UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

SISTEMAS DINÁMICOS UNIDIMENSIONALES Y SU TRANSICIÓN AL CAOS

Autor: Jesús Farrera Ochoa

Director: Dr. Angel Jorba Monte
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de enero de 2021

Abstract

The main objective of this project is to answer the following question: given a dynamical system with simple dynamics, how and when does the transition to chaotic dynamics occur? To answer this question, we will use a specific model as example, the quadratic family $F_\mu = \mu x(1-x)$.

However, before we can give an answer, we will study its behavior, give a definition of chaotic application, and see the changes that undergo by varying its parameter.

Resumen

El objetivo principal de esta memoria es responder a la siguiente pregunta: dado un sistema dinámico con una dinámica simple, cómo y cuándo ocurre la transición a la dinámica caótica? Para responder esta pregunta, usaremos un modelo en concreto como ejemplo, la familia cuadrática $F_\mu = \mu x(1-x)$.

No obstante, antes de poder dar una respuesta, estudiaremos su comportamiento, daremos una definición de aplicación caótica y veremos los cambios que experimenta al variar su parámetro.

2010 Mathematics Subject Classification. 37E05, 37D45

Agradecimientos

Primero de todo agradecer al Dr. Angel Jorba por acceder a dirigir esta memoria así como darme todo su soporte y disponibilidad para la realización de la misma.

Mencionar a mis profesores de bachillerato; Emili, Xavi, Toni y Joaquín que me ayudaron a obtener la base necesaria para continuar mis estudios en la universidad.

Seguidamente a mis compañeros de clase; Àngel, Pau, Ignasi, Alex, Gerard, Adrià y Youwei por su ayuda diaria y amistad.

Por último y más importante, agradecer a mi familia su apoyo incondicional, en especial a mis padres, sin los cuales esto no habría sido posible.

A todos ellos, gracias.

Índice

1. Introducción **1**

2. La familia cuadrática **2**

3. Dinámica simbólica **6**

4. Conjugación topológica **7**

5. Caos **10**

6. Estabilidad estructural **11**

7. Teorema de Sarkovskii **13**

8. La derivada de Schwarz **18**

9. La teoría de la bifurcación **23**

10. Revisión del periodo tres **28**

11. Doblamiento de periodo: la ruta al caos **32**

12. Teoría del amasado **37**

13. Genealogía de puntos periódicos de aplicaciones unimodales **41**

14. Conclusiones **47**

1. Introducción

El proyecto

La Teoría del caos surge en la segunda mitad del siglo XX y su precursor fue el meteorólogo y matemático Edward Lorenz. En 1963 trabajaba en unas ecuaciones simplificadas para modelar el clima, y trataba de ver gráficamente el comportamiento de sus ecuaciones mediante un ordenador. Lorenz observó que pequeñas diferencias en los datos de partida llevaban a grandes diferencias en las predicciones del modelo. De tal forma que cualquier pequeña perturbación, o error, en las condiciones iniciales del sistema podían tener una gran influencia sobre el resultado final.

Las ideas de Lorenz dieron lugar al comienzo de un nuevo campo de estudio que afectó no solo a las matemáticas, sino prácticamente a cada rama de las ciencias; biológicas, físicas y sociales. En meteorología, llegó a la conclusión de que puede ser fundamentalmente imposible hacer predicciones más allá de dos o tres semanas con un grado razonable de exactitud.

Por medio de la Teoría del Caos también se puede estudiar fenómenos tales como el control de la población y epidemias, el movimiento de bancos de peces, aves e insectos migratorios, el comportamiento del cerebro, los espasmos del corazón en pleno ataque cardíaco, etc.

Estructura de la Memoria

Para enfatizar el hecho de que la dinámica caótica ocurre en el más simple de los sistemas, llevamos a cabo la mayor parte del análisis de nuestra memoria sobre un modelo básico, la aplicación cuadrática dada por $F_\mu = \mu x(1-x)$, que ilustra prácticamente todos los conceptos que deseamos presentar. Algunas ideas topológicas, como la noción de un conjunto denso o un conjunto de Cantor; o conceptos clave de la memoria como la estabilidad estructural, presencia de bifurcaciones y nuestro principal objetivo la transición al caos. La aplicación cuadrática es usada en modelos como el crecimiento de poblaciones o propagación de enfermedades epidémicas.

Los primeros capítulos irán relacionados a introducir este modelo y veremos herramientas muy potentes para comprender su dinámica, daremos una equivalencia para aplicaciones que nos ayudará a relacionarlas. Comprender la dinámica de una aplicación compleja será más fácil analizando la de una aplicación sencilla equivalente.

Más adelante daremos la definición de caos y un estudio de las órbitas periódicas de las aplicaciones; como varían en función de su parámetro, si aparecen de pronto o por lo contrario desaparecen, etc. Estos cambios en el parámetro a veces producirán cambios en la aplicación llamados bifurcaciones.

Finalmente gracias a la teoría de bifurcación y la dinámica de las órbitas de la aplicación cuando aumenta el parámetro, veremos como y cuando ocurre la transición de una dinámica simple a una caótica.

Hemos usado de guía principal el libro de Robert L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, utilizando otras pocas referencias a causa de su buena comprensión y calidad. Algunos resultados y demostraciones que no hemos incluido en la memoria pueden encontrase en él.

2. La familia cuadrática

En este primer capítulo presentamos la familia cuadrática: $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, que nos acompañará en prácticamente toda esta memoria. Estudiaremos su dinámica dependiendo del parámetro μ.

Proposición 2.1. *Sea $F_\mu(x)$ la familia cuadrática, tenemos:*

i) $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$.

ii) $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ *es un punto fijo, es decir,* $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$.

iii) $0 < p_\mu < 1$ *si* $\mu > 1$.

La demostración de esta proposición es directa al substituir valores. A partir de ahora nos centraremos en las funciones F_μ con $\mu > 1$. Vamos a ver que todos los puntos fuera del intervalo $I = [0, 1]$ tienden a $-\infty$ al iterar F_μ.

Proposición 2.2. *Suponemos* $\mu > 1$:

i) $x < 0 \Rightarrow F_\mu^n(x) \to -\infty$, *cuando* $n \to \infty$.

ii) $x > 1 \Rightarrow F_\mu^n(x) \to -\infty$, *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Para la primera parte con $x < 0$ tenemos que $\mu x(1-x) < x$, así que $0 > x > F_\mu(x) > F_\mu^2(x) > ... > F_\mu^n(x)$ de manera que, F_μ^n es una secuencia decreciente de puntos. Manejamos dos opciones, o bien F_μ^n converge a p_μ o diverge a -∞ cuando $n \to \infty$. No puede converger a p_μ ya que $F_\mu(x) < x < 0$ y $p_\mu \in (0, 1)$. Por lo tanto $F_\mu^n(x) \to -\infty$ En la segunda parte, del mismo modo, como $F_\mu^n(x) < 0$, tenemos otra secuencia decreciente, entonces $F_\mu^n(x) \to -\infty$. □

Podemos deducir que nos encontraremos dinámicas mucho más interesantes dentro de I. Vemos que ocurre al restringir más la cota de μ.

Proposición 2.3. *Sea* $1 < \mu < 3$ *entonces:*

i) F_μ *tiene dos puntos fijos, uno atractor en* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ *y otro repulsor en* $p_\mu = 0$.

ii) Si $0 < x < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

Demostración. Para la primera parte, F_μ tiene dos puntos fijos, 0 y p_μ, por la Proposición 2.1. Evaluamos los puntos fijos en la derivada de F_μ:

$F'_\mu(0) = \mu > 1 \Rightarrow 0$ es un punto fijo repulsor.

$F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu < 1 \Rightarrow p_\mu$ es un punto fijo atractor.

Para la segunda parte separamos por casos:

Sea $1 < \mu < 2$, suponemos $x \in (0,\ 1/2]$ analizando la Figura 1 vemos que $|F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|$ siempre que $x \neq p_\mu$ (en tal caso tendríamos igualdad). Vemos que cada vez que aplicamos F_μ la distancia con el punto fijo se hace más pequeña, llegamos pues a la conclusión que $F_\mu^n(x) \to p_\mu$ cuando $n \to \infty$. Por otro lado si $x \in (1/2, 1)$ tenemos que $F_\mu(x) \in (0, 1/2]$ de manera que aplicamos el argumento anterior.

Suponemos ahora $2 < \mu < 3$, en este caso tenemos que $p_\mu \in (1/2, 1)$, denotamos por $\hat{p}_\mu$ el único punto del intervalo (0,1/2) que se asigna a p_μ por F_μ. Observando la Figura 2 deducimos que aplicando F_μ^2 a un punto del intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ caemos dentro del intervalo $[1/2, p_\mu]$. Al seguir aplicando F_μ cada vez nos acercamos más a p_μ así que deducimos

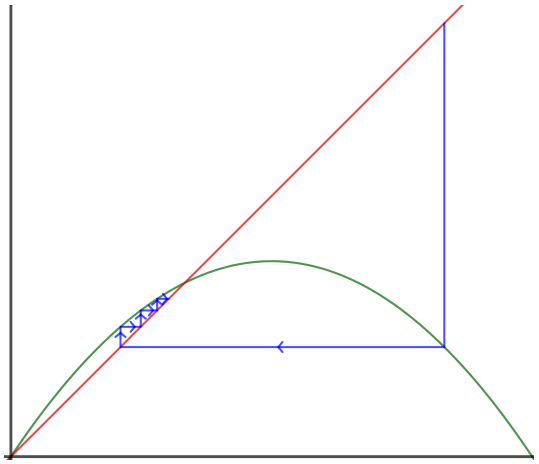

Figura 1: Análisis gráfico de $F_\mu(x)$ cuando $1 < \mu < 2$.

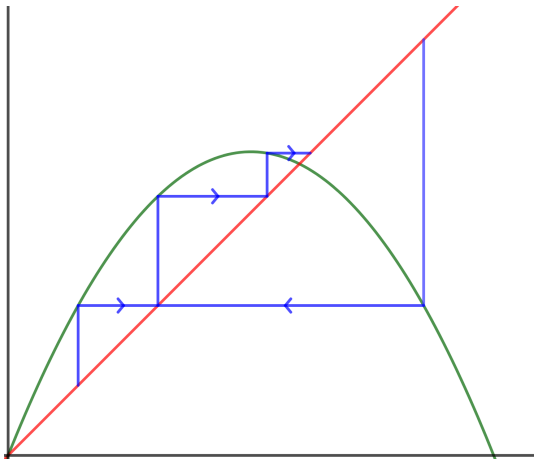

Figura 2: Análisis gráfico de $F_\mu(x)$ cuando $2 < \mu < 3$.

que $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$ para todo $x \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$. Suponemos ahora $x \in (0, \hat{p}_\mu)$, nuevamente observando la figura vemos que existe $k > 0$ tal que $F_\mu^k(x) \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$, al igual que en el caso anterior tiende al punto fijo cuando n tiende al infinito. Finalmente suponemos $x \in (p_\mu, 1)$, tenemos que al aplicar F_μ el resultado está dentro del intervalo $(0, p_\mu)$ que como es unión de los dos intervalos estudiados anteriormente llegamos a la misma conclusión. Queda demostrado entonces que para todo $x \in (0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

Por último vemos el caso $\mu = 2$, tenemos que $F_2(x) = 2x(1-x)$, queremos ver que converge a $p = \frac{2-1}{2} = 1/2$ cuando $n \to \infty$. Expresándolo como sucesión recurrente:

$$F^n(x) = 2F^{n-1}(x)(1 - F^{n-1}(x)),$$

aplicando límites:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = 2 \lim_{n\to\infty} (F^{n-1}(x)(1 - F^{n-1}(x)),$$

resolviendo la ecuación llegamos a que:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = 1/2.$$

□

Resumiendo lo visto hasta ahora, para $1 < \mu < 3$, F_μ tiene dos puntos fijos, uno atractor y otro repulsor, el resto de puntos del intervalo $I = (0, 1)$ son asintóticos a p_μ y los puntos de fuera del intervalo tienden a $-\infty$.

Nos encontramos frente a una dinámica sencilla, cosa que poco a poco va desapareciendo a medida que aumentamos el valor de μ. Estudiamos ahora el caso $\mu > 4$, denotamos por F a la función cuadrática F_μ para el resto del capítulo para simplificar la escritura.

Como el valor máximo de F es $\mu/4$, al suponer $\mu > 4$ es posible que al iterar F, ciertos puntos salgan de I. Denotamos el conjunto formado por dichos puntos A_0. Sabemos que si $x \in A_0$ entonces $F_\mu(x) > 1 \Rightarrow F_\mu^n(x) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$. Ahora sea $A_1 = \{x \in [0, 1] \,|\, F(x) \in A_0\}$, tenemos que si $x \in A_1 \Rightarrow F^2(x) > 1 \Rightarrow F_\mu^n(x) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$. Inductivamente los puntos de $A_n = \{x \in I \,|\, F^n(x) \in A_0\}$, son los puntos que salen de I en la iteración n+1. Igual que en A_0 y A_1 si $x \in A_n \Rightarrow F_\mu^n(x) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

Vemos que pasa con todos los puntos que escapan de este destino. Denotamos por Λ el conjunto de todos ellos:

$$\Lambda = I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Explicamos paso a paso la construcción de este conjunto. Tenemos que A_0 es un intervalo abierto centrado en $1/2$, entonces $I - A_0$ consta de dos intervalos cerrados, los denotamos I_0 y I_1, tal y como muestra la Figura 3.

Dentro de I_0 hay un intervalo de puntos que se asignan a A_0 por F_μ, análogamente en I_1, la unión de ambos denota A_1. Ahora consideramos $I - (A_0 \cup A_1)$, consta de 4 intervalos cerrados, de manera similar existe un intervalo de puntos en cada uno de estos 4 intervalos que se asigna a A_0 por F_μ^2. El conjunto de estos 4 intervalos que escapan de I en su tercera iteración lo denotamos por A_2.

Inductivamente deducimos que A_n consta de 2^n intervalos abiertos disjuntos. Por tanto $I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ está formado por 2^{n+1} intervalos cerrados disjuntos. El gráfico de F_μ^n corta al menos 2^n veces la recta $x = y$ cosa que implica que F_μ^n tenga al menos 2^n puntos fijos.

Ahora demostraremos que nuestro conjunto Λ es un conjunto de Cantor. Primero de todo definimos que es un conjunto de Cantor.

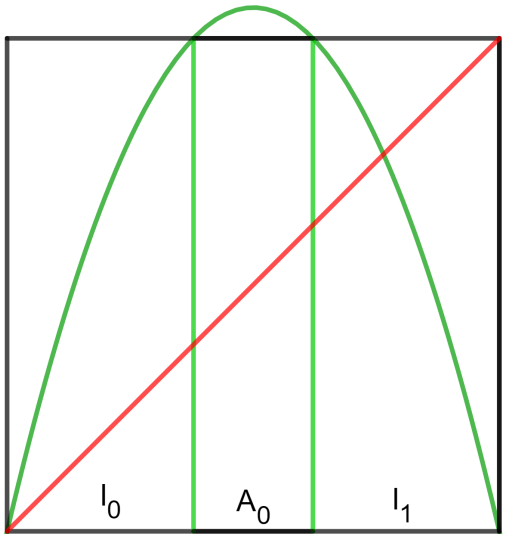

Figura 3: Representación del conjunto A_0.

Definición 2.4. *Un conjunto Λ es un conjunto de Cantor si es un subconjunto cerrado, totalmente desconectado y perfecto de I. Un conjunto está totalmente desconectado si no contiene intervalos y un conjunto es perfecto si cada punto en él es un punto límite de otros puntos del conjunto.*

Para garantizar que Λ es de Cantor necesitaremos imponer alguna condición extra. Suponemos μ suficientemente grande tal que $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$, con $\mu > 2 + \sqrt{5}$ será suficiente.

Pasamos a demostrar que Λ está totalmente desconectado. Para $\mu > 2+\sqrt{5}$ existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda$. De la misma manera $|(F^n)'(x)| > \lambda^n$. Suponemos que Λ sí contiene intervalos, escogemos $x, y \in \Lambda$ tal que $x \neq y$ y $[x, y] \subset \Lambda$. Entonces existe $\alpha \in [x, y]$ de manera que $|(F^n)'(\alpha)| > \lambda^n$. Escogemos n tal que $\lambda^n|y - x| > 1$, por el Teorema del Valor Medio:

$$|F^n(y) - F^n(x)| \geq \lambda^n|y - x| > 1,$$

cosa que implica que $F^n(y)$ o $F^n(x)$ está fuera de I, lo que nos hace llegar a una contradicción pues $x, y \in \Lambda$ y por lo tanto Λ totalmente desconectado.

Probamos ahora que Λ es perfecto. Primero de todo destacamos que cualquier punto límite de un A_k está en Λ, de hecho eventualmente se asignan al punto fijo en 0. Ahora, si $p \in \Lambda$ está aislado, cualquier punto cercano pertenece a algún A_k. Tenemos dos opciones o bien p es el punto límite de los puntos de A_k o dichos puntos salen de I. En el primer caso ya hemos dicho que se asignan en 0 y por lo tanto pertenecen a Λ. En el otro caso suponemos que F^n asigna p a 0 y todos los demás puntos cercanos de p al eje negativo. Entonces tenemos que F^n tiene un máximo en p que implica que $(F^n)'(p) = 0$. Por la regla de la cadena: $F'(F^i(p)) = 0$ para algún $i < n$, por tanto $F^i(p) = 1/2$. Pero entonces $F^{i+1}(p) \notin I$ que implica que $F^n(p) \to -\infty$ que entra en contradicción con el hecho de que $F^n(p) = 0$. Por lo tanto Λ es perfecto.

Formalizamos lo que acabamos de probar.

Teorema 2.5. *Si $\mu > 2 + \sqrt{5}$, entonces Λ es un conjunto de Cantor.*

Acabamos de entender el comportamiento general de las órbitas de F cuando $\mu > 4$, o bien tiende a $-\infty$ cuando iteramos F o de lo contrario toda su órbita pertenece a Λ, siempre y cuando los puntos no se encuentren en Λ. En capítulos posteriores veremos que ocurre con la dinámica de F_μ en Λ.

3. Dinámica simbólica

En este capítulo introducimos un modelo equivalente a F_μ, que describe la misma dinámica. En el espacio en el que nuestro modelo actuará los puntos serán secuencias infinitas de 0's y 1's.

Definición 3.1. $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 ...) \,|\, s_j = 0, 1\}$.

Σ_2 se llama espacio de secuencia en dos símbolos 0 y 1. De forma más general Σ_n es un espacio de secuencia de símbolos entre 0 y $n-1$. Podemos convertir Σ_2 en un espacio métrico, dadas dos secuencias $s = (s_0 s_1 ...)$ y $t = (t_0 t_1 ...)$ definimos la distancia entre ambos:

$$d[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Observamos que $|s_i - t_i|$ es 0 o 1, que implica que la serie está dominada por:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

y por lo tanto la serie converge.

Ejemplo 3.2. Sea $s = (000...)$, $r = (111...)$ y $t = (100100...)$ entonces:

$d[s,r] = 2$

$d[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3i}} = \frac{1}{1-1/8} = 8/7$

Proposición 3.3. (d, Σ_2) *es un espacio métrico.*

La demostración es directa aplicando la definición de métrica.

Proposición 3.4. *Sea $s, t \in \Sigma_2$ y suponemos $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, ..., n$. Entonces $d[s,t] \leq 1/2^n$. Inversamente si $d[s,t] < 1/2^n$, entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$.*

Demostración. Si $s_i = t_i$ para $i \leq n$ tenemos:

$$d[s,t] = \sum_{i=0}^{n} \frac{s_i - s_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Por otro lado, demostrando por contrarecíproco, si $s_i \neq t_i$ para algún $i \leq n$ tenemos:

$$d[s,t] \geq 1/2^i \geq 1/2^n.$$

Por lo tanto si $d[s,t] < 1/2^n$, implica que $s_i = t_i$ para $i \leq n$. □

Este resultado nos ayuda a decidir si dos secuencias están cerca o no. Pasamos a la definición más importante de este capítulo.

Definición 3.5. *La aplicación shift* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ *se define por* $\sigma(s_0 s_1 s_2 ...) = (s_1 s_2 s_3 ...)$.

Elimina la primera entrada de una secuencia y mueve todas las demás a la izquierda una posición. Obviamente cada elemento de la imagen de σ tiene dos antiimagenes, ya que la posición número uno puede ser 0 o 1. Además, en la métrica definida anteriormente, σ es una aplicación continua.

Proposición 3.6. $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ *es continua.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $s = (s_0 s_1 s_2 ...)$ escogemos n tal que $1/2^n < \epsilon$ y $\delta = 1/2^{n+1}$. Si $t = (t_0 t_1 t_2 ...)$ satisface que $d[s,t] < \delta$, entonces por la Proposición 3.4 tenemos que $s_i = t_i$ para $i \leq n+1$. Por lo tanto la entrada i-esima de $\sigma(s)$ y $\sigma(t)$ coinciden para $i \leq n$. Llegando a que $d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq 1/2^n < \epsilon$. □

Mostramos como la dinámica de σ puede entenderse completamente. Por ejemplo, los puntos periódicos corresponden exactamente a secuencias repetidas, por lo tanto hay 2^n puntos periódicos de periodo n para σ, cada uno generado por una de las 2^n secuencias finitas de ceros y unos de longitud n. Denotamos por $Per_n(\sigma)$ los puntos periódicos de σ de periodo n.

Otro hecho interesante sobre σ es que los puntos periódicos forman un subconjunto denso de Σ_2. Recordamos que un subconjunto es denso en Σ_2 siempre que su clausura sea todo el espacio Σ_2. Para probar que $Per(\sigma)$ es denso, debemos producir una secuencia de puntos periódicos τ_n que convergen a un punto arbitrario $s = (s_0 s_1 s_2 ...)$ en Σ_2. Definimos τ_n como la secuencia repetitiva cuyas entradas coinciden con s hasta la entrada número n. Por la Proposición 3.4, $d[\tau_n, s] \leq 1/2^n$, por tanto llegamos a que $\tau_n \to s$.

Por supuesto, no todos los puntos en Σ_2 son periódicos o eventualmente periódicos. Cualquier secuencia que no se repita puede no ser periódica nunca. De hecho, las secuencias no periódicas superan en gran medida a las secuencias periódicas en Σ_2. Además, hay órbitas no periódicas en Σ_2 que giran densamente alrededor de Σ_2, es decir, la clausura de la órbita es Σ_2 mismo. Otra forma de decir esto es que hay puntos en Σ_2 cuya órbita se acerca arbitrariamente a cualquier secuencia dada en Σ_2. Formalizamos todos estos resultados.

Proposición 3.7.

1. *El cardinal de* $Per_n(\sigma)$ *es* 2^n.
2. $Per(\sigma)$ *es denso en* Σ_2.
3. *Existe una órbita densa para* σ *en* Σ_2.

En el próximo capítulo veremos que la aplicación *shift* en Σ_2 es de alguna manera, igual, que la aplicación F_μ en Λ que vimos en el capítulo anterior.

4. Conjugación topológica

Como avanzamos en el capítulo anterior el objetivo de este capítulo es relacionar la aplicación *shift* con la aplicación cuadrática $F_\mu = \mu x(1-x)$ cuando μ es suficientemente grande.

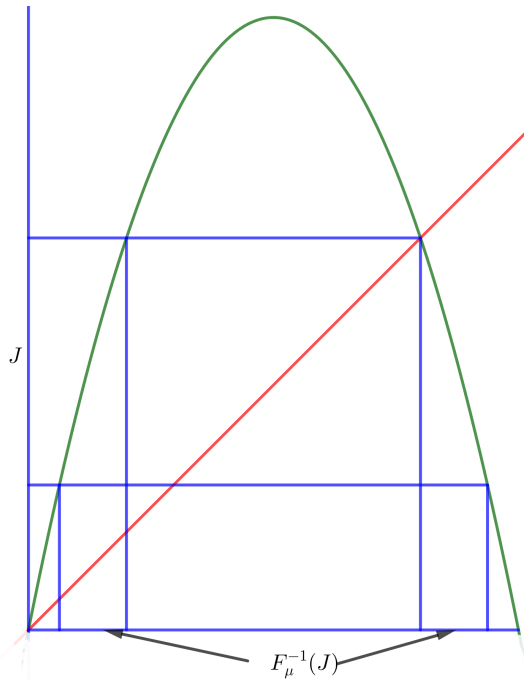

Figura 4: Preimagen de un intervalo cerrado J.

Denotamos por R, el conjunto de números reales, recordamos que todos los puntos de R tienden a $-\infty$ bajo cierta iteración de F_μ salvo los puntos pertenecientes a Λ y que $\Lambda \subset I_0 \cup I_1$. Si $x \in \Lambda$ entonces todos los puntos de la órbita de x también permanecerán a Λ, de hecho en uno de estos dos intervalos. Podremos tener una idea del comportamiento de dicha órbita observando en cual de estos dos intervalos se encuentran al iterar.

Definición 4.1. *El itinerario de x es una secuencia $S(x) = (s_0 s_1 s_2 ...)$ donde $s_j = 0$ si $F_\mu^j(x) \in I_0$ y $s_j = 1$ si $F_\mu^j(x) \in I_1$.*

S actúa como una aplicación de Λ a Σ_2.

Teorema 4.2. *Si $\mu > 2 + \sqrt{5}$ entonces $S : \Lambda \to \Sigma_2$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Para demostrar que S es un homeomorfismo tendremos que ver que es biyectiva, continua y con inversa continua.

Primero de todo vemos que S es inyectiva. Sean $x, y \in \Lambda$ con $x \neq y$ y suponemos que $S(x) = S(y)$. Entonces por cada n, $F_\mu^n(x)$ y $F_\mu^n(y)$ caen al mismo lado de $1/2$, dejando F_μ monótona en el intervalo entre ambos. Por tanto todos los puntos de dicho intervalo pertenecen a $I_0 \cup I_1$, contradiciendo el hecho que Λ está totalmente desconectado. Por tanto $S(x) \neq S(y) \Rightarrow S$ inyectiva.

Vemos ahora que S es exhaustiva. Sea $J \subset I$ intervalo cerrado tenemos que la anti-imagen de J es:

$$F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I | F_\mu^n(x) \in J\}.$$

Observamos que $F_\mu^{-1}(J)$ está formado por dos intervalos uno de I_0 y otro en I_1 tal y como se muestra en la Figura 4. Ahora sea $s = (s_0 s_1 ...)$ y $x \in \Lambda$ con $S(x) = s$, definimos:

$$I_{s_0 s_1 ... s_n} = \{x \in I \,|\, x \in I_{s0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, ..., F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap ... \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}).$$

Teniendo en cuenta que:

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n}).$$

Por inducción vemos que $I_{s_1 \ldots s_n}$ es un subintervalo no vacío, por lo tanto $F_\mu^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n})$ está formado por dos intervalos cerrados uno en I_0 y otro en I_1 y $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n})$ es un único intervalo. Por lo tanto:

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \ldots s_{n-1}}.$$

En conclusión:

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \ldots s_n} \neq \emptyset.$$

Vemos que si $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$, entonces $x \in I_{s_0}, \ldots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}$. Por lo tanto $S(x) = (s_0 s_1 \ldots)$. Así pues como la imagen de S coincide con el conjunto de llegada tenemos que S es exhaustiva, y por lo tanto biyectiva.

Vemos ahora que es continua. Escogemos $x \in \Lambda$ y suponemos que $S(x) = (s_0 s_1 \ldots)$. Sea $\epsilon > 0$ y n tal que $1/2^n < \epsilon$. Consideramos los subintervalos cerrados y disjuntos $I_{t_0 t_1 \ldots t_n}$ definido por todas las combinaciones de $(t_0 \ldots t_n)$. Tenemos que Λ está contenida en la unión de dichos intervalos. Existen 2^{n+1} posibles intervalos siendo $I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ uno de ellos. Por lo tanto podemos escoger δ tal que $|x - y| < \delta$ con $y \in \Lambda$ que implica que $y \in I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$. Tenemos entonces que $S(x)$ coincide con $S(y)$ en los primeros $n+1$ términos. Por la Proposición 3.4:

$$d[S(x), S(y)] < 1/2^n < \epsilon.$$

Demostrando que S es continua. Análogamente se prueba la continuidad de S^{-1}. Queda probado que S biyectiva, continua y con inversa continua, por lo tanto S homeomorfismo.□

Con este teorema acabamos de ver que Λ y Σ_2, como conjuntos, son iguales. De manera similar S da una equivalencia entre la dinámica de F_μ en Λ y σ en Σ_2. Lo vemos con otro teorema.

Teorema 4.3. *$S \circ F_\mu = \sigma \circ S$.*

Demostración. Sea $x \in \Lambda$, puede definirse de manera única por la secuencia de intervalos:

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \ldots s_n}$$

que viene dada por el itinerario $S(x)$. Entonces:

$$I_{s_0 \ldots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \ldots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}).$$

Tenemos que:

$$F_\mu(I_{s_0 \ldots s_n}) = I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \ldots \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 \ldots s_n}.$$

Por lo tanto:

$$SF_\mu(x) = SF_\mu(\cap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 \ldots s_n}) = S(\cap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \ldots s_n}) = (s_1 s_2 \ldots) = \sigma S(x).$$

□

Definición 4.4. *Sean $f : A \to A$ y $g : B \to B$ dos aplicaciones, se dice que son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo $h : A \to B$ tal que $h \circ f = g \circ h$. El homeomorfismo h se llama conjugación topológica.*

Aplicaciones que son topológicamente conjugadas son equivalentes en lo que a su dinámica se refiere. Vemos entonces que si F_μ en Λ es topológicamente conjugada a σ, F_μ tendrá las mismas propiedades de σ que vimos en el capítulo anterior. Las resumimos con el siguiente teorema.

Teorema 4.5. *Sea $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ con $\mu > 2+\sqrt{5}$, se cumple:*

1. *El cardinal de $Per_n(F_\mu)$ es 2^n.*
2. *$Per(F_\mu)$ es denso en Λ.*
3. *Existe una órbita densa para F_μ en Λ.*

Este teorema nos muestra la importancia de la dinámica simbólica y la conjugación topológica, gracias a la aportación de ambas obtenemos más propiedades acerca de la dinámica de F_μ.

5. Caos

En este capítulo la aplicación cuadrática nos servirá de ejemplo para visualizar el tema principal de esta memoria, el comportamiento caótico de las órbitas de un sistema dinámico. Daremos una definición de aplicación caótica con un enfoque topológico. Empezamos con unas definiciones previas.

Definición 5.1. *Sea $f : J \to J$ se dice que f es topológicamente transitiva si para cada par de conjuntos abiertos $U, V \subset J$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Deducimos que una aplicación topológicamente transitiva tiene puntos que bajo iteración se mueven de un intervalo arbitrariamente pequeño a otro. Tenemos entonces que un sistema dinámico no se puede descomponer en dos conjuntos abiertos disjuntos que sean invariantes en la aplicación. Claramente si la aplicación contiene una órbita densa entonces es topológicamente transitiva. El recíproco también es cierto para subconjuntos compactos de R o S^1.

Definición 5.2. *Sea $f : J \to J$ se dice que f tiene dependencia sensitiva en condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in J$ y cualquier entorno N de x, existe $y \in N$ y $n \geq 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.*

Ejemplo 5.3. La aplicación cuadrática $F_\mu = \mu x(1-x)$ con $\mu > 2+\sqrt{5}$ tiene dependencia sensitiva en condiciones iniciales en Λ. Para demostrarlo escogemos δ menor al diámetro de A_0. Sean $x, y \in \Lambda$, si $x \neq y$ entonces $S(x) \neq S(y)$, es decir x e y difieren en al menos una posición, la nombramos n^{th}. Eso significa que $F_\mu^n(x)$ y $F_\mu^n(y)$ se encuentran en lados opuestos de A_0, cosa que implica que:

$$|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta.$$

Ejemplo 5.4. Una rotación irracional de una circunferencia es topológicamente transitiva pero no tiene dependencia sensible en condiciones iniciales.

Pasamos al plato fuerte de este capítulo, la definición de caos. Hay muchas maneras de definirlo, nosotros escogemos esta en lugar de otras porque nos ayudará con lo que vendrá en capítulos posteriores.

Definición 5.5. *Sea $f : V \to V$ decimos que f es caótica en V si:*

i) f tiene dependencia sensitiva en condiciones iniciales.

ii) f es topológicamente transitiva.

iii) Los puntos periódicos de f son densos en V.

Explicado de una forma más informal; un sistema caótico es un sistema impredecible, que es indivisible en sistemas independientes y a pesar de todo esto posee cierta regularidad, en forma de puntos periódicos que son densos.

Ejemplo 5.6. $f : S^1 \to S^1$ con $f(\theta) = 2\theta$ es caótica. Claramente hay dependencia sensitiva en condiciones iniciales ya que la distancia angular se dobla con cada iteración de f. Lo mismo pasa con la transitividad topológica, ya que dado cualquier arco de S^1 existirá alguna iteración de f tal que envuelva S^1 al completo. Por último tenemos que los puntos periódicos de f son las $(2^n - 1)^{th}$ raíces de la unidad, así que para cualquier arco de S^1 existirá un n tal que contendrá un punto periódico. Este ejemplo también cumple la siguiente definición.

Definición 5.7. *Sea $f : J \to J$ se dice que es expansiva si existe $\nu > 0$ tal que para todo $x, y \in J$ con $x \neq y$ existe n tal que:*

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \nu.$$

Observación 5.8. La expansibilidad requiere de una condición más fuerte que la dependencia sensitiva en condiciones iniciales, a diferencia de esta última, la expansibilidad requiere que todos los puntos eventualmente cercanos se separen por al menos ν.

Ejemplo 5.9. Las aplicaciones cuadráticas $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ cuando $\mu > 2 + \sqrt{5}$ son caóticas en Λ.

6. Estabilidad estructural

En este capítulo introducimos el concepto de estabilidad estructural. Si al cambiar la aplicación f ligeramente, obtenemos otra aplicación equivalente, entonces estaremos hablando de que la dinámica de f tiene una estructura estable. Cuando nos referirnos a sistemas dinámicos equivalentes usaremos el concepto de conjugación topológica. Imaginemos que tenemos que estudiar la dinámica de un problema real, como es lógico se harían ciertas suposiciones y aproximaciones en la recogida de datos del mismo, por lo tanto el modelo a estudiar sería ligeramente distinto al real. Es aquí donde vemos la importancia de la estabilidad estructural, si el sistema es estable no importarán esos pequeños cambios pues la dinámica de ambos sistemas serían equivalentes. Por el contrario si nuestro sistema es inestable, el resultado al que llegaríamos estaría muy lejos de la realidad pues esas aproximaciones repercutirían a gran escala en la dinámica del modelo. La pregunta será hasta que punto podemos cambiar f para que la aplicación resultante sea topológicamente conjugada, o lo que es lo mismo, que margen de error nos permite la estabilidad de f.

Definición 6.1. *Sean f y g dos aplicaciones. La C^0-distancia entre f y g es:*

$$d_0(f, g) = sup_{x \in R}|f(x) - g(x)|.$$

Y la C^r-distancia viene dada por:

$$d_r(f, g) = sup_{x \in R}(|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, ..., |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|).$$

Definición 6.2. *Sean f y g dos aplicaciones y $\epsilon > 0$ se dice que son C^r-cercanas siempre que para todo $r \geq 0$:*

$$|f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)| < \epsilon.$$

También se dice que f y g son $C^r - \epsilon$ cercanas.

Observación 6.3. Observamos que d no proporciona una métrica útil para el conjunto de todas las funciones, por tanto usaremos d como una herramienta para medir proximidades y no como una métrica global para aplicaciones.

Ejemplo 6.4. Sean $f(x) = 3x$ y $g(x) = x(3 + \epsilon)$ tienen C^0-distancia infinita. Sea ahora $g(x) = 3x + \epsilon$ tenemos que $d_r(f, g) = \epsilon$.

Definición 6.5. *Sea $f : J \to J$, se dice que f es C^r-estructuralmente estable en J, si existe $\epsilon > 0$ tal que siempre que $d_r(f, g) < \epsilon$ para $g : J \to J$, tenemos que f es topológicamente conjugada a g.*

Ejemplo 6.6. Sea $L(x) = x/2$, para demostrar que L es C^1-estructuralmente estable en R tenemos que ver que existe $\epsilon > 0$ tal que, dada una g, si $d_1(L, g) < \epsilon$ entonces L y g son topológicamente conjugadas. Nos vale cualquier $\epsilon < 1/2$. Tenemos entonces que si $d_1(L, g) < \epsilon$ implica que $0 < g'(x) < 1$ para todo x de R. Tenemos pues que g tiene un único punto fijo atractor p. Para acabar de demostrar que L y g son topológicamente conjugados introducimos el concepto de dominio fundamental, conjunto el cual es visitado una vez por cada órbita a excepción del punto fijo, dado el intervalo $5 < |x| \leq 10$, notamos que la $L-$órbita de cualquier punto entra exactamente una vez. Para g tenemos de forma similar dominio fundamental, $g(10) < x \leq 10$ y $-10 \leq x < g(-10)$. Construimos la conjugación $h \circ L = g \circ h$. Dando ciertas condiciones a h llegamos a que es un homeomorfismo, y por lo tanto L y g topológicamente conjugados.

Observación 6.7. Podemos definir una conjugación en el dominio fundamental, y luego extenderla iterando la aplicación. La única pregunta es si podemos extenderla a puntos cuya órbitas no entran en el dominio fundamental.

Recuperamos la aplicación cuadrática F_μ, recordamos que vimos que todos los puntos tienden a $-\infty$ fuera de Λ en el cual F_μ es topológicamente conjugada a la aplicación *shift*. Damos un teorema importante para este capítulo con una demostración un tanto densa.

Teorema 6.8. *La aplicación cuadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ es C^2-estructuralmente estable si $\mu > 2 + \sqrt{5}$.*

Demostración. Tenemos $\mu > 2+\sqrt{5}$ tal que $|F'_\mu(x)| > 1$ en $I_0 \cup I_1$. Escogemos un $\epsilon > 0$ tal que si g es $C^2 - \epsilon$ cercana a F_μ, entonces g tiene la misma dinámica que F_μ. Tomamos ϵ_1 suficientemente pequeño para que g sea $C^2 - \epsilon_1$ cercana a F_μ, entonces $g'' < 0$, ya que $F''_\mu(x) = -2\mu$. Escogemos ahora $\epsilon_2 < \epsilon_1$ suficientemente pequeño para que si g es $C^1 - \epsilon_2$ cercana a F_μ entonces g tiene dos puntos fijos, α y β tal que:

$$\alpha < \beta,\ g'(\alpha) > 1,\ g'(\beta) < -1.$$

Vemos que g tiene un único punto crítico c y que existen α', β' tal que $g(\alpha') = \alpha, g(\beta') = \beta$.

Finalmente escogiendo $\epsilon < \epsilon_2$ tal que si g es $C^1 - \epsilon$ cercana a F_μ, entonces $g^{-1}(\alpha')$ consta de dos puntos, a_0 y a_1, y si $x \in [\alpha, a_0] \cup [a_1, \alpha']$ entonces $|g'(x)| > 1$. Así pues si g es $C^2 - \epsilon$ cercana a F_μ, entonces el gráfico de g tiene las mismas propiedades cualitativas que F_μ en el intervalo $[\alpha, \alpha']$. Por lo tanto F_μ y g tienen la misma dinámica.

Seguimos con que si $x < \alpha$ entonces $g^n(x) \to -\infty$, análogamente si $x > \alpha'$ o si $x \in (a_0, a_1)$, entonces también $g^n(x) \to -\infty$. Inductivamente vemos que todos los puntos menos los del conjunto de Cantor Λ_g tienden a $-\infty$ bajo iteración de g. En Λ_g, g es topológicamente conjugada a la aplicación *shift*.

Por último vemos que F_μ y g son topológicamente conjugadas. Construimos dominios fundamentales para F_μ y g. Escogemos $x_0 < \text{mín}(g^2(c), F_\mu^2(c))$. Entonces los intervalos $(F_\mu(x_0), x_0)$ y $(g(x_0), x_0)$ son dominios fundamentales de F_μ en R^- y g en $(-\infty, \alpha)$. La conjugación puede entonces definirse en $(F_\mu(x_0), x_0)$ y extenderse por $h \circ F_\mu = g \circ h$ a todo R^-. Podemos extender h al intervalo $(1, \infty)$ y finalmente a cada A_n en su forma natural. Una vez que definimos h en todo $R - \Lambda$ extendemos a Λ para que h sea homeomorfismo. Podríamos haber usado el hecho que g en Λ_g y F_μ en Λ son topológicamente conjugadas a la aplicación *shift*. De todas maneras el teorema queda demostrado. □

Por desgracia para esta poderosa propiedad de los sistemas dinámicos, en muchas ocasiones, nos encontramos aplicaciones estructuralmente inestables.

Ejemplo 6.9. Sean $F(x) = x - x^2$, con $F(0) = 0$ y $F'(0) = 1$ que implica que 0 es punto fijo no hiperbólico, y $G(x) = x - x^2 + \epsilon$. Claramente G es $C^r - \epsilon$ cercana a F. Si $\epsilon > 0$, G tiene dos puntos fijos pero cuando $\epsilon < 0$ ninguno. Esto implica que F y G tengan dinámica distinta y por lo tanto F es estructuralmente inestable.

Un punto fijo hiperbólico de f es C^1-estructural y localmente estable. Es decir existe un entorno del punto fijo y un $\epsilon > 0$ tal que si una aplicación es $C^1 - \epsilon$ cercana en ese entorno, entonces f es topológicamente conjugada a g en dicho entorno. Damos una versión uni-dimensional del Teorema de Sterberg.

Teorema 6.10. *Sea p un punto fijo hiperbólico de f, suponemos $f'(p) = \lambda$ con $|\lambda| \neq 0, 1$. Entonces existen entornos U de p y V de $0 \in R$ y un homeomorfismo $h : U \to R$ que conjuga f en U con la aplicación lineal $L(x) = \lambda x$ en V.*

Observación 6.11. Una aplicación cerca de un punto fijo hiperbólico siempre está conjugada con su derivada, esto explica porque tenemos suficiente con que la aplicación sea homeomorfismo y no un difeomorfismo.

7. Teorema de Sarkovskii

En este capítulo veremos uno de los principales teoremas de esta memoria, el Teorema de Sarkovskii.

Teorema 7.1. *Sea $f : R \to R$ continua. Suponemos que f tiene un punto periódico de periodo 3. Entonces f tiene puntos periódicos de todos los demás periodos.*

Demostración. Para demostrar el teorema introducimos dos observaciones necesarias:

Observación 7.2. Sean $f : I \to J$, y I, J intervalos cerrados tal que $I \subset J$ y $J \subset f(I)$, entonces f tiene un punto fijo en I.

Observación 7.3. Suponemos $A_0, ..., A_n$ intervalos cerrados y $A_{i+1} \subset f(A_i)$ para $i = 0, ..., n-1$. Entonces existe al menos un subintervalo J_0 de A_0 que se asigna a A_1 por f. Inductivamente existe subintervalo $J_i \subset J_{i-1}$ tal que $f(J_i) \subset A_i$ y $f^{i+1}(J_i) = A_{i+1}$. Por lo tanto existe $x \in A_0$ tal que $f^i(x) \in A_i$.

Pasamos a demostrar el teorema. Sean a, b, $c \in R$ suponemos que $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ y $a < b < c$.

Sean $I_0 = [a, b]$ y $I_1 = [b, c]$ entonces $I_1 \subset f(I_0)$ y $I_0 \cup I_1 \subset f(I_1)$. Por la Observación 7.2, f tiene un punto fijo en I_1. De manera similar f^2 tiene un punto fijo en I_0 y, al menos, uno de estos puntos tiene periodo 2.

Por inducción definimos una secuencia de intervalos $A_0, ..., A_{n-2} \subset I_1$ con $A_0 = I_1$. Ya que $I_1 \subset f(I_1)$, hay un subintervalo $A_1 \subset A_0$ tal que $f(A_1) = A_0 = I_1$. Inductivamente tenemos subintervalo $A_{n-2} \subset A_{n-3}$ tal que $f(A_{n-2}) = A_{n-3}$. Por lo tanto aplicando la Observación 7.3, tenemos que si $x \in A_{n-2}$, entonces $f(x), f^2(x), ..., f^{n-2}(x) \subset A_0$ y en efecto $f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0 = I_1$. Ahora ya que $I_0 \subset f(I_1)$ entonces existe un subintervalo $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ tal que $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$.

Finalmente ya que $I_1 \subset f(I_0)$ tenemos que $I_1 \subset f^n(A_{n-1})$ tal que $f^n(A_{n-1})$ cubre A_{n-1}. Por la Observación 7.2 f^n tiene un punto fijo p en A_{n-1}. Realmente p tiene periodo igual a n. Las primeras $n-2$ iteraciones de p se encuentran en I_1, la $n-1$ cae en I_0 y la n^{th} en p otra vez. Si $f^{n-1}(p)$ se encuentra en el interior de I_0 entonces p tiene periodo primo igual a n. Si $f^{n-1}(p)$ se encuentra en la frontera entonces $n = 2$ o 3 y queda demostrado.□

Esto es solo un avance de lo que está por venir, el teorema de Sarkovskii da una explicación más completa sobre que periodos implican la existencia de otros periodos para aplicaciones continuas en R. Definimos la relación de orden $\triangleright$ para números naturales de la siguiente manera:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright ... \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright ... \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright ... \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright ... \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

De manera que primero va la lista de todos los números impares a excepción del 1 de forma creciente, después el doble de cada uno de ellos, seguido del cuádruple de cada uno, etc. Hasta acabar con las potencias de 2 en orden decreciente y por último el número 1. Lo llamaremos orden de Sarkovskii para los números naturales. Pasamos a enunciar y demostrar el teorema.

Teorema 7.4. *(Teorema de Sarkovskii.) Suponemos $f : R \to R$ continua. Suponemos que f tiene un punto periódico de periodo k. Si $k \triangleright l$, entonces f tiene un punto periódico de periodo l.*

Antes de la demostración citamos ciertas consecuencias de este teorema.

Comentarios 7.5.

1. Si f tiene un punto periódico cuyo periodo no es una potencia de dos, entonces f tiene infinitos puntos periódicos. Por el contrario, si f tiene un número finito de puntos periódicos, entonces necesariamente solo tiene puntos periódicos de periodo potencia de dos.

2. El periodo 3 es el más influyente de todos, por ser el primero en el orden de Sarkovskii, la suya implica la existencia de todos los demás periodos.

3. El recíproco del Teorema de Sarkovskii es cierto, si una aplicación tiene un punto periódico de periodo p, no tiene puntos periódicos de periodo superior a p en el orden de Sarkovskii.

Notación 7.6. *Dados dos intervalos cerrados I_1 y I_2 si $f(I_1)$ cubre I_2 lo denotamos por $I_1 \to I_2$.*

Demostración. Para la demostración usaremos las dos observaciones dadas anteriormente. Si encontramos una secuencia de intervalos:

$$I_1 \to ... \to I_n \to I_1,$$

entonces por la Observación 7.2, f^n tiene un punto fijo en I_1. Primero asumimos que f tiene un punto periódico x de periodo n, con $n > 1$ y impar. Entonces suponemos que f no tiene puntos periódicos de periodo impar menor a n. Sean $x_1, ..., x_n$ puntos de la órbita de x de izquierda a derecha, obviamente f permuta las x_i. Escogemos el mayor i tal que $f(x_i) > x_i$ entonces denotamos I_1 como el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Claramente $f(x_{i+1}) < x_{i+1}$, además de $f(x_{i+1}) \leq x_i$ con lo que tenemos que $I_1 \subset f(I_1)$, y por tanto, $I_1 \to I_1$.

Como x no tiene periodo 2 es imposible que $f(x_{i+1}) = x_i$ y $f(x_i) = x_{i+1}$ así que $f(I_1)$ contiene al menos otro intervalo de la forma $[x_j, x_{j+1}]$. Podríamos intuir que hay varios de estos intervalos, pero vemos a continuación que solo existe uno. Sea O_2 la unión de todos los intervalos de dicha forma que están cubiertos por $f(I_1)$. Por tanto $I_1 \subset O_2$ con $O_2 \neq I_1$, y si I_2 es algún intervalo de O_2 de la forma $[x_j, x_{j+1}]$, entonces $I_1 \to I_2$.

Ahora sea O_3 la unión de todos los intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ que son cubiertos por la imagen de algún intervalo de O_2. Inductivamente sea O_{l+1} la unión de todos los intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ que son cubiertos por la imagen de algún intervalo de O_l. Destacamos que si I_{l+1} es algún intervalo de O_{l+1}, entonces tenemos la colección de intervalos con $I_j \subset O_j$ tal que:

$$I_1 \to ... \to I_{l+1}.$$

Ya que tenemos un número finito de x_j entonces existe un l tal que $O_{l+1} = O_l$. Para este l tenemos que O_l contiene todos los intervalos de la forma $[x_j, x_{j+1}]$, ya que de lo contrario x tendría un periodo menor que n. Afirmamos que hay al menos un intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ diferente de I_1 en algún O_k cuya imagen cubre I_1. Tenemos pues que hay más $x_i's$ en un lado de I_1 que en el otro, al ser n impar. Por lo tanto algunos $x_i's$ que deben cambiar de lado bajo iteración de f y otros no. En consecuencia hay al menos un intervalo cuya imagen cubre I_1. Ahora consideramos secuencias de intervalos $I_1 \to ... \to I_k \to I_1$ donde cada I_k es de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ para algún j y tal que $I_1 \neq I_2$. Escogemos el menor k que cumple este ciclo. Si $k < n-1$, entonces uno de ciclos $I_1 \to I_k \to I_1$ o $I_1 \to I_k \to I_1 \to I_1$ da un punto fijo de f^m con m impar y $m < n$. Este punto debe tener periodo menor que k ya que $I_1 \cup I_2$ consiste en solo un punto con periodo mayor que m. Por lo tanto $k = n-1$. Como k es el menor que cumple la condición, no podemos tener $I_l \to I_j$ para cualquier $j > l+1$. Entonces la órbita de x debe ordenarse en R de alguna de las dos maneras que vemos en la Figura 5. Podemos expandir el diagrama anterior hacia el descrito en la Figura 6: Periodos más largos a n nos dan ciclos de la forma $I_1 \to ... \to I_{n-1} \to I_1 \to I_1$. El menor periodo par que da ciclos de la forma:

$$I_{n-1} \to I_{n-2} \to I_{n-1},$$

$$I_{n-1} \to I_{n-4} \to I_{n-3} \to I_{n-2} \to I_{n-1},$$

etcétera. Para el caso n par, primero tenemos que f debe tener un punto periódico de periodo 2. Seguimos con los argumentos que garantizan que algún $x_i's$ cambia de lado bajo iteración de f y otro no, ya que $I_n - 2 \to I_{n-1}$ y $I_n - 1 \to I_{n-2}$. Si no es el caso entonces todos los $x_i's$ deben cambiar de lado y entonces $[x_{i+1}, x_n] \subset f([x_1, x_i])$ y $[x_1, x_i] \subset f([x_{i+1}, x_N])$. Por tanto por las observaciones anteriores produce un punto de periodo 2 en $[x_1, x_i]$.

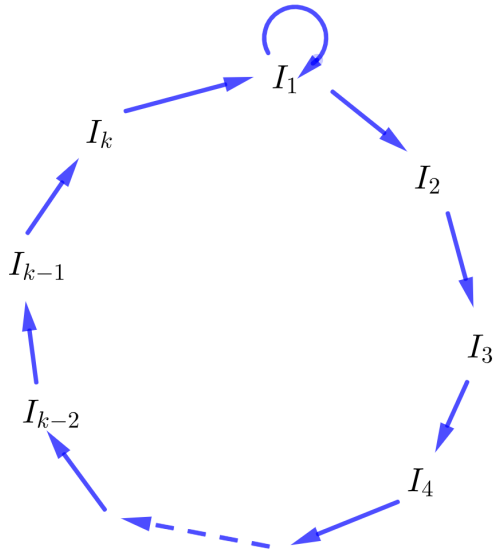

Figura 5: Diagrama de la cadena de intervalos $I_1 \to ... \to I_k \to I_1$

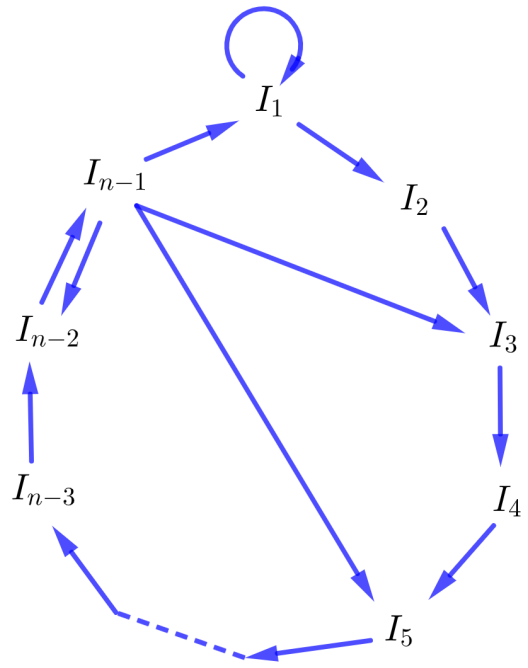

Figura 6: Diagrama extendido

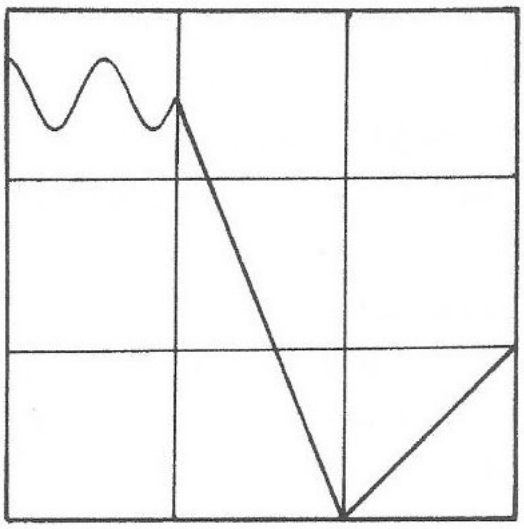

Figura 7: Gráfica de $F(x)$, el doble de $f(x)$.

Demostramos ahora el caso $n = 2^m$. Sea $k = 2^l$ con $l < m$. Consideramos $g = f^{k/2}$. Por suposición, g tiene un punto periódico de periodo 2^{m-l+1}. Por tanto, g tiene un punto de periodo 2. Este punto tiene periodo 2^l por f.

El caso final $n = p \cdot 2^m$ donde p es impar, se reduce a los dos anteriores. □

Pasamos a ver, como ya avanzamos en los comentarios, el recíproco de este teorema. Consideramos una aplicación de periodo 5 pero no 3, $f : [1, 5] \to [1, 5]$ tal que:

$$f(1) = 3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 2,\ f(2) = 5,\ f(5) = 1.$$

Suponemos que f es lineal en este tramo, tenemos que:

$$f^3[1, 2] = [2, 5]$$

$$f^3[2, 3] = [3, 5]$$

$$f^3[4, 5] = [1, 4].$$

Por tanto f^3 no tiene puntos fijos en este intervalo. Es cierto que $f^3[3, 4] = [1, 5]$ así que al menos f^3 tiene que tener un punto fijo en $[3, 4]$. Pero debe de ser único al ser monótonamente decreciente y por tanto es el punto fijo de f, y no un punto de periodo 3. Podemos generalizarlo para la primera porción del orden de Sarkovskii.

Para el caso de periodos pares utilizaremos una especie de truco. Sea $f : I \to I$ función continua. Construimos otra función F, tal que sea el doble de f con puntos periódicos con periodo el doble que en f, más un punto fijo adicional. El procedimiento para crearlo es el siguiente, divide el intervalo I en tres partes. Comprime el gráfico de f en la esquina superior izquierda de $I \times I$ y el resto como sigue en la Figura 7.

La aplicación F es lineal por partes, en $[1/3, 2/3]$ y $[2/3, 1]$. Además $F(2/3) = 0$, $F(1) = 1/3$ y F continua. Notamos que F asigna $[0, 1/3]$ dentro de $[2/3, 1]$ y viceversa. También si $x \in [1/3, 2/3]$ no es un punto fijo, entonces existe n tal que $F^n(x) \in [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Esto implica que no hay puntos periódicos en F en el intervalo $(1/3, 2/3)$. Por tanto podemos demostrar que si x es un punto periódico de periodo n para f, entonces $x/3$ es un punto

periódico de periodo $2n$ para F. Por otro lado si y es un punto periódico de F entonces o y o $F(y)$ se encuentran en el intervalo $[0, 1/3]$ y podemos demostrar que $3y$ o $3F(y)$ son f periódicas. Por tanto para tener una aplicación con periodo 10 pero no 6 necesitamos duplicar la gráfica de una función con periodo 5 pero no 3.

Como comentario final de este capítulo destacar que el Teorema de Sarkovskii solo vale para el caso unidimensional, y no tenemos uno equivalente para dimensiones superiores. Por ejemplo la aplicación que rota 120 grados todos los puntos de un círculo hace que todos sus puntos sean de periodo único 3, en contradicción con el Teorema de Sarkovskii, no obstante, nos da una herramienta muy útil para capítulos posteriores.

8. La derivada de Schwarz

En este capítulo introducimos, en el estudio unidimensional de sistemas dinámicos, el concepto de derivada de Schwarz. Nos servirá de herramienta para averiguar el límite de órbitas periódicas atractoras que puede tener una aplicación. Pasamos a la definición.

Definición 8.1. *La derivada de Schwarz de una función f en x es:*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

Ejemplos 8.2.

1. $SF_\mu(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2}$
2. $S(e^x) = -1/2$

Veremos más adelante que son más interesantes las funciones con derivada de Schwarz negativa. Una propiedad bastante útil es que la composición de funciones conserva el hecho de que la derivada de Schwarz sea negativa.

Proposición 8.3. *Suponemos $Sf < 0$ y $Sg < 0$. Entonces $S(f \circ g) < 0$.*

Demostración. Se demuestra fácilmente aplicando la regla de la cadena y la fórmula de derivada de Schwarz. □

La suposición de que $Sf < 0$ aporta resultados realmente importantes para la dinámica unidimensional, lo vemos con el siguiente teorema.

Teorema 8.4. *Suponemos $Sf < 0$, con la posibilidad de $Sf(x) = -\infty$. Suponemos que f tiene n puntos críticos, entonces f tiene como mucho $n+2$ órbitas periódicas atractoras.*

Comentarios 8.5.

1. La aplicación cuadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ tiene un punto crítico $x = 1/2$. Por lo tanto para cada μ existen como mucho 3 órbitas periódicas atractoras. Posiblemente no tenga ninguna como el caso de $\mu > 2 + \sqrt{5}$.
2. Las siguientes demostraciones se extienden también para puntos no hiperbólicos. Consecuentemente la aplicación cuadrática tiene como máximo una órbita periódica que no sea repulsora. Es curioso que para μ grande, F_μ tenga infinitas órbitas periódicas y solo una de ellas pueda ser atractora.

3. Suponemos que F_μ tiene una órbita periódica atractora de periodo 3, por el Teorema de Sarkovskii F_μ tiene órbitas periódicas de cualquier periodo, pero a causa de este Teorema ninguna de ellas atractora. De ahí surge un dilema computacional, si solo son visibles los puntos periódicos atractores, dónde están el resto de puntos periódicos? Daremos una respuesta en futuros capítulos.

Enunciamos y probamos tres lemas que usaremos para demostrar el teorema anterior.

Lema 8.6. *Si $Sf < 0$ entonces $f'(x)$ no puede tener un mínimo local positivo ni un máximo local negativo.*

Demostración. Suponemos que x_0 es un punto crítico de $f'(x)$, es decir, $f''(x_0) = 0$. Ya que $Sf(x_0) < 0$, tenemos que $\frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} < 0$ por tanto $f'''(x_0)$ y $f'(x_0)$ tienen signo opuesto.□

De este lema sacamos que entre dos puntos críticos consecutivos de f' el gráfico de $f'(x)$ debe cortar el eje x, en consecuencia f debe tener un punto crítico entre estos dos puntos.

Lema 8.7. *Si $f(x)$ tiene un número finito de puntos críticos, entonces $f^m(x)$ también.*

Demostración. Para cada c, $f^{-1}(c)$ es un conjunto finito de puntos, ya que, entre dos preimagenes de c cualesquiera, debe haber al menos un punto crítico de f. Vemos fácilmente que:

$$f^{-m}(c) = \{x \mid f^m(x) = c\}$$

es también un conjunto finito. Ahora suponemos $(f^m)'(x) = 0$. Por la regla de la cadena, tenemos:

$$(f^m)'(x) = \prod_{i=0}^{m-1} f'(f^i(x)).$$

Por lo tanto para algún i, $0 \leq i \leq m-1$, $f^i(x)$ es un punto crítico de f. Entonces el conjunto de punto críticos de f^m viene dado por la unión de imágenes inversas de orden menor a m del conjunto de puntos críticos de f junto con sus órbitas. Por el argumento anterior este es un conjunto finito de puntos. □

Lema 8.8. *Suponemos $f(x)$ tiene un número finito de puntos críticos y $Sf < 0$. Entonces f tiene solo un número finito de puntos periódicos de periodo m para cualquier entero m.*

Demostración. Sea $g = f^m$, entonces los puntos periódicos de periodo m para f son puntos fijos para g. Vimos anteriormente que $Sg < 0$. Suponemos que g tiene infinitos puntos fijos, por el Teorema del Valor Medio, hay infinitos puntos tal que $g'(x) = 1$. Entre tres puntos cualesquiera consecutivos tal que $g'(x) = 1$, debe haber un punto para el cual $g' < 1$.

Realmente $g'(x)$ no es exactamente igual a 1 en un intervalo, porque entonces $Sg = 0$ contradiciendo el hecho de que $Sg < 0$. Además por el Lema 8.6, g' no puede tener un mínimo local positivo entre estos tres puntos. Por lo tanto debe haber puntos tal que $g' < 0$. En consecuencia hay puntos para los cuales $g' = 0$. Pero esto implica que g tiene infinitos puntos críticos, contradiciendo el Lema 8.7 que hace que completemos la demostración. □

Ahora ya tenemos lo necesario para demostrar el Teorema 8.4.

Demostración. Sea p un punto periódico atractor de periodo m para f y sea $W(p)$ el intervalo maximal alrededor de p en el cual todos los puntos tienden asintóticamente a p bajo iteración de f^m. Claramente $W(p)$ es un intervalo abierto y $f^m(W(p)) \subset W(p)$. Supongamos por el momento que p es fijo. Ya que $f(W(p)) \subset W(p)$ y $W(p)$ es maximal, tenemos que f conserva los puntos finales de $W(p) = (l, r)$, o uno o ambos de l y r son infinitos. En el caso finito, tres posibilidades:

1. $f(l) = l$, $f(r) = r$.
2. $f(l) = r$, $f(r) = l$.
3. $f(l) = f(r)$.

Si $f(l) = l$ y $f(r) = r$, entonces la gráfica de f muestra que existen a y b tal que $l < a < p < b < r$ y $f'(a) = f'(b) = 1$. Ya que $f'(p) < 1$ y f' no puede tener un mínimo local positivo, por el Lema 8.6, por tanto existe un punto crítico en el intervalo (a, b). En el segundo caso lo hacemos de forma similar considerando f^2. En el tercero y último f debe tener un mínimo o máximo entre l y r, así que $W(p)$ tiene un punto crítico en este caso también.

En el caso de l y/o r infinito, la demostración falla. Sin embargo, estos casos admiten como mucho dos puntos fijos estables. Si p es periódico, el mismo argumento produce un punto crítico para f^m en $W(p)$. Un punto en la órbita de este punto crítico debe ser un punto crítico de f a causa de la regla de la cadena. □

Corolario 8.9. *Si f(x) tiene un punto fijo c con multiplicidad* ± 1 *y* $Sf < 0$*, entonces c debe atraer puntos de al menos una parte y haber un punto crítico en W(c).*

Demostración. Asumimos que $f'(c) = 1$, de manera contraria considerar f^2. Por el Lema 8.8, f tiene solo un número finito de puntos fijos, por lo tanto hay un intervalo que contiene c en que f no tiene otros puntos fijos. Suponemos que c es un punto fijo repulsor. Claramente, f' tiene un valor mínimo local de 1. Esto contradice el Lema 8.6 y muestra que $f(x) > x$ para $a < x < c$ o $f(x) < x$ para $c < x < b$. Por tanto c es un punto fijo atractor de al menos una parte. □

La anterior demostración muestra que puntos periódicos con conjuntos estables acotados atraen un punto crítico. Vemos la importancia de que los conjuntos sean acotados con un ejemplo.

Ejemplo 8.10. Sea $E(x) = e^{x-1}$, no acotado. Tenemos $SE(x) = -1/2 < 0$ y E tiene un único punto fijo en $x = 1$ que atrae los puntos de la izquierda y repele los de la derecha. A pesar de esto E no tiene puntos críticos.

Damos otro corolario relacionado con lo mencionado en el Comentario 8.5.

Corolario 8.11. *Suponemos la aplicación cuadrática* F_μ*, entonces existe como mucho una órbita periódica atractora para cada* μ*.*

Demostración. Hemos demostrado que $SF_\mu < 0$ y que, si $|x|$ es suficientemente grande, entonces $|F_\mu^n(x)| \to \infty$. Por tanto no hay puntos periódicos atractores con conjuntos estables. □

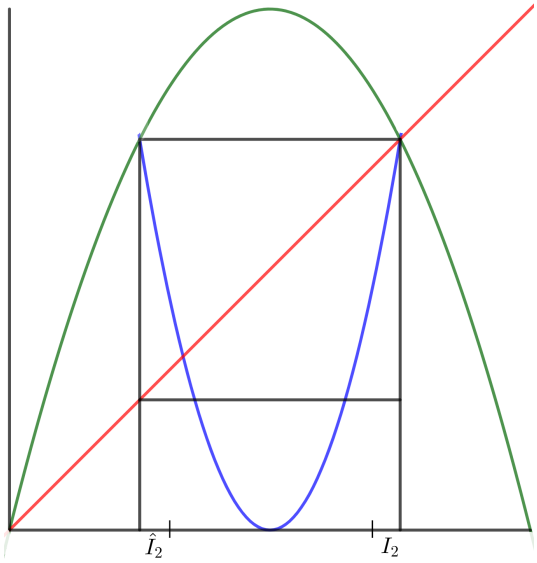

Figura 8: Intervalos I_2 y $\hat{I}_2$

Podría pasar que F_μ no tuviese ninguna órbita periódica, como el caso de $\mu = 4$ o $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Destacamos que cuando una aplicación tiene derivada de Schwarz negativa, las órbitas de los puntos fijos juegan un papel fundamental en determinar su dinámica.

Analizamos la aplicación cuadrática $F_4(x) = 4x(1-x)$, que es caótica en el intervalo unidad. Como el punto crítico está asignado en un punto fijo repulsor, tenemos que F_4 no puede tener órbitas periódicas atractoras. El hecho de que $SF_4 < 0$ nos ayuda a demostrar que los puntos periódicos repulsores son densos en I, cosa que veremos más tarde.

Tenemos que F_4 tiene un punto fijo repulsor en $p = 3/4$, tomamos $\hat{p} = 1/4$, tal que $F_4(\hat{p}) = p$. Sea J el intervalo $[\hat{p}, p)$. Describimos una aplicación de retorno R en el interior de $J - \{1/2\}$. Intuitivamente $R(x) = F_4^n(x)$, donde n es el entero más pequeño para el cual $F_4^n(x) \in J$. Para definir más precisamente R primero notamos que F_4 asigna J sobre el intervalo $[3/4, 1]$. De manera que si $x \in J$ entonces $F_4(x) \notin J$. Tenemos que F_4 asigna $[3/4, 1]$ homeomorficamente sobre el intervalo $[0, 3/4]$, cosa que hace que ciertos puntos de J se asignen nuevamente sobre J por F_4^2. Vemos en la Figura 8 que hay dos intervalos I_2 y $\hat{I}_2$ en J que son asignados homeomorficamente sobre J por F_4^2. Vemos que ambos intervalos son semiabiertos.

Definiremos $R(x) = F_4^2(x)$ para $x \in I_2 \cup \hat{I}_2$. Si $x \in J$ pero $x \notin I_2 \cup \hat{I}_2$, entonces $F_4^2(x) \in [0, 1/4)$. Seguimos con que mientras que $x \neq 1/2$ la órbita de x eventualmente regresa a J. Más precisamente, si $J - \{1/2\}$ existe el mínimo número entero $n \geq 2$ tal que $F_4^n(x) \in J$. Sea $\phi(x)$ este entero, tenemos que ϕ da el momento de este primer retorno de J. Vemos que $\phi = 2$ en $I_2 \cup \hat{I}_2$. Definimos de una forma más precisa:

$$I_n = \{x \in (1/2, p) \,|\, \phi(x) = n\}$$

$$\hat{I}_2 = \{x \in [\hat{p}, 1/2) \,|\, \phi(x) = n\}.$$

Es fácil de ver que I_n y $\hat{I}_n$ son intervalos semiabiertos y que F_4^n asigna I_n y $\hat{I}_n$ homeomorficamente sobre J. Por tanto definimos $R : J - \{1/2\} \to J$ por:

$$R(x) = F_4^{\phi(x)}(x).$$

Recalcamos que R no está definida en $1/2$ y tiene infinitos puntos de discontinuidad. A pesar de esto la aplicación de retorno nos puede proporcionar toda la información que necesitemos de F_4. El hecho de que cada F_4^n tenga derivada de Schwarz negativa nos permite observar que si K es un intervalo cualquiera en el que $(F_4^n)' \neq 0$, entonces el valor mínimo de $|(F_4^n)'(x)|$ ocurre en uno de los puntos límite de K, esto nos permite probar el siguiente resultado.

Proposición 8.12. *$|R'(x)| > 1$ para cada $x \in J$.*

Demostración. Lo vemos para los intervalos que quedan a la derecha, I_n, por simetría se haría de manera similar para $\hat{I}_n$. Sean $I_k = [l_k, r_k)$ y:

$$W_k = \bigcup_{n>k}^{\infty} I_n.$$

W_k es un intervalo abierto acotado por $1/2$ y l_k. Debemos demostrar que $(F_4^k)'(x) > 1$ para $l_k \leq x \leq r_k$. Por la observación anterior, ya que $(F_4^k)' \neq 0$ en I_k, es suficiente demostrar esta condición para l_k y r_k.

Ahora F_4^k asigna $I_k \cup W_k$ homeomorficamente sobre $(0, p)$ y I_k sobre $(\hat{p}, p)$, ya que la longitud de I_k es menor que $1/4$, y existe $x_k \in I_k$ con $(F_4^k)'(x_k) > 1$. Ahora F_4^k debe asignar W_k sobre $(0, \hat{p})$. De la misma manera la longitud de W_k es menor que $1/4$, y existe $x'_k \in W_k$ con $(F_4^k)'(x'_k) > 1$. Ya que $(F_4^k)'$ no puede tener un mínimo local positivo, entonces $(F_4^k)'(l_k) > 1$ ya que $x'_k < l_k < x_k$. Falta demostrar que $(F_4^k)'(r_k) > 1$, lo vemos:

$$(F_4^k)'(r_k) = F_4'(F_4^{k-1}(r_k))(F_4^{k-1})'(r_k) = F_4'(\hat{p})(F_4^{k-1})'(l_{k-1}).$$

Como todos los términos son mayores que 1 queda demostrado. □

Pasamos a probar lo citado anteriormente, que los puntos repulsores son densos. Sea U cualquier intervalo de I, debemos obtener un punto periódico repulsor en U. Para conseguirlo buscaremos $n > 0$ tal que $F_4^n(U)$ es un intervalo que contiene U.

Tenemos que para $|F_4'(x)| > 1$ si $x \notin J$, hay un $n > 0$ y un subintervalo $U_0 \subset U$ con $V = F_4^n(U_0) \subset J$. Por esto R expande las longitudes de los intervalos en J por la Proposición 8.12. Por tanto hay un $k > 0$ y un subintervalo $V_0 \subset V$ tal que $R^k(V_0)$ contiene un punto de discontinuidad de R. Entonces existe un $m > 0$ tal que $p \in F_4^m(V_0)$. Haciendo un análisis gráfico vemos que cualquier punto del entorno de p es eventualmente expandido bajo iteración de manera que cubre I. En particular, existe un $k > 0$ tal que $F_4^{m+k}(V_0)$ cubre I. Por tanto vemos fácilmente que dichos puntos son densos.

Comentarios 8.13.

1. El argumento anterior se puede usar para demostrar tanto la dependencia sensitiva en condiciones iniciales como la transitividad topológica en la aplicación cuadrática $F_4(x)$.

2. Para aplicar este argumento a otros ejemplos debemos tener en cuenta que, el momento crucial ha sido usar que F_4^k expande tanto W_k como I_k sobre $(0, \hat{p})$ y J respectivamente.

Como conclusión, destacamos que en este capítulo hemos dado herramientas que van más allá de ver que la dinámica de una aplicación es caótica. Dado que los puntos periódicos repulsores son densos, se deduce que no puede haber intervalos que deambulan bajo

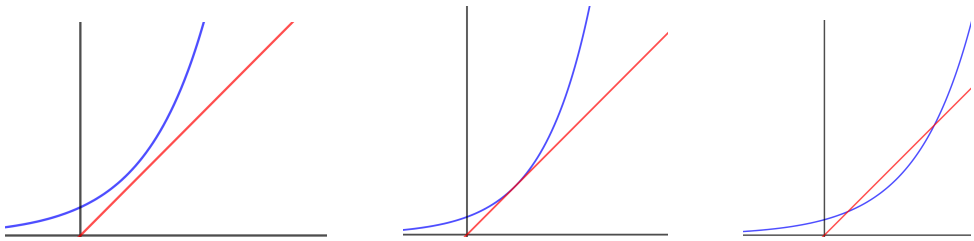

Figura 9: Gráfica de $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ cuando, de izquierda a derecha, $\lambda > 1/e$, $\lambda = 1/e$ y $\lambda < 1/e$

la iteración de la aplicación y nunca se reinserten a así mismos. A este tipo de intervalos se les conoce como intervalos *wandering*. Por tanto en ciertos casos, podemos descartar la posibilidad de que existan dichos intervalos al tener derivada de Schwarz negativa. Más adelante nos encontraremos de nuevo con este concepto.

9. La teoría de la bifurcación

Coloquialmente podríamos definir bifurcación como algo que se divide en dos partes, o que a partir de cierto punto toma dos caminos distintos. Por ejemplo un río, cuando su corriente se divide en dos, o las vías de un tren, que se separan para llegar a distintos destinos.

En sistemas dinámicos usaremos la teoría de bifurcación para estudiar los cambios cualitativos que experimentan las aplicaciones a medida que cambian de parámetros. Por tanto, en esta sección consideraremos familias que dependan de un parámetro real, más precisamente, consideramos funciones de dos variables:

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x)$$

donde para cada λ, $f_\lambda(x)$ es una función C^∞ de la variable x. Damos unos ejemplos:

1. $E_\lambda(x) = \lambda e^x$.
2. $S_\lambda(x) = \lambda \sin(x)$.
3. $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$.

Nuestro objetivo será saber cuando y como cambia la estructura de puntos periódicos de nuestra aplicación, es decir, las bifurcaciones que sufrirá la familia. Empezamos analizando los ejemplos anteriores.

Ejemplo 9.1. (Bifurcación Silla-Nodo). Consideramos la familia $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ con $\lambda > 0$. Experimenta una bifurcación en $\lambda = 1/e$, para verlo vemos como cambia la gráfica de E en función de λ. Observamos la Figura 9.

Cuando $\lambda > 1/e$ el gráfico de E no corta la recta $x = y$, por tanto E no tiene puntos fijos. Para $\lambda = 1/e$ el gráfico es tangente a la recta $x = y$ en $x = y = 1$. Por último para $\lambda < 1/e$ el gráfico corta la recta en dos puntos, en q con $E'_\lambda(q) < 1$ y en p con $E'_\lambda(p) > 1$, por tanto E_λ tiene dos puntos fijos. Entonces vemos que a medida que decrece el parámetro λ, E pasa de no tener puntos fijos a tener dos al superar el valor $1/e$. En resumen:

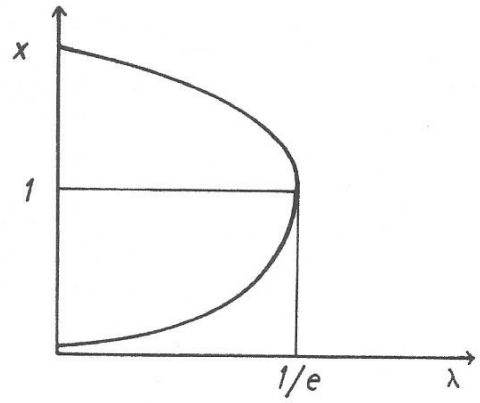

Figura 10: Diagrama de bifurcación para $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ con $\lambda > 0$.

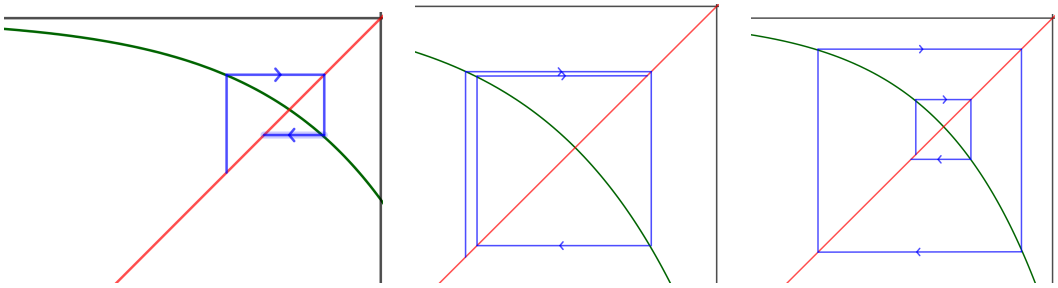

Figura 11: Gráfica de $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ cuando, de izquierda a derecha, $-e < \lambda < 0$, $\lambda = -e$ y $\lambda < -e$.

1. Cuando $\lambda > 1/e$, $E_\lambda^n(x) \to \infty$ para todo x.
2. Cuando $\lambda = 1/e$, tenemos un punto fijo en $x = 1$. Si $x < 1$, $E_\lambda^n(x) \to 1$. Y si $x > 1$, $E_\lambda^n(x) \to \infty$.
3. Cuando $0 < \lambda < 1/e$, tenemos dos puntos fijos en $x = q$ y $x = p$, si $x < p$, $E_\lambda^n(x) \to q$ y si $x > p$, $E_\lambda^n(x) \to \infty$.

Observamos que en la bifurcación ($\lambda = 1/e$, $x = 1$), tenemos que $E'_\lambda(1) = 1$ y $E''_\lambda(1) = 1$. Esta bifurcación se puede describir mediante un diagrama de bifurcación en el cual trazamos la ubicación de puntos fijos frente al parámetro, como en la Figura 10.

Cada corte vertical en el diagrama de bifurcación nos da los puntos fijos de E en la línea real.

Ejemplo 9.2. (Bifurcación doblamiento de periodo). Consideramos de nuevo la familia $E_\lambda(x) = \lambda e^x$, en este caso $\lambda < 0$. En la Figura 11 vemos tres casos a destacar.

Cuando $\lambda = -e$, $E_\lambda(-1) = -1$ y $E'_\lambda(-1) = -1$, entonces -1 es un punto fijo no hiperbólico de E_λ. Cuando $\lambda > -e$, tenemos un punto fijo atractor y cuando $\lambda < -e$ un punto repulsor. Por lo tanto el punto fijo de E sufre un cambio cuando $\lambda = -e$. Consideramos ahora E_λ^2, vemos fácilmente que si $E_\lambda(x) > -1$ la gráfica de E_λ^2 es convexa, mientras que si $E_\lambda(x) < -1$ es cóncava. Así que E_λ^2 tiene dos puntos de periodo 2, q_1 y q_2 cuando λ disminuye por debajo de $-e$. En resumen, esta bifurcación dinámicamente causa:

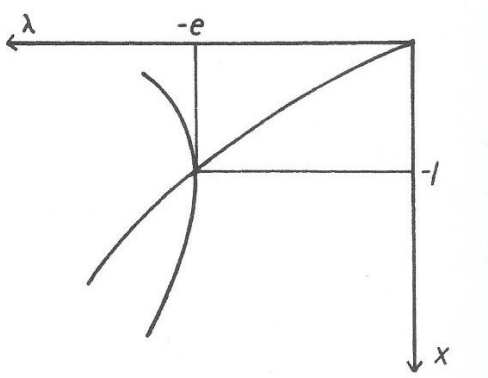

Figura 12: Diagrama de bifurcación para $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ con $\lambda < 0$.

1. Un cambio de punto fijo atractor a repulsor.
2. El nacimiento de órbitas de periodo dos.

Observamos que, a medida que el punto fijo pierde su atracción, la adquiere la órbita de periodo dos. También que $(E_\lambda^2)'(-1) = 1$, $(E_\lambda^2)''(-1) = 0$ y $(E_\lambda^2)'''(-1) \neq 0$. Vemos como queda el diagrama de bifurcación en la Figura 12.

Estas dos bifurcaciones son las más típicas con las que se puede encontrar una aplicación, no obstante existen otras bifurcaciones, menos comunes, que reflejamos con otro ejemplo.

Ejemplo 9.3. Consideramos ahora la familia cuadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Cuando $\mu = 1$, F_μ tiene un único punto fijo, pero para todos $\mu \neq 0$, hay dos puntos fijos. Esta bifurcación es atípica, ya que:

$$\frac{d}{d\mu} F_\mu(0)\Big|_{\mu=1} = 0,$$

generalmente requeriremos que las bifurcaciones ocurran con una velocidad distinta de cero en la variable de parámetro.

Hemos visto que estas bifurcaciones ocurren cerca de puntos fijos o periódicos no hiperbólicos. Corroboramos en el siguiente teorema que es el único escenario donde las encontraremos.

Teorema 9.4. *Sea f_λ una familia de funciones uniparamétricas y suponemos que $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$ y $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$. Entonces existen intervalos I de x_0 y N de λ_0, y una función suave $p : N \to I$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ y $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$. Además, f_λ no tiene otros puntos fijos en I.*

Demostración. Consideramos la función definida por $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Tenemos que $G(x_0, \lambda_0) = 0$ y que:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0.$$

Por el Teorema de la Función Implícita, hay intervalos I de x_0 y N de λ_0, y una función suave $p : N \to I$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ y $G(p(\lambda), \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in N$. Además $G(x, \lambda) \neq 0$ a no ser que $x = p(\lambda)$. □

Comentarios 9.5.

1. A menudo es conveniente suponer que el conjunto de puntos fijos de f_λ no varía si λ tampoco lo hace. Suponemos f_λ cumple las condiciones del Teorema anterior, consideramos la función:

$$g_\lambda(z) = f_\lambda(z + p(\lambda)) - p(\lambda).$$

   Claramente $g_\lambda(0) = f_\lambda(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$ para todo λ, así que 0 es siempre punto fijo. Además g_λ es topológicamente conjugada a f_λ a través de la aplicación $h_\lambda(x) = x - p(\lambda)$. Por tanto las dinámicas de f_λ y g_λ coinciden, esto nos beneficia al ser g_λ más simple de manejar ya que su punto fijo permanece estacionario en 0 al variar λ.

2. El teorema anterior, al igual que los siguientes, se cumple para puntos periódicos remplazando f por f^n.

Plasmamos lo visto en los ejemplos anteriores con dos teoremas.

Teorema 9.6. *(Bifurcación Silla-Nodo). Suponemos que:*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$
2. $f'_{\lambda_0}(0) = 1$
3. $f''_{\lambda_0}(0) \neq 0$
4. $\left.\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

Entonces existe un intervalo I de 0 y una función suave $p : I \to R$ con $p(0) = \lambda_0$ y tal que:

$$f_{p(x)}(x) = x.$$

Además $p'(0) = 0$ y $p''(0) \neq 0$.

Observación 9.7. El signo de $f''_{\lambda_0}(0)$ y $\left.\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$ determina la dirección de la bifurcación.

Demostración. Definimos $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Notamos que $G(x, \lambda) = 0$, que implica que f_λ tiene un punto fijo en x. Aplicamos el Teorema de la Función Implícita en G. Tenemos que $G(0, \lambda_0) = 0$ y que:

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \left.\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0.$$

Por tanto existe una función suave $p(x)$ que satisface $G(x, p(x)) = 0$. Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \lambda} p'(x) = 0.$$

Por lo tanto:

$$p'(x) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}(x, p(x))}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, p(x))}.$$

Derivando y aplicando lo anterior:

$$p'(0) = \frac{-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0)\ \frac{\partial G}{\partial \lambda}\big|_{\lambda=\lambda_0}(0)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)^2} = -\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}(0)}.$$

Con esto completamos la demostración. □

Teorema 9.8. *(Bifurcación doblamiento de periodo). Suponemos que:*

1. $f_\lambda(0) = 0$ *para todo* λ *en un intervalo de* λ_0.
2. $f'_{\lambda_0}(0) = -1$.
3. $\frac{\partial (f_\lambda^2)'}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$.

Entonces hay un intervalo I *de 0 y una función* $p : I \to R$ *tal que:*

$$f_{p(x)}(x) \neq x,$$

pero

$$f^2_{p(x)}(x) = x.$$

Demostración. Para esta prueba definimos $G(x, \lambda) = f^2_\lambda(x) - x$. No podemos aplicar directamente el Teorema de la Función Implícita ya que:

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = 0.$$

Así que tomamos: $H(x, \lambda) = \frac{G(x,\lambda)}{x}$ si $x \neq 0$ y $H(x, \lambda) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda)$ si $x = 0$.

Vemos que H es suave y que cumple:

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{\partial^2 G}{2\partial x^2}(0, \lambda_0)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{\partial^3 G}{3\partial x^3}(0, \lambda_0).$$

Ahora ya podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita en H. Tenemos que:

$$H(0, \lambda_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) = (f^2_{\lambda_0})'(0) - 1 = f'_{\lambda_0}(0) f'_\lambda(0) - 1 = 0.$$

Damos por supuesto que:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}((f^2_\lambda)'(0) - 1) = \frac{\partial (f^2_\lambda)'}{\partial \lambda}(0) \neq 0.$$

Por lo tanto hay una función suave $p(x)$ definida en un entorno de 0 y que satisface que $p(0) = \lambda_0$ y $H(x, p(x)) = 0$. En particular, para $x \neq 0$:

$$\frac{G(x, p(x)}{x} = 0.$$

Entonces x es un punto de periodo 2 para $f_{p(x)}$, no es fijo a causa del teorema que vimos al principio del capítulo. Como antes, calculamos:

$$p'(0) = \frac{-\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = 0,$$

ya que:

$$(f^2_{\lambda_0})''(0) = f''_{\lambda_0}(0)(f'_{\lambda_0}(0))^2 + f''_{\lambda_0}(0)f'_{\lambda_0}(0) = 0,$$

donde hemos usado $f'_{\lambda_0}(0) = -1$, para completar la prueba. □

Podríamos obtener más información sobre la configuración de la curva de puntos periódicos. Usando la notación anterior, calculamos:

$$p''(0) = \frac{-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0)\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}f'''_{\lambda_0}(0) + (f''_{\lambda_0}(0))^2}{\frac{\partial}{\partial \lambda}\big|_{\lambda=\lambda_0}(f^2_\lambda)'(0)}.$$

Tenemos que el numerador de esta expresión es precisamente $(-2/3)Sf_{\lambda_0}(0)$ ya que $f'_{\lambda_0}(0) = -1$. Lo que nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 9.9. *Suponemos la hipótesis adicional para el Teorema 9.8, $Sf_{\lambda_0}(0) \neq 0$. Entonces la curva $\lambda = p(x)$ satisface que $p''(0) \neq 0$.*

Comentarios 9.10.

1. Esto significa que o $\lambda = p(x)$ es cóncava en una dirección o en la dirección opuesta.

2. Si asumimos que $Sf_\lambda < 0$ para todo λ cercana a λ_0, entonces la familia f_λ no puede tener una bifurcación de doblamiento de periodo propuesta en λ_0. Nos referimos a una bifurcación del siguiente tipo, si $\lambda < \lambda_0$, f_λ tiene un único punto fijo local repulsor. Cuando $\lambda = \lambda_0$, f_λ tiene un único punto fijo con multiplicidad -1. Cuando $\lambda > \lambda_0$, f_λ tiene un único punto fijo atractor con un punto periódico de periodo 2. Por el Lema 8.6 del capítulo anterior vemos que esto no puede suceder.

10. Revisión del periodo tres

En este capítulo recuperamos la aplicación cuadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Tomamos un valor específico para el parámetro, $\mu = 3{,}835$. Por temas de simplificar la notación usaremos $F(x)$ para denotar $F_{3{,}835}(x) = 3{,}835x(1-x)$. El objetivo de este capítulo es completar lo que vimos en el Teorema de Sarkovskii, respecto a las implicaciones de la existencia de un punto periódico de periodo tres. $F(x)$ tiene una órbita periódica atractora de periodo tres. Lo probamos fácilmente con $a_1 = 0{,}152074$, ya que $F^3(a_1) = a_1$, además $(F^3)'(a_1) < 0$. Por tanto, por el Teorema de Sarkovskii F tiene puntos periódicos de cualquier periodo. Además por los resultados vistos anteriormente ninguno a parte de a_1 será atractor. Siendo prácticos, como estos puntos son invisibles para un ordenador, nos preguntamos que pasa con todos ellos y cuantos hay. Para responder a esto introducimos un nuevo concepto relacionado con lo visto en el capítulo 3, el *subshift* de tipo finito. Primero definimos la aplicación *shift* en N símbolos. Sea Σ_N el conjunto de todas las posibles secuencias de números naturales entre 1 y N:

$$\Sigma_N = \{(s) = (s_0 s_1 ...) \,|\, s_j \in Z,\, 1 \leq s_j \leq N\}.$$

Observamos que, a diferencia de Σ_2, Σ_N no admite la entrada 0, esto nos ayudará más adelante. Como en la dinámica simbólica tenemos una distancia en Σ_N definida por:

$$d_N[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(s_i, t_i)}{N^i},$$

donde $\delta(s_i, t_i) = 0$ si $s_i = t_i$ y $\delta(s_i, t_i) = 1$ en caso contrario. Damos una proposición análoga a la que dimos en el capítulo 3, nos ahorramos la demostración ya que son muy parejas.

Proposición 10.1.

1. *d_N es una métrica de Σ_N.*
2. *Si $s_i = t_i$ para $i = 0, ..., k$, entonces $d_N[s,t] \leq 1/N^k$.*
3. *Si $d_N[s,t] < 1/N^k$ entonces $s_i = t_i$ para $i \leq k$.*

Al igual que en el caso de Σ_2, manejamos la aplicación *shift* dada por $\sigma(s_0 s_1 s_2 ...) = (s_1 s_2 s_3 ...)$. Nuestro objetivo es describir ciertos subconjuntos de Σ_N que proporcionan un escenario más general para la dinámica simbólica. Sea A una matriz $N \times N$ cuyos elementos a_{ij} son 1 o 0, A se denomina matriz de transición del sistema. Cada par de entradas adyacentes en la secuencia s determina un elemento de la matriz, el $a_{s_i, s_{i+1}}$. Usaremos A para describir que secuencias de Σ_N se encuentran dentro de un subconjunto que denotamos por Σ_A. Una secuencia s se encuentra en Σ_A si y solo si cada una de estas entradas es 1. Más concretamente:

$$\Sigma_A = \{(s) = (s_0 s_1 ...) \in \Sigma_N \,|\, a_{s_i, s_{i+1}} = 1 \, \forall i\}.$$

Ejemplos 10.2.

1. Sea:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Al serlos elementos a_{12} y a_{21} nulos solo tenemos dos posibilidades en Σ_A, las secuencias constantes (111...) y (222...).

2. Sea:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
En este caso un 2 puede venir a continuación de un 1 pero no al revés. Por tanto Σ_A consta de las secuencias constantes más cualquier secuencia de la forma (1...122...).

Notación 10.3. *Denotamos por σ_A la restricción de σ en el conjunto Σ_A.*

Proposición 10.4. *Σ_A es un subconjunto cerrado de Σ_N que es invariante respecto σ_A.*

Demostración. La invariancia es trivial, pasamos a ver que Σ_A es cerrado. Suponemos que s_i es una secuencia de elementos de Σ_A, es decir, una secuencia de secuencias que converge a t. Si $t \notin \Sigma_A$, sea α el menor entero que cumple $a_{t_\alpha t_{\alpha+1}} = 0$. Como s_i converge

a t, existe otro entero k tal que, si $i > k$, entonces $d_N[s_i, t] < 1/N^{\alpha+1}$. Por la Proposición 10.4, las entradas $t_0, ..., t_{\alpha+1}$ deben coincidir con las correspondientes entradas de s_i para $i \geq k$. En particular, tenemos $a_{t_\alpha, t_{\alpha+1}} = 1$ ya que $s_i \in \Sigma_A$. Lo que nos lleva a una contradicción que acaba la prueba. □

Volvemos a la aplicación cuadrática $F(x) = 3{,}835x(1-x)$, existe una segunda órbita periódica de periodo 3 para F, de manera que $F^3(b_1) = b_1$ con $b_1 = 0{,}169040$. Como F solo debe tener una órbita periódica atractora, al serlo la primera, esta segunda deberá ser repulsora. Al igual que anteriormente, podríamos demostrar la existencia de estas órbitas periódicas calculando F^3 y $(F^3)'$ en un pequeño intervalo alrededor de b_1 o a_1 y observando que F^3 expande este intervalo sobre sí mismo.

Recordamos del capítulo 8 que hay un intervalo abierto maximal sobre cada a_i que consta de puntos que tienden a a_i bajo iteración de F^3. Denotamos este intervalo por $W(a_i)$. Por el Teorema 8.4 tenemos que uno de los puntos finales de $W(a_i)$ es fijo para F^3, por lo tanto b_i es uno de estos puntos. Denotamos por $\hat{b}_i$ el punto en el lado opuesto de a_i respecto b_i que se asigna a b_i por F^3.

Sean $A_1 = (\hat{b}_1, b_1)$, $A_2 = (\hat{b}_2, b_2)$ y $A_3 = (\hat{b}_3, b_3)$. Observamos que F asigna A_1 y A_3 monótonamente en A_2 y A_1 respectivamente, pero F tiene un punto crítico en $1/2 \in A_2$ así que F no es monótona en este intervalo. Sin embargo el valor máximo de F es 0,95975, entonces $F(A_2)$ está contenido en A_3. Notamos que $F(b_2) = F(\widehat{b_2}) = b_3$.

Recordamos que si $x < 0$ o $x > 1$ entonces $F^n(x) \to -\infty$. Además si $x \in A_i$ entonces $F^n(x)$ tiende a la órbita de a_i. Por tanto todos los otros puntos periódicos deben caer en el complementario de A_i en I. Hay 4 intervalos cerrados en el complementario de A_i en I, los llamamos $I_0, ..., I_3$ de izquierda a derecha. Como conocemos el comportamiento de los b_i bajo iteración de F sabemos como estos 4 intervalos se asignan por F. Como no hay otros puntos periódicos para F en $W(a_i)$, tenemos que todos los infinitos puntos periódicos deben caer en I_j. De hecho podemos precisar más, lo vemos en el siguiente resultado.

Proposición 10.5. *Todos los puntos periódicos de F se encuentran en $I_1 \cup I_2$ con la excepción del punto fijo 0 y los puntos periódicos de periodo tres: a_1, a_2, y a_3.*

Demostración. Observamos que F es monótona para cada intervalo I_j. F asigna I_0 a través de I_0 y I_1, I_1 en I_2, I_2 a través de I_1 y I_2, y finalmente I_3 en I_0. Por esto si un punto periódico $x \in I_1 \cup I_2$, entonces $F(x) \in I_1 \cup I_2$. Así, si $x \in I_1 \cup I_2$ se encuentra en una órbita periódica, entonces toda la órbita de x se encuentra en $I_1 \cup I_2$. Ahora, si $x \in I_0$ y $x \neq 0$, entonces $F(x) > x$. Por lo tanto existe un n tal que $F^n(x) \notin I_0$. O $F^n(x) \in A_1$, en caso que x no sea periódico,o $F^n(x) \in I_1$. En último caso, la órbita delantera de $F^n(x)$ nunca puede salir de I_1 o I_2 para volver a x, así, de nuevo, x no es periódico. Finalmente si $x \in I_3$, $F(x) \in I_0$, entonces x vuelve a no ser periódico. □

En consecuencia de este resultado todos los puntos periódicos restantes para F se encuentran en $I_1 \cup I_2$. Denotamos por Λ el conjunto de puntos cuya órbita completa se encuentra en estos dos intervalos. Para entender la dinámica de F en Λ, recurrimos de nuevo a la dinámica simbólica. Definimos la secuencia asociada a x:

$$S(x) = (s_0 s_1 ...),$$

donde $s_j = 1$ si $F^j(x) \in I_1$ y $s_j = 2$ si $F^j(x) \in I_2$. Como $F(I_1) = I_2$, entonces un 1 solo

puede estar seguido de un 2, es decir, S toma valores en Σ_A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cabe destacar que nos encontramos un fenómeno similar en la demostración del Teorema de Sarkovskii. De hecho, la existencia de un punto de periodo 3 fuerza la existencia de un par de intervalos que se comportan como I_1 y I_2 bajo iteración de F.

Teorema 10.6. *La restricción de F a Λ es topológicamente conjugada a la aplicación subshift de tipo finito dada por σ_A en Σ_A.*

Demostración. La mayoría de detalles están expuestos en el capítulo 4, nos centramos en la demostración de la inyectividad pues es la única parte que no se asemeja. La dificultad está en que $|F'(x)|$ no es en todas partes mayor que 1 en $I_1 \cup I_2$. Sin embargo podemos decir que $|F'(x)| > \nu = F'(\hat{b}_2) \approx 0{,}3$, ya que $F'' < 0$ y que el intervalo $(\hat{b}_2, b_2)$ que contiene el punto crítico ha sido eliminado. Por lo tanto $|F'|$ está acotado inferiormente.

Entonces existe $\lambda > 1$ tal que, si $x \in \Lambda$ entonces $|(F^3)'(x)| > \lambda$. Para demostrar esto, observamos que hay tres intervalos cerrados en $I_1 \cup I_2$ en los cuales $|(F^3)'(x)| \leq 1$. Dos de ellos, B_1 y B_2 están ubicados simétricamente respecto $1/2$, mientras que el tercero, B_3 se encuentra en I_2. Notamos que la imagen de F^3 en B_3 está contenida en $(\hat{b}_1, b_1)$ y entonces $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$. Observamos que B_1 y B_2 se asignan por F^3 en $(\hat{b}_3, b_3)$. De hecho podríamos comprobar fácilmente que B_2 está contenida en el intervalo $0{,}661 < x < 0{,}683$ y que $(F^3)'(0{,}661) > 1$ y $(F^3)'(0{,}683) < -1$, además F^3 asigna este intervalo dentro de $(\hat{b}_3, b_3)$. Por simetría $F^3(B_1) \subset (\hat{b}_3, b_3)$ también y por lo tanto $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$ y $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$.

Probamos ahora que Λ es un conjunto hiperbólico. Escogemos K tal que $\nu^2 \lambda^K > 1$. Sea $N = 3K + 2$ si $n > N$, entonces podemos escribir $n = 3(K + \alpha) + i$ donde $\alpha > 0$ y $0 \leq i \leq 2$ son enteros. Por lo tanto si $x \in \Lambda$ por la regla de la cadena tenemos:

$$|(F^n)'(x)| = |(F^i)'(F^{3(K+\alpha)}(x))||(F^{3(K+\alpha)})'(x)| > \nu^2 \lambda^{K+\alpha} > 1.$$

Con esto tenemos que Λ es un conjunto hiperbólico repulsor. Con hiperbolicidad establecida el resto de la demostración es similar al Teorema 4.2, así que la damos por terminada.□

Vemos que hay puntos periódicos de F para todos los periodos posibles, como nos garantiza el Teorema de Sarkovskii. De hecho para producir un punto periódico de periodo k en Σ_A necesitamos una secuencia de $k-1$ elementos con $2's$ seguidos de un 1, para después repetir la secuencia. Estas son exactamente las órbitas producidas en la demostración del Teorema de Sarkovskii. Por supuesto tenemos muchas secuencias repetidas permitidas en Σ_A, lo que nos hace dudar de cuantos puntos periódicos tiene F para cada periodo k. Lo vemos a continuación.

Proposición 10.7. *Sea A una matriz de transición $N \times N$. Entonces:*

$$Per_{K\sigma_A} = Tr(A^k).$$

Demostración. Recordamos que una secuencia s en Σ_A es fija por σ^K si s es una secuencia repetida de la forma $(i_0 ... i_{K-1} i_0 ... i_{K-1} ...)$. Esta secuencia se encuentra en Σ_A si $a_{i_0 i_1} a_{i_1 a_2} ... a_{i_{K-1} i_0} = 1$ si y solo si la lista $i_0 i_1 ... i_{K-1} i_0$ es una parte permitida de la secuencia Σ_A y igual a 0 en caso contrario. En consecuencia:

$$\sum_{i_0, i_1, ..., i_{K-1}} a_{i_0 i_1} ... a_{i_{K-1} i_0}$$

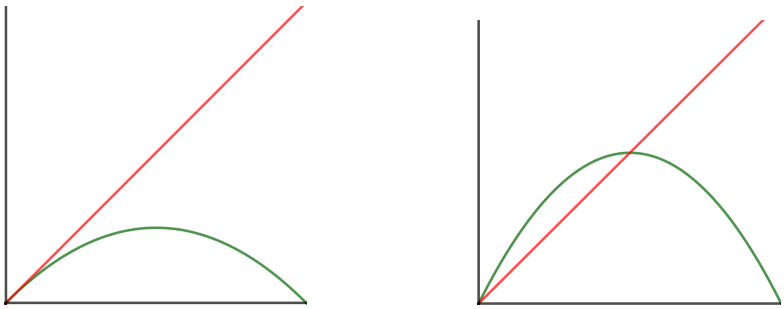

Figura 13: Aplicación $F_\mu(x)$ para $\mu = 1$ a la izquierda y para $\mu = 2$ a la derecha.

da el cardinal de $Per_K \sigma_A$. Por otro lado vemos fácilmente que este sumatorio corresponde a $Tr(A^K)$. □

Acabamos el capítulo con una fórmula que nos puede ayudar en el cálculo de $Tr(A^K)$.

Observación 10.8. En general, para $K > 2$:

$$Tr(A^K) = Tr(A^{K-1}) + Tr(A^{K-2}).$$

11. Doblamiento de periodo: la ruta al caos

Como vimos en capítulos anteriores, la aplicación cuadrática $F_\mu(x)$ es simple, dinámicamente hablando, para $0 \leq \mu \leq 3$ pero caótica cuando $\mu \geq 4$. Una pregunta lógica sería: cómo se convierte F_μ en caótica cuando μ aumenta? De dónde vienen los infinitos puntos periódicos presentes para μ grande? En este capítulo daremos una geométrica e intuitiva respuesta a esta cuestión.

El Teorema de Sarkovskii nos da una respuesta parcial a la pregunta de cuantos puntos periódicos surgen a medida que varía el parámetro. Antes, F_μ posiblemente pueda tener infinitos puntos periódicos con distinto periodo, con periodos de la forma 2^j. La teoría de bifurcación local proporciona dos típicas formas en las que estos puntos periódicos pueden surgir: bifurcaciones silla-nodo y doblamiento de periodo. Nuestra pregunta entonces cambia a: que tipo de bifurcación ocurre cuando F_μ se vuelve más caótica. Como ya veremos, el escenario más común para que F_μ se vuelva caótica es que F_μ se someta a una serie de bifurcaciones de doblamiento de periodo. Esto no siempre es lo que ocurre, pero es la ruta típica al caos. Destacamos que, aunque trabajaremos con la familia cuadrática, las ideas que introduciremos también se aplican a aplicaciones de una clase mucho más amplia, como las aplicaciones unimodales, que describiremos en el siguiente capítulo.

Recordamos que para $1 < \mu < 3$, F_μ tiene un único punto fijo atractor en $p_\mu = (\mu-1)/\mu$ de modo que $0 < p_\mu < 1$. Tenemos en cuenta que, siempre que $F'_\mu(p_\mu) < 0$, existe un "socio"$\hat{p}_\mu$ para p_μ en el sentido de que $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$ y $\hat{p}_\mu < p_\mu$.

Usando el análisis gráfico de F_μ, podemos dibujar las gráficas de F_μ^2 para varios valores de μ, observamos en particular la porción de la gráfica en el intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$. Esta parte del gráfico está destacada con un cuadro.

Observaciones 11.1.

1. El gráfico de F_μ^2, mirado del revés, parece el gráfico de la aplicación cuadrática original, para diferentes valores de μ, en un sentido que explicaremos más adelante.

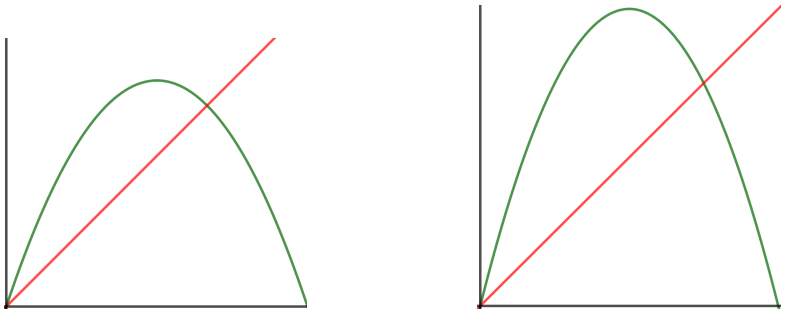

Figura 14: Aplicación $F_\mu(x)$ para $\mu = 3$ a la izquierda y para $\mu = 4$ a la derecha.

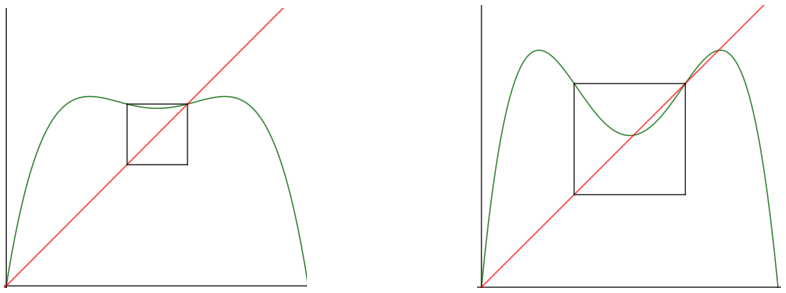

Figura 15: Aplicación $F_\mu^2(x)$ para $\mu = 2{,}5$ a la izquierda y para $\mu = 3{,}2$ a la derecha.

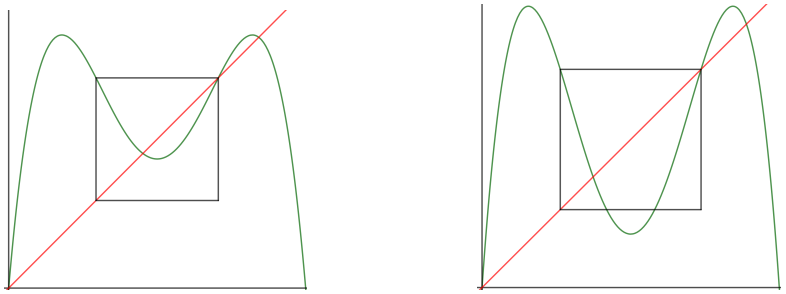

Figura 16: Aplicación $F_\mu^2(x)$ para $\mu = 3{,}4$ a la izquierda y para $\mu = 3{,}8$ a la derecha.

2. De hecho, dentro del cuadrado, F_μ^2 tiene un punto fijo en un punto límite del intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ y un único punto crítico dentro de este intervalo.

3. A medida que μ aumenta, el pico de esta aplicación cuadrática crece hasta que finalmente sale por debajo del cuadrado.

Sabiendo esto, el comportamiento de F_μ^2 en el intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ es muy parecido al de F_μ en el dominio original $[0, 1]$. En particular, a medida que μ aumenta, primero aparece un nuevo punto fijo en $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ para F_μ^2, es decir un punto de periodo dos para F_μ. Finalmente, este punto fijo doblará su periodo, como lo hizo p_μ para F_μ produciendo un punto de periodo 4. Continuando este procedimiento, podemos encontrar un pequeño cuadrado en el cual las gráficas de F_μ^4, F_μ^8, etc, se parecen a la función cuadrática original. Por lo tanto nos lleva a esperar que F_μ experimenta una serie de doblamientos de periodo a medida que μ aumenta.

Para precisar estas ideas introducimos un nuevo concepto, el operador de renormalización R. R será una función de funciones, convirtiendo ciertas funciones en I en nuevas funciones en I. Para definir R, primero suponemos que μ es suficientemente grande para que $\hat{p}_\mu$ esté definido y $\hat{p}_\mu < p_\mu$. Para F_μ, $\mu > 2$ es suficiente. Sea L_μ que denota la aplicación lineal que lleva p_μ a 0 y $\hat{p}_\mu$ a 1, es decir:

$$L_\mu(x) = \frac{1}{\hat{p}_\mu - p_\mu}(x - p_\mu).$$

Podemos mostrar que la inversa de L_μ viene dada por:

$$L_\mu^{-1}(x) = (\hat{p}_\mu - p_\mu)x + p_\mu.$$

Observamos que L_μ expande el intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ sobre [0,1] con un cambio de orientación. Pasamos a definir la renormalización de F_μ:

$$(RF_\mu)(x) = L_\mu \circ F_\mu^2 \circ L_\mu^{-1}(x).$$

La función renormalización RF_μ está definida en I y comparte muchas de las características de F_μ. Lo destacamos en la siguiente proposición.

Proposición 11.2.

1. $(RF_\mu)(0) = 0$ *y* $RF_\mu(1) = 0$.

2. $(RF_\mu)'(1/2) = 0$ *y 1/2 es el único punto crítico de* RF_μ.

3. $S(RF_\mu) < 0$ *donde* S *es la derivada de Schwarz.*

La demostración es sencilla al aplicar definiciones.

Observamos que la renormalización de F_μ convierte puntos periódicos de periodo 2 para F_μ en puntos fijos para RF_μ. También, antes de que μ llegue a 4, el pico del gráfico de RF_μ ya sobresale por la parte superior del cuadrado unidad. Así, como señalamos anteriormente, esperamos que RF_μ se someta a una bifurcación doblamiento de periodo a medida que μ aumenta. De hecho, mientras RF_μ admita un punto fijo con derivada negativa en algún punto $p_1(\mu)$, entonces podemos encontrar $\hat{p}_1(\mu)$ como antes y definimos una segunda renormalización. La aplicación lineal en este caso lleva $p_1(\mu)$ a 0 y $\hat{p}_1(\mu)$ a 1 y así es una aplicación lineal diferente. Por lo tanto vemos que la imagen completa se repite

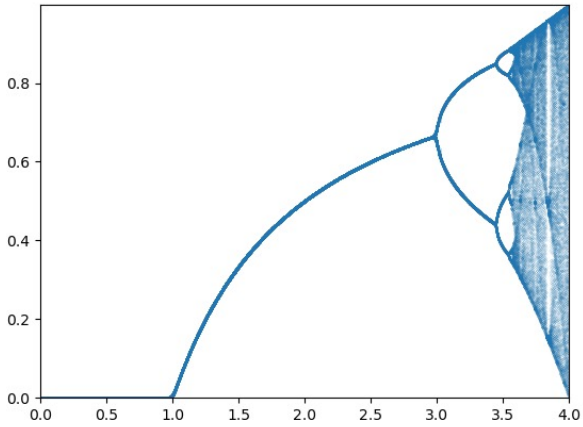

Figura 17: Diagrama orbital de F_μ con $0 \leq \mu \leq 4$.

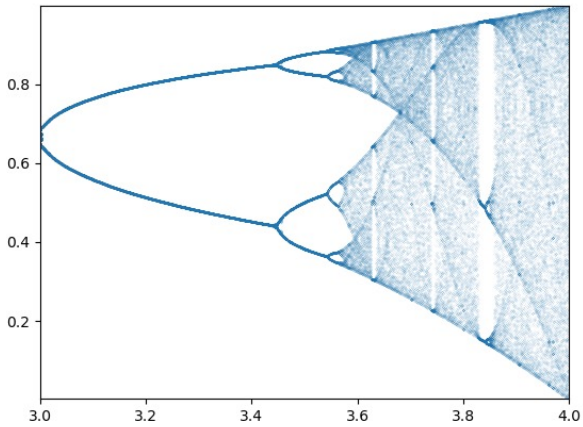

Figura 18: Diagrama orbital de F_μ con $3 \leq \mu \leq 4$.

y obtenemos otra bifurcación de doblamiento de periodo, esta vez para F_μ^2. Continuando este proceso conduce a una sucesión de bifurcaciones de doblamiento de periodo a medida que μ aumenta. Entonces esperamos que el diagrama de bifurcación para F_μ sea bastante complicado.

Con un ordenador podemos verificar estos hechos experimentalmente. Calculamos el diagrama orbital de F_μ. El diagrama orbital es una imagen del comportamiento asintótico de la órbita de $1/2$ para una variedad de valores de μ diferentes entre 0 y 4. Para cada μ, calculamos los primeros 500 puntos en la órbita de $1/2$ bajo iteración de F_μ. Solo trazamos los últimos 400 puntos de esta órbita, eliminando el comportamiento inicial transitorio. Elegimos 1500 valores de μ igualmente espaciados entre 0 y 4. Estos valores se trazan en el eje horizontal mientras que los puntos a lo largo de la órbita correspondiente se trazan verticalmente.

Observamos cómo el diagrama de bifurcación para F_μ está incrustado en estas imágenes.

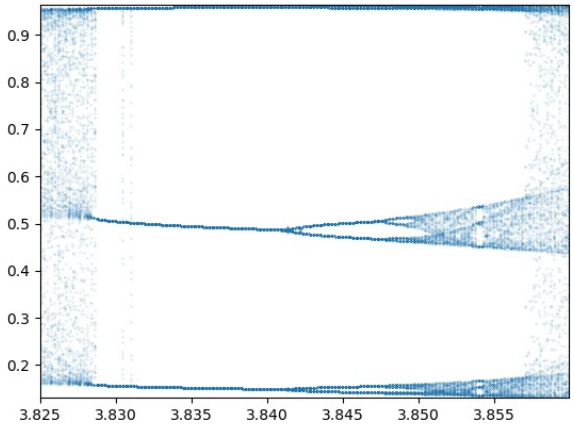

Figura 19: Diagrama orbital de F_μ con 3,825 $\leq \mu \leq$ 3,86.

Comentario 11.3. Realmente el mismo dibujo se obtiene trazando la órbita de cualquier otro punto x_0 satisfaciendo $0 < x_0 < 1$. Preferimos usar el punto crítico 1/2 ya que, como vimos en el Teorema 8.4, siempre es atraído por una órbita periódica atractora.

Vemos claramente en la Figura 17 muchos de los hechos discutidos anteriormente. Por ejemplo, cuando $0 \leq \mu \leq 1$, todas las órbitas convergen al único punto fijo atractor en 0. Observamos que esta convergencia es lenta cuando $F'_\mu(0)$ está cerca de 1. Para $1 < \mu \leq 3$ todas las órbitas son atractoras al punto fijo $p_\mu \neq 0$, otra vez se muestra claramente en el diagrama orbital. A partir de entonces, vemos una sucesión de bifurcaciones que doblan el periodo, lo que confirma lo que se describió anteriormente.

Notamos que, para muchos valores de μ más allá del régimen de doblamiento de periodos, parece que la órbita de 1/2 llena un intervalo. Por supuesto, es difícil determinar si la órbita se siente realmente atraída por una órbita periódica atractora de periodo muy alto en este caso, o si de hecho es densa en un intervalo. Un ordenador, con su precisión limitada, no puede separar satisfactoriamente estos dos casos. Sin embargo, el diagrama de órbitas proporciona evidencia experimental de que muchos de los valores de μ después del régimen de doblamiento de periodo conducen a una dinámica caótica.

Esto se muestra de manera más convincente en la Figura 18, donde hemos ampliado la parte del diagrama orbital correspondiente a $3 \leq \mu \leq 4$. Observamos que la sucesión de doblamientos de periodo es claramente visible en la imagen.

Comentario 11.4. Accediendo a un ordenador podemos explorar en detalle otras regiones más pequeñas en el diagrama orbital. ¿Qué ocurre, por ejemplo, cuando la órbita de 1/2 es atraída por una órbita periódica atractora de periodo n? Al aumentar y volver a colocar estas partes del diagrama orbital, se observa fácilmente que, a medida que μ aumenta, ocurre el mismo fenómeno: F_μ sufre otra sucesión de bifurcaciones que doblan el periodo. Así se muestra en la Figura 19, donde mostramos el régimen del periodo 3. Observamos que la única órbita visible para muchos valores de μ es una órbita atractora de periodo 3, y que esta órbita sufre una sucesión de doblamiento de periodos.

A pesar de que este capítulo ha sido en su mayor parte heurístico, hemos logrado introducir un importante concepto, la renormalización. El operador R actúa como un

microscopio, lo que nos permite ver los fenómenos que ocurren para f^2 con el mismo detalle que para f. Naturalmente, uno podría preguntarse qué sucede en el límite, cuando R se aplica una y otra vez a una aplicación dada. Este es, de hecho, el objetivo final del análisis grupal de renormalización de la física. Estas ideas están más allá del alcance de esta memoria, sin embargo, discutiremos este operador desde el punto de vista de la dinámica simbólica. Esto requiere la introducción de una versión nueva y más poderosa de la dinámica simbólica, la teoría del amasado, que es el tema principal del siguiente capítulo.

12. Teoría del amasado

En capítulos anteriores, mostramos como la dinámica simbólica puede ser usada para comprender completamente la dinámica de ciertas aplicaciones cuadráticas. Cuando μ es suficientemente grande o cuando $\mu = 3{,}839$, vimos que todas las dinámicas interesantes de $F_\mu(x)$ ocurren en un conjunto de Cantor. La aplicación en este conjunto es equivalente a la aplicación *shift* o *subshift* de tipo finito. Para otros valores del parámetro, la situación es más complicada. Por ejemplo, $F_4(x) = 4x(1-x)$ tiene intervalos en los cuales la aplicación es caótica.

Una diferencia entre estos ejemplos es el comportamiento del punto crítico bajo iteración. En el caso de F_μ cuando $\mu > 4$ la órbita del punto crítico tiende a $-\infty$, mientras que tiende a una órbita periódica atractora cuando $\mu = 3{,}839$. En el último ejemplo, F_4, el punto crítico finalmente llega a un punto fijo repulsor. Así, en algunos casos, la órbita del punto crítico determina la dinámica de la aplicación. Nuestro objetivo en este capítulo es formalizar esta idea. Introduciremos una versión más elaborada de la dinámica simbólica, la teoría del amasado, que realiza un seguimiento de la órbita del punto crítico y, por lo tanto, nos permite manejar muchas de las complicaciones adicionales. La teoría del amasado también nos permite comprender a nivel simbólico la transición de la dinámica simple a la caótica que se describió heurísticamente en el capítulo anterior.

Definición 12.1. *Sea $f : I \to I$. f es una aplicación unimodal si:*

1. *$f(0) = f(1) = 0$.*
2. *f tiene un único punto crítico c con $0 < c < 1$.*

Claramente, aplicaciones unimodales son crecientes en el intervalo $[0, c)$ y decrecientes en $(c, 1]$. La aplicación cuadrática $F_\mu(x)$ es unimodal para $0 < \mu \leq 4$. Para el resto del capítulo, trabajaremos con una aplicación unimodal fija f.

Observamos que, para una aplicación unimodal, la órbita del punto crítico está atrapada en el intervalo unidad. No puede escapar hacia $-\infty$, pero hay muchos otros destinos posibles para esta órbita. Para resaltar el papel del punto crítico, ampliaremos ligeramente nuestra definición del itinerario de un punto agregando un tercer símbolo C, de la manera siguiente.

Definición 12.2. *Sea $x \in I$, el itinerario de x bajo f es la secuencia infinita $S(x) =$*

$(s_0 s_1 s_2 ...)$ *donde:*

$$s_j = \begin{cases} 0 & si \quad f^j(x) < c \\ 1 & si \quad f^j(x) > c \\ C & si \quad f^j(x) = c \end{cases}$$

Lo que más nos importará será el itinerario del punto crítico.

Definición 12.3. *La secuencia de amasado $K(f)$ de f es el itinerario de $f(c)$, es decir, $K(f) = S(f(c))$.*

Ejemplos 12.4.

1. Si $f(x) = F_4(x)$, entonces $c = 1/2$, $f(c) = 1$, y $f^j(c) = 0$ para todo $j > 1$. Por lo tanto:
$$K(f) = (1000...).$$
2. Si $f(x) = F_2(x)$, entonces $c = 1/2$ y $f^j(c) = c$ para todo j. Por lo tanto:
$$K(f) = (CCC...).$$

Existen muchos itinerarios posibles para una aplicación unimodal, pero hay ciertas restricciones. Por ejemplo, si $s_j = C$, entonces debe tener $s_{j+k} = \alpha_k$, donde:

$$K(f) = (\alpha_1 \alpha_2 ...).$$

La llamamos secuencia regular si $s_j = 0$ o $s_j = 1$ para todo j, es decir, $s_j \neq C$ para cualquier j. Se pueden construir aplicaciones unimodales que presenten cualquier secuencia regular dada, pero no es necesario que todas las secuencias ocurran en una aplicación dada. De hecho, una aplicación unimodal puede tener muy pocos itinerarios. Observamos que aunque F_μ tiene un único punto fijo de atracción para todo μ con $1 < \mu < 3$, el número de secuencias posibles cambia. El cambio ocurre en $\mu = 2$ donde el punto crítico es en sí mismo periódico, es decir, la secuencia de amasado es $(CCC...)$. El caso de una secuencia de amasado periódica producirá complicaciones a continuación, precisamente por esta razón.

Ahora, definimos un orden $\prec$ en el conjunto de itinerarios. Sea $s = (s_0 s_1 s_2 ...)$ y $t = (t_0 t_1 t_2 ...)$. Decimos que s y t tienen discrepancia n si $s_i = t_i$ para $0 \leq i < n$ pero $s_n \neq t_n$. Denotamos por $\tau_n(s)$ el número de 1's en $s_0, s_1, ..., s_n$. Este número es importante porque el signo de la derivada de f^n en x domina la dinámica local cerca de x. Notamos que $f'(x)$ es negativa cuando $x \in (c, 1]$. Por lo tanto, por la Regla de la Cadena, el número de 1's en el itinerario de x decidirá el signo de $(f^n)'(x)$, siempre que $f'(f^i(x)) \neq 0$ para todo i. Definimos el orden en secuencias inductivamente, para empezar ajustamos $0 < C < 1$.

Definición 12.5. *Suponemos que s y t tienen una discrepancia n. Decimos que $s \prec t$ si se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes:*

1. *$\tau_{n-1}(s)$ es par y $s_n < t_n$.*
2. *$\tau_{n-1}(s)$ es impar y $s_n > t_n$.*

Este orden aunque algo incomodo, se refleja en la línea real. Precisando más, si $x, y \in I$ y $x < y$, entonces $S(x) \preceq S(y)$. Por el contrario, si $S(x) \prec S(y)$, entonces $x < y$. Antes de demostrar esto lo mostramos en un ejemplo.

Ejemplo 12.6. Sea $f(x) = F_\mu(x)$ donde $2 < \mu < 3$. Tenemos que:

$$(000...) \prec (C111...) \prec (111...) \prec (1C111...) \prec (1000...).$$

Entre $(000...)$ y $(C111...)$, hay infinitos itinerarios de la forma:

$$l_n = (0...\,0111...)$$

$$l'_n = (0...\,0C111...).$$

Con n 0's en cada una. Vemos fácilmente que:

$$(000...) \prec ... \prec l'_2 \prec l_2 \prec l'_1 \prec l_1 \prec (C111...).$$

Introduciendo un 1 al principio de cada itinerario el orden se invierte:

$$(1C111...) \prec 1l_1 \prec 1l'_1 \prec 1l_2 \prec 1l'_2 \prec ... \prec (1000...).$$

Ahora pasamos a demostrar que el orden en los itinerarios es el mismo que en la línea real.

Teorema 12.7. *Sea $x, y \in I$. Tenemos:*

1. *Si $S(x) \prec S(y)$, entonces $x < y$.*
2. *Si $x < y$, entonces $S(x) \preceq S(y)$.*

Comentario 12.8. La igualdad en la segunda parte no puede eliminarse, ya que la existencia de un punto periódico atractor suele implicar la existencia de un intervalo de puntos en la línea real con el mismo itinerario.

Demostración. Demostramos la parte 1. Sea $S(x) = (s_0 s_1 s_2...)$ y $S(y) = (t_0 t_1 t_2...)$. Usamos inducción sobre n, donde n es la discrepancia de $S(x)$ y $S(y)$. Si $n = 0$, el resultado está claro,ya que $0 < C < 1$, que es precisamente el orden en la lineal real, entonces asumimos que es cierto para itinerarios con discrepancia $n - 1$ y demostramos que lo es para discrepancia n. Aplicamos f en x e y. Usando el *shift*, tenemos:

$$S(f(x)) = (s_1 s_2 s_3...)$$

$$S(f(y)) = (t_1 t_2 t_3...).$$

Hay 3 casos posibles, $s_0 = 0$, C, y 1. Si $s_0 = 0$, entonces $S(f(x)) \prec S(f(y))$ ya que no hemos cambiado el número de 1's antes de la discrepancia. Por inducción, tenemos que $f(x) < f(y)$. Pero como f es creciente en $[0, c)$, llegamos a que $x < y$ también. Si $s_0 = 1$, entonces $S(f(x)) \succ S(f(y))$ ya que hay un uno menos entre $s_1, ..., s_n$. Por lo tanto $f(x) > f(y)$ por inducción. Entonces $x < y$ ya que f decrece en $(c, 1]$. Finalmente, si $s_0 = C$, llegamos a que $x = y = c$. Análogamente con la parte 2. □

Decimos que una secuencia s es admisible para f si existe $x \in I$ con $S(x) = s$. Denotamos por Σ_f el conjunto de todas las posibles secuencias f-admisibles. Nuestro objetivo será encontrar un método mediante el cual podamos determinar todas las secuencias en

Σ_f. La clave para esto será la secuencia de amasado, que nos da una condición necesaria que debe cumplirse para cualquier secuencia en Σ_f. Como $f(c)$ es el máximo de f, debe ser cierto que $f^n(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$ y todo $n \geq 1$. En consecuencia, si $s \in \Sigma_f$, entonces $\sigma^n(s) \preceq K(f)$ para todo $n \geq 1$. Esta condición no es exactamente suficiente, ya que se cumple para ciertos casos como veremos a continuación.

Teorema 12.9. *Suponemos f unimodal y c no periódico. Si t es una secuencia que satisface que $\sigma^n(t) \prec K(f)$ para todo $n \geq 1$, entonces existe $x \in I$ con $S(x) = t$, de modo que $t \in \Sigma_f$.*

Demostración. Si $t = (000...)$ o $t = (1000...)$, entonces ya hemos acabado ya que $S(0) = (000...)$ y $S(1) = (1000...)$. Así que podemos suponer que $t \neq (000...), (1000...)$. Definimos:

$$L_t = \{x \in I \,|\, S(x) \prec t\}$$

$$R_t = \{x \in I \,|\, S(x) \succ t\}.$$

Más abajo veremos que L_t y R_t son abiertos en I. Como $0 \in L_t$ y $1 \in R_t$, llegamos a que tanto L_t como R_t no son vacíos. Como $L_t \cap R_t = \emptyset$, de ello se deduce que hay un conjunto cerrado no vacío en I con itinerario t.

Falta ver que L_t es abierto, el resultado para R_t es análogo. Sea $s = (s_0 s_1 s_2...)$ y suponiendo que $s_i \neq C$ para $i = 0, ..., n$. Entonces $\{x \in I \,|\, s_i(x) = s_i\}$, para $i = 0, ..., n$, es abierto en I. De hecho, si $S(y) = s$, existen entornos abiertos W_i de y tal que $f^i(W_i)$ se encuentra en el mismo lado de c que $f^i(y)$. La intersección de estos entornos produce un entorno de y con la propiedad deseada.

Ahora, sea $z \in L_t$ y suponemos $S(z) = s = (s_0 s_1 s_2...) \prec t$. Ya que $s \neq t$, s y t tienen discrepancia n, para algún $n \geq 0$, es decir, $s_n \neq t_n$. Tenemos entonces dos casos: $t_n = C$ y $t_n \neq C$. Si $t_n = C$, entonces tenemos que $\sigma^{n+1}(t) = K(f)$ que contradice nuestra suposición. Por lo tanto debemos tener que $t_n \neq C$. Asumimos entonces que $t_n = 1$, el caso $t_n = 0$ es similar. Si $s_n = 0$ entonces volviendo a la observación preliminar concluimos que L_t es abierto. Por tanto, la única posibilidad que queda es que $s_n = C$, es decir, $K(f) = (s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, ...)$. En este caso, existe $\alpha > 0$ tal que $s_{n+\alpha} \neq t_{n+\alpha}$, de lo contrario tenemos $\sigma^{n+1}(t) = (s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, ...) = K(f)$. Como c no es periódico tenemos que $s_{n+1} \neq C$ para todo $i > 0$. Sea W un entorno de z tal que, si $x \in W$, entonces:

$$S(x) = (s_0...s_{n-1} * s_{n+1}...s_{n+\alpha}...),$$

donde * puede ser 0, 1 o C. Es decir, W consta de todos los puntos cuyos itinerarios coinciden con el de z hasta la entrada $n+\alpha$, excepto posiblemente en la n^{th} posición. Por lo tanto W es abierto. Claramente tenemos:

$$(s_0...s_{n-1} * ...) \preceq (s_0...s_{n-1}t_n...) = (t_0...t_{n-1}t_n...),$$

ya que $s \prec t$. En consecuencia, si $x \in W$, entonces $S(x) \prec t$ y habríamos terminado. □

Comentarios 12.10.

1. La condición de que $\sigma^i(s) \prec K(f)$ para $i \geq 1$ no puede cambiar a $i \geq 0$. Obviamente, $(1000...) \succ t$ para cualquier secuencia t, y $S(1) = (1000...)$ así que esta secuencia es admisible.

2. La condición de que c no es periódico se puede suprimir. Para lograr esto, sin embargo, debemos excluir una secuencia adicional. Suponemos:

$$K(f) = (\alpha_1...\alpha_n C\alpha_1...\alpha_n C...).$$

Si hay un número par de 1's entre los $\alpha_i's$ entonces la secuencia $(\alpha_1...\alpha_n 0\alpha_1...\alpha_n 0...)$ es menor que $K(f)$. Sin embargo:

$$\{x \mid S(x) = \alpha_1...\alpha_n 0\alpha_1...\alpha_n 0...\}$$

no es cerrado en I. Esto contradice los resultados de la demostración del Teorema 12.9.

Así que podríamos modificar las hipótesis del Teorema asumiendo que:

$$\sigma^k(t) \prec (\alpha_1...\alpha_n 0\alpha_1...\alpha_n 0...)$$

para todo $k \geq 1$. Si el número de 1's entre las $\alpha_i's$ es impar, entonces asumimos que $\sigma^n(t) \prec (\alpha_1...\alpha_n 1\alpha_1...\alpha_n 1...)$. Con esta condición, el Teorema se cumple en el caso de que c sea periódico.

13. Genealogía de puntos periódicos de aplicaciones unimodales

La teoría del amasado nos proporciona una herramienta poderosa para estudiar la dinámica de una aplicación unimodal. En este último capítulo, investigaremos las ramificaciones de esta teoría sobre la estructura del conjunto de puntos periódicos de una aplicación unimodal. Cuando dicha aplicación también tiene derivada de Schwarz negativa, veremos que hay restricciones en el número y tipo de puntos periódicos que pueden surgir. En particular, daremos una respuesta casi completa a la pregunta que hicimos anteriormente: ¿de qué manera las aplicaciones como la cuadrática $F_\mu(x)$ hacen la transición de la dinámica simple a la caótica?

A diferencia de la aplicación cuadrática F_μ con μ grande donde hay un único punto periódico correspondiente a cualquier itinerario repetido, la situación para aplicaciones unimodales generales es bastante diferente. Puede haber más de un punto periódico que comparte el mismo itinerario. Además, siempre que f tenga una órbita periódica atractora, generalmente hay un intervalo completo de puntos que comparten el mismo itinerario. Sin embargo, como muestra el siguiente teorema , siempre hay al menos un punto periódico que corresponde a un itinerario repetido dado.

Teorema 13.1. *Sea $s = (s_0...s_{n-1}\overline{s_0...s_{n-1}}...)$ una secuencia repetida f-admisible que satisface que $\sigma^i(s) \prec K(f)$ para todo $i \geq 1$. Entonces existe un punto periódico p de periodo n, y cualquier punto periódico con $S(p) = s$ tiene periodo n o $2n$.*

Demostración. Asumimos que $K(f)$ no es repulsor. Como en la demostración del Teorema 12.9 necesitaremos argumentos especiales, en este caso para una de las secuencias admisibles. Ya que $\sigma^i(s) \prec K(f)$ para todo i, por el Teorema 12.9 tenemos que:

$$J = \{z \in I \mid S(z) = s\}$$

es un intervalo cerrado no vacío en I. Observamos que $f^n(J) \subset J$ ya que todos los puntos en $f^n(J)$ tienen un itinerario s también. Ahora si J es un punto único, llegamos a que este punto es periódico y tiene el itinerario deseado. Si $J = [a, b]$ con $a \neq b$ y $x \in [a, b]$, entonces $f^i(x) \neq c$ para cualquier i ya que $S(f^{i+1}(x)) = \sigma^{i+1}(s) \prec K(f)$. En consecuencia, $(f^n)'(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [a, b]$, tanto si f^n crece o decrece en J. Además, f^n conserva los puntos límites de J. Con esto llegamos al hecho de que, si $f^n(a)$ permanece en el interior de J, entonces existe un intervalo abierto N de a que tiene las siguientes propiedades. Si $x \in N$ entonces:

1. $f^i(x) \neq c$ para cualquier $i < n$.
2. $f^n(x) \in J$.

Consecuentemente, todos los puntos de N tienen itinerario s y entonces J es más grande que $[a, b]$, contrariamente a nuestra suposición. Si f^n crece en J, por tanto, se deduce que tanto a como b son periódicos con periodo n y itinerario s. Si f^n es decreciente, está claro que a y b tienen periodo $2n$ con $f^n(a) = b$ y $f^n(b) = a$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existe z entre a y b con $f^n(z) = z$. Esto completa la prueba. □

Destacamos que este resultado sigue siendo cierto bajo la hipótesis, algo más débil, de que $\sigma^i(s) \preceq K(f)$. En este caso $\{z \in I \mid S(z) = s\}$ no necesita ser más grande que un conjunto cerrado. Observamos también que el caso de puntos periódicos con periodo $2n$ pero cuyo itinerario se repite con periodo n pueden suceder. De hecho, en la familia cuadrática, justo después del primer doblamiento de periodo, ambos puntos de periodo dos se encuentran cerca del punto fijo que los generó. Por lo tanto sus itinerarios son (111...).

Si suponemos además que una aplicación unimodal tiene una derivada de Schwarz negativa, esto impone fuertes restricciones sobre el número de puntos periódicos que pueden compartir el mismo itinerario.

Corolario 13.2. *Suponemos $Sf < 0$. Sea s una secuencia repetida distinta de cero con periodo n que satisface que $\sigma^i(s) \preceq K(f)$ para todo i. Entonces existe como mucho dos órbitas periódicas con itinerario s.*

Demostración. Por el Teorema 13.1, cualquier punto periódico con itinerario s es fijo por f^{2n}. Por lo tanto suponemos que hay tres órbitas periódicas distintas con itinerario s. Para simplificar, asumimos que cada una de estas órbitas tiene periodo n, el caso general se maneja de forma similar.

Sean $x_1 < x_2 < x_3$ tres puntos fijos consecutivos de f^n y con el mismo itinerario. No puede haber un punto crítico para f^n en $[x_1, x_3]$ ya que todos los puntos en este intervalo deben tener itinerario s según nuestro orden. Por la Proposición 8.3 tenemos que $Sf^n < 0$. Si dos de los x_i son atractores, entonces por la demostración del Teorema 8.4 tenemos que deben atraer un punto crítico de f o bien tener una cuenca de atracción infinita. Esta última posibilidad no puede ocurrir, ya que $0 < x_i < 1$ y ni 0 ni 1 se encuentran en la cuenca de atracción. Pero entonces ambos puntos deben atraer un punto crítico de f que es otra vez imposible ya que f es unimodal. La única otra posibilidad es que uno de los x_i sea atractor. Claramente, este punto debe ser x_2. Entonces, sin embargo, $(f^n)'$ tiene un mínimo local positivo entre x_1 y x_3. Esto contradice el Lema 8.6 y por tanto hemos acabado. □

Corolario 13.3. *Suponemos $Sf < 0$. Sea $s = (s_0...s_{n-1}\overline{s_0...s_{n-1}}...)$ una secuencia repetida regular con:*

$$I_{n-1}(s) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$$

un número impar y $\sigma^i(s) \preceq K(f)$ para todo i. Entonces:

1. *Existe un único punto periódico z_s para f de periodo n y con itinerario s.*
2. *Si, adicionalmente, $(f^n)'(z_s) < -1$ y $K(f) = \sigma^i(s)$ para algún i, entonces existe un par de puntos periódicos de periodo $2n$ para f que tienen itinerario s también.*

Demostración. Para la parte 1, suponemos que x es un punto periódico de periodo n con itinerario s. Como $\sum_{i=0}^{n-1} s_i$ es impar, llegamos a que $(f^n)'(x) < 0$. En consecuencia, si f admite dos puntos periódicos con itinerario s, no ambos pueden tener periodo n. Esto completa la demostración de la parte 1, la segunda parte es algo similar. □

Una buena ilustración de este Corolario viene dada por la aplicación cuadrática para $1 < \mu < 2$, esta aplicación tiene 2 puntos fijos, ambos con itinerario (000...). Cuando $\mu = 2$, uno de estos puntos fijos se convierte en punto crítico. Después, para $2 < \mu < 3$, este punto fijo tiene derivada negativa y un itinerario diferente (111...). A medida que μ aumenta a través de 3, se produce una bifurcación de doblamiento de periodo. Como vimos anteriormente, justo después de $\mu = 3$, la nueva órbita de periodo 2 comparte el itinerario (111...).

Ahora pasamos a la cuestión de cómo una aplicación unimodal pasa de un número finito a un número infinito de puntos periódicos distintos. Para responder a esto, combinamos los resultados anteriores sobre la teoría de bifurcación y la derivada de Schwarz con la teoría del amasado. El resultado es una imagen topológica o cualitativa casi completa de la transición de la dinámica simple a la compleja. Por el momento, nos ocuparemos de la estructura periódica de puntos de una aplicación unimodal fija f, luego pasaremos a las familias de dichas aplicaciones. Como nos ocuparemos de los itinerarios que se repiten regularmente en esta sección, soltaremos la parte final de los itinerarios y trabajaremos con una secuencia finita de 0's y 1's en su lugar. Es decir, $(s_0s_1...s_n)$ denotará el itinerario repetido infinito $(s_0s_1...s_n\overline{s_0...s_n}...)$.

Definición 13.4. *Sea s un itinerario repetitivo. Denotamos por $M(s)$ la secuencia máxima en la órbita s, es decir, $M(s) = \sigma^j(s)$ donde $\sigma^j(s) \succeq \sigma^i(s)$ para todo i.*

Necesitamos alguna notación. Sean $s = (s_0...s_n)$ y $t = (t_0...t_k)$ secuencias repetitivas denotamos la concatenación de estas dos secuencias por $s \cdot t = (s_0...s_nt_0...t_k)$. También escribimos $\hat{s} = (s_0...s_{n-1}\hat{s}_n)$ donde $\hat{s}_n = 1$ si $s_n = 0$ o $\hat{s}_n = 0$ si $s_n = 1$. Es decir, $\hat{s}$ es la misma secuencia que s, excepto que la última entrada ha cambiado. Consideraremos algunas secuencias especiales repetitivas, definimos:

$\tau_0 = (1)$, $\tau_1 = (10)$, $\tau_2 = (1011)$, $\tau_3 = (10111010)$

y inductivamente:

$$\tau_{j+1} = \tau_j \cdot \hat{\tau}_j.$$

Finalmente, establecemos:

$$\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n = (1011101010111011...).$$

Observamos que τ_∞ es una secuencia no repetitiva.

Proposición 13.5.

1. *τ_j tiene periodo principal 2^j.*
2. *τ_j tiene un número impar de 1's.*
3. *$\tau_0 \prec \tau_1 \prec \tau_2 \prec ...$*

Demostración. La demostración de 1 y 2 son triviales, pasamos a demostrar 3, escribimos:

$$\tau_j = (s_0 ... s_\alpha \nu).$$

Si $\nu = 1$, entonces por 2, hay un número par de 1's entre $(s_0, ..., s_\alpha)$. En consecuencia:

$$\tau_j \succ \hat{\tau}_j = \tau_{j-1} \cdot \tau_{j-1} = \tau_{j-1}.$$

El argumento es similar para $\nu = 0$. □

Los $\tau_j' s$ juegan un papel especial en la transición al caos, siempre son las primeras órbitas periódicas que aparecen en cualquier familia de aplicaciones unimodales.

Proposición 13.6. *$M(\tau_j) = \tau_j$.*

Demostración. Haremos inducción sobre j. Los casos $j = 0$ y $j = 1$ están claros. Asumimos pues que $M(\tau_i) = \tau_i$ para $i = 0, 1, ..., j-1$. Observamos que:

$$\hat{\tau}_j = \tau_{j-1} \cdot \tau_{j-1} = M(\tau_{j-1}) = \tau_{j-1} \prec \tau_j$$

por la Proposición 13.5. Ahora suponemos que $M(\tau_j) = \sigma^i(\tau_j)$ para algún $i \neq 0$. Si $1 \leq i < 2^{j-1}$, entonces tenemos:

$$\sigma^i(\tau_j) = \sigma^i(\tau_{j-1}) \cdot \sigma^i(\hat{\tau}_{j-1}) \prec \tau_{j-1} \cdot \hat{\tau}_{j-1} = \tau_j.$$

De forma similar, si $2^{j-1} + 1 \leq i < 2^j$, podemos escribir $l = i - 2^{j-1}$ y entonces tenemos:

$$\sigma^i(\tau_j) = \sigma^l(\hat{\tau}_{j-1}) \cdot \sigma^l(\tau_{j-1}) \prec \tau_{j-1} \cdot \hat{\tau}_{j-1} = \tau_j,$$

ya que:

$$M(\hat{\tau}_{j-1}) = M(\tau_{j-2}) = \tau_{j-2} \prec \tau_{j-1}.$$

Finalmente, si $i = 2^{j-1}$, tenemos:

$$\sigma^i(\tau_j) = \hat{\tau}_{j-1} \cdot \tau_{j-1} \prec \tau_{j-1} \cdot \hat{\tau}_{j-1},$$

ya que $\hat{\tau}_{j-1} \prec \tau_{j-1}$ como observamos anteriormente. □

La siguiente proposición muestra que los puntos periódicos con itinerario τ_j ocurren antes que los puntos periódicos con otros itinerarios para una aplicación unimodal.

Proposición 13.7. *Sea t cualquier secuencia repetitiva regular con $t \neq (0)$ o τ_j para cada j. Entonces $M(t) \succ \tau_j$.*

Demostración. Como $t \neq (0)$ o $(1) = \tau_0$, llegamos a que existe $i \geq 0$ tal que:

$$\sigma^i(t) = (10...) \succ (1) = \tau_0.$$

En consecuencia, $M(t) \succ \tau_0$. Ahora suponemos que:

$$\tau_{j-1} \prec M(t) \prec \tau_j.$$

Tenemos que:

$$\tau_{j-1} = \tau_{j-1} \cdot \tau_{j-1} \prec M(t) \prec \tau_{j-1} \cdot \hat{\tau}_{j-1}.$$

Ya que la única discrepancia en las anteriores secuencias ocurren en el 2^j-th espacio, seguimos con que $M(t) = \tau_{j-1}$ o $M(t) = \tau_j$. Esto contradice nuestra suposición y completa la demostración. □

Pasamos ahora a considerar familias de aplicaciones unimodales f_λ, donde las aplicaciones dependen suavemente del parámetro λ. Es decir, la función $G(x, \lambda) = f_\lambda(x)$ es C^∞ en ambas variables.

Definición 13.8. *Sea f_λ una familia de aplicaciones unimodales con $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$. f_λ se llama familia de transición si:*

1. *$f_{\lambda_0}(x) \equiv 0$ para todo $x \in I$.*
2. *Cuando $\lambda = \lambda_1$, $K(f_\lambda) = (1000...)$.*
3. *$Sf_\lambda < 0$ para todo $\lambda > \lambda_0$.*

Comentarios 13.9.

1. Familias de transición también son llamadas familias completas.
2. La condición 1 puede simplificarse, todo lo que necesitamos es que $K(f_\lambda) = (000...)$.

Ejemplo 13.10. La familia cuadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ forma una familia de transición para $0 \leq \mu \leq 4$.

Las condiciones 1 y 2 garantizan que una familia de transición se vuelve dinámicamente compleja a medida que λ aumenta: no hay dinámica en absoluto cuando $\lambda = \lambda_0$, mientras f_{λ_1} tiene al menos un punto periódico correspondiente a cualquier itinerario repetitivo regular. La afirmación continúa inmediatamente del Teorema 13.1 y de la teoría del amasado.

El resultado previo nos permite ir más allá. Para cada j, mientras $K(f_\lambda) \succeq \tau_j$, existe un único punto periódico en $[0, 1]$ de periodo 2^j y con itinerario τ_j. Denotamos este punto por $\gamma_j(\lambda)$. Observamos que, como:

$$(f^{2^j})'(\gamma_j(\lambda)) < 0,$$

la teoría de bifurcación garantiza que $\gamma_j(\lambda)$ depende continuamente de λ. Si trazamos el diagrama de bifurcación para la familia f_λ, llegamos a que $\gamma_j(\lambda)$ se encuentra en una curva continua en el plano $x - \lambda$. El dominio de definición de γ_j se puede extender un poco. Si $K(f_\lambda) = \tau_j$ y:

$$(f^{2^j})'(\gamma_j) < -1,$$

entonces existe una única órbita periódica de periodo 2^{j+1} para f que comparte el itinerario τ_j. Denotamos el mayor de estos puntos por $\gamma_{j+1}(\lambda)$. Así $\gamma_{j+1}(\lambda)$ está definido para todo λ para el cual $K(f_\lambda) \succeq \tau_j$ y $(f_\lambda^{2^j})'(\gamma_j) < -1$. Ya que $(f_\lambda^{2^{j+1}})'(\gamma_{j+1}) \neq 1$ para todo λ, llegamos a que $\gamma_{j+1}(\lambda)$ es continuo para estos valores de λ también.

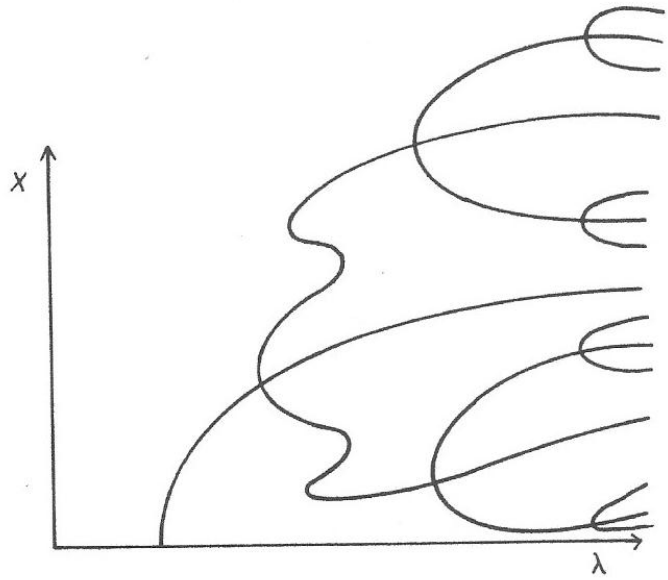

Figura 20: Un posible diagrama de bifurcación para una familia de transición.

Comentario 13.11. Hay una secuencia de amasado intermedia ν entre $\tau_j\tau_j$ y $\hat{\tau}_{j+1} = \tau_j\hat{\tau}_j$ para la cual la última entrada es C. Es decir, si $K(f_\lambda) = \nu$, el punto crítico es periódico con periodo 2^{j+1}. Si definimos $\gamma_{j+1}(\lambda) = f_\lambda(c)$ donde $K(f_\lambda) = \nu$, entonces γ_{j+1} es continua aquí también.

Finalmente, observamos que $\gamma_{j+1}(\lambda) \to \gamma_j(\lambda)$ cuando λ se aproxima a un valor para el cual $(f_\lambda^{2j})'(\gamma_j) = -1$. Es decir, γ_j sufre una bifurcación de doblamiento de periodo para este valor de λ. Esto significa que el diagrama de bifurcación para f_λ debe ser tan complicado como muestra la Figura 20.

Por tanto, vemos que una familia de transición prácticamente no tiene otra opción que el paso a la dinámica caótica. Tal familia debe seguir la ruta del doblamiento de periodo, al menos hasta que hayan nacido infinitos puntos periódicos. Así, la figura cualitativa de la renormalización que describimos en el Capítulo 11 es al menos cualitativamente correcta.

Comentario 13.12. Nuestras suposiciones no eliminan el nacimiento y posterior muerte de uno de los puntos periódicos. Esto sucedería si la secuencia de amasado de f_λ primero aumentara, luego disminuyera y finalmente aumentara nuevamente. El diagrama de bifurcación resultante se muestra en la Figura 21. Investigaciones recientes han demostrado que esta patología no ocurre en la familia cuadrática.

Este es solo el comienzo de una historia larga y detallada. Hay muchos otros puntos periódicos en una familia de transición además de las $\gamma_j's$ que hemos discutido. Sin embargo, el mecanismo por el cual surgen estos otros puntos periódicos es similar al descrito anteriormente. Se puede describir completamente la genealogía de cualquier punto periódico de una familia de transición; dónde nace, qué secuencias son sus antecesoras y cuales sus sucesoras.

Para concluir el capítulo, resumimos lo que hemos visto. Un par de órbitas periódicas nacen en una bifurcación de silla-nodo. Esta bifurcación, por supuesto, puede estar

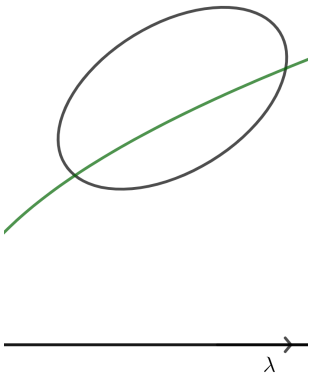

Figura 21: Nacimiento y muerte de un punto fijo cuando λ crece en una familia de transición.

degenerada, pero se producen al menos dos órbitas periódicas. Una de estas órbitas eventualmente se vuelve repulsora con derivada mayor a 1, la otra órbita se vuelve atractora y eventualmente alcanza una derivada negativa. A partir de entonces, se desarrolla la historia del doblamiento de periodo, infinitas órbitas se bifurcan sucesivamente como en el caso de γ_j, y todas persisten hasta que la familia de transición alcanza la etapa en la que la aplicación se conjuga topológicamente con la aplicación *shift*.

14. Conclusiones

A lo largo de la memoria, tal y como anunciamos en la Introducción hemos trabajado con la aplicación cuadrática para mostrar los principales conceptos que hemos estudiado. Recogemos los resultados a los que hemos llegado en las diferentes secciones respecto a su dinámica cuando μ aumenta.

La dinámica de F_μ es simple cuando $0 \leq \mu \leq 3$, concretamente cuando $0 \leq \mu \leq 1$ todas las órbitas convergen al punto fijo atractor 0 y cuando $1 < \mu \leq 3$ todas las órbitas son atractoras al punto fijo $p_\mu \neq 0$. A partir de este momento cuando $3 < \mu < 4$ la aplicación sufre una sucesión de bifurcaciones que doblan su periodo, hasta que surgen infinitos puntos periódicos que conllevan el cambio a la dinámica caótica, entonces a partir de este momento, cuando $\mu \geq 4$ la aplicación cuadrática es caótica.

Hemos podido dar una respuesta al objetivo principal de la memoria, como y cuando sucede la transición al caos. Lo hemos visto de manera más detallada en los capítulos finales.

Por temas de tiempo y espacio no pudimos incluir las aplicaciones del círculo que a diferencia de las aplicaciones de R, estas permiten una recurrencia no trivial que la línea real no. Además nos habría gustado añadir una pequeña pincelada extra a la memoria, con un nivel de dificultad superior, cambiando de escenario a los sistemas dinámicos n-dimensionales.

Referencias

[1] Devaney, Robert L.; An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, *Westview Press*, 2003.

[2] Barzanallana, R; Edward Lorenz, padre de la Teoría del Caos y el Efecto Mariposa. Departamento Informática y Sistemas Universidad de Murcia. https://www.um.es/docencia/barzana/BIOGRAFIAS/Biografia-Edward-Lorenz.php [Consulta 29 de diciembre de 2020].

[3] A. Alsedà, J. Llibre and M. Misiurewicz; Combinatorial dynamics and entropy in dimension one, *World Scientific*, 2000.