

Proposición. La aplicación f es uniformemente continua en B ssi $\forall x, y \in {}^*B (x \simeq y \Rightarrow f(x) \simeq f(y))$.

Demostración. Análoga a 6.2. □

Nota. Así, podemos repensar la continuidad uniforme como una continuidad sobre *B en lugar de B .

Ejemplo. Por 3.39, la aplicación valor absoluto es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Observación. Si f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ y $(s_n)_n \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy (i.e., $\forall n, m \in \mathbb{N}, s_n \simeq s_m$), entonces $(f(s_n))_n \subset \mathbb{R}$ también es de Cauchy (pues $s_n \simeq s_m \Rightarrow f(s_n) \simeq f(s_m)$ por la continuidad uniforme).

Teorema. (de Heine-Cantor) Sea $f \in \mathcal{C}(K)$, con K compacto. Entonces f es uniformemente continua.

Demostración. (NSA) Si $x, y \in {}^*K$, entonces $\text{sh } x, \text{sh } y \in K$ por compacidad. Y si $x \simeq y$, entonces $\text{sh } x = \text{sh } y$, luego $f(x) \simeq f(\text{sh } x) = f(\text{sh } y) \simeq f(y)$ por continuidad. □

Demostración. (SA) Sea $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Como $f \in \mathcal{C}(K)$, tenemos que $\forall p \in K, \exists \delta_p (|p - q| < \delta_p \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \frac{\epsilon}{2})$. Y por compacidad, $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\frac{\delta_j}{2}}(p_j)$ para alguna colección $\{p_j\}_{j=1}^n$, con $\delta_j = \delta_{p_j}$ (pues $K \subset \bigcup_{p \in K} B_{\frac{\delta_p}{2}}(p)$). Sea ahora $\delta = \frac{1}{2} \min_j \delta_j$. Afirimo entonces que $\forall p, q \in K (|p - q| < \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \epsilon)$. En efecto:

1. $p \in K \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\frac{\delta_j}{2}}(p_j) \Rightarrow \exists k, |p - p_k| < \frac{1}{2} \delta_k < \delta_k \xrightarrow{f \in \mathcal{C}(K)} |f(p) - f(p_k)| < \frac{\epsilon}{2}$.
2. $|q - p_k| \leq |q - p| + |p - p_k| < \frac{1}{2} \min_j \delta_j + \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \xrightarrow{f \in \mathcal{C}(K)} |f(q) - f(p_k)| < \frac{\epsilon}{2}$.
3. Por tanto, $|f(p) - f(q)| \leq |f(p) - f(p_k)| + |f(p_k) - f(q)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

□

Observación. La condición K compacto no es prescindible. Por ejemplo, $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ es continua por 3.35 (pues $0 \notin \text{Dom } f$), pero no es uniformemente continua (pues si $N \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{1}{N}, \frac{1}{N+1} \in {}^*(0, 1)$, $\frac{1}{N} \simeq \frac{1}{N+1}$ pero $N = f(\frac{1}{N}) \not\simeq f(\frac{1}{N+1}) = N + 1$).

6.3. Derivabilidad

Definición. Sea $p \in A^\circ$. Decimos que f es **derivable en p** ssi el límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ existe y es finito (i.e., si es igual a algún número real), y en tal caso designamos por $f'(p)$ a dicho límite y decimos que $f'(p)$ es la derivada de f en p .

Nota. La condición $p \in A^\circ$ garantiza que $f(p+h)$ está definido para h suficientemente pequeño, véase 5.4.

Corolario. (véase 6.3) f es derivable en $p \in A^\circ$ ssi $\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \text{hal}(0) \setminus \{0\}, \text{sh } \frac{f(p+\epsilon)-f(p)}{\epsilon} = l$.

Ejemplo. Dado $p \in \mathbb{R}$, se tiene: $\cos' p = -\sin p$.

Demostración. Sean $p \in \mathbb{R}, \epsilon \in \text{hal}(0) \setminus \{0\}$. Entonces

$$\text{sh } \frac{\cos(p+\epsilon) - \cos p}{\epsilon} = \text{sh } \frac{\cos p(\cos \epsilon - 1) - \sin p \sin \epsilon}{\epsilon} = \cos p \text{sh } \frac{\cos \epsilon - 1}{\epsilon} - \sin p \text{sh } \frac{\sin \epsilon}{\epsilon}$$

usando 6.11 y las propiedades de sh. Y calculando los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ mediante los razonamientos geométricos usuales (véase [Or02, p.93], [Ke86, Section 7.2]), hemos terminado. $\square$

Notación. Siguiendo una tradición, denotaremos por Δx a un infinitesimal no nulo arbitrario representando un cambio o *incremento* en x , y escribiremos por $\Delta f(x, \Delta x) := f(x + \Delta x) - f(x)$ al correspondiente incremento en f , que denotaremos simplemente por Δf si no hay peligro de confusión.

Proposición. Si f es derivable en x , entonces es continua en x .

Demostración. Por hipótesis, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq f'(x)$, luego multiplicando $\Delta x \in \mathbb{L}$ a banda y banda y usando que $f'(x) \in \mathbb{L}$, obtenemos que $\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta x \simeq f'(x) \Delta x \simeq 0$ (véase 3.35). $\square$

Nota. En particular, podemos pensar $f'(x)$ como la sombra de un ratio entre incrementos infinitesimales.

Definición. Si f es derivable en x , definimos la **diferencial de f en x respecto Δx** como $df(x, \Delta x) := f'(x) \Delta x$, y escribiremos simplemente df si no hay peligro de confusión.

Nota. Por tradición y estética, es usual escribir dx en lugar de Δx para referirse al mismo incremento de x cuando éste interviene en el diferencial, recuperando así de manera natural la notación de Leibniz: $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

Observación. (Interpretación geométrica) La ecuación analítica de una recta que pasa por (p, q) con pendiente m es $r(x) = q + m(x - p)$, luego la de la recta secante que pasa por $(p, f(p))$ y $(p + \Delta x, f(p + \Delta x))$ es $s(x) = f(p) + \frac{\Delta f(p, \Delta x)}{\Delta x}(x - p)$, ergo la de la recta tangente a la curva f en el punto $(p, f(p))$ es $t(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ (pasando al límite la pendiente anterior, i.e., tomando sombras). Ahora bien, $\Delta t(p, \Delta x) = df(p, \Delta x)$, luego $df(p, \Delta x)$ representa el incremento correspondiente a Δx sobre la recta tangente de f en p (véase [Ke86, Fig. 2.2.3, 2.2.4] para una astuta representación gráfica de la situación).

Observación 6.13. Resumiendo, si f es derivable en x , entonces $\Delta f \simeq df \simeq 0$ y $\frac{df}{\Delta x} = f'(x) \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x}$, luego $\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) = \frac{\Delta f - df}{\Delta x} \simeq 0$ y, por ende, $\Delta f - df = \epsilon \Delta x$ para algún $\epsilon \simeq 0$. Obtenemos así la **ecuación incremental**:

$$\Delta f(x, \Delta x) = df(x, \Delta x) + \epsilon \Delta x = f'(x) \Delta x + \epsilon \Delta x$$

que podemos reformular también como

$$f(x + \Delta x) = f(x) + df(x, \Delta x) + \epsilon \Delta x = f(x) + f'(x) \Delta x + \epsilon \Delta x$$

Por tanto, $f'(x)$ actúa como la mejor aproximación lineal de f en x , pues $\epsilon \Delta x$ es infinitesimal comparado con $f'(x) \Delta x$ (i.e., $\frac{f'(x) \Delta x}{\epsilon \Delta x}$ es ilimitado).

Nota. La ecuación incremental vale también trivialmente para $\Delta x = 0$.

Proposición. (Álgebra de derivadas) Si f, g son derivables en x , también lo son $f + g, fg, \frac{1}{f}$ (en el último caso, supuesto que $f(x) \neq 0$). Más aún,

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. $(\frac{1}{f})'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)^2}$.

Demostración. 1) Como

$$\begin{aligned}\Delta(f + g) &= (f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x) \\ &= (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) \\ &= (f(x) + \Delta f) + (g(x) + \Delta g) - f(x) - g(x) = \Delta f + \Delta g\end{aligned}$$

tenemos que $\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \simeq f'(x) + g'(x)$.

2) Como

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) \\ &= f(x)\Delta g + g(x)\Delta f + \Delta f\Delta g\end{aligned}$$

tenemos que $\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \Delta f\frac{\Delta g}{\Delta x} \simeq f(x)g'(x) + g(x)f'(x) + 0$.

3) Como

$$\Delta \frac{1}{f} = \frac{1}{f(x + \Delta x)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x) + \Delta f} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - (f(x) + \Delta f)}{(f(x) + \Delta f)f(x)} = \frac{-\Delta f}{f(x)^2 + f(x)\Delta f}$$

tenemos que $\frac{\Delta \frac{1}{f}}{\Delta x} = \frac{-\Delta f}{f(x)^2\Delta x + f(x)\Delta f\Delta x} = \frac{1}{f(x)^2 + f(x)\Delta f} f'(x) \simeq \frac{1}{f(x)^2} f'(x)$ (pues $f(x) \neq 0$). $\square$

Proposición. (Regla de la cadena) Si f es derivable en x y g es derivable en $f(x)$, entonces $g \circ f$ es derivable en x con derivada $g'(f(x))f'(x)$.

Demostración. Como f es derivable en x , tenemos que $\Delta f \simeq 0$ y, por ende, $f(x + \Delta x) \simeq f(x)$. Y como g es derivable en $f(x)$, tenemos que g está definido en $\text{hal}(f(x))$ y, en particular, en $f(x + \Delta x)$. Así, $\Delta(g \circ f)(x, \Delta x) = g(f(x + \Delta x)) - g(f(x)) = g(f(x) + \Delta f) - g(f(x)) = \Delta g(f(x), \Delta f) = g'(f(x))\Delta f + \epsilon \Delta f$ para algún $\epsilon \simeq 0$ (véase 6.13). Por tanto, $\frac{\Delta(g \circ f)(x, \Delta x)}{\Delta x} = g'(f(x))\frac{\Delta f}{\Delta x} + \epsilon \frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq g'(f(x))f'(x) + 0$. $\square$

Corolario. Si f es derivable en x , con $f'(x) \neq 0$, y f^{-1} es derivable en $y = f(x)$, entonces $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Demostración. Aplicando la regla de la cadena en $f^{-1} \circ f = \text{Id}$. $\square$

Definición. Decimos que $p \in A^\circ$ es un **mínimo local de f** ssi $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in B_\epsilon(p), f(x) \geq f(p)$.

Corolario. (véase 5.4) El punto $p \in A^\circ$ es un **mínimo local de f** ssi $\forall \epsilon \in \mathbb{I}, f(p + \epsilon) \geq f(p)$.

Teorema. (de Fermat) Si x es un **mínimo local de f** y f es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.

Demostración. Por hipótesis, $\forall \epsilon \in \mathbb{I}, f(x + \epsilon) - f(x) \geq 0$, luego $f'(x) \simeq \frac{f(x + (-\Delta x)) - f(x)}{(-\Delta x)} \leq 0 \leq \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \simeq f'(x)$ si $\Delta x > 0$. Por tanto, como $f'(x) \in \mathbb{R}$, nos queda que $f'(x) = 0$. $\square$

Nota. Los máximos se discuten por analogía. En particular, podemos obtener de la manera usual el Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio de Lagrange y la caracterización del crecimiento de una aplicación respecto de su derivada.

Capítulo 7

Particiones hiperfinitas

7.1. Teorema del Valor Intermedio

Notación. Fijamos $a < b$, $I = [a, b]$ y $\Delta_n = (b - a)/n$ (con $n \in {}^*\mathbb{N}$) para todo el capítulo.

Nota. (Idea) Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos (sin restricción) que $f(a) \leq f(b)$. Fijemos además $d \in (f(a), f(b))$, que existirá ssi $f(a) \neq f(b)$. Una representación gráfica de la situación nos sugiere que, salvo que el grafo de f «dé saltos», en algún momento cruzará la recta $r(x) = d$ y, por ende, $d \in f(I)$.

Una manera de precisar esta intuición geométrica (con nuestras herramientas no estándar) podría ser particionar I en $n \in \mathbb{N}$ intervalos de longitud Δ_n , tomar s_n el mayor extremo de dichos intervalos cuya imagen sea menor que d , y extender $(s_n)_n$ a todo ${}^*\mathbb{N}$. Así, encerraríamos algún $c \in f^{-1}[d]$ en un intervalo infinitesimal $[s_N, s_N + \Delta_N]$ para $N \in \mathbb{N}_\infty$, de modo que $s_N \simeq c \simeq s_N + \Delta_N$ y, en particular, $c = \text{sh } s_N$. Y suponiendo ahora que f sea continua (i.e., que «no da saltos»), tendríamos que $f(c) \simeq f(s_N) < d \leq f(s_N + \Delta_N) \simeq f(c)$, luego $d = f(c)$.

Formalicemos todas estas ideas:

Definición 7.1. Una **partición de I** es una sucesión finita $P = (x_k)_{k=0}^n$ tal que $x_k \uparrow$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $P \subset I$, y en tal caso escribimos $P \in \mathcal{P}_n(I)$ ó $P \in \mathcal{P}_\omega(I)$ si no queremos explicitar su cardinal. Los **subintervalos de P** son $I_k := [x_k, x_{k+1}]$ y la **norma de P** es $|P| := \max_k |I_k|$. Decimos que $P \in \mathcal{P}_n(I)$ es **equidistante** ssi $\forall k, |I_k| = |P|$.

Observación. Como $x_k = x_{k-1} + |I_{k-1}|$, si $P \in \mathcal{P}_n(I)$ es equidistante entonces $x_k = x_0 + k|P|$ por inducción, luego $|P| = \Delta_n$ y $P = (a + k\Delta_n)_{k=0}^n$. En otras palabras, hay una única partición equidistante en $\mathcal{P}_n(I)$.

Notación. Fijamos para el resto del capítulo $P_n = (a + k\Delta_n)_{k=0}^n$ (o $P_{n,I}$ si queremos ser más específicos) y $I_{n,k} = [a + k\Delta_n, a + (k+1)\Delta_n]$ sus subintervalos asociados.

Problema. Dado que $P \in \mathcal{P}_n(I)$ es una sucesión finita, tenemos que ${}^*P = P$, luego no podemos obtener una genuina extensión hiperreal de P de la manera usual.¹ Sin embargo, y como sugiere la observación anterior, en el caso particular en el que P es equidistante resulta natural considerar la sucesión P_n para $n \in {}^*\mathbb{N}$. Es más, nuestra propuesta se comporta como cabría esperar:

Proposición 7.2. Sean $x \in I$, $N \in \mathbb{N}_\infty$ cualesquiera. Entonces $\{a + k\Delta_N\}_{k=0}^N \cap \text{hal}(x) \neq \emptyset$.

Demostración. Como $x \in I = \bigcup_{k=0}^n I_{n,k}$, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z}, a + k\Delta_n \leq x \leq a + (k+1)\Delta_n$. Y por PdT, $\exists K \in {}^*\mathbb{Z}, a + K\Delta_N \leq x \leq a + (K+1)\Delta_N$. Y como $a + K\Delta_N \simeq a + K\Delta_N + \Delta_N = a + (K+1)\Delta_N$, nos queda que $x \simeq a + K\Delta_N$ por 3.36. $\square$

Teorema. (del valor intermedio) Sean $f \in \mathcal{C}(I)$, con $f(a) < f(b)$, y $d \in (f(a), f(b))$. Entonces $\exists c \in (a, b), f(c) = d$.

¹Una manera general de resolver esto es introduciendo los conjuntos hiperfinitos (véase [Go98, Sections 12.3, 12.7]), los cuales son un caso particular de conjunto interno, pero nosotros no entraremos en ello.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, pongamos $A_n = \{p \in P_n : f(p) < d\}$, y notemos que A_n es no vacío (pues $a \in A_n$) finito (pues P_n lo es) y acotado superiormente por b , de modo que su máximo existe y es de $[a, b]$. Pongamos, pues, $s_n = \max A_n$, de modo que $d \in (f(s_n), f(s_n + \Delta_n))$. Entonces, dado $N \in \mathbb{N}_\infty$ cualquiera, tenemos por PdT que:

1. $s_N \in {}^*[a, b] \subset \mathbb{L}$ y, por ende, existe $c = \text{sh } s_N \in I$.
2. $d \in {}^*(f(s_n), f(s_n + \Delta_n))$, donde $f(c) \simeq f(s_N) \simeq f(s_N + \Delta_N)$ por continuidad, luego $f(c) \simeq d$ por 3.36 y, al ser ambos reales, $f(c) = d$. En particular, $c \notin \{a, b\}$.

□

Nota. Imponemos $f(a) < f(b)$ simplemente para asegurar que $(f(a), f(b)) \neq \emptyset$, aunque el resultado vale igual si $f(b) < f(a)$ tomando $d \in (f(b), f(a))$. Una formulación alternativa que evita estas distinciones podría ser: $f \in \mathcal{C}(I) \Rightarrow (f(a), f(b)) \cup (f(b), f(a)) \subset f((a, b))$.

Por otra parte, esta técnica de demostración es considerablemente general y nos permite localizar dónde una cierta propiedad (caracterizada por la $s_n \in P_n$ tomada, donde P_n quiere representar a I) ocurre por última vez en I (i.e., para $\text{sh } s_N$ con $N \in \mathbb{N}_\infty$). Otro ejemplo de ello sería la siguiente reexaminación de 6.12:

Teorema. (de Weierstrass) Si $f \in \mathcal{C}(I)$, entonces $\exists c, d \in I, \forall x \in I, f(x) \in [f(c), f(d)]$ (i.e., $\exists c, d \in I, f(c) = \min f(I), f(d) = \max f(I)$).

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, como P_n es finito no vacío, tenemos que $f(P_n)$ también, luego tiene máximo y, por ende, $f^{-1}[\max f(P_n)] \neq \emptyset$. Fijemos, pues, $s_n \in f^{-1}[\max f(P_n)]$ cualquiera. Entonces $s_n \in P_n \subset I$ y $\forall k \in \mathbb{Z} (0 \leq k \leq n \Rightarrow f(a + k\Delta_n) \leq f(s_n))$. Así, dado $N \in \mathbb{N}_\infty$ cualquiera, tenemos por PdT que:

1. $s_N \in {}^*I \subset \mathbb{L}$ y, por ende, existe $d = \text{sh } s_N \in I$, de modo que $f(s_N) \simeq f(d)$ por continuidad.
2. $\forall K \in {}^*\mathbb{Z} (0 \leq K \leq N \Rightarrow f(a + K\Delta_N) \leq f(s_N))$.

Sea ahora $x \in I$. Entonces $\exists M \in \{0, \dots, N\}, x \simeq a + M\Delta_N$ por 7.2, ergo $f(x) \simeq f(a + M\Delta_N)$ por continuidad, luego $f(x) \leq f(d)$ por 2, 1 y 3.37.2. □

7.2. Integral de Riemann

Nota. En esta sección supondremos siempre que f es acotada.

7.2.1. Construcción y ejemplos

Definición. Dada $P \in \mathcal{P}_n(I)$, se define:

1. La **suma superior de Riemann de f asociada a P** como $\bar{S}(f, P) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k |I_k|$, con $M_k := \sup_{x \in I_k} f(x)$.
2. La **suma inferior de Riemann de f asociada a P** como $\underline{S}(f, P) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k |I_k|$, con $m_k := \inf_{x \in I_k} f(x)$.
3. La **suma ordinaria de Riemann de f asociada a P** como $S(f, P) := \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) |I_k|$, con $x_k \in I_k$.²

Nota. La idea para nuestra construcción es clara: f será integrable ssi dichas sumas (que son aproximaciones del área bajo la curva f por rectángulos de base $|I_k|$ y altura $M_k, m_k, f(x_k)$ respectivamente, siendo las dos primeras sumas aproximaciones por exceso y por defecto) son infinitamente próximas entre sí cuando $|P|$ es infinitesimal, y en tal caso su sombra nos dará el valor de la integral. Ahora bien, y por simplicidad, lo veremos únicamente para la partición P_n .

²Para fijar ideas, puede tomarse $x_k = \min I_k$, aunque la elección es irrelevante.

Por otra parte, dado que $a, b, |P|$ son los datos esenciales para nuestra propuesta, resulta natural escribir $S(f, P)$ como $S_a^b(f, |P|)$ la suma entre a y b de f con error $|P|$. Y dado que $|P|$ representa una longitud o incremento en x (la mayor base de los susodichos rectángulos), resulta natural denotarlo por dx , recuperando así la notación de Leibniz: $\int_a^b f dx = \text{sh } S_a^b(f, dx)$.

Observación. Como f es acotada, M_k, m_k están bien definidos. Por otra parte, podemos pensar $S(f, P_n)$ como la aplicación $S(f, \cdot): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $n \mapsto S(f, P_n)$, luego (extendiéndola) podemos tomar $n \in {}^*\mathbb{N}$ siempre que queramos.

Observación 7.3. Claramente $m|I| \leq \underline{S}(f, P) \leq S(f, P) \leq \bar{S}(f, P) \leq M|I|$, con $M = \sup_{x \in I} f(x)$, $m = \inf_{x \in I} f(x)$. En particular, si $N \in \mathbb{N}_\infty$, entonces $\underline{S}(f, P_N), S(f, P_N), \bar{S}(f, P_N)$ son limitados y, por ende, tienen sombra.

Recordamos a continuación la construcción y caracterizaciones básicas de la integral de Riemann para poder demostrar que nuestro enfoque NSA es equivalente al enfoque SA usual.

Hecho 7.4. (véase [Or02, Teorema 5.2]) Si $P, P' \in \mathcal{P}_\omega(I)$, entonces $\underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P)$. En particular, $\{\bar{S}(f, P)\}_{P \in \mathcal{P}(I)}$ está acotado inferiormente y, por ende, tiene ínfimo (y análogamente para $\underline{S}(f, P)$).

Definición. Se define:

1. La **integral superior de Riemann de f en I** como $\bar{\int}_I f(x) dx := \inf_{P \in \mathcal{P}_\omega(I)} \bar{S}(f, P)$.
2. La **integral inferior de Riemann de f en I** como $\underline{\int}_I f(x) dx := \sup_{P \in \mathcal{P}_\omega(I)} \underline{S}(f, P)$.

Y decimos que f es **integrable Riemann** ssi $\bar{\int}_I f(x) dx = \underline{\int}_I f(x) dx$, y en tal caso designamos a dicho valor por $\int_I f(x) dx$ ó $\int_a^b f(x) dx$, y lo denominamos **integral de Riemann de f en I** .

Hecho 7.5. (véase [Or02, Teorema 5.3]) La aplicación f es integrable Riemann ssi $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists P \in \mathcal{P}_\omega(I), \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$.

Hecho 7.6. (véase [Or02, Secció V.1, Exercici 11]) La aplicación f es integrable Riemann ssi $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall P \in \mathcal{P}_\omega(I) (|P| < \delta \Rightarrow \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon)$.

Teorema 7.7. La aplicación f es integrable Riemann ssi $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, \underline{S}(f, P_N) \simeq \bar{S}(f, P_N)$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Por 7.6, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall n \in \mathbb{N} (\Delta_n < \delta \Rightarrow \bar{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \epsilon)$, luego $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall n \in {}^*\mathbb{N} (\Delta_n < \delta \Rightarrow \bar{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \epsilon)$ por PdT. En particular, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \bar{S}(f, P_N) - \underline{S}(f, P_N) < \epsilon$, i.e., $\underline{S}(f, P_N) \simeq \bar{S}(f, P_N)$.

$[\Leftarrow]$ (Por 7.5) Dado $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, tenemos por hipótesis que $\exists N \in {}^*\mathbb{N}, \bar{S}(f, P_N) - \underline{S}(f, P_N) < \epsilon$, luego $\exists n \in \mathbb{N}, \bar{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \epsilon$ por PdT. $\square$

Corolario. Si f es integrable Riemann, entonces $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, \int_I f(x) dx = \text{sh } \bar{S}(f, P_N) = \text{sh } \underline{S}(f, P_N) = \text{sh } S(f, P_N)$. En otras palabras, $\int_I f(x) dx = \lim_n \bar{S}(f, P_n) = \lim_n \underline{S}(f, P_n) = \lim_n S(f, P_n)$.

Demostración. Dado $N \in \mathbb{N}_\infty$, es claro que $\text{sh } \underline{S}(f, P_N) = \text{sh } S(f, P_N) = \text{sh } \bar{S}(f, P_N)$ por 7.3 e hipótesis. Por otra parte, dado $P \in \mathcal{P}_\omega(I)$, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}, \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P_n), \underline{S}(f, P_n) \leq \bar{S}(f, P)$ por 7.4, luego $\underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P_N) \simeq \underline{S}(f, P_N) \leq \bar{S}(f, P)$ por PdT, ergo $\underline{S}(f, P) \leq \text{sh } \bar{S}(f, P_N) \leq \bar{S}(f, P)$. Por tanto, $\text{sh } \bar{S}(f, P_N)$ es cota superior de $\{\underline{S}(f, P) : P \in \mathcal{P}_\omega(I)\}$ (y análogamente con $\bar{S}(f, P)$), luego $\underline{\int}_I f(x) dx \leq \text{sh } \bar{S}(f, P_N) \leq \bar{\int}_I f(x) dx$ por minimalidad. Y por hipótesis, $\int_I f(x) dx = \underline{\int}_I f(x) dx = \bar{\int}_I f(x) dx = \text{sh } \bar{S}(f, P_N)$. $\square$

Proposición. Si $f \in \mathcal{C}(I)$, entonces $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, \underline{S}(f, P_N) \simeq \bar{S}(f, P_N)$.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, sean $\mu_k = M_k - m_k$ y $\mu = \max\{\mu_k\}_{k=0}^{n-1}$, de modo que $\mu = \mu_j$ para algún j . Sean también $c, d \in I_j$ tales que $f(c) = m_j, f(d) = M_j$ (que existen por Weierstrass). Entonces $|c - d| \leq \Delta_n$ y $\bar{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \Delta_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mu \Delta_n = \mu \Delta_n n = \mu |I|$. Y por PdT, dado $N \in \mathbb{N}_\infty$ tenemos que:

1. $|c - d| \leq \Delta_N \simeq 0$ y, por ende, $c \simeq d$.

2. $c, d \in {}^*I \subset \mathbb{L}$ y, por ende, existe $r = \text{sh } c \in I$, de modo que $f(c) \simeq f(r) \simeq f(d)$ por continuidad.
3. $\bar{S}(f, P_N) - \underline{S}(f, P_N) \leq \mu|I| \simeq 0$ por 2 (pues $\mu = f(d) - f(c)$), ergo $\underline{S}(f, P_N) \simeq \bar{S}(f, P_N)$.

□

Observación. Si f es creciente (o decreciente), el resultado es trivial, pues entonces $\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k = f(b) - f(a)$ y, por ende, $\bar{S}(f, P_N) - \underline{S}(f, P_N) \leq \Delta_N(f(b) - f(a)) \simeq 0$.

Corolario. Las aplicaciones continuas en I y las aplicaciones acotadas en I son integrables en I .

7.2.2. Propiedades

Proposición. Sea $P(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, con $x_k \in I_k$. Entonces $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, P(N) \simeq \frac{1}{|I|} \int_a^b f(x)dx$ si f es integrable. En otras palabras, podemos aproximar el promedio integral de f por su media muestral.

Demostración. $\int_a^b f(x)dx = \text{sh} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \Delta_N = \text{sh} \Delta_N \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)$, luego $|I|^{-1} \int_a^b f(x)dx \simeq P(N)$ al ser $|I|^{-1} \Delta_N = N^{-1}$.

□

Notación. Dados $c, d \in \mathbb{R}$ y $I' = [c, d]$, definimos $S_c^d(f, n) := S(f, P_{n,I'})$.

Proposición 7.8. Si f, g son integrables en I , entonces:

1. $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$ si $c \in \mathbb{R}$.
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ si $c \in I$.
4. $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$.
5. $m|I| \leq \int_a^b f(x)dx \leq M|I|$ si $\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$.

Demostración. 1) Si $c = 0$, es trivial. Si $c < 0$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}, \bar{S}_a^b(cf, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n \sup_{I_k} cf = c \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n \inf_{I_k} f = c \underline{S}_a^b(f, n)$, y análogamente para $\underline{S}$, luego $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, \bar{S}_a^b(cf, N) - \underline{S}_a^b(cf, N) = c(\bar{S}_a^b(f, N) - \underline{S}_a^b(f, N)) \simeq 0$ por PdT e hipótesis, y análogamente para $c > 0$. Por tanto, cf es integrable con integral $\text{sh}(c \underline{S}_a^b(f, n)) = c \int_a^b f(x)dx$.

2) Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bar{S}_a^b(f + g, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{I_k} (f + g) \Delta_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n \sup_{I_k} f + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n \sup_{I_k} g = \bar{S}_a^b(f, n) + \bar{S}_a^b(g, n)$, y análogamente para $\underline{S}$. Por tanto, $\forall N \in \mathbb{N}_\infty, \underline{S}_a^b(f, N) + \underline{S}_a^b(g, N) \leq \underline{S}_a^b(f + g, N) \leq \bar{S}_a^b(f + g, N) \leq \bar{S}_a^b(f, N) + \bar{S}_a^b(g, N)$ por PdT. Así, $0 \leq \bar{S}_a^b(f + g, N) - \underline{S}_a^b(f + g, N) \leq \bar{S}_a^b(f, N) + \bar{S}_a^b(g, N) - \underline{S}_a^b(f, N) - \underline{S}_a^b(g, N) \simeq 0$ por hipótesis, ergo $f + g$ es integrable con integral $\text{sh}(\bar{S}_a^b(f, n) + \bar{S}_a^b(g, n)) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

3) Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\begin{aligned} S_a^c(f, n) + S_c^b(f, n) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{c-a}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{b-c}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \left(\frac{c-a}{n} + \frac{b-c}{n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{b-a}{n} = S_a^b(f, n) \end{aligned}$$

Y por PdT, dado $N \in \mathbb{N}_\infty$, tenemos que: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \text{sh } S_a^c(f, N) + \text{sh } S_c^b(f, N) = \text{sh } S_a^b(f, N) = \int_a^b f(x)dx$.

4) Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos por hipótesis que $S_a^b(f, n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \Delta_n = S_a^b(g, n)$. Y por PdT, $\int_a^b f(x)dx = \text{sh } S_a^b(f, N) \leq \text{sh } S_a^b(g, N) = \int_a^b g(x)dx$ con $N \in \mathbb{N}_\infty$.

5) Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos por hipótesis que $m|I| \leq S_a^b(f, n) \leq M|I|$, luego aplicando PdT y tomando sombras hemos terminado.

□

Teorema. Si $f \in \mathcal{C}(I)$, entonces la aplicación $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ es derivable en I con derivada $f(x)$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta_n \in (0, b - x)$ (que existe porque $\Delta_n \rightarrow 0$). Entonces $\Delta F = \int_x^{x+\Delta_n} f(t)dt$ por 7.8. Y por Weierstrass, existen c, d tales que $f(c) = \min_{x \in [x, x+\Delta_n]} f(x)$, $f(d) = \max_{x \in [x, x+\Delta_n]} f(x)$, luego $f(c)\Delta_n \leq \int_x^{x+\Delta_n} f(t)dt \leq f(d)\Delta_n$, i.e., $f(c) \leq \frac{\Delta F}{\Delta_n} \leq f(d)$.

Sea ahora $N \in \mathbb{N}_\infty$. Entonces, como $\Delta_N \in (0, b - x)$, tenemos por PdT que existen $c, d \in [x, x + \Delta_N]$ tales que $f(c) \leq \frac{\Delta F}{\Delta_N} \leq f(d)$. En particular, $c \simeq x \simeq d$ y, por continuidad, $f(c) \simeq f(x) \simeq f(d)$, luego $\text{sh } \frac{\Delta F}{\Delta_N} = f(x)$. $\square$

Nota. Como corolario, obtenemos el Teorema Fundamental del Cálculo de la manera usual.

Apéndice A

Lógica matemática

Nota. En cuanto al estatus epistemológico de la relación entre matemáticas y lógica, adoptamos la posición de Barnes y Mack, de acuerdo con la cual

«we carry out a mathematical study of the logic used in mathematics. We do this by constructing a mathematical model of logic and applying mathematics to analyse the properties of the model. We therefore regard all our existing knowledge of mathematics as being applicable to the analysis of the model, and in particular we accept set theory as part of the meta-language. We are not attempting to construct a foundation on which all mathematics is to be based —rather, any conclusions to be drawn about the foundations of mathematics come only by analogy with the model, and are to be regarded in much the same way as the conclusions drawn from any scientific theory.»

D.W. Barnes, J.M. Mack, *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic*. Springer (1975)

Notación A.1. Fijamos para el resto del anexo los siguientes símbolos lógicos:

- Paréntesis: $(,)$.
- Conectivas: $\neg, \wedge$.
- Cuantificador universal: $\exists$.
- Igualdad formal: $\approx$.
- Variables: cada uno de los elementos de V , con V un conjunto numerable fijado.

Definición A.2. Un **lenguaje** $\mathcal{L}$ es una terna de conjuntos $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ tal que todo $s \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ tiene asociado un natural $\text{ar}(s)$, llamado **aridad de s** . Los elementos de $\mathcal{R}$ reciben el nombre de símbolos relacionales, los de $\mathcal{F}$ símbolos funcionales, y los de $\mathcal{C}$ símbolos de constantes.

Nota. Fijamos para el resto del anexo $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ lenguaje, y supondremos que ninguno de los símbolos anteriores (tanto los lógicos como los del lenguaje) son una sucesión finita de otros símbolos (de sí mismo no es necesario decirlo, por el Axioma de Regularidad).

Notación. Si $s_1, \dots, s_n$ es una sucesión finita de símbolos, entonces $s_1 \dots s_n$ denota la susodicha sucesión. Si $c_1, \dots, c_n$ es una sucesión finita de sucesiones finitas de símbolos, entonces $c_1 \dots c_n$ denota la concatenación de todas ellas.

Definición A.3. El conjunto de **términos de $\mathcal{L}$ sobre V** , denotado $\text{Term}(\mathcal{L})$, se define por recursión como sigue:

1. $V \cup \mathcal{C} \subset \text{Term}(\mathcal{L})$.
2. Si $f \in \mathcal{F}$ es de aridad n y $t_1, \dots, t_n \in \text{Term}(\mathcal{L})$, entonces $ft_1 \dots t_n \in \text{Term}(\mathcal{L})$.

Definición A.4. Si $t \in \text{Term}(\mathcal{L})$, el conjunto de **variables de** t , denotado $\text{var}(t)$, se define por recursión como sigue:

$$\text{var}(t) := \begin{cases} t & \text{si } t \in V \\ \emptyset & \text{si } t \in \mathcal{C} \\ \bigcup_{i=1}^n \text{var}(t_i) & \text{si } t = ft_1 \dots t_n \end{cases}$$

Definición A.5. El conjunto de **átomos de** $\mathcal{L}$, denotado $\text{At}(\mathcal{L})$, se define por recursión como sigue:

1. Si $R \in \mathcal{R}$ es de aridad n y $t_1, \dots, t_n \in \text{Term}(\mathcal{L})$, entonces $Rt_1 \dots t_n \in \text{At}(\mathcal{L})$.
2. Si $t_1, t_2 \in \text{Term}(\mathcal{L})$, entonces $t_1 \approx t_2 \in \text{At}(\mathcal{L})$.

Definición A.6. El conjunto de **fórmulas de** $\mathcal{L}$, denotado $\text{Form}(\mathcal{L})$, se define por recursión como sigue:

1. $\text{At}(\mathcal{L}) \subset \text{Form}(\mathcal{L})$.
2. Si $\phi, \psi \in \text{Form}(\mathcal{L})$ y $v \in V$, entonces $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\exists v\phi) \in \text{Form}(\mathcal{L})$.

Nota. Aunque los paréntesis son necesarios para garantizar la unicidad de lectura de fórmulas, en adelante haremos un uso razonable de ellos. Más concretamente, la prioridad de lectura es: $\neg, \exists v, \wedge$.

Definición A.7. Si $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, el conjunto de **variables de** ϕ , denotado $\text{var}(\phi)$, se define por recursión como sigue:

$$\text{var}(\phi) := \begin{cases} \bigcup_{i=1}^n \text{var}(t_i) & \text{si } \phi = Rt_1 \dots t_n \\ \bigcup_{i=1}^2 \text{var}(t_i) & \text{si } \phi = t_1 \approx t_2 \\ \text{var}(\psi) & \text{si } \phi = \neg\psi \\ \text{var}(\psi) \cup \text{var}(\chi) & \text{si } \phi = \psi \wedge \chi \\ \text{var}(\psi) \cup \{v\} & \text{si } \phi = \exists v\psi \end{cases}$$

Definición A.8. Si $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, el conjunto de **variables libres de** ϕ , denotado $L(\phi)$, se define por recursión como sigue:

$$L(\phi) := \begin{cases} \text{var}(\phi) & \text{si } \phi \in \text{At}(\mathcal{L}) \\ L(\psi) & \text{si } \phi = \neg\psi \\ L(\psi) \cup L(\chi) & \text{si } \phi = \psi \wedge \chi \\ L(\psi) \setminus \{v\} & \text{si } \phi = \exists v\psi \end{cases}$$

Definición A.9. El conjunto de **sentencias de** $\mathcal{L}$ se define como $\text{Sent}(\mathcal{L}) := \{\phi \in \text{Form}(\mathcal{L}) : L(\phi) = \emptyset\}$.

Definición A.10. Dadas $\phi, \psi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, se definen:

1. $\phi \vee \psi := \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.
2. $\phi \rightarrow \psi := (\neg\phi) \vee \psi$.
3. $\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$.
4. $\forall v\phi := \neg\exists v\neg\phi$.

Definición A.11. Una $\mathcal{L}$ -estructura de universo A es una cuaterna $\mathfrak{A} = (A, \{R^{\mathfrak{A}} : R \in \mathcal{R}\}, \{f^{\mathfrak{A}} : f \in \mathcal{F}\}, \{c^{\mathfrak{A}} : c \in \mathcal{C}\})$ tal que

1. A es un conjunto no vacío.
2. Si $R \in \mathcal{R}$ es de aridad n , entonces $R^{\mathfrak{A}} \subset A^n$.

3. Si $f \in \mathcal{F}$ es de aridad n , entonces $f^{\mathfrak{A}}: A^n \rightarrow A$.
4. Si $c \in \mathcal{C}$, entonces $c^{\mathfrak{A}} \in A$.

Nota. Fijamos para el resto del anexo $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$ -estructura de universo A .

Definición A.12. Una **interpretación en $\mathfrak{A}$** es una aplicación $s: V \rightarrow A$.

Definición A.13. Si s es una interpretación en $\mathfrak{A}$, la **extensión de s** , $\bar{s}: \text{Term}(\mathcal{L}) \rightarrow A$, se define por recursión como sigue:

1. Si $c \in \mathcal{C}$, entonces $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.
2. Si $v \in V$, entonces $\bar{s}(v) = s(v)$.
3. Si $f \in \mathcal{F}$ es de aridad n y $t_1, \dots, t_n \in \text{Term}(\mathcal{L})$, entonces $\bar{s}(ft_1 \dots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_i))_{i=1}^n$.

Definición A.14. Sea s una interpretación en $\mathfrak{A}$ y $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L})$. Decimos que $\mathfrak{A}$ **satisface ϕ para la interpretación s** , y escribimos $\mathfrak{A} \models \phi[s]$, ssi

1. $(\bar{s}(t_i))_{i=1}^n \in R^{\mathfrak{A}}$ si $\phi = Rt_1 \dots t_n$ (con $R \in \mathcal{R}$ de aridad n y $t_1, \dots, t_n \in \text{Term}(\mathcal{L})$, se sobreentiende).
2. $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$ si $\phi = t_1 \approx t_2$.
3. $\mathfrak{A} \not\models \psi[s]$ si $\phi = \neg\psi$.
4. $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ y $\mathfrak{A} \models \chi[s]$ si $\phi = \psi \wedge \chi$.
5. Existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[s(v|a)]$ si $\phi = \exists v\psi$, con $s(v|a)(w) := \begin{cases} s(v) & \text{si } v \neq w \\ a & \text{si } v = w \end{cases}$.

Definición A.15. Diremos que ϕ **es válida en $\mathfrak{A}$** , o que $\mathfrak{A}$ **es modelo de ϕ** , y escribiremos $\mathfrak{A} \models \phi$, ssi $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ para cualquier s interpretación en $\mathfrak{A}$.

Teorema A.16. Sean $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L})$ y s_1, s_2 interpretaciones en $\mathfrak{A}$ tales que $s_1 \upharpoonright L(\phi) = s_2 \upharpoonright L(\phi)$. Entonces $\mathfrak{A} \models \phi[s_1]$ ssi $\mathfrak{A} \models \phi[s_2]$.

Definición A.17. Sea $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L})$ tal que $L(\phi) = \{v_i\}_{i=1}^k$, y sea $\{a_i\}_{i=1}^k \subset A$. Entonces $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \dots, a_k]$ ssi $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ para $s: V \rightarrow A$ tal que $s(v_i) = a_i$.

Bibliografía

- [ArCuHe97] L. O. ARKERYD, N. J. CUTLAND, C. W. HENSON (Eds.), *Nonstandard analysis theory and applications*. Nato Science Series C; Vol. 493. Springer Netherlands, 1997.
- [BHKNS14] T. BASCELLI, E. BOTTAZZI, F. HERZBERG, V. KANOVI, K. U. KATZ, M. G. KATZ, T. NOWIK, D. SHERRY, S. SHNIDER, *Fermat, Leibniz, Euler, and the gang: The true history of the concepts of limit and shadow*. Notices of the American Mathematical Society, Vol. 61, No. 8 (2014), pp. 848–864.
- [BeNe07] I. VAN DEN BERG, V. NEVES (Eds.), *The strength of nonstandard analysis*. Springer-Verlag Wien, 2007.
- [Cl12] P. L. CLARK, *Sequences and Series: A Sourcebook*. University of Georgia, 2012. Descargado a 27/2/2015 de <http://math.uga.edu/~pete/3100supp.pdf>.
- [Ed79] C. H. JR. EDWARDS, *The Historical Development of the Calculus*. Springer Study Edition. Springer-Verlag New York, 1979.
- [En01] H. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 2nd ed., 2001.
- [Go98] R. GOLDBLATT, *Lectures on the Hyperreals: An introduction to Nonstandard Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 188. Springer-Verlag New York, 1998.
- [Go12] I. GOLDBRING, *Lecture notes on nonstandard analysis*. UCLA, Summer School in Logic, 2012. Descargado a 13/10/2014 de <http://homepages.math.uic.edu/~isaac/NSA%20notes.pdf>.
- [HeKe86] C. W. HENSON, H. J. KEISLER, *On the Strength of Nonstandard Analysis*. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 51, No. 2, pp. 377–386. Association for Symbolic Logic, Jun. 1986.
- [HuLo85] A. E. HURD, P. A. LOEB, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*. Academic Press, 1985.
- [Ke86] H. J. KEISLER, *Elementary Calculus, An Approach Using Infinitesimals*. Prindle, Weber and Schmidt, 2nd ed., 1986.
- [La01] D. LAUGWITZ, *Curt Schmieden's Approach to Infinitesimals*. Synthese Library, Vol. 306, pp. 127–142. Springer Netherlands, 2001.
- [LuKö79] W. A. J. Luxemburg, S. Körner (Eds.), *Selected Papers of Abraham Robinson*, Vol. 2. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.
- [Or02] J. M. ORTEGA, *Introducció a l'anàlisi matemàtica*. Bellaterra: UAB. Servei de Publicacions, 2.^a ed., 2002.
- [Pe08] F. J. PÉREZ, *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Universidad de Granada, 2008. Descargado a 27/2/2015 de <http://www.ugr.es/~fjperez/textos>.
- [Ro66] A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 42. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.

- [Ru80] W. RUDIN, *Principios de análisis matemático*. México, D. F.: McGraw-Hill, 3.^a ed., 1980.
- [ShBe10] K. SHAMSEDDINE, M. BERZ, *Analysis on the Levi-Civita Field, a Brief Overview*. Contemporary Mathematics, Vol. 508, pp.215-237. American Mathematical Society, 2010.
- [Ta08] T. TAO, *Structure and Randomness: pages from year one of a mathematical blog*. American Mathematical Society, Providence RI, 2008.