

Un FOTÓMETRO LIHERMANN, modificación Pellín.

Y un REFRACTÓMETRO DE FERY, perfeccionado.

Correspondientes á Optica se han adquirido además: dos CRÁTICULOS ó redecillas de difracción, uno rectilíneo y otro circular (de la casa The Scientific Shop, Chicago); una ESCALA DE MICHELSONN (construída por Adam Hilger, de Londres); una CÁMARA FOTOGRÁFICA, con triple fuelle, que alcanza una longitud de 85 cm., y un OBJETIVO ZEISS para la misma.

De la casa Carpentier, de París, proceden los siguientes aparatos de Electrología:

Un POTENCIÓMETRO, (de 0'0001 á 600 volts).

CAJA DE RESISTENCIAS Á PUENTE, DE WHEATSTONE (hasta diez megahms). OHM PATRÓN.

GALVANÓMETRO DEPREZ D'ARSONVAL, con su correspondiente escala graduada transparente.

UN CONDENSADOR PATRÓN, de un microfarad subdividido.

CONDENSADORES DE CAPACIDAD VARIABLE, á diversos acoplamientos, con el

GRAN CARRETE DE RUHMKORFF, de 45 centímetros de chispa. Este aparato funciona, ya con un INTERRUPTOR WEHNELT, procedente de la casa Ernecke, de Berlín, ya con otro mecánico á ELECTROMOTOR, construído por los Sres. Dalmau Montero, de Barcelona:

De la casa Hartmann et Braun, de Frankfurt, procede un precioso GALVANÓMETRO BALÍSTICO; y de la «Société Générale de produits chimiques» de París, un ELESTROSCOPIO CURIE. Las SUBSTANCIAS RADIOACTIVAS (1 dgr. de bromuro de radium), las ha proporcionado la casa Max Kohl, igualmente que un ESLINTERISCOPIO de Krookes.

De la misma casa últimamente citada procede un aparato completo de TELEGRAFÍA SIN ALAMBRES DE LÍNEA, y una preciosa MÁQUINA NEUMÁTICA de fundición y bronce con émbolos llamados TELESCÓPICOS, y el correspondiente INDICADOR DE VACÍO (hasta la millonésima de atmósfera). Esta máquina funciona mediante un ELECTROMOTOR (procedente de la casa

Allgemeine Elektrizitäts Gesellschaft, de Berlín), cuya potencia es de un caballo.

También se ha adquirido una bonita BOMBA NEUMÁTICA DE MERCURIO (de la casa Richard Müller-Uri de Braunschweig) y una colección completa de APARATOS METEOROLÓGICOS REGISTRADORES, modelos Richard, de París.

Adjunto al Gabinete de Física, hay un pequeño *laboratorio*, y una *cámara obscura*, destinada á experiencias fotográficas y fotométricas, espectrografía, etc.

Los citados locales resultan, á todas luces, insuficientes dada la excelencia del material científico que contienen, el cual probablemente no es superado, ni en calidad ni en cantidad, por ningún establecimiento docente. Se impone, pues, un cambio de local en breve plazo. Al efecto, está ya proyectado un pabellón independiente, dedicado exclusivamente á *Ciencias Físicas*, en cuyo proyecto han colaborado los señores catedráticos de la Sección, Dres. Alcobé y Terradas, en unión del de la Sección de Ciencias Exactas, Dr. Doménech y Estapá, arquitecto; teniendo en cuenta todas las exigencias requeridas en los trabajos de investigación más delicados de la moderna Física, y tomando como pauta, aunque adaptándose á las circunstancias y medios posibles, los principales edificios que en Europa están más acreditados como modelos de Institutos de *Física*.

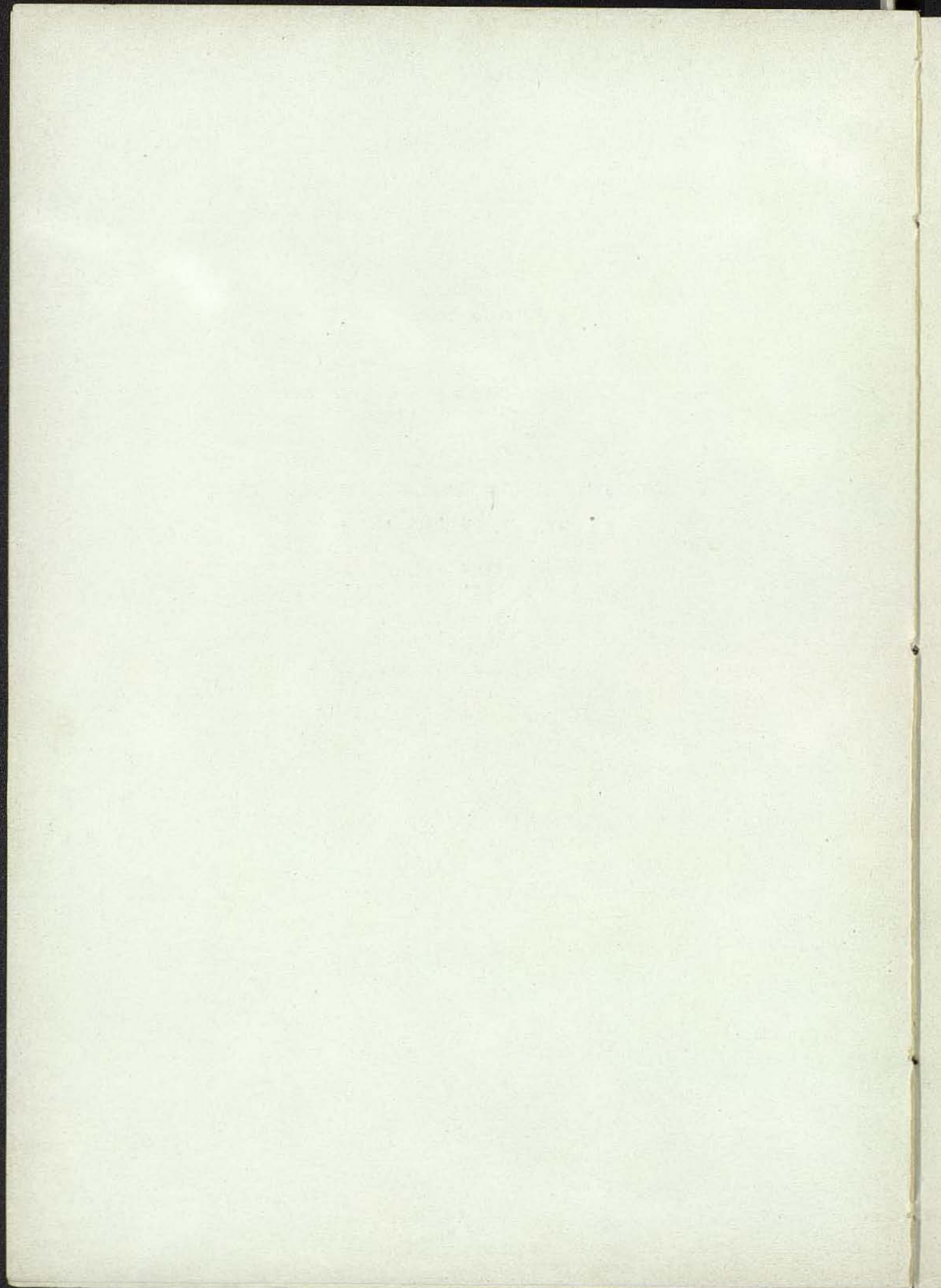
FENÓMENOS DE POLARIZACIÓN
EN EL CUARZO

POR EL

DR. D. ESTEBAN TERRADAS

Catedrático de Óptica
y Electricidad







IVIDIREMOS la exposición que precede en tres partes principales: una que comprende el capítulo I, en que se exponen los fenómenos observados; otra que comprende los capítulos II-X inclusive, en que se dan los principios de la teoría electromagnética de la polarización rotatoria, y la última que comprende los capítulos restantes, en que se hace aplicación de la misma para la explicación satisfactoria de los fenómenos observados.

I

Si se toman dos láminas de cuarzo normales al eje, ambas dextrogiras, y entre ellas se coloca una lámina de mica de $\frac{1}{2}$ de longitud de onda, y se observa el campo del microscopio petrográfico iluminado con luz monocromática donde se hallan colocadas entre dos nicoles cruzados, se observa:

Si la sección principal de la mica coincide con la del analizador ó polarizador, una cruz negra en el centro del campo, precisa y delimitada para las posiciones dichas, con una

serie de anillos oscuros concéntricos al campo, las ramas de la cruz coinciden con las direcciones principales del polarizador.

Si entre los nicoles en las mismas posiciones, el plano principal de la mica biseca el formado por las direcciones principales del polarizador y analizador, el centro del campo es blanco, arrancando del mismo los brazos de una cruz blanca, cuyos cuadrantes aparecen ocupados por lúnulas muy vistosas, que parecen constituidas por arcos de circunferencia y elipses concéntricos.

Si los nicoles, en lugar de ser cruzados, son paralelos, los fenómenos son complementarios de los anteriores.

Si la mica interpuesta es de $\frac{1}{4}$ de onda, se ven para el caso de nicoles paralelos una serie de anillos formando como circunferencias y elipses casi bitangentes, con dos manchas en el interior de la primera de aquéllas, circulares, á igual distancia del centro del campo. En la línea que une los centros de estas manchas paralelas á la dirección principal del polarizador, están los ejes menores de aquellos anillos que se han asimilado á elipses.

Si los nicoles están cruzados, el fenómeno es complementario.

II

Supondremos que la luz puede estar representada por un vector. Así como al propagarse una onda en la superficie de un lago, conocida vectorialmente en todo instante la distancia de un punto geométrico que figure la posición de una partícula líquida en reposo á las diversas posiciones de la misma partícula cuando se propaga la perturbación, se puede decir que se conoce mecánicamente el movimiento ó deformación de la superficie y, por tanto, la propagación del movimiento ondulatorio, así en todo fenómeno luminoso el conocimiento del vector luz localizado en un punto del espacio

dará idea de la propagación. Antiguamente era el vector luz la distancia de la molécula de éter en reposo á la molécula apartada de su posición de equilibrio. En la teoría que vamos á exponer este vector tiene significación eléctrica.

III

Entre una masa $\begin{Bmatrix} \text{eléctrica} \\ \text{magnética} \end{Bmatrix} q$ y otra q' localizadas en dos puntos situados á una distancia r actúa una fuerza F

$$F = K \frac{qq'}{r^2} \quad (1)$$

atractiva ó repulsiva según que q y q' tengan distinto ó igual signo; K es aquí una constante. Si hacemos $K=1$, las dimensiones de q son $L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$. Definida la unidad de cantidad de electricidad como «aquella que actuando sobre otra igual, á 1 cm. la repele con la fuerza de una dina», se llama unidad electrostática de cantidad de electricidad. Intensidad electrostática I se llama á la cantidad de electricidad que pasa en la unidad de tiempo, por una sección cualquiera de un conductor que pone en comunicación dos masas eléctricas de distinto signo, y sus dimensiones serán $L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$. La intensidad magnética se define como la eléctrica.

Colocada una serie de masas $\begin{Bmatrix} \text{eléctricas} \\ \text{magnéticas} \end{Bmatrix} q_1, q_2, q_3, \dots$ en el interior de una superficie S , se llama «flujo al través de la misma», á la expresión

$$\int \left(\frac{q_1}{r_1^2} \cos \alpha_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \cos \alpha_2 + \dots \right) dS$$

en que $r_1, r_2, \dots$ son las distancias de un punto de la superficie S á los diversos puntos donde se hallan localizadas las masas $q_1, q_2, \dots$, y $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ son los ángulos que la normal á la superficie S en el punto considerado, forma con las direcciones de $r_1, r_2, \dots$. La expresión anterior vale $4\pi\Sigma q$; en efecto,

llamando $d\omega$ al ángulo sólido bajo el cual se ve desde un punto donde se halla localizada una masa q el elemento dS , será

$$\int \Sigma \frac{q}{r^2} \cos \alpha dS = \int \Sigma q \omega = \Sigma q \int d\omega = \Sigma q \Omega = 4\pi \Sigma q$$

Llamaremos fuerza $\begin{cases} \text{eléctrica} \\ \text{magnética} \end{cases}$ en un punto á la que se ejerce sobre la unidad de masa ó cantidad localizada en este punto y representaremos por $\begin{cases} E \\ H \end{cases}$ la $\begin{cases} \text{eléctrica} \\ \text{magnética} \end{cases}$. Así la expresión del flujo eléctrico, por ejemplo, se podrá escribir, llamando E_n á la proyección sobre la normal á la superficie de la resultante de las fuerzas eléctricas en un punto,

$$\int \Sigma E_1 \cos \alpha_1 dS = \int E_n dS = 4\pi \Sigma q \quad (2)$$

Se conoce con el nombre de hoja magnética á una superficie en cuya normal se halla dispuesto un pequeño imán ó imán elemental, en que la distancia de los polos tiene un valor determinado, y, por ejemplo, igual para todos los puntos, distancia que podemos llamar d (fig. 1).

El potencial de uno de estos imanes elementales en un punto P , será, puesto que el potencial de las acciones eléctrica ó magnética de una masa q es $W = \int \frac{-q}{r^2} dr = \frac{+q}{r}$, llamando V al de la hoja,

$$dV = \left[\frac{q}{r''} - \frac{q}{r'} \right] = \frac{q(r'' - r')}{r'' r'}$$

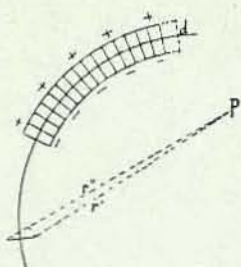


Fig. 1

y, atendiendo á la pequeñez de d , si llamamos r á la distancia del punto medio del imán elemental á P , y α al ángulo que la dirección de r forma con la normal

$$dV = \frac{q}{r^2} d \cos \alpha$$

y si la masa $+q$ del imán elemental la suponemos distribuída en la superficie a , y la $-q$ en la b con densidad superficial $\pm$

tal que $q = \delta dS$, tendremos, llamando ω al ángulo sólido bajo el cual se ve desde P el elemento dS ,

$$V = \int \delta d d\omega = \delta d \Omega$$

siendo Ω el ángulo sólido bajo el cual se ve desde P el contorno de la hoja.

Consideraremos como positivo el ángulo sólido, cuando el punto P se halle delante de la cara $+$. Así, en la fig. 2 el ángulo en P_1 es $-\Omega$ y en P_2 del otro lado de la hoja pero muy cerca de P_1 se puede decir que es $+(4\pi - \Omega)$. Así, pues, el potencial en P_1 será $-\Omega \delta d$, y el potencial en P_2 será $(4\pi - \Omega) \delta d$.

De donde el trabajo realizado al pasar la masa magnética unidad de P_2 á P_1 , trabajo que se mide por la diferencia de los valores del potencial en las posiciones inicial y final, será

$$4\pi \delta d$$

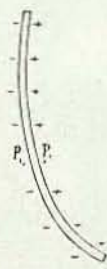


Fig. 2

Si imaginamos materializado el contorno de la hoja por un hilo por el que circula una corriente de intensidad determinada Y , se ha comprobado que la acción de la hoja y de la corriente sobre un polo magnético unidad, son proporcionales, si se tiene

$$j d\delta = Y$$

siendo j un factor de proporcionalidad. Si suponemos $j = 1$, definiremos electromagnéticamente la intensidad Y , por la expresión $Y = d\delta$. Las dimensiones de Y son L [dim de q] L^{-2} , y si la q magnética tiene por dimensiones $L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$, suponiendo igual á la unidad el coeficiente K de la fórmula (1) de las acciones magnéticas, las dimensiones de Y serán $L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$. Recordando las de I , se tiene que el cociente $\frac{I}{Y}$ tiene por dimensiones LT^{-1} , es decir, las de una velocidad, que expresada numéricamente en el sistema $c.g.s.$, es $3 \cdot 10^{10}$ ó sea la velocidad de la luz.

Por lo que anteriormente hemos dicho, el trabajo reali-

zado al atravesar el polo magnético unidad la hoja, ó al hacerle recorrer una curva cerrada que atraviere una sola vez la hoja, vale $4\pi \epsilon d$, ó si se trata de un circuito recorrido por una corriente eléctrica $Y = d\epsilon$ y cuya forma sea la del contorno de la hoja, el trabajo vendrá expresado por $4\pi Y$ ó $\frac{4\pi I}{C}$ siendo C la velocidad de la luz $3 \cdot 10^{10}$.

IV

Aunque la intensidad en diferentes secciones de un conductor sea la misma, la cantidad de electricidad por unidad de superficie normal que en la unidad de tiempo pasa por los distintos elementos dS de una sección cualquiera, es diferente, como es diferente la velocidad del agua en los distintos filetes fluídos que atraviesan la sección de un tubo en el que corre aquel líquido. Llamando α, β, γ , á los ángulos que la normal á un elemento dS de sección del conductor forma con tres ejes coordenados, y I_x, I_y, I_z á las proyecciones del vector que en un punto de la sección representa la intensidad por unidad de superficie normal, se tendrá

$$I = \int (I_x \cos \alpha + I_y \cos \beta + I_z \cos \gamma) \quad (3)$$

Imaginemos un conductor en forma de anillo (fig. 3), por el que circula una corriente I . Si el polo magnético unidad

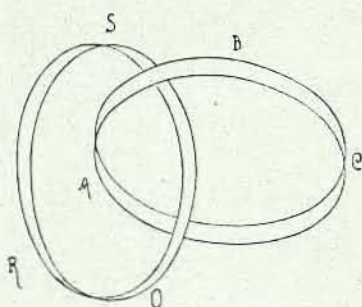


Fig. 3

recorre la curva ABC , el trabajo realizado al recorrerle una vez tiene por expresión $\int H \cos \epsilon dl$, siendo dl un elemento de la curva ABC y ϵ el ángulo que la dirección de H forma con la tangente á la curva ABC en un punto cualquiera de la misma. Pero por lo dicho en el párrafo anterior,

$$\int H \cos \epsilon dl = 4\pi \frac{I}{C} = \frac{4\pi}{C} \int (I_x \cos \alpha + I_y \cos \beta + I_z \cos \gamma) dS,$$

estando la segunda integral referida á una superficie cuyo contorno es, por ejemplo, ABC , en lo cual no hay inconveniente, ya que como la curva ABC envuelve por completo al conductor ROS , en los puntos de la superficie que no pertenezcan al conductor, $I_x = I_y = I_z = 0$.

Por el teorema de Stokes,

$$\int H \cos \varepsilon \, dl = \int \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

y, por consiguiente,

$$\frac{4\pi}{C} \int (I_x \cos \alpha + I_y \cos \beta + I_z \cos \gamma) \, dS = \int \left[\left(\frac{H_z}{\partial y} - \frac{H_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

refiriéndose las dos integrales á la misma superficie. Ahora bien, la fórmula anterior es independiente de la magnitud de esta superficie; luego,

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{C} I_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \\ \frac{4\pi}{C} I_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ \frac{4\pi}{C} I_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \end{aligned}$$

Vectorialmente se escriben las tres ecuaciones de un modo abreviado, así

$$\frac{4\pi \bar{I}}{C} = \text{curl } H \quad (4)$$

Si no hubiera corriente en el conductor ROS , aparecería en virtud del trabajo realizado al hacer recorrer al polo unidad la curva ABC . Desde luego, la suma de los dos trabajos

tiene que ser nula por el principio de la conservación de la energía. En cuanto al trabajo realizado al describir el polo la curva AOB vale $4\pi \frac{I}{C}$, y si se tratara de una masa magnética q , valdría

$$4\pi q \frac{I}{C}$$

En cuanto al trabajo realizado al recorrer $ROSR$, la cantidad de electricidad It , valdrá evidentemente $It \int E \cos \varepsilon' dl'$, siendo dl' un elemento del conductor $ROSR$ supuesto, por un momento, lineal, y ε' el ángulo que la fuerza eléctrica E en un punto del conductor forma con la tangente al mismo.

Luego

$$It \int E \cos \varepsilon' dl' + 4\pi \frac{Iq}{C} = 0$$

de donde

$$-\int E \cos \varepsilon' dl' = \frac{4\pi \frac{q}{t}}{C}$$

y como $\frac{q}{t}$ es la intensidad magnética, llamándola $\bar{I}$, se tendrá, empleando notaciones análogas á las anteriores,

$$-\text{curl } E = \frac{4\pi}{C} \bar{I} \quad (5)$$

V

Se supone en Física que los cuerpos están impregnados de éter, en el que pululan un sin fin de partículas cargadas de electricidad que se denominan electrones. Estos se mueven de muy distinta manera en los distintos cuerpos, y precisamente esa diversidad de movimientos los distingue en sus cualidades.

La intensidad de la corriente se compone así de dos partes: la corriente en el éter, y las corrientes debidas al movimiento ó transporte de los electrones.

Veamos cómo podemos concebir la primera intensidad ó intensidad de corriente en el éter.

Supongamos dos conductores electrizados *A* y *B*, el uno con electricidad vítrea y el otro con electricidad resinosa en la misma cantidad. Cuando, por medio de un hilo metálico, ponemos en comunicación *A* y *B*, ocurre algo que decimos es el paso de la electricidad positiva de *A* por el hilo, y neutralización de la de *B*. Esto responde á cierto modo de concebir la electricidad, como si en *A* tuviéramos un cierto nivel de agua y en *B* otro inferior, y por medio de un tubo estableciéramos la comunicación entre *A* y *B*. A esta manera de concebir la electricidad, sustituiremos otra que nos será de gran utilidad. Imaginaremos que el estado eléctrico de *A* es como el de un fluido comprimido, el de *B* como el de un fluido sometido á expansión. Al poner en comunicación *A* y *B* por medio del hilo (suponemos *A* y *B* en el éter) el fluido comprimido de *A* tiende á marcharse y el de *B* á acrecentarse con el que circula por el hilo. Mas en vez de acumularse el fluido en *B* y disminuir la cantidad del de *A*, supondremos que todo el que va á *B* vuelve á *A* por el éter, pero, por efecto del movimiento, desaparecen la presión en *A* y la expansión en *B*. Ello sería algo así como si por medio de dos máquinas eleváramos en una un cubo con agua y bajáramos otro en la otra el mismo número de metros respecto del nivel en que primitivamente estaban, y que por medio de un tubo estableciéramos comunicación entre los mismos. El agua del más alto pasaría al más bajo, mas suponiendo que éste no puede contener sino la capacidad primera, rebosaría; imaginemos ahora que esta agua que rebosa se echa al primer cubo, y que mientras la circulación se verifica, los dos cubos vuelven á su posición primera de modo que no pase agua del uno al otro.

La cantidad de electricidad que en la unidad de tiempo pasará por la unidad de superficie normal en el éter será mucho menor que la correspondiente en el hilo conductor, atendido á que por una superficie pequeña pasa en el mismo

tiempo la misma cantidad de electricidad, aunque en sentido contrario, que pasa al través de una superficie indefinidamente grande en el éter.

Con esto no nos será difícil definir la intensidad de corriente en el éter. Consideremos una superficie cerrada que envuelva al conductor *A* y no al *B*. La cantidad de electricidad que pasa al través de esta superficie es cero, y está constituida por dos partes, la que pasa por el hilo y la que no pasa por él. Llamemos I_{sh} á la intensidad por unidad de superficie normal en el hilo correspondiente al trozo de superficie interceptada por él, y I_{se} á la expresión análoga correspondiente al resto de la superficie; será

$$I_{sh} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}$$

siendo *q* la cantidad de electricidad que pasa al través del hilo por unidad de superficie normal. Pero por (2) y $\int \bar{q} ds = \Sigma q$

$$-\int^c I_{sh} dS = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\partial E_n}{\partial t} dS$$

estando la primera integral limitada á la porción de superficie interceptada por el conductor; la segunda se refiere á toda la superficie. Pero

$$\int^c I_{sh} dS + \int^{s-c} I_{se} dS = 0$$

en que la segunda integral se refiere á toda la superficie menos la porción interceptada por el conductor. Mas como ésta es pequeña, podemos escribir en vez de la segunda integral $\int I_{se} dS$ en que se entiende que hace referencia á toda la superficie, en cuyo caso

$$4\pi \int I_{se} dS = \int \frac{\partial E_n}{\partial t} dS$$

y, por tanto,

$$4\pi I_{se} = \frac{\partial E_n}{\partial t}$$

y en lenguaje vectorial, sencillamente

$$4\pi \bar{I}_e = \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (6)$$

Si, en vez de considerar dos masas eléctricas A y B , hubiésemos considerado dos masas magnéticas y el circuito formado por las líneas de fuerza del interior del imán que constituyen y las del exterior en el éter, hubiéramos obtenido análogamente

$$4\pi \bar{I}_e^m = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (7)$$

VI

Las dos expresiones anteriores de la intensidad se refieren al caso de propagación en el éter. Como vamos á estudiar la propagación en un medio que presenta la polarización rotatoria, admitiremos, como ya hemos dicho, la existencia de electrones. Estos tendrán en los cuerpos, objeto de nuestro estudio, un movimiento especial. Admitiremos, por ejemplo, que el movimiento de un electrón en un cuerpo que presenta la polarización rotatoria natural se puede imaginar descompuesto en dos: uno que llamaremos lato y que consistirá en un movimiento de oscilación rectilíneo, y otro movimiento de rotación alrededor de un eje que podrá, por ejemplo, coincidir con la recta en que se mueve en el movimiento lato; más claro, como el movimiento de un punto que se mueve en una circunferencia cuyo centro está animado de un movimiento rectilíneo de oscilación según una recta normal al plano del círculo. Llamaremos s á la variable que define el movimiento lato y r y α á las que definen el movimiento circular (r el ra-

dio y α el ángulo polar). El movimiento circular se supondrá en el mismo sentido para los electrones todos.

Para expresar las fuerzas que actúan sobre el electrón, veamos el trabajo realizado por él mismo al haber girado, en un movimiento circular, 2π exactamente. Para un corrimiento $\sqrt{ds^2 + r^2 d\alpha^2}$ en su trayectoria, se tiene como expresión del trabajo, suponiendo dirigido el eje de las x según el eje de giro, y llamado e á la carga eléctrica del electrón,

$$dT = e [E_x ds - E_y r \sin \alpha d\alpha + E_z r \cos \alpha d\alpha]$$

Por el teorema de Maclaurin

$$E_y = E_y^0 + r \cos \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} + r \sin \alpha \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$E_z = E_z^0 + r \cos \alpha \frac{\partial E_z}{\partial y} + r \sin \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

siendo E_y^0, E_z^0 los valores de E_y y E_z en el centro del círculo que correspondería al movimiento en su circunferencia.

Luego, por una rotación de 2π , poniendo $\frac{ds}{r d\alpha} = \operatorname{tg} \varphi$, será

$$T = e \left\{ 2\pi r \operatorname{tg} \varphi E_x + \pi r^2 \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \right\}$$

por tanto, para una dirección cualquiera

$$T = e 2\pi r \operatorname{tg} \varphi \left[\bar{E} + \frac{r}{s} \cot \varphi \operatorname{curl} E \right]$$

y, como $2\pi r \operatorname{tg} \varphi$ es el camino recorrido proyectado según el eje de giro, la expresión de la fuerza que sobre el electrón actúa será, vectorialmente, por unidad de masa, y en la dirección del movimiento lato

$$E + \frac{r}{2} \cot \varphi \operatorname{curl} E$$

que escribiremos aproximadamente

$$E + f' \operatorname{curl} E.$$

Esta es la fuerza eléctrica que actúa sobre la masa eléctrica uno del electrón, pero á los electrones se les asigna también masa mecánica, que llamaremos, por ejemplo, m . Y así resultan sometidos á las fuerzas mecánicas provenientes de la resistencia que puede ofrecerles el medio, y aun se admite, para explicar el movimiento de oscilación calificado de movimiento lato, una fuerza atractiva dirigida hacia el centro de oscilación y proporcional á la distancia al mismo, ó sea s convenientemente á s . Así, pues, la ecuación del movimiento lato, será

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{4\pi e^2}{\delta} s + Re^2 \frac{\partial s}{\partial t} = e (\bar{E} + f' \text{curl } E)$$

En esta ecuación se ha dado al coeficiente de resistencia proporcional á la velocidad la forma Re^2 para indicar que, cualquiera que sea e , representa una fuerza de idéntica dirección. Lo mismo puede decirse del coeficiente de proporcionalidad de distancia $\frac{4\pi e^2}{\delta}$. Se le da esta forma, llamando á δ coeficiente de vibración propia, por comodidad en la dispersión rotatoria.

Si admitimos que s es una función periódica de la forma $e^{i\frac{t}{T}2\pi}$ (*) con un período T , y ponemos para simplificar

$$a = \frac{R\delta}{4\pi}, \quad b = \frac{m\delta}{4\pi e^2}, \quad \tau = \frac{T}{2\pi}$$

resulta de la ecuación anterior

$$es = \frac{\delta}{4\pi \left[1 + \frac{ia}{\tau} - \frac{b}{\tau^2} \right]} [\bar{E} + f' \text{curl } E]$$

La intensidad de corriente ó cantidad de electricidad que en la unidad de tiempo pasa por unidad de sección normal

(*) Para comodidad se introduce la forma imaginaria $e^{i\frac{t}{T}2\pi}$, pero en todo caso debe entenderse que en cualquier valor en que intervenga i y que, por tanto, sea una cantidad imaginaria, físicamente sólo vale de ella la parte real.

en una sucesión de electrones que se mueven describiendo las trayectorias que le corresponden, proyectada sobre la dirección de s , será, si hay en la unidad de volumen N electrones de masa e , N' de masa e'

$$\frac{\bar{e}l}{I} = \Sigma e N \frac{ds}{dt}$$

Por tanto, la intensidad total, suma de la corriente en el éter y de la corriente debida á los electrones es

$$\bar{I} = \bar{I}_e + \frac{\bar{e}l}{I}$$

De modo que

$$4\pi\bar{I} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + f \text{curl} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (6 \text{ bis})$$

habiendo puesto, para simplificar,

$$\epsilon = 1 + \Sigma \frac{N\delta}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad f = \Sigma \frac{N\delta t'}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

y haciendo caso omiso del coeficiente de resistencia del medio R , cuyo interés se limita al estudio de la dispersión.

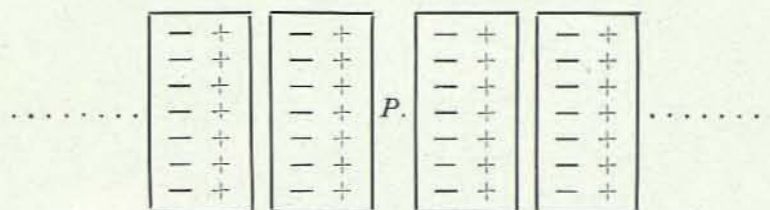
De modo que la ecuación (4) puede escribirse

$$\frac{\epsilon}{C} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{f}{C} \text{curl} \frac{\partial E}{\partial t} = \text{curl} H \quad (8)$$

Del mismo modo la expresión de $\bar{I}$ se compondrá de $\bar{I}_e$ más la parte correspondiente á la existencia y movimiento de los electrones.

Al moverse los electrones según hélices, forman como una corriente en un solenoide, y en el interior de este solenoide la intensidad magnética es algo más que la intensidad en el éter $\bar{I}_e$. Evaluemos la intensidad en el interior de un solenoide. Sea un punto del eje comprendido entre dos espi-

ras consecutivas, y supongamos que hay $\sqrt[3]{N}$ espiras en la unidad de longitud. Podemos sustituir á las corrientes en los circuitos, hojas magnéticas que produzcan el mismo efecto. El polo magnético P , que se encuentra entre dos hojas próximas cargadas con electricidades contrarias (figura) sufre una acción igual á la del doble de una de las caras puesto que una le repele hacia la derecha, la $+$, y otra la atrae ha-



cia la izquierda, y en cuanto á la acción del resto del solenoide ó resto de las hojas magnéticas no tiene, podemos suponer, influencia: en las intermedias, por anularse la de la cara $+$ con la de la $-$ que está junto á ella, y en las finales porque las supondremos suficientemente alejadas para hacer caso omiso de su efecto. Un disco circular cargado con densidad magnética superficial δ ejerce sobre un polo magnético unidad colocado á una distancia p del mismo una acción que encontraremos integrando las acciones de los elementos superficiales proyectadas según la perpendicular del punto al disco, perpendicular que supondremos pasa por el centro del disco.

Será

$$\int \frac{\delta ds}{r^2} \cos \alpha = \int \delta d\omega = \delta \Omega$$

siendo Ω el ángulo sólido bajo el cual se ve desde P el contorno del disco. Para $p = 0$, la acción es $\delta \times 2\pi$, y la de los dos discos con cantidades magnéticas de distinto signo é inmediatos, $4\pi\delta$.

Ahora bien, la equivalencia entre circuitos y hojas exige en este caso que

$$\delta = \sqrt[3]{Ni}$$

siendo i la corriente en las espiras en unidades electromagnéticas. Para evaluar i consideramos que si T representa el tiempo que tarda el electrón e en recorrer una espira, en un segundo la proyección del electrón sobre un plano normal al eje de la hélice que describe pasa $\frac{1}{T}$ veces por un mismo punto, de modo que la intensidad en él en unidades electrostáticas será $\frac{e}{T}$. Y como en el tiempo T el electrón se mueve en la dirección del eje de la hélice $2\pi r \operatorname{tg} \varphi$, la velocidad del mismo en esta dirección, que hemos llamado $\frac{ds}{dt}$, será

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2\pi r \operatorname{tg} \varphi}{T}$$

y como $\frac{ds}{dt}$ nos es conocido en función E y sus derivadas,

$$T^{-1} = \frac{ds}{dt} \frac{\cot \varphi}{2\pi r}$$

y, por lo tanto, en unidades electrostáticas,

$$i = e \cot \varphi \frac{ds}{dt} : 2\pi r$$

La acción, pues, en un punto del eje del solenoide, será,

$$4\pi \frac{i}{C} \sqrt[3]{N} = 4\pi \frac{e}{C} \cot \varphi \frac{ds}{dt} : 2\pi r$$

Admitiendo que la fuerza en un punto que no está en el eje difiere poco de la fuerza en el eje, el producto de la fuerza por la superficie normal representará el flujo,

$$2\pi r \frac{e}{C} \cot \varphi \frac{ds}{dt} \sqrt[3]{N}$$

pero, observando que hay $N^{1/2}$ solenoides en la unidad de volumen, el flujo total á través de la unidad de superficie normal, teniendo en cuenta todas las clases de electrones, valdrá

$$N = \frac{2\pi}{C} \Sigma r \cot \varphi e N \frac{ds}{dt}$$

Esta expresión, flujo por unidad de superficie normal, hay que considerarla añadida al flujo por unidad de superficie normal en el éter, que es evidentemente $\bar{H}$. Luego

$$4\pi \bar{I} = 4\pi \bar{I} + 4\pi \bar{I}^{el} = \frac{\partial [H + N]}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} \quad (7 \text{ bis})$$

Para el cálculo de N , ó para el de $\frac{ds}{dt}$, haremos caso omiso del término en f' en la expresión hallada para es , de modo que escribiremos aproximadamente

$$es = \frac{\partial}{4\pi \left(1 - \frac{b}{\tau^2}\right)} \bar{E}$$

Y así,

$$N = \frac{1}{C} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \Sigma \frac{N \partial r' \operatorname{tg} \varphi}{2 \left(1 - \frac{b}{\tau^2}\right)} = \frac{f}{C} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Y la ecuación (5) se transformará en la

$$\frac{1}{C} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{t}{C^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = - \operatorname{curl} E \quad (9)$$

VII

Las fórmulas 6 bis y 7 bis, las hemos deducido en la hipótesis de medios isotropos. Para medios cristalinos admitiremos para $\bar{I}$ y $\bar{I}^{el}$ expresiones de las cuales las anteriores sean un caso particular. Lo más elemental será generalizar la expresión $\bar{I}$, por ejemplo, en la siguiente forma:

$$4\pi I_x = \epsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \epsilon_2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \epsilon_3 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f_1 \operatorname{curl}_x \frac{\partial E}{\partial t} + f_2 \operatorname{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t} + f_3 \operatorname{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 4\pi I_y &= \varepsilon_4 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\
 &+ \varepsilon_5 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_6 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f_4 \operatorname{curl}_x \frac{\partial E}{\partial t} + f_5 \operatorname{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t} + f_6 \operatorname{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t} + \dots \\
 4\pi I_z &= \varepsilon_7 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\
 &+ \varepsilon_8 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_9 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f_7 \operatorname{curl}_x \frac{\partial E}{\partial t} + f_8 \operatorname{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t} + f_9 \operatorname{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t} + \dots
 \end{aligned}$$

indicando los puntos suspensivos potencias de ε y f superiores á la primera. Suponiendo en primera aproximación que omitimos estas potencias, y que $f_1 = f_2 = f_3 = f$, $f_4 = f_5 = f_6 = 0$, suposición esta última que no está del todo conforme con los resultados experimentales, pero que hacemos aquí para simplificar, quedan como fórmulas generalizadas

$$\begin{aligned}
 4\pi I_x &= \varepsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_3 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f \operatorname{curl}_x \frac{\partial E}{\partial t} \\
 4\pi I_y &= \varepsilon_4 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_5 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_6 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f \operatorname{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t} \\
 4\pi I_z &= \varepsilon_7 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_8 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_9 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f \operatorname{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Si se tratara de cuerpos desprovistos de polarización rotatoria, bastará hacer $f=0$ en las fórmulas anteriores para tener las correspondientes.

Las fórmulas que acabamos de escribir pueden simplificarse en los términos que no tienen f . En efecto, en un cristal que no presenta la polarización rotatoria, el trabajo T' , debido á una corriente I en un tiempo dt recorriendo una curva cerrada cualquiera l en el cristal, vale

$$T' = dt \int (I_x E_x + I_y E_y + I_z E_z) dl$$

Si el cristal es transparente, al cabo del período correspondiente al fenómeno luminoso, recobra el cristal su primitivo estado. Luego el trabajo anterior ó variación de la ener-

gía, debido á la circulación de la corriente I en el interior del cristal, debe ser la diferencial exacta de una cierta función Π que defina la energía eléctrica. Luego

$$I_x E_x + I_y E_y + I_z E_z = \frac{d\Pi}{dt}$$

y, por tanto,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_4, \varepsilon_5 = \varepsilon_8, \varepsilon_7 = \varepsilon_9$$

De modo que el determinante

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 & \varepsilon_5 & \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 & \varepsilon_8 & \varepsilon_9 \end{vmatrix}$$

es simétrico. Siendo así, se podrá escribir

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_3 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{4\pi}{E_x} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \\ \varepsilon_2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_5 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_6 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{4\pi}{E_y} \frac{\partial \Pi}{\partial y} \\ \varepsilon_3 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_6 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_9 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{4\pi}{E_z} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\Pi = \frac{1}{8\pi} [\varepsilon_1 E_x^2 + \varepsilon_5 E_y^2 + \varepsilon_9 E_z^2 + 2\varepsilon_2 E_y E_x + 2\varepsilon_3 E_z E_x + 2\varepsilon_6 E_z E_y]$$

la forma cuadrática Π se podrá transformar mediante un cambio de coordenadas en la forma simplificada

$$\Pi = \frac{1}{8\pi} [\bar{\varepsilon}_1 E_{x'}^2 + \bar{\varepsilon}_2 E_{y'}^2 + \bar{\varepsilon}_3 E_{z'}^2]$$

y, por tanto, refiriendo las componentes de I al mismo sistema, y poniendo en vez de $I_x, I_y, I_z, E_x, E_y, E_z, I_x I_y I_z E_x E_y E_z$, ya que no ha de haber lugar á confusión por referirnos en adelante siempre al nuevo sistema,

$$\left. \begin{aligned} 4\pi I_x &= \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial E_{x'}}{\partial t} + f \operatorname{curl}_{x'} \frac{\partial E}{\partial t} \\ 4\pi I_y &= \bar{\varepsilon}_2 \frac{\partial E_{y'}}{\partial t} + f \operatorname{curl}_{y'} \frac{\partial E}{\partial t} \\ 4\pi I_z &= \bar{\varepsilon}_3 \frac{\partial E_{z'}}{\partial t} + f \operatorname{curl}_{z'} \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

En cuanto á la fórmula 7 bis, cambiando los ejes será de la misma forma

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \overset{m}{I}_x &= \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial N_x}{\partial t} \\ 4\pi \overset{m}{I}_y &= \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial N_y}{\partial t} \\ 4\pi \overset{m}{I}_z &= \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial N_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Las fórmulas 4 y 5, 10 y 11, dan, definitivamente, las ecuaciones que ligán los vectores E y H .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\epsilon}_1}{C} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{t}{C} \text{curl}_x \frac{\partial E}{\partial t} &= \text{curl}_x H \\ \frac{\bar{\epsilon}_2}{C} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{t}{C} \text{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t} &= \text{curl}_y H \\ \frac{\bar{\epsilon}_3}{C} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{t}{C} \text{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t} &= \text{curl}_z H \\ \frac{1}{C} \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{f}{C^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= -\text{curl}_x E \\ \frac{1}{C} \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{f}{C^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= -\text{curl}_y E \\ \frac{1}{C} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{f}{C^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} &= -\text{curl}_z E \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

VIII

Eliminando en las fórmulas anteriores H_x , H_y , H_z , y poniendo

$$\bar{\epsilon}_1 E_x = u, \quad \bar{\epsilon}_2 E_y = v, \quad \bar{\epsilon}_3 E_z = w,$$

$$\frac{C^2}{\bar{\epsilon}_1} = a, \quad \frac{C^2}{\bar{\epsilon}_2} = b, \quad \frac{C^2}{\bar{\epsilon}_3} = c, \quad \frac{2f}{\bar{\epsilon}} = g, \quad \bar{\epsilon} = \frac{\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 + \bar{\epsilon}_3}{3}$$

se tiene, suponiendo en los términos que tienen f por factor, y ya que la diferencia entre $\bar{\epsilon}_1$, $\bar{\epsilon}_2$, $\bar{\epsilon}_3$ es prácticamente peque-

ña y f es también una constante pequeña, que podemos sin error apreciable sustituir los valores de $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ por su medio aritmético z .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a \Delta u - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right] + g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b \Delta u - \frac{\partial}{\partial y} \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right] + g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c \Delta u - \frac{\partial}{\partial z} \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right] + g \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] \end{aligned} \right\} (13)$$

Tales son las ecuaciones que definen el campo del vector u, v, w , en un medio que presente los caracteres que hemos ido definiendo. Ahora bien, la hipótesis electromagnética de la luz aplicada á este caso, consistirá en suponer, por ejemplo, que u, v, w , son las tres componentes del vector luz.

IX

Admitamos que el vector luz puede definirse por una vibración. Es decir, supongamos que sean

$u = \text{parte real de } Me^{i\varphi}, v = \text{parte real de } Ne^{i\varphi}, w = \text{parte real de } \Pi e^{i\varphi}$

$M = M + i M', N = N + i N', \Pi = P + i P'$

$$\varphi = \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{mx + ny + pz}{V} \right), \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{T}, \quad m^2 + n^2 + p^2 = 1$$

esto es, estudiemos la propagación por ondas planas en un medio cristalino dotado de la polarización rotatoria. Para un instante determinado $t = \text{const.}$, el lugar geométrico de los puntos en que el vector luz tiene la misma dirección y módulo, es un plano cuya normal tiene por cosenos directores m, n, p .

Como es fácil ver, el segmento de normal comprendido entre dos posiciones del plano correspondientes á los tiempos $t = \text{const.}, t = \text{const.} + T$, es VT , luego V representa la velocidad del plano ó onda plana según la normal.

La solución particular indicada más arriba, ¿en qué condiciones es aceptable? Sustituyamos los valores supuestos u, v, w , en las ecuaciones (13), y hallaremos las siguientes condiciones, en que para simplificar se ha escrito $\frac{gV}{\tau} = \sigma$:

$$\left. \begin{aligned} (V^2 - a) M &= -m(amM + bnN + cpII) + i\sigma(IIu - Np) \\ (V^2 - b) N &= -n(amM + bnN + cpII) + i\sigma(Mp - II m) \\ (V^2 - c) II &= -p(amM + bnN + cpII) + i\sigma(Nm - M n) \end{aligned} \right\} (14)$$

En la propagación por ondas planas que estamos estudiando, éstas son transversales, es decir que, en cada instante, el vector u, v, w es normal á la dirección de la normal á la onda plana, m, n, p . En efecto, diferenciando las tres primeras de las (12), la primera respecto á x , la segunda respecto á y , y la tercera respecto á z , se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0$$

Si suponemos inicialmente $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, en todo instante y lugar, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, de modo que

$$Mm + Nn + IIp = 0. \quad (15)$$

Observando que las ecuaciones (14) y (15) son lineales en M, N, II y $amM + bnN + cpII$, se tiene eliminando estas cantidades,

$$\begin{vmatrix} V^2 a & i\sigma p & -i\sigma n & m \\ -i\sigma p & V^2 b & i\sigma m & n \\ i\sigma n & -i\sigma m & -p & p \\ -m & -n & -p & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ó bien,

$$m^2(V^2 - b)(V^2 - c) + n^2(V^2 - c)(V^2 - a) + p^2(V^2 - a)(V^2 - b) = \sigma^2. \quad (16)$$

En esta fórmula, σ es una constante pequeña. Si es cero, se tiene la ecuación que da para valores de m, n, p , los dos correspondientes de V en el caso de cristales sin polarización rotatoria. En el caso que estamos indicando, también para cada valor de m, n, p , hay dos valores de V , lo que quiere decir que, dada una normal, hay dos ondas planas que se propagan según ella por velocidades dadas por

$$2V^2 - m^2(b+c) + n^2(a+c) + p^2(a+b) \pm \sqrt{(A+B-C)^2 - 4AB + 4\sigma^2}$$

siendo

$$A = m^2(b-c), \quad B = n^2(c-a), \quad C = p^2(a-b).$$

Si suponemos $a > b > c$, A y C son positivas y B negativa. Así es que dentro de la raíz cuadrada hay cantidades positivas tan sólo, de modo que no hay dirección ninguna de la normal para que los valores de V son iguales. Pero hay dos en que la diferencia es mínima. Estas direcciones se llaman ejes ópticos. Si designamos por o^2 y e^2 las dos raíces de V^2 , como σ es muy pequeña, la diferencia $o^2 - e^2$ es un mínimo cuando

$$A + B - C = 0 \quad AB = 0.$$

Los valores de m, n, p , para estas direcciones, serán

$$m^2 = \frac{a-b}{a-c}, \quad n = 0, \quad p^2 = \frac{b-c}{a-c}$$

y los valores de V^2

$$V^2 = b \pm \sigma, \quad V = \sqrt{b} \left(1 \pm \frac{\sigma}{2b} \right)$$

Si $\sigma = 0$, los dos valores de V correspondientes á las direcciones de los ejes ópticos son iguales. Al valor o de V correspondiente á una onda plana, corresponderá un valor de u , otro de v y w , y lo mismo al valor e . Suponiendo al vector localizado en un punto, veamos cuáles son las trayectorias del extremo del vector correspondientes á las dos raíces o^2 y e^2 de la ecuación en V^2 . Sea r el módulo del vector luz en el

caso de la onda correspondiente al valor o , y r' el módulo correspondiente al valor e .

La solución admitida para u, v, w , es:

$$\begin{aligned} u &= \text{parte real de } M e^{i\rho} = M \cos \rho - M' \sin \rho \\ v &= N \cos \rho - N' \sin \rho \\ w &= P \cos \rho - P' \sin \rho \end{aligned}$$

con las condiciones (14) y (15). Pero esta última (15), se puede desdoblar en

$$\begin{aligned} mM + nN + pP &= o, \\ mM' + nN' + pP' &= o; \end{aligned}$$

además, se puede escoger el origen de tiempo de tal modo que,

$$MM' + NN' + PP' = o,$$

y, de este modo, las tres direcciones cuyos cosenos son $\frac{M}{r}, \frac{N}{r}, \frac{P}{r}; \frac{M'}{r'}, \frac{N'}{r'}, \frac{P'}{r'}$ y m, n, p , son tres direcciones perpendiculares entre sí.

La trayectoria del extremo del vector luz es así una elipse, cuyos ejes tienen por direcciones las dos primeras direcciones anteriores. Proyectando, en efecto, los valores de u, v, w , según estas dos direcciones y la de la normal á la onda, se ve que esta última proyección es cero, y que eliminando ρ entre las dos primeras, se tiene una elipse referida á sus ejes.

En virtud de la ortogonalidad mutua entre los ejes de la elipse trayectoria del extremo del vector luz y la normal á la onda, se tendrá

$$\begin{aligned} \frac{M'}{r'} &= \frac{Pn - Nr}{r}; & \frac{M}{r} &= -\frac{P'n - N'r}{r'} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

de donde, y por las ecuaciones (14), separando en ellas la parte real y la imaginaria,

$$\left. \begin{aligned} \left(V^2 - a - \sigma \frac{r'}{r} \right) M &= -m (amM + bnN + cpP) \\ \left(V^2 - b - \sigma \frac{r'}{r} \right) N &= -n (amM + bnN + cpP) \\ \left(V^2 - c - \sigma \frac{r'}{r} \right) P &= -p (amM + bnN + cpP) \end{aligned} \right\} (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(V^2 - a - \sigma \frac{r}{r'} \right) M' &= -m (amM' + bnN' + cpP') \\ \left(V^2 - b - \sigma \frac{r}{r'} \right) N' &= -n (amM' + bnN' + cpP') \\ \left(V^2 - c - \sigma \frac{r}{r'} \right) P' &= -p (amM' + bnN' + cpP') \end{aligned} \right\} (18)$$

De las (17), multiplicando por M , N , P , respectivamente y sumando, resulta

$$V^2 - \left(a \frac{M^2}{r^2} + b \frac{N^2}{r^2} + c \frac{P^2}{r^2} \right) = \sigma \frac{r'}{r}$$

Análogamente, de las (18)

$$V^2 - \left(a \frac{M'^2}{r'^2} + b \frac{N'^2}{r'^2} + c \frac{P'^2}{r'^2} \right) = \sigma \frac{r}{r'}$$

y añadiendo las dos últimas, puesto que

$$\frac{M^2}{r^2} + \frac{M'^2}{r'^2} = m^2 = n^2 + p^2, \text{ etc.,}$$

$$2V^2 - a(n^2 + p^2) - b(m^2 + p^2) - c(m^2 + n^2) = \sigma \left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r} \right)$$

Si designamos á $\frac{r}{r'}$ por K , y por K_o si se trata del valor correspondiente al valor o de V y K_e al e de V , puesto que por (16),

$$a(n^2 + p^2) + b(p^2 + m^2) + c(m^2 + n^2) = o^2 + e^2$$

$$\sigma \left(K_o + \frac{1}{K_o} \right) = o^2 - e^2, \quad \sigma \left(K_e + \frac{1}{K_e} \right) = e^2 - o^2$$

y añadiendo estas dos

$$(K_o + K_e) (1 + K_o K_e) = 0$$

Por tanto, $K_o = -K_e$ ó $K_o = -\frac{1}{K_e}$. Esto significa que las dos elipses correspondientes á los dos valores de V , ó coinciden ó están, por decirlo así, cruzadas. En todo caso, descritas en sentido contrario. Pero si hubiéramos supuesto $\sigma = 0$, hubiéramos hallado que las elipses degeneran en dos rectas perpendiculares, luego por continuidad admitiremos como solución única $K_o = -\frac{1}{K_e}$.

Para aquellos puntos para los que $o^2 - e^2 = \pm 2\sigma$, que son los ejes ópticos, $K_o = \pm 1$, $K_e = \mp 1$ y las elipses se convierten en círculos.

Los dos valores o^2 y e^2 de V^2 que da la fórmula (16), se pueden escribir introduciendo los ángulos g y g' que la normal á la onda forma con los ejes ópticos, del siguiente modo: (*)

$$\begin{aligned} 2o^2 &= a+c + (a-c) \cos g \cos g' + \sqrt{(a-c)^2 \sin^2 g \sin^2 g' + 4\sigma^2} \\ 2e^2 &= a+c + (a-c) \cos g \cos g' - \sqrt{(a-c)^2 \sin^2 g \sin^2 g' + 4\sigma^2} \end{aligned} \quad (19)$$

y, además,

$$2\sigma K_o = -\frac{2\sigma}{K_e} = (a-c) \sin g \sin g' + \sqrt{(a-c)^2 \sin^2 g \sin^2 g' + 4\sigma^2} \quad (20)$$

Si el cristal fuera de tal naturaleza que $\bar{\epsilon}_2 = \bar{\epsilon}_3$, por ejemplo, los ejes ópticos se confunden en la dirección única del eje x . En este caso, $g = g'$. Las aplicaciones que más adelante se hacen de la teoría, corresponden á la propagación de una onda plana en un cuarzo tallado en placa y normalmente á su eje óptico; el cuarzo es de los cristales para los que $\bar{\epsilon}_2 = \bar{\epsilon}_3$. Sea g el ángulo que la normal á la onda forma con la dirección del eje óptico. Dada la normal se propagan

(*) Dejamos que el lector se ejercite en deducir estas fórmulas.

dos ondas, cuyas velocidades vienen dadas por las fórmulas

$$2o^2 = a + c + (a - c) \cos^2 g + V(a - c)^2 \sin^4 g + 4\sigma^2$$

$$2e^2 = a + c + (a - c) \cos^2 g - V(a - c)^2 \sin^4 g + 4\sigma^2$$

y, además,

$$2\sigma K_o = - \frac{2\sigma}{K_e} = (a - c) \sin^2 g + V(a - c)^2 \sin^4 g + 4\sigma^2$$

Supondremos también que la normal á la onda plana forma un ángulo pequeño con la dirección del eje del cristal. Es decir, nos limitaremos á estudiar la propagación por ondas planas en la proximidad del eje.

X

Se llama superficie de onda á la envolvente de todas las ondas planas en un instante determinado, que un segundo antes pasaban por un punto que es su centro. Con lo dicho hay elementos suficientes para deducir su ecuación, que desde luego es complicada. Nosotros introducimos aquí la noción de superficie de onda para poder hablar de la construcción de las normales á las ondas refractadas si se nos da la normal de la onda incidente. Si una onda plana incide en la superficie plana de separación de dos medios, aire y cuarzo por ejemplo, escogeremos un punto *A* en la superficie límite de separación, por el cual pasa la onda incidente en un instante dado. La misma onda, al cabo de un segundo, será tangente á la superficie de onda cuyo centro es el punto considerado superficie de onda en el medio aire, por ejemplo. Imaginemos este plano tangente á la superficie de ondas dicha. La onda plana en el aire se refractará parcialmente también. Para construir las ondas planas refractadas, desde la recta de intersección del plano anterior con la separación del aire y cuarzo, tracemos los planos tangentes á la superficie de

onda en el cuarzo, cuyo centro corresponda al punto *A*. Habrá, en general, cuatro planos tangentes, pero sólo dos representarán ondas refractadas. Las normales desde el centro á estas dos ondas son las direcciones de propagación según la normal de las ondas planas que en el cuarzo engendra la onda luminosa que, propagándose en el aire, se encuentra con la superficie del cuarzo. Las amplitudes de los vectores luz en el cuarzo correspondientes á las dos ondas, son funciones de la amplitud y ángulo de incidencia de la onda plana incidente, pero nosotros prescindiremos de las modificaciones que la amplitud, y aun la naturaleza de la vibración, experimentan al atravesar la superficie de separación aire-cuarzo. Además, como estudiamos la propagación en la proximidad de la normal á la placa, vamos á suponer que las dos normales anteriores difieren poco, ó mejor, que son una misma, de modo que las dos ondas planas son las correspondientes á una misma normal, y, por tanto, las velocidades con que se propagan según la normal serán *o* y *e*. Y llamando *l* al camino que recorren, *g* al ángulo de refracción y *h* al espesor,

$$l = \frac{h}{\cos g}$$

y la diferencia de fase al salir del cuarzo, en los valores de *u*, *v*, *w*, correspondientes á *o* y *e* valdrá,

$$\delta = \frac{2\pi}{T} \frac{h}{\cos g} \left\{ \frac{1}{e} - \frac{1}{o} \right\}$$

ó bien, en virtud de las fórmulas del párrafo anterior, suponiendo *a* — *c* pequeño, y quedándonos con los términos de segundo grado en *sen g*,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi}{T} \frac{h}{2} a^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{2} \text{sen}^2 g \right) \sqrt{(a-c)^2 \text{sen}^4 g + 4\sigma^2} = \\ &= \frac{2\pi}{T} h a^{-3/2} \sigma \left[1 + \frac{1}{2} \text{sen}^2 g \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Para la dirección del eje

$$\delta_o = \frac{2\pi}{T} h a^{-3/2} \sigma = \frac{8\pi^2 h f}{\lambda^2}$$

siendo la longitud de onda en el vacío $\lambda = CT$.

Cuando en una dirección se propagan dos vibraciones circulares, en que el movimiento circular tiene lugar en distinto sentido en todo momento, la resultante es una vibración rectilínea. Pero si una de las vibraciones circulares sufre un retardo δ_o , la vibración rectilínea resultante ha experimentado una rotación de $\frac{1}{2} \delta_o$. Aplicándolo al cuarzo, si suponemos que se propaga una onda de luz polarizada rectilíneamente (ó sea en que el vector u , v , w , tiene una dirección fija) cuya normal coincide con el eje, al salir del cuarzo el plano de polarización habrá girado $\frac{1}{2} \delta_o$.

XI

Lo que sucede, pues, al incidir una onda plana en una lámina de cuarzo, onda plana cuya polarización supondremos elíptica para estudiar el caso más general, es lo siguiente. La vibración elíptica de la onda incidente se descompone en dos vibraciones elípticas dextrogira una y levogira la otra, cuyos ejes tienen direcciones, función del ángulo que forma la normal á las ondas planas refractadas con el eje, ángulo que hemos llamado g . Además, la razón de los ejes K_o ó K_e es también función de g . Dado, por tanto, g , conoceremos las componentes respecto de un eje coordenado de las vibraciones elípticas, expresando que la suma de las referentes á las dos ondas refractadas es igual á la componente sobre el mismo eje de la vibración elíptica incidente. Como g es pequeño, supondremos que representamos las vibraciones en el plano normal á la placa de cuarzo, y que hacemos caso omiso de la componente en esta dirección ó sea de u , si la

normal á la placa la consideramos, como hasta aquí, confundida con el eje x .

La vibración elíptica primitiva la podemos suponer dada por sus componentes sobre los ejes

$$\xi = \cos \beta' e^{i\omega t}, \quad \eta = -\sin \beta' e^{i\omega t}$$

en que $\beta' < \frac{\pi}{4}$, y si es $\begin{cases} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{cases}$ representa una vibración $\begin{cases} \text{levógira} \\ \text{dextrogira} \end{cases}$. Aunque venga en forma imaginaria, téngase siempre presente que se quiere expresar la parte real de ξ y η .

Llamemos ξ_1, η_1 y ξ_2, η_2 á las componentes de las dos vibraciones elípticas en el cuarzo, que desde luego serán de la forma

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_1 \cos \beta e^{i\omega t}, & \eta_1 &= -i c_1 \sin \beta e^{i\omega t} \\ \xi_2 &= c_2 \cos \beta e^{i\omega t}, & \eta_2 &= i c_2 \sin \beta e^{i\omega t} \end{aligned}$$

en que β es menor que $\frac{\pi}{4}$ y $\begin{cases} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{cases}$ según que, por ejemplo, sea la placa $\begin{cases} \text{levógira} \\ \text{dextrogira} \end{cases}$. Una placa se llama así según que la rotación del plano de polarización ^(*) para una onda que se propague por el eje, sea hacia la $\begin{cases} \text{izquierda} \\ \text{derecha} \end{cases}$. Si llamamos α' al ángulo que el eje mayor de la elipse primitiva que representaremos simbólicamente por (ξ, η) forma con el eje mayor de (ξ_1, η_1) , por ejemplo, se tendrá,

$$\begin{aligned} c_1 \cos \beta + c_2 \sin \beta &= \cos \alpha' \cos \beta' + i \sin \alpha' \sin \beta' \\ c_1 \sin \beta - c_2 \cos \beta &= \cos \alpha' \sin \beta' + i \sin \alpha' \cos \beta' \end{aligned}$$

ó bien,

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos \alpha' \cos (\beta - \beta') + i \sin \alpha' \sin (\beta + \beta') \\ c_2 &= \cos \alpha' \sin (\beta - \beta') - i \sin \alpha' \cos (\beta + \beta') \end{aligned}$$

Al recorrer la placa las dos ondas polarizadas elípticamente, sufre una, respecto de la otra, un retraso ε . Así es que si llamamos al χ ángulo que forma el eje mayor de (ξ_1, η_1) con la dirección «exclusiva» del analizador ^(**), la compo-

(*) Llamaremos plano de polarización á un plano paralelo al eje y normal á x, y cuando éste es rectilíneo.

(**) Un analizador es un sistema de cristales que no permite el paso de más ondas luminosas que aquellas en que el vector u, v, w , tiene componente según cierta dirección, que llamaremos «exclusiva». Naturalmente al salir del analizador, de la vibración de u, v, w , sólo es útil la componente sobre la dirección exclusiva. Esta dirección la suponemos perpendicular al eje del cuarzo.

nente útil del vector v , w , al salir del analizador será, representando por ε cierta constante cuyo significado es fácil ver,

$$\equiv = \left\{ \begin{aligned} &(c_1 \cos \beta + c_2 \sin \beta e^{-i\delta}) \cos \gamma - \\ &- i(c_1 \sin \beta - c_2 \cos \beta e^{-i\delta}) \sin \gamma \end{aligned} \right\} e^{i(\tau t - \varepsilon)}$$

Esto representa un movimiento oscilatorio de la forma $A \cos \tau t + B \sin \tau t$. Este movimiento puede representar el de un punto atraído por un centro en función de la distancia, sin velocidad inicial. La energía de este movimiento, suma de la potencial y cinética, vale $A^2 + B^2$. Análogamente, definiremos como energía Z en la variación del vector luz á la expresión $A^2 + B^2$. Para obtener $A^2 + B^2$ multiplicaremos $\equiv$ por su expresión conjugada, obtenida cambiando i en $-i$. Resulta así, si c'_1 y c'_2 son las expresiones conjugadas de c_1 y c_2

$$\begin{aligned} Z = & \left\{ c_1 c'_1 \cos^2 \beta + c_2 c'_2 \sin^2 \beta + (c_1 c'_2 e^{i\delta} + c'_1 c_2 e^{-i\delta}) \sin \beta \cos \beta \right\} \cos^2 \gamma \\ & + \left\{ c_1 c'_1 \sin^2 \beta + c_2 c'_2 \cos^2 \beta - (c_1 c'_2 e^{i\delta} + c'_1 c_2 e^{-i\delta}) \sin \beta \cos \beta \right\} \sin^2 \gamma \\ & - i(c_1 c'_2 \cos^2 \beta e^{i\delta} - c'_1 c_2 e^{-i\delta}) \sin \gamma \cos \gamma \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} c_1 c'_1 &= \cos^2 \alpha' \cos^2 (\beta - \beta') + \sin^2 \alpha' \sin^2 (\beta + \beta') \\ c_2 c'_2 &= \cos^2 \alpha' \sin^2 (\beta - \beta') + \sin^2 \alpha' \cos^2 (\beta + \beta') \\ c_1 c'_2 &= \cos^2 \alpha' \sin (\beta - \beta') \cos (\beta - \beta') - \sin^2 \alpha' \sin (\beta + \beta') \cos (\beta + \beta') \\ &\quad + i \sin \alpha' \cos \alpha' \cos 2\beta \\ c'_1 c_2 &= \cos^2 \alpha' \sin (\beta - \beta') \cos (\beta - \beta') - \sin^2 \alpha' \sin (\beta + \beta') \cos (\beta + \beta') \\ &\quad - i \sin \alpha' \cos \alpha' \cos 2\beta' \end{aligned}$$

se tendrá

$$\begin{aligned} Z = & \left\{ \cos^2 \alpha' \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha' \sin^2 \beta' - \sin 2\alpha' \cos 2\beta' \sin 2\beta \sin \delta/2 \cos \delta/2 \right\} \cos^2 \gamma \\ & - \left\{ [\cos^2 \alpha' \sin 2(\beta - \beta') - \sin^2 \alpha' \sin 2(\beta + \beta')] \sin 2\beta \sin^2 \delta/2 \right\} \cos^2 \gamma \\ & + \left\{ \cos^2 \alpha' \sin^2 \beta' + \sin^2 \alpha' \cos^2 \beta + \sin 2\alpha' \cos 2\beta' \sin 2\beta \sin \delta/2 \cos \delta/2 \right\} \sin^2 \gamma \\ & - \left\{ [\cos^2 \alpha' \sin 2(\beta - \beta') \sin^2 \alpha' \sin 2(\beta + \beta')] \sin 2\beta \sin^2 \delta/2 \right\} \sin^2 \gamma \\ & + \left\{ \sin 2\alpha' \cos 2\beta + 2[\cos^2 \alpha' \sin 2(\beta - \beta') - \sin^2 \alpha' \sin 2(\beta + \beta')] \right\} \sin \gamma \cos \gamma = \\ & \left\{ \sin \delta/2 \cos \delta/2 - 2 \sin 2\alpha' \cos 2\beta' \sin^2 \delta/2 \right\} \sin \gamma \cos \gamma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos^2 \beta' \cos^2 (\chi - \alpha') + \sin^2 \beta' \sin^2 (\chi - \alpha') + \cos 2 \beta' \times \\
 &[\sin 2 \beta \sin 2 (\chi - \alpha') \sin \delta'_2 \cos \delta/2 - (\cos 2 \alpha' \cos 2 \chi \sin^2 \beta + 2 \alpha' \sin 2 \chi) \\
 &\sin^2 \delta/2] + \sin 2 \beta' \cos 2 \beta [\cos 2 \chi \sin 2 \beta \sin^2 \delta/2 - \sin 2 \chi \sin \delta/2 \cos \delta/2] = \\
 &= \sin^2 \beta' + \cos 2 \beta' \left\{ \begin{aligned} &[\cos (\chi - \alpha') \cos \delta/2 + \sin (\chi - \alpha') \sin 2 \beta \sin \delta/2] \\ &+ \cos^2 (\chi - \alpha') \cos^2 2 \beta \sin^2 \delta/2 \end{aligned} \right\} \\
 &+ \sin 2 \beta' \cos 2 \beta (\cos 2 \chi \sin 2 \beta \sin^2 \delta/2 - \sin 2 \chi \sin \delta/2 \cos \delta/2). \quad (22)
 \end{aligned}$$

XII

Aplicaremos la teoría anterior al caso indicado en el párrafo I. Un polarizador, aparato igual á un analizador, nos dará ondas luminosas en que u , v , w tiene una dirección fija. La luz, polarizada rectilíneamente al atravesar la primera lámina de cuarzo, se descompondrá en dos vibraciones elípticas que, habida en cuenta su diferencia de fase, al salir del cuarzo formarán una vibración elíptica. Esta atravesará la lámina de mica que sigue al cuarzo. La mica es un cristal birrefringente, en cuyo seno se propaga la luz según leyes que se deducen de las explicadas en los párrafos anteriores, anulando la constante que caracteriza la polarización rotatoria, por ejemplo, f . Nosotros admitiremos aproximadamente que descompuesta la vibración elíptica que llega á la lámina de mica en sus componentes según dos direcciones determinadas, el efecto de la lámina es dar á una, respecto de la otra, un retardo en camino recorrido de $\frac{1}{4} \lambda$ ó $\frac{1}{2} \lambda$, según que la mica interpuesta sea de las que se llaman de un cuarto de onda ó un medio de onda. En rigor esto no tiene lugar sino para las ondas que se propagan de tal modo, que la normal coincide con la perpendicular á la lámina de mica. El espesor l de esta, necesario para ello, vendrá dado por

$$\frac{2\pi l}{T} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{o} \right) = \frac{2\pi}{4}$$

siendo o y e las velocidades normales de las ondas refractadas en la mica, y en la dirección de la perpendicular á la

placa. Al salir de la mica la vibración elíptica así modificada, se convierte en otras dos vibraciones elípticas al entrar en el segundo cuarzo. Al emerger sólo son útiles las componentes de la vibración sobre la dirección «exclusiva» del analizador.

Sean:

$e^{i\tau t}$, la vibración al entrar en el primer cuarzo la onda plana que emerge del polarizador formando con el eje del microscopio un ángulo determinado, $tg\beta = K_0$;

α , el ángulo que la vibración del vector luz á la salida del polarizador forma con la dirección del eje mayor de una de las elipses en el cuarzo que simbólicamente, como en uno de los párrafos anteriores, representaremos por $\{\xi_1 \eta_1\}$;

γ , el ángulo que el vector luz emerge del polarizador, forma con una de las direcciones de que se habló en la mica;

χ , el ángulo que la dirección exclusiva del analizador forma con el eje mayor $(\xi_1 \eta_1)$;

θ , el ángulo que forma el eje mayor de la elipse que define el movimiento vibratorio del vector luz, á la salida de la mica con la dirección principal en ésta á que se refirió γ .

Las dos vibraciones elípticas en el primer cuarzo, en que se descompone la rectilínea que emerge del polarizador, serán, según lo dicho en el párrafo anterior, $(\beta = 0)$, $(\alpha' = \alpha)$

$$\xi_1 = [\cos \alpha \cos \beta + i \sin \alpha \sin \beta] \cos \beta e^{i\tau t}$$

ó, abreviadamente,

$$\xi_1 = G_1 \cos \beta e^{i\tau t}$$

$$\eta_1 = - [\cos \alpha \cos \beta + i \sin \alpha \sin \beta] i \sin \beta e^{i\tau t} = - G_1 i \sin \beta e^{i\tau t}$$

$$\xi_2 = [\cos \alpha \sin \beta - i \sin \alpha \cos \beta] \sin \beta e^{i\tau t} = G_2 \sin \beta e^{i\tau t}$$

$$\eta_2 = [\cos \alpha \sin \beta - i \sin \alpha \cos \beta] i \cos \beta e^{i\tau t} = i \cos \beta G_2 e^{i\tau t}$$

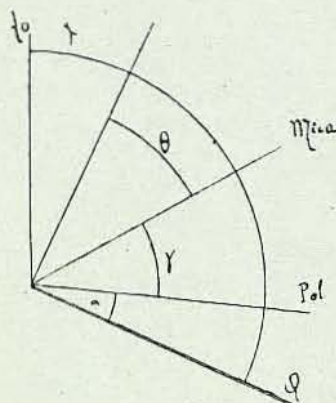


Fig. 4

Esta última experimenta al atravesar el cuarzo, como ya hemos dicho, un retraso $e^{-i\delta}$. Designaremos por $\underline{\xi}_2$, $\underline{\eta}_2$ á las vibraciones así modificadas, es decir, en vez de G_2 se entenderá $G_2 e^{-i\delta}$. Así, pues, y según las dos direcciones señaladas de la mica, habrá las dos vibraciones (ε_1 es una constante de fase)

$$E = \left[(\underline{\xi}_1 + \underline{\xi}_2) \cos (\gamma - \alpha) + (\underline{\eta}_1 + \underline{\eta}_2) \sin (\gamma - \alpha) \right] e^{i\varepsilon_1}$$

$$F = \left[-(\underline{\xi}_1 + \underline{\xi}_2) \sin (\gamma - \alpha) + (\underline{\eta}_1 + \underline{\eta}_2) \cos (\gamma - \alpha) \right] e^{i\varepsilon_1}$$

que definen una vibración elíptica.

En la mica, experimenta F un retraso. Supongamos la de $1/2$ onda, F se convierte en $F e^{-i\pi} = F'$. Así, representando por R la amplitud de la vibración E , por j su fase y por R' y l la amplitud y fase de la vibración F' ,

$$E = R e^{ij} e^{i\tau t}$$

$$F' = R' e^{li} e^{i\tau t}$$

Para poder aplicar la fórmula hallada en el párrafo anterior, correspondiente á la entrada y propagación de una onda polarizada elípticamente al través de un cuarzo, hace falta conocer la relación entre los ejes de la elipse y la posición del eje mayor de ésta. Eliminando el tiempo entre los valores de E y F , se tiene la ecuación de la elipse. La posición y razón de los ejes de la misma se hallarán por las fórmulas siguientes (*):

$$tg \sigma = \frac{R'}{R}$$

$$tg 2\theta = \cos (l - j) tg 2\sigma$$

$$\sin 2\beta' = \sin (l - j) \sin 2\sigma$$

contando θ en sentido contrario del de las agujas de un reloj, ó sentido positivo. Se supone siempre $\beta' < \frac{\pi}{4}$

(*) El lector puede deducir estas fórmulas, que se encuentran en algunos tratados de Geometría analítica ó de Mecánica.

Llamando ε_2 á una nueva constante de fase, las componentes según los ejes de la vibración elíptica á la salida de la mica, serán

$$\begin{aligned}\Xi &= G \cos \beta' e^{i(\tau t + \varepsilon_2)}, \\ H &= i G \sin \beta' e^{i(\tau t + \varepsilon_2)}.\end{aligned}$$

Respecto de G debemos observar que representada por G^2 la energía del movimiento vibratorio, como debe conservarse íntegra la que tenía la vibración á la salida del polarizador, $G = 1$.

La vibración elíptica últimamente considerada se descompondrá en dos, como antes la lineal, de modo que llamando (Ξ_1, H_1) , (Ξ_2, H_2) á las componentes de las vibraciones levogiras ó dextrogiras, según sus ejes, por ser el segundo cuarzo enteramente igual al primero en espesor y signo,

$$\begin{aligned}\Xi_1 &= M_1 \cos \beta e^{i(\tau t + \varepsilon_1)} \\ H_1 &= -i M_1 \sin \beta e^{i(\tau t + \varepsilon_1)} \\ \Xi_2 &= M_2 \sin \beta e^{i(\tau t + \varepsilon_1)} \\ H_2 &= i M_2 \cos \beta e^{i(\tau t + \varepsilon_1)}\end{aligned}$$

en donde poniendo $\alpha' = \alpha + \gamma + \theta$,

$$\begin{aligned}M_1 &= \cos \alpha' \cos (\beta - \beta') + i \sin \alpha' \sin (\beta + \beta') \\ M_2 &= \cos \alpha' \sin (\beta - \beta') - i \sin \alpha' \cos (\beta + \beta')\end{aligned}$$

La (Ξ_2, H_2) experimenta un retraso $e^{-i\delta}$, de modo que al salir del cuarzo se habrá convertido en $(\Xi_2, \bar{H}_2)$ en que las rayas superiores indican que M_2 se supone sustituida por $M_2 e^{-i\delta}$.

Por fin, de las vibraciones elípticas Ξ_1, H_1 y $(\Xi_2, \bar{H}_2)$, no quedan más que sus componentes sobre el analizador, de modo que al salir de éste la intensidad es, según vimos al final del párrafo anterior,

$$\begin{aligned}Z &= \sin^2 \beta + \cos 2\beta' \times \\ &\left\{ [\cos (\chi - \alpha - \gamma - \theta) \cos \delta/2 + \sin (\chi - \alpha - \gamma - \theta) \sin 2\beta \sin \delta/2]^2 \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 (\chi + \alpha + \gamma + \theta) \cos^2 2\beta \sin^2 \delta/2 \right. \\ &\quad \left. + \sin 2\beta' \cos 2\beta [\cos 2\chi \sin 2\beta \sin 2\delta/2 - \sin 2\chi \sin \delta/2 \cos \delta/2] \right\}\end{aligned}$$

XIII

Vamos á aplicar las fórmulas anteriores al caso de ser la mica de media onda.

Se tendrá, como ya se ha dicho,

$$F' = Fe^{-i\pi} = -F$$

$$\text{y } Re^{ij} = R \cos j + i R \sin j$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\cos \alpha \cos^2 \beta + \frac{i}{2} \sin \alpha \sin 2\beta + \\ &+ \cos \alpha \sin^2 \beta e^{-i\delta} - \frac{i}{2} \sin \alpha \sin 2\beta e^{-i\delta} \end{aligned} \right\} \cos (\gamma + \alpha)$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} &-\frac{i}{2} \cos \alpha \sin 2\beta + \sin \alpha \sin^2 \beta + \frac{i}{2} \cos \alpha \sin 2\beta e^{-i\delta} \\ &+ \sin \alpha \cos^2 \beta e^{-i\delta} \end{aligned} \right\} \sin (\gamma + \alpha)$$

$$R \cos j =$$

$$= \left[\cos \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin^2 \beta \cos \delta - \frac{1}{2} \sin \alpha \sin 2\beta \sin \delta \right] \cos (\gamma + \alpha)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\sin \alpha \sin^2 \beta + \frac{1}{2} \cos \alpha \sin 2\beta + \sin \delta + \sin \alpha \cos^2 \beta \cos \delta \right] \sin (\gamma + \alpha)$$

que escribiremos abreviadamente

$$R \cos j = [1] \cos (\gamma + \alpha) + [2] \sin (\gamma + \alpha)$$

$$R \sin j =$$

$$\left[\frac{1}{2} \sin \alpha \sin 2\beta - \cos \alpha \sin^2 \beta \sin \delta - \frac{1}{2} \sin \alpha \sin 2\beta \cos \delta \right] \cos (\gamma + \alpha) +$$

$$\left[-\frac{1}{2} \cos \alpha \sin 2\beta + \frac{1}{2} \cos \alpha \sin 2\beta \cos \delta \sin \alpha \cos^2 \beta \sin \delta \right] \sin (\gamma + \alpha)$$

ó, abreviadamente,

$$R \sin j = [3] \cos (\gamma + \alpha) + [4] \sin (\gamma + \alpha)$$

de donde

$$tgj = \frac{[3] \cos(\gamma + \alpha) + [4] \sin(\gamma + \alpha)}{[1] \cos(\gamma + \alpha) + [2] \sin(\gamma + \alpha)}$$

$$R^2 = [1] \cos(\gamma + \alpha) + [2] \sin(\gamma + \alpha)]^2 + [3] \cos(\gamma + \alpha) + [4] \sin(\gamma + \alpha)]^2$$

Análogamente

$$R' \cos l' = [1] \sin(\gamma + \alpha) - [2] \cos(\gamma + \alpha)$$

$$R' \sin l' = [3] \sin(\gamma + \alpha) - [4] \cos(\gamma + \alpha)$$

y, por tanto,

$$tg l' = \frac{[3] \sin(\gamma + \alpha) - [4] \cos(\gamma + \alpha)}{[1] \sin(\gamma + \alpha) - [2] \cos(\gamma + \alpha)}$$

$$R'^2 = [1] \sin(\gamma + \alpha) - [2] \cos(\gamma + \alpha)]^2 + [3] \sin(\gamma + \alpha) - [4] \cos(\gamma + \alpha)]^2$$

Para el centro del campo ó para ondas propagándose en la dirección del eje del cuarzo, $\beta = 45^\circ$. Para otros puntos $\beta = 45 + \Delta$, siendo Δ una cantidad negativa. Desarrollando los senos y cosenos de β en función de Δ ,

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \Delta - \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta^3}{2 \cdot 3} + \frac{\Delta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots \right)$$

$$\sin 2\beta = 1 - 2\Delta^2 + \frac{2}{3} \Delta^4 \dots$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{2} \left(1 + 2\Delta - \frac{4}{3} \Delta^3 \dots \right)$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{\Delta^3} + \frac{\Delta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots \right)$$

$$\cos 2\beta = -2\Delta + \frac{4}{3} \Delta^3 \dots$$

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{2} \left[1 - 2\Delta + \frac{3}{4} \Delta^3 \dots \right]$$

$$\cos^2 2\beta = 4\Delta^2 - \frac{16}{3} \Delta^4 \dots$$

Consideremos, por ejemplo, el caso en que $\gamma = 90$, $\chi - \alpha = 90$. Quedándonos con los términos de segundo grado en Δ .

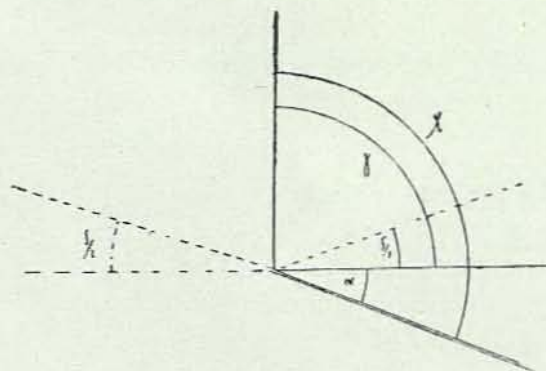


Fig. 5

$$\begin{aligned} R \cos j &= \frac{1}{2} \sin \delta [1 + 2 \Delta \sin 2 \alpha \operatorname{tg} \delta/2 - 2 \Delta^2] \\ R \sin j &= - \sin^2 \delta/2 [1 - 2 \Delta \sin 2 \alpha \cos \delta/2 - 2 \Delta^2] \\ R' \cos l &+ \cos^2 \delta/2 [1 - 2 \Delta \operatorname{tg}^2 \delta/2 \cos 2 \alpha] \\ R' \sin l &= - \frac{1}{2} \sin \delta [1 - 2 \Delta \cos 2 \alpha] \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} j &= - \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} [1 - 2 \Delta \sin 2 \alpha [\operatorname{tg} \delta/2 + \cos \delta/2]] \\ j &= - \frac{\delta}{2} + 2 \Delta \sin 2 \alpha \\ \operatorname{tg} l &= - \operatorname{tg} \delta/2 [1 + 2 \Delta \cos 2 \alpha [1 + \operatorname{tg}^2 \delta/2]] \\ l &= - \delta/2 - 2 \Delta \cos 2 \alpha \operatorname{tg} \delta/2 \\ l - j &= - 2 (\cos 2 \alpha \operatorname{tg} \delta/2 + \sin 2 \alpha) \Delta \\ R &= \pm \sin \frac{\delta}{2} \quad R' = \pm \cos \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

de esta doble determinación tomaremos

$$\begin{aligned} R &= \sin \delta/2, \quad R' = \cos \delta/2 \\ \operatorname{tg} \sigma &= \frac{R'}{R} = \cos \delta/2 \operatorname{tg} (90 - \delta/2); \quad \sigma = 90 - \delta/2 \\ \operatorname{tg} 2 \theta &= \cos (l - j) \operatorname{tg} 2 \sigma = \operatorname{tg} (180 - \delta) \\ \theta &= 90 - \delta/2 \end{aligned}$$

La determinación de signos al extraer la raíz cuadrada, así como el número de semicircunferencias que deben añadirse á un arco cuya tangente se conoce para determinar el arco, los obtenemos fácilmente observando lo que ocurre en la propagación de la onda, cuya normal coincide con el eje del cuarzo. Al salir, en efecto, del primer cuarzo, la dirección del vector v , w ha girado $\delta/2$ como rotación del plano de polarización, y como la dirección principal (1) de la mica se supone á 90° de la dirección exclusiva del polarizador, el ángulo que la dirección de v , w al entrar en la mica forma con la principal de esta, vale $90 - \delta/2$. Pero como á la componente de v , w sobre la otra dirección principal componente F le ocurre el retraso $e^{-i\pi}$, se cambia la componente F por $-F$, es decir, que el vector v , w se cambia por su simétrico respecto de la dirección principal de la mica (1). Así se comprende que si $\delta/2$ es $< 90^\circ$, $-F$ tenga que ser positivo y valga $(90 - \delta/2)$. Los valores de l y j se han determinado con estas condiciones también

$$\begin{aligned}\sin 2\beta' &= \sin(l-j) \sin 2\sigma = -2 \sin \delta (\cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta/2 + \sin 2\alpha) \Delta \\ \beta' &= -\Delta \sin \delta (\cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta/2 + \sin 2\alpha) = -2 \Delta \sin \delta/2 \sin(2\alpha + \delta/2).\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión de la intensidad será esta:

$$\begin{aligned}Z &= 4 \Delta^2 \sin^2 \delta/2 \sin^2(2\alpha + \delta/2) + 4 \Delta^2 \sin^2 \delta/2 \sin^2(2\alpha - \delta/2) + \\ &+ 8 \Delta^2 \sin \delta/2 \sin(2\alpha + \delta/2) [-\cos 2\alpha \sin^2 \delta/2 + \sin 2\alpha \sin \delta/2 \cos \delta/2] \\ &= (2 \sin \delta \sin 2\alpha)^2 \Delta^2.\end{aligned}$$

Hay, pues, dos direcciones con obscuridad correspondientes á $\alpha = 0$, y $\alpha = \frac{\pi}{2}$, es decir, coincidiendo con las direcciones exclusivas del polarizador y analizador. Para $\Delta = 0$, $Z = 0$, lo cual era de esperar, puesto que la vibración rectilínea que entra en el primer cuarzo es desviada por éste un cierto ángulo $\delta/2$. Cambia la mica, como hemos dicho, esta desviación por la simétrica respecto á la dirección princi-

pal (1), y al atravesar el segundo cuarzo del mismo signo que el primero pasa á tener el vector luz v, w , la misma dirección que el polarizador, y, por tanto, normal al analizador. Luego la onda central no pasa al través del sistema.

La suma de las intensidades en dos direcciones perpendiculares, por ejemplo, la exclusiva del analizador y su perpendicular, siendo ambas normales al eje del cuarzo, ha de ser igual á 1, luego la intensidad, en el caso de ser paralelas las secciones exclusivas del polarizador y analizador, será

$$Z = 1 - (2 \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} 2\alpha)^2 \Delta^2$$

Para el caso en que $\gamma = 45$, $\chi - \alpha = 90^\circ$

$$R \cos j = \cos \frac{90 - \delta}{2} \cos \delta/2 - 2 \Delta \cos (45 + 2\alpha) \operatorname{sen} \delta/2$$

$$R \operatorname{sen} j = - \cos \frac{90 - \delta}{2} \operatorname{sen} \delta/2 - 2 \Delta \operatorname{sen} \delta/2 \cos \delta/2 \cos (45 + 2\alpha)$$

$$R' \cos l = \operatorname{sen} \frac{90 - \delta}{2} \cos \delta/2 - 2 \Delta \operatorname{sen} (45 + 2\alpha) \operatorname{sen}^2 \delta/2$$

$$R' \operatorname{sen} l = - \operatorname{sen} \frac{90 - \delta}{2} \operatorname{sen} \delta/2 - 2 \Delta \operatorname{sen} \delta/2 \cos \delta/2 \operatorname{sen} (45 + 2\alpha)$$

$$j = - \delta/2 - \Delta^2 \frac{\operatorname{sen} \delta/2 \operatorname{sen} (45 - 2\alpha)}{\cos (45 - \delta/2)}$$

$$l = - \delta/2 - 2 \Delta \operatorname{sen} \delta/2 \frac{\cos (45 - 2\alpha)}{\cos (45 - \delta/2)}$$

$$l - j = - 4 \frac{\operatorname{sen} \delta/2}{\cos \delta} \operatorname{sen} (2\alpha + \delta/2)$$

$$R = \cos \frac{90 - \delta}{2} \quad R' = \operatorname{sen} \frac{90 - \delta}{2}$$

$$\sigma = \frac{90 - \delta}{2} \quad \theta = \frac{90 - \delta}{2}$$

$$\beta' = - \operatorname{sen} \delta/2 \operatorname{sen} (2\alpha + \delta/2)$$

y, por tanto,

$$Z = 1 - (4 \operatorname{sen}^2 \delta/2 \cos 2\alpha)^2 \Delta^2$$

Si hubiéramos supuesto $\gamma - \alpha = 0$,

$$Z = (4 \sin^2 \frac{\delta}{2} \cos 2\alpha)^2 \Delta^2$$

La figura indica las direcciones sucesivas de v , w en el caso considerado.

Se comprende desde luego que para una posición cualquiera del polarizador y analizador, si la dirección (1) de la mica biseca el ángulo de las exclusivas de ellos, habrá en el centro del campo intensidad 1. Porque el primer cuarzo gira la dirección de v , w , de un ángulo $\frac{\delta}{2}$, siendo, como ya sabemos, δ en este caso la diferencia de fase de las dos vibraciones circulares, que se propagan según el eje. Supongamos levogiro el cuarzo. El giro es hacia la izquierda. Al salir de la mica, la dirección de v , w es simétrica de la primera respecto de la dirección principal 1, luego al salir del segundo cuarzo por el nuevo giro hacia la izquierda de $\frac{\delta}{2}$ que experimenta v , w , coincidirá su dirección con exclusiva del analizador. Y, por tanto, la vibración no se reduce. Sucede lo contrario, como es consiguiente, con el polarizador y analizador, dispuestos de modo que sus direcciones exclusivas sean una misma.

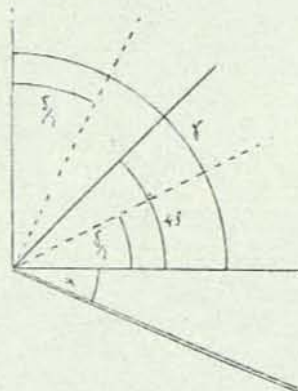


Fig. 6

XIV

Consideraremos en este párrafo el caso de que la mica interpuesta sea de $\frac{1}{4}$ de onda. Desde luego, la vibración E será la misma, y la F se convertirá en $F'' = F e^{\frac{-i\pi}{2}}$. Como $F' = F e^{-i\pi}$, $-iF'' = F'$, luego $F'' = iF'$, y, por tanto,

llamando R'' y l'' á los valores correspondientes de R' y l del caso anterior

$$R'' \cos l'' + i R'' \operatorname{sen} l'' = i [R' \cos l + i R' \operatorname{sen} l]$$

$$R'' \cos l'' = - R' \operatorname{sen} l$$

$$R'' \operatorname{sen} l'' = R' \cos l$$

Con objeto de deducir de aquí los valores de l'' y R'' , es-

tudiaremos, como en casos anteriores, la modificación de la vibración de la onda que se propaga según el eje del cuarzo.

El vector v , w , desviado de su posición paralela á la exclusiva del polarizador, un ángulo $\delta/2$ al atravesar el primer cuarzo se descompone en dos al entrar en la mica, en la forma que la figura indica. Al salir de la mica se tiene la vibración elíptica que representa la elipse dibujada.

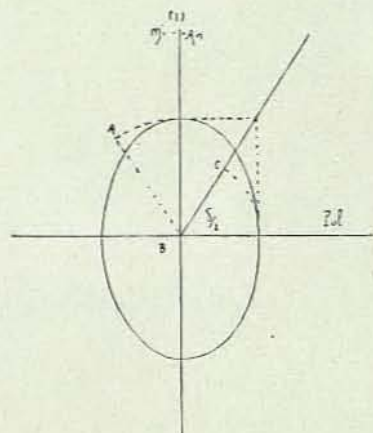


Fig. 7

Evidentemente, $\sigma = -(90^\circ - \delta/2)$. Además, $R = \cos(90^\circ - \delta/2)$, $R'' = -\cos \delta/2$. Con esto queda determinado l'' , pues tenemos $R'' = -R'$, y, por tanto,

$$\begin{aligned} \cos l'' &= \operatorname{sen} l \\ \operatorname{sen} l'' &= -\cos l \end{aligned}$$

Si suponemos $l = l' + 90$ se satisfacen las dos ecuaciones anteriores. En consecuencia, inmediatamente podemos escribir

$$l'' - j = l - j + 90 = - \frac{2 \operatorname{sen} (2\alpha + \delta/2)}{\cos \delta/2} + 90$$

Si queremos hallar los términos de segundo grado en Δ en la expresión de la intensidad, es necesario conocer la expre-

sión de $\operatorname{tg} \sigma$ hasta el término en Δ^2 . Partiendo de las expresiones de R y R' en que entran los términos en Δ^2

$$R^2 = \operatorname{sen}^2 \delta/2 - 4 \Delta^2 \operatorname{sen}^2 \delta/2 \cos^2 \alpha$$

$$(R')^2 = (-R'')^2 = \cos^2 \delta/2 + 4 \Delta^2 \operatorname{sen}^2 \delta/2 \cos^2 2\alpha$$

se tiene

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{R''}{R} = -\cos \frac{\delta}{2} \left[1 + \frac{2 \cos^2 2\alpha}{\cos^2 \delta/2} \Delta^2 \right]$$

é inmediatamente

$$\sigma = -(90 - \delta/2) - 4 \cos^2 2\alpha \operatorname{tg} \delta/2 \Delta^2$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg} 2\sigma \cos (l - f) = \frac{-4 \Delta \operatorname{sen} \delta/2 \operatorname{sen} (2\alpha + \delta/2)}{\cos \delta}$$

y, por tanto,

$$\theta = \frac{-2 \Delta \operatorname{sen} \delta/2 \operatorname{sen} (2\alpha + \delta/2)}{\cos \delta}$$

Además,

$$\operatorname{sen} 2\beta' = - \left(1 - \frac{2 \operatorname{sen}^2 (2\alpha + \delta/2)}{\cos^2 \delta/2} \Delta^2 \right) \operatorname{sen} 2\sigma =$$

$$= \operatorname{sen} \delta - \frac{4 \Delta^2 \operatorname{sen} \delta/2}{\cos \delta/2} [\operatorname{sen}^2 (2\alpha + \delta/2) + \cos \delta \cos^2 2\alpha]$$

y, por tanto,

$$\beta' = 90 - \delta/2 + \frac{2 \operatorname{sen} \delta/2}{\cos \delta/2} \Delta^2 [\operatorname{sen}^2 (2\alpha + \delta/2) + \cos \delta \cos^2 2\alpha]$$

En consecuencia, resulta para la intensidad Z

$$Z = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \delta + 4 \Delta \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen}^2 \delta/2 \cos 2\alpha - 8 \Delta^2 \cos^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \delta/2 \cos$$

Para el centro del campo la intensidad vale $1/2 \operatorname{sen}^2 \delta$. Esto era de esperar, pues girando el segundo cuarzo $\delta/2$ á los vectores v , w dirigidos según los ejes de la elipse que figura la vibración al salir de la mica, la intensidad sobre el analizador y cuya dirección exclusiva coincide con la (1) de la mica,

será la correspondiente al vector proyección de AB y CB , ó sea, será de la forma

$$AB \cos \delta/2 \cos \frac{2\pi t}{T} + CB \sin \delta/2 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

y como $AB = \sin \delta/2$ y $BC = \cos \delta/2$

$$\frac{1}{2} \sin \delta \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{2} \sin \delta \sin \frac{2\pi t}{T}$$

y la intensidad de una vibración rectilínea de esta naturaleza es desde luego la suma de los cuadrados de los coeficientes de $\cos \frac{2\pi t}{T}$ y $\sin \frac{2\pi t}{T}$, es decir, $\frac{1}{2} \sin^2 \delta$.

XV

La intensidad Z del párrafo anterior se anula para todos los valores de δ de la forma $\delta = 2 K\pi$ siendo K un número cualquiera. Esto da en el campo un sistema de anillos oscuros concéntricos. Para puntos próximos al centro del campo, nos podemos valer de la fórmula aproximada

$$Z = \frac{1}{2} \sin^2 \delta + 4\Delta \sin \delta \sin^2 \delta/2 \cos 2\alpha$$

que se anula para

$$\cos \delta/2 + 4\Delta \sin \delta/2 \cos 2\alpha = 0$$

que corresponde á un valor de Δ (Δ es negativo como ya sabemos),

$$\Delta = \frac{-\cos \delta/2}{\cos 2\alpha}$$

Para valores de α comprendidos entre $+\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$ ó entre $\pi - \frac{\pi}{4}$ y $-\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, para puntos comprendidos dentro del círculo $\delta = \pi$, habrá valores de Δ que satisfarán la anterior

igualdad, es decir, puntos en sombra que formarán como dos manchas á cada lado del centro, bisecadas por la dirección exclusiva del polarizador. No habrá valores de Δ que satisfagan la anterior ecuación para $\alpha > \frac{\pi}{4}$ ó $< -\frac{\pi}{4}$ ó no comprendidos entre $\pi - \frac{\pi}{4}$ y $-\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, á menos que estén fuera del círculo $\delta = \pi$, pues para estos valores $\cos 2\alpha$ es negativo. Desde luego, para los valores de α que anulen al coseno de su duplo, y con las direcciones límites anteriores no hay anulación de la intensidad. Habrá, por consiguiente, cuatro manchas, pero aquellas cuya línea de unión es paralela á la sección exclusiva del polarizador serán mucho mayores, porque la variación de δ es mucho más lenta cuanto más cerca del centro nos encontremos. (Véase el valor de δ en función del ángulo de incidencia). Para las dos manchas primeramente descritas, es decir, para valores de α comprendidos entre $+\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$ y sus simétricos respecto á la sección exclusiva del analizador, se tendrá que al aumentar α disminuye el $\cos 2\alpha$ y, por lo tanto, aumenta el quebrado. Suponiendo que la variación de Δ es mucho más lenta que la de δ , esto obliga á buscar los puntos que satisfacen la ecuación anterior más cerca del círculo $\delta = \pi$ aunque sin salir del mismo. Se comprende que por estar las otras dos manchas más allá del círculo $\delta = \pi$, la influencia del término en Δ^2 se hará sentir mucho más que en el caso de las otras manchas, y precisamente el término en Δ^2 es máximo para los puntos que corresponden á estas manchas, al revés de lo que ocurre con las otras donde es negativo, y representa, por lo tanto, disminución de Z . Así se comprende que no se hayan observado.

Para puntos más alejados del centro, en los que Δ^2 tenga importancia, la intensidad se anula siempre que

$$\Delta \cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{\cos \delta/2}{\cos \delta/2 - \sin \delta/2}$$