

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques

Universitat de Barcelona

Càlcul de la cohomologia de grups de Lie amb successions espectrals

Alex Cebrian Galan

Tutor: Carles Casacuberta

Departament d'Àlgebra i Geometria

Barcelona, 29 de gener de 2015

Índex

Introducció	2
1 La successió espectral de Serre	6
1.1 Successions espectrals	6
1.2 Fibrats i fibracions	7
1.3 La successió espectral de Serre	11
1.4 Estructura multiplicativa	15
1.5 Finitud dels grups d'homotopia de les esferes	16
2 Cohomologia dels grups de Lie i dels seus espais classificadors	24
2.1 Grups de Lie	24
2.2 Espais classificadors	25
2.3 Àlgebres de Hopf	30
2.4 Cohomologia racional dels grups de Lie	32
2.5 Relació entre les cohomologies de G i BG	33
2.6 Cohomologia entera de $U(n)$ i $BU(n)$	35
2.7 Cohomologia mòdul 2 de $BO(n)$	37
2.8 Classes característiques	39
Bibliografia	42

Introducció

L'objectiu principal d'aquest treball és aplicar la successió espectral de Serre al càlcul de la cohomologia dels grups de Lie clàssics i dels seus espais classificadors.

A les dècades de 1920 i 1930 la topologia algebraica va viure un avanç important amb l'aparició de nous invariants homotòpics: els grups d'homotopia i els grups de cohomologia. Els predecessors (però no menys importants) d'aquests grups són els grups d'homologia, que s'havien consolidat la dècada anterior, i el grup fonamental, que és el primer grup d'homotopia. El càlcul de tots aquests grups pot ser molt complicat, especialment en el cas dels grups d'homotopia, per als quals no hi ha cap mètode eficient de càlcul. És per això que ben aviat es van començar a introduir eines per a relacionar tots aquests invariants entre ells. Alguns exemples importants són el teorema de Hurewicz, que relaciona els grups d'homotopia i els grups d'homologia d'un espai; la fórmula de Künneth per a l'homologia o la cohomologia del producte d'espais, o la successió llarga d'homotopia per a una fibració, que relaciona els grups d'homotopia o de cohomologia dels tres espais de la fibració. Aquesta última plantejava una qüestió natural: quina és la relació entre els grups d'homologia o de cohomologia dels tres espais d'una fibració? Un dels estímuls de respondre aquesta pregunta era que la inclusió d'un subgrup H tancat en un grup topològic G defineix una fibració $H \hookrightarrow G \rightarrow G/H$.

La resposta a la pregunta anterior és que els grups d'homologia i de cohomologia dels espais d'una fibració estan relacionats per una successió espectral. El primer pas cap a aquesta resposta va ser donat per J. Leray [7] l'any 1946, però la formalització de la successió espectral associada a una fibració va ser desenvolupada per J. P. Serre [11] l'any 1950. Des d'aleshores s'han introduït altres successions espectrals que relacionen altres invariants homotòpics, però en aquest treball només ens centrarem en l'esmentada abans, anomenada successió espectral de Serre. Entre els grans èxits de la successió espectral de Serre hi ha la demostració de la finitud dels grups d'homotopia de les esferes, el càlcul d'homologies i cohomologies d'espais de llaços, i de les homologies i cohomologies dels grups de Lie i dels seus espais classificadors.

Tal com hem dit a dalt, l'estructura dels grups de Lie porta de manera natural a utilitzar aquesta eina per a calcular els seus grups d'homologia i cohomologia. Un clar exemple ve donat per la fibració $U(n-1) \rightarrow U(n) \rightarrow S^{2n-1}$, que utilitzem a la secció 2.6 per a calcular la cohomologia de $U(n)$. A més, el producte de grup indueix una estructura addicional a l'anell de cohomologia i a l'homologia que restringeix les possibles cohomologies i homologies d'aquests grups. L'estudi de les

cohomologies dels grups de Lie es va iniciar a finals dels anys 20 amb E. Cartan, i va seguir per, entre d'altres, Pontrjagin i Hopf. Tots aquests estudiaven la cohomologia amb coeficients reals. Amb l'aparició de la successió espectral de Serre es va obrir una nova porta per al càlcul de cohomologia i l'homologia dels grups de Lie amb coeficients enters o a $\mathbb{Z}/p$, on la principal contribució es deu a A. Borel [1]. El mateix Borel va obtenir resultats molt importants (també mitjançant la successió espectral de Serre) sobre les cohomologies dels espais classificadors dels grups de Lie. Els espais classificadors són espais associats a un grup de Lie, i classifiquen fibrats principals i fibrats vectorials sobre un espai X a partir de les classes d'homotopia d'aplicacions de X a l'espai classificador. Per tant la cohomologia d'aquests espais té una gran importància en la classificació de fibrats.

Al primer capítol expliquem els conceptes de fibrat, fibrat vectorial i fibració, i en donem alguns resultats importants. Tot seguit destaquem la rellevància d'una fibració en particular: la fibració de l'espai de camins, que apareix a ambdós capítols. A continuació introduïm els espais d'Eilenberg–Mac Lane i les torres de Postnikov. A les seccions següents expliquem el funcionament i la construcció de la successió espectral de Serre. A l'última secció en mostrem algunes aplicacions. En particular calculem algunes cohomologies d'espais d'Eilenberg–Mac Lane i utilitzem aquests resultats per a demostrar la finitud dels grups d'homotopia de les esferes.

Al segon capítol comencem introduint breument els grups topològics i els grups de Lie, i en particular els grups de Lie clàssics compactes. A continuació definim els fibrats principals per tal d'explicar el concepte d'espai classificador d'un grup topològic, i descrivim els espais classificadors dels grups ortogonal i unitari. Després d'aquestes dues seccions on s'introdueixen els objectes de càlcul, definim una estructura algebraica anomenada àlgebra de Hopf sobre un cos, i caracteritzem les àlgebres de Hopf sobre els racionals. A la secció següent veiem que el producte de grup indueix a la cohomologia dels grups topològics l'estructura d'àlgebra de Hopf, i utilitzem la caracterització anterior per a deduir l'estructura de l'anell de cohomologia racional dels grups clàssics. Seguidament relacionem les cohomologies sobre un cos dels grups topològics amb les dels seus espais classificadors. Als apartats següents calculem la cohomologia entera del grup unitari i del seu espai classificador, i la cohomologia amb coeficients a $\mathbb{Z}/2$ de l'espai classificador del grup ortogonal. Finalment aprofitem aquests resultats per a introduir les classes de Chern associades a un fibrat vectorial complex i les classes de Stiefel–Whitney associades a un fibrat vectorial real.

Introduction

The aim of this work is to use the Serre spectral sequence to calculate the cohomology of the classical Lie groups and their classifying spaces.

In the development of algebraic topology during the decades of 1920 and 1930, new homotopy invariants were introduced, namely homotopy groups and cohomology groups. Their predecessors were the homology groups and the fundamental

group, which is the first homotopy group. Computing these invariants can be a complicated issue, especially in the case of homotopy groups, for which there is no efficient calculation method. This is why some tools for relating all these invariants began to appear soon. Important examples were the Hurewicz theorem, which relates the homotopy groups and the homology groups of a space; the Künneth formula for the homology of the product of two spaces, or the long exact sequence associated to a fibration, which relates the homotopy groups of the three spaces involved in the fibration. The latter one posed a natural question: how are the homologies or cohomologies of the three spaces in a fibration related? A reason to answer this question was that the inclusion of a closed subgroup H in a topological group defines a fibration $H \hookrightarrow G \rightarrow G/H$.

The answer to this question is that the homology and cohomology groups of the spaces in a fibration are related by a spectral sequence. The first step toward this answer was taken by J. Leray [7] in 1946, but the development of this machinery occurred in 1950 with Serre [11]. Since then, other kinds of spectral sequences, relating other homotopy invariants, have been introduced. However we will focus only on the one mentioned above, which is called Serre spectral sequence. Among the great successes of the Serre spectral sequence there is a proof of the finiteness of the homotopy groups of spheres, the calculation of the homology and cohomology groups of loop spaces, and of the homologies and cohomologies of the Lie groups and their classifying spaces.

As we mentioned above, the structure of Lie groups leads in a natural way to use this tool to calculate their homology and cohomology groups. An example is given by the fibration $U(n-1) \rightarrow U(n) \rightarrow S^{2n-1}$, which is used in Section 2.6 to calculate the cohomology of $U(n)$. Furthermore, the group product induces an extra structure into the cohomology ring and the homology modules which restricts the possible cohomologies and homologies of these groups. The study of the cohomology of Lie groups began by the end of the decade of 1920 with E. Cartan, and it continued by, among many others, Pontrjagin and Hopf. All these authors studied cohomology with real coefficients. The introduction of the Serre spectral sequence provided a new way to calculate the homology and cohomology of Lie groups over the integers or $\mathbb{Z}/p$. The principal contribution to these calculations was due to A. Borel [1], who also gave important results on the cohomology of the classifying spaces of Lie groups. Classifying spaces of Lie groups classify principal bundles and vector bundles over a space X by means of the homotopy classes of maps from X to the classifying space. This makes the cohomology of classifying spaces a relevant issue in the classification of fibre bundles.

In the first chapter we explain the concepts of fibre bundle, vector bundle and fibration, and we mention a few basic results. We remark the relevance of a particular fibration: the path-space fibration. Then we introduce Eilenberg–Mac Lane spaces and Postnikov towers. In the following sections we explain the construction and usage of the Serre spectral sequence. Finally, in the last section we show some applications. In particular we calculate the cohomologies of some Eilenberg–Mac Lane spaces and use them to prove the finiteness of the homotopy groups of the spheres.

In the second chapter we begin by introducing briefly topological groups and Lie groups, and in particular the classical compact Lie groups. Next we define principal bundles and the classifying space of a topological group, and we describe the classifying spaces of the unitary and orthogonal groups. Then we define Hopf algebras and characterize the Hopf algebras over the rationals. In the next section we see that the group product induces the structure of Hopf algebra into the cohomology ring, and we use the characterization above to deduce the rational cohomology of classical groups. Next we relate the cohomology over a field of a topological group with the cohomology of its classifying space. In the next sections we calculate the integer cohomologies of the unitary group and its classifying space, and the $\mathbb{Z}/2$ cohomology of the classifying space of the orthogonal group. Finally, we use these results to introduce the Chern classes associated to a complex vector bundle and the Stiefel–Whitney classes associated to a real vector bundle.

Agraïments

M'agradaria agrair al meu tutor, el doctor Carles Casacuberta, totes les hores que ha dedicat a explicar-me i aclarir-me conceptes, així com l'entusiasme que durant tots aquests mesos ha mostrat per al treball. També voldria agrair a la meua família el suport i l'ajuda que m'ha donat durant tot el grau.

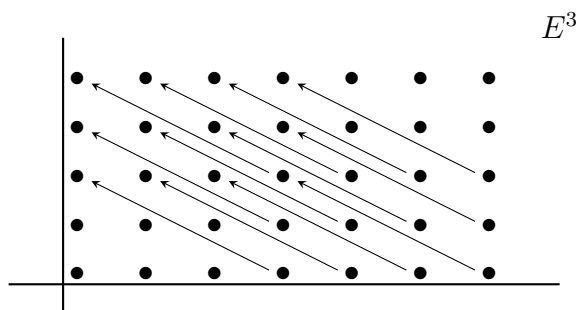
Capítol 1

La successió espectral de Serre

En topologia algebraica hi ha moltes relacions entre grups d'homologia, cohomologia o homotopia d'espais topològics que es formulen mitjançant successions exactes llargues, com per exemple en el cas de la successió de Mayer–Vietoris per a la descomposició d'un espai en unió de dos oberts. En altres casos, existeixen relacions més profundes, per a les quals es necessiten eines més potents. Les successions espectrals són una d'aquestes eines.

1.1 Successions espectrals

Una successió espectral és una seqüència de *pàgines*, on cada pàgina és un mòdul bigraduat sobre un anell fixat. A cada pàgina hi ha morfismes entre els mòduls, anomenades *diferencials*, que s'agrupen formant complexos de cadenes. Les homologies d'aquests complexos de cadenes són els mòduls de la pàgina següent. L'element de la pàgina r de la successió espectral situat a la posició (p, q) es denota per $E_{p,q}^r$ o bé $E_r^{p,q}$ (segons el context sigui homològic o cohomològic) i la pàgina sencera es denota per E^r o bé $E_{*,*}^r$ en un cas, i E_r o bé $E_r^{*,*}$ en l'altre cas. Si $E_{p,q}^r = 0$ quan $p < 0$ o bé $q < 0$, aleshores la successió espectral s'anomena *de primer quadrant*.



Les diferencials de la pàgina r van r unitats a l'esquerra i $r - 1$ unitats cap amunt, o bé r unitats a la dreta i $r - 1$ cap avall. La figura mostra el primer cas; el segon seria igual però invertint el sentit de les fletxes. És a dir, les diferencials

són (en el primer cas) aplicacions $d_r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$. Per tant, el mòdul $E_{p,q}^{r+1}$ s'obté com

$$E_{p,q}^{r+1} = \text{Ker}(d_r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r) / \text{Im}(d_r: E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r).$$

Si la successió espectral és de primer quadrant, aleshores per a tot p, q arribarà un moment en què les diferencials incident i sortint de (p, q) no seran al primer quadrant, i per tant els mòduls situats a (p, q) estabilitzaran. Com a conseqüència, hi ha una pàgina límit ben definida, que es denota per $E_{*,*}^\infty$ o bé $E_\infty^{*,*}$, segons el context.

Definició 1.1. Un *mòdul diferencial bigraduat* sobre un anell R és una col·lecció $\{E_{p,q}\}$ de R -mòduls, on $p, q \in \mathbb{Z}$, amb una aplicació R -lineal $d: E_{*,*} \rightarrow E_{*,*}$, anomenada *diferencial*, tal que $d \circ d = 0$, que té bigrau $(s, 1-s)$ o bé $(-s, s-1)$ per a algun enter s .

Amb aquesta definició, tal com hem dit a dalt, l'homologia $H(E_{p,q})$ està ben definida.

Definició 1.2. Una *successió espectral* és una col·lecció de mòduls diferencials bigraduats $\{E_{*,*}^r, d_r\}$, amb $r = 1, 2, \dots$, tal que les diferencials tenen totes bigrau $(-r, r-1)$, o bé una col·lecció $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ on les diferencials tenen bigrau $(r, 1-r)$. En el primer cas la successió espectral s'anomena *d'homologia* i en el segon cas, *de cohomologia*. A més, se satisfà $E_{p,q}^{r+1} \cong H(E_{p,q}^r)$ o bé $E_{r+1}^{p,q} \cong H(E_r^{p,q})$ per a p, q, r qualssevol.

La successió espectral de Serre està definida per a fibracions $F \rightarrow E \rightarrow B$ i relaciona l'homologia (o la cohomologia) de F , E i B . Abans d'introduir aquesta successió espectral, donarem alguns resultats útils sobre fibracions.

1.2 Fibrats i fibracions

Definició 1.3. Un *fibrat* de fibra F és una aplicació $p: E \rightarrow B$ contínua i exhaustiva tal que existeix un recobriment per oberts $\{U_j\}_{j \in J}$ de B amb homeomorfismes $\phi_j: p^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$ tals que els diagrames

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_j) & \xrightarrow{\phi_j} & U_j \times F \\ & \searrow p & \downarrow \pi \\ & & U_j \end{array}$$

on π és la projecció sobre la primera component commuten. L'espai E s'anomena *espai total* del fibrat, B s'anomena *espai base*, i el conjunt d'oberts $\{U_j\}_{j \in J}$ es diu que és un conjunt d'oberts *localment trivialitzants*.

Intuïtivament, un fibrat és la unió de les fibres $p^{-1}(b)$ per a tot $b \in B$ enganxades mitjançant la topologia de E . En particular, la projecció $B \times F \rightarrow B$ és un fibrat, que s'anomena *trivial*.

Definició 1.4. Siguin $p: E \rightarrow B$ i $p': E' \rightarrow B$ dos fibrats sobre un mateix espai B . Un *morfisme de fibrats* sobre B és una aplicació contínua $u: E \rightarrow E'$ tal que $p = p' \circ u$.

La condició $p = p' \circ u$ és equivalent a dir que u preserva les fibres, és a dir $u(p^{-1}(b)) \subset (p')^{-1}(b)$ per a tot $b \in B$. Un *isomorfisme* de fibrats sobre B és un morfisme sobre B tal que u és un homeomorfisme en cada fibra.

Un fibrat $p: E \rightarrow B$ de fibra $\mathbb{R}^k$ tal que les fibres $p^{-1}(b)$ tenen estructura d'espai vectorial isomorf a $\mathbb{R}^k$ per a tot $b \in B$ i els homeomorfismes ϕ_j es restringeixen a isomorfismes lineals $p^{-1}(b) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^k$ s'anomena *fibrat vectorial real* de dimensió k . Anàlogament es defineix un *fibrat vectorial complex* de dimensió k .

Passem ara a definir un concepte semblant al de fibrat: el de *fibració*. Com hem vist, en un fibrat totes les fibres són homeomorfes; en una fibració, les fibres són només homotòpicament equivalents.

Definició 1.5. Una aplicació $p: E \rightarrow B$ té la *propietat d'elevació d'homotopies* respecte a un espai Y si, donada una homotopia $H: Y \times I \rightarrow B$ i una aplicació $h: Y \rightarrow E$ tal que $p(h(y)) = H(y, 0)$ per a tot y , aleshores existeix una homotopia $\tilde{H}: Y \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{H}(y, 0) = h(y)$ per a tot y i $p \circ \tilde{H} = H$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Una aplicació $p: E \rightarrow B$ és una *fibració* si satisfà la propietat d'elevació d'homotopies respecte a qualsevol espai. Com en el cas dels fibrats, B s'anomena *espai base*, E *espai total* i, per a cada $b \in B$, l'espai $p^{-1}(b)$ s'anomena *fibra* de p sobre b i es denota per F_b .

Proposició 1.6. Sigui $p: E \rightarrow B$ una fibració amb B arc-connex. Aleshores F_a i F_b són homotòpicament equivalents per a tot parell de punts $a, b \in B$.

Demostració. Sigui $\lambda: [0, 1] \rightarrow B$ un camí que uneix a i b . Apliquem la propietat d'elevació d'homotopies

$$\begin{array}{ccc} F_a & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ F_a \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

amb $H(x, t) = \lambda(t)$. Existeix una elevació $\tilde{H}$ de H . La restricció $\tilde{H}|_{F_a \times \{1\}}$, que anomenarem $\tilde{H}_1$, és una aplicació de F_a a F_b . Si μ és un altre camí de a a b homòtop a λ i anomenem G i $\tilde{G}$ les homotopies anàlogues a H a i a $\tilde{H}$, veurem que hi ha una homotopia de $\tilde{H}_1$ a $\tilde{G}_1$. Anomenem Θ una homotopia entre λ i μ . Definim el conjunt

$$Z = F_a \times I \times \{0\} \cup F_a \times \partial I \times I$$

i l'aplicació $f: Z \rightarrow E$ donada per $f(x, t, 0) = x$, $f(x, 0, s) = H(x, s)$ i $f(x, 1, t) = G(x, t)$. Observem que $F_a \times I \times I$ és homotòpicament equivalent a $Z \times I$; per tant, si definim una homotopia $\Gamma: F_a \times I \times I \rightarrow B$, $\Gamma(x, t, s) = \Theta(x, t)(s)$, aleshores existeix una homotopia $\tilde{\Gamma}$

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\Gamma} & \downarrow p \\ F_a \times I \times I & \xrightarrow{\Gamma} & B \end{array}$$

que satisfà $\tilde{\Gamma}(x, t, 1) \in F_b$, $\tilde{\Gamma}|_{F_a \times \{0\} \times \{1\}} = \tilde{H}_1$ i $\tilde{\Gamma}|_{F_a \times \{1\} \times \{1\}} = \tilde{G}_1$. Com a conseqüència $\tilde{\Gamma}$ és una homotopia de $\tilde{H}_1$ a $\tilde{G}_1$.

Considerem ara un camí λ de a a b , amb l'aplicació $\tilde{H}_1: F_a \rightarrow F_b$ associada, i el seu invers, λ^{-1} , amb l'aplicació $\tilde{G}_1: F_b \rightarrow F_a$. Pel que acabem de veure, com que $\lambda\lambda^{-1}$ és homòtop al camí constant, aleshores $\tilde{G}_1 \circ \tilde{H}_1$ és homòtopa a la identitat. Per tant F_a i F_b són homotòpicament equivalents. $\square$

A partir d'ara sempre que parlem de fibracions suposarem que l'espai base és arc-connex. Denotarem la fibra genèrica d'una fibració per F .

Si F i B són dos espais qualssevol, aleshores la projecció $p: F \times B \rightarrow B$ és una fibració. Amb la mateixa nomenclatura que en els diagrames anteriors, només cal definir $\tilde{H}(y, t) = \pi(h(y)) \times H(y, t)$, on $\pi: F \times B \rightarrow F$ és la projecció sobre la fibra F . En general qualsevol fibrat és una fibració [4].

Una de les fibracions que més apareixerà a les successions espectrals és la *fibració de l'espai de camins*. Si X és un espai qualsevol amb un punt base x_0 , definim l'espai de camins a X com

$$PX = \{\lambda: I \rightarrow X \mid \lambda(0) = x_0\},$$

amb λ continu. Dotem PX amb la topologia compacta-oberta, és a dir, un obert bàsic de PX és el conjunt de $\lambda \in PX$ tals que, per a un $K \subset [0, 1]$ compacte i un $U \subset X$ obert fixats, $\lambda(K) \subset U$. Hi ha una aplicació natural $p: PX \rightarrow X$ donada per $p(\lambda) = \lambda(1)$, que és contínua. Podem veure que aquesta aplicació és una fibració: si $h: Y \rightarrow PX$ i $H: Y \times I \rightarrow X$ són una aplicació i una homotopia que satisfan $H(y, 0) = p(h(y))$ per a tot $y \in Y$, aleshores definim

$$\tilde{H}(y, t)(s) = \begin{cases} (h(y))(s(t+1)) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{t+1} \\ H(y, s(t+1) - 1) & \text{si } \frac{1}{t+1} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Observem que $p^{-1}(x_0) = \{\lambda \in PX \mid \lambda(1) = x_0\} := \Omega X$, l'espai de llaços de X . Com veurem més endavant, la particular utilitat que té aquesta fibració, $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$, a l'hora de fer servir la successió espectral de Serre és que PX és contràctil, amb la contracció $H: PX \times [0, 1] \rightarrow PX$ donada per $H(\lambda, t) = \lambda(1-t)$.

De la mateixa manera, si tenim una aplicació qualsevol $f: E \rightarrow B$, podem definir l'espai E_f com l'espai de parells (e, λ) tals que $e \in E$ i λ és un camí a B amb $\lambda(0) = f(e)$ amb la topologia compacta-oberta. Observem que E és l'espai de parells $(e, \lambda) \in E_f$ tals que λ és constant. De fet E és un retracte de deformació de E_f , que s'obté deformant cada camí al camí constant.

Proposició 1.7. *L'aplicació $p: E_f \rightarrow B$ donada per $p(e, \lambda) = \lambda(1)$ és una fibració.*

La demostració d'aquest fet es pot trobar a [4]. Juntament amb el fet que E és un retracte de deformació de E_f dona lloc al següent teorema.

Teorema 1.8. *Qualsevol aplicació $f: E \rightarrow B$ amb B arc-connex es pot descompondre en una equivalència homotòpica $E \hookrightarrow E_f$ i una fibració $p: E_f \rightarrow B$.*

Finalment enunciem un important teorema que relaciona els grups d'homotopia de la fibra, l'espai total i l'espai base d'una fibració [4].

Teorema 1.9. *Si $F \rightarrow E \rightarrow B$ és una fibració amb B arc-connex. Aleshores hi ha una successió exacta llarga*

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(E) \rightarrow 0.$$

Observem, tornant a l'exemple de la fibració de l'espai de camins, que, donat que per a qualsevol espai X es té que PX és contràctil, aleshores per la successió llarga d'homotopia tenim que $\pi_i(X) \cong \pi_{i-1}(\Omega X)$ per a tot i . Així mateix, donada una fibració $F \rightarrow E \rightarrow B$, hi ha una successió de fibracions

$$\cdots \rightarrow \Omega^n F \rightarrow \Omega^n E \rightarrow \Omega^n B \rightarrow \Omega^{n-1} F \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B.$$

Espais d'Eilenberg–Mac Lane i torres de Postnikov

Definició 1.10. Per a $n \geq 1$, sigui G un grup, que suposem abelià si $n > 1$. Si X és un espai topològic arc-connex que satisfà

$$\pi_i(X) = \begin{cases} G & \text{si } i = n \\ \{0\} & \text{si } i \neq n \end{cases}$$

aleshores X s'anomena *espai d'Eilenberg–Mac Lane* de tipus (G, n) i es denota per $X \simeq K(G, n)$.

Per exemple, S^1 és un espai d'Eilenberg–Mac Lane de tipus $(\mathbb{Z}, 1)$; $\mathbb{R}P^\infty$ és un $K(\mathbb{Z}/2, 1)$, i $\mathbb{C}P^\infty$ és un $K(\mathbb{Z}, 2)$. Si considerem la fibració

$$\Omega K(G, n) \longrightarrow PK(G, n) \longrightarrow K(G, n),$$

aleshores per la successió llarga d'homotopia tenim que

$$\pi_i(K(G, n)) \cong \pi_{i-1}(\Omega K(G, n))$$

per a tot i , i per tant $\Omega K(G, n) \simeq K(G, n-1)$.

Donat un espai X arc-connex, hi ha un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ X_3 \\ \uparrow \downarrow \\ X_2 \\ \uparrow \downarrow \\ X_1 \\ \uparrow \downarrow \\ X \longrightarrow X_0 \end{array}$$

on X_0 és contràctil, les aplicacions $X \rightarrow X_n$ indueixen isomorfismes a π_i per a $i \leq n$ i es compleix $\pi_i(X_n) = 0$ per a $i > n$. Aquest diagrama s'anomena *torre de Postnikov* de X ; es pot veure la seva construcció a [3]. Observem que si convertim cada aplicació $X_n \rightarrow X_{n-1}$ en una fibració, aleshores la fibra és, per la successió llarga d'homotopia, un $K(\pi_n(X), n)$.

De la mateixa manera, si convertim l'aplicació $X \rightarrow X_n$ en una fibració, en denotarem la fibra per $X\langle n \rangle$. Per la successió llarga d'homotopia tenim que $\pi_i(X\langle n \rangle) = 0$ per a $i \leq n$ i a més $\pi_i(X\langle n \rangle) \cong \pi_i(X)$ per a $i > n$. L'espai $X\langle n \rangle$ és per tant n -connex i s'anomena *recobridor n -connex* de X . Com abans, si convertim $X\langle n \rangle \rightarrow X\langle n-1 \rangle$ en una fibració, la fibra és un $K(\pi_n(X), n-1)$. Hem definit, per tant, un conjunt d'espais X_n on s'eliminen els grups d'homotopia de X en dimensió superior a n , i un conjunt d'espais $X\langle n \rangle$ on s'eliminen els grups d'homotopia de X en dimensió inferior a $n+1$.

1.3 La successió espectral de Serre

Com hem dit anteriorment, la successió espectral de Serre relaciona l'homologia i la cohomologia de F , X i B en una fibració $F \rightarrow X \rightarrow B$. Si l'espai B és simplement connex, aleshores la pàgina E^2 ve donada per l'expressió $E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F; G))$ on G és un grup donat. A partir d'aquí les pàgines se succeeixen tal com hem explicat a la secció 1.1. La pàgina límit E^∞ està relacionada amb l'homologia de X . En molts casos, i en tots els que sortiran en aquest treball, es dona que $H_n(X; G) = \bigoplus_p E_{p,n-p}^\infty$, és a dir que l'homologia de X és la suma directa de les diagonals principals de E^∞ . Tot i que la construcció sembla portar de manera natural a calcular els grups d'homologia de X a partir dels de F i els de B , és igual de recurrent el càlcul de l'homologia de qualsevol dels espais a partir de la dels altres dos. La principal dificultat de la successió espectral de Serre per a homologia és que les diferencials no vénen donades explícitament per a cap pàgina, i s'han

de deduir a partir d'altres resultats o eines. Per a la cohomologia, com veurem, l'estructura multiplicativa afegeix informació molt valuosa per a determinar les diferencials. Vegem ara d'on surt la successió espectral de Serre per a homologia.

Definició 1.11. Una *parella exacta* és una successió exacta de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ k \uparrow & & \searrow j \\ E & & \end{array}$$

on i, j i k són morfismes de R -mòduls per a un anell R donat. Definim $d : E \rightarrow E$ com $d = j \circ k$. Aleshores $d \circ d = j(kj)k = 0$ i per tant el grup d'homologia $H(E)$ està ben definit. A partir d'una parella exacta se'n pot formar una altra, anomenada *parella derivada*:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i'} & A' \\ k' \uparrow & & \searrow j' \\ E' & & \end{array}$$

definint $A' = i(A)$, $E' = H(E)$, $i' = i|_{A'}$, $j'a' = [ja]$, on $[]$ significa la classe a l'homologia $H(E)$, i $k'[b] = kb$. Comprovem que les aplicacions estan ben definides:

- $ja \in \text{Ker } d$ ja que $d(ja) = j(kj)a = 0$, i si $ia_1 = ia_2$, aleshores $a_1 - a_2 \in \text{Ker } i = \text{Im } k$, i per tant $ja_1 - ja_2 \in \text{Im } jk = \text{Ker } k$.
- $jkb = 0$; per tant hi ha algun $a \in A$ tal que $kb = ia$.

Proposició 1.12. Amb aquestes definicions la parella derivada és exacta.

Demostració. Ho demostrarem per a $k'j'$; les altres dues es veuen de manera semblant. D'una banda $k'j'a' = k'[ja] = kja = 0$ i per tant $\text{Im } j' \subset \text{Ker } k'$. I d'altra banda si $k'[b] = 0$, aleshores $kb = 0$ i existeix a tal que $b = ja$, d'on $[b] = [ja] = j'a'$. $\square$

Suposem ara que $A_{*,*}$ i $E_{*,*}$ són mòduls bigraduats i que els morfismes i, j, k tenen bigrau $(1, -1)$, $(0, 0)$ i $(-1, 0)$ respectivament. Anomenem $A_{*,*}^r$ i $E_{*,*}^r$ la r -èsima parella derivada i $d_r = j_r \circ k_r$. Aleshores $\{E_{*,*}^r, d_r\}$ és una successió espectral per a homologia. Per verificar aquest fet només hem de comprovar que d_r té grau $(-r, r-1)$. En primer lloc $d_1 = j \circ k$; per tant el grau de d_1 és $(0, 1) + (0, 0) = (0, 1)$. Ara suposem que j_{r-1} i k_{r-1} tenen grau $(2-r, r-2)$ i $(-1, 0)$ respectivament. Aleshores per la fórmula $j_r a' = [j_{r-1} i a']$ obtenim que j_r té grau $(1-r, r-1)$, i per $k_r[b] = k_{r-1}b$ obtenim que k té grau $(-1, 0)$. Per tant en efecte d_r té grau

$(-r, r-1)$. Si i, j, k tinguessin graus $(-1, 1)$, $(0, 0)$ i $(1, 0)$ tindríem una successió espectral de cohomologia. El diagrama estès d'aquesta situació és, per a $r = 1$,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\
 & \xrightarrow{k} & A_{p,q+1}^1 & \xrightarrow{j} & E_{p,q+1}^1 & \xrightarrow{k} & A_{p-1,q+1}^1 \xrightarrow{j} \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\
 & \xrightarrow{k} & A_{p+1,q}^1 & \xrightarrow{j} & E_{p+1,q}^1 & \xrightarrow{k} & A_{p,q}^1 \xrightarrow{j} \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\
 & \xrightarrow{k} & A_{p+2,q-1}^1 & \xrightarrow{j} & E_{p+2,q-1}^1 & \xrightarrow{k} & A_{p+1,q-1}^1 \xrightarrow{j} \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & &
 \end{array}$$

Observem que a cada columna $p+q$ es manté constant. Considerem ara que, en el diagrama anterior, només un nombre finit de les i són no isomorfismes. És a dir, a cada columna de A 's existeix un límit inferior i un límit superior a partir dels quals tots els mòduls són isomorfs. Anomenem $A_{n,-}^1$ i $A_{n,+}^1$ els límits inferior i superior de la columna $p+q = n$. Per exactitud, aquesta consideració implica que només un nombre finit de E 's són diferents de 0; per tant per a qualssevol p, q hi ha un r prou gran tal que $E_{p-r,q+r-1}^r = 0$ i un s prou gran tal que $E_{p+s,q-s+1}^s = 0$. Ara considerem a més que $A_{n,-}^1 = 0$, i reanomenem, per comoditat, $A_{n,+}^1 = A_n$. Aleshores per a qualssevol p, q existeix r tal que $A_{q,p}^r = 0$, perquè $A_{q,p}^r = i^r(A_{q+r,p-r}^1)$ i $A_{q+r,p-r}^1 = 0$ per a r suficientment gran.

Per a tot tern p, q, r hi ha una successió exacta

$$E_{p+r-1,q-r+2}^r \xrightarrow{k_r} A_{p+r-2,q-r+2}^r \xrightarrow{i} A_{p+r-1,q-r+1}^r \xrightarrow{j_r} E_{p,q}^r \xrightarrow{k_r} A_{p-1,q}^r,$$

però pel que acabem de dir, si escollim r prou gran, el primer i l'últim terme són 0 i per tant tenim una successió exacta curta. Com a conseqüència $E_{p,q}^r \cong A_{p+r-1,q-r+1}^r / i(A_{p+r-2,q-r+2}^r)$, o el que és el mateix, $i^{r-1}(A_{p,q}^1) / i^r(A_{p-1,q+1}^1)$, que és un quocient de submòduls de $A_{p+r-1,q-r+1}^r = A_n$. Per tant si denotem per F_q^p la imatge de l'aplicació $A_{p,q}^1 \rightarrow A_n$, tenim que $E_{p,q}^\infty \cong F_q^p / F_{q+1}^{p-1}$.

Definició 1.13. Una *filtració* F^* d'un R -mòdul A és una família de submòduls $\{F^p\}$ tals que

$$\dots \subset F^{p-1} \subset F^p \subset F^{p+1} \subset \dots \subset A \text{ (filtració creixent)}$$

$$\text{o bé } \dots \subset F^{p+1} \subset F^p \subset F^{p-1} \subset \dots \subset A \text{ (filtració decreixent)}.$$

És a dir, en el raonament anterior hem trobat una filtració creixent de A_n

$$\dots \subset F_{q+1}^{p-1} \subset F_q^p \subset F_{q-1}^{p+1} \subset \dots \subset A_n$$

tal que $E_{p,q}^\infty \cong F_q^p / F_{q+1}^{p-1}$. Observem que els subíndexs i els superíndexs sempre sumen n , és a dir que no hi ha cap variació respecte a la definició. En aquest cas es diu que la successió espectral *convergeix* a A_* .

Definició 1.14. Sigui X un espai topològic. Una *filtració* de X és una família $\{X_p\}$ de subespais tals que $\cdots \subset X_{p-1} \subset X_p \subset X_{p+1} \subset \cdots \subset X$.

Sigui X un espai topològic i $\{X_p\}$ una filtració de X . Aleshores per a tot p hi ha una successió exacta llarga

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X_p) \rightarrow H_{n+1}(X_p, X_{p-1}) \rightarrow H_n(X_{p-1}) \rightarrow H_n(X_p) \rightarrow \cdots,$$

on l'homologia és amb coeficients en un R -mòdul G qualsevol, que no detallem per simplicitat de notació. Totes aquestes successions exactes llargues per a tot p formen un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \longrightarrow & H_n(X_p) & \longrightarrow & H_n(X_p, X_{p-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_{p-1}) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_n(X_{p+1}) & \longrightarrow & H_n(X_{p+1}, X_p) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_p) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_n(X_{p+2}) & \longrightarrow & H_n(X_{p+2}, X_{p+1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_{p+1}) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & & & \downarrow & \end{array}$$

que és una parella exacta de mòduls bigraduats tals que les aplicacions tenen els graus mencionats dues pàgines enrere.

Ara sigui $f: X \rightarrow B$ una fibració tal que B és un complex cel·lular, i sigui $\{B_p\}$ una descomposició cel·lular de B . Considerem la filtració de X donada per $X_p = f^{-1}(B_p)$. Com que (B, B_p) és p -connex, per la propietat d'elevació d'homotopies (X, X_p) també ho és. Això implica que, per a tot $k \leq p$, $H_k(X, X_p) = 0$, i per tant per a $n < p$ la inclusió $X_p \hookrightarrow X$ induïx un isomorfisme a $H_n(X_p)$. A més se satisfà que, per a $p < 0$, $X_p = \emptyset$. Aquests dos fets comporten que $A_{n,-}^1 = 0$ i que $A_{n,+}^1 = H_n(X)$. Per tant hi ha una successió espectral que convergeix a $H_*(X)$. La pàgina E^1 d'aquesta successió espectral ve donada per $E_{n,p}^1 = H_n(X_p, X_{p-1})$, que és 0 per a $n \geq p$, ja que (X_p, X_{p-1}) és $(p-1)$ -connex. Per tant tenim una successió espectral de primer quadrant amb $E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ que convergeix a $H_*(X)$.

A més, si B és simplement connex, aleshores $E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F))$, on F és la fibra de f . Els detalls es poden trobar a [8]. Tenim per tant el següent teorema, per a coeficients arbitraris.

Teorema 1.15. *Sigui G un R -mòdul. Donada una fibració $F \rightarrow X \rightarrow B$ existeix una successió espectral d'homologia de primer quadrant que convergeix a $H_*(X; G)$. A més, si B és simplement connex, es té que $E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F; G))$.*

En cas que B no sigui simplement connex, la successió espectral es construeix de la mateixa manera, però cal tenir en compte l'acció del grup fonamental $\pi_1(B)$ sobre l'homologia de F . La successió espectral de Serre per a cohomologia es construeix de manera anàloga.

Teorema 1.16. *Segui G un R -mòdul. Donada una fibració $F \rightarrow X \rightarrow B$ existeix una successió espectral de cohomologia de primer quadrant que convergeix a $H^*(X; G)$. A més, si B és simplement connex, es té que $E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; G))$.*

Observem, que per la fórmula de Künneth [4], si calculem l'homologia o la cohomologia amb coeficients en un cos k , tenim que

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F; G)) = H_p(B; k) \otimes H_q(F; k),$$

i el mateix per a cohomologia.

Anteriorment hem dit que en molts casos es dona que $H_n(X) = \bigoplus_p E_{p,n-p}^\infty$. Per exemple, si $E_{p,n-p}^\infty = 0$ per a tot p menys per a $p = p'$, aleshores $H_n(X) = E_{p',n-p'}^\infty$, ja que la única filtració possible és

$$0 \subset \cdots \subset 0 \subset E_{p',n-p'}^\infty \subset E_{p',n-p'}^\infty \subset \cdots \subset E_{p',n-p'}^\infty \subset H_n(X).$$

Això també passa quan l'homologia o la cohomologia estan calculades amb coeficients en un cos, ja que les successions exactes curtes d'espais vectorials sempre escindeixen.

Finalment, és important comentar que si tenim un diagrama commutatiu de fibracions

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ F' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

aleshores hi ha morfismes induïts $f_r^*: E_r^{p,q} \rightarrow E_r'^{p,q}$ que commuten amb les diferencials, amb f_{r+1}^* l'aplicació induïda per f_r^* . A més se satisfà que $f_2^*: E_2^{p,q} \rightarrow E_2'^{p,q}$ és induïda per les aplicacions $F' \rightarrow F$ i $B' \rightarrow B$ del diagrama [5].

1.4 Estructura multiplicativa

La successió espectral de Serre per a cohomologia adquireix una estructura addicional quan la cohomologia està calculada amb coeficients en un anell commutatiu. En aquest cas el producte *cup* dota la successió espectral d'un producte bilineal

$$E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{p+s, q+t}$$

per a $1 \leq r \leq \infty$ que satisfà les condicions següents:

- (a) Cada diferencial és una derivació, és a dir, satisfà, per a tot $x \in E_r^{p,q}$ i $y \in E_r^{s,t}$,

$$d_r(xy) = d_r(x)y + (-1)^{p+q}xd_r(y).$$

Com a conseqüència, el producte a la pàgina E_r induïx el producte a la pàgina E_{r+1} definint $\bar{x}\bar{y} := \overline{xy}$.

$$H^p(B; H^q(F; R)) \times H^s(B; H^t(F; R)) \longrightarrow H^{p+s}(B; H^{q+t}(F; R))$$

Com hem vist a la secció anterior, si la cohomologia està calculada sobre un cos k tenim que

$$E_2^{p,q} = H^p(B; k) \otimes H^q(F; k)$$

$$(H^p(B; k) \otimes H^q(F; k)) \otimes (H^s(B; k) \otimes H^t(F; k)) \longrightarrow H^{p+s}(B; k) \otimes H^{q+t}(F; k),$$
$$a \otimes b \otimes c \otimes d \longrightarrow (-1)^{\mathrm{gr}(b)\mathrm{gr}(c)} a \otimes c \otimes b \otimes d \longrightarrow (-1)^{\mathrm{gr}(b)\mathrm{gr}(c)} (a \smile c) \otimes (b \smile d).$$

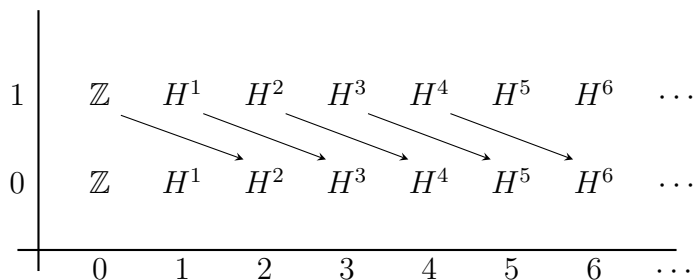
A més se satisfà que $E_2^{*,0} \cong H^*(B; k)$ i $E_2^{0,*} \cong H^*(F; k)$.

1.5 Finitud dels grups d'homotopia de les esferes

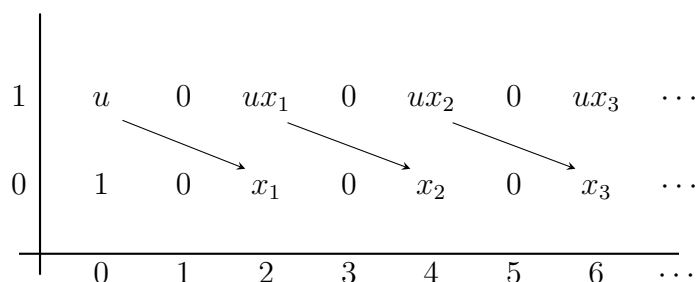
Cohomologia de $K(\mathbb{Z}, 2)$

$$K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow P \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2).$$

Com que la circumferència S^1 és un $K(\mathbb{Z}, 1)$, els grups de cohomologia de $K(\mathbb{Z}, 1)$ són $\mathbb{Z}$ per $i = 0, 1$ i zero altrament. Així, la pàgina 2 de la successió espectral per a aquesta fibració és $E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z}, 2); H^q(S^1))$ que és $H^p(K(\mathbb{Z}, 2))$ per a $q = 0, 1$ i zero en qualsevol altre cas:



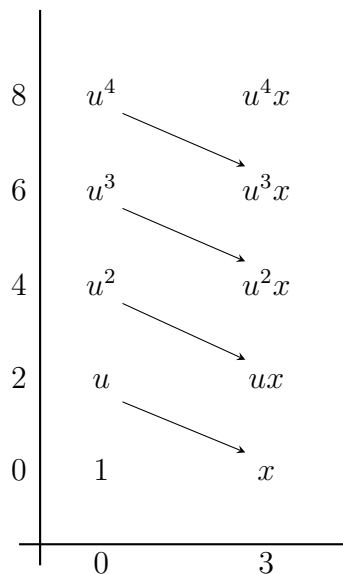
Troblem ara l'estructura d'anell de la cohomologia de $K(\mathbb{Z}, 2)$. Observem que en aquest cas es compleix $E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z}, 2)) \otimes H^q(S^1)$; per tant, si anomenem u el generador de $E_2^{0,1}$ i x_i el de $E_2^{2i,0}$, aleshores ux_i és generador de $E_2^{2i,1}$. És a dir, la successió espectral anterior es pot escriure com


$$x_2 = d_2(ux_1) = d_2(u)x_1 + (-1)^{0+1}ud_2(x_1) = d_2(u)x_1 = x_1^2,$$
$$x_i = d_2(ux_{i-1}) = d_2(u)x_{i-1} = x_1x_{i-1} = x_1^2x_{i-2} = \cdots = x_1^i.$$

Cohomologia del recobridor 3-connex de S^3

$$K(\mathbb{Z}, 2) \longrightarrow S^3 \langle 3 \rangle \longrightarrow S^3.$$

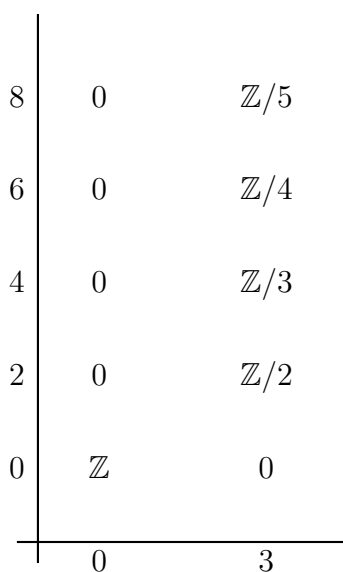
Sabem la cohomologia de S^3 i la de $K(\mathbb{Z}, 2)$ l'hem calculat a l'apartat anterior. La successió espectral associada a aquesta fibració és doncs $E_2^{p,q} = H^p(S^3; H^q(K(\mathbb{Z}, 2)))$, és a dir, $\mathbb{Z}$ per a q parell i $p = 0, 3$ i 0 en qualsevol altre cas. Com abans, l'estructura de producte ve donada per la multiplicació de generadors,



Les úniques diferencials no trivials són les d_3 , dibuixades a la figura. Donat que $S^3\langle 3 \rangle$ és 3-connex, $H^3(S^3\langle 3 \rangle) = 0$. Això implica que x ha de desaparèixer, és a dir $d_3(u) = x$. Vegem ara per inducció que $d_3(u^k) = ku^{k-1}x$. El cas $k = 1$ es compleix. Per la propietat de derivació, $d_3(u^k) = xu^{k-1} + ud_3(u^{k-1})$ i per hipòtesi d'inducció $d_3(u^{k-1}) = (k-1)u^{k-2}x$; per tant en efecte

$$d_3(u^k) = ku^{k-1}x.$$

La pàgina $E_4 = E_\infty$ de la successió és doncs



És a dir

$$H^n(S^3\langle 3 \rangle) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}/k & \text{si } n = 2k + 1, n \neq 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Com a conseqüència, la cohomologia de $S^3\langle 3 \rangle$ té torsió de tots els ordres.

Cohomologia racional de $K(\mathbb{Z}, n)$

Introduïm ara una estructura algebraica que apareixerà repetidament al llarg del treball.

Definició 1.17. L'àlgebra exterior sobre k generada per $x_1, \dots, x_n$ és l'àlgebra tensorial generada per aquests elements amb les relacions $x_i \otimes x_i = 0$ per a tot i , $x_i \otimes x_j = -x_j \otimes x_i$ per a tot parell i, j . Es denota per $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$, i la classe de $x_i \otimes x_j$ s'escriu com $x_i x_j$ per simplicitat de notació.

Si la característica de k és diferent de 2, les relacions $x_i^2 = 0$ són conseqüència de les altres. Si k té característica 2, llavors $\Lambda(x_1, \dots, x_n) \cong k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^2, \dots, x_n^2)$.

Proposició 1.18. L'anell de cohomologia $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ és isomorf a $\mathbb{Q}[x]$ si n és parell i a $\Lambda(x)$ si n és senar, amb $\text{gr}(x) = n$.

Demostració. Fem servir la fibració $K(\mathbb{Z}, n-1) \rightarrow P \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$ per demostrar-ho per inducció. Com que $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$, el cas inicial es compleix. El cas n parell és anàleg al de $n = 2$, que hem calculat abans. La pàgina E_2 de la successió espectral associada és

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & n & 2n & 3n \\ \hline n-1 & \mathbb{Q}a & \mathbb{Q}ax_1 & \mathbb{Q}ax_2 & \mathbb{Q}ax_3 \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \\ 0 & \mathbb{Q} & \mathbb{Q}x_1 & \mathbb{Q}x_2 & \mathbb{Q}x_3 \end{array}$$

Les fletxes han de ser isomorfismes i per tant $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1]$, on x_1 té grau n .

Suposem ara n senar. La pàgina E_2 té $H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ per a tot q múltiple de $n-1$. Això implica que la primera diferencial no trivial és d_n , és a dir que els $H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ han de ser zero per $0 < p < n$, ja que en cas contrari sobreviurien a E_∞ . Ara la diferencial $d_n: \mathbb{Q} \rightarrow E_n^{n,0}$ ha de ser un isomorfisme, perquè $E_n^{n,0}$ ha de desaparèixer. Per l'estructura multiplicativa tenim per tant

$$\begin{array}{c|ccc}
4(n-1) & Qu^3 & Qu^3x & \cdots \\
2(n-1) & Qu^2 & Qu^2x & \cdots \\
n-1 & Qu & Qux & \cdots \\
0 & Q1 & Qx & \cdots \\
\hline
& 0 & n & \cdots
\end{array}$$

amb $d_n(u) = x$. Com en l'exemple anterior, $d_n(u^k) = ku^{k-1}x$. Donat que a $\mathbb{Q}$ el producte per coeficients és un isomorfisme, tenim que totes les fletxes són isomorfismes, d'on es dedueix que $H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = 0$ per a $p > n$ i $H^*(K(\mathbb{Z}, n)) \cong \Lambda(x)$, on x té grau n . $\square$

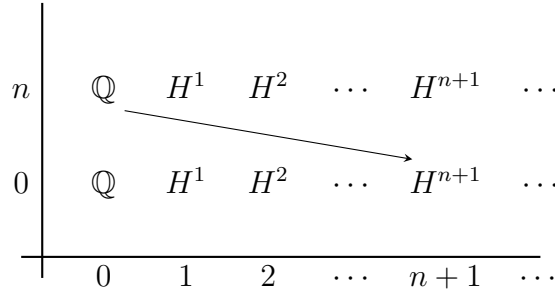
Finitud dels grups d'homotopia de les esferes

Els grups d'homotopia d'un espai X són en general complicats de calcular. Per això pot ser útil i més senzill calcular $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ en comptes de $\pi_n(X)$. D'aquesta manera es perd informació, ja que el producte tensorial per $\mathbb{Q}$ mata la torsió, però es poden obtenir resultats interessants i més fàcilment interpretables. Un bon exemple és la finitud dels grups d'homotopia de les esferes.

Per demostrar aquest fet farem servir el resultat obtingut a l'apartat anterior sobre la cohomologia racional dels espais $K(\mathbb{Z}, n)$ i alguns resultats que també es demostren utilitzant la successió espectral de Serre.

Lema 1.19. *Si π és un grup abelià finit, aleshores $H^*(K(\pi, n); \mathbb{Q}) = 0$.*

Demostració. Ho demostrarem per a $\pi = \mathbb{Z}/p$. Per a π qualsevol es pot deduir fàcilment fent inducció sobre el nombre de sumands directes. Considerem primer $n \neq 1$. La successió exacta $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow 0$ indueix una fibració $K(\mathbb{Z}, n) \rightarrow K(\mathbb{Z}, n) \rightarrow K(\mathbb{Z}/p, n)$ per a tot n . Per a n senar, la successió espectral d'aquesta fibració és



Com que E_∞ ha de donar la cohomologia de $K(\mathbb{Z}, n)$ els únics elements que poden sobreviure són el $E_2^{0,0}$ i el $E_2^{0,n}$. Totes les diferencials fins a d_n són trivials, i d_{n+1} ha de ser 0 perquè sobrevisqui $E_2^{0,n}$; per tant $H^i = 0$ per a tot $i \neq 0$.

Per a n parell la successió espectral és igual però amb la fila de H^i s a totes les dimensions múltiples de n . Pel mateix raonament, $H^i = 0$ per a tot $i \neq 0$.

Per a $n = 1$ la successió espectral per a la fibració $K(\mathbb{Z}/p, 1) \rightarrow P \rightarrow K(\mathbb{Z}/p, 2)$ dóna el resultat. $\square$

Proposició 1.20. *Sigui $F \rightarrow X \rightarrow B$ una fibració amb B simplement connex. Aleshores tots els grups d'homologia d'un dels tres espais són finitament generats si tots els grups d'homologia dels altres dos ho són.*

Aquesta proposició surt del fet que la classe dels grups finitament generats és tancada respecte al producte tensorial i respecte al functor Tor, i que si tenim una successió exacta de grups abelians $A \rightarrow B \rightarrow C$ aleshores A i C són finitament generats si i només si B ho és. La demostració detallada és a [5].

Lema 1.21. *Si π és un grup abelià finitament generat, aleshores $H_n(K(\pi, 1); \mathbb{Z})$ és finitament generat per a tot n .*

Demostració. Per la fórmula de Künneth, és suficient demostrar-ho per a $\pi = \mathbb{Z}/k$ on k és un enter qualsevol. Si $k = 0$, llavors $K(\pi, 1) = S^1$ i l'enunciat es compleix. Per a $k > 0$, l'homologia de $K(\mathbb{Z}/k, 1)$ és zero en graus parells i $\mathbb{Z}/k$ en graus senars [3]. $\square$

Com a conseqüència, pel lema anterior, la proposició anterior, i utilitzant la fibració de l'espai de camins, obtenim que si π és un grup abelià finitament generat, aleshores $H_i(K(\pi, n); \mathbb{Z})$ és finitament generat per a tot n i per a tot i .

Teorema 1.22. *Sigui X un espai simplement connex. Aleshores tots els $\pi_i(X)$ són finitament generats si i només si tots els $H_i(X; \mathbb{Z})$ són finitament generats.*

Demostració. Suposem primer que els grups d'homotopia són finitament generats. La torre de Postnikov de X dóna fibracions $K(\pi_n(X), n) \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$. Per inducció sobre n , el lema 1.21 i la proposició 1.20 tenim que $H_i(X_n; \mathbb{Z})$ és finitament generat per a tot i , i per tant $H_i(X; \mathbb{Z})$ és finitament generat per a tot i . Suposem ara que els grups d'homologia són finitament generats. Considerem la fibració

$K(\pi_n(X), n-1) \rightarrow X\langle n \rangle \rightarrow X\langle n-1 \rangle$. Aleshores altra vegada per inducció, el lema 1.21 i la proposició 1.20, tenim que $H_i(X\langle n \rangle; \mathbb{Z})$ és finitament generat per a tot i . Però pel teorema de Hurewicz [4] es compleix $H_{n+1}(X\langle n \rangle; \mathbb{Z}) \cong \pi_{n+1}(X\langle n \rangle)$; per tant $\pi_i(X)$ és finitament generat per a tot i . $\square$

Teorema 1.23. *Els grups $\pi_i(S^n)$ són finits si $i > n$, excepte per a $i = 4k - 1$, $n = 2k$.*

Demostració. Sigui $S^n\langle r \rangle$ el recobridor r -connex de S^n . Aleshores, pel teorema de Hurewicz, $\pi_{r+1}(S^n\langle r \rangle) = H_{r+1}(S^n\langle r \rangle)$ i, pel teorema dels coeficients universals, $H_{r+1}(S^n\langle r \rangle; \mathbb{Q}) = H_{r+1}(S^n\langle r \rangle) \otimes \mathbb{Q} = \pi_{r+1}(S^n\langle r \rangle) \otimes \mathbb{Q}$. Considerem la fibració

$$K(\mathbb{Z}, n-1) \longrightarrow S^n\langle n \rangle \longrightarrow S^n.$$

Per a n senar tenim la successió espectral de cohomologia

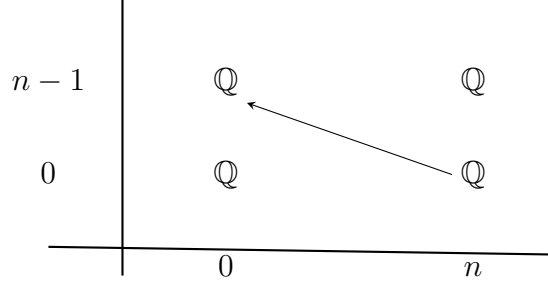
La diferencial $d_n: E_n^{0, n-1} \rightarrow E_n^{n, 0}$ és isomorfisme perquè $H^{n-1}(S^n\langle n \rangle; \mathbb{Q}) = 0$. Per l'estructura multiplicativa de la successió espectral, tots els altres $d_n: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ són també isomorfismes, d'on $\tilde{H}^*(S^n\langle n \rangle; \mathbb{Q}) = 0$ i per tant $\tilde{H}_*(S^n\langle n \rangle; \mathbb{Q}) = 0$. Com a conseqüència, $\pi_{n+1}(S^n)$ és de torsió. A més pel teorema 1.22 és finitament generat, per tant és finit.

Si denotem $\pi_i = \pi_i(S^n)$, tenim una fibració

$$K(\pi_{n+1}, n) \longrightarrow S^n\langle n+1 \rangle \longrightarrow S^n\langle n \rangle.$$

La cohomologia racional de $S^n\langle n \rangle$ és trivial i pel lema 1.19 la de $K(\pi_{n+1}, n)$ també; per tant, la cohomologia racional de $S^n\langle n+1 \rangle$ és trivial i π_{n+2} és finit. Usant la mateixa fibració anterior inductivament obtenim que tots els grups d'homotopia π_i per a $i > n$ són finits.

Per a n parell tenim la successió espectral d'homologia



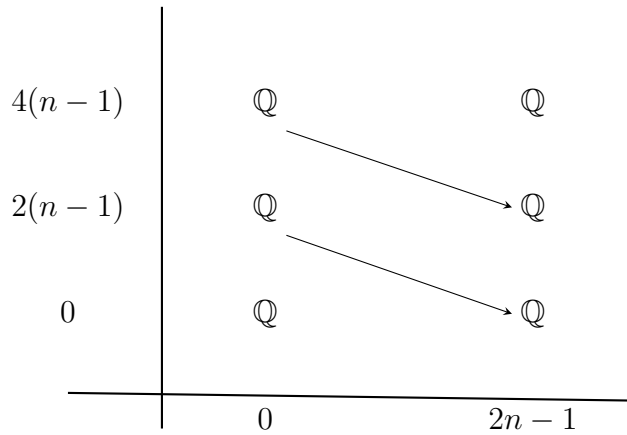
Els únics elements diferents de 0 són els dibuixats a la figura. Com que $H_{n-1}(S^n\langle n\rangle; \mathbb{Q}) = 0$, la fletxa és un isomorfisme i per tant $H_i(S^n\langle n\rangle; \mathbb{Q})$ és $\mathbb{Q}$ per a $i = 0, 2n - 1$ i zero altrament. Obtenim aleshores que π_{n+1} és finit. Com abans, hi ha una fibració

$$K(\pi_{n+1}, n) \longrightarrow S^n\langle n+1\rangle \longrightarrow S^n\langle n\rangle.$$

En aquest cas tenim que la cohomologia racional de $S^n\langle n+1\rangle$ és igual a la de $S^n\langle n\rangle$; és a dir, obtenim inductivament que π_i és finit per a $n < i < 2n - 1$. Ara bé, $\pi_{2n-1} = H_{2n-1}(S^n\langle 2n-2\rangle)$, i com que

$$\mathbb{Q} = H_{2n-1}(S^n\langle 2n-2\rangle; \mathbb{Q}) = H_{2n-1}(S^n\langle 2n-2\rangle) \otimes \mathbb{Q},$$

tenim que $H_{2n-1}(S^n\langle 2n-2\rangle)$ i per tant també π_{2n-1} són suma directa de $\mathbb{Z}$ i un grup finit. Com a conseqüència, $H^*(K(\pi_{2n-1}, 2n-2); \mathbb{Q})$ torna a ser un anell de polinomis en un generador de grau $2n-2$; és a dir, la successió espectral de cohomologia associada a la fibració $K(\pi_{2n-1}, 2n-2) \rightarrow S^n\langle 2n-1\rangle \rightarrow S^n\langle 2n-2\rangle$ és



Donat que $H^{2n-1}(S^n\langle 2n-1\rangle; \mathbb{Q}) = 0$, totes les fletxes han de ser isomorfismes; per tant π_{2n} és finit i, aplicant altre cop inducció, obtenim finalment que π_i és finit per a $i > 2n - 1$. $\square$

Capítol 2

Cohomologia dels grups de Lie i dels seus espais classificadors

En aquest capítol aplicarem la successió espectral de Serre al càlcul de la cohomologia dels grups de Lie i dels seus espais classificadors. Després de definir breument aquests objectes veurem el paper que juga a la cohomologia el producte de grup, obtindrem alguns resultats generals sobre les cohomologies dels grups de Lie i dels seus espais classificadors i calcularem en particular l'anell de cohomologia entera del grup unitari i del seu espai classificador, i també la cohomologia de l'espai classificador del grup ortogonal. Finalment destacarem la importància d'aquestes dues cohomologies introduint breument les classes característiques de Chern i les classes característiques de Stiefel–Whitney.

2.1 Grups de Lie

Definició 2.1. Un *grup topològic* és un espai topològic G amb estructura de grup tal que el producte $G \times G \rightarrow G$ és una aplicació contínua i l'aplicació $G \rightarrow G$ donada per $s \mapsto s^{-1}$ és també una aplicació contínua.

Definició 2.2. Un *grup de Lie* és una varetat diferenciable amb estructura de grup tal que el producte $G \times G \rightarrow G$ és una aplicació diferenciable i l'aplicació $G \rightarrow G$ donada per $s \mapsto s^{-1}$ és també una aplicació diferenciable.

En particular tot grup de Lie és un grup topològic, i tot grup discret és un grup topològic. Un exemple senzill de grup de Lie és $\mathbb{R}^n$ amb la suma. Un altre exemple és $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ amb el producte de $\mathbb{C}$. Els grups de Lie que apareixeran als apartats següents formen part dels anomenats grups de Lie clàssics compactes. Sigui $M_{n,n}(\mathbb{R})$ el conjunt de matrius $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, i anàlogament sobre $\mathbb{C}$. Aleshores es defineix el *grup general lineal* com

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{g \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det g \neq 0\},$$

és a dir, és el grup de les matrius invertibles $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. La topologia de $GL(n, \mathbb{R})$ és la induïda per la inclusió $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$. A partir dels grups lineals es defineixen els grups de Lie clàssics compactes.

El grup *ortogonal* es defineix com

$$O(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid g^t g = I\},$$

on g^t denota la matriu transposada de g . En particular $O(n)$ és un subconjunt tancat de $\mathbb{R}^{n^2}$ i per tant és compacte. De la mateixa manera es defineix el grup *ortogonal especial* com

$$SO(n) = \{g \in O(n) \mid \det g = 1\}.$$

Observem que $O(n)$ no és arc-connex: té dues components homeomorfes a $SO(n)$. Per a tot $k < n$, $O(k)$ és un subgrup de $O(n)$ i $SO(k)$ és un subgrup de $SO(n)$. Per a $n = 1$ tenim que $O(1) \cong \mathbb{Z}/2$ i $SO(1) \cong \{1\}$. Per a $n = 2$,

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1.$$

El grup *unitari* es defineix com

$$U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^* g = I\},$$

on g^* denota la matriu transposada i complexa conjugada de g . És un subconjunt tancat de $\mathbb{R}^{2n^2}$ i per tant és compacte. Com abans definim el grup *unitari especial* com

$$SU(n) = \{g \in U(n) \mid \det g = 1\}.$$

De la mateixa manera que en el cas anterior $U(k)$ és un subgrup de $U(n)$ i $SU(k)$ és un subgrup de $SU(n)$ si $k < n$. Observem que $U(1) \cong S^1$ i que

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ i } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \cong S^3.$$

Finalment es defineix el grup *simplèctic* com

$$Sp(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{H}) \mid g^* g = 1\},$$

on $\mathbb{H}$ denota els quaternions i g^* denota la matriu conjugada quaterniònica i transposada de g .

Els grups que tractarem són l'ortogonal i l'unitari. És interessant comentar que tant $O(n)$ com $U(n)$ són retractes de deformació dels respectius grups lineals, amb una retracció donada per l'ortonormalització de Gram–Schmidt; per tant, $O(n)$ i $GL(n, \mathbb{R})$ tenen el mateix tipus d'homotopia i $U(n)$ i $GL(n, \mathbb{C})$ també.

2.2 Espais classificadors

Definició 2.3. Sigui G un grup i X un conjunt. Una *acció* (per l'esquerra) de G sobre X és una aplicació $G \times X \rightarrow X$ que satisfà, per a tot $g, h \in G$ i $x \in X$, $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$ i $1 \cdot x = x$. Anàlogament es defineix un acció per la dreta.

Una acció és *transitiva* sobre $Y \subset X$ si per a tot parell d'elements $x, y \in Y$ existeix un $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$, i és *lliure* si $g \cdot x = x$ implica que $g = 1$.

Definició 2.4. Sigui G un grup topològic. Un *fibrat principal* de fibra G és un fibrat $F \rightarrow E \xrightarrow{p} X$ amb una acció contínua $G \times E \rightarrow E$ lliure que preserva i és transitiva sobre les fibres.

És a dir, per a tot $x \in X$, $g \in G$ i $y \in p^{-1}(x)$ se satisfà que $g \cdot y \in p^{-1}(x)$. Com que l'acció és lliure i transitiva sobre les fibres tenim aleshores que $F \cong G$. A més la transitivitat implica que l'aplicació $E/G \rightarrow X$ donada per $\bar{x} \mapsto p(x)$ és un homeomorfisme. Per tant qualsevol fibrat principal es pot escriure llevat d'homeomorfismes com

$$G \longrightarrow E \longrightarrow E/G,$$

on el quocient E/G és el quocient per l'acció $G \times E \rightarrow E$.

Observacions. i. El producte cartesià $G \times B$ amb l'acció $h \cdot (g, s) \rightarrow (hg, s)$ defineix un fibrat principal $G \rightarrow G \times B \rightarrow B$.

ii. Si H és un subgrup tancat d'un grup topològic G , aleshores hi ha un fibrat principal $H \rightarrow G \rightarrow G/H$ on l'acció és el producte de grup.

Considerem un fibrat vectorial real $\xi: \mathbb{R}^k \rightarrow E \rightarrow B$. Aleshores hi ha un fibrat principal associat de fibra $O(k)$:

$$O(k) \longrightarrow \bar{E} \xrightarrow{p} B,$$

on $\bar{E}$ és el conjunt de parells (b, v) tals que $b \in B$ i v és una base ortonormal de $E_b := p^{-1}(b) \cong \mathbb{R}^k$, i $p(b, v) = b$. Com que $E_b \cong \mathbb{R}^k$, tenim que $O(k)$ actua lliure i transitivament sobre les bases de E_b i a més preserva E_b . És a dir que en efecte el fibrat anterior és principal. De la mateixa manera, donat un fibrat vectorial complex $\xi: \mathbb{C}^k \rightarrow E \rightarrow B$, hi ha un fibrat principal de fibra $U(k)$ associat definit de manera anàloga. La relació entre els fibrats vectorials i principals és en realitat molt més forta. Es dona el següent teorema [6]:

Teorema 2.5. Sigui X un espai paracompacte. Aleshores hi ha una bijecció entre el conjunt de fibrats principals de fibra $O(k)$ sobre X i el conjunt de fibrats vectorials reals de dimensió k sobre X , i una bijecció entre el conjunt de fibrats principals de fibra $U(k)$ sobre X i el conjunt de fibrats vectorials complexos de dimensió k sobre X .

Un espai és *paracompacte* si és Hausdorff i qualsevol recobriment per oberts té un refinament localment trivial. Tots els espais que tractem aquí són paracompactes.

Definició 2.6. Sigui $\eta: F \rightarrow E \xrightarrow{p} X$ un fibrat i $f: Y \rightarrow X$ una aplicació. Anomenem *pull-back* de η per f el fibrat

$$f^*\eta: F \longrightarrow E' \xrightarrow{p'} Y,$$

on $E' = \{(e, y) \in E \times Y \mid p(e) = f(y)\}$ i p' és la projecció sobre la segona component.

És a dir, E' està definit per tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & X \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ F & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{p'} & Y \end{array}$$

commuti i el fibrat $f^*\eta$ tingui fibra F . Podem comprovar que realment aquesta n'és la fibra:

$$\begin{aligned} (p')^{-1}(y_0) &= \{(e, y) \in E \times Y \mid p'(e, y) = y_0, p(e) = f(y)\} = \\ &= \{(e, y) \mid p(e) = f(y_0)\} \cong p^{-1}(f(y_0)) \cong F. \end{aligned}$$

Per a qualsevol grup topològic G existeix un espai contràtil EG amb una acció lliure, transitiva i contínua $G \times EG \rightarrow EG$ que defineix un fibrat principal

$$\eta_G: G \longrightarrow EG \longrightarrow EG/G.$$

Definició 2.7. El fibrat principal η_G s'anomena *fibrat principal universal* de G i l'espai EG/G s'anomena *espai classificador* de G i es denota per BG .

L'espai EG es pot obtenir a partir de la construcció de Milnor [6], [9]. Per a qualsevol aplicació $f: X \rightarrow BG$ podem fer el *pull-back* $f^*\eta_G$:

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & EG & \longrightarrow & BG \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow f \\ G & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X \end{array}$$

Proposició 2.8. *El fibrat $f^*\eta_G$ és principal.*

Demostració. Definim l'acció $G \times E \rightarrow E$ com $g \cdot (e, x) = (g \cdot e, x)$. Es dedueix que aquesta acció és lliure immediatament del fet que l'acció $G \times EG \rightarrow EG$ és lliure, i de la mateixa manera es dedueix que preserva les fibres del fet que $G \times EG \rightarrow EG$ preserva les fibres. Ara dos elements de E pertanyents a la mateixa fibra tenen necessàriament la forma (e, x) i (a, x) amb $p(a) = p(e) = f(x)$; per tant, e i a pertanyen a la mateixa fibra, és a dir l'acció és transitiva. $\square$

Un dels resultats més importants sobre el fibrat principal universal és el següent teorema [6].

Teorema 2.9. *Per a tot fibrat principal $\eta: G \rightarrow E \rightarrow X$ amb X paracompacte existeix una aplicació $f: X \rightarrow BG$ tal que $\eta = f^*\eta_G$. A més si tenim dues aplicacions $f, g: X \rightarrow BG$, aleshores f i g són homòtopes si i només si $f^*\eta_G$ i $g^*\eta_G$ són fibrats principals isomorfs.*

Dit d'una altra manera, hi ha una bijecció entre el conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions de X a BG i el conjunt de fibrats principals de fibra G sobre X . A més, pel teorema 2.5, si $G = O(k)$ o bé $U(k)$, tenim que aquest conjunt de classes d'homotopia també està en bijecció amb el conjunt de fibrats vectorials reals (o complexos) de dimensió k sobre X . És a dir que els espais classificadors BG classifiquen fibrats principals de fibra G i fibrats vectorials. Una aplicació $f: X \rightarrow BG$ (amb G el grup ortogonal o unitari) associada a un fibrat vectorial ξ sobre X s'anomena *aplicació classificadora* de ξ i es denota per f_ξ .

Observacions. i. Com que EG és contràctil, tenim que el fibrat principal universal és la fibració de l'espai de camins, és a dir $G \simeq \Omega BG$. En particular, per a tot i es compleix $\pi_i(G) = \pi_{i+1}(BG)$.

ii. Si G és un grup discret aleshores BG és un $K(G, 1)$ i EG és l'espai recobridor universal de BG . Per exemple si $G = \mathbb{Z}$ tenim que l'espai classificador de $\mathbb{Z}$ és S^1 :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow S^1.$$

iii. L'espai classificador d'un producte cartesià és el producte cartesià d'espais classificadors, és a dir, $B(G \times H) \simeq BG \times BH$. Seguint l'exemple anterior tenim que l'espai classificador de $\mathbb{Z}^n$ és el tor $\mathbb{T}^n$.

Vegem a continuació que els espais classificadors de $U(n)$ i $O(n)$ es poden descriure geomètricament en termes de varietats grassmannianes. La *varietat grassmanniana* $G_{n,k}(\mathbb{R})$ és el conjunt de subespais vectorials de dimensió k de $\mathbb{R}^n$, i anàlogament $G_{n,k}(\mathbb{C})$ és el conjunt de subespais vectorials de dimensió k de $\mathbb{C}^n$. Observem que, per a tot n , $G_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}P^{n-1}$ i $G_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^{n-1}$. Donada la permanent analogia entre el cas complex i el real considerarem a partir d'ara el cas real, i denotarem $G_{n,k}$ la varietat grassmaniana real. Definim també la *varietat de Stiefel* V_k^n com l'espai de conjunts de k vectors ortonormals de $\mathbb{R}^n$. La topologia de les varietats de Stiefel és la induïda per la inclusió $V_k^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ (k vegades), i la de les grassmannianes és la induïda per l'aplicació $V_k^n \rightarrow G_{n,k}$ donada per $(v_1, \dots, v_k) \mapsto \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Observem que $V_1^n \cong S^{n-1}$, $V_n^n \cong O(n)$ i $V_{n-1}^n \cong SO(n)$.

Per a tot k hi ha una sèrie d'inclusions naturals $G_{k,k} \subset G_{k+1,k} \subset G_{k+2,k} \subset \cdots$; la unió de tots aquests es denota per $G_{\infty,k}$. De la mateixa manera $V_k^k \subset V_k^{k+1} \subset V_2^{k+2} \subset \cdots$ i la unió d'aquests es denota per V_k^∞ .

Ara considerem el fibrat vectorial real

$$\gamma_k^n: \mathbb{R}^k \longrightarrow E_{n,k} \xrightarrow{p} G_{n,k},$$

on E és el conjunt de parells (V, v) tals que V és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensió k i $v \in V$. Aquest fibrat s'anomena *fibrat vectorial tautològic* sobre $G_{n,k}$. Pel que hem dit a dalt, hi ha un fibrat principal associat de fibra $O(k)$. L'espai total d'aquest fibrat principal ve donat per l'espai de parells $(V, \bar{v})$ on $\bar{v}$ és una base

ortonormal de V , però com que cada base només és base d'un subespai tenim que en realitat aquest espai és V_k^n . En particular, si $n = \infty$, tenim un fibrat principal

$$O(k) \longrightarrow V_k^\infty \longrightarrow G_{\infty,k}.$$

Aquest és el fibrat principal universal de $O(k)$. Per comprovar-ho només cal veure que V_k^∞ és contràctil. En primer lloc observem que $O(n)$ actua transitivament sobre V_k^n , i que donada una base $v \in V_k^n$ el subgrup de $O(n)$ que deixa invariant v és $O(n-k)$; per tant $V_k^n \cong O(n)/O(n-k)$. Això implica que hi ha un fibrat

$$O(n-k) \longrightarrow O(n) \longrightarrow V_k^n.$$

En particular, per a $k = 1$, el fibrat anterior s'escriu com $O(n-1) \rightarrow O(n) \rightarrow S^{n-1}$. En virtut d'aquest últim fibrat tenim la següent proposició:

Proposició 2.10. *La inclusió natural $O(n) \hookrightarrow O(n+k)$ induïx isomorfismes $\pi_i(O(n)) \rightarrow \pi_i(O(n+k))$ per a $i \leq n-2$, i una aplicació exhaustiva $\pi_{n-1}(O(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(O(n+k))$.*

Demostració. Només cal demostrar-ho per a $k = 1$. El resultat general es dedueix directament per inducció. Pel fibrat anterior hi ha una successió llarga d'homotopia

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(S^n) \rightarrow \pi_i(O(n)) \rightarrow \pi_i(O(n+1)) \rightarrow \pi_i(S^n) \rightarrow \cdots.$$

Com que $\pi_i(S^n) = 0$ per a $i < n$ tenim que en efecte $\pi_i(O(n)) \cong \pi_i(O(n+1))$ per a $i \leq n-2$. A més per a $i = n-1$ tenim la successió exacta

$$\pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(O(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(O(n+1)) \rightarrow 0,$$

que implica que en efecte l'aplicació $\pi_{n-1}(O(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(O(n+1))$ és exhaustiva. $\square$

Ara considerant el fibrat general $O(n) \rightarrow O(n+k) \rightarrow V_k^{n+k}$ tenim una altra successió llarga d'homotopia

$$\cdots \rightarrow \pi_i(O(n)) \rightarrow \pi_i(O(n+k)) \rightarrow \pi_i(V_k^{n+k}) \rightarrow \pi_{i-1}(O(n)) \rightarrow \cdots.$$

Per la proposició anterior $\pi_i(O(n)) \cong \pi_i(O(n+1))$ per a $i \leq n-2$, i l'aplicació $\pi_{n-1}(O(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(O(n+k))$ és exhaustiva; per tant V_k^{n+k} és $(n-1)$ -connex. En particular $\pi_i(V_k^\infty) = 0$ per a tot i , és a dir en efecte V_k^∞ és contràctil.

Per al grup unitari el fibrat principal universal és

$$U(k) \longrightarrow V_k^\infty(\mathbb{C}) \longrightarrow G_{\infty,k}(\mathbb{C}).$$

En aquest cas també hi ha un fibrat $U(n-k) \rightarrow U(n) \rightarrow V_k^n(\mathbb{C})$, però com que $V_1^n(\mathbb{C}) \cong S^{2n-1}$ la proposició anterior seria $\pi_i(U(n)) \cong \pi_i(U(n+k))$ per a $i \leq 2n-1$.

Observem que per a $O(1) \cong \mathbb{Z}/2$ el fibrat principal universal és

$$\mathbb{Z}/2 \longrightarrow S^\infty \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty,$$

i que l'espai classificador de $U(1) \cong S^1$ és $\mathbb{C}P^\infty$, que concorda amb el fet que $\pi_i(G) = \pi_{i+1}(BG)$, ja que S^1 és un $K(\mathbb{Z}, 1)$ i $\mathbb{C}P^\infty$ és un $K(\mathbb{Z}, 2)$.

2.3 Àlgebres de Hopf

Per a qualsevol espai X el producte *cup* dóna estructura d'anell graduat a la cohomologia $H^*(X; R)$ amb coeficients en un anell commutatiu R qualsevol. Quan l'espai és un grup topològic l'operació de grup indueix un coproducte a la cohomologia que dóna una estructura addicional a l'àlgebra de cohomologia: l'estructura d'àlgebra de Hopf, que definim a continuació.

Definició 2.11. Sigui $H = \bigoplus H^n$ una àlgebra graduada sobre un anell commutatiu R . Aleshores H s'anomena *àlgebra de Hopf* si satisfà les condicions següents:

- (a) Existeix un element identitat $1 \in H^0$ tal que l'aplicació $R \rightarrow H^0$ donada per $r \mapsto r1$ és un isomorfisme.
- (b) Hi ha un coproducte $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$ que és un morfisme d'àlgebres, és a dir,

$$\Delta(x \cdot y) = \Delta(x) \cdot \Delta(y)$$

per a tot parell d'elements $x, y \in H$. El producte a $H \otimes H$ ve donat per

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (-1)^{\text{gr}(b)\text{gr}(c)}(ac \otimes bd).$$

A més el coproducte satisfà, per a tot $x \in H^n$,

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum v_i \otimes u_i,$$

on $0 < \text{gr}(v_i) < n$ i $\text{gr}(v_i + u_i) = n$ per a tot i .

Una àlgebra de Hopf s'anomena *associativa* si és associativa com a àlgebra i *commutativa* si és commutativa en el sentit graduat, és a dir si per a qualssevol $x, y \in H$ se satisfà $x \cdot y = (-1)^{\text{gr}(x)\text{gr}(y)} x \cdot y$.

Per exemple un anell de polinomis $k[x]$ sobre un cos k és una àlgebra de Hopf. El coproducte de x només pot ser $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ perquè x és l'element de grau mínim, i el coproducte de qualsevol altre element x^i està induït pel de x , és a dir $\Delta(x^i) = \Delta(x)^i$. Un altre cas d'àlgebra de Hopf és l'àlgebra exterior $\Lambda(x)$ sobre un cos k amb grau de x senar. En aquest cas el coproducte torna a ser $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Una àlgebra exterior en un generador de grau parell és àlgebra de Hopf només si k té característica 2. A més, se satisfà que el producte tensorial de dues àlgebres de Hopf és una àlgebra de Hopf amb coproducte $\Delta(a \otimes b) = \Delta(a) \otimes \Delta(b)$.

Teorema 2.12. Sigui H una àlgebra de Hopf associativa i commutativa sobre un cos k de característica 0 tal que H^n és finitament generat per a tot n . Aleshores H és isomorfa al producte tensorial d'una àlgebra exterior amb generadors de grau senar i un anell de polinomis amb generadors de grau parell.

Demostració. Com que cada H^n és finitament generat podem agafar generadors $x_1, x_2, \dots$ de H amb $\text{gr}(x_i) < \text{gr}(x_{i+1})$ per a tot i . Considerem el subconjunt $x_1, \dots, x_n$ i anomenem H_n la subàlgebra generada per aquest subconjunt. Podem suposar que $x_n \notin H_{n-1}$. Veurem que $H_n = H_{n-1} \otimes k[x_n]$ si $\text{gr}(x_n)$ és parell o $H_n = H_{n-1} \otimes \Lambda(x_n)$ si $\text{gr}(x_n)$ és senar. Com que H és associativa i commutativa hi ha una aplicació exhaustiva donada pel producte d'àlgebra $H_{n-1} \otimes k[x_n] \rightarrow H_n$ si $\text{gr}(x_n)$ és parell i $H_{n-1} \otimes \Lambda(x_n) \rightarrow H_n$ si $\text{gr}(x_n)$ és senar.

Només hem de veure que aquesta aplicació és injectiva, és a dir, que no existeixen $m \in \mathbb{N}$ i $a_i \in H_{n-1}$ diferents de 0 tals que $\sum_{i=0}^m a_i x_n^i = 0$ o $b_0, b_1 \in H_{n-1}$ tals que $b_0 + b_1 x_n = 0$ respectivament. Suposem que existeixen i que m és mínim. Considerem l'ideal I generat per x_n^2 i els elements d' H_{n-1} de grau superior a 0. En particular $x_n \notin I$. Anomenem $\bar{x}_n$ la classe de x_n a H/I . Ara definim l'aplicació

$$\nu: H \longrightarrow H \otimes H \longrightarrow H \otimes H/I$$

donada per la composició del coproducte i el quocient. Aleshores se satisfà, per a tot $a \in H_{n-1}$, que $\nu(a) = a \otimes 1$ i $\nu(x_n) = x_n \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_n$. Si $\text{gr}(x_n)$ és parell,

$$0 = \nu\left(\sum a_i x_n^i\right) = \sum (a_i \otimes 1)(x_n \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_n)^i.$$

Ara observem que $\bar{x}_n^2 = \overline{x_n^2} = 0$; per tant

$$0 = \left(\sum a_i x_n^i\right) \otimes 1 + \left(\sum i a_i x_n^{i-1}\right) \otimes \bar{x}_n.$$

Com que $\sum a_i x_n^i = 0$ i $\bar{x}_n \neq 0$ tenim que $\sum i a_i x_n^{i-1} = 0$. El fet que k sigui de característica 0 implica que si $a_i = 0$ aleshores $i a_i = 0$, però havíem escollit m mínim, per tant hem arribat a una contradicció. Pel cas $\text{gr}(x_n)$ senar, tenim

$$0 = \nu(b_0 + b_1 x_n) = b_0 \otimes 1 + (b_1 \otimes 1)(x_n \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_n) = (b_0 + b_1 x_n) \otimes 1 + b_1 \otimes \bar{x}_n$$

que implica que $b_1 = 0$ i arribem a una contradicció. $\square$

Hi ha un resultat més general, demostrat a [1], en cossos perfectes de característica p . Recordem que un cos és *perfecte* si tot element té una arrel p -èsima.

Teorema 2.13. *Una àlgebra de Hopf sobre un cos k perfecte de característica p és isomorfa a un producte tensorial d'àlgebres isomorfes a:*

- (a) $\Lambda(x)$ amb $\text{gr}(x)$ senar;
- (b) $k[x]$, amb $\text{gr}(x)$ parell si $p \neq 2$;
- (c) $k[x]/x^{p^i}$, amb $\text{gr}(x)$ parell si $p \neq 2$.

Observem que l'apartat (a) ja està demostrat al teorema anterior, ja que per a $\text{gr}(x)$ senar no hem fet servir que el cos tingués característica 0.

2.4 Cohomologia racional dels grups de Lie

La cohomologia d'un espai X qualsevol sobre un cos k compleix, per la fórmula de Künneth,

$$H^*(X \times X; k) \cong H^*(X; k) \otimes H^*(X; k).$$

Sigui G un grup topològic connex. El producte $\mu: G \times G \rightarrow G$ induïx una aplicació a la cohomologia

$$\mu^*: H^*(G; k) \longrightarrow H^*(G \times G; k)$$

que composada amb l'isomorfisme anterior dóna una aplicació

$$\Delta: H^*(G; k) \longrightarrow H^*(G; k) \otimes H^*(G; k)$$

que és un morfisme d'àlgebres. Per veure que $H^*(G; k)$ és una àlgebra de Hopf hem de verificar que per a tot $x \in H^*(G; k)$ se satisfà

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum v_i \otimes u_i.$$

Considerem el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H^*(G; k) & \xrightarrow{\mu^*} & H^*(G \times G; k) & \xrightarrow{i^*} & H^*(G; k) \\ & \searrow \Delta & \uparrow \cong & \nearrow P & \uparrow \times \\ & & H^*(G; k) \otimes H^*(G; k) & \xrightarrow{1 \otimes i^*} & H^*(G; k) \otimes H^*(*; k) \end{array}$$

on la i^* de baix és induïda per la inclusió $1 \hookrightarrow G$; la de dalt és induïda per la inclusió $G \rightarrow G \times 1 \hookrightarrow G \times G$, i P està definida per la commutativitat del diagrama. Observem que $\mu i = id$; per tant $P\Delta = id$. A més pel quadrat inferior tenim que $P(a \otimes 1) = a$ i $P(a \otimes b) = 0$ si $\text{gr}(b) > 0$. Ara, si $a \otimes 1$ és la component de $\Delta(x)$ a $H^n(G; k) \otimes H^0(G; k)$, aleshores

$$x = P\Delta(x) = P\left(a \otimes 1 + \sum v_i \otimes u_i\right) = a.$$

Si canviéssim al diagrama $H^*(G; k) \otimes H^*(*; k)$ per $H^*(*; k) \otimes H^*(G; k)$ obtindríem que la component de $\Delta(x)$ a $H^0(G; k) \otimes H^n(G; k)$ és $1 \otimes a$.

Per tant, en efecte, la cohomologia d'un grup topològic connex té estructura d'àlgebra de Hopf. A més, el producte *cup* és associatiu i commutatiu en el sentit graduat; per tant, és una àlgebra de Hopf associativa i commutativa. Ara, d'una banda, tot grup de Lie connex té un retractor de deformació compacte, i d'altra banda, $H^n(G)$ és finitament generat per a tot n i a més $H^n(G) = 0$ per a n major que la dimensió de G . Com a conseqüència d'aquests fets i del teorema 2.12, tenim el següent teorema:

Teorema 2.14. *Sigui G un grup de Lie connex. Aleshores $H^*(G; \mathbb{Q})$ és una àlgebra exterior sobre $\mathbb{Q}$ amb generadors de grau senar.*

2.5 Relació entre les cohomologies de G i BG

Teorema 2.15. *Sigui k un cos i G un grup topològic. La cohomologia de G és $H^*(G; k) \cong \Lambda(x_1, \dots, x_n)$ amb $\text{gr}(x_i)$ senar per a tot i , si i només si la cohomologia de BG és $H^*(BG; k) \cong k[y_1, \dots, y_n]$ amb $\text{gr}(y_i)$ parell per a tot i . A més $\text{gr}(y_i) = \text{gr}(x_i) + 1$.*

Demostració. Les dues implicacions es demostren mitjançant la successió espectral associada al fibrat principal universal

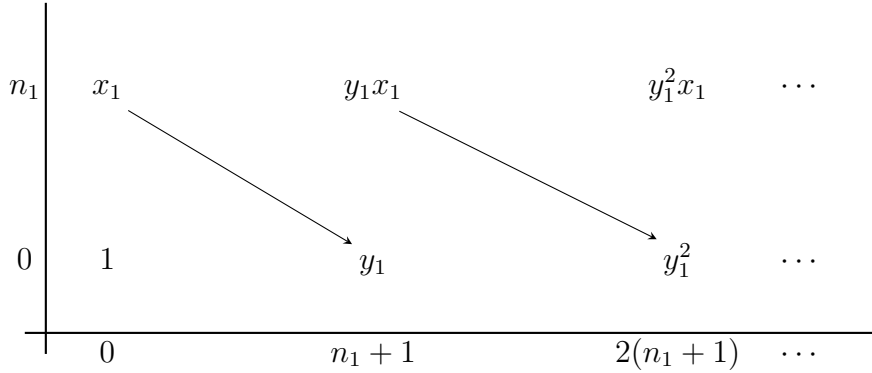
$$G \longrightarrow EG \longrightarrow BG.$$

Vegem la primera. En tota la demostració $H^n(X)$ significa $H^n(X; k)$. Demostrem que si $H^*(G; k) = \Lambda(x_1, \dots, x_n)$ amb $\text{gr}(x_i) = n_i$, aleshores existeixen $z_1, \dots, z_n$ tals que $H^*(G; k) = \Lambda(z_1, \dots, z_n)$ i $y_i = d_{n_i+1}(z_i)$, on d és la diferencial de la successió espectral associada al fibrat principal universal.

Vegem en primer lloc el cas $n = 1$, és a dir $H^*(G; k) = \Lambda(x_1)$. Anomenem n_1 a $\text{gr}(x_1)$. La successió espectral associada al fibrat principal universal té

$$E_2 = H^p(BG) \otimes H^q(G).$$

Com que EG és contràctil tots els elements han de desaparèixer excepte $E_2^{0,0}$. És clar que l'única diferencial no trivial és d_{n_1+1} ; ha d'existir per tant un element $y_1 \in H^{n_1+1}(BG)$ tal que $d_{n_1+1}(x_1) = y_1$.



Per l'estructura multiplicativa hi ha un element y_1x_1 a $E_2^{n_1, n_1+1}$. Per la propietat de derivació $d_{n_1+1}(y_1x_1) = y_1^2$ i donat que y_1x_1 també ha de desaparèixer tenim que $y_1^2 \neq 0$. Pel mateix raonament $y_1^r \neq 0$ per a tot r ; per tant en efecte $H^*(BG) = k[y_1]$.

Ara considerem $H^*(G) = \Lambda(x_1, \dots, x_n)$ amb $\text{gr}(x_i) = n_i$ i suposem que es compleix que si $H^*(G) = \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1})$ aleshores $H^*(BG) = k[y_1, \dots, y_{n-1}]$. La successió espectral té $E_2^{p,q} = H^p(BG) \otimes H^q(G)$. Per hipòtesi d'inducció podem suposar que $d_{n_i+1}(x_i) = y_i$ per a $1 \leq i \leq n-1$; per tant, per l'estructura

multiplicativa, totes les diferencials de productes d'elements diferents de x_n estan donades.

Suposem ara que x_n desapareix amb algun dels elements generats pels anteriors. És a dir que existeixen un i amb $1 \leq i \leq n$ i un $t = y_1^{r_1} \cdots y_{n-1}^{r_{n-1}} x_{s_1} \cdots x_{s_k}$ amb $1 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq n-1$ tals que $d_{n_i+1}(x_n) = t$. Sigui E_m la pàgina on desapareix t ; aleshores hi ha un t' tal que $d_m(t) = t'$ o bé $d_m(t') = t$. No es pot donar que $m < n_i+1$ perquè aleshores t ja no hi seria a la pàgina E_{n_i+1} . Tampoc es pot donar $m > n_i+1$ perquè en aquest cas t' sobreviuria a E_∞ . Suposem doncs que $m = n_i+1$. Aleshores no pot ser que $d_m(t) = t'$ perquè això implicaria $d_m^2(x_n) = t'$, contradient el fet que les diferencials són complexos de cadenes. Finalment si $d_m(t') = t$ tenim que $d_m(t' - x_n) = 0$, és a dir

$$t' - x_n \in \text{Ker}(d_m).$$

Observem que en particular $t' \in H^{n_n}(G)$ i per tant $t' \in \Lambda(x_1, \dots, x_n)$. Com a conseqüència $\Lambda(x_1, \dots, x_n) = \Lambda(x_1, \dots, t' - x_n)$ i podem reanomenar $t' - x_n = x'_n$.

Apliquem a x'_n el mateix raonament que hem aplicat amb x_n . Suposem que x'_n desapareix amb algun dels elements generats pels anteriors. Ara però x'_n sobreviu a E_m , per tant existeixen un i' , amb $i < i' \leq n$, i un t'' tals que

$$t'' - x'_n \in \text{Ker}(d_{n_{i'}+1}).$$

Aplicant successivament aquest raonament arribem a què necessàriament, per tal que $\text{Ker}(d_{n_n+1}) = 0$, ha d'existir un element y_n amb $\text{gr}(y_n) = n_n + 1$ tal que $d_{n_n}(x_n^{(s)}) = y_n$ per a algun s . Anomenem $z_n = x_n^{(s)}$. Com abans tenim que $\Lambda(x_1, \dots, x_n) = \Lambda(x_1, \dots, z_n)$.

A més hi ha un element $y_n z_n$ que compleix $d_{n_n}(y_n z_n) = y_n^2$; per tant $y_n^2 \neq 0$ i en general $y_n^k \neq 0$. De la mateixa manera es veu que el producte de y_n^k per altres generadors també és diferent de 0. És a dir en efecte

$$H^*(BG; k) = k[y_1, \dots, y_n]$$

amb $\text{gr}(y_i) = \text{gr}(x_i) + 1$.

Demostrem ara el recíproc. Veurem que si $H^*(BG) \cong k[y_1, \dots, y_n]$ aleshores existeixen $x_1, \dots, x_n$ tals que $H^*(G) \cong \Lambda(x_1, \dots, x_n)$ i $d_{n_i+1}(x_i) = y_i$ per a tot i . El cas inicial es prova de manera anàloga a l'anterior. Ara suposem que es compleix per a $H^*(BG) \cong k[y_1, \dots, y_{n-1}]$. Com que $d_{n_i+1}(x_i) = y_i$ per a $1 \leq i \leq n-1$, tots els elements de la successió espectral que són producte dels x_i i els y_i amb $i \leq n-1$ ja han desaparegut a la pàgina E_{n_n+1} . Ara bé, y_n encara sobreviu en aquesta pàgina; per tant, ha d'existir un x_n tal que $d_{n_n+1}(x_n) = y_n$. A més observem que $x_n^2 = 0$ ja que en cas contrari, si la característica de k és diferent de 2, $d_{n_n+1}^2(x_n) = d_{n_n+1}(2y_n x_n) = 2y_n^2 \neq 0$, i si la característica de k és 2 tenim que $d_{n_n+1}(x_n^2) = 0$ i x_n sobreviuria a E_∞ . Per a $\text{gr}(x_i) < \text{gr}(x_j) < \cdots < \text{gr}(x_n)$ tenim que $x_i x_j \cdots x_n \neq 0$ perquè ha de matar $y_i y_j \cdots y_n$. Per tant tenim

$$H^*(G; k) = \Lambda(x_1, \dots, x_n).$$

□

Finalment pel que hem vist a la secció anterior tenim:

Corol·lari 2.16. *Si G és un grup de Lie connex, aleshores $H^*(BG; \mathbb{Q})$ és un anell de polinomis sobre $\mathbb{Q}$ amb generadors de grau parell.*

Per a $k = \mathbb{Z}/2$ hi ha a més un altre resultat, que discutim a continuació.

Definició 2.17. Sigui $F \rightarrow X \rightarrow B$ una fibració. Un element $x \in H^n(F)$ s'anomena *transgressiu* si a la successió espectral de Serre per a cohomologia les diferencials satisfan $d_r(x) = 0$ per a tot $r < n$. A $d_n(x)$ se l'anomena *transgressió* de x .

Ara sigui G un grup topològic. Un element $x \in H^n(F)$ s'anomena *universalment transgressiu* si és transgressiu en el fibrat principal universal.

Definició 2.18. Es diu que una àlgebra graduada sobre un anell R té un *sistema simple de generadors* $(x_1, x_2, \dots)$ si com a R -mòdul està generada per tots els productes $x_i x_j \cdots x_k$ amb $i < j < \cdots < k$.

Per exemple, un anell de polinomis $R[x]$ té un sistema simple de generadors $(x, x^2, \dots, x^{2^k}, \dots)$. Un anell de polinomis truncat $R[x]/x^s$ té un sistema simple de generadors si i només si $s = 2^k$, i si és així aquest ve donat per $(x, x^2, \dots, x^{2^{k-1}})$. Una àlgebra exterior $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ sobre un cos de característica diferent de 2 té $(x_1, \dots, x_n)$ com a sistema simple de generadors. Borel va donar a [1] el següent teorema que relaciona les cohomologies a $\mathbb{Z}/2$ dels grups de Lie i dels seus espais classificadors.

Teorema 2.19. *Si $H^*(G; \mathbb{Z}/2)$ té un sistema simple de generadors $(x_1, x_2, \dots)$ universalment transgressius, aleshores $H^*(BG; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[y_1, y_2, \dots]$, on $\text{gr}(y_i) = \text{gr}(x_i) + 1$ per a tot i .*

2.6 Cohomologia entera de $U(n)$ i $BU(n)$

Recordem que hi ha una fibració

$$U(n-1) \longrightarrow U(n) \longrightarrow S^{2n-1}.$$

Farem servir aquesta fibració per a demostrar per inducció que la cohomologia del grup unitari és $H^*(U(n)) = \Lambda(x_1, \dots, x_{2n-1})$, on $\text{gr}(x_i) = i$ per a tot i . El cas $n = 1$ es compleix perquè $U(1) = S^1$. Tenim que la pàgina E_2 de la successió espectral per a aquesta fibració és

$$E_2^{p,q} = H^p(S^{2n-1}; H^q(U(n-1))) = H^p(S^{2n-1}) \otimes H^q(U(n-1)).$$

$2n - 3$	x_{2n-3}	$y_{2n-1}x_{2n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	x_3	$y_{2n-1}x_3$
2		
1	x_1	$y_{2n-1}x_1$
0	1	y_{2n-1}
	0	$2n - 1$

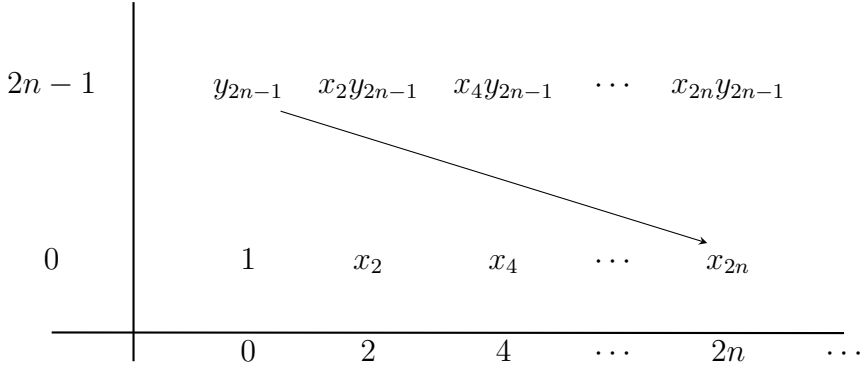
Per simplicitat escrivim només els generadors. Clarament per a tot x_i i per a tot k es compleix $d_k(x_i) = 0$; per tant, per l'estructura multiplicativa, totes les diferencials són 0. Com a conseqüència $E_2 = E_\infty$ i

$$H^*(U(n)) = \Lambda(y_{2n-1}) \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_{2n-3}) = \Lambda(x_1, \dots, x_{2n-1}).$$

Calculem ara la cohomologia de $BU(n)$. Observem que donat que estem calculant cohomologia entera i no sobre un cos no podem aplicar el teorema de la secció anterior. Com hem vist hi ha una fibració $U(n-1) \rightarrow U(n) \rightarrow S^{2n-1}$. Donat que $U(n)$ és l'espai de llaços de $BU(n)$, per la successió de fibracions que hem vist a la secció 1.2 hi ha una fibració

$$S^{2n-1} \longrightarrow BU(n-1) \longrightarrow BU(n).$$

Demostrem per inducció que $H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[x_2, \dots, x_{2n}]$ amb $\text{gr}(x_i) = i$. Sabem que $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$, i a la secció 1.5 hem vist que en efecte $H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[x_2]$. Ara la pàgina E_2 de la successió espectral per aquesta fibració és, altre cop pel teorema dels coeficients universals, $E_2^{p,q} = H^p(BU(n)) \otimes H^q(S^{2n-1})$. En aquest cas ha de convergir a $\mathbb{Z}[x_2, \dots, x_{2n-2}]$. Com que les úniques files no trivials són la 0 i la $2n-1$ l'única diferencial no trivial és d_{2n} ; per tant, l'anell $\mathbb{Z}[x_2, \dots, x_{2n-2}]$ ha d'aparèixer ja a E_2 i sobreviure a E_∞ .



Ara donat que y_{2n-1} té grau senar i $H^*(BU(n))$ no té elements en grau senar ha d'haver-hi un element x_{2n} tal que $d_{2n}(y_{2n-1}) = x_{2n}$. A més té ordre infinit perquè com que $x_{2n}^{k-1}y_{2n-1}$ també té grau total senar, $0 \neq d_{2n}(x_{2n}^{k-1}y_{2n-1}) = x_{2n}^k$, i pel mateix motiu el producte de x_{2n} pels altres generadors també ha de ser diferent de 0. Per tant en efecte

$$H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n],$$

amb $\text{gr}(c_i) = 2i$.

2.7 Cohomologia mòdul 2 de $BO(n)$

En primer lloc calcularem el cas particular de $SO(3)$. Observem que $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ amb l'homeomorfisme següent: considerem la bola tancada de radi π a $\mathbb{R}^3$. Sigui O el centre de la bola i P un punt qualsevol. Associem a P la rotació d'angle $|OP|$ sobre l'eix OP , i a $-P$ la rotació d'angle $-|OP|$ sobre l'eix OP . Aquesta aplicació està ben definida, i en particular identifica punts antipodals perquè les rotacions d'angle π i $-\pi$ són iguals; per tant en efecte $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$.

La cohomologia de $SO(3)$ és per tant $H^*(SO(3); \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x]/(x^4)$ amb $x \in H^1(SO(3); \mathbb{Z}/2)$. Aquest anell té (x, x^2) com a sistema simple de generadors. En aquest cas és fàcil veure que són universalment transgressius: x ho és perquè la transgressió de x és la primera diferencial $d_2(x)$, i x^2 també ho és perquè $d_2(x^2) = 2d_2(x) = 0$. Pel teorema 2.19 tenim per tant que $H^*(BSO(3); \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[w_2, w_3]$.

En general les cohomologies dels grups ortogonals de dimensions superiors es poden calcular mitjançant la successió espectral de Serre, però es necessiten eines addicionals que no introduïrem aquí. Això no obstant, és possible, gràcies al teorema 2.19, calcular les cohomologies dels seus espais classificadors sabent només part de l'estructura dels seus anells de cohomologia.

Considerem les varietats de Stiefel reals V_k^n . Observem que hi ha una aplicació natural $p: V_k^n \rightarrow V_{k-1}^n$ que és un fibrat de fibra S^{n-k} . A més com que la composició $V_k^n \hookrightarrow V_{k-1}^n \xrightarrow{p} V_n^n$ és la identitat tenim que l'aplicació p^* induïda a la cohomologia és injectiva.

Proposició 2.20. *L'anell de cohomologia $H^*(V_k^n; \mathbb{Z}/2)$ té un sistema simple de generadors $(x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$, on $i = \text{gr}(x_i)$ per a tot i .*

Demostració. Fixem n i fem inducció sobre k . El cas $k = 1$ es compleix, ja que $V_1^n \cong S^{n-1}$. Suposem que es compleix per a $k - 1$. A la successió espectral associada al fibrat $S^{n-k} \rightarrow V_{k-1}^n \xrightarrow{p} V_k^n$, l'única diferencial que pot no ser trivial és d_{n-k+1} . Ara bé, per l'estructura multiplicativa les d_{n-k+1} estan determinades per $d_{n-k+1}: E_{n-k+1}^{0, n-k} \rightarrow E_{n-k+1}^{n-k+1, 0}$. Si aquesta última fos diferent de 0 tindríem que $H^{n-k}(V_k^n; \mathbb{Z}/2) = 0$. Però recordem que a la secció 2.2 hem vist que V_k^n és $(n-k)$ -connex; per tant pel teorema de Hurewicz $H^{n-k}(V_k^n; \mathbb{Z}) \neq 0$, i pel teorema dels coeficients universals $H^{n-k}(V_k^n; \mathbb{Z}/2) \neq 0$. Això implica que $d_{n-k+1} = 0$, i per tant apareix un altre generador a V_k^n de grau $n - k$. $\square$

Ara anomenem $(x'_{n-1}, \dots, x'_{n-k+1})$ els generadors de $H^*(V_{k-1}^n; \mathbb{Z}/2)$. Donat que p^* és injectiva, els elements $p^*(x'_i) \in H^i(V_k^n; \mathbb{Z}/2)$ són linealment independents, i per tant podem escollir $p^*(x'_i) = x_i$ per a tot $n - k + 1 < i < n - 1$.

El fibrat principal universal de $SO(n)$ indueix un fibrat

$$SO(n)/SO(n-k) \longrightarrow ESO(n)/SO(n-k) \longrightarrow BSO(n),$$

on els quocients són quocients per l'acció de $SO(n - k + 1)$. A més tenim que $SO(n)/SO(n-k) \cong V_k^n$.

Proposició 2.21. *Els elements $(x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$ del sistema simple de generadors de V_k^n són transgressius en el fibrat anterior.*

Demostració. Per a $k = 1$ tenim que $V_1^n \cong S^{n-1}$, que té un únic generador, i és necessàriament transgressiu perquè a la successió espectral no té elements a sota. Suposem ara que els elements $(x'_{n-1}, \dots, x'_{n-k+1})$ són transgressius en el fibrat

$$SO(n)/SO(n-k+1) \longrightarrow ESO(n)/SO(n-k+1) \longrightarrow BSO(n).$$

Hi ha una aplicació natural $f: ESO(n)/SO(n-k) \rightarrow ESO(n)/SO(n-k+1)$ que indueix un morfisme de fibrats

$$\begin{array}{ccccc} V_{k-1}^n & \longrightarrow & ESO(n)/SO(n-k+1) & \longrightarrow & BSO(n) \\ \uparrow p & & \uparrow f & & \parallel \\ V_k^n & \longrightarrow & ESO(n)/SO(n-k) & \longrightarrow & BSO(n) \end{array}$$

on p és l'aplicació que teníem a la proposició anterior. Recordem que un morfisme de fibrats indueix morfismes entre les successions espectrals que commuten amb les diferencials. És a dir, si x_i és un generador diferent de x_{n-k} , aleshores $x_i = p^*(x'_i)$, i $d_r(x_i) = d_r(p^*(x'_i)) = p^*(d_r(x'_i))$. Com a conseqüència x_i és transgressiu per a tot $n - k + 1 < i < n - 1$. A més, x_{n-k} és el generador de grau mínim, per tant a la successió espectral no té elements a sota. Això implica que x_{n-k} també és transgressiu. $\square$

Recordem ara que $V_{n-1}^n \cong SO(n)$, és a dir, el fibrat de la proposició anterior és en aquest cas

$$SO(n) \longrightarrow ESO(n) \longrightarrow BSO(n),$$

el fibrat principal universal. La proposició 2.21 diu aleshores que $H^*(SO(n), \mathbb{Z}/2)$ té un sistema simple de generadors $x_1, \dots, x_{n-1}$ universalment transgressius. Aplicant el teorema 2.19 tenim per tant que

$$H^*(SO(n); \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[w_2, \dots, w_n].$$

Ara bé, com que $O(n) \cong SO(n) \times \mathbb{Z}/2$ i l'espai classificador del producte cartesià és el producte cartesià d'espais classificadors tenim que

$$BO(n) = BSO(n) \times B\mathbb{Z}/2 = BSO(n) \times \mathbb{R}P^\infty.$$

La cohomologia de $\mathbb{R}P^\infty$ és $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[w_1]$, per tant per la fórmula de Künneth tenim que

$$BO(n) = \mathbb{Z}/2[w_1, \dots, w_n],$$

amb $\text{gr}(w_i) = i$.

2.8 Classes característiques

Les classes característiques són classes de cohomologia associades a fibrats vectorials. Són en particular classes de l'anell de cohomologia de l'espai base del fibrat, donades per les classes de cohomologia de l'espai classificador corresponent i l'aplicació classificadora del fibrat. Aquestes classes mesuren, en certa manera, com de no trivial és el fibrat. Per exemple un fibrat trivial té totes les classes característiques iguals a 0. Aquí introduïrem les classes de Stiefel–Whitney associades a fibrats vectorials reals i les classes de Chern associades a fibrats vectorials complexos. Hi ha diverses maneres de definir aquestes classes: una d'elles és axiomàtica i suposa coneguts, respectivament, l'anell de cohomologia amb coeficients a $\mathbb{Z}/2$ de $BO(n)$ i l'anell de cohomologia entera de $U(n)$, que nosaltres hem calculat a les seccions anteriors.

Definició 2.22. Siguin $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ i $\eta: \mathbb{R}^m \rightarrow E' \xrightarrow{p'} B$ dos fibrats vectorials sobre un espai B . La *suma de Whitney* de ξ i η , $\xi \oplus \eta: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow E \oplus E' \xrightarrow{p \oplus p'} B$, és el fibrat vectorial donat pel *pullback*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{n+m} & \longrightarrow & E \times E' & \xrightarrow{p \times p'} & B \times B \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow \Delta \\ \mathbb{R}^{n+m} & \longrightarrow & E \oplus E' & \xrightarrow{p \oplus p'} & B, \end{array}$$

on $\Delta: B \rightarrow B \times B$ és l'aplicació diagonal. Anàlogament es defineix la suma de Whitney de fibrats vectorials complexos.

Classes de Chern

Axiomes per a les classes de Chern. Sigui $\xi: \mathbb{C}^n \rightarrow E \rightarrow B$ un fibrat vectorial complex sobre un espai B .

I Hi ha classes $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ amb $c_0(\xi) = 1$ i $c_i(\xi) = 0$ per a $i > n$.

II Si $f: B' \rightarrow B$ és una aplicació contínua, aleshores per a tot i ,

$$c_i(f^*\xi) = f^*(c_i(\xi)),$$

on la primera f^* denota el *pullback* per f i la segona denota el morfisme induït a la cohomologia.

III Sigui γ_1^1 el fibrat de línia tautològic. Aleshores $c_1(\gamma_1^1) \neq 0$.

IV Sigui η un altre fibrat vectorial complex sobre B . Aleshores se satisfà

$$c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} c_i(\xi) \smile c_j(\eta).$$

Es defineix la *classe de Chern total* d'un fibrat ξ com

$$c(\xi) = c_0(\xi) + c_1(\xi) + c_2(\xi) + c_3(\xi) + \cdots.$$

Observem que pel primer axioma la suma anterior té un nombre finit de sumands. D'aquesta manera la fórmula del quart axioma es pot escriure de manera compacta:

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \smile c(\eta).$$

Ara sigui $\xi: \mathbb{C}^n \rightarrow E \rightarrow B$ un fibrat vectorial complex. Suposem que ξ està classificat per una aplicació $f_\xi: B \rightarrow BU(n)$. Aleshores definim classes a $H^*(B; \mathbb{Z})$ a partir de l'expressió

$$c_i(\xi) = f_\xi^*(c_i),$$

on $c_i \in H^{2i}(BU(n); \mathbb{Z})$ és un dels generadors de la cohomologia entera de $BU(n)$ trobats a la secció anterior. Aleshores es té el següent teorema [9]:

Teorema 2.23. *Les classes $c_i(\xi) = f_\xi^*(c_i)$ satisfan els axiomes per a les classes de Chern, i a més són les úniques que els satisfan.*

Classes de Stiefel–Whitney

Axiomes per a les classes de Stiefel–Whitney. Sigui $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow E \rightarrow B$ un fibrat vectorial real sobre un espai B .

I Hi ha classes $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}/2)$ amb $w_0(\xi) = 1$ i $w_i(\xi) = 0$ per a $i > n$.

II Si $f: B' \rightarrow B$ és una aplicació contínua, aleshores per a tot i ,

$$w_i(f^*\xi) = f^*(w_i(\xi)),$$

on, com abans, la primera f^* denota el *pullback* per f i la segona denota el morfisme induït a la cohomologia.

III Sigui γ_1^1 el fibrat de línia tautològic. Aleshores $w_1(\gamma_1^1) \neq 0$.

IV Sigui η un altre fibrat vectorial real sobre B . Aleshores se satisfà

$$w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} w_i(\xi) \smile w_j(\eta).$$

De la mateixa manera que en el cas anterior es defineix la *classe de Stiefel–Whitney total* d'un fibrat ξ com

$$w(\xi) = w_0(\xi) + w_1(\xi) + w_2(\xi) + w_3(\xi) + \cdots.$$

Observem que, com abans, pel primer axioma la suma anterior té un nombre finit de sumands. D'aquesta manera la fórmula del quart axioma es pot escriure de manera compacta com

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \smile w(\eta).$$

Ara sigui $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow E \rightarrow B$ un fibrat vectorial real. Suposem que ξ està classificat per una aplicació $f_\xi: B \rightarrow BO(n)$. Aleshores definim classes a $H^*(B; \mathbb{Z}/2)$ a partir de l'expressió

$$w_i(\xi) = f_\xi^*(w_i),$$

on $w_i \in H^i(BO(n); \mathbb{Z}/2)$ és un dels generadors de la cohomologia mòdul 2 de $BO(n)$ trobats a la secció anterior. Aleshores es té el següent teorema [9]:

Teorema 2.24. *Les classes $w_i(\xi) = f_\xi^*(w_i)$ satisfan els axiomes per a les classes de Stiefel–Whitney, i a més són les úniques que els satisfan.*

En el llibre [9] s'exposen diverses aplicacions importants de les classes característiques a l'estudi d'immersions de varietats en espais euclidians, a la teoria de cobordisme i a l'anàlisi global en varietats.

Bibliografia

- [1] Borel, A., *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, Amer. J. Math. 76 (1954), 273–342.
- [2] Borel, A., *Topics in the Homology Theory of Fibre Bundles*, Springer-Verlag (1967).
- [3] Bott, R. and Tu, L. W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag (1982).
- [4] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
- [5] Hatcher, A., *Spectral Sequences in Algebraic Topology*,
www.math.cornell.edu/~hatcher
- [6] Husemöller, D., *Fibre Bundles*, Springer-Verlag (1994).
- [7] Leray, J., *L'anneau d'une représentation*, C. R. Acad. Sci. Paris 222 (1946), 1366–1368.
- [8] McCleary, J., *User's Guide to Spectral Sequences*, 2nd ed., Cambridge University Press (2001).
- [9] Milnor, J. W. and Stasheff, J. D., *Characteristic Classes*, Princeton University Press (1974).
- [10] Sepanski, M. R., *Compact Lie Groups*, Springer-Verlag (2007).
- [11] Serre, J. -P., *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math. 54 (1951), 425–505.