

Treball final de grau

GRAU DE MATEÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

**La capacitat analítica en
problemes d'aproximació racional**

Autor: Josep Banach Cañís

Director: Dr. Albert Mas Blesa

**Realitzat a: Departament
de Matemàtiques i Informàtica**

Barcelona, 28 de juny de 2017

Abstract

This paper studies the relationship, depending on the compact set $K \subset \mathbb{C}$, between the family of continuous functions on K , $\mathcal{C}(K)$, the family of continuous functions on K and analytics on \mathring{K} , $\mathcal{A}(K)$, the family of uniformly approximable functions on K by rational functions with poles out on K , $\mathcal{R}(K)$, and the family of uniformly approximable functions on K by polynomials, $\mathcal{P}(K)$.

We will see that it is easy to characterise K in order to achieve $\mathcal{P}(K) = \mathcal{R}(K)$ or $\mathcal{A}(K) = \mathcal{C}(K)$, but it is more complicated to do the same in order to achieve $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.

In order to see all the possible relationships, we present some new concepts like the Hausdorff measure, content and dimension, the analytic capacity and the continuous analytic capacity.

The main part of this essay is focused on the **Vitushkin Theorem**, which allows us to characterise the compacts K , such as $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$. we present a demonstration scheme and the results obtained from it. In addition, we will also state the **Inner Boundary Conjecture** that provides us with the sufficient condition on K to ensure that $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.

In addition, throughout this essay, we will present some examples in order to have a better visualisation of the results.

Resum

Aquest treball es basa en l'estudi de la relació, en funció del conjunt compacte $K \subset \mathbb{C}$, entre la família de les funcions contínues en K , $\mathcal{C}(K)$, la de les funcions contínues en K i analítiques en \mathring{K} , $\mathcal{A}(K)$, la de les funcions aproximables uniformement en K per funcions racionals amb pols fora de K , $\mathcal{R}(K)$, i la de les funcions aproximables en K per polinomis, $\mathcal{P}(K)$.

Veurem que és fàcil caracteritzar K per tal que compleixi $\mathcal{P}(K) = \mathcal{R}(K)$ o $\mathcal{A}(K) = \mathcal{C}(K)$, però és més complicat caracteritzar-lo per aconseguir $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.

Per tal de veure totes les possibles relacions tractarem conceptes com els de mesura, contingut i dimensió de Hausdorff, la capacitat analítica i la capacitat analítica contínua.

La part principal del treball és el **Teorema de Vitushkin**, que ens permet caracteritzar els compactes K , com ara $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$. Veurem un esquema de la demostració i els resultats que se n'obtenen. A més, també enunciaré la **Conjectura de la vora interior** que ens dóna una condició suficient sobre K per assegurar que $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.

A més, al llarg del treball presentarem alguns exemples per tal de poder visualitzar millor els resultats.

Agraïments

Vull agrair especialment al tutor d'aquest treball, el doctor Albert Mas Blesa, que m'ha ajudat a interessar-me en aquest tema, i ha fet que m'agradés més del que podia pensar en un inici, moltíssimes gràcies.

Agrair també a tota la meva família i a la meva novia que m'han ajudat en tot el que han pogut i han aguantat els moments d'estrés i de nervis. Gràcies a tots.

Índex

1	Introducció	1
1.1	El projecte	1
1.2	Estructura de la Memòria	2
2	Espais de funcions en un compacte en el pla complex	3
2.1	Algunes àlgebres uniformes: $\mathcal{C}(K)$, $\mathcal{A}(K)$, $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{P}(K)$	3
2.2	Alguns exemples d'inclusions estrictes i d'igualtats entre àlgebres . .	5
2.2.1	Un compacte $K \in \mathbb{C}$ per al que $\mathcal{P}(K) \neq \mathcal{R}(K)$	6
2.2.2	Caracterització dels compactes $K \subset \mathbb{C}$ per als que $\mathcal{A}(K) = \mathcal{C}(K)$	6
2.2.3	Un compacte $K \subset \mathbb{C}$ per als que $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{C}(K)$	7
3	Preliminars	9
3.1	Mesures de Hausdorff	9
3.2	Capacitat analítica	11
3.3	Compactes evitables	14
3.3.1	Problema de Painlevé	15
3.3.2	Capacitat analítica continua	16
4	Sobre la relació entre $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$	19
4.1	Teorema de Vistushkin	19
4.2	Conjectura de la vora interior	21
4.3	Demostració del Teorema de Vistushkin	22
4.4	Compactes $K \subset \mathbb{C}$ tals que $\mathring{K} \neq \emptyset$ i $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$	26
5	Conclusions	30
	Bibliografia	31

1 Introducció

1.1 El projecte

Aquest treball es basa en textos sobretot del segle XX, és a dir, la teoria que tractarem és relativament jove. De fet, el concepte clau per als resultats tractats en el treball, apareix per primer cop l'any 1947. Tot just, fa 70 anys.

La voluntat del treball és coneixer i explicar les relacions entre les famílies de funcions següents, en termes d'un compacte del pla complex K . La família de les funcions aproximables en K per polinomis, $\mathcal{P}(K)$, la de les aproximables en K per funcions racionals amb pols fora de K , $\mathcal{R}(K)$, la de les funcions contínues en K i analítiques en \mathring{K} , $\mathcal{A}(K)$ i la de les funcions contínues en K , $\mathcal{C}(K)$, que definirem amb detall en la secció **2** del treball.

Algunes d'aquestes famílies de funcions es basen en l'aproximació uniforme de funcions. Diem que una successió de funcions $(f_n)_n$ aproxima uniformement a f si per tot $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n \geq n_0$

$$\|f_n - f\| < \varepsilon,$$

per una certa norma definida en l'espai de funcions on es trobin les f_n i f .

Recordem que, en l'anàlisi matemàtica tenim un teorema que ens relaciona les subàlgebres de $\mathcal{C}(K)$ amb $\mathcal{C}(K)$ (veure [17]).

Teorema 1.1 (Teorema de Stone-Weierstrass). *Sigui A una subàlgebra de $\mathcal{C}(K)$ tal que conté les constants, separa els punts i $\bar{f} \in A$ per tota $f \in A$, on \bar{f} indica la conjugada complexa de f . Aleshores A és densa en $\mathcal{C}(K)$, és a dir, $\overline{A} = \mathcal{C}(K)$.*

Aquest teorema aplicat en el cas real ens porta al resultat següent.

Teorema 1.2. *Sigui $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ contínua en K . Aleshores, existeix una successió de polinomis $(P_n)_n$ tal que convergeix uniformement a f en K .*

És a dir, si pensem en funcions a valors reals, la família de les funcions aproximables uniformement en K per polinomis és igual a la família de les funcions contínues, $\mathcal{C}(K)$. Més concretament, l'àlgebra de polinomis

$$\tilde{\mathcal{P}}(K) = \left\{ \sum_{i=0, j=0}^{N, M} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ i } (x, y) \in K \right\},$$

és una àlgebra tancada per conjugació que separa punts i conté les constants, en conseqüència, $\overline{\tilde{\mathcal{P}}(K)} = \{f \text{ aproximable uniformement en } K \text{ per funcions de } \tilde{\mathcal{P}}\} = \mathcal{C}(K)$, pel **Teorema 1.2**.

Ara bé, el nostre treball vol centrar-se en les funcions contínues a valors complexos i que es defineixen en termes de la variable $z = x + iy$. Donat que tractarem amb el concepte d'holomorfia, veurem que $\mathcal{P}(K)$, $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$ són subàlgebres de $\mathcal{C}(K)$

que contenen les constants i separen els punts, però no compleixen l'última condició que demana el **Teorema 1.1**, és a dir, no es compleix que per tota funció $f \in A$ tenim $\bar{f} \in A$, per $A = \mathcal{P}(K), \mathcal{R}(K), \mathcal{A}(K)$. Cosa que fa el nostre problema molt més complicat del que podria semblar observant el **Teorema 1.1**.

Per tant, per solucionar aquest problema necessitarem dels conceptes de mesures de Hausdorff i de capacitats analítica i analítica continua, que ens permetran entendre el problema a través del **Teorema de Vistushkin**.

1.2 Estructura de la Memòria

La memòria del treball està estructurada de la següent manera. Hi ha una primera part on hi trobem les definicions i les propietats bàsiques de les famílies de funcions anomenades anteriorment. En aquest punt també es presenten exemples de compactes on tenim igualtat o desigualtat entre els conjunts $\mathcal{P}(K), \mathcal{R}(K), \mathcal{A}(K)$ i $\mathcal{C}(K)$, però són casos on no és necessari cap concepte gaire sofisticat.

En segon lloc, presentarem conceptes necessaris per comprendre millor els resultats i les seves demostracions, a partir dels quals caracteritzarem els compactes K segons la relació que tinguin les famílies de funcions $\mathcal{P}(K), \mathcal{R}(K), \mathcal{A}(K)$ i $\mathcal{C}(K)$.

I finalment, es presenten el **Teorema de Vistushkin** i la **Conjectura de la vora interior**, un esquema de la demostració del Teorema de Vistushkin i alguns exemples de construcció no trivial on no hi ha igualtat entre $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$.

2 Espais de funcions en un compacte en el pla complex

En aquest treball estudiarem la relació entre diferents espais de funcions definides sobre un compacte $K \subset \mathbb{C}$ donat. Aquests espais, que definirem amb detall més endavant, són les funcions contínues en K , les contínues en K i analítiques en el interior de K , les aproximables en K per funcions racionals amb pols fora de K i les aproximables en K per polinomis. Tots aquests espais, formen part de les àlgebres de Banach i, més concretament, de les àlgebres uniformes. Conceptes que definirem a continuació.

Diem que un espai de Banach A (espai vectorial normat i complet), és una **àlgebra de Banach** si hi tenim definit un producte, que es relaciona amb la norma de la següent manera:

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|, \quad \forall f, g \in A.$$

A més, diem que A és una àlgebra commutativa si es compleix $fg = gf$ per qualsevol $f, g \in A$, i diem que té identitat si hi ha un element $e \in A$ tal que $\|e\| = 1$ i $fe = ef$ per qualsevol $f \in A$. Tots els espais de funcions amb els quals posteriorment treballarem són àlgebres de Banach amb identitat.

Un exemple senzill d'àlgebra de Banach commutativa amb unitat és l'espai de les funcions contínues sobre un determinat compacte $K \subset \mathbb{C}$ (el denotarem per $\mathcal{C}(K)$) amb la norma del suprem. És a dir, donada una funció $f \in \mathcal{C}(K)$ la seva norma serà

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Per altra banda, una **àlgebra uniforme** és una subàlgebra tancada de $\mathcal{C}(K)$ que conté les constants i que separa els punts. Totes les famílies de funcions que estudiarem a continuació són àlgebres uniformes.

2.1 Algunes àlgebres uniformes: $\mathcal{C}(K)$, $\mathcal{A}(K)$, $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{P}(K)$

Sigui $K \subset \mathbb{C}$ un compacte i $\|\cdot\|_K$ la norma del suprem introduïda anteriorment. Ja hem definit l'espai $\mathcal{C}(K)$ com

$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ és continua}\}.$$

Definim l'espai $\mathcal{A}(K)$ com

$$\mathcal{A}(K) = \{f \in \mathcal{C}(K) : f \text{ és analítica en } \overset{\circ}{K}\},$$

ambdós equipats amb la norma del suprem $\|\cdot\|_K$. És clar que $\mathcal{A}(K) \subseteq \mathcal{C}(K)$.

Que una funció sigui analítica en variable complexa vol dir que podem expressar-la localment en sèrie de potències. Sabem que això és equivalent a que la funció sigui derivable en variable complexa, és a dir, que la funció és holomorfa. És per això que en tot el treball usarem indistintament, els conceptes de funció holomorfa i el de funció analítica.

El següent teorema clàssic de l'anàlisi complexa, ens permet justificar que $\mathcal{A}(K)$ és una àlgebra uniforme.

Teorema 2.1 (Weierstrass). $\mathcal{A}(K)$ és un subespai tancat de $\mathcal{C}(K)$, és a dir, si $(f_n)_n \subset \mathcal{A}(K)$ és una successió que convergeix uniformement a f , aleshores $f \in \mathcal{A}(K)$.

Demostració. Sigui $(f_n)_n \subset \mathcal{A}(K)$ una successió que convergeix uniformement a f en K . Notem que $f \in \mathcal{C}(K)$, ja que és límit uniforme de funcions de $\mathcal{C}(K)$. Ens cal veure doncs que f és holomorfa en $\overset{\circ}{K}$.

Agafem ara un triangle $\Delta \subset \overset{\circ}{K}$, sabem que

$$0 = \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz, \forall n.$$

Per tant, com que $(f_n)_n$ convergeix uniformement a f

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = \int_{\partial\Delta} f(z) dz,$$

i, pel **Teorema de Morera**, f és holomorfa en $\overset{\circ}{K}$. Per tant, $f \in \mathcal{A}(K)$. \square

Notació 1. Sigui $E \subset \mathbb{C}$ denotem per ∂E la vora del conjunt E . I denotarem per $D(c, r)$ el disc de centre $c \in \mathbb{C}$ i radi $0 < r \in \mathbb{R}$.

Diem que f és una funció racional si existeixen $P(z)$ i $Q(z)$ polinomis de $\mathbb{C}[z]$ tals que $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. A més, si f és holomorfa en un disc puntejat $D'(a, \varepsilon) = D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$, amb $a \in \mathbb{C}$ i $\varepsilon > 0$, i existeixen $\alpha \in \mathbb{C}$ i $k \geq 1$ enter tals que f s'aproxima a $\frac{\alpha}{(z-a)^k}$ quan $z \rightarrow a$, direm que f té un pol d'ordre k en a .

Les funcions aproximables uniformement en K per funcions racionals amb pols fora de K , que denotarem per $\mathcal{R}(K)$. És a dir,

$$\mathcal{R}(K) = \{f \in \mathcal{C}(K) : \exists (f_n)_n \text{ funcions racionals amb pols fora de } K \\ \text{tal que } \|f - f_n\|_K \rightarrow 0 \text{ quan } n \rightarrow \infty\},$$

és un altre exemple d'àlgebra uniforme.

Tota funció f racional és analítica en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \text{ és pol de } f\}$, per tant, com que demanem convergència uniforme, si $f \in \mathcal{R}(K)$ aleshores f serà analítica en K , ja que serà límit de funcions analítiques en K , i així doncs, pel **Teorema 2.1**, el seu límit també ho és. Per tant, es veu clarament que $\mathcal{R}(K) \subseteq \mathcal{A}(K)$.

Alternativament, podem expressar $\mathcal{R}(K)$ en termes de les funcions analítiques en un entorn obert U de K . Aquest resultat és el **Teorema de Runge**.

Teorema 2.2 (Teorema de Runge). *Siqui $K \subset \mathbb{C}$ compacte. Si f és una funció analítica en $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert tal que $K \subset \Omega$, aleshores f és aproximable uniformement en K per funcions racionals amb pols fora de K .*

Demostració. La prova segueix de la següent observació. Si f és analítica en un entorn de K , la fórmula de Cauchy ens permet escriure

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

per un camí Γ adient que envolta K i per tot $z \in K$. Cal, també, que Γ sigui a distància positiva de K , és a dir, no toqui K en cap punt.

Sigui $[a, b] \subset \mathbb{R}$ el domini de Γ , i $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ una partició d'aquest interval. Aleshores, les sumes de Riemann que aproximen la integral anterior

$$\sum_{i=0}^N \frac{f(\Gamma(\xi_i))}{\Gamma(\xi_i) - z} \Gamma'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

on $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, són funcions racionals que, per $N \rightarrow \infty$, aproximen la funció f uniformement en K . Podem trobar la demostració d'aquest **Teorema 2.2** amb tot detall a [12, Chapter II]. \square

Per tant, podem definir $\mathcal{R}(K)$ com

$$\mathcal{R}(K) = \{f \in \mathcal{C}(K) : \exists (f_n)_n \text{ analítiques en un entorn de } K \\ \text{tal que } \|f - f_n\|_K \rightarrow 0 \text{ quan } n \rightarrow \infty\},$$

degut a que tota funció racional am pols fora de K és analítica en un entorn de K i a que tota funció analítica en un entorn de K s'aproxima uniformement en K per funcions racionals (**Teorema 2.2**).

L'últim exemple d'àlgebra uniforme que veurem és l'espai de les funcions aproximables uniformement en K per polinomis. Un polinomi $P \in \mathbb{C}[z]$ és una funció de la forma $P(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$, on $N \in \mathbb{N}$ i $a_i \in \mathbb{C}$ per tot $i = 0, 1, \dots, N$. Definirem doncs el conjunt $\mathcal{P}(K)$ com

$$\mathcal{P}(K) = \{f : \exists (P_n)_n \text{ polinomis tal que } \|f - P_n\|_K \rightarrow 0, \text{ quan } n \rightarrow \infty\}.$$

Clarament, $\mathcal{P}(K) \subseteq \mathcal{R}(K)$.

2.2 Alguns exemples d'inclusions estrictes i d'igualtats entre àlgebres

Amb totes aquestes definicions ja podem veure diferents exemples on no trobem igualtats entre les àlgebres uniformes anteriors o casos on podem caracteritzar K , tal que hi trobem la igualtat, de manera de senzilla. Com hem vist anteriorment sempre tindrem

$$\mathcal{P}(K) \subseteq \mathcal{R}(K) \subseteq \mathcal{A}(K) \subseteq \mathcal{C}(K),$$

per tant quan no tinguem la igualtat voldrà dir que tindrem la inclusió estricta.

2.2.1 Un compacte $K \in \mathbb{C}$ per al que $\mathcal{P}(K) \neq \mathcal{R}(K)$

Sigui K l'anell del pla complex $K = \overline{D(0,1)} \setminus D(0, \frac{1}{2})$. K és un conjunt compacte de \mathbb{C} i compleix que $\mathcal{P}(K) \neq \mathcal{R}(K)$, com veurem seguidament. Considerem l'aplicació $f(z) = \frac{1}{z}$, que és racional i amb pols fora de K (un únic pol en $z = 0 \notin K$). Per tant, $f \in \mathcal{A}(K)$. Considerem ara una corba dins l'anell, com per exemple $\partial D(0, \frac{3}{4})$. Aleshores,

$$\int_{\partial D(0, \frac{3}{4})} f(z) dz = \int_{\partial D(0, \frac{3}{4})} \frac{1}{z} dz = 2\pi i. \quad (2.1)$$

Considerem ara $\phi \in \mathcal{P}(K)$, és a dir, existeix $(P_n)_n$ una successió de polinomis de $\mathbb{C}[z]$ tal que $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ uniformement. Clarament, per cada n , $P_n \in \mathcal{A}(D(0,1))$.

Com que $\partial D(0, \frac{3}{4}) \subset D(0,1)$ i és un camí tancat, pel **Teorema de la integral de Cauchy-Goursat**, tenim que

$$\int_{\partial D(0, \frac{3}{4})} P_n(z) dz = 0 \quad \forall n.$$

A més, com que $P_n \rightarrow \phi$ uniformement en K i $\partial D(0, \frac{3}{4}) \subset K$ tenim

$$\int_{\partial D(0, \frac{3}{4})} \phi(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial D(0, \frac{3}{4})} P_n(z) dz = 0. \quad (2.2)$$

Per tant, (2.2) és cert per tota $\phi \in \mathcal{P}(K)$. Això implica que $f(z) = \frac{1}{z} \notin \mathcal{P}(K)$, per (2.1), i com a conseqüència $\mathcal{P}(K) \neq \mathcal{R}(K)$, com volíem veure.

El mateix fet es pot traslladar a qualsevol compacte que tingui un forat en el seu interior. És a dir, si K^c no és connex tindrem $\mathcal{P}(K) \neq \mathcal{R}(K)$. A més, si K^c és connex aleshores $\mathcal{P}(K) = \mathcal{R}(K)$. Aquest resultat és conseqüència del **Teorema de Mergelyan (Teorema 4.6)**, que veurem en l'apartat 4.1

2.2.2 Caracterització dels compactes $K \subset \mathbb{C}$ per als que $\mathcal{A}(K) = \mathcal{C}(K)$

Podem trobar de manera senzilla una condició necessària i suficient sobre K per tenir $\mathcal{A}(K) = \mathcal{C}(K)$, com mostra el següent lema.

Lema 2.3. *Sigui $K \subset \mathbb{C}$ un compacte, aleshores $\mathcal{A}(K) = \mathcal{C}(K)$, si i només si, l'interior de K és buit, és a dir, $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.*

Demostració. La implicació (\Leftarrow) és clara per les definicions de $\mathcal{A}(K)$ i de $\mathcal{C}(K)$. Veiem ara (\Rightarrow). Demostrarem la implicació d'una manera senzilla per contrarrecíproc, és a dir, suposarem que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ i veurem que $\mathcal{A}(K) \neq \mathcal{C}(K)$. Sigui $f(z) = \bar{z}$. Aleshores, $f \in \mathcal{C}(K)$ però

$$\bar{\partial} f(z) = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(x - iy) = 1 \neq 0,$$

de manera que $f \notin \mathcal{A}(K)$ si $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. □

Per exemple, tindrem que en una corba compacta Γ qualsevol $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma)$, en canvi, en un disc tancat \overline{D} de radi $\delta > 0$ no hi haurà igualtat, és a dir, $\mathcal{A}(\overline{D}) \neq \mathcal{C}(\overline{D})$.

2.2.3 Un compacte $K \subset \mathbb{C}$ per als que $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{C}(K)$

Quan el compacte K en el que treballem té interior, aleshores, clarament, $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{C}(K)$, ja que $\mathcal{R}(K) \subseteq \mathcal{A}(K)$, i pel **Lema 2.3**, tenim $\mathcal{A}(K) \neq \mathcal{C}(K)$. Tot i això, també podem donar exemples de compactes sense interior on $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{C}(K)$, com per exemple, el conjunt del formatge suís (**Figura 1**), que és defineix de la següent manera. Consisteix en treure una successió de discs oberts, $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$, del disc unitat tancat $\overline{\mathbb{D}} = \overline{D}(0, 1)$, complint que els discs són disjunts 2 a 2 i $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus (\cup_{j=1}^{\infty} D_j)$ no té interior.

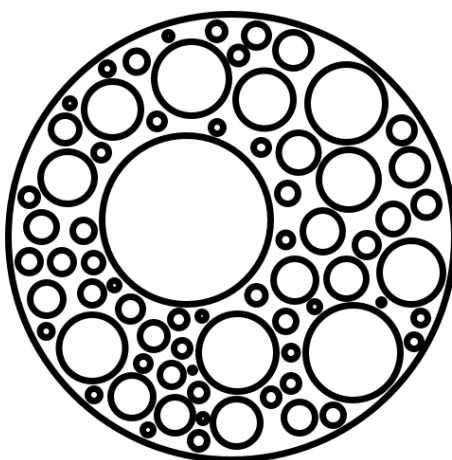


Figura 1: Imatge del conjunt Formatge Suís

Així doncs, si f és una funció racional amb pols fora de K , pel **Teorema de la integral de Cauchy-Goursat**, $\int_{\partial \mathbb{D}} f(z) dz - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial D_j} f(z) dz = 0$. Prenem els radis r_j de D_j suficientment petits de tal manera que $\sum r_j < \infty$. Sigui μ la mesura que és dz en $\partial \mathbb{D}$ i $-dz$ en ∂D_j , $1 \leq j \leq \infty$. Aleshores μ és una mesura finita, i $\int f d\mu = 0$ per tota $f \in \mathcal{R}(K)$. Doncs $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{C}(K) = \mathcal{A}(K)$, ja que $\|\mu\| := \sup\{\sum_{j \in J} |\mu(E_j)| : K = \uplus_{j \in J} E_j\} < \infty$ i per tant, podem aplicar el **Teorema de representació de Riesz** que ens diu que hi ha una bijecció entre els funcionals $\Phi : \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathbb{C}$ i les mesures de Borel finites. [18]

De fet, podem usar els arguments explicats anteriorment en la secció **2.2.1** per veure que en aquest exemple tenim $\mathcal{P}(K) \neq \mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K) = \mathcal{C}(K)$.

A continuació construirem el formatge suís amb tot detall, és a dir, construirem un compacte $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} D_j$, on els D_j són disjunts, $\overline{D_j} \subset \mathbb{D}$, $\overline{\cup_{j=1}^{\infty} D_j} = \overline{\mathbb{D}}$, i $\sum_{j=1}^{\infty} r_j < \infty$ on r_j és el radi del disc D_j .

Considerem la col·lecció d'elements $\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Clarament aquesta col·lecció és numerable ja que \mathbb{Q}^2 és numerable, l'anomenarem $\{z_1, z_2, \dots\}$.

Sigui $z_1 = 0$, $r_1 = \frac{1}{2}$, i $D_1 = D(z_1, r_1)$, generem per inducció tots els altres D_j per $j \geq 2$: Agafem z_j pertanyent a la col·lecció definida anteriorment, aleshores

- si $z_j \in \cup_{k=1}^{j-1} D_k$, definim $D_j = \emptyset$
- si $z_j \notin \cup_{k=1}^{j-1} D_k$, definim $r_j = \min\{\frac{\text{dist}(z_j, \cup_{k=1}^{\infty} D_k)}{2}, \frac{\text{dist}(z_j, \partial\mathbb{D})}{2}, \frac{1}{2^j}\}$, i $D_j = D(z_j, r_j)$.

Observem que aquesta construcció compleix tot el que volem. És clar que per tot $j = 1, 2, \dots$ $\overline{D_j} \subset \mathbb{D}$ i que $D_j \cap D_k = \emptyset$, per tot $j \neq k$. A més, $\sum_{j=1}^{\infty} r_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty$. Tal com hem definit els D_j , $\overline{\cup_{j=1}^{\infty} D_j} \subset \overline{\mathbb{D}}$.

Falta només comprovar l'altra inclusió. Sigui $w \in \overline{\mathbb{D}}$, aleshores existeix una successió $(z_{k_j})_j$ tal que $z_{k_j} \in \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{D}$, i $\lim_{j \rightarrow \infty} z_{k_j} = w$, en ser \mathbb{Q}^2 dens en \mathbb{C} . Així doncs, $w \in \overline{\cup_{j=1}^{\infty} \{z_{k_j}\}} \subset \overline{\cup_{j=1}^{\infty} D_j}$. En conseqüència, $\overline{\mathbb{D}} \subset \overline{\cup_{j=1}^{\infty} D_j}$, com volíem veure. D'aquesta manera tenim construït el formatge suís.

3 Preliminars

Com s'ha exposat en la introducció, en aquest treball volem presentar els resultats més importants de la relació entre les famílies $\mathcal{P}(K)$, $\mathcal{R}(K)$, $\mathcal{A}(K)$ i $\mathcal{C}(K)$, definides en la secció 2. Per tal de presentar aquests resultats ens cal intrduir certs conceptes.

3.1 Mesures de Hausdorff

Les mesures de Hausdorff seran importants perquè ens permetran donar criteris sobre compactes K per afirmar que $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$, i estan relacionades amb la capacitat analítica, concepte que introduïrem més endavant.

Cal fer notar que en aquesta secció l'espai ambient serà \mathbb{R}^n .

Definició 3.1. *Sigui $h(t)$ una funció continua i no decreixent sobre $t \in \mathbb{R}$ tal que $h(0) = 0$. Per cada $\delta > 0$ i per cada $E \subset \mathbb{R}^n$ definim*

$$M_\delta^h(E) = \inf_{\delta_j \leq \delta} \sum_j h(\delta_j),$$

on l'ínfim es pren entre tots els recobriments de E per cubs amb costat de longitud $\delta_j \leq \delta$, amb els costats paral·lels als eixos.

Si $\delta = \infty$, i per tant, no tenim restricció en la mida dels cubs, escrivim $M^h(E) \equiv M_\infty^h(E)$, que s'anomena contingut de Hausdorff de E relativa a $h(t)$. A més, definim

$$\Lambda^h(E) = \sup_{\delta > 0} M_\delta^h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta^h(E).$$

Λ^h és una mesura de Borel regular i s'anomena mesura de Hausdorff. (Veure [16])

Si $\alpha \geq 0$ i $h(t) = t^\alpha$, aleshores escrivim $M^h = M^\alpha$ i $\Lambda^h = \Lambda^\alpha$ que són anomenades contingut i mesura de Hausdorff α -dimensionals, respectivament. Per $\alpha = 0$ podríem comprovar fàcilment que Λ^0 és la mesura de contar, i per $\alpha = 1$, Λ^1 mesura la longitud de corbes. En els casos on el conjunt tingui àrea, Λ^1 serà ∞ , i si aquest és un punt, Λ^1 serà 0. De la mateixa manera, si tenim que $\alpha > n$, aleshores $\Lambda^\alpha(\mathbb{R}^n) = 0$. Totes aquestes observacions són conseqüència de la següent proposició (**Proposició 3.2**).

Proposició 3.2. *Siguin $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ i $0 \leq \alpha < t < \infty$, aleshores les mesures de Hausdorff compleixen les següents propietats:*

- i) $\Lambda^\alpha(E + a) = \Lambda^\alpha(E)$ on $E + a = \{x + a : x \in E\}$.
- ii) $\Lambda^\alpha(tE) = t^\alpha \Lambda^\alpha(E)$ on $tE = \{tx : x \in E\}$.
- iii) si $\Lambda^\alpha(E) < \infty$, aleshores $\Lambda^t(E) = 0$.
- iv) si $\Lambda^t(E) > 0$, aleshores $\Lambda^\alpha(E) = \infty$.

v) si $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}$ per $x \in \mathbb{R}^n, 0 < r < \infty$, aleshores $\Lambda^\alpha(B(x, r)) = c(\alpha, n)r^\alpha$, on $c(\alpha, n)$ és una constant que depen de α i n , tal que $c(\alpha, n)$ és finita i positiva si $\alpha = n$, $c(\alpha, n) = 0$ si $\alpha > n$ i $c(\alpha, n) = \infty$ si $\alpha < n$.

Demostració. i) i ii) són conseqüència clara de la definició. Per veure iii), agafem $E \subset \cup_i E_i$, i una mesura μ definida per E_i tal que $\mu(E_i) \leq \delta$ i $\sum_i \mu(E_i)^\alpha \leq M_\delta^\alpha(E) + 1$. Aleshores

$$M_\delta^t(E) \leq \sum_i \mu(E_i)^t \leq \delta^{t-\alpha} \sum_i \mu(E_i)^\alpha \leq \delta^{t-\alpha}(M_\delta^\alpha(E) + 1)$$

i obtenim iii) fent tendir δ a 0.

Finalment, iv) és demostra anàlogament a iii) i v) és resultat de les propietats iii) i iv). Sabem que $\Lambda^n(B(x, r)) < \infty$, per tant, si $\alpha > n$, per iii) tindrem que $\Lambda^\alpha(B(x, r)) = 0$ en conseqüència $c(\alpha, n) = 0$, per altra banda, si $\alpha = n$, aleshores $\Lambda^\alpha(B(x, r)) < \infty$ i $\Lambda^n(B(x, r)) < \infty$, així doncs, $c(\alpha, n) < \infty$. I per últim, si $\alpha < n$, per iv), $c(\alpha, n) = \infty$. \square

Basant-nos en aquestes propietats podem observar que existeix algun α tal que $\Lambda^\alpha(E)$ passa de zero a infinit. Aquest α l'anomenarem la dimensió de Hausdorff de E .

Definició 3.3. Definim la dimensió de Hausdorff (d_H) de la següent manera:

$$d_H(E) = \sup\{\alpha : \Lambda^\alpha(E) = \infty\} = \inf\{\alpha : \Lambda^\alpha(E) = 0\}.$$

Finalment presentem un lema que ens servirà per apartats posteriors, i que és important pel fet que ens relaciona tant el contingut com les mesures de Hausdorff amb mesures de creixement polinomial de Borel. S'anomena **Lema de Frostmann**.

Teorema 3.4 (Lema de Frostmann). *Sigui \mathcal{B} un conjunt de Borel de \mathbb{R}^n . Aleshores, $\Lambda^\alpha(\mathcal{B}) > 0$, si i només si, existeix μ una mesura amb suport a \mathcal{B} tal que $\mu(B(x, r)) \leq r^\alpha$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$.*

A més, podem trobar μ que compleixi $\mu(\mathcal{B}) \geq cM^\alpha(\mathcal{B})$ on c depen únicament de n .

Demostració. La idea bàsica de la demostració és la següent. Si la mesura μ existeix aleshores pel [16, Theorem 8.7], per qualsevol conjunt \mathcal{B} , $\Lambda^\alpha(\mathcal{B}) > 0$. Podem considerar traslladant \mathcal{B} que esta contingut en un cub diàdic. Com que $\Lambda^\alpha(\mathcal{B}) > 0$, també $M^\alpha > 0$, per tant, existeix $c > 0$ dependent només de n tal que $b = cM^\alpha(\mathcal{B})$,

$$\sum_i \text{diam}(Q_i)^s \geq b$$

on Q_1, Q_2, \dots cobreixen \mathcal{B} .

Per $m = 1, 2, \dots$ denotem per \mathcal{D}_m la família de cubs diàdics de \mathbb{R}^n de costat de longitud 2^{-m} . Aleshores anem definim la mesura μ_m^m per tot $Q \in \mathcal{D}_m$ com

$$\mu_m^m(Q) = 2^{-ms} \mathcal{L}^n(Q)^{-1} (\mathcal{L}^n(Q)), \text{ si } \mathcal{B} \cap Q \neq \emptyset,$$

$$\mu_m^m(Q) = 0, \text{ si } \mathcal{B} \cap Q = \emptyset,$$

fins que tinguem $\mathcal{B} \subset Q$ per algun $Q \in \mathcal{D}_{m-k_0}$, i definim $\mu^m = \mu_{m-k_0}^m$. La mesura μ^m satisfarà

$$\mu^m(Q) \leq 2^{-(m-k)\alpha}, \text{ per } Q \in \mathcal{D}_{m-k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

De la construcció segueix que per tot $x \in \mathcal{B}$ hi ha un k i un $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$ tal que

$$\mu^m(Q) = 2^{-(m-k)\alpha} = n^{\frac{-s}{2}} \text{diam}(Q)^\alpha.$$

Agafant per cada x el cub Q més gran, obtenim una successió de cubs disjunts Q_1, Q_2, \dots, Q_k tals que $\mathcal{B} \subset \cup_{j=1}^k Q_j$ i

$$\mu^m(\mathbb{R}^n) = \sum_{j=1}^k \mu^m(Q_j) \geq n^{\frac{-s}{2}} b.$$

Finalment, definint $\nu^m = \mu^m(\mathbb{R}^n)^{-1} \mu^m$, i treballant amb les desigualtats i les propietats de ν s'obte el resultat.

Podem trobar tots el detalls de la demostració en [16].

□

3.2 Capacitat analítica

La capacitat analítica és una funció sobre conjunts, que va ser definida per primer cop el 1947, en l'article [1] escrit per Ahlfors. Abans de veure la definició ens calen certs conceptes prèvis.

Sigui K un compacte contigut a \mathbb{C} , anomenem $\Omega(K)$ al conjunt obert de l'esfera de Riemann S^2 (equivalentment \mathbb{C}_∞), obtingut afegint un punt de l'infinit a la component no acotada de K^c . Direm que una funció f és admissible per K si complex que és analítica en $\Omega(K)$ i a més satisfà $\|f\|_{\Omega(K)} \leq 1$ i $f(\infty) = 0$.

Al conjunt d'aquestes funcions el donotarem per $\mathcal{A}(K)$.

Definició 3.5. *Sigui K un conjunt compacte de \mathbb{C} , definim la capacitat analítica de K com*

$$\gamma(K) = \sup\{|f'(\infty)| : f \in \mathcal{A}(K)\}.$$

Observació 3.6. És facil veure que $f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty))$ és el coeficient a_1 en l'expansió de Laurent de f en ∞ , ja que

$$f(z) = f(\infty) + \frac{a_1}{z} + \dots, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Cal recordar que $f(\infty) = 0$, perquè $f \in \mathcal{A}(K)$.

Inicialment, la capacitat analítica està definida sobre compactes, però pot estendre's per a qualsevol conjunt de \mathbb{C} .

Definició 3.7. *Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un conjunt qualsevol, definim la capacitat analítica de E com*

$$\gamma(E) = \sup\{\gamma(K) : K \text{ compacte}, K \subset E\}.$$

Podem, a través de la definició, deduir-ne certes propietats.

Proposició 3.8. *Siguin $K \subset \mathbb{C}$ compacte, $E, F \subset \mathbb{C}$ qualsevols i $z_0, a \in \mathbb{C}$. Aleshores,*

- i) la capacitat analítica és una funció de conjunts monòtona, és a dir, si $E \subseteq F$, aleshores $\gamma(E) \leq \gamma(F)$.*
- ii) $\gamma(z_0 + aE) = |a|\gamma(E)$.*
- iii) la capacitat analítica només depèn de la vora de K .*

Com hem vist en la definició, la capacitat analítica prové d'un suprem sobre un conjunt de funcions, i així doncs, podem preguntar-nos si aquest suprem s'assoleix per alguna d'aquestes funcions. És a dir, si existeix alguna funció $g \in \mathcal{A}(K)$ tal que $\gamma(K) = g'(\infty)$.

De fet, es pot veure que aquesta funció existeix i que, a més a més, g serà una transformació conforme de $\Omega(K)$ al disc unitat, \mathbb{D} , tal i com podem veure en el teorema següent. Tot i que, l'existència d'aquesta transformació conforme és conseqüència del **Teorema de Riemann** (veure [7]).

Teorema 3.9. *Sigui K un conjunt compacte de \mathbb{C} que conté més d'un punt. Sigui g una transformació conforme de $\Omega(K)$ en \mathbb{D} , satisfent $g(\infty) = 0$ i $g'(\infty) > 0$, aleshores $\gamma(K) = g'(\infty)$.*

Demostració. És clar que g és una funció analítica i acotada en $\mathbb{C} \setminus K$ i que a més satisfà $|f(z)| \leq 1, z \notin K$, per tant, clarament $g'(\infty) \leq \gamma(K)$. L'altre desigualtat es prova considerant una funció h amb aquestes propietats i veient que podem aplicar el Lema de Schwarz a la funció $h \circ g^{-1}$ i com a conseqüència tindrem $\gamma(K) \leq g'(\infty)$.

Podem trobar la demostració completa amb tot detall al llibre de Gamelin [12, Chapter VIII]. □

Corol·lari 3.10. *La capacitat analítica d'un disc de radi r és el seu radi, és a dir, $\gamma(D(a, r)) = r$. I la capacitat analítica d'un segment de longitud L és $\frac{L}{4}$.*

Ara bé, la funció donada per el **Teorema 3.9** és única? Podem respondre aquesta pregunta amb el teorema següent.

Teorema 3.11. *Sigui K un compacte. Aleshores hi ha una única funció $g \in \mathcal{A}(K)$ tal que $g'(\infty) = \gamma(K)$.*

Demostració. La demostració en detall es troba en [12, Chapter VIII]. Tot i això, la idea es basa en suposar que existeixen dos funcions $g_0, g_1 \in \mathcal{A}(K)$ tals que $g'_i(\infty) = \gamma(K)$, $i = 0, 1$, aleshores la funció $g = \frac{g_0 + g_1}{2}$, és admissible per K i a més $g'(\infty) = \gamma(K)$. Per veure el teorema n'hi haurà prou en veure que $h = g - g_0$, és zero, $h = 0$, ja que $g_0 = g - h$ i $g_1 = g + h$. De la desigualtat següent

$$|g \pm h|^2 = |g|^2 + |h|^2 \pm \operatorname{Re}(g\bar{h}) \leq 1,$$

obtenim, $|g|^2 + |h|^2 \leq 1$. Aleshores definim $k = \frac{h^2}{2}$ que escrita en la seva sèrie de Laurent serà

$$k(z) = \frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} + \dots$$

on $a_n \neq 0$. Com que $h(\infty) = 0 = h'(\infty)$, també $k(\infty) = 0 = k'(\infty)$. En conseqüència existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon|a_n||z|^{n-1} \leq 1$ en un entorn de K . Pot veure's que

$$f = g + \varepsilon \bar{a}_n z^{n-1} k,$$

és una funció admissible que compleix $f'(\infty) > \gamma(K)$, que contradiu que $g'(\infty) = \gamma(K)$, per tant, $k = 0$ i també $h = 0$. \square

La funció donada per el **Teorema 3.11** l'anomenarem funció d'Ahlfors. En particular, si K és connex i amb més d'un punt, aleshores aquesta funció és una transformació conforme de $\Omega(K)$ en \mathbb{D} .

Podem veure, basant-nos en els teoremes anteriors, que la capacitat analítica compleix la següent propietat respecte a la convergència.

Teorema 3.12. *Sigui $(K_n)_n$ una cadena de compactes tals que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K$, g_n i g les funcions d'Ahlfors de K_n i K , respectivament. Aleshores $g_n \rightarrow g$ uniformement sobre compactes de $\Omega(K)$, i en particular, $\gamma(K_n) \rightarrow \gamma(K)$ quan $n \rightarrow \infty$.*

Demostració. Sabem que tota g_n és acotada, per tant, la família de funcions $(g_n)_n$ és normal (veure [7]). Així doncs, existeix h que és límit uniforme sobre compactes d'una parcial de $(g_n)_n$. En particular $h \in \mathcal{A}(K)$, per tant, $h'(\infty) \leq \gamma(K)$. Per altra banda, $\gamma(K) \leq \liminf \gamma(K_n) = \liminf g'_n(\infty) \leq h'(\infty)$, per ser h límit uniforme d'una parcial de $(g_n)_n$. Tenim doncs, que $h'(\infty) = \gamma(K)$, pel **Teorema 3.11** $h = g$, i per tant, $(g_n)_n$ ha de convergir a g . \square

A més, la capacitat analítica pot estimar-se en termes de les mesures de Hausdorff 1 i 2-dimensionals, tal com podem veure en els resultats següents.

Teorema 3.13. *Sigui K un compacte connex de \mathbb{C} , aleshores*

$$\gamma(K) \leq \operatorname{diam}(K) \leq 4\gamma(K)$$

Demostració. La primera desigualtat és fàcil, ja que tot conjunt K acotat està contingut en un disc D de radi $\operatorname{diam}(K)$, i per tant $\gamma(K) \leq \gamma(D) = \operatorname{diam}(K)$, pel **Corollari 3.10**. Per veure l'altre desigualtat cal usar g^{-1} on g és la funció d'Ahlfors per K , i el $\frac{1}{4}$ -Teorema de Koebe, d'on podrem extreure el resultat buscat. \square

Teorema 3.14. *Si K compacte està contingut en una corba i $L = \Lambda^1(K)$ la seva longitud, aleshores*

$$\frac{L}{4} \leq \gamma(K) \leq \frac{L}{\pi}.$$

Teorema 3.15. *Existeix $c > 0$ tal que per tot E subconjunt mesurable i acotat de \mathbb{C} ,*

$$\Lambda^2(E) \leq c\gamma(E)^2.$$

Trobarem les demostracions dels **Teoremes 3.13, 3.14 i 3.15** amb detall en el llibre de Gamelin [12, Chapter VIII].

3.3 Compactes evitables

En aquesta secció mostrarem que tant la capacitat analítica com les mesures de Hausdorff no només ens serveixen per caracteritzar compactes en relació a l'aproximació de funcions. Serveixen també, entre altres coses, per caracteritzar els compactes evitables.

Definició 3.16. *Direm que un compacte K és evitable si tota funció analítica i acotada $f : \mathbb{C}_\infty \setminus K \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ és la restricció d'una funció $\tilde{f} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ analítica i acotada.*

En particular, K serà evitable, si i només si, tota funció analítica i acotada en $\mathbb{C} \setminus K$ és constant. També es compleix el següent.

Proposició 3.17. *$K \subset \mathbb{C}$ és un compacte evitable, si i només si, $\gamma(K) = 0$.*

Demostració. Suposem que tenim un compacte K no evitable i una funció f analítica, no constant i acotada en $\mathbb{C} \setminus K$. Aleshores existeix un $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$f(z) = a_0 + \frac{a_n}{z^n} + \dots, \text{ quan } |z| \rightarrow \infty$$

i $a_n \neq 0$. La funció $g(z) = z^{n-1}(f(z) - a_0)$ compleix que $|g'(\infty)| \neq 0$, i per tant, $\gamma(K) > 0$. □

Els compactes evitables poden definir-se, també, de la següent manera.

Proposició 3.18. *Si K compacte, les següent afirmacions són equivalents:*

- i) per qualsevol conjunt obert U tal que $K \subset U$, tota funció analítica i acotada en $U \setminus K$ pot estendre's analíticament a una funció analítica i acotada en U .*
- ii) K és evitable.*

Demostració. La demostració amb detall es pot trobar en l'article de Younsi [25]. Tot i això, la idea bàsica és la següent, la implicació $i) \Rightarrow ii)$ és clara, i per veure l'altre implicació, $ii) \Rightarrow i)$, n'hi ha prou en aplicar adequadament la fórmula integral de Cauchy. Suposem que K és evitable, i agafem U un entorn de K . Sigui f una funció holomorfa en $U \setminus K$ i fixant $z \in U \setminus K$, prenent ara dos cercles Γ_1 i Γ_2 en $U \setminus (K \cup \{z\})$, podem definir f com a suma de dues funcions holomorfes en U i en $\mathbb{C} \setminus K$, gràcies a la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw := f_1(z) + f_2(z).$$

D'aquí s'obté que f_2 és idènticament 0 i, en conseqüència, que f_1 és l'extensió de f a tot el conjunt U . \square

3.3.1 Problema de Painlevé

Riemann va demostrar que els punts són evitables. Tot i això, va ser Painlevé el primer matemàtic que es va plantejar la voluntat de caracteritzar de forma geomètrica els compactes evitables en general. És per això, que la caracterització d'aquests compactes es coneix com el problema de Painlevé. I aquesta caracterització pot afinar-se usant la dimensió de Hausdorff.

Teorema 3.19 (Teorema de Painlevé). *Sigui $K \subset \mathbb{C}$ compacte, si K té longitud zero, és a dir, $\Lambda^1(K) = 0$, aleshores K és evitable.*

Demostració. Sigui f analítica i acotada en $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$. Tenim que existeix un L tal que $|f| \leq L$. Sigui $\varepsilon > 0$. Com que $\Lambda^1(K) = 0$, existeix un recobriment de K per discos D_1, D_2, \dots, D_n amb radis r_i respectivament, i tals que $\sum_{i=1}^n r_i < \varepsilon$.

Sigui Γ la vora de la unió dels discos. Aleshores, com que $f(z) = f(\infty) + \frac{f'(\infty)}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$ per $|z| \rightarrow \infty$,

$$|f'(\infty)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq L \sum_{i=1}^n r_i < L\varepsilon.$$

Fent $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenim $f'(\infty) = 0$. Això, implica que $\gamma(K) = 0$, i per tant, K és evitable. \square

Teorema 3.20. *Sigui $K \subset \mathbb{C}$ compacte,*

- i) si $d_H(K) < 1$ aleshores K és evitable.*
- ii) si $d_H(K) > 1$ aleshores K no és evitable.*

Demostració. *i)* és conseqüència del **Teorema 3.19** juntament amb les propietats *iii)* i *iv)* de la **Proposició 3.2**. Per altra banda, per veure *ii)* suposem que $M^{1+\varepsilon} > 0$ per algun $\varepsilon > 0$. Pel **Lema de Frostmann** (**Teorema 3.4**), existeix una mesura μ amb suport en K tal que $\mu(K) \geq CM^{1+\varepsilon} > 0$ i $\mu(D(z, r)) \leq r^{1+\varepsilon}$, on $z \in \mathbb{C}$ i

$r > 0$. Definim $f(z) = \int \frac{d\mu(\zeta)}{z-\zeta}$, $z \notin K$ pot veure's fàcilment que $f \in \mathcal{A}(K)$. En conseqüència, $\gamma(K) > 0$ i per tant, K no és evitable.

Podem trobar més detalls de la demostració en [23, 25]. □

D'aquesta demostració s'obté que si $d_H(K) > 1$ aleshores $\gamma(K) > 0$, ja que la funció f obtinguda és una funció admissible.

Així doncs, ja em classificat els compactes evitables segons la dimensió de Hausdorff. Ara bé, si la dimensió de Hausdorff és 1, aleshores podem trobar casos en els que el compacte serà evitable i casos en que no ho serà. Com per exemple els intervals tancats, que són compactes amb dimensió de Hausdorff igual a 1 que no són evitables pel **Teorema 3.13** i la **Proposició 3.17**. Trobar un exemple de compacte que tingui dimensió de Hausdorff 1 i sigui evitable, és més delicat, com veurem a continuació.

A més de Painlevé, hi va haver molts matemàtics que van treballar intentant caracteritzar els compactes evitables. Com per exemple, un dels matemàtics dels quals presentarem després resultats en relació a l'aproximació de funcions, com és Vitushkin. De fet va plantejar una conjectura.

Definició 3.21. *Sigui $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, aleshores una poligonal P inscrita a Γ ve determinada per $\Gamma(t_0), \Gamma(t_1), \dots, \Gamma(t_n)$ amb $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. I la seva longitud és $L(P) = \sum_i |\Gamma(t_{i+1}) - \Gamma(t_i)|$. Diem que una corba Γ és rectificable si $L(\Gamma) < \infty$ on $L(\Gamma) = \sup\{L(P) : P \text{ és una poligonal inscrita a } \Gamma\}$*

Teorema 3.22 (Conjectura de Vistushkin). *Sigui $K \subset \mathbb{C}$ compacte tal que $\Lambda^1(K) < \infty$. Aleshores K és evitable, si i només si, $\Lambda^1(\Gamma \cap K) = 0$ per tota corba Γ rectificable.*

La primera implicació era coneguda inicialment com a conjectura de Denjoy, i és conseqüència dels resultats presentats per Calderón en [6]. L'altra implicació la va demostrar David al 1998 en [9]. En canvi, si treiem la hipòtesis $\Lambda^1(K)$ finita aleshores la conjectura és falsa (vegeu [25]).

Un exemple de conjunt que és evitable i té dimensió de Hausdorff 1 és el conjunt planar de Cantor $\frac{1}{4}$, $K = C(\frac{1}{4}) \times C(\frac{1}{4})$, ja que $0 < \Lambda^1(K) < \infty$, per tant, $d_H(K) = 1$, i a més per tota corba rectificable Γ , $\Lambda^1(\Gamma \cap K) = 0$, i per tant, pel **Teorema 3.22**, K és evitable. Els detalls els podem trobar en [2–4, 16], o bé en [14] per una demostració sense passar per la conjectura de Vitushkin.

A més a més, la unió de conjunts evitables és un conjunt evitable, la demostració no es pas senzilla però la podem trobar en [25]. Un ingredient clau per veure-ho és l'operador de localització de Vistushkin, que introduïrem més endavant (veure secció 4.3).

3.3.2 Capacitat analítica continua

A més de la capacitat analítica tenim un refinament d'aquesta que és la capacitat analítica continua, que ens servirà per caracteritzar els compactes per als que tenim igualtats entre $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$, que estudiarem en la secció 4 d'aquest treball.

La capacitat analítica continua es diferencia de la capacitat analítica únicament en la família de funcions a on prenem el suprem. La família en aquest cas serà la següent: Si tenim E un subconjunt del pla complex, aleshores definim $\mathcal{AC}(E)$ la família de funcions f tals que f és continua a tot \mathbb{C}_∞ , f és analítica en $\mathbb{C} \setminus K$ per algun $K \subset E$ compacte, $\|f\|_\infty \leq 1$, i $f(\infty) = 0$.

Definició 3.23. *La capacitat analítica conitnua d'un conjunt K és*

$$\alpha(K) = \sup\{|f'(\infty)| : f \in \mathcal{AC}(K)\}.$$

Es compleix $\alpha(E) = \sup\{\alpha(K) : K \text{ compacte, } K \subseteq E\}$. A més, la capacitat analítica continua satisfà les propietats *i*) i *ii*) de la **Proposició 3.8**, en canvi, no compleix la propietat *iii*). És a dir, $\alpha(K)$ no depen únicament de la vora exterior de K .

Tot i això, compleix les propietats següents.

Lema 3.24. *Sigui $E \subset \mathbb{C}$, aleshores*

$$\alpha(E) \leq \gamma(E),$$

i si U és un conjunt obert,

$$\alpha(U) = \gamma(U).$$

A més a més, α no compleix el **Teorema 3.12** a diferència de γ . Per exemple, pel compacte $K = [0, 1]$ ja no es compleix, ja que si agafem entorns oberts $(U_j)_j$ de K tals que $\bigcap_j U_j = K$, tindrem que $\alpha(U_j) \geq \gamma(K) \geq \frac{\text{diam}(U_j)}{4} = \frac{1}{4}$ per tot j , pel **Lema 3.24** i el **Corol·lari 3.10**, per altra banda, prenem una funció f analítica en K^c . Sigui ara un triangle Δ tal que $\Delta \cap K \neq \emptyset$, en conseqüència, podrem separar el triangle per un segment de la recta $r = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : y = 0\}$ en dues parts. Una part on els punts del triangle tindran part imaginària positiva, i el denotarem per Δ_+ , i una part on els punts tindran part imaginària negativa, que denotarem per Δ_- . Tenim que f és analítica en aquestes dues parts, per tant,

$$\int_{\partial\Delta_+} f dz = \int_{\partial\Delta_-} f dz = 0,$$

pel **Teorema de Morera**. En particular, aleshores la integral sobre la vora de tot el triangle serà 0, perquè serà la suma de les dues integrals anteriors, ja que la integral sobre $\partial\Delta_+ \cap K$ es compensa amb la integral sobre $\partial\Delta_- \cap K$. Per tant, tornant a aplicar el **Teorema de Morera** f serà analítica a tot \mathbb{C}_∞ . En conseqüència, $f'(\infty) = 0$, així que $\alpha(K) = 0 \leq \frac{1}{4}$, això demostra que α no satisfà el **Teorema 3.12**. Però, per altra banda, α sí que compleix la desigualtat que es presenta en el **Teorema 3.15**, intercanviant, únicament, γ per α .

A més, també trobem la mateixa relació amb la capacitat analítica continua i els compactes evitables respecte les funcions analítiques i continues, és a dir, per un compacte K , $\alpha(K) = 0$, si i només si, tota funció analítica i continua en $\mathbb{C} \setminus K$ pot estendre's a una funció analítica i continua a tot \mathbb{C} . Els arguments que s'usen per veure-ho són similars al cas de γ .

Observació 3.25. De la mateixa manera que $\gamma(K) > 0$ si $d_H(K) > 1$, succeeix el mateix amb la capacitat analítica continua. És a dir, si $d_H(K) > 1$, aleshores $\alpha(K) > 0$. Això és degut a que aplicant el **Lema de Frostmann (Teorema 3.4)** podem trobar una $f \in \mathcal{A}(K)$ amb $f'(\infty) \neq 0$ com em vist en la *Demostració* del **Teorema 3.20**. De fet, aquesta mateixa f pertany a $\mathcal{AC}(K)$ (vegeu [12, Execises, 7., Chapter VIII]) i això implica que $\alpha(K) > 0$ si $d_H(K) > 1$.

4 Sobre la relació entre $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$

En seccions anteriors hem vist exemples on no hi ha igualtat entre les famílies de funcions de la secció 2, i en el cas de $\mathcal{A}(K)$ i $\mathcal{C}(K)$ ja hem vist que únicament hi trobem la igualtat quan el compacte en el qual estiguem treballant no tingui interior. També hem vist en els exemples de la secció 2.2 que si tenim un compacte K on K^c no és connex, aleshores $\mathcal{P}(K) \neq \mathcal{R}(K)$. En aquesta secció presentarem resultats que ens caracteritzaran els compactes on tenim igualtat entre $\mathcal{P}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$ o entre $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$.

El resultat més important serà el **Teorema de Vitushkin (Teorema 4.2)**. Primer presentarem aquest teorema, però abans de la demostració veurem resultats més senzills que també ens porten la igualtat entre àlgebres, i veurem que alguns d'ells es poden demostrar apartir del Teorema de Vitushkin. Alguns d'aquest resultats poden demostrar-se sense aquest teorema com es pot veure en [12]. I a la part final de la secció donarem un esquema de la demostració el Teorema de Vitushkin.

4.1 Teorema de Vitushkin

Del Teorema de Vitushkin hi ha una versió per un sola funció i una versió general que és la que més ens interessa.

Teorema 4.1 (Teorema de Vitushkin (Forma individual)). *Sigui $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ i sigui $K \subset \mathbb{C}$ compacte. Aleshores les afirmacions següents són equivalents:*

i) $f \in \mathcal{R}(K)$.

ii) *existeix un certa funció $\varepsilon(\delta)$ que tendeix a 0 quan $\delta \rightarrow 0$, tal que per tot disc obert D de radi δ i tota funció $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$ es compleix que*

$$\left| \int f(z) \bar{\partial} \varphi(z) dx dy \right| \leq \varepsilon(\delta) \delta \|\nabla \varphi\|_\infty \gamma(D \setminus K).$$

Notació 2. *Aquí usem la notació $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\mathbb{C}}$.*

En particular, si $D \subset K$, per ii) del **Teorema 4.1**, tindrem $\int f(z) \bar{\partial} \varphi(z) dx dy = 0$ i això implica, per integració per parts i unsant que \mathcal{C}_0^∞ és dens a $L^2(\mathbb{C})$, que f és analítica en K , és a dir que ii), pot considerar-se com una condició de holomorfia de funcions quantificada per α . Així doncs, veiem que hi ha una relació entre les funcions de $\mathcal{R}(K)$ i les funcions de $\mathcal{A}(K)$ a partir de α . En particular, aquest teorema pot generalitzar-se sobre les famílies de funcions $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$ utilitzant la capacitat analítica continua.

Teorema 4.2 (Teorema de Vitushkin (Forma general)). *Sigui $K \subset \mathbb{C}$ compacte, aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

i) $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.

ii) $\alpha(D \setminus \overset{\circ}{K}) = \alpha(D \setminus K)$, per tot disc D .

iii) existeix una constant $C > 0$ tal que per tot disc D es compleix que

$$\alpha(D \setminus \overset{\circ}{K}) \leq C\alpha(D \setminus K).$$

Observació 4.3. Una manera d'interpretar el resultat es pensar en que $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$, si i només si, la vora de K és negligible per α , ja que $D \setminus \overset{\circ}{K} = (D \setminus K) \cup (D \cap \partial K)$, i per tant, $\alpha(D \setminus \overset{\circ}{K}) \geq \alpha(D \setminus K)$, perquè α és una funció de conjunts creixent.

Per als compactes sense interior s'obté el corollari següent.

Corollari 4.4. *Si $K \subset \mathbb{C}$ sense punts interiors, aleshores les afirmacions següents són equivalents:*

i) $\mathcal{R}(K) = \mathcal{C}(K)$

ii) $\gamma(D \setminus K) = \delta$ per a tot disc D de radi δ .

iii) existeix $C > 0$ tal que $\gamma(D \setminus K) \leq C\delta$, per a tot disc D de radi δ .

Presentem ara diferents resultats que es poden demostrar basant-nos en el Teorema de Vitushkin, tot i que, es demostren també sense aquest, com es pot trobar en [12].

Teorema 4.5 (Teorema de Hartogs and Rosenthal). *Si K té àrea 0, aleshores $\mathcal{R}(K) = \mathcal{C}(K)$.*

Teorema 4.6 (Teorema de Mergelyan). *Tenim la igualtat $\mathcal{P}(K) = \mathcal{A}(K)$, si i només si, K^c és connex.*

Corollari 4.7 (Teorema Lavrentiev). *Tenim la igualtat $\mathcal{P}(K) = \mathcal{C}(K)$, si i només si, K^c és connex i a més K no té interior.*

Demostració. (**Teorema 4.6**) N'hi ha prou veient la implicació de dreta a esquerre ja que l'altre implació és immediata, raonant per contrarecíproc i usant els arguments vistos en la secció 2.2.1. Veiem doncs la implicació de dreta a esquerre, agafem $D = D(z, \delta)$, $z \in \partial K$, i un punt $w \in K^c \cap D(z, \frac{\delta}{2})$. Com que K^c és connex, existeix una corba que uneix w i ∞ sense tocar K . Per tant, el diàmetre de $D \setminus K$ és com a màxim $\frac{\delta}{2}$, i doncs tindrem

$$\alpha(D \setminus K) = \gamma(D \setminus K) \geq \frac{\delta}{8} \geq \frac{\alpha(D \setminus \overset{\circ}{K})}{8},$$

és a dir, $\alpha(D \setminus \overset{\circ}{K}) \leq \alpha(D \setminus K)$ i pel **Teorema 4.2** com que D és un disc qualsevol centrat en ∂K , tindrem $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$. Llavors $\mathcal{R}(K) = \mathcal{P}(K)$ es pot obtenir adaptant el teorema de Runge (veure [8, Theorem 8.1]). \square

Exemple. Podem veure fàcilment que $K = [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ compleix que $\mathcal{P}(K) = \mathcal{C}(K)$, pel **Teorema 4.6** i perquè $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

Corol·lari 4.8. *Sigui K compacte. Si K^c té un nombre finit de components connexes. Aleshores $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.*

Veurem que el fet de que el complementari tingui un nombre finit de components connexes és una condició suficient per tenir la igualtat però no és necessària, ja que podem trobar exemples de compactes on $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$ i K^c té infinites components connexes, és el cas de l'exemple que veurem més endavant, de $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ (**Figura 2**) on \mathbb{D} és el disc unitat i els $D_n \subset \mathbb{D}$ són discs que s'acumulen al 0.

4.2 Conjectura de la vora interior

Com hem dit en la **Observació 4.3**, la igualtat entre $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$ té relació amb el valor que assigni α a la vora de K . Veurem que hi ha resultats que presenten la relació entre $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$ en funció de la vora interior de K .

Definició 4.9. *Sigui K compacte, definirem la vora interior de K , $\partial_i K$ com el conjunt de punts de ∂K tals que no formen part de la vora de les components connexes de K^c . Definirem la vora exterior de K , $\partial_e K$, de la següent manera, $\partial_e K = \partial K \setminus \partial_i K$.*

Exemple. Un compacte K (**Figura 2**) amb $\partial_i K \neq \emptyset$, seria el disc unitat tancat $\overline{\mathbb{D}}$, menys discos disjunts D_n de radi cada vegada més petit que convergeixin en el 0. Aleshores $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{n=1}^{\infty} D_n$, té per vora interior el $\{0\}$, $\partial_i K = \{0\}$

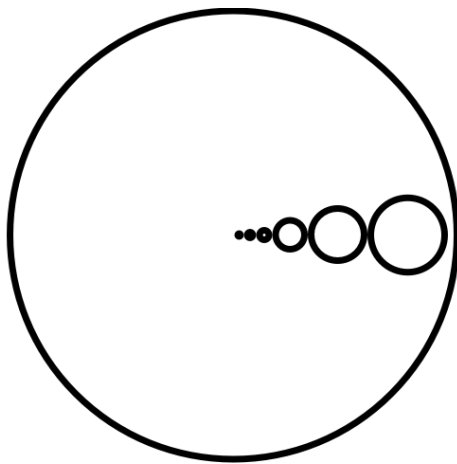


Figura 2: Imatge del conjunt K , amb vora interior igual a $\{0\}$.

De fet, la vora interior d'un conjunt pot ser tant complicada com volguem ja que per qualsevol compacte sense interior X , n'existeix un altre K tal que $\partial_i K = X$. Per exemple K seria de la forma $K = \overline{D} \setminus \cup_j D_j$, on D conté X , i els D_j són disjunts i s'acumulen a cada punt de X .

El següent teorema mostra que si $\partial_i K$ és prou petita, en termes de les mesures de Hausdorff, aleshores $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.

Teorema 4.10 (Teorema de Davie-Oksendal). *Sigui K compacte. Si $d_H(\partial_i K) < 1$, aleshores $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.*

Per aquest teorema és clar doncs que el compacte K de la **Figura 2**, compleix que el seu complementari té infinites components connexes, però tot i així, $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$. Com bé havíem dit anteriorment en relació al **Corollari 4.8**.

Existeix un teorema encara més fort sobre la vora interior dels compactes i la relació entre $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$, que és conegut com la conjectura de la vora interior, i del qual no en veurem la prova.

Teorema 4.11 (Conjectura de la vora interior). *Sigui K compacte tal que $\alpha(\partial_i K) = 0$, aleshores $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.*

La demostració amb tot detall la podem trobar en [19] i es basa en demostrar el [19, Theorem 1.2.]. De fet, la idea principal consisteix en veure la subadditivitat de α , i ho fa relacionant-la amb α_+ que és una variant de la capacitat analítica continua a través de transformades de Cauchy de mesures positives.

En particular, el **Teorema 4.10** és dedueix fàcilment del **Teorema 4.11**.

4.3 Demostració del Teorema de Vitushkin

Pasem ara a donar un esquema de la demostració dels Teoremes de Vitushkin (**Teoremes 4.1** i **4.2**), en la qual veurem esquemàticament la implació $ii) \Rightarrow i)$ del **Teorema 4.1**, amb detall les implicacions $i) \Rightarrow ii)$ del **Teorema 4.1**, $iii) \Rightarrow i)$ i $i) \Rightarrow ii)$ del **Teorema 4.2**. Observem que la implicació restant, $ii) \Rightarrow iii)$ del **Teorema 4.2** és immediata. Tots els detalls de la demostració els podem trobar en [23].

La part més interessant de la prova és el pas $ii) \Rightarrow i)$ del **Teorema 4.1**, i cal concentrar-se en l'aproximació de f del **Teorema 4.1**.

Un dels ingredients més importants per a la demostració és l'operador de Vitushkin.

Definició 4.12. *Sigui f una funció, D un disc de radi δ i $\varphi \in C_0^1(D)$. Definirem l'operador de localització de Vitushkin com*

$$V_\varphi f = \frac{1}{\pi z} * (\varphi \bar{\partial} f)$$

Observem que $V_\varphi f$ és analítica a D^c i on $\bar{\partial} f = 0$. En certa manera, $V_\varphi f$ localitza les singularitats de f dins de D en el sentit d'holomorfia.

És la convolució d'una distribució $\varphi \bar{\partial} f$ de suport compacte amb la funció localment integrable $\frac{1}{\pi z}$, i per tant, té sentit. Notem també amb més claretat que $V_\varphi f$ és analítica allà on ho és f i fora de D , el disc on $\varphi \in C_0^1(D)$ té el suport. Això es despren del fet que $\bar{\partial}(V_\varphi f) = \varphi \bar{\partial} f$, perquè $\frac{1}{\pi z}$ és la solució fonamental de l'operador diferencial $\bar{\partial}$.

Observació 4.13. Podem trobar la definició amb detall de distribució en [11, Chapter 0] i la de solució fonamental en [11, Chapter 1].

A més,

$$V_\varphi f(z) = \frac{1}{\pi z} * (\bar{\partial}(\varphi f) - f \bar{\partial}\varphi) = f\varphi - \frac{1}{\pi z} * f \bar{\partial}\varphi. \quad (4.1)$$

Aixó implica que $V_\varphi f$ és continua si f ho és. A més l'operador de localització pot escriure's com

$$V_\varphi f(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \bar{\partial}\varphi(w) dm(w), \quad (4.2)$$

degut a que $V_\varphi f$ s'anul·la sobre les constants, de manera que podem usar (4.1) canviant f per $f - f(z)$.

Si f és uniformement contínua i amb suport compacte, i $z \in D$, de (4.2) podem deduir fàcilment que

$$|V_\varphi f(z)| \leq C w_f(\delta) \delta \|\nabla\varphi\|_\infty, \quad (4.3)$$

on $w_f(\delta) = \sup_{|z-w| \leq \delta} \{|f(z) - f(w)|\}$ és el mòdul de continuïtat de f . Aquesta desigualtat és certa per tot $z \in \mathbb{C}$, perquè $V_\varphi f$ és analítica i podem usar el principi del mòdul màxim.

De la definició de l'operador de localització podem veure fàcilment que $V_\varphi f(\infty) = 0$ i que

$$(V_\varphi f)'(\infty) = -\frac{1}{\pi} \int f(w) \bar{\partial}\varphi(w) dm(w). \quad (4.4)$$

D'aquestes igualtats, i la definició d' α podem afirmar que

$$|(V_\varphi f)'(\infty)| \leq \|V_\varphi f\|_\infty \alpha(D \setminus U),$$

sempre que f sigui uniformement continua i analítica en U , combinat amb (4.3) i (4.4). Podem obtenir una desigualtat molt similar a la del punt *ii*) del **Teorema 4.1**.

$$\left| \int f(w) \bar{\partial}\varphi(w) dm(w) \right| \leq C w_f(\delta) \delta \|\nabla\varphi\|_\infty \alpha(D \setminus U).$$

La prova de *ii*) \Rightarrow *i*) del **Teorema 4.1** es basa en descomposar la funció f com a suma de funcions f_j associades a certs discs D_j de radi $\delta > 0$, i aproximar cada f_j per una certa funció g_j analítica en un entorn de K . Caldrà prendre les funcions g_j de manera que $\|f - \sum_j g_j\|_\infty = \|\sum_i (f_j - g_j)\|_\infty$ tendeixi a zero quan $\delta \rightarrow 0$. Per tal d'aconseguir-ho ens cal agafar els discs D_j i les funcions g_j adequades. El lema següent ens permet trobar aquests discs D_j .

Lema 4.14. *Donat un $\delta > 0$ existeix una família numerable de discs oberts $\{D_j\}_j$ de radi δ i una família de funcions $\{\varphi_j \in C_0^\infty(D_j)\}_j$ tal que:*

- i)* $\mathbb{C} = \cup_j D_j$.
- ii)* la família $\{D_j\}_j$ és semidisjunta, és a dir, existeix una constant $C > 0$ tal que qualsevol $z \in \mathbb{C}$ pertany com a molt a C discs D_j .
- iii)* $\sum_j \varphi_j = 1$, $0 \leq \varphi_j$ i $\|\nabla\varphi_j\|_\infty \leq \frac{C}{\delta}$.

Demostració. Sigui (Q_j) un recobriment de \mathbb{C} per quadrats de costat $\frac{\delta}{2}$ i paral·lels als eixos. Clarament, $\sum_j \chi_{Q_j} = 1$, on χ_{Q_j} és la funció característica de Q_j . Per finalitzar la prova ens cal, només, regularitzar la partició de la unitat (χ_j) . Agafem $0 \leq \chi \in C_0^\infty$ amb $\text{supp } \chi \subset D(0, \frac{1}{2})$ i $\int \chi = 1$. Definim $\chi_\delta = \delta^{-2} \chi(\delta^{-1}z)$ i $\varphi_j = \chi_\delta * \chi_{Q_j}$. Si D_j és el disc de radi δ concèntric amb Q_j , aleshores *i*), *ii*) i *iii*) podem comprovar-se fàcilment (vegeu [23]). \square

Podem suposar que f té suport compacte, ja que el problema d'aproximació és sobre el compacte K i n'hi ha prou substituïnt f per φf , on $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ que pren el valor 1 en un entorn de K . Per tant, fixat un $\delta > 0$ considerem els discs D_j i les funcions φ_j donats pel **Lema 4.14**, i definim $f_j = V_{\varphi_j} f$. Llavors,

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} (f \varphi_j - \frac{1}{\pi z} * f \bar{\partial} \varphi_j) = f \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j - \frac{1}{\pi z} * f \bar{\partial} (\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j) = f.$$

Observem que

$$\bar{\partial} f = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \bar{\partial} f.$$

A més, per les propietats de V_{φ_j} , les funcions f_j són contínues en tot el pla, analítiques fora d'un compacte de $D_j \setminus \mathring{K}$, i $\|f_j\|_\infty \leq C w_f(\delta)$.

Per altra banda, diem que z és una singularitat de f si f no és analítica en cap entorn de z . Així, podem interpretar la descomposició de $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ com una distribució de les singularitats de f sobre els discos D_j . D'aquesta manera, passem d'un problema global d'aproximació racional a un problema d'aproximació local. Només ens falta modificar les f_j per tal d'aconseguir que siguin analítiques en un entorn de K .

Com que f_j és analítica fora de D_j , podem escriure f_j en sèrie de Laurent com

$$f_j(z) = \frac{a_1}{z - z_j} + \frac{a_2}{(z - z_j)^2} + \frac{a_3}{(z - z_j)^3} + \dots,$$

per a $|z - z_j| < \delta$, on z_j és el centre de D_j . Suposant que podem trobar una funció g_j tal que és analítica fora d'un compacte de $D_j \setminus K$, complint $\|g_j\|_\infty \leq \varepsilon(\delta)$, quan $\varepsilon \rightarrow 0$ per $\delta \rightarrow 0$, i

$$g_j(z) = \frac{a_1}{z - z_j} + \frac{a_2}{(z - z_j)^2} + O(|z|^{-3}),$$

amb $z \rightarrow \infty$. El que volem amb això és treure les singularitats de f_j fora de K però tenir-les dins de D_j , aconseguint que la nova funció sigui suficientment petita, i tingui la mateixa sèrie de Laurent fins ordre 2. Trobar aquestes funcions g_j juntament amb el lema següent ens permetrà acabar la demostració.

Lema 4.15 (del Triple Zero). *Siguin h_j funcions acotades en \mathbb{C} , analítiques fora de D_j , tals que $h_j = O(|z|^{-3})$ quan $|z| \rightarrow \infty$. Aleshores,*

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} h_j \right\|_\infty \leq C \max_{j \in \mathbb{N}} \|h_j\|_\infty$$

Trobem la demostració amb detall en [23, Lemma 2.2.2].

Un cop trobem les funcions g_j , i definint $g = \sum_j g_j$ i aplicant el **Lema 4.15** sobre $h_j = f_j - g_j$ obtindrem

$$\|f - g\|_\infty = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (f_j - g_j) \right\|_\infty \leq C \max_{j \in \mathbb{N}} (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) \leq C(w(\delta) + \varepsilon(\delta)),$$

amb el que g resulta la funció aproximant desitjada. Ens falta justificar que existeixen les g_j , serà conseqüència dels lemes següents.

Lema 4.16. *Sigui D un disc amb centre a i radi δ , i h una funció continua en \mathbb{C} , analítica fora d'un compacte $K \subset D$. Si $h(\infty) = 0$ aleshores,*

$$|h(z)| \leq C \frac{\alpha(K)}{|z - a|}, \text{ per } |z - a| > 2\delta.$$

Lema 4.17. *Sigui $E \subset \mathbb{C}$, $\delta = \alpha(E)$ i $(D_j)_j$ una família de discs de radi δ que cobreixen E . Sigui $E_j = E \cap D_j$. Si f_j és continua en \mathbb{C} , analítica fora d'un compacte de E_j i $f_j(z) = O(|z|^{-1})$ quan $z \rightarrow \infty$, aleshores*

$$\left\| \sum_j f_j \right\|_\infty \leq C \max_j \|f_j\|_\infty.$$

En particular

$$\sum_j \alpha(E_j) \leq C\alpha(E).$$

D'aquí podem extreure'n l'existència de les g_j i n'obtidrem la demostració de la implicació $ii) \Rightarrow i)$ del **Teorema 4.1**. Podem trobar-ne tots els detalls en [23, 2.2 Proof of Vitushkin's theorems].

Finalment cal veure totes les altres implicacions.

Demostració. $iii) \Rightarrow i)$ del **Teorema 4.2**. Sigui $f \in \mathcal{A}(K)$. Podem suposar que f és la restricció a K d'una funció de $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ amb suport compacte. Si D és un disc obert de radi δ i $\varphi \in C_0^\infty(D)$, aleshores

$$\begin{aligned} \left| \int f(z) \bar{\partial} \varphi(z) dx dy \right| &= \pi |(V_\varphi f)'(\infty)| \\ &\leq \pi \alpha(D \setminus \overset{\circ}{K}) \|V_\varphi f\|_\infty \leq Cw(\delta)\delta \|\nabla \varphi\|_\infty \alpha(D \setminus K), \end{aligned}$$

per veure les desigualtats hem aplicat (4.3) i $iii)$ del **Teorema 4.2**. Per tant, $f \in \mathcal{R}(K)$ pel **Teorema 4.1**. \square

Demostració. $i) \Rightarrow ii)$ del **Teorema 4.1**. Prenem les funcions f_n , analítiques en un entorn U_n de K , tals que $\|f - f_n\|_K \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$.

Sigui d_n una extensió continua de $f - f_n$ de U_n a \mathbb{C} amb $\|d_n\|_{\mathbb{C}} = \|f - f_n\|_{U_n}$. Modifiquem f_n fora de U_n de manera que $f_n = f - d_n$. D'aquesta manera les f_n són analítiques en U_n i $\|f - f_n\|_{\mathbb{C}} = \|f - f_n\|_{U_n} \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$.

Donat un disc obert de radi δ , D , i $\varphi \in C_0^\infty(D)$ tenim

$$\left| \int f_n \bar{\partial} \varphi dx dy \right| = \pi |(V_\varphi f_n)'(\infty)| \leq \pi \alpha(D \setminus K) \|V_\varphi f_n\|_\infty,$$

fent tendir $n \rightarrow \infty$ i usant (4.3),

$$\left| \int f \bar{\partial} \varphi dx dy \right| \leq \pi \alpha(D \setminus K) \|V_\varphi f_n\|_\infty \leq C w(\delta) \delta \|\nabla \varphi\|_\infty \gamma(D \setminus K),$$

que és el que volíem veure. □

Demostració. $i) \Rightarrow ii)$ del **Teorema 4.2**. Donat un disc obert D i $\varepsilon > 0$, sigui f continua en \mathbb{C} i analítica fora d'un compacte de $D \setminus \overset{\circ}{K}$, satisfent $\|f\|_\infty \leq 1$ i $f'(\infty) > \alpha(D \setminus \overset{\circ}{K}) - \varepsilon$. Agafem ara f_n analítica en un entorn de K tal que $f_n \rightarrow f$ uniformement en K . Fent les modificacions que hem fet anteriorment a f_n podem suposar que aquestes són contínues en \mathbb{C} , analítica en un entorn de K i $f_n \rightarrow f$ uniformement en \mathbb{C} . En conseqüència, $\|f_n\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$ i $f'_n(\infty) \rightarrow f'(\infty)$ quan $n \rightarrow \infty$. Per tant, $\alpha(D \setminus \overset{\circ}{K}) - \varepsilon \leq \alpha(D \setminus K)$ per qualsevol $\varepsilon > 0$, d'on obtenim $ii)$. □

4.4 Compactes $K \subset \mathbb{C}$ tals que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ i $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$

Anteriorment, hem donat resultats favorables per tenir la igualtat entre $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$. En canvi, a continuació donarem alguns compactes amb interior no buit en els que $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$. Aquests exemples els podem trobar a [12, Chapter VIII]. Recordem que ja hem vist un exemple de compacte sense interior on $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$, (**Figura 1**).

Exemple 1. Veurem un exemple de compacte K amb interior connex i dens en K , és a dir, $\overline{\overset{\circ}{K}} = K$, complint també que $\Lambda^2(\partial K) = 0$, i $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$.

Definim $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ on els discs D_j són disjunts; la suma dels seus radis és finita, és a dir, $\sum_{j=1}^{\infty} r_j < \infty$, i a més, s'acumulen en cada punt d'una corba $\Gamma \subset K$ tal que $1 < d_H(\Gamma) < 2$. Notem que $\Gamma \subset \partial_i K$, (vegeu **Figura 3**).

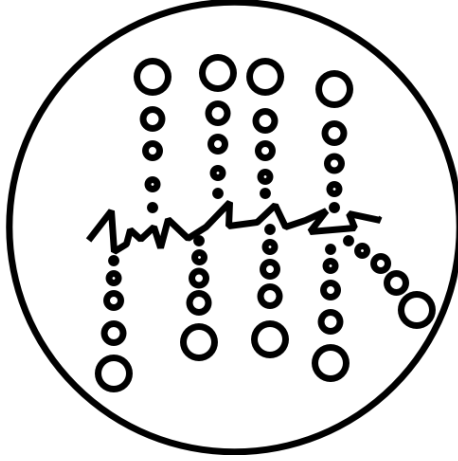


Figura 3: Imatge del conjunt K en l'Exemple 1.

Com que $d_H(\Gamma) > 1$ tenim que $\alpha(\Gamma) > 0$ per l'Observació 3.25, això implica que existeix una funció $g \in \mathcal{AC}(\Gamma)$ tal que $|g'(\infty)| > 0$. A més, com que $g \in \mathcal{AC}(\Gamma)$, g és continua en \mathbb{C}_∞ i g és analítica en $\dot{K} \subset \Gamma^c$. Per tant, $g \in \mathcal{A}(K)$.

Per altra banda, definim la mesura en el disc $\mu = dz|_{\mathbb{D}} - \sum_{j=1}^{\infty} dz|_{D_j}$. Observem que si ϕ és una funció racional amb pols fora de K aleshores, per la fórmula integral de Cauchy, tenim

$$\int \phi d\mu = \int_{\partial\mathbb{D}} \phi dz - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial D_j} \phi dz = 0. \quad (4.5)$$

Per densitat, (4.5) és també cert per tota $\Phi \in \mathcal{R}(K)$.

Prenem ara g , observem que

$$\int g d\mu = \int_{\partial\mathbb{D}} g dz - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial D_j} g dz = \int_{\partial\mathbb{D}} g dz,$$

ja que g és continua en $\overline{D_j}$ i analítica en D_j per tot j , i pel Teorema de Cauchy, $\int_{\partial D_j} g dz = 0$. Sabem que podem expressar g en la seva sèrie de Laurent en l'infinit,

$$g(z) = g(\infty) + \frac{g'(\infty)}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Així doncs,

$$\int_{\partial\mathbb{D}} g(z) dz = \int_{\partial\mathbb{D}} g(\infty) dz + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{g'(\infty)}{z} dz + a_2 \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{z^2} dz + \dots = 2\pi i g'(\infty).$$

En conseqüència, $\int g d\mu = g'(\infty)2\pi i \neq 0$, per tant, $g \notin \mathcal{R}(K)$ per (4.5). Això mostra que $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$.

Exemple 2. En aquest cas veurem l'exemple d'un compacte amb interior no buit, connex i dens en K tal que $(\dot{K})^c$ també serà connex.

Definim $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} D_j$ on els discs D_j són disjunts, complint que la suma de radis $\sum_{j=1}^{\infty} r_j < \infty$, i cada disc toca en exactament un punt d'una corba $\Gamma \subset K$ amb Γ dins de \mathbb{D} excepte per un únic extrem a $\partial\mathbb{D}$, per tal de que tant $\overset{\circ}{K}$ i $(\overset{\circ}{K})^c$ siguin connexes, amb $d_H(\Gamma) > 1$. A més, els discs s'acumulen a la corba Γ . Podem veure el dibuix aproximat a la **Figura 4**. La construcció d'aquests discs és delicada i no en donarem els detalls.

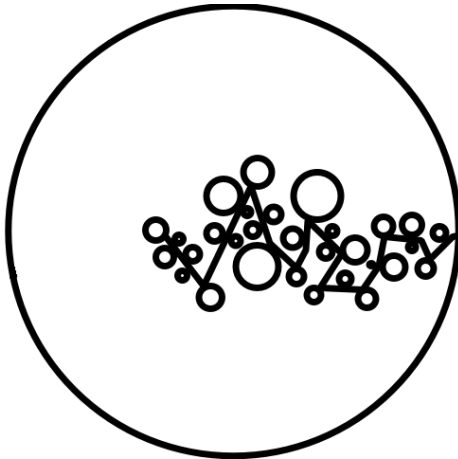


Figura 4: Imatge del disc de l'**Exemple 2**.

Com en l'exemple anterior $\alpha(\Gamma) > 0$, per tant anàlogament, usant la mesura $\mu = dz|_{\mathbb{D}} - \sum_{j=1}^{\infty} dz|_{D_j}$, ara per la nova successió de discos D_j , podem trobar una funció $g \in \mathcal{A}(\overset{\circ}{K})$, que no pertany a $\mathcal{R}(K)$ per les mateixes raons que en l'exemple anterior. En conseqüència $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$.

Exemple 3. Finalment veurem l'exemple d'un compacte $K = K_1 \cup K_2$ amb K_1 i K_2 disjunts, i complint $\mathcal{R}(K_i) = \mathcal{A}(K_i)$ per $i = 1, 2$, i en canvi, $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$.

Sigui $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} D_j$ on els discs D_j són disjunts i tots toquen en un punt d'una corba Γ que separa el disc en dues components, és a dir, els seus extrems toquen $\partial\mathbb{D}$, i els discs s'acumulen en tot Γ . I com en els exemples anteriors, $d_H(\Gamma) > 1$. En la **Figura 5** podem veure'n un exemple.

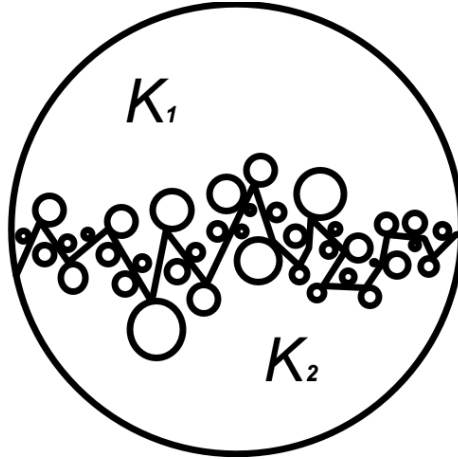


Figura 5: Imatge del disc cosit.

Observem que Γ separa K en dues components K_1 i K_2 , és a dir, $\mathring{K} = \mathring{K}_1 \cup \mathring{K}_2$ amb K_1 i K_2 connexes, a més, $\Gamma \subset \partial_i K$. En cada component de K , tindrem que $\partial_i K_j = \emptyset$ per $j = 1, 2$, això implica que $d_H(\partial_i K_j) = 0$, en conseqüència, pel **Teorema 4.10**, $\mathcal{R}(K_j) = \mathcal{A}(K_j)$. En canvi, podem fer exactament el mateix raonament que hem fet en l'exemple anterior per veure que $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.

Hem vist un exemple on K no té interior, en conseqüència, $\mathcal{A}(K) = \mathcal{C}(K)$, i usant aquest fet hem demostrat que $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$. És el cas del formatge suís (vegeu **Figura 1**). Per altra banda, també hem vist tres exemples on K té interior però $\mathcal{R}(K) \neq \mathcal{A}(K)$. En l'**Exemple 1** ho hem demostrat sense usar $\mathcal{C}(K)$ perquè $\mathring{K} \neq \emptyset$, i per tant, $\mathcal{A}(K) \neq \mathcal{C}(K)$. En el **Exemple 2** hem pogut observar que $(\mathring{K})^c$ connex no implica que $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$, en canvi, sabem que pel **Teorema de Mergelyan (Teorema 4.6)**, K^c connex sí que implica $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$. Per últim, en l'**Exemple 3** hem pogut notar que la igualtat entre les àlgebres $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$ no es preserva per unions, és a dir, $\mathcal{R}(K_1) = \mathcal{A}(K_1)$ i $\mathcal{R}(K_2) = \mathcal{A}(K_2)$ no implica $\mathcal{R}(K_1 \cup K_2) = \mathcal{A}(K_1 \cup K_2)$.

5 Conclusions

En aquest treball hem estudiat la relació entre les àlgebres $\mathcal{P}(K)$, $\mathcal{R}(K)$, $\mathcal{A}(K)$ i $\mathcal{C}(K)$ en funció del compacte K . Hem vist que caracteritzar el compactes K que compleixen $\mathcal{P}(K) = \mathcal{R}(K)$ és relativament fàcil, i que encara és més fàcil caracteritzar el compactes K tals que $\mathcal{A}(K) = \mathcal{C}(K)$. Tot i això, caracteritzar els compactes K tals que $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$ és la part més complicada. Per veure-ho hem necessitat de conceptes nous.

Les mesures de Hausdorff són alguns d'aquests nous conceptes, de caràcter plenament geomètric, a partir del qual definim la dimensió de Hausdorff que ens permet relacionar la igualtat $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$ en termes de la vora interior de K , a través del **Teorema de Davie-Oksendal (Teorema 4.10)**.

La capacitat analítica és un altre d'aquests conceptes nous, que és difícil d'entendre desde un punt de vista mètric o geomètric, però les mesures de Hausdorff ens permeten quantificar-lo. Hem vist que la capacitat analítica caracteritza els compactes evitables, i que necessitem d'un refinament d'aquesta, com és la capacitat analítica continua, per tal de poder caracteritzar els compactes K tals que $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$.

La capacitat analítica continua, de la mateixa manera que les mesures de Hausdorff, ens relaciona la igualtat $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$ amb la vora interior de K a través de la **Conjectura de la vora interior (Teorema 4.11)**, però no només això, si no que ens permet caracteritzar el compactes K que compleixen $\mathcal{R}(K) = \mathcal{A}(K)$, i ho fa a través del **Teorema de Vitushkin (Teorema 4.2)**. Aquest teorema trasllada el problema d'aproximació global en el compacte K a una qüestió local de la vora de K . A més, a partir del Teorema de Vitushkin obtenim altres teoremes sobre la relació entre les àlgebres com són els **Teoremes 4.5, 4.6 i 4.7**.

Per últim cal fer notar que no és gens fàcil construir compactes amb $\mathring{K} \neq \emptyset$ on $\mathcal{R}(K)$ i $\mathcal{A}(K)$ no coincideixin. És per això, que n'em presentat alguns al final del treball.

Bibliografia

- [1] Lars V. Ahlfors. Bounded analytic functions. *Duke Math. J.*, 14:1–11, 1947.
- [2] A. S. Besicovitch. On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points. *Math. Ann.*, 98(1):422–464, 1928.
- [3] A. S. Besicovitch. On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points (II). *Math. Ann.*, 115(1):296–329, 1938.
- [4] A. S. Besicovitch. On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points (III). *Math. Ann.*, 116(1):349–357, 1939.
- [5] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Anàlisi complexa*, volume 49 of *Manuals de la UAB*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, primera edition, 2008.
- [6] A.-P. Calderón. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 74(4):1324–1327, 1977.
- [7] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1978.
- [8] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
- [9] Guy David. Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 14(2):369–479, 1998.
- [10] Micheal A. Donzella. The geometry of rectifiable and unrectifiable sets. Master’s thesis, Kent State University, 2014.
- [11] Gerald B. Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, Princeton, NJ, second edition, 1995.
- [12] Theodore W. Gamelin. *Uniform algebras*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- [13] Theodore W. Gamelin. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [14] John Garnett. *Analytic capacity and measure*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 297. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [15] Joan Mateu, Xavier Tolsa, and Joan Verdera. On the semiadditivity of analytic capacity and planar Cantor sets. In *Harmonic analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001)*, volume 320 of *Contemp. Math.*, pages 259–278. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [16] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

- [17] Walter Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.
- [18] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [19] Xavier Tolsa. The semiadditivity of continuous analytic capacity and the inner boundary conjecture. *Amer. J. Math.*, 126(3):523–567, 2004.
- [20] Xavier Tolsa. Analytic capacity, rectifiability, and the Cauchy integral. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 1505–1527. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [21] Xavier Tolsa. Painlevé’s problem and analytic capacity. *Collect. Math.*, Vol. Extra:89–125, 2006.
- [22] Joan Verdera. BMO rational approximation and one-dimensional Hausdorff content. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 297(1):283–304, 1986.
- [23] Joan Verdera. Removability, capacity and approximation. In *Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, volume 439 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 419–473. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [24] Joan Verdera. Conjunts evitables, conjunts invisibles i el viatjant de comerç, o com l’anàlisi real ajuda l’anàlisi complexa. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 18(2):73–104, 2003.
- [25] Malik Younsi. On removable sets for holomorphic functions. *EMS Surv. Math. Sci.*, 2(2):219–254, 2015.