



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

DOBLE GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESSES

Treball final de grau

VALORACIÓ D'OPCIONS MITJANÇANT EL MÈTODE DE MONTE CARLO

Autora: Laia Cebollero Capdevila

Director: Dr. Josep Vives i Santa Eulàlia

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 9 de juny de 2026

Abstract

This thesis presents the Monte Carlo method as a general tool to approximate expectations arising in financial modelling. Within the Black–Scholes framework, we implement Monte Carlo pricing for a European call and for Asian calls with both discrete and continuous monitoring on the Euro Stoxx 50 index, the latter approximated through time discretization. The numerical study emphasizes error quantification through standard errors and confidence intervals, and discusses the impact of time discretization in the continuous-monitoring case. We also investigate variance reduction through antithetic variates.

Resum

Aquest treball presenta el mètode de Monte Carlo com una eina general per aproximar esperances en modelització financera. En el marc de Black–Scholes, s'implementa el mètode de Monte Carlo en la valoració d'una opció call europea i d'opcions call asiàtiques amb monitoratge discret i continu sobre l'Euro Stoxx 50, aquest darrer aproximat numèricament mitjançant una discretització temporal. L'estudi numèric posa èmfasi en la quantificació de l'error mitjançant l'error estàndard i intervals de confiança, i analitza l'efecte de la discretització en el cas de monitoratge continu. Finalment, es considera l'ús de variables antitètiques com a tècnica de reducció de variància.

Agraïments

Vull agrair al meu tutor, Dr. Josep Vives, per la seva orientació i comentaris al llarg d'aquest treball. També vull donar les gràcies a la meva família pel suport i paciència durant el procés.

Índex

1	Introducció	1
2	El mètode de Monte Carlo	3
2.1	Concepte bàsic i estimador de Monte Carlo	3
2.2	Convergència del mètode de Monte Carlo	4
2.3	Precisió i intervals de confiança de l'estimador	8
2.4	Tècniques de reducció de la variància	10
2.4.1	Variables antitètiques	11
2.4.2	Variables de control	13
2.4.3	Mostreig estratificat	14
2.4.4	Altres tècniques de reducció de variància	16
3	Simulació del moviment brownià	17
3.1	Definicions prèvies	17
3.2	Moviment brownià: definició i propietats bàsiques	18
3.3	Discretització temporal i simulació de trajectòries	20
3.4	Comprovacions empíriques de la simulació	21
3.5	Consideracions pràctiques	22
4	Introducció a les equacions diferencials estocàstiques	23
4.1	Equacions diferencials estocàstiques: definició i interpretació	23
4.2	Introducció al càlcul d'Itô	24
5	Aplicació del mètode de Monte Carlo a la valoració d'opcions	27
5.1	Introducció a la valoració d'opcions	27
5.2	El moviment brownià geomètric com a model del preu d'un actiu	28
5.3	Model de mercat de Black-Scholes	30
5.4	Valoració sota la mesura neutral al risc	30
5.5	Estimador de Monte Carlo per al preu d'una opció	34
5.5.1	Opció call europea	35
5.5.2	Opció call asiàtica amb monitoratge discret	36
5.5.3	Opció call asiàtica amb monitoratge continu	37
5.5.4	Reducció de la variància amb variables antitètiques	37
5.6	Disseny de l'experiment i implementació numèrica	38
5.7	Resultats numèrics	40
5.7.1	Opció call europea	40

5.7.2	Opció call asiàtica amb monitoratge discret	42
5.7.3	Opció call asiàtica amb monitoratge continu	45
5.7.4	Reducció de la variància amb variables antitètiques	46
5.8	Discussió dels resultats	47
6	Conclusions	49
	Referències	51
A	Figures complementàries	52
B	Codi i resultats de la implementació	53

1 Introducció

Els mercats financers evolucionen de manera aleatòria i el preu d'un actiu canvia al llarg del temps segons factors que no podem preveure exactament. Per a modelitzar aquesta incertesa, sovint es descriu el preu del subjacent com un procés aleatori. Aleshores, en un marc neutral al risc, el preu d'un derivat es pot expressar com el valor actual esperat del seu pagament.

Quan aquesta esperança no es pot calcular de forma explícita, el mètode de Monte Carlo ofereix una alternativa natural: simular moltes evolucions possibles del mercat, calcular el pagament en cada simulació i fer-ne la mitjana.

En aquest treball, presentem els fonaments d'aquest mètode i l'apliquem a la valoració d'opcions sota el model de Black-Scholes, analitzant la precisió de l'estimador, els intervals de confiança i l'efecte d'una tècnica de reducció de la variància.

El projecte

Aquest projecte estudia el mètode de Monte Carlo i la seva aplicació a la valoració d'opcions financeres sota el model de Black-Scholes. Per fer-ho, considerarem tres productes: una opció call europea, una opció call asiàtica amb monitoratge discret (mensual) i una opció call asiàtica amb monitoratge continu, aquesta darrera aproximada numèricament mitjançant una discretització temporal. Per cadascuna d'aquestes opcions es defineix l'estimador de Monte Carlo corresponent i s'estudia la precisió de l'estimador, així com l'efecte de l'ús de variables antitètiques per a reduir-ne la variància.

Els objectius principals d'aquest treball són:

- Desenvolupar la base teòrica del mètode de Monte Carlo necessària per a la valoració d'opcions, inclosos la seva convergència, error estàndard i intervals de confiança.
- Entendre com modelitzar i simular la dinàmica de l'actiu subjacent en el model de Black-Scholes a través del moviment brownià.
- Implementar i validar el mètode de Monte Carlo per a la valoració d'opcions en els casos descrits anteriorment, fent servir criteris de validació adequats.
- Avaluar la millora en la precisió obtinguda amb l'aplicació de variables antitètiques.

Per aconseguir-ho, limitarem l'abast d'aquest projecte al model de Black-Scholes amb paràmetres constants i un únic actiu subjacent, l'índex Euro Stoxx 50. Fixarem alguns paràmetres a partir de les dades històriques disponibles, sense considerar la incorporació de dividends. Altres plantejaments com la incorporació de dinàmiques més realistes i calibratge més sofisticat queden fora del marc d'aquest treball.

Estructura de la memòria

La memòria es divideix en una primera part teòrica (capítols 2–4), on es presenten les eines necessàries, i una segona part aplicada (capítol 5), on aplicarem aquestes eines a la valoració d'opcions.

En el capítol 2 començarem introduint el mètode de Monte Carlo, en què consisteix i les seves propietats bàsiques, incloent-hi la precisió de l'estimador. A més, veurem algunes tècniques de reducció de la variància que ens permetran millorar-ne la precisió amb el mateix nombre de simulacions.

A continuació, en el capítol 3 entendrem què és el moviment brownià i per què és rellevant en el marc financer. També veurem com simular-lo, així com algunes comprovacions i aspectes que cal tenir en compte en aquest procés.

Per acabar amb el bloc teòric, en el capítol 4 introduïrem breument les equacions diferencials estocàstiques i el càlcul d'Itô, que farem servir per justificar els càlculs en l'aplicació financera.

Després, passarem a l'aplicació a la valoració d'opcions en el capítol 5. Començarem fent una breu introducció a la valoració d'opcions, on veurem la importància del comportament de l'actiu subjacent. Aleshores, veurem com simular-lo mitjançant el model del moviment brownià geomètric i establirem el nostre marc de referència: el model de mercat de Black-Scholes. A més, entendrem com dur a terme la valoració sota la mesura neutral al risc i com es tradueix en cadascun dels casos d'estudi. A partir d'aquí, ja disposarem de totes les eines necessàries per a aplicar el mètode de Monte Carlo mitjançant una implementació numèrica en Python. Veurem com s'ha dissenyat l'experiment i analitzarem els resultats obtinguts.

Finalment, farem un breu resum del treball i les conclusions extretes.

Ús d'intel·ligència artificial

En l'elaboració d'aquest treball s'han utilitzat eines d'intel·ligència artificial generativa de manera puntual. En concret, s'han fet servir com a eines de revisió, especialment per millorar la redacció, detectar possibles incoherències i resoldre dubtes concrets de programació i format.

Tot i això, aquestes eines han estat només un suport en el desenvolupament del treball. El plantejament, el desenvolupament matemàtic, la implementació i l'anàlisi dels resultats han estat elaborats de manera pròpia.

2 El mètode de Monte Carlo

En aquest capítol introduïrem el mètode de Monte Carlo, una tècnica numèrica que ens permetrà aproximar quantitats d'interès, com el preu d'opcions, mitjançant la simulació. Aquest mètode és especialment útil quan no tenim una solució explícita per al problema que volem resoldre o quan el seu càlcul és massa complex. Per fer-ho, començarem presentant l'estimador de Monte Carlo i justifiarem la seva convergència. A continuació, n'estudiarem la precisió i, finalment, descriurem algunes tècniques de reducció de la variància per millorar-ne l'eficiència. Aquest mètode ens permetrà, més endavant, aproximar preus d'opcions expressats, sota la mesura neutral al risc, com esperances de pagaments descomptats.

2.1 Concepte bàsic i estimador de Monte Carlo

El mètode de Monte Carlo, que rep el seu nom pel famós casino monegas, consisteix a generar mostres aleatòries i estimar quantitats d'interès a partir de proporcions observades o mitjanes mostrals [6, p.1]. En altres paraules, la idea principal darrere del mètode de Monte Carlo és aproximar un valor esperat de la forma $\mathbb{E}[g(R)]$, on R és una variable aleatòria i g és una funció mesurable que transforma la variable aleatòria R en la magnitud d'interès. Per fer-ho, utilitzem la mitjana aritmètica dels resultats d'un nombre N d'observacions independents i idènticament distribuïdes amb la mateixa distribució que $g(R)$. En lloc de realitzar aquests experiments per obtenir els resultats aleatoris, el mètode substitueix les observacions físiques per mostres aleatòries adequades generades de forma computacional [9, p.55].

D'aquesta manera, en lloc de resoldre el problema de forma analítica, el mètode de Monte Carlo simula una gran quantitat de resultats possibles a partir de les distribucions especificades pel model. Aquestes característiques fan que aquest mètode sigui especialment útil per modelar la incertesa i analitzar el nivell de risc, tal com veurem més endavant.

Observació 2.1. Per simplificar la notació, a partir d'ara considerarem que la magnitud d'interès és una variable aleatòria X que s'obté com a transformació d'una font d'aleatorietat R , és a dir, $X = g(R)$ per a alguna funció mesurable g . Així, estimar $\mathbb{E}[g(R)]$ és equivalent a estimar $\mathbb{E}[X]$, i podem treballar directament amb $\mathbb{E}[X]$.

Formalment, definim el mètode de la següent manera:

Definició 2.2. Mètode de Monte Carlo [9, p.57]. *Sigui X una variable aleatòria real amb esperança finita. Estimem $\mathbb{E}[X]$ amb la mitjana aritmètica*

$$\hat{\mu}_N = \bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

per $N \in \mathbb{N}$, on $X_1, \dots, X_N$ són còpies independents idènticament distribuïdes amb la mateixa distribució que X . Anomenem $\hat{\mu}_N$ l'estimador de Monte Carlo construït a partir de N mostres independents.

Si, a més, $\text{Var}(X) < \infty$, podrem quantificar la precisió de l'estimador mitjançant l'error estàndard, com veurem a la secció 2.3.

A continuació, veiem com funciona el mètode amb un exemple molt simple:

Exemple 2.3. Càlcul de π amb el mètode de Monte Carlo [4, p.6]. Podem aproximar el valor de π escollint N punts aleatoris i independents $(P_i)_{i=1,\dots,N}$ uniformement distribuïts sobre el quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Considerem el disc unitat $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, i sigui h el nombre de punts que cauen dins del disc,

$$h = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{P_i \in C\}}.$$

Com que cada P_i és uniforme sobre el quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$, la probabilitat que P_i caigui dins del disc C coincideix amb la ràtio entre l'àrea del disc i la del quadrat. És a dir,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{P_i \in C\}}] = \mathbb{P}(P_i \in C) = \frac{\pi}{4}.$$

Per tant, $\pi = 4\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{P_i \in C\}}]$ i l'estimador de Monte Carlo de π és:

$$\hat{\pi}_N := 4 \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{P_i \in C\}} = \frac{4h}{N}.$$

Per a N gran, $\hat{\pi}_N \approx \pi$.

Fent servir la notació anterior, $X_i = \mathbf{1}_{\{P_i \in C\}}$ (de fet, $R_i = P_i$ és un punt aleatori del quadrat i $g(x, y) = \mathbf{1}_{\{(x,y) \in C\}}$).

2.2 Convergència del mètode de Monte Carlo

Observem que l'estimació obtinguda en l'exemple anterior té la forma d'una mitjana aritmètica, tal com l'estimador $\hat{\mu}_N$. La convergència d'aquest tipus d'estimadors, quan N creix, ve garantida per la llei forta dels grans nombres. Per aquest motiu, dedicarem aquest apartat a demostrar aquest teorema seguint [12].

Teorema 2.4. Llei forta dels grans nombres. *Sigui $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una seqüència de variables aleatòries reals i.i.d. tal que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ en un espai de probabilitats $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Aleshores,*

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{q.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

És a dir, la mitjana aritmètica de les realitzacions $X_1, \dots, X_N$ convergeix quasi segurament a l'esperança $\mathbb{E}[X_1]$.

Per tal de demostrar el teorema, comencem enunciant alguns resultats auxiliars necessaris, alguns dels quals es demostraran per completar l'argument, mentre que la resta es prenen com a resultats previs de la mateixa referència.

Lema 2.5. *Per a tota variable aleatòria Y es compleix que $\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y| \geq N) \leq \mathbb{E}[|Y|]$.*

Demostració. Podem escriure

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y| \geq N) &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} \mathbb{P}(k \leq |Y| < k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(k \leq |Y| < k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(k \leq |Y| < k+1). \end{aligned}$$

Aleshores, com que en cada tros $\{k \leq |Y| < k+1\}$, la variable $|Y|$ és com a mínim k , llavors, en multiplicar per l'indicador, tenim:

$$k \mathbf{1}_{\{k \leq |Y| < k+1\}} \leq |Y| \mathbf{1}_{\{k \leq |Y| < k+1\}}$$

i, per la monotonia de l'esperança,

$$\mathbb{E} [k \mathbf{1}_{\{k \leq |Y| < k+1\}}] \leq \mathbb{E} [|Y| \mathbf{1}_{\{k \leq |Y| < k+1\}}]$$

on, com que k és constant,

$$\mathbb{E} [k \mathbf{1}_{\{k \leq |Y| < k+1\}}] = k \mathbb{P}(k \leq |Y| < k+1).$$

Per tant, obtenim la desigualtat:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y| \geq N) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} [k \mathbf{1}_{\{k \leq |Y| < k+1\}}] \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} [|Y| \mathbf{1}_{\{k \leq |Y| < k+1\}}] = \mathbb{E}[|Y|].$$

□

Lema 2.6. Primer lema de Borel-Cantelli. *Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat, i sigui $\{A_N\}_{N \geq 1}$ una successió de conjunts de $\mathcal{F}$. Si $\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_N) < \infty$, es compleix que*

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{N \rightarrow \infty} A_N \right) = 0.$$

Demostració. Recordem que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} A_N = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{m \geq N} A_m.$$

A més, com que $\{\bigcup_{m \geq N} A_m\}_{N \geq 1}$ és una successió decreixent de conjunts, per la continuïtat de la probabilitat per successions decreixents tenim

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{N \rightarrow \infty} A_N \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{m \geq N} A_m \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{m \geq N} A_m \right) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m \geq N} \mathbb{P}(A_m) = 0,$$

on hem fet servir la subadditivitat de la probabilitat per la desigualtat. Finalment, fent servir que $\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_N) < \infty$ i que la cua d'una sèrie convergent tendeix a zero obtenim el resultat. □

A més dels lemes anteriors, farem servir alguns resultats clàssics que enunciem a continuació i que utilitzarem més endavant en la demostració.

Teorema 2.7. Convergència dominada. *Sigui $\{X_N\}_{N \geq 1}$ una successió de variables aleatòries convergent puntualment cap a una variable aleatòria X . Suposem que existeix una variable aleatòria Y amb esperança finita tal que $|X_N| \leq Y$. Aleshores,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_N] = \mathbb{E}[X].$$

Proposició 2.8. *Sigui $\{X_N\}_{N \geq 1}$ una successió de variables aleatòries independents, de quadrat integrable i centrades. Si la sèrie $\sum_{N=1}^{\infty} \text{Var}(X_N)$ convergeix, aleshores la sèrie $\sum_{N=1}^{\infty} X_N$ convergeix quasi segurament.*

Lema 2.9. Lema de Kronecker. *Siguin $\{x_N\}_{N \geq 1}$ i $\{a_N\} : N \geq 1$ dues successions de nombres reals tals que $0 < a_N \uparrow \infty$. Aleshores, si $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{x_N}{a_N}$ convergeix, es compleix*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{a_N} \sum_{i=1}^N x_i = 0.$$

Amb aquests resultats previs, podem demostrar el teorema següent, que serà la peça clau per completar la demostració de la llei forta dels grans nombres.

Teorema 2.10. *Sigui $\{X_N\}_{N \geq 1}$ una successió de variables aleatòries independents, de quadrat integrable i centrades. Considerem una successió $\{a_N\}_{N \geq 1}$ de nombres reals tals que $0 < a_N \uparrow \infty$. Aleshores, si*

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_N)}{a_N^2} < \infty,$$

es compleix que

$$\frac{\sum_{i=1}^N X_i}{a_N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{q.s.} 0.$$

Demostració. Per hipòtesi,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \text{Var}\left(\frac{X_N}{a_N}\right) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_N)}{a_N^2} < \infty.$$

Aleshores, la proposició 2.8 aplicada a la successió $\frac{X_N}{a_N}$ implica que $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{X_N}{a_N}$ convergeix quasi segurament.

Per definició de convergència quasi segura, existeix un conjunt $H \subseteq \Omega$ amb $\mathbb{P}(H) = 1$ tal que, per tot $\omega \in H$, la sèrie numèrica $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{X_N(\omega)}{a_N}$ convergeix.

Fixat un $\omega \in H$, aplicant el lema de Kronecker (lema 2.9) a les successions de nombres reals $\{a_N\}_{N \geq 1}$ i $\{x_N = X_N(\omega)\}_{N \geq 1}$ tenim que $\frac{1}{a_N} \sum_{i=1}^N X_i(\omega) \rightarrow 0$. Finalment, com que això val per tot $\omega \in H$, tenim que

$$\frac{\sum_{i=1}^N X_i}{a_N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{q.s.} 0.$$

□

Demostració del teorema 2.4. Sigui $Y_N = X_N \mathbf{1}_{\{|X_N| < N\}}$. Per definició, si $|X_N| < N$, tenim $\mathbf{1}_{\{|X_N| < N\}} = 1$ i, per tant, $Y_N = X_N \cdot 1 = X_N$. És a dir, $X_N \neq Y_N$ només pot passar si $|X_N| \geq N$.

Aleshores, pel lema 2.5

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_N \neq Y_N) \leq \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_N| \geq N) = \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geq N) \leq \mathbb{E}[|X_1|] < \infty.$$

Pel primer lema de Borel-Cantelli (lema 2.6)

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{N \rightarrow \infty} \{X_N \neq Y_N\}\right) = 0.$$

Equivalentment, com que

$$\left(\limsup_{N \rightarrow \infty} \{X_N \neq Y_N\} \right)^C = \liminf_{N \rightarrow \infty} \{X_N \neq Y_N\}^C = \liminf_{N \rightarrow \infty} \{X_N = Y_N\}$$

si anomenem $G = \liminf_{N \rightarrow \infty} \{X_N = Y_N\}$ tindrem $\mathbb{P}(G) = 1$.

Segui $\omega \in G$, existeix un $N_0(\omega)$ tal que $X_N(\omega) = Y_N(\omega)$ per tot $N \geq N_0(\omega)$. Aleshores,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\omega) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\omega) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_0(\omega)} (X_i - Y_i)(\omega)$$

on, per N prou gran, $\sum_{i=1}^{N_0(\omega)} (X_i - Y_i)(\omega)$ no depèn de N . Per tant, per N prou gran,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_0(\omega)} (X_i - Y_i)(\omega) \rightarrow 0.$$

Equivalentment,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(\omega) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(\omega) \rightarrow 0,$$

i és suficient demostrar

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \rightarrow \mathbb{E}[X_1]. \quad (2.1)$$

Com que $|X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| < N\}}| \leq |X_1|$, aplicant el teorema de convergència dominada (teorema 2.7) a la successió $\{X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| < N\}}\}$,

$$\mathbb{E}[Y_N] = \mathbb{E}[X_N \mathbf{1}_{\{|X_N| < N\}}] = \mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| < N\}}] \rightarrow \mathbb{E}[X_1]$$

quan N tendeix a infinit. Aleshores, la mitjana aritmètica dels primers N termes convergeix cap al mateix límit. És a dir,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[Y_i] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_1].$$

Per tant, per provar (2.1) és suficient veure

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Y_i - \mathbb{E}[Y_i]] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{q.s.} 0. \quad (2.2)$$

Pel teorema 2.10 n'hi ha prou en demostrar que $\{Y_N - \mathbb{E}[Y_N]\}_{N \geq 1}$ és una successió de variables independents, centrades i de quadrat integrable que satisfà $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_N - \mathbb{E}[Y_N])}{N^2} < \infty$.

És immediat veure que les variables són independents (ja que Y_N és funció mesurable de X_N i les variables X_N són independents) i centrades. A més, per la definició de Y_N

tenim que $Y_N^2 \leq N^2$ i, per tant, $\mathbb{E}[Y_N^2] \leq N^2 < \infty$. Aleshores, $Y_N - \mathbb{E}[Y_N]$ també són de quadrat integrable. Veiem que es compleix la darrera condició:

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_N - \mathbb{E}[Y_N])}{N^2} &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_N)}{N^2} \leq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_N^2]}{N^2} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X_N^2 \mathbf{1}_{\{|X_N| < N\}}]}{N^2} \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X_1^2 \mathbf{1}_{\{|X_1| < N\}}]}{N^2} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[X_1^2 \mathbf{1}_{\{k-1 \leq |X_1| < k\}}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_1^2 \mathbf{1}_{\{k-1 \leq |X_1| < k\}}] \sum_{N=k}^{\infty} \frac{1}{N^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{\{k-1 \leq |X_1| < k\}}] \frac{2}{k} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{\{k-1 \leq |X_1| < k\}}] = 2\mathbb{E}[|X_1|] < \infty. \end{aligned}$$

On hem fet servir que, per a $k \geq 1$, tenim

$$\begin{aligned} \sum_{N=k}^{\infty} \frac{1}{N^2} &= \frac{1}{k^2} + \sum_{N=k+1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \leq \frac{1}{k^2} + \sum_{N=k+1}^{\infty} \frac{1}{N(N-1)} \\ &\leq \frac{1}{k^2} + \sum_{N=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) \leq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} \leq \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

i que, sobre el conjunt $\{k-1 \leq |X_1| < k\}$, es té $X_1^2 \leq k|X_1|$. $\square$

En particular, fent servir la llei forta dels grans nombres obtenim que l'estimador de Monte Carlo $\hat{\mu}_N$ convergeix quasi segurament a $\mu = \mathbb{E}[X]$ quan el nombre de mostres N augmenta.

2.3 Precisió i intervals de confiança de l'estimador

Com en qualsevol mètode estocàstic, diferents execucions del mètode de Monte Carlo poden produir resultats diferents. Per aquest motiu, és important considerar l'error estadístic de l'estimació. Però abans, notem que l'estimador de Monte Carlo és un estimador sense biaix de $\mathbb{E}[X]$ ja que

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}_N] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X],$$

on hem fet servir la linealitat de l'esperança i que $X_1, \dots, X_N$ estan distribuïdes com X .

Aquest fet ens assegura que l'estimador de Monte Carlo és correcte en mitjana, és a dir, que no presenta biaix. Tot i això, $\hat{\mu}_N$ continua sent una variable aleatòria i, per tant, seguim necessitant conèixer la magnitud de l'error en una simulació concreta. Per això, farem servir el teorema central del límit:

Teorema 2.11. Teorema central del límit [13, p.366]. *Siguin $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb esperança μ i variància σ^2 , on $0 < \sigma < \infty$. Siguin*

$$T_N = \frac{\sum_{j=1}^N X_j - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}.$$

Aleshores, $T_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

Per demostrar aquest resultat, ens basarem en el mètode de les funcions característiques seguint [13]. Per fer-ho, recordem primer la seva definició així com un resultat que ens serà útil per la demostració.

Definició 2.12. Definim la **funció característica** d'una variable aleatòria X com

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E} [e^{itX}], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.13. Siguin $X, \{X_N\}_{N \geq 1}$ variables aleatòries amb funcions característiques $\Phi_X, \{\Phi_{X_N}\}_{N \geq 1}$ respectivament. Són equivalents:

1. X_N convergeix en llei a X , $X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
2. $\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_{X_N}(t) = \Phi_X(t)$ per tot $t \in \mathbb{R}$.

Demostració del teorema 2.11. Definim $Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}$ per tot $j \in \mathbb{N}$. Aleshores, les variables Y_j són independents i idènticament distribuïdes amb $\mathbb{E}[Y_j] = 0$ i $\text{Var}(Y_j) = 1$. D'aquesta manera,

$$T_N = \frac{\sum_{j=1}^N (X_j - \mu)}{\sigma \sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N Y_j.$$

Fent servir que les variables Y_j són i.i.d., podem calcular la funció característica de T_N com

$$\begin{aligned} \Phi_{T_N}(t) &= \mathbb{E} [e^{itT_N}] = \mathbb{E} \left[e^{i \frac{t}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N Y_j} \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^N e^{i \frac{t}{\sqrt{N}} Y_j} \right] \\ &= \prod_{j=1}^N \mathbb{E} \left[e^{i \frac{t}{\sqrt{N}} Y_j} \right] = \left(\mathbb{E} \left[e^{i \frac{t}{\sqrt{N}} Y_1} \right] \right)^N = \left(\Phi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sqrt{N}} \right) \right)^N. \end{aligned}$$

D'altra banda, fent servir el desenvolupament de Taylor de la funció característica al voltant de $t = 0$, i tenint en compte que $\Phi_{Y_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itY_1}]$, com que $\mathbb{E}[Y_1] = 0$ i $\text{Var}(Y_1) = 1$, tenim que, quan t tendeix a zero,

$$\Phi_{Y_1}(t) = 1 + it\mathbb{E}[Y_1] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[Y_1^2] + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Per tant,

$$\Phi_{T_N}(t) = \left(\Phi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sqrt{N}} \right) \right)^N = \left(1 - \frac{t^2}{2N} + o \left(\frac{t^2}{N} \right) \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

per tot $t \in \mathbb{R}$ fix (ja que $t/\sqrt{N} \rightarrow 0$).

Finalment, notem que $e^{-t^2/2}$ coincideix amb la funció característica de $\mathcal{N}(0, 1)$ i, aleshores, pel teorema 2.13 tenim que $T_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$, com volíem veure. $\square$

El teorema central del límit indica que, per valors de N prou grans, l'estimador de Monte Carlo $\hat{\mu}_N$ es comporta aproximadament com $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$, on $\mu = \mathbb{E}[X]$ i $\sigma^2 = \text{Var}(X)$. Aleshores, com que σ determina de forma única la dispersió de valors al voltant de la mitjana μ , podem fer servir la desviació estàndard de l'estimador, és a dir, l'error estàndard

$\sigma/\sqrt{N}$ com a mesura de la seva precisió. Per tant, l'error estàndard de l'estimador de Monte Carlo és d'ordre $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$. En altres paraules, per guanyar una xifra decimal de precisió en l'estimació (és a dir, reduir la desviació estàndard a una desena part) caldria multiplicar per 100 el nombre d'execucions del mètode de Monte Carlo. En conseqüència, obtenir un major nivell d'exactitud requereix un esforç significatiu.

D'altra banda, el comportament de $\hat{\mu}_N$ com $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$ per N prou gran, ens permet obtenir un interval de confiança aproximat per μ amb nivell de confiança $1 - \alpha \in (0, 1)$

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right]$$

o, equivalentment,

$$\bar{X}_N \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

on $z_{1-\alpha/2}$ és el valor de la normal estàndard $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ que compleix $\mathbb{P}(|Z| \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$. És a dir, l'àrea total que queda fora de l'interval és α (repartit en $\alpha/2$ a cada cua).

Observació 2.14. Normalment, la desviació estàndard σ és desconeguda. Aleshores, podem aproximar σ amb la desviació estàndard mostral. Així, l'error estàndard estimat és

$$\hat{\sigma}_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_N)^2} = \sqrt{\frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 - \hat{\mu}_N^2 \right)}.$$

En aquest cas, a la pràctica es construeix l'interval de confiança aproximat substituint σ per $\hat{\sigma}_N$, $\bar{X}_N \pm z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_N / \sqrt{N}$ [9, p.59].

Observació 2.15. Cal recordar que fem servir la desviació estàndard de l'error com a mesura de l'error des d'un punt de vista estadístic i, per tant, és possible que una simulació particular tingui un error superior a aquesta aproximació [8, p.20].

Observació 2.16. És important tenir present que, a priori, no sabem si N és suficientment gran perquè el Teorema Central del Límit proporcioni una bona aproximació i, per tant, perquè els intervals de confiança basats en aquesta aproximació siguin fiables. A la pràctica, sovint es pren $N \geq 30$ com una regla orientativa que fa que aquesta aproximació sigui raonable. Tot i això, aquest criteri no és universal, ja que la qualitat de l'aproximació depèn de la distribució de la variable considerada [3].

2.4 Tècniques de reducció de la variància

En l'apartat anterior, hem vist que la precisió de l'estimador depèn del nombre de mostres, N , i de la desviació estàndard de la variable aleatòria d'interès, $\sigma = \text{sd}(X)$. En particular, la desviació estàndard de l'estimador $\hat{\mu}_N$ decreix com $\text{sd}(\hat{\mu}_N) = \sigma/\sqrt{N}$ (equivalentment $\text{Var}(\hat{\mu}_N) = \sigma^2/N$). Així, augmentar el nombre de mostres és cada vegada menys efectiu, i, ahora, també pot comportar un elevat cost computacional.

És per això que en aquest apartat ens centrarem en millorar la precisió mitjançant la reducció de la variància de l'estimador, $\text{Var}(\hat{\mu}_N)$, i presentarem breument algunes tècniques que permeten modificar el procediment de simulació o la construcció de l'estimador per a obtenir estimadors més precisos sense introduir cap mena de biaix. Aquestes tècniques són especialment rellevants en problemes de valoració financera, on assolir una precisió elevada pot requerir un nombre molt gran de simulacions.

A més, cal tenir en compte que, en general, emprar una tècnica de reducció de la variància pot comportar un esforç computacional addicional. Per tant, quan comparem mètodes no n'hi ha prou amb considerar l'evolució de la variància, també s'ha de considerar l'eficiència en termes de cost computacional [9, p.66].

2.4.1 Variables antitètiques

La idea de les variables antitètiques és reduir la variància de l'estimador de Monte Carlo construint parelles de mostres amb covariància negativa que tendeixen a compensar-se. Recordem que, si X és una variable aleatòria real amb esperança finita, l'estimador de Monte Carlo és:

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

on X_i són mostres independents idènticament distribuïdes com X .

El mètode antitètic consisteix a construir, per a cada mostra X_i , una mostra antitètica X'_i amb la mateixa distribució que X , de manera que X_i i X'_i tinguin covariància no positiva [9, p.68],

$$\text{Cov}(X_i, X'_i) \leq 0.$$

És clar que, aleshores, X_i i X'_i no són independents. Tot i això, si assumim que les parelles (X_i, X'_i) són i.i.d. per a $i = 1, \dots, N$, aleshores les observacions

$$\bar{X}_i = \frac{X_i + X'_i}{2}$$

són i.i.d. (ja que són una funció mesurable de les parelles (X_i, X'_i)). Per tant, podem construir intervals de confiança seguint el mateix raonament que en l'apartat 2.3 [4, p.342].

D'aquesta manera, definim l'estimador antitètic com [6, p.206]

$$\hat{\mu}_N^{\text{anti}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{X_i + X'_i}{2}.$$

Notem que, com que $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X'_i] = \mathbb{E}[X]$, aleshores $\mathbb{E}[\bar{X}_i] = \mathbb{E}[X]$ i, per tant, l'estimador $\hat{\mu}_N^{\text{anti}}$ és un estimador sense biaix de $\mathbb{E}[X]$.

Considerem una parella genèrica (X, X') amb la mateixa llei marginal que X i construïda de manera antitètica, és a dir, amb $\text{Cov}(X, X') \leq 0$. Aleshores, si definim $\bar{X} := (X + X')/2$ tenim que

$$\text{Var}(\hat{\mu}_N^{\text{anti}}) = \frac{\text{Var}(\bar{X})}{N} = \frac{\text{Var}(X) + \text{Var}(X') + 2\text{Cov}(X, X')}{4N} = \frac{1}{2N} \text{Var}(X) + \frac{1}{2N} \text{Cov}(X, X').$$

Si $\hat{\mu}_{2N}$ denota l'estimador de Monte Carlo usual construït a partir de $2N$ mostres independents de X , aleshores $\text{Var}(\hat{\mu}_{2N}) = \text{Var}(X)/(2N)$. Per tant,

$$\text{Var}(\hat{\mu}_N^{\text{anti}}) = \text{Var}(\hat{\mu}_{2N}) + \frac{1}{2N} \text{Cov}(X, X') \leq \text{Var}(\hat{\mu}_{2N}).$$

Això demostra que, si $\text{Cov}(X, X') \leq 0$, s'obté una reducció de la variància respecte a l'estimador usual amb el mateix cost de simulació.

Observació 2.17. Comparem l'estimador $\hat{\mu}_N^{\text{anti}}$ amb l'estimador de Monte Carlo usual construït a partir de $2N$ observacions independents, $\hat{\mu}_{2N}$, ja que cada parella antitètica requereix dues simulacions, una per cada membre de la parella, i, per tant, té un cost comparable al de generar $2N$ mostres independents.

Per obtenir un criteri pràctic que assegurí que la covariància entre una parella antitètica no és positiva, és útil el següent resultat:

Proposició 2.18. Desigualtat de covariància de Chebyshev [9, p.67]. *Sigui X una variable aleatòria real. Sigui f, g funcions no decreixents tals que $\text{Cov}(f(X), g(X))$ és finita. Aleshores tenim:*

$$\mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)].$$

Demostració. Com que $\text{Cov}(f(X), g(X))$ és finita, totes les esperances que apareixen a continuació estan ben definides.

Considerem una còpia independent de X , Y (és a dir, X i Y són variables aleatòries independents amb la mateixa distribució). Com que f i g són no decreixents tenim que $f(X) - f(Y)$ i $g(X) - g(Y)$ tenen el mateix signe i, per tant, $(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y)) \geq 0$. Aleshores,

$$0 \leq \mathbb{E}[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))].$$

Per la independència de X i Y ,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)], \quad \mathbb{E}[f(Y)g(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]\mathbb{E}[g(X)].$$

A més, com que X i Y són idènticament distribuïdes, tenim que $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$, $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, $\mathbb{E}[f(X)g(X)] = \mathbb{E}[f(Y)g(Y)]$.

Per tant,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] \\ &= \mathbb{E}[f(X)g(X)] - \mathbb{E}[f(X)g(Y)] - \mathbb{E}[f(Y)g(X)] + \mathbb{E}[f(Y)g(Y)] \\ &= 2(\mathbb{E}[f(X)g(X)] - \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)]), \end{aligned}$$

i, en conseqüència, $\mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)]$, com volíem demostrar. $\square$

Observació 2.19. En particular, si f és no decreixent i g és no creixent, aleshores

$$\mathbb{E}[f(X)g(X)] \leq \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)]$$

i per tant $\text{Cov}(f(X), g(X)) \leq 0$.

Així, obtenim un criteri pràctic per dissenyar parelles antitètiques: aplicar dues funcions monòtones en sentit oposat a una mateixa font d'aleatorietat.

A la pràctica, sovint es construeixen parelles antitètiques a partir d'una mateixa font d'aleatorietat, aplicant transformacions oposades a una mateixa variable bàsica. D'aquesta manera, obtenim els següents exemples:

Exemples 2.20. [6, p.205].

1. **Cas uniforme.** Si una simulació depèn d'una variable uniforme $U \sim \text{Unif}(0, 1)$, podem considerar la parella antitètica $(U, 1 - U)$.

2. **Cas normal.** Si una simulació depèn d'una variable normal estàndard $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, podem considerar la parella $(Z, -Z)$. Aquest cas serà especialment rellevant en aquest treball, ja que apareix de manera natural en les simulacions basades en increments del moviment brownià.

Observació 2.21. En aquests casos, les dues simulacions tenen la mateixa distribució marginal però tendeixen a compensar-se, fet que redueix la variabilitat de l'estimació.

2.4.2 Variables de control

El mètode de variables de control es basa en la idea d'intentar aprofitar informació coneguda sobre una variable aleatòria relacionada amb X . En concret, suposem que coneixem una variable aleatòria Y per a la qual sabem calcular $\mathbb{E}[Y]$ i que està correlacionada amb X . Aleshores definim l'estimador de Monte Carlo per a $\mathbb{E}[X]$ amb variable de control Y com

$$\hat{\mu}_N^{CV} = \bar{X} - b(\bar{Y} - \mathbb{E}[Y]) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - b(Y_i - \mathbb{E}[Y]))$$

on (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, N$, són parelles de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb la mateixa llei conjunta que (X, Y) , $\bar{X}$, $\bar{Y}$ són les mitjanes aritmètiques d'aquestes mostres i b és un escalar fixat [6, p.186].

És immediat veure que aquest estimador no té biaix ja que

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}_N^{CV}] = \mathbb{E}[\bar{X} - b(\bar{Y} - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X],$$

i que la seva variància és

$$\text{Var}(\hat{\mu}_N^{CV}) = \frac{1}{N} \text{Var}(X - bY) = \frac{1}{N} (\text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) - 2b \text{Cov}(X, Y)).$$

Per tant, l'ús de l'estimador de Monte Carlo amb variable de control proporciona una reducció de la variància respecte a l'estimador usual si

$$b^2 \text{Var}(Y) \leq 2b \text{Cov}(X, Y),$$

i la magnitud d'aquesta reducció ve donada per $2b \text{Cov}(X, Y) - b^2 \text{Var}(Y)$.

D'aquesta manera, si $\text{Var}(Y) > 0$, podem escollir el coeficient òptim b que minimitza la variància de $\hat{\mu}_N^{CV}$ com

$$b^* = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$$

i, si escollim $b = b^*$, sempre que $\text{Var}(X) > 0$, la reducció relativa de la variància és:

$$\frac{\text{Var}(\hat{\mu}_N) - \text{Var}(\hat{\mu}_N^{CV})}{\text{Var}(\hat{\mu}_N)} = \frac{2b^* \text{Cov}(X, Y) - (b^*)^2 \text{Var}(Y)}{\text{Var}(X)} = \rho_{XY}^2$$

on ρ_{XY} és el coeficient de correlació entre X i Y [9, p.73].

Observació 2.22. L'elecció de b que minimitza la variància coincideix amb el pendent obtingut en una regressió lineal de X sobre Y [4, p.350]. Aquesta lectura com a “ajust lineal” ajuda a entendre el mètode: es resta de X la part explicable pel control Y , i això redueix la variabilitat de l'estimador.

Observació 2.23. A la pràctica, és poc probable que $\text{Cov}(X, Y)$ i $\text{Var}(Y)$ siguin coneguts i, per tant, no serà possible calcular b^* . En aquests casos, podem fer servir una estimació. Per exemple, podem substituir els paràmetres pels seus equivalents mostrals i fer servir l'estimador

$$\hat{b}_N = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}$$

on, sota les hipòtesis d'integrabilitat corresponents, $\hat{b}_N \rightarrow b^*$ amb probabilitat 1 per la llei forta dels grans nombres. Tot i això, cal recordar que substituir b^* per $\hat{b}_N$ pot introduir algun biaix, encara que aquest sol ser petit per valors de N prou grans [6, p.187].

Observació 2.24. El mètode de Monte Carlo amb variable de control es pot generalitzar per a incorporar més d'una variable de control. Per fer-ho, cal estimar diversos paràmetres de control, cosa que fa que el mètode sigui més sensible a errors en l'estimació. Per aquest motiu, en alguns casos pot ser preferible fer servir una sola variable de control [8, p.114].

2.4.3 Mostreig estratificat

En lloc de simular totes les mostres a partir de la distribució global, el mostreig estratificat divideix l'espai mostral en estrats i força la simulació dins de cadascun d'ells. Per aconseguir-ho, considerem una partició de l'espai de valors de X en estrats i prenem mostres dins de cada estrat. Aleshores, fem servir la següent propietat coneguda de la probabilitat condicionada:

Proposició 2.25. [6, p.209]. *Sigui X una variable aleatòria real integrable, siguin $A_1, \dots, A_m$ subconjunts disjunts tals que $\mathbb{P}(X \in \bigcup_{i=1}^m A_i) = 1$. Aleshores*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(X \in A_i) \mathbb{E}[X|X \in A_i].$$

Suposem que volem estimar $\mathbb{E}[X]$. Siguin $A_1, \dots, A_m$ disjunts tals que $\mathbb{P}(X \in \bigcup_{i=1}^m A_i) = 1$ (i.e. $A_1, \dots, A_m$ és una partició de l'espai), anomenem $p_i = \mathbb{P}(X \in A_i)$ amb $p_i > 0$ per als estrats que es mostregen. Suposem que per cada estrat A_k prenem N_k mostres amb la distribució de X condicionat a A_k , $N_1 + \dots + N_m = N$.

Per tot $k = 1, \dots, m$ definim

$$\bar{X}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} X_{k,j}$$

on $X_{k,j}$ són independents i idènticament distribuïdes com $\{X|X \in A_k\}$ per tot $j = 1, \dots, N_k$. Suposem que les mostres de diferents estrats es generen de manera independent, de forma que $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ són independents.

Aleshores definim l'estimador de Monte Carlo estratificat per a $\mathbb{E}[X]$ com

$$\hat{\mu}_N^{\text{strat}} = \sum_{k=1}^m p_k \bar{X}_k$$

[9, p.77]. És a dir, estimem la mitjana condicional en cada regió A_k i aleshores fem la mitjana ponderada segons la probabilitat de cada regió p_k .

Cal notar que la quantitat de mostres N_k que prenem de cada estrat es decideix prèviament. Una de les maneres més simples és el mostreig proporcionat, on escollim $N_k = Np_k$ arrodonint si és necessari.

D'altra banda, veiem que $\hat{\mu}_N^{\text{strat}}$ és un estimador sense biaix per $\mathbb{E}[X]$ ja que

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}_N^{\text{strat}}] = \sum_{k=1}^m p_k \mathbb{E}[\bar{X}_k] = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(X \in A_k) \mathbb{E}[X|X \in A_k] = \mathbb{E}[X]$$

on hem fet servir que $\mathbb{E}[\bar{X}_k] = \mathbb{E}[X|X \in A_k]$ i la proposició anterior.

A continuació, podem quantificar l'efecte sobre la variància. Com que $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ són independents,

$$\text{Var}(\hat{\mu}_N^{\text{strat}}) = \text{Var}\left(\sum_{k=1}^m p_k \bar{X}_k\right) = \sum_{k=1}^m p_k^2 \text{Var}(\bar{X}_k) = \sum_{k=1}^m \frac{p_k^2}{N_k} \text{Var}(X|X \in A_k).$$

En canvi, l'estimador de Monte Carlo usual $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ té variància $\text{Var}(\hat{\mu}_N) = \frac{1}{N} \text{Var}(X)$.

Així, per a un N fix, l'estratificació pot reduir la variància si l'assignació $N_1, \dots, N_m$ reparteix adequadament les mostres entre els estrats. En particular, convé assignar més mostres als estrats amb variància condicional més gran $\text{Var}(X|X \in A_k)$. En altres paraules, si comparem amb l'estimador usual, l'estratificació elimina la variabilitat deguda al repartiment aleatori de mostres entre estrats, mentre que la variabilitat dins de cada estrat es manté [6, p. 210].

En concret, tenim la següent proposició:

Proposició 2.26. *Assignació òptima de mostres en el mostreig estratificat [9, p.78].*

- (a) *Amb la notació anterior, existeixen $N_1, \dots, N_m$ tals que la variància de l'estimador de Monte Carlo estratificat $\hat{\mu}_N^{\text{strat}}$ és menor que la variància de l'estimador de Monte Carlo $\hat{\mu}_N$.*
- (b) *La màxima reducció de variància possible s'obté escollint*

$$N_k^* := N \frac{p_k \sigma_k}{\sum_{j=1}^m p_j \sigma_j} \text{ on } \sigma_j^2 = \text{Var}(X|X \in A_j).$$

Observació 2.27. [6, p.210]. Es pot generalitzar el mètode permetent que els estrats depenguin d'una segona variable aleatòria Y (variable d'estratificació). En aquest cas, les definicions són anàlogues fent servir

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^K \mathbb{P}(Y \in A_i) \mathbb{E}[X|Y \in A_i]$$

en lloc de la Proposició 2.25.

Observació 2.28. El mètode també es pot generalitzar per a més d'una dimensió quan tenim un vector $X = (X_1, \dots, X_d)$ de variables aleatòries reals independents X_j . Això esdevé ràpidament inviable ja que, per obtenir una estratificació "completa", caldria dividir l'espai en una graella de $N = N_1 \cdots N_d$ estrats. Per això, en problemes multidimensionals s'acostumen a utilitzar extensions més eficients com el *Latin Hypercube Sampling*, que estratifica cada marginal per separat i combina les mostres mitjançant una permutació aleatòria (veure [9, p.83-85] o [6, p.236-243]).

2.4.4 Altres tècniques de reducció de variància

En els apartats anteriors hem vist alguns mètodes de reducció de variància, però n'hi ha molts més. En aquesta secció, ens hem centrat en aquelles tècniques que (i) es poden aplicar de manera general en diferents contextos del mètode de Monte Carlo, (ii) són relativament senzilles d'implementar i interpretar i (iii) es poden presentar i aplicar en termes força generals, sense requerir un coneixement molt detallat de l'estructura concreta del problema. Per completar aquest estudi, a continuació es presenten breument les idees que hi ha al darrere d'alguns altres mètodes de reducció de variància, sense entrar en detalls.

Mostreig d'importància. Aquest tipus de mostreig parteix de la idea que hi ha valors que són més rellevants que d'altres a l'hora d'estimar la quantitat d'interès. Aleshores, el mostreig d'importància busca aplicar el mètode de Monte Carlo a una distribució transformada, construïda de manera que s'assigni una probabilitat superior als valors que són més importants per al càlcul de $\mathbb{E}[X]$, i compensa aquest canvi mitjançant una ponderació adequada per mantenir l'estimador sense biaix [9, p. 87]. La tria d'aquesta distribució alternativa és clau: si no és adequada, l'eficiència pot empitjorar i fins i tot augmentar la variància. Aquest mètode se sol utilitzar en casos que tracten amb probabilitats molt petites (veure [6, p. 255-267]).

Mostreig condicional. Aquesta tècnica pot semblar similar al mostreig estratificat ja que aprofita una segona variable Y i l'esperança condicionada per tal d'aproximar $\mathbb{E}[X]$. La diferència principal entre aquests dos mètodes és que en el mostreig condicional sabem calcular explícitament $\mathbb{E}[X|Y]$. Aleshores, fent servir $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$ obtenim un estimador de Monte Carlo per a $\mathbb{E}[X]$ prenent mostres de Y i avaluant $\mathbb{E}[X|Y]$ (veure [9, p. 85-87]).

Ajust dels moments. Els mètodes d'ajust dels moments consisteixen a ajustar les mostres generades en el mètode de Monte Carlo de manera que reproduïxin algunes propietats estadístiques que la distribució subjacent. En concret, les mostres es corregeixen perquè alguns moments mostrals coincideixin amb els moments teòrics de la distribució. Aquesta tècnica pot portar a una reducció de variància, però també pot tenir efectes negatius com la introducció de dependència entre les mostres. És per això que cal estudiar-ne la viabilitat en cada cas (veure [6, p. 244-251]).

A la pràctica, aquestes tècniques no són excloents i, de fet, es poden combinar en un mateix problema. Per exemple, és habitual combinar mostreig estratificat amb mostreig d'importància o fer servir variables de control i variables antitètiques de manera combinada [9, p.100]. Tot i això, combinar mètodes sol incrementar el cost computacional i la complexitat d'implementació. De nou, cal valorar la reducció de la variància en relació amb el temps de càlcul i l'estabilitat de l'estimador.

3 Simulació del moviment brownià

En el capítol anterior, hem presentat el mètode de Monte Carlo per a estimar una esperança $\mathbb{E}[X]$ a partir de N mostres independents $X_1, \dots, X_N$ amb la mateixa distribució. No obstant això, en moltes aplicacions financeres la magnitud d'interès no depèn d'un únic valor aleatori, sinó de l'evolució temporal d'una variable. És a dir, depèn de la trajectòria d'un procés estocàstic. Per tant, per poder aplicar el mètode de Monte Carlo en aquest context ens cal disposar d'un procediment per generar aquestes trajectòries. Amb aquest objectiu, dedicarem aquest capítol a introduir el moviment brownià i la seva simulació.

3.1 Definicions prèvies

Abans d'entrar directament en la descripció del moviment brownià fem un petit pas enrere per establir el marc formal necessari. Com hem vist en el capítol anterior, estem considerant un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on Ω és el conjunt de resultats possibles, $\mathcal{F}$ és una família de parts d' Ω amb estructura de σ -àlgebra i $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ és una mesura de probabilitat, de manera que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ i és σ -additiva (és a dir, la probabilitat de la unió numerable d'esdeveniments disjunts és la suma de les seves probabilitats). Definim una σ -àlgebra de la següent manera:

Definició 3.1. [12, p.2]. Una σ -àlgebra és una família $\mathcal{F}$ de parts d' Ω tal que $\Omega \in \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}$ és estable per pas al complementari i per unions numerables. És a dir, per tot $A \in \mathcal{F}$ tenim $A^c \in \mathcal{F}$ i per tot $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ es compleix $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Un cop fixat el marc $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, podem considerar una col·lecció de variables aleatòries $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ definides sobre aquest espai de probabilitat i indexades pel temps. Això és el que anomenarem **procés estocàstic**, que ens servirà com a model per descriure l'evolució aleatòria d'una magnitud al llarg del temps [9, p. 103]. En altres paraules, un procés estocàstic és un model per a descriure l'evolució aleatòria d'una magnitud al llarg del temps.

En processos en temps continu, és útil formalitzar la idea d'“informació disponible” en cada instant de temps. Per fer-ho introduïm la següent noció:

Definició 3.2. [9, p.104]. Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una **filtració** és una família $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ de sub- σ -àlgebres de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ per a tot $0 \leq s \leq t$.

De manera intuïtiva, $\mathcal{F}_t$ representa el conjunt d'esdeveniments observables fins al temps t . Per exemple, donat un procés estocàstic $\{X_t\}_{t \geq 0}$ podem considerar la seva **filtració natural** $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ definida per $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X(s) : 0 \leq s \leq t)$, on $\sigma(\cdot)$ denota la σ -àlgebra generada per les variables $\{X(s) : s \leq t\}$.

Un cop donades aquestes definicions és natural considerar un procés on $X(t)$ sigui determinat per la informació disponible fins al temps t , sense fer servir informació “futura”. Aquest concepte dona lloc a la següent noció:

Definició 3.3. [6, p.26]. Direm que un procés $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ és **adaptat** a una filtració $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si, per a tot $t \geq 0$, $X(t)$ és $\mathcal{F}_t$ -mesurable (és a dir, el seu valor es pot determinar amb la informació disponible fins al temps t).

Un cop fixada una filtració, una propietat especialment rellevant és que el procés no tingui tendència previsible respecte de la informació disponible. Això es formalitza amb la noció de martingala.

Definició 3.4. [9, p.106]. Donada una filtració $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, sigui $I \subseteq [0, \infty)$ un conjunt de temps, direm que un procés $\{X(t)\}_{t \in I}$ amb $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$ per tot $t \in I$ és **martingala** si és adaptat a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ i $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$ per tot $s, t \in I$ amb $s \leq t$ $\mathbb{P}$ -q.s.. És a dir, donada la informació disponible fins al temps s , $\mathcal{F}_s$, la millor predicció del procés en un temps posterior $t \geq s$ és el seu valor actual $X(s)$.

3.2 Moviment brownià: definició i propietats bàsiques

Com hem comentat, en moltes aplicacions financeres, l'evolució d'un preu o d'un factor de risc es modela mitjançant un procés aleatori en temps continu. Per modelar aquest tipus de processos, una manera natural és suposar que l'evolució de la variable no depèn de l'evolució anterior (increments independents) i que l'estructura de l'evolució del procés és la mateixa en tot moment futur (increments estacionaris). Formalment, definim:

Definició 3.5. [9, p.105].

- (a) Direm que un procés estocàstic $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ té **increments independents** si per tot $0 \leq r \leq u \leq s \leq t$ les variables $X(t) - X(s)$ i $X(u) - X(r)$ són independents.
- (b) Direm que un procés estocàstic $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ té **increments estacionaris** si per tot $0 \leq s \leq t$ la distribució $X(t) - X(s)$ depèn només de $t - s$. En particular, si $X(0) = 0$, això equival a $X(t) - X(s) \sim X(t - s)$.

Partint d'aquests dos conceptes, si, a més, imposem continuïtat de les trajectòries, obtenim el moviment brownià [8, p.23].

Definició 3.6. [10, p.51]. Anomenem **moviment brownià** un procés estocàstic amb valors reals, $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ amb increments independents i estacionaris i trajectòries contínues.

A partir d'aquesta definició, volem veure que els increments del procés són gaussians. Més concretament, provarem el següent resultat:

Teorema 3.7. [10, p.51]. Si $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ és un moviment brownià aleshores, per tot $t > 0$, $X(t) - X(0) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$, on $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$.

Per demostrar aquest teorema seguirem l'argument de [7], que caracteritza les distribucions dels increments d'un procés continu amb increments independents.

Teorema 3.8. Siguí $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ un procés estocàstic real amb increments independents i trajectòries contínues. Aleshores existeixen dues funcions contínues $a(t)$ i $B(t)$, amb $B(t)$ no decreixent, tals que, per tot $0 \leq s < t$, la funció característica de l'increment $X(t) - X(s)$ és

$$\Phi_{X(t)-X(s)}(u) = \exp \left(iu(a(t) - a(s)) - \frac{1}{2}u^2(B(t) - B(s)) \right), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Idea de la demostració. La demostració completa d'aquest resultat requereix eines addicionals sobre processos amb increments independents i límits de successions triangulats. Tot i això, en donem una idea per justificar per què la continuïtat de les trajectòries força increments gaussians.

Per simplificar la notació, suposarem que $s = 0$ i $X(0) = 0$ (el cas general s'obté de manera anàloga) i volem veure que $X(t)$ té distribució normal.

Per tot $n \in \mathbb{N}$ considerem una partició de l'interval $[0, t]$, $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,n} = t$ de manera que el pas màxim tendeixi a zero quan $n \rightarrow \infty$. Aleshores podem escriure

$$X(t) = \sum_{k=1}^n (X(t_{n,k}) - X(t_{n,k-1})),$$

on, com que el procés té increments independents, els termes d'aquesta suma són variables aleatòries independents.

La continuïtat de les trajectòries garanteix que, quan el pas de la partició tendeix a zero, els increments són cada vegada més petits. Per tant, la suma anterior es pot aproximar per una suma d'increments independents i infinitesimals. Aplicant el teorema central del límit per a successions triangulars, s'obté que el límit ha de tenir distribució normal, excepte en el cas degenerat, en què la variable és constant.

Per tant, els increments tenen distribució normal, i la seva funció característica té la forma indicada al teorema. $\square$

Demostració del teorema 3.7. Pel teorema anterior, com que $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ té increments independents i trajectòries contínues, existeixen dues funcions contínues $a(t)$ i $B(t)$, $B(t)$ no decreixent, tals que, si anomenem $\Delta a(t) := a(t) - a(0)$ i $\Delta B(t) := B(t) - B(0)$, tenim que per tot $t \geq 0$, $X(t) - X(0) \sim \mathcal{N}(\Delta a(t), \Delta B(t))$.

Per tant, hem de veure que existeixen $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma \geq 0$ tals que $\Delta a(t) = \mu t$ i $\Delta B(t) = \sigma^2 t$.

Siguin $s, t \geq 0$, tenim que $X(t+s) - X(0) = (X(s) - X(0)) + (X(t+s) - X(s))$ on $X(s) - X(0) \sim \mathcal{N}(\Delta a(s), \Delta B(s))$, $X(t+s) - X(s) \sim X(t) - X(0) \sim \mathcal{N}(\Delta a(t), \Delta B(t))$ pel teorema anterior i l'estacionarietat dels increments. A més, aquests dos increments són independents i, per tant, $X(t+s) - X(0)$ és una suma de normals independents amb

$$X(t+s) - X(0) \sim \mathcal{N}(\Delta a(t) + \Delta a(s), \Delta B(t) + \Delta B(s)).$$

Però, pel teorema anterior, $X(t+s) - X(0) \sim \mathcal{N}(\Delta a(t+s), \Delta B(t+s))$.

Per tant, $\Delta a(t+s) = \Delta a(t) + \Delta a(s)$ i $\Delta B(t+s) = \Delta B(t) + \Delta B(s)$. Com que a i B són contínues, també ho són Δa i ΔB i, per la relació anterior, això implica que existeixen constants reals μ i c tals que $\Delta a(t) = \mu t$ i $\Delta B(t) = ct$. Finalment, com que $\Delta B(t) \geq 0$ (perquè $\Delta B(t)$ és una variància), podem posar $c = \sigma^2$ amb $\sigma \geq 0$ i obtenim el resultat. $\square$

Definició 3.9. [10, p.51]. Un moviment brownià $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ s'anomena **moviment brownià estàndard** si $X(0) = 0$ $\mathbb{P}$ -q.s., $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ i $\text{Var}(X(t)) = t$ per a tot $t \geq 0$. En aquest cas, el denotarem per $\{W(t)\}_{t \geq 0}$. Aleshores, per a tot $0 \leq s < t$, tenim $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Observació 3.10. El moviment brownià estàndard $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ és adaptat a la seva filtració natural, $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ amb $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(s) : 0 \leq s \leq t)$, ja que $W(t)$ és $\mathcal{F}_t^W$ -mesurable per a tot $t \geq 0$.

A més, és una martingala respecte d'aquesta filtració. En efecte, per tot $0 \leq s < t$, com que $W(s)$ és $\mathcal{F}_s^W$ -mesurable i l'increment $W(t) - W(s)$ és independent de $\mathcal{F}_s^W$ i té esperança zero, tenim

$$\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}_s^W] = W(s) + \mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s^W] = W(s).$$

Una de les característiques principals del moviment brownià estàndard és la irregularitat de les seves trajectòries:

Proposició 3.11. Irregularitat del moviment brownià [9, p.113]. *Amb probabilitat 1, les trajectòries del moviment brownià són contínues però no són diferenciables en cap punt com a funció del temps. A més, tenen variació infinita en qualsevol interval no buit.*

Definició 3.12. Anomenarem moviment brownià amb deriva μ i coeficient de difusió σ^2 a un procés $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ amb $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ on $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ i $W(t)$ és un moviment brownià estàndard. Escrivem $X \sim BM(\mu, \sigma^2)$.

Observació 3.13. Podem definir un **moviment brownià n -dimensional** com $W(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))$ a $\mathbb{R}^n$ on W_i són moviments brownians unidimensionals independents [9, p. 112].

3.3 Discretització temporal i simulació de trajectòries

Com hem vist, el moviment brownià té increments independents i estacionaris, la qual cosa fa que sigui senzill de simular. Per fer-ho, suposem que tenim una partició $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ d'un interval $[0, T]$ donat on volem simular el moviment brownià. Aleshores, per les propietats del moviment brownià hem vist que

$$\Delta W_k := W(t_k) - W(t_{k-1}) \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1}).$$

Siguin $Z_1, \dots, Z_n$ variables aleatòries independents amb distribució normal estàndard, $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ per tot $k = 1, \dots, n$. Podem posar

$$\sqrt{t_k - t_{k-1}} Z_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1}).$$

Aleshores, podem simular ΔW_k com $\Delta W_k = \sqrt{t_k - t_{k-1}} Z_k$ i, posant $W(0) = 0$, podem definir per recursió

$$W(t_k) = W(t_{k-1}) + \Delta W_k = W(t_{k-1}) + \sqrt{t_k - t_{k-1}} Z_k.$$

Per tant, per a qualsevol partició $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ podem simular exactament els valors $W(t_0), \dots, W(t_n)$ mitjançant increments normals independents. Si, a més, la partició és prou fina, la interpolació lineal entre aquests punts proporciona una aproximació raonable del camí continu. Així, obtenim el següent algorisme de simulació del moviment brownià:

Algorisme 3.14. Simulació del moviment brownià [9, p.115]. *Sigui $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ una partició d'un interval $[0, T]$ donat. Aleshores obtenim una simulació $W(t)$ del moviment brownià unidimensional seguint els passos:*

1. Definir $W(0) = 0$.
2. Per $k = 1, \dots, n$:
 - (a) Generar un nombre aleatori amb distribució normal estàndard $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
 - (b) Definir $W(t_k) = W(t_{k-1}) + \sqrt{t_k - t_{k-1}} Z_k$.
 - (c) (Opcional) Entre t_{k-1} i t_k obtenir $W(t)$ mitjançant interpolació lineal. És a dir, per tot $t \in (t_{k-1}, t_k)$ definir

$$W(t) = W(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} (W(t_k) - W(t_{k-1})).$$

Observació 3.15. [6, p.81]. Donades dues constants $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma \geq 0$ i un punt inicial $X(0)$, podem simular la trajectòria de $X \sim BM(\mu, \sigma^2)$ de manera similar substituint la recurrència del moviment brownià estàndard per

$$X(t_k) = X(t_{k-1}) + \mu(t_k - t_{k-1}) + \sigma\sqrt{t_k - t_{k-1}}Z_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Observació 3.16. L'algoritme anterior construeix una trajectòria simulada sobre la graella $t_0, \dots, t_n$ a partir d'increments normals independents amb variància $t_k - t_{k-1}$ per $k = 1, \dots, n$, de manera que els valors $W(t_0), \dots, W(t_n)$ tenen la mateixa distribució que el moviment brownià estàndard en aquests instants. En canvi, entre punts de la graella el camí s'obté per interpolació lineal i, per tant, és una aproximació de la trajectòria real del moviment brownià. Intuïtivament, quan la partició és prou fina ($\max_{k=1, \dots, n}(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$) aquesta representació s'aproxima cada vegada millor al comportament del moviment brownià.

Per aplicar el mètode de Monte Carlo en aquest context, repetirem el procediment anterior N vegades de manera independent, obtenint N trajectòries simulades. Sobre cadascuna d'elles calcularem la magnitud d'interès corresponent i, tal com s'ha vist al capítol anterior, la mitjana mostral d'aquests valors donarà lloc a l'estimador.

3.4 Comprovacions empíriques de la simulació

Un cop generades les trajectòries amb l'algorisme anterior, és recomanable verificar que han estat generades correctament. Per fer-ho, podem fer una sèrie de verificacions que, tot i que no constitueixen una demostració formal, poden ser molt útils per a detectar possibles errors. A continuació, presentem algunes comprovacions per comprovar empíricament si la simulació és coherent amb les propietats teòriques del moviment brownià explicades prèviament. En les comprovacions següents, les quantitats empíriques es calculen a partir d'un conjunt de trajectòries simulades i, quan cal, per un pas temporal fixat.

1. **Variància de $W(t)$ creixent amb t .** Hem vist que $\text{Var}(W(t)) = t$, per tant, si representem gràficament diverses trajectòries s'hauria de veure que aquestes són molt properes entre si al voltant de $t = 0$ i es van separant quan t creix, en el sentit de dispersió entre trajectòries en un mateix temps t .
2. **Mitjana dels increments.** Com que $\Delta W_k = W(t_k) - W(t_{k-1}) \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$, la mitjana teòrica dels increments és zero. Per tant, podem comprovar que la mitjana empírica dels increments sigui propera a zero.
3. **Variància dels increments.** De nou, com que $\Delta W_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$, la variància teòrica és $\text{Var}(\Delta W_k) = t_k - t_{k-1}$. Així, la variància empírica dels increments ΔW_k hauria de ser propera a $t_k - t_{k-1}$.
4. **Independència dels increments.** Per les propietats del moviment brownià, sabem que ΔW_k i ΔW_j són independents per tot $k \neq j$ ja que corresponen a intervals disjunts de la partició. En particular, $\rho(\Delta W_k, \Delta W_j) = 0$, sempre que les variàncies siguin positives. Aleshores, empíricament, esperem que l'estimació de la correlació entre ΔW_k i ΔW_j sigui aproximadament 0. Cal notar que això no garanteix la independència, però ajuda a trobar errors en cas que no ho siguin, ja que, si la correlació empírica s'allunya clarament de zero, això pot indicar un error d'implementació. A la pràctica, ens fixem amb intervals propers ΔW_k i ΔW_{k+1} en lloc de comprovar totes les combinacions possibles.

5. **Distribució normal en un temps fixat.** Per un $t > 0$ fixat, $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$. Per tant, si la simulació és correcta, els valors de $W(t)$ en les diferents trajectòries simulades haurien de ser consistents amb una distribució normal amb mitjana 0 i variància t . Per comprovar-ho, podem calcular la variància i la mitjana empíriques en aquestes mostres i, opcionalment, també ho podríem comprovar gràficament mitjançant un histograma fet amb aquestes dades. Equivalentment, es pot considerar la variable normalitzada $W(t)/\sqrt{t}$, que hauria de seguir aproximadament una $\mathcal{N}(0, 1)$.

3.5 Consideracions pràctiques

Quan duem a terme una simulació, també cal considerar els paràmetres que fem servir, ja que afecten tant el temps d'execució com la qualitat del resultat. En particular, en simular el moviment brownià hem d'escollir la partició temporal sobre la qual generem el camí. És a dir, hem de fixar el nombre de punts n per generar una trajectòria (i, per tant, els instants $t_0, \dots, t_n$). Per simplicitat, suposarem que aquests punts són equidistants en $[0, T]$ (on T és l'horitzó temporal de la simulació), de manera que $\Delta t = T/n$ i $t_k = k\Delta t$ per tot $k = 0, \dots, n$.

Ja hem vist que, amb el procediment anterior, els valors del moviment brownià tenen la distribució teòrica correcta als punts de la graella $t_0, \dots, t_n$, mentre que el comportament del camí entre dos punts consecutius és una aproximació del camí real. Així, escollir n és especialment rellevant quan el comportament del procés entre els punts de la graella té importància per al problema que es vol estudiar. Això passa perquè com més fina és la partició, menor és, en general, l'error associat a la discretització, però el cost computacional augmenta. En canvi, si només ens interessa el valor del procés en certs instants coneguts, el paper de n canvia: ja no actua com a paràmetre de precisió numèrica, sinó que només determina en quins punts observem la trajectòria. És a dir, n deixa de ser un paràmetre de discretització per passar a ser part de la definició del problema. En conseqüència, en aquest cas desapareix l'error de discretització.

Des d'un punt de vista de cost, simular una trajectòria en una graella de n intervals requereix generar n variables aleatòries normals i, per tant, el temps necessari per generar un camí creix aproximadament de forma lineal amb n .

Si, a més, utilitzem el moviment brownià dins del mètode de Monte Carlo, no n'hi ha prou amb generar una sola trajectòria, sinó que cal generar N trajectòries independents per estimar la magnitud d'interès amb una mitjana mostral (estimador de Monte Carlo). En aquest cas, l'elecció de N controla la variabilitat de l'estimació, que disminueix a mesura que augmenta N . De fet, tal com hem vist al capítol anterior, l'error estàndard disminueix amb ordre $1/\sqrt{N}$.

A la pràctica, una manera habitual de fixar N és fer una prova pilot per estimar la variància mostral del pagament o de la quantitat simulada i escollir N de manera que l'interval de confiança quedi dins d'una tolerància prefixada (veure secció 2.3).

En resum, en aquest tipus de simulacions apareixen dos paràmetres: n , que determina el grau de discretització de cada camí (i el cost per trajectòria), i N , que determina la precisió estadística de l'estimador de Monte Carlo. En conseqüència, el cost total acostuma a créixer aproximadament com el producte $N \cdot n$, i cal equilibrar aquests valors segons la precisió requerida i el temps de càlcul disponible.

4 Introducció a les equacions diferencials estocàstiques

En el capítol anterior hem introduït el moviment brownià i com simular-lo de manera discreta, generant trajectòries $(W(t_0), \dots, W(t_n))$ en una graella temporal. Tot i això, en el cas que ens ocupa, no ens interessa el moviment brownià per si sol, sinó com a font d'aleatorietat que després farem servir per modelar variables d'interès, com ara el preu d'un actiu. Per descriure l'evolució d'aquestes variables en temps continu utilitzarem equacions diferencials estocàstiques (EDE), que combinen una part determinista, marcada per la tendència, i una part aleatòria, associada al moviment brownià. Amb aquest objectiu, introduïrem les nocions bàsiques sobre EDE i el càlcul d'Itô, que ens permetran justificar el model del moviment brownià geomètric que utilitzarem en la valoració d'opcions en el següent capítol.

4.1 Equacions diferencials estocàstiques: definició i interpretació

Considerem primer una equació diferencial ordinària (EDO) de la forma

$$dx(t) = b(t, x(t))dt, \quad x(0) = x_0,$$

on $x_0 \in \mathbb{R}$ és la condició inicial i $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció donada. Aquesta equació descriu una evolució determinista. És a dir, un cop fixada la condició inicial, la trajectòria queda determinada per la funció b .

Tot i això, en molts casos aquests camins estan subjectes a certes pertorbacions aleatòries. En aquest cas, podem introduir aleatorietat fent servir el moviment brownià [5, p.2]. D'aquesta manera, obtenim la següent definició d'equació diferencial estocàstica:

Definició 4.1. [6, p.548]. *Una equació diferencial estocàstica és una equació de la forma*

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (4.1)$$

on W és un moviment brownià unidimensional estàndard, b i σ són funcions $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i X_0 és una variable aleatòria real independent de W .

Seguint la notació anterior, anomenem b i σ **coeficient de deriva** i **coeficient de difusió**, respectivament. En particular, podem interpretar que b representa el creixement a curt termini o la tendència (part determinista) mentre que σ representaria la variabilitat a curt termini (intensitat de la part aleatòria) [11, p.133].

En la secció 4.2 veurem com interpretar $dW(t)$ mitjançant les integrals estocàstiques (càlcul d'Itô).

Exemples 4.2. [9, p.138]. Alguns exemples que apareixen sovint en models financers són els següents:

1. **EDE unidimensional lineal homogènia:** siguin $b, \sigma, x_0 \in \mathbb{R}$ i sigui W un moviment brownià unidimensional,

$$dX(t) = bX(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

2. **EDE unidimensional lineal homogènia amb soroll addicional:** siguin $a, b, \sigma, x_0 \in \mathbb{R}$ i sigui W un moviment brownià unidimensional,

$$dX(t) = (a + bX(t))dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

Definició 4.3. [9, p.137]. Una **solució forta** $X(t)$ a una EDE de la forma (4.1) és un procés real continu $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ adaptat a una filtració $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que satisfà:

- (i) $X(0) = X_0$.
- (ii) $X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$.
- (iii) $\int_0^t (|b(s, X(s))| + \sigma^2(s, X(s))) ds < \infty$.

$\mathbb{P} - q.s$ per tot $t \geq 0$.

És a dir, una solució forta és un procés real continu $X(t)$ que (i) comença en X_0 , (ii) satisfà la forma integral de l'EDE i (iii) és integrable.

El següent teorema ens diu que, sota certes condicions de regularitat, existeix una única solució forta de l'EDE (4.1):

Teorema 4.4. Existència i unicitat de solucions per a EDE [6, p.548]. *Suposem que $\mathbb{E}[|X_0|^2] < \infty$ i que existeix una constant K tal que se satisfà que per a tot $t \geq 0$ i per a tot $x, y \in \mathbb{R}$:*

- (i) $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$ (Lipschitz).
- (ii) $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$ (creixement lineal).

Aleshores l'EDE (4.1) admet una solució forta X . Aquesta solució és única en el sentit que, si $\tilde{X}$ també n'és solució, aleshores $\mathbb{P}(X(t) = \tilde{X}(t), \forall t \geq 0) = 1$. A més, per tot $t \geq 0$, aquesta solució satisfà $\mathbb{E}[|X(t)|^2] < \infty$.

La demostració d'aquest teorema es troba fora de l'abast d'aquest treball. Una demostració formal es pot trobar a [5].

4.2 Introducció al càlcul d'Itô

En la secció anterior hem vist que, per interpretar i resoldre EDE, no és suficient fer servir el càlcul ordinari, sinó que hem de ser capaços de treballar amb funcions de processos estocàstics. Per aquest motiu, dedicarem aquesta secció a fer una petita introducció al càlcul d'Itô en el cas unidimensional. Per l'abast d'aquest treball, en aquest apartat evitarem centrar-nos en nocions molt tècniques i ens limitarem a donar les intuïcions bàsiques darrere d'aquest càlcul.

Considerem una EDE de la forma (4.1) on el procés X és adaptat a la filtració natural generada pel moviment brownià i considerem una integral estocàstica del tipus

$$\int_0^t X(s)dW(s). \quad (4.2)$$

De forma similar a com s'introdueixen les integrals de Riemann, podem considerar una partició de l'interval en subintervalls $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ i aproximar (4.2) amb la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} X(t_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)). \quad (4.3)$$

Observació 4.5. L'elecció de t_k com a punt on avaluar X en cada interval (t_k, t_{k+1}) fa que la variable aleatòria $X(t_k)$ depengui només de la informació disponible fins al temps t_k . Així, com que els increments del moviment brownià són independents del passat, $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ és independent de $X(t_k)$.

Es pot demostrar que, si considerem l'aproximació (4.3) prenent particions cada vegada més fines, $n \rightarrow \infty$, aleshores podem construir una definició rigorosa de les integrals estocàstiques del càlcul d'Itô [4, p.169].

Observació 4.6. Sota condicions d'integrabilitat adequades, fent servir (4.3) per aproximar (4.2), podem intuir per què l'esperança de la integral d'Itô és zero a partir de l'aproximació:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\int_0^t X(s) dW(s) \right] &\approx \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} X(t_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [X(t_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k))] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [X(t_k)] \mathbb{E} [W(t_{k+1}) - W(t_k)] = 0,\end{aligned}$$

on hem fet servir que $X(t_k)$ i $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ són independents i $\mathbb{E} [W(t_{k+1}) - W(t_k)] = 0$ [4, p.169].

A la pràctica, ens interessa veure com es calculen aquest tipus d'integrals ja que, com veiem en el següent exemple, les regles habituals de càlcul no funcionen.

Exemple 4.7. Considerem el cas $X(t) = W(t)$ i volem calcular $\int_0^t W(s) dW(s)$. Si féssim servir la regla habitual del càlcul diferencial, tindríem $dW^2(t) = 2W(t)dW(t)$ i, integrant, obtindríem $\int_0^t W(s) dW(s) = \frac{1}{2}W^2(t)$. Però això no pot ser correcte. En efecte, per l'observació anterior, l'esperança d'una integral d'Itô és nul·la, de manera que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t W(s) dW(s) \right] = 0.$$

Però, això implicaria

$$\begin{aligned}0 &= \mathbb{E} \left[\int_0^t W(s) dW(s) \right] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{2}W^2(t) \right] = \frac{1}{2}\mathbb{E} [W^2(t)] \\ &= \frac{1}{2} (\text{Var}(W(t)) + \mathbb{E}^2[W(t)]) = \frac{t}{2} \neq 0,\end{aligned}$$

que és una contradicció. Per tant, les regles habituals del càlcul diferencial no serveixen en aquest cas [4, p.170].

La regla adient per al càlcul d'aquest tipus d'integrals ens la dona el següent lema:

Lema 4.8. Lema d'Itô [11, p.121]. Sigui $F : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funció de $(t, X(t))$ prou regular amb X adaptat i

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

com en (4.1). Aleshores, escrivint $X = X(t)$ i ometent les dependències de les funcions per simplificar la notació, tenim

$$dF(t, X) = \left[b(t, X) \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(t, X)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right] dt + \sigma(t, X) \frac{\partial F}{\partial X} dW.$$

Intuïció. A continuació donem una intuïció no rigorosa que justifica l'aparició del terme addicional del lema d'Itô.

Per hipòtesi, el procés $X(t)$ satisfà l'EDE $dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$. Podem pensar que, en un interval de temps petit Δt , això vol dir que $\Delta X \approx b\Delta t + \sigma\Delta W$. A més, recordem que, com que W és un moviment brownià estàndard, $\Delta W \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ o, equivalentment, $\Delta W = Z\sqrt{\Delta t}$ on $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Per tant, podem pensar que ΔW és d'ordre $\sqrt{\Delta t}$.

Aleshores, la part determinista $b\Delta t$ és d'ordre Δt i la part aleatòria $\sigma\Delta W$ és d'ordre $\sqrt{\Delta t}$. En conseqüència, si desenvolupem $(\Delta X)^2 \approx (b\Delta t)^2 + 2b\sigma\Delta t\Delta W + (\sigma\Delta W)^2$ tenim que, com que $b^2(\Delta t)^2$ i $2b\sigma\Delta t\Delta W \approx 2b\sigma(\Delta t)^{3/2}$ són d'ordre menor que Δt , desapareixen quan $\Delta t \rightarrow 0$ i, per tant, $(\Delta X)^2 \approx \sigma^2(\Delta W)^2$ és essencialment d'ordre Δt . De fet, es pot veure que, a nivell de Δt , el moviment brownià es comporta com $(\Delta W)^2 \approx \Delta t$.

Si considerem el desenvolupament de Taylor $F(t, X(t))$ i tenim

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial F}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} (\Delta X)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial X} \Delta t \Delta X + \dots$$

El següent pas és eliminar els termes negligibles en comparació amb Δt però, a diferència del cas ordinari, no podem negligir $(\Delta X)^2$, ja que és d'ordre Δt . Fent això quedaria

$$\Delta F \approx \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial F}{\partial X} (b\Delta t + \sigma\Delta W) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \sigma^2 \Delta t.$$

Prenent el límit quan $\Delta t \rightarrow 0$ (és a dir, identificant $\Delta t \rightarrow dt$ i $\Delta W \rightarrow dW$) obtenim el resultat. $\square$

Observació 4.9. Com és d'esperar, si $\sigma(t, X(t)) \equiv 0$ obtenim la regla de la cadena usual.

Per acabar, veiem com quedaria l'exemple anterior aplicant aquesta nova regla.

Exemple 4.10. Tenim $X(t) = W(t)$ i $F(t, X) = X^2$. És a dir, fent servir la notació anterior, tenim $b(t, X(t)) \equiv 0$ i $\sigma(t, X(t)) \equiv 1$. Aleshores,

$$\begin{aligned} dF(t, X(t)) &= \left[b(t, X(t)) \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(t, X(t))^2 \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right] dt + \sigma(t, X(t)) \frac{\partial F}{\partial X} dW(t) \\ &= \left[0 \cdot 2X(t) + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2 \right] dt + 1 \cdot 2X(t) \cdot dW(t) = dt + 2W(t)dW(t). \end{aligned}$$

Seguint el mateix procediment que en l'exemple anterior, com que $W(0) = 0$, tenim

$$W^2(t) = W^2(0) + \int_0^t 1 ds + \int_0^t 2W(s)dW(s) = t + \int_0^t 2W(s)dW(s)$$

i, per tant, tal com esperàvem

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t W(s)dW(s) \right] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} (W^2(t) - t) \right] = \frac{1}{2} (t - t) = 0.$$

5 Aplicació del mètode de Monte Carlo a la valoració d'opcions

Un cop hem vist les eines matemàtiques necessàries per aplicar el mètode de Monte Carlo, passem a veure'n l'aplicació en un problema financer concret: la valoració d'opcions. Per fer-ho, començarem introduint algunes nocions bàsiques i veient com expressar el preu d'una opció a partir de la seva funció de pagament, també anomenada *payoff*. A continuació, aproximarem aquest valor fent servir el mètode de Monte Carlo en tres exemples: una opció call europea i una opció call asiàtica, que estudiarem tant amb monitoratge discret com amb monitoratge continu.

5.1 Introducció a la valoració d'opcions

Abans de centrar-nos en la seva valoració, recordem que una opció és un producte derivat i, per tant, el seu valor depèn del preu d'un actiu subjacent. Aquest actiu pot ser de molts tipus com, per exemple, accions, matèries primeres o divises.

Una opció pot ser de dos tipus: **call** i **put**. Aquestes són contractes que donen al seu propietari el dret de comprar (call) o vendre (put) una certa quantitat fixa de l'actiu subjacent en una data determinada o durant un període determinat i a un preu acordat prèviament (preu d'exercici) [9, p.184]. Cal remarcar que, tot i que les opcions atorguen un dret, el propietari no té l'obligació d'exercir-lo. A més, depenent de si aquest dret es pot exercir durant tota la durada del contracte o només al venciment, diferenciem entre **opcions americanes** i **opcions europees**, respectivament [9, p.185]. En qualsevol cas, el pagament d'una opció depèn del valor futur de l'actiu subjacent i, per aquest motiu, diem que es tracta d'un **pagament contingent**.

Per exemple, considerem una opció europea de tipus call amb preu d'exercici $K \geq 0$ i venciment T . Sigui $S(t)$ el preu de l'actiu subjacent al temps $t \in [0, T]$, és clar que, si $S(T) > K$, el propietari decidirà exercir l'opció de compra, mentre que si $S(T) \leq K$, no ho farà. Així, ignorant els costos de transacció, el pagament final de l'opció al venciment ve donat per

$$\Phi(S(T)) = (S(T) - K)^+ = \max(S(T) - K, 0).$$

Anàlogament, per a una opció europea de tipus put tenim $\Phi(S(T)) = (K - S(T))^+$.

Quan parlem de valoració d'opcions ens referim a assignar un valor actual a una opció amb un pagament incert, que dependrà del valor de l'actiu subjacent. Per fer-ho, una primera idea podria ser considerar el valor esperat dels pagaments descomptats sota la probabilitat "real" $\mathbb{P}$. Això, en general no és correcte, ja que no incorpora correctament l'efecte del nivell de risc en els preus. Tal com explica Glasserman, hem de descriure la dinàmica dels preus no tal com l'observem, sinó tal com seria sota una mesura de probabilitat ajustada al risc [6, p.20].

En particular, veurem que si el pagament d'una opció pot ser perfectament replicat mitjançant la compra i venda d'altres actius, aleshores el preu de l'opció és el cost d'aquesta estratègia [6, p.19]. Aquesta idea porta a introduir una nova mesura de probabilitat $\mathbb{Q}$, la mesura neutral al risc, que formalitzarem més endavant, en la secció 5.4.

5.2 El moviment brownià geomètric com a model del preu d'un actiu

Hem vist que el valor d'una opció depèn de l'actiu subjacent. Per tant, necessitem un model per al preu d'aquest actiu, $S(t)$. Per fer-ho, el model ha de reflectir les característiques habituals de l'evolució dels preus: fluctuacions irregulars, aparentment aleatòries, i absència d'un patró cíclic simple [9, p.176]. D'altra banda, és raonable que la magnitud de les fluctuacions depengui del nivell de preu: si el preu és elevat, esperem fluctuacions més grans i viceversa. Per tant, ens interessen moviments relatius, no additius.

A més, si considerem que l'evolució ha de ser contínua (sense salts), haurà de ser no diferenciable en cap punt. En efecte, suposem que això no fos així. Si l'evolució fos contínua i diferenciable en un instant de temps, es podria predir una pujada o baixada de preu mirant el signe de la derivada i, per tant, es podria predir un guany o una pèrdua a molt curt termini. Això no seria raonable en un model financer, ja que permetria preveure el comportament immediat del preu.

En conseqüència, necessitem un model amb trajectòries contínues i no diferenciables en cap punt. Donades les característiques del moviment brownià (secció 3.2), és natural considerar-lo com a candidat.

Tot i això, el moviment brownià té dos problemes principals: pot prendre valors negatius i té una evolució additiva. Per solucionar-ho, considerem una variant del moviment brownià, el moviment brownià geomètric, que és, essencialment, prendre'n l'exponencial.

Definició 5.1. [4, p.173]. Donades dues constants $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, definim el **moviment brownià geomètric** amb deriva μ i volatilitat σ , $S(t) \sim GBM(\mu, \sigma^2)$, com la solució de l'EDE

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

Observació 5.2. El moviment brownià geomètric és solució d'una EDE unidimensional lineal homogènia que hem vist a l'exemple 4.2. En efecte, seguint la notació de l'apartat anterior, els coeficients de l'EDE són de la forma $b(t, S(t)) = \mu S(t)$ i $\sigma(t, S(t)) = \sigma S(t)$.

Observació 5.3. Formalment, podem reescriure l'EDE del moviment brownià geomètric com

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t). \quad (5.1)$$

Observació 5.4. Com hem vist en la secció 4.1, el paràmetre μ determina la tendència mitjana del preu de l'actiu (de fet, veurem que en determina l'esperança), mentre que σ mesura la volatilitat, és a dir, controla el rang de valors futurs possibles (una σ més gran implica més incertesa i fluctuacions més grans).

D'altra banda, sigui $F(t, S) = \log S$, fent servir el lema d'Itô (lema 4.8) i escrivint $S = S(t)$ per simplificar la notació, tenim

$$\begin{aligned} dF(t, S(t)) &= \left[\mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dW \\ &= \left[\mu S \cdot \frac{1}{S} + 0 + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(-\frac{1}{S^2} \right) \right] dt + \sigma S \frac{1}{S} dW = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW. \end{aligned}$$

Per tant, si integrem entre 0 i t obtenim

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \quad (5.2)$$

o, equivalentment,

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right). \quad (5.3)$$

Més en general, si $u < t$,

$$S(t) = S(u) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - u) + \sigma (W(t) - W(u)) \right). \quad (5.4)$$

Observació 5.5. A partir de l'expressió anterior, és fàcil veure que el moviment brownià geomètric compleix les propietats que buscàvem en un model de preus. La seva forma exponencial garanteix que prendrà valors positius i, per les propietats del moviment brownià $W(t)$ obtenim la continuïtat i la irregularitat de les trajectòries de $S(t)$. Finalment, l'expressió (5.1) mostra que el moviment brownià geomètric modela els canvis relatius del preu, i no els canvis absoluts. En efecte, la dinàmica de $dS(t)/S(t)$ no depèn explícitament del nivell de preu $S(t)$ i, per tant, el comportament percentual del preu és el mateix independentment del seu nivell, tal com volíem veure.

Observació 5.6. Recordant que $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$, de (5.2) deduïm

$$\log S(t) \sim \mathcal{N} \left(\log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right)$$

i, per tant, segons el model del moviment brownià geomètric, els preus tenen una distribució lognormal (exponencial d'una variable aleatòria normal). A més, fent servir les propietats d'una distribució lognormal ($\mathbb{E}[e^{aZ}] = e^{\frac{1}{2}a^2}$ on $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $a \in \mathbb{R}$) obtenim $\mathbb{E}[S(t)] = S(0)e^{\mu t}$ i $\text{Var}(S(t)) = S(0)^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$ [4, p.175].

D'altra banda, donats $0 \leq s \leq t$, com que els increments de W són independents i estacionaris amb distribució normal (és a dir, podem posar $W(t) - W(s) = Z\sqrt{t-s}$ on $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$), l'expressió (5.4) ens dona la relació:

$$S(t) = S(s) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma \sqrt{t - s} Z \right). \quad (5.5)$$

Aquesta relació ens dona el següent algorisme per a simular el preu d'un actiu:

Algorisme 5.7. Simulació del preu d'un actiu [9, p.181]. Sigui $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ una partició d'un interval $[0, T]$ donat. Sigui $S_0 = S(0)$ un valor inicial donat. Denotem per S_i el valor simulat exacte del procés en el temps t_i (així, $S_i = S(t_i)$ per a la trajectòria simulada). Aleshores obtenim una simulació del preu d'un actiu seguint els següents passos:

1. Per $i = 1, \dots, n$:

(a) Generar un nombre aleatori amb distribució normal estàndard $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independent.

(b) Definir $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ i calcular

$$S_i = S_{i-1} \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t_i + \sigma \sqrt{\Delta t_i} Z_i \right).$$

(c) (Opcional) Per $t \in (t_{i-1}, t_i)$ aproximar $S(t)$ mitjançant interpolació lineal.

Observació 5.8. De manera anàloga al que passava en la simulació del moviment brownià, aquest algoritme correspon a una simulació exacta del procés en els punts $t_1, \dots, t_n$ i, per tant, no hi ha error de discretització en aquests punts [6, p.94].

Observació 5.9. En el cas de les opcions europees usals, com que només depenen de $S(T)$, n'hi ha prou amb simular directament $W(T) \sim \mathcal{N}(0, T)$ i obtenir $S(T)$ fent servir (5.3). En canvi, en les opcions dependents del camí, com ara les opcions asiàtiques, cal simular els valors de $S(t)$ en una graella temporal fent servir l'algoritme 5.7.

5.3 Model de mercat de Black-Scholes

Un cop sabem com simular el preu d'un actiu subjacent, podem definir el model de mercat que utilitzarem d'ara en endavant: el model de mercat de Black-Scholes. En aquest treball, considerarem el cas unidimensional per tal de simplificar el model. Els detalls en el cas multidimensional es poden trobar a [9, p.180].

Considerem un mercat complet i sense arbitratge, on els agents no tenen informació privilegiada i les seves operacions individuals no afecten els preus dels actius. Per simplicitat, suposarem que no hi ha costos de transacció, que els actius són divisibles i que es permeten vendes al descobert i posicions curtes (*short-selling*). A més, suposem que existeix un únic tipus d'interès constant r per a préstec i dipòsit [9, p.178].

En aquest mercat, considerarem únicament dos actius. El primer és l'actiu amb risc (que en l'aplicació serà l'índex Euro Stoxx 50), la dinàmica del qual ve descrita pel moviment brownià geomètric de l'equació (5.1). És a dir,

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right)$$

on W és un moviment brownià estàndard unidimensional. D'altra banda, considerem un actiu sense risc (per exemple, els diners en un compte bancari) donat per l'EDE

$$dB(t) = rB(t)dt, \quad B(0) = 1$$

que té una única solució $B(t) = e^{rt}$ [6, p.24].

En la secció següent, veurem que, per a la valoració, treballarem sota una mesura neutral al risc on la deriva de $S(t)$ passarà a ser r en lloc de μ .

5.4 Valoració sota la mesura neutral al risc

En la secció 5.2 hem comentat que per a valorar opcions no n'hi ha prou amb considerar el valor esperat dels pagaments descomptats sota la probabilitat "real" $\mathbb{P}$, i que, per tant, haurem de considerar una nova mesura de probabilitat: la mesura neutral al risc, $\mathbb{Q}$. Abans d'introduir-la, veiem amb més detall perquè aquesta primera aproximació no és vàlida.

Per fer-ho, considerem un dels principis de valoració: l'absència d'arbitratge. Direm que un mercat és **viable** si no admet oportunitats d'arbitratge. En aquest context, considerarem que en un mercat existeix una oportunitat d'arbitratge si existeix una estratègia $X(t)$ tal que $X(0) = 0$, $X(T) \geq 0$ $\mathbb{P}$ -q.s. i $\mathbb{P}(X(T) > 0) > 0$ [9, p.189]. És a dir, una estratègia amb cost inicial nul que no pot generar pèrdues i que té probabilitat positiva de generar un guany.

Veiem que aquest principi no és compatible amb la definició anterior amb un breu exemple:

Exemple 5.10. Considerem un model simplificat amb $r = 0$, de manera que no cal descomptar els pagaments futurs. El mateix argument val amb $r \neq 0$ treballant amb valors descomptats. Suposem que tenim una acció amb preu actual $S(0) = 100$ i una opció call europea sobre aquesta acció amb venciment $T = 1$ i preu d'exercici $K = 100$. Suposem, a més, que en el venciment el preu de l'acció només pot prendre dos valors, 120 i 90 amb probabilitats

$$\mathbb{P}(S(1) = 120) = 0.2, \quad \mathbb{P}(S(1) = 90) = 0.8.$$

Recordem que el pagament de l'opció al venciment és $\Phi(S(1)) = (S(1) - K)^+$. Per tant, si valoréssim l'opció com l'esperança del pagament sota la probabilitat real $\mathbb{P}$, obtindríem

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\Phi(S(1))] = 0.2 \cdot (120 - 100)^+ + 0.8 \cdot (90 - 100)^+ = 4.$$

Això suggeriria un preu de 4.

D'altra banda, veiem que aquest mateix pagament es pot replicar mitjançant una cartera formada per Δ accions i una quantitat B invertida en el compte bancari. Com que $r = 0$, el valor de B no varia entre $t = 0$ i $t = 1$, i per tant, per aconseguir una cartera amb el mateix pagament de l'opció cal que:

$$\begin{cases} 120\Delta + B = 20 \\ 90\Delta + B = 0 \end{cases}.$$

Resolent aquest sistema obtenim $\Delta = 2/3$ i $B = -60$. Així, la cartera formada per $2/3$ accions i un deute de 60 en el compte bancari replica exactament el pagament de l'opció. El cost inicial d'aquesta cartera és $S(0)\Delta + B = 100 \cdot 2/3 - 60 = 20/3 \approx 6.67$.

Per tant, el cost de replicar l'opció és aproximadament 6.67, mentre que la valoració mitjançant l'esperança sota $\mathbb{P}$ donava un preu de 4. Si l'opció es vengués al mercat per aquest preu, un inversor podria comprar l'opció per 4 i vendre al descobert la cartera replicant i ingressar 6.67. Aquesta operació generaria un benefici de $6.67 - 4 = 2.67$ i, al venciment, els pagaments de l'opció comprada i de la cartera venuda es cancel·larien exactament en qualsevol dels dos escenaris.

Així, s'obtindria un guany inicial positiu sense cap risc futur, cosa que constitueix una oportunitat d'arbitratge. Per tant, valorar una opció com l'esperança del seu pagament sota la probabilitat real $\mathbb{P}$ no és, en general, compatible amb el principi de no arbitratge.

A més, de l'exemple anterior se'n desprèn que, en un mercat viable, el preu d'una opció ha de coincidir amb el cost de replicar el seu pagament, sempre que aquest pagament sigui replicable. En aquest sentit, direm que una opció és pot replicar si existeix una estratègia de compra i venda amb la mateixa funció de pagament que l'opció. Donat que estem treballant en un mercat complet i viable, i un mercat complet és aquell en què tots els riscos poden ser perfectament coberts [6, p.20], l'existència d'una única estratègia d'aquest tipus està assegurada i ens serveix com a punt de partida en la valoració de l'opció. A més, això no només assegura que totes les opcions són replicables, sinó que també ens diu que el preu serà únic.

A partir d'ara, per mantenir una notació general, considerarem un derivat europeu amb un pagament contingent P al venciment T , on P és una variable aleatòria determinada

per la informació coneguda al venciment. Per exemple, en el cas de l'opció europea hem vist que aquest pagament serà de la forma $P = \Phi(S(T))$.

L'objectiu és determinar el valor actual d'aquest pagament contingent. Per fer-ho, seguirem el model de Black-Scholes explicat en l'apartat anterior, amb l'existència d'un actiu sense risc amb tipus d'interès constant r , $B(t) = e^{rt}$. En aquest context, donat un procés que defineix el preu d'un actiu $S(t)$, podem definir el seu procés de preu descomptat com el seu preu mesurat en unitats de l'actiu lliure de risc, és a dir,

$$\tilde{S}(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = e^{-rt} S(t).$$

Per tal de definir la nova mesura de probabilitat, $\mathbb{Q}$ de manera que la millor predicció del preu futur descomptat sigui el preu actual descomptat, ens basarem en la noció de martingala introduïda anteriorment (definició 3.4). En efecte, definim:

Definició 5.11. [9, p.193]. Considerem un mercat financer amb un actiu sense risc $B(t) > 0$ i un actiu amb risc $S(t)$. Aleshores una mesura de probabilitat $\mathbb{Q}$ equivalent a $\mathbb{P}$ (en el sentit que $\mathbb{Q}(A) = 0$ si i només si $\mathbb{P}(A) = 0$) s'anomena **mesura martingala equivalent** (MME) si el procés de preu descomptat $\tilde{S}(t) = S(t)/B(t)$ és una martingala respecte de $\mathbb{Q}$.

Observació 5.12. [9, p.194]. Es pot demostrar que l'existència d'una MME implica absència d'arbitratge en el mercat corresponent. A més, en un mercat complet existeix una única MME.

En el model de mercat que considerem, que és complet i viable, existeix una única MME, $\mathbb{Q}$, sota la qual tots els preus descomptats es comporten com a martingales. Una conseqüència clàssica és que el preu d'un derivat europeu es pot escriure com una esperança condicional descomptada sota $\mathbb{Q}$.

Teorema 5.13. Valoració d'opcions sota MME [9, p.194]. Considerem un mercat amb MME $\mathbb{Q}$ i tipus d'interès constant r . Sigui P el pagament contingent d'un derivat europeu amb venciment T . Aleshores per $0 \leq t \leq T$ el procés de preu $V(t)$ ve donat per

$$V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} P | \mathcal{F}_t \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [P | \mathcal{F}_t].$$

Observació 5.14. En el cas particular d'una opció amb pagament $P = \Phi(S(T))$, en $t = 0$ tenim

$$V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\Phi(S(T))].$$

Observació 5.15. Una conseqüència important d'aquest teorema és que, en el model de Black-Scholes, sota la mesura $\mathbb{Q}$, la deriva de l'actiu amb risc, μ , passa a ser r [9, p.194]. És a dir, sota $\mathbb{Q}$,

$$dS(t) = rS(t) dt + \sigma S(t) dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

Tot i això cal remarcar que aquest canvi no descriu la dinàmica “real” del mercat: sota $\mathbb{P}$ la deriva segueix essent μ .

Exemple 5.16. En l'exemple anterior, sota la mesura neutral al risc, tenim que $r = 0$ i el preu de l'actiu ha de ser una martingala sota $\mathbb{Q}$. Per tant, cal que $S(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(1) | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(1)]$. Equivalentment,

$$100 = 120\mathbb{Q}(S(1) = 120) + 90(1 - \mathbb{Q}(S(1) = 120)).$$

D'aquí obtenim $\mathbb{Q}(S(1) = 120) = 1/3$ i el preu de l'opció sota $\mathbb{Q}$ seria

$$V(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S(1))] = \frac{1}{3}(120 - 100)^+ + \frac{2}{3}(90 - 100)^+ = \frac{20}{3} \approx 6.67.$$

Com esperàvem, aquest valor coincideix amb el cost de la cartera replicant i, per tant, és el preu compatible amb l'absència d'arbitratge.

En el cas d'una opció call europea sota el model unidimensional de Black-Scholes, podem calcular l'esperança de forma analítica, obtenint una fórmula explícita. Existeix un resultat anàleg per al cas d'una opció put europea, però no el desenvoluparem aquí, ja que en la part aplicada del treball només considerarem opcions call.

Corol·lari 5.17. Fórmula de Black-Scholes per a una opció call europea [9, p.191]. Sota el model de Black-Scholes descrit en la secció 5.3, sigui $0 \leq t < T$, si definim

$$d_1(t) = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2(t) = d_1(t) - \sigma\sqrt{T-t}$$

i sigui N la funció de distribució d'una normal estàndard. Aleshores, el preu d'una opció europea tipus call a t amb preu d'exercici $K > 0$ i venciment T és

$$V_C(t) = S(t)N(d_1(t)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(t)).$$

Demostració. Pel teorema anterior, volem calcular $V(t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S(T))|\mathcal{F}_t]$ on $\Phi(S(T)) = (S(T) - K)^+$ i, per (5.5), sota la mesura neutral al risc ($\mu = r$)

$$S(T) = S(t) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z\right), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (5.6)$$

Com que $S(t)$ és $\mathcal{F}_t$ -mesurable, en condicionar respecte de $\mathcal{F}_t$ el podem considerar conegut, de manera que el càlcul de l'esperança condicionada es redueix al càlcul d'una esperança respecte Z , mantenint $S(t)$ fixat.

A més, per la definició de $\Phi(S(T))$ tenim que

$$\begin{aligned} V(t) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S(T))|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S(T) - K)^+|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S(T) - K) \cdot \mathbf{1}_{\{S(T) > K\}}|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(T) \cdot \mathbf{1}_{\{S(T) > K\}}|\mathcal{F}_t] - K\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{S(T) > K\}}|\mathcal{F}_t]\right). \end{aligned}$$

De (5.6), aplicant logaritmes obtenim que $S(T) > K$ si i només si

$$\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z > 0 \quad \text{sii} \quad Z > -d_2(t).$$

Aleshores, per la simetria de la distribució normal estàndard, tenim

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{S(T) > K\}}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{Q}(S(T) > K|\mathcal{F}_t) = \mathbb{Q}(Z > -d_2(t)) = 1 - N(-d_2(t)) = N(d_2(t)).$$

D'altra banda, substituint (5.6) tenim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(T) \cdot \mathbf{1}_{\{S(T) > K\}}|\mathcal{F}_t] &= S(t)e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma\sqrt{T-t}Z} \cdot \mathbf{1}_{\{Z > -d_2(t)\}}\right] \\ &= S(t)e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} \cdot e^{\frac{(\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} \cdot N(\sigma\sqrt{T-t} + d_2(t)) \\ &= S(t)e^{r(T-t)}N(d_1(t)) \end{aligned}$$

on hem fet servir la identitat gaussiana $\mathbb{E}[e^{aZ} \cdot \mathbf{1}_{\{Z > b\}}] = e^{a^2/2} N(a - b)$. Juntant-ho tot obtenim el resultat desitjat. $\square$

5.5 Estimador de Monte Carlo per al preu d'una opció

Sota el marc del model definit a la secció 5.3, recordem que el nostre objectiu és valorar una opció amb un únic actiu subjacent en un mercat format per dos actius:

- Un actiu amb risc (actiu subjacent), la dinàmica del qual, sota $\mathbb{P}$, ve descrita per $S(t)$ on $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ amb $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
- Un actiu lliure de risc amb la dinàmica $B(t) = e^{rt}$ on $r \in \mathbb{R}$ és el tipus d'interès constant.

A més, hem vist que el preu de l'opció ve donat per

$$V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S(T))].$$

on Φ és la funció de pagament de l'opció i, sabem que, a la pràctica, en el model de Black-Scholes sense dividends, per calcular l'esperança sota $\mathbb{Q}$ substituïm μ per r . És a dir, simularem $S(T)$ sota la dinàmica $dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$.

Recordant la definició de l'estimador de Monte Carlo (definició 2.2), considerarem les variables aleatòries $X_1, \dots, X_N$ i.i.d. amb la distribució de $\Phi(S(T))$ i, aleshores, obtindrem un estimador de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S(T))]$ fent la seva mitjana aritmètica

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

i, per tant, $e^{-rT} \hat{\mu}_N$ serà un estimador de la nostra variable d'interès $V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S(T))]$. D'aquesta manera, obtenim el següent algoritme de valoració d'opcions de forma general:

Algoritme 5.18. Valoració d'opcions amb el mètode de Monte Carlo [9, p.196].

1. Simular N realitzacions independents X_k de la variable $\Phi(S(T))$ sota la mesura $\mathbb{Q}$.
2. Fer servir l'estimador de Monte Carlo descomptat per a estimar el preu de l'opció

$$\hat{V}_N = e^{-rT} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \right).$$

Observació 5.19. Si anomenem $Y_k = e^{-rT} X_k$ tenim $\hat{V}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k$. Pel que hem vist en la secció 2.3, sempre que la variància sigui finita, podem calcular la variància mostrat

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (Y_k - \hat{V}_N)^2$$

i, aleshores, $\hat{V}_N \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}$ ens dona un interval de confiança aproximat per $V(0)$ amb un nivell de confiança $1 - \alpha \in (0, 1)$.

La dificultat d'aquest algoritme recau en el primer pas: simular el pagament, que depèn tant del nombre d'actius subjacents (en el nostre cas només un) com de si el pagament depèn del camí o no.

Per això, a continuació, particularitzarem aquest algoritme en tres casos. En primer lloc, veurem el cas més senzill, una opció call europea. Aquest exemple ens servirà com a cas bàsic i, a més, com que ja en coneixem la solució explícita (veure corol·lari 5.17), ens permetrà validar la simulació i analitzar la precisió de l'estimador. No obstant això, cal remarcar que, precisament pel fet que disposem d'una fórmula exacta, en aquest cas no seria estrictament necessari implementar el mètode de Monte Carlo. Per aquest motiu, veurem un segon exemple on sí que és especialment útil: una opció call asiàtica, on el pagament dependrà del camí i, en general, no admet una expressió explícita simple. En aquest darrer cas, considerarem dues variants, monitoratge discret i monitoratge continu, que aproximarem numèricament amb una discretització temporal.

5.5.1 Opció call europea

En el cas d'una opció call europea amb preu d'exercici K i venciment T tenim la funció de pagament $\Phi(S(T)) = (S(T) - K)^+$ on, aplicant (5.5) amb $s = 0$ i $t = T$, podem expressar $S(T)$ com

$$S(T) = S(0) \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Aleshores, obtenim el següent algoritme per a la valoració d'opcions call europees:

Algoritme 5.20. Valoració d'una opció call europea. *Sigui $S_0 = S(0)$ el valor actual de l'actiu. Considerem el següent algoritme:*

1. Per $k = 1, \dots, N$:

(a) Simular $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independentment.

(b) Definir $S_T^{(k)} = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} Z_k \right)$.

(c) Calcular $X_k = (S_T^{(k)} - K)^+$.

2. Definir $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k$.

3. Definir $\hat{V}_N = e^{-rT} \hat{\mu}_N$.

Observació 5.21. Podem calcular l'interval de confiança aplicant l'observació 5.19 amb $X_k = (S_T^{(k)} - K)^+$ i, per tant, $Y_k = e^{-rT} X_k$. A més, com que podem simular $S(T)$ de manera exacta sota $\mathbb{Q}$, l'estimador $\hat{V}_N$ és un estimador sense biaix del preu de l'opció $V(0)$.

Observació 5.22. En aquest cas, com que coneixem la distribució de $S(T)$ explícitament i podem simular-la, no hi ha error de discretització. Per tant, l'única font d'error numèric és l'error estadístic del mètode de Monte Carlo (de l'ordre de $1/\sqrt{N}$). Això fa que aquest exemple sigui especialment útil com a punt de referència per a la implementació. A més, també ens servirà per a comprovar la coherència del mètode, comparant el valor obtingut amb el valor resultant de l'aplicació de la fórmula de Black-Scholes.

5.5.2 Opció call asiàtica amb monitoratge discret

Una opció asiàtica és un tipus d'opció on la funció de pagament depèn de la mitjana aritmètica del preu de l'actiu subjacent al llarg d'un conjunt de dates de monitoratge dins de $[0, T]$, en lloc de dependre exclusivament del preu al venciment, T . En aquest treball considerarem una opció call asiàtica amb pagament al venciment, preu d'exercici K i venciment T . La seva funció de pagament és $\Phi(\bar{S}) = (\bar{S} - K)^+$ on

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$$

on $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ són dates de monitoratge prefixades [6, p.99].

En aquest cas, veiem que per tal d'estimar $\Phi(\bar{S})$ apareix un problema: coneixem la distribució de $S(t_i)$ però no coneixem la distribució de $\bar{S}$ (la suma de variables aleatòries lognormals correlacionades no és, en general, lognormal). Per tant, no tenim una fórmula explícita simple i el mètode de Monte Carlo resulta especialment útil.

D'altra banda, el pagament $\Phi(\bar{S})$ depèn dels valors del procés en les dates de monitoratge i, per tant, no n'hi ha prou amb simular $S(T)$, cal simular $S(t_1), \dots, S(t_n)$. Això fa que haguem de considerar l'algoritme que hem vist per la simulació del preu d'un actiu (algoritme 5.7) dins del mètode de Monte Carlo i, per tant, el nostre algoritme passi a ser el següent:

Algoritme 5.23. Valoració d'una opció call asiàtica. *Siguin $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ els punts de monitoratge en $[0, T]$. Siguin $S(0)$ el valor actual de l'actiu i sigui K el preu d'exercici. Definim $t_0 = 0$. Considerem el següent algoritme:*

1. Per $k = 1, \dots, N$:

- (a) Definir $S_0^{(k)} = S(0)$.
- (b) Simular una trajectòria $(S_0^{(k)}, S_1^{(k)}, \dots, S_n^{(k)})$ seguint l'algoritme 5.7 sobre la partició $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ amb valor inicial $S_0^{(k)}$ i substituint μ per r .
- (c) Calcular la mitjana $\bar{S}^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i^{(k)}$.
- (d) Calcular $X_k = (\bar{S}^{(k)} - K)^+$.

2. Definir $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k$.

3. Definir $\hat{V}_N = e^{-rT} \hat{\mu}_N$.

Observació 5.24. Podem calcular l'interval de confiança aplicant l'observació 5.19 amb $X_k = (\bar{S}^{(k)} - K)^+$ i $Y_k = e^{-rT} X_k$. A més, com que podem simular exactament $S(t_i)$ sota $\mathbb{Q}$ i calculem $\bar{S}^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i^{(k)}$, l'estimador $\hat{V}_N$ és un estimador sense biaix del preu de l'opció $V(0)$.

Observació 5.25. En aquest cas (contracte amb monitoratge discret), com que l'algoritme 5.7 representa una simulació exacta en els punts de la graella $t_1, \dots, t_n$, no hi ha error de discretització en aquests punts. Per tant, l'única font d'error numèric que apareix és l'error d'estimació del mètode de Monte Carlo associat a un nombre finit de simulacions N . D'altra banda, cal remarcar que, en aquest cas, n és part de la definició del contracte (freqüència de monitoratge del contracte) i, per tant, variar n no millora l'exactitud numèrica del model, sinó que canvia la definició del problema.

5.5.3 Opció call asiàtica amb monitoratge continu

De forma similar al que es fa en l'opció asiàtica amb monitoratge discret, en l'opció asiàtica amb monitoratge continu la funció de pagament depèn del preu mitjà de l'actiu subjacent. La diferència està en com es du a terme el monitoratge: en aquest cas, en lloc de considerar unes dates concretes considerem l'evolució contínua del preu. Per això, definim la funció de pagament com $\Phi(\bar{S}_{cont}) = (\bar{S}_{cont} - K)^+$ on

$$\bar{S}_{cont} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt.$$

Contràriament al que passava en els casos anteriors, la forma integral de $\bar{S}_{cont}$ fa que no es pugui calcular exactament a partir d'una simulació en un nombre finit de punts. Per això, aproximarem el seu valor mitjançant una suma de Riemann sobre una graella prou fina $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Per simplificar, considerarem una graella equiespaiada, $t_i - t_{i-1} = T/n$ per tot $i = 1, \dots, n$. Aleshores, aproximarem

$$\bar{S}_{cont} \approx \bar{S}_{cont}^{(n)} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n S(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$$

Observació 5.26. Cal remarcar que, en aquest cas, n no forma part de la definició del contracte, sinó que l'introduïm per tal de dur a terme l'aproximació numèrica. Així, en el cas de monitoratge continu tenim dues fonts d'error: l'error de l'estimació de Monte Carlo (controlat amb N) i l'error de discretització (controlat amb n). L'error estadístic decreix quan creix N , mentre que l'error de discretització s'espera que disminueixi quan creix n . Tot i això, cal recordar que augmentar qualsevol d'aquestes dos quantitats implica un creixement del cost computacional.

Observació 5.27. Observem que, un cop fixada la graella, el problema d'aproximar el preu de l'opció call asiàtica amb monitoratge continu es converteix en el cas amb monitoratge discret. D'aquesta manera, l'algoritme de simulació és el mateix en els dos casos, l'algoritme 5.23. Tot i això, cal tenir en compte el diferent significat del paràmetre n en els dos casos com destaca l'observació anterior.

5.5.4 Reducció de la variància amb variables antitètiques

En els diferents casos d'estudi, la nostra font d'aleatorietat són variables normals estàndard. De fet, el cas europeu depèn d'una sola $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, mentre que el cas asiàtic depèn d'un vector de normals $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ amb $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ per tot $i = 1, \dots, n$. Aleshores, seguint l'exemple 2.20.2, podem construir parelles antitètiques $(Z, -Z)$ ($(\mathbf{Z}, -\mathbf{Z})$ en el cas asiàtic). Per a cada parella calculem els dos pagaments i n'utilitzem la mitjana. Quan el pagament és monòton respecte de la variable normal, s'espera que els dos pagaments tinguin covariància no positiva, d'acord amb el criteri exposat a la secció 2.4.1.

Per tal de poder comparar amb el cas estàndard, interpretarem N com el nombre total de camins simulats. És a dir, generarem $N/2$ parelles, cadascuna amb dos pagaments associats (l'original i l'antitètic, amb el signe oposat).

Així, obtenim el següent esquema per convertir un algoritme de valoració com l'algoritme 5.20 o l'algoritme 5.23, en la seva versió antitètica.

Algoritme 5.28. Incorporació de variables antitètiques. Considerem un algoritme de valoració per Monte Carlo amb un nombre total de trajectòries parell N . Suposem que, en cada simulació, l'algoritme genera una font d'aleatorietat normal estàndard (un escalar Z o un vector $\mathbf{Z}$) i calcula un pagament. Denotarem per $X(\mathbf{Z})$ el pagament obtingut quan l'algoritme utilitza la realització $\mathbf{Z}$.

1. Substituir el bucle $k = 1, \dots, N$ per $k = 1, \dots, N/2$.
2. En cada iteració k :
 - (a) Simular la font d'aleatorietat original $\mathbf{Z}_k$.
 - (b) Calcular dos pagaments sota $\mathbb{Q}$ utilitzant el mateix algoritme: $X_{k,1} = X(\mathbf{Z}_k)$ i $X_{k,2} = X(-\mathbf{Z}_k)$.
 - (c) Considerem com a observació la mitjana antitètica $X_k = \frac{X_{k,1} + X_{k,2}}{2}$.
3. Construir l'estimador amb les $N/2$ observacions X_k : $\hat{V}_N^{\text{anti}} = e^{-rT} \cdot \frac{1}{N/2} \sum_{k=1}^{N/2} X_k$.

Observació 5.29. Cas europeu. En el cas europeu, el pagament depèn únicament del valor terminal $S(T)$, que al seu torn depèn d'un sol $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Per tant, aplicar variables antitètiques significa que, per a cada simulació, es calcula un pagament addicional substituint Z per $-Z$ (és a dir, es calculen $X(Z)$ i $X(-Z)$ i se'n fa la mitjana).

Observació 5.30. Cas asiàtic. En el cas asiàtic, el pagament depèn de la mitjana al llarg d'una trajectòria, i per tant depèn del vector de normals que genera el camí. En conseqüència, aplicar variables antitètiques implica simular una segona trajectòria completa (la trajectòria antitètica), obtinguda substituint el vector $\mathbf{Z}$ per $-\mathbf{Z}$, i calcular el pagament associat abans de fer-ne la mitjana amb el pagament original.

5.6 Disseny de l'experiment i implementació numèrica

Fins ara, hem estat construint una base teòrica per poder valorar les opcions. A partir d'ara, posarem en pràctica aquests coneixements implementant-los en tres casos concrets: una opció call europea, una opció call asiàtica amb monitoratge discret i una opció call asiàtica amb monitoratge continu. Per simplificar, considerarem que els tres productes tenen el mateix actiu subjacent: l'índex Euro Stoxx 50, un índex borsari que agrupa 50 empreses líders de l'eurozona.

Per tal de fixar els paràmetres de l'experiment farem servir les dades històriques de l'evolució del preu de tancament de l'Euro Stoxx 50 entre l'1 de gener de 2023 i el 4 de maig de 2026, considerant aquesta darrera la data de valoració. En aquestes dades, que s'han obtingut de Yahoo Finance [2], no es disposa del preu de tancament ajustat. Per simplicitat, treballarem amb el preu de tancament i no incorporarem explícitament l'efecte dels dividends. En la Figura 1 es mostra l'evolució del preu de tancament de l'Euro Stoxx 50 en el període analitzat, que utilitzarem com a base per a l'estimació dels paràmetres del model.

Amb aquestes dades podem definir $S(0)$ com el preu de tancament en la data de valoració, 4 de maig de 2026. A més, podem fer servir aquestes dades per estimar la volatilitat anual, σ , de la següent manera:

De (5.5), amb deriva genèrica μ , tenim

$$\log \left(\frac{S(t)}{S(s)} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma \sqrt{t - s} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

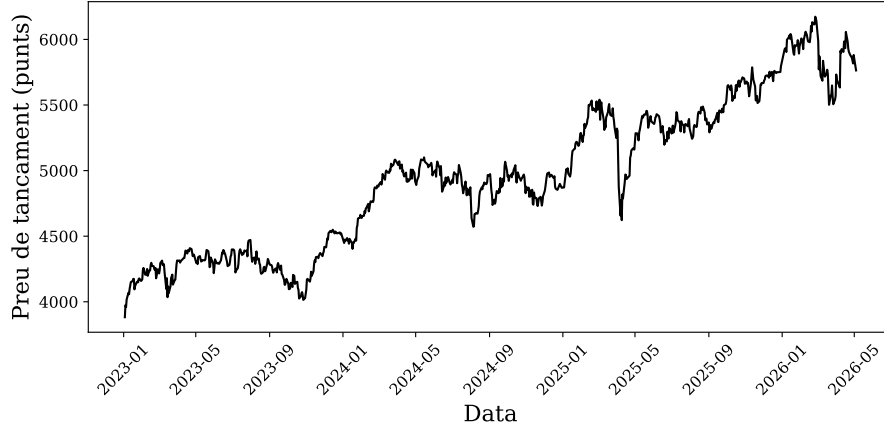


Figura 1: Evolució del preu de tancament de l'índex Euro Stoxx 50 (01/01/2023 – 04/05/2026), utilitzat per a fixar $S(0)$ i estimar la volatilitat anualitzada σ .

Per tant, $\log(S(t)/S(s))$ es comporta com una normal amb variància $\sigma^2(t-s)$. En particular, prenent $t-s$ igual a un dia de negociació, la desviació estàndard dels rendiments logarítmics diaris permet estimar la volatilitat diària, $\hat{\sigma}_{dia}$. Finalment, si assumim 252 dies de negociació en un any, podem anualitzar aquesta quantitat com $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{dia}\sqrt{252}$. Aleshores, podem utilitzar aquesta estimació $\hat{\sigma}$ com a valor de la volatilitat σ en el nostre model.

Un cop fixat $S(0)$ i estimat σ , fixem la resta de paràmetres del model i dels contractes considerats. Considerem un venciment $T = 1$ any i un preu d'exercici *at-the-money* $K = S(0)$. A més, fixem el tipus lliure de risc constant com l'Euribor a 1 any del mes d'abril de 2026, $r = 2.747\%$ [1]. En el cas de l'opció asiàtica amb monitoratge discret considerarem monitoratge mensual, $n = 12$. A la Taula 1 es mostra un resum dels paràmetres del model i dels contractes considerats.

Paràmetre	Descripció	Valor
$S(0)$	Preu inicial de l'actiu subjacent	5763.61
K	Preu d'exercici	5763.61
T	Venciment	1 any
r	Tipus d'interès lliure de risc	0.02747
σ	Volatilitat anual estimada	0.15451
n	Nombre de dates de monitoratge de l'opció asiàtica discreta	12

Taula 1: Paràmetres del model i dels contractes utilitzats en l'experiment numèric.

Pel que fa al cas base de la simulació, utilitzarem un nombre de simulacions $N_{base} = 10\,000$. A més, per aproximar l'opció asiàtica amb monitoratge continu, considerarem un valor de n suficientment gran perquè l'aproximació de la integral sigui acceptable, però suficientment petita perquè el temps de càlcul sigui raonable. Així, considerarem una graella temporal amb $n_{base} = 252$ punts (l'equivalent al monitoratge diari). Aquests valors es faran variar posteriorment en l'anàlisi de convergència respecte de N i n . La Taula 2 mostra els paràmetres del cas base de simulació utilitzats.

Per dur a terme la implementació numèrica s'ha elaborat un programa en Python, fent ús de llibreries de càlcul numèric i gestió de dades, i fixant una llavor per tal d'assegurar la reproductibilitat dels resultats. Aquest codi, que es pot trobar en l'Annex B, fa servir

Paràmetre	Descripció	Valor
N_{base}	Nombre base de trajectòries simulades	10000
n_{base}	Nombre de punts de la graella per aproximar el monitoratge continu	252

Taula 2: Paràmetres de simulació utilitzats en el cas base.

els algorismes exposats anteriorment. En particular, farem servir l'algoritme 5.20 per a l'opció europea i els algorismes 5.7 i 5.23 per a les opcions asiàtiques. A més, l'error estàndard i els intervals de confiança es calcularan com s'explica en l'observació 5.19, seguint l'aproximació normal justificada pel teorema central del límit. Finalment, en el cas de l'opció call europea, la fórmula de Black-Scholes (corol·lari 5.17) servirà com a preu de referència per comprovar la coherència de la implementació.

Per tal de dur a terme la implementació de les variables antitètiques aplicarem l'esquema 5.28 als algorismes 5.20 i 5.23 tenint en compte les observacions 5.29 i 5.30 respectivament.

5.7 Resultats numèrics

En aquesta secció presentem els resultats numèrics obtinguts per a cada tipus d'opció amb les implementacions descrites a la secció anterior. Seguirem una estructura comuna per a cada producte.

- **Cas base.** Estimació del preu amb un nombre fix de simulacions N_{base} , juntament amb l'error estàndard (SE) i l'interval de confiança (IC) associat.
- **Validació o comprovacions de coherència.** Comparació del resultat amb una referència o una reducció a un cas conegut quan sigui possible.
- **Estudi de convergència.** Anàlisi de com evoluciona l'estimador en funció del nombre de simulacions N i del comportament de l'error estàndard, que teòricament és d'ordre $1/\sqrt{N}$.

Per a l'opció asiàtica amb monitoratge continu, hem vist que l'esquema de simulació és anàleg al del cas discret amb la diferència que n és un paràmetre de discretització i no un valor fixat. Per aquest motiu, no repetim una comprovació de coherència addicional específica. A més, durem a terme l'estudi de convergència respecte de n amb N fixat per estudiar l'efecte de la discretització. Fixat n , la convergència en N seria anàloga a la del cas discret.

5.7.1 Opció call europea

Fent servir els paràmetres exposats a la Taula 1 i un N_{base} simulacions per al cas de l'opció call europea amb funció de pagament $\Phi(S(T)) = (S(T) - K)^+$ valorada sota $\mathbb{Q}$ i amb un interval de confiança del 95% obtenim els resultats exposats en la Taula 3.

L'estimació Monte Carlo del preu és $\hat{V} = 434.71$ amb un interval de confiança del 95% $[422.59, 446.84]$. Això indica que, amb N_{base} simulacions la incertesa estadística és aproximadament 12.12 punts (semiamplada de l'IC), coherent amb l'error estàndard calculat.

Magnitud	Resultat
Preu estimat	434.71
Interval de confiança (95%)	[422.59, 446.84]
Error estàndard	6.1877

Taula 3: Resultats del cas base per a l'opció call europea ($N = N_{base}$): preu estimat, interval de confiança del 95% i error estàndard .

Per tal de validar aquests resultats, els podem comparar amb el resultat exacte que obtenim aplicant la fórmula de Black-Scholes per a l'opció call europea (corol·lari 5.17). En la Taula 4 veiem que segons aquesta fórmula el preu hauria de ser $V_{BS} = 433.69$, un valor proper a l'obtingut amb l'estimació de Monte Carlo i que, a més, es troba dins de l'interval de confiança estimat. Per tant, això avala la coherència de la implementació.

Magnitud	Resultat
Preu segons Monte Carlo	434.71
Preu segons Black-Scholes	433.69
Diferència (MC - BS)	1.0205
BS dins IC	Sí

Taula 4: Comparació del cas base per a l'opció call europea entre l'estimació Monte Carlo (MC) i el preu de Black-Scholes (BS): preu estimat $\hat{V}$, preu de referència V_{BS} , diferència $\hat{V} - V_{BS}$ i indicació de si V_{BS} cau dins de l'interval de confiança del 95% (IC).

D'altra banda, la Taula 5 mostra els resultats de repetir l'experiment per a diferents valors de N . En efecte, veiem que el valor de l'estimador fluctua per diferents valors de N i es va estabilitzant a mesura que N creix. Tot i això, veiem que, fins i tot per a valors grans de N , existeixen petites desviacions degudes a l'aleatorietat del procés. Aquestes desviacions són compatibles amb l'error estadístic, ja que el preu de referència es manté dins de l'interval de confiança.

N	Preu MC	SE	IC inferior	IC superior	BS dins IC
1000	451.9671	20.1328	412.5074	491.4267	Sí
5000	433.0128	8.6607	416.0380	449.9876	Sí
10000	434.7138	6.1877	422.5862	446.8414	Sí
50000	436.3080	2.7880	430.8436	441.7724	Sí
100000	433.9017	1.9602	430.0598	437.7436	Sí
250000	434.0852	1.2393	431.6562	436.5142	Sí
500000	435.1093	0.8798	433.3850	436.8337	Sí

Taula 5: Comparació dels resultats per a l'opció call europea per diferents valors de N : estimació Monte Carlo (MC), error estàndard, interval de confiança del 95% (IC) i indicació de si el preu segons Black-Scholes (BS) cau dins l'interval.

Aquest fet es veu potser fins i tot de manera més clara en la Figura 2, on es veu que, a mesura que N creix, l'estimador (línia contínua) es va estabilitzant al voltant del preu Black-Scholes (línia discontinua), mantenint certa variabilitat. A més, aquesta figura també mostra com l'amplada de l'interval de confiança (àrea gris clar) és cada cop més petita a mesura que N creix, tal com era d'esperar.

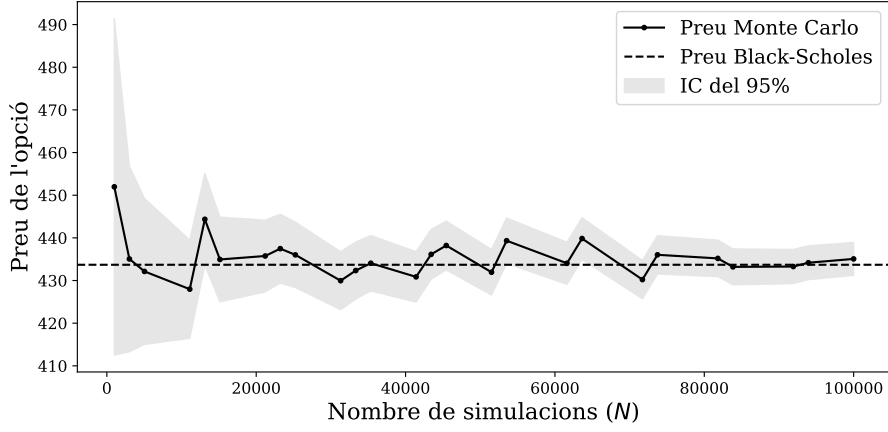


Figura 2: Convergència de l'estimació Monte Carlo del preu de l'opció call europea en funció del nombre de simulacions N . La línia discontinua representa el preu de Black-Scholes i l'àrea ombrejada l'interval de confiança del 95%.

Finalment, podem comprovar que l'error estàndard es comporta de la manera descrita en la secció 2.3, és a dir, de l'ordre $1/\sqrt{N}$. En efecte, la Figura 3 mostra la comparació entre el comportament de l'error estàndard i una funció de la forma $C/\sqrt{N}$ on $C = \text{SE}(N_0)\sqrt{N_0}$, on N_0 és el primer valor de N considerat, fa que ambdues corbes comencin en el mateix punt per a facilitar la comparació.

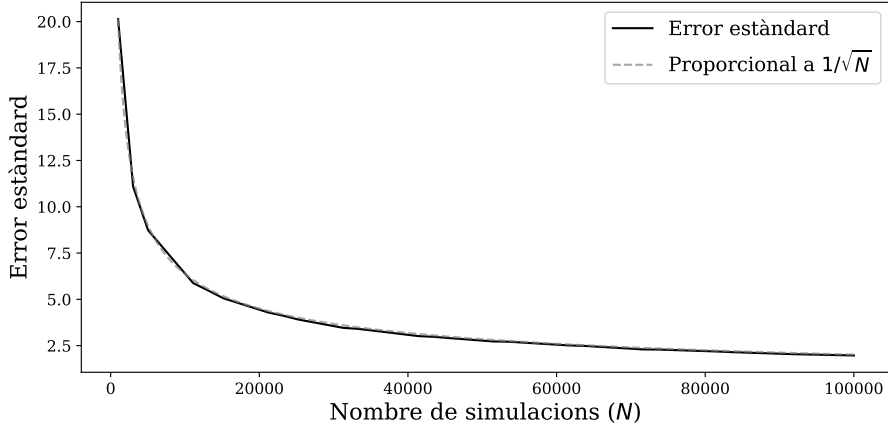


Figura 3: Error estàndard de l'estimador de Monte Carlo per al preu de l'opció call europea en funció del nombre de simulacions N , comparat amb una corba proporcional a $1/\sqrt{N}$.

D'aquesta manera, hem vist que aquest cas (opció call europea) valida la implementació del mètode de Monte Carlo per a estimar el preu d'una opció i és coherent amb la convergència teòrica. Així, ens servirà de punt de referència per a les opcions asiàtiques.

5.7.2 Opció call asiàtica amb monitoratge discret

Pel que fa a l'opció call asiàtica amb monitoratge discret mensual ($n = 12$) amb els paràmetres exposats anteriorment, recordem que, en aquest cas, $\Phi(\bar{S}) = (\bar{S} - K)^+$ on $\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$ amb $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$. Per simplificar, considerarem aquests punts equiespaiats en $[0, T]$ de manera que $t_i = iT/n$ per tot $i = 1, \dots, n$.

A diferència del cas europeu, cal simular trajectòries completes per al preu de l'índex Euro Stoxx 50, per tal de poder calcular $\bar{S}$. La Figura 4 mostra un exemple de 50 trajectòries diferents del moviment geomètric brownià generades aleatòriament per al preu d'aquest índex seguint l'algoritme 5.7. En aquesta figura també podem observar un comportament anàleg a l'esperat per al moviment brownià explicat en la secció 3.4: les trajectòries són molt properes al voltant de $t = 0$ i es van separant a mesura que t creix.

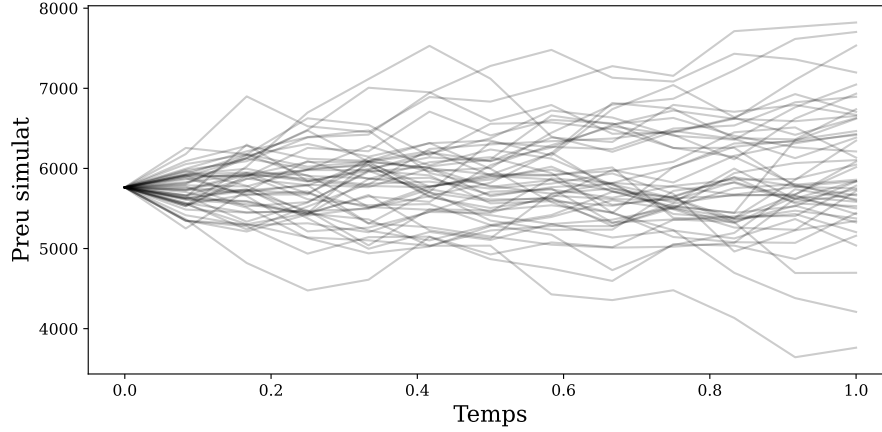


Figura 4: Exemple de trajectòries simulades del preu de l'Euro Stoxx 50 sota el model de moviment brownià geomètric (GBM) en l'horitzó $[0, T]$ amb monitoratge mensual ($n=12$). Aquestes trajectòries s'utilitzen per calcular la mitjana aritmètica del preu en una opció asiàtica.

En el nostre cas, però, no simulem només 50 trajectòries, sinó que en simularem $N_{base} = 10\,000$ per tal de calcular l'estimador de Monte Carlo en el cas base. Els resultats obtinguts es presenten en la Taula 6. En aquest cas, el preu serà $\hat{V} = 263.33$, un valor molt més baix que l'opció europea. Això passa perquè fer dependre el pagament de la mitjana aritmètica redueix l'efecte dels moviments extrems del preu. Alhora, aquest fet acostuma a reduir la variabilitat del pagament i, en conseqüència, pot reduir l'error estàndard de l'estimador per a un mateix N . En aquest cas, observem una incertesa estadística menor, d'aproximadament 7.19 punts (semiamplada de l'interval de confiança).

Magnitud	Resultat
Preu estimat	263.33
Interval de confiança (95%)	[256.14, 270.52]
Error estàndard	3.6691

Taula 6: Resultats del cas base per l'opció call asiàtica amb monitoratge discret ($n = 12$, $N = N_{base}$): preu estimat, interval de confiança del 95% i error estàndard.

Com que en aquest cas no tenim cap punt de referència pel nivell de preus, hem de buscar una altra manera per a comprovar que la valoració és coherent. Per fer-ho, considerem breument el cas particular $n = 1$, que correspon a una opció asiàtica amb un únic punt de monitoratge al venciment. En aquest cas, el pagament hauria de coincidir amb el de l'opció europea. La Taula 7 mostra que els valors obtinguts en els tres casos (asiàtica amb $n=1$ mitjançant el mètode de Monte Carlo, europea amb el mètode de Monte Carlo i europea amb Black-Scholes) són coherents i, per tant, apunta cap a la coherència del mètode.

Per acabar, considerem breument els resultats de l'anàlisi de convergència. La Taula 8

Magnitud	Resultat
Preu opció asiàtica amb $n = 1$ (MC)	434.71
Preu opció europea (MC)	434.71
Preu opció europea (BS)	433.69
Preu asiàtica dins IC europea	Sí

Taula 7: Comprovació de coherència: per $n = 1$, l'opció asiàtica es redueix al cas europeu. Es compara el preu asiàtic (MC) amb el preu europeu (MC) i amb el preu de Black-Scholes (BS) per a l'opció call europea, i s'indica si el preu asiàtic cau dins l'IC del 95% del cas europeu.

mostra els valors obtinguts per diferents N . Tal com esperàvem, l'estimador s'estabilitza a mesura que N creix i l'error estàndard es va fent petit.

N	Preu MC	SE	IC inferior	IC superior
1000	256.6357	11.2521	234.5820	278.6894
5000	263.3968	5.2208	253.1641	273.6295
10000	263.3267	3.6691	256.1353	270.5180
50000	260.3491	1.6290	257.1563	263.5418
100000	258.9836	1.1583	256.7133	261.2538
250000	259.8822	0.7327	258.4462	261.3183
500000	258.6123	0.5169	257.5992	259.6254

Taula 8: Comparació dels resultats per a l'opció call asiàtica amb monitoratge discret ($n = 12$) per diferents valors de N : estimació de Monte Carlo (MC), error estàndard (SE) i interval de confiança del 95% (IC).

El mateix resultat es pot veure gràficament en la Figura 5, on també s'observa que, tot i que el preu es va estabilitzant, manté certa variabilitat característica del mètode. D'altra banda, es pot comprovar que l'error estàndard es comporta de forma similar a $1/\sqrt{N}$ de la mateixa manera que hem vist en el cas europeu (veure la figura A.1 de l'annex A).

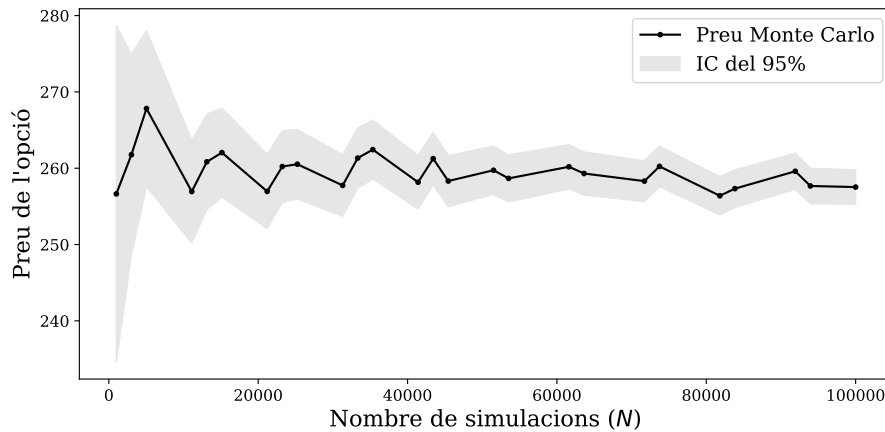


Figura 5: Convergència de l'estimació de Monte Carlo del preu de l'opció call asiàtica amb monitoratge discret ($n = 12$) en funció del nombre de simulacions N . L'àrea ombrejada representa l'interval de confiança del 95%.

5.7.3 Opció call asiàtica amb monitoratge continu

Recordem que, per al cas de l'opció call asiàtica amb monitoratge continu, el pas més delicat és aproximar $\bar{S}_{cont} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t)dt$ i això ho aconseguim mitjançant discretització $\bar{S}_{cont} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$, on n és el nombre de punts de la graella. Per tant, com hem vist, un cop fixada aquesta graella, la valoració del cas amb monitoratge continu es redueix al cas discret. Per aquest motiu, no repetirem una comprovació de coherència específica addicional. De fet, en el codi de l'Annex B es pot veure que les funcions utilitzades pel cas continu són exactament les mateixes que en el cas discret.

D'altra banda, hem vist que en aquest cas tenim dues fonts d'error diferents: l'error del mètode de Monte Carlo (controlat per N) i l'error de discretització (controlat per n). L'estudi del primer tipus d'error és anàleg al cas discret i, per tant, en aquesta secció ens centrarem en l'error de discretització, és a dir, com afecta el valor de n als resultats.

Pel cas base, considerarem els paràmetres fixats en la Taula 1 amb $N = N_{base}$ i $n = n_{base}$. Així, la Taula 9 mostra uns resultats similars al cas discret, amb un preu aproximat de $\hat{V} = 254.94$ i una incertesa estadística de 6.98 punts aproximadament (semiamplada de l'interval de confiança).

Magnitud	Resultat
Preu estimat	254.94
Interval de confiança (95%)	[247.95, 261.92]
Error estàndard	3.5643

Taula 9: Resultats del cas base per a l'opció call asiàtica amb monitoratge continu ($N = N_{base}$, $n = n_{base}$): preu estimat, interval de confiança del 95% i error estàndard.

Considerem $N = N_{base}$ fixat, i estudiem el comportament dels resultats per diferents valors de n . Observant la Taula 10 notem que el preu tendeix a estabilitzar-se quan n augmenta, tot i que no ho fa de manera clara, ja que els valors encara presenten variabilitat deguda a l'error de Monte Carlo. L'estabilització observada és deguda a una reducció en l'error de discretització per l'augment de n . En canvi, com que N és constant, veiem que l'error estadístic mostrat a la taula no varia notablement per als diferents valors de n . Això coincideix amb el comportament esperat, ja que, en la construcció de la taula, només es considera l'error atribuït al mètode de Monte Carlo (controlat per N). Les petites diferències són degudes a la variabilitat mostral.

n	Preu MC	SE (MC)	IC inferior (MC)	IC superior (MC)
1	434.7138	6.1877	422.5862	446.8414
12	263.3267	3.6691	256.1353	270.5180
25	252.6523	3.5265	245.7404	259.5642
50	252.3615	3.5642	245.3758	259.3473
100	244.5045	3.4695	237.7044	251.3046
252	254.9360	3.5643	247.9500	261.9220
500	250.7546	3.4812	243.9316	257.5776

Taula 10: Comparació dels resultats per a l'opció call asiàtica amb monitoratge continu amb $N = N_{base}$ fix per als diferents valors de n : estimació Monte Carlo (MC), error estàndard i interval de confiança del 95%. L'error estàndard i l'interval de confiança del reflecteixen només l'error de Monte Carlo, sense incorporar l'error de discretització.

Finalment, la Figura 6 mostra com el preu oscil·la però tendeix a estabilitzar-se a

mesura que n creix. A més, fixant-nos en l'amplada dels intervals de confiança (part ombrejada) veiem que aquesta es manté aproximadament del mateix ordre, al contrari del que passava en figures similars vistes anteriorment. Cal comentar que, per tal de disminuir el temps d'execució, la figura ha estat elaborada amb un valor N més baix que el del cas base, fet que contribueix a que la variabilitat sembli més pronunciada. En concret, hem fixat $N = N_{base}/2$.

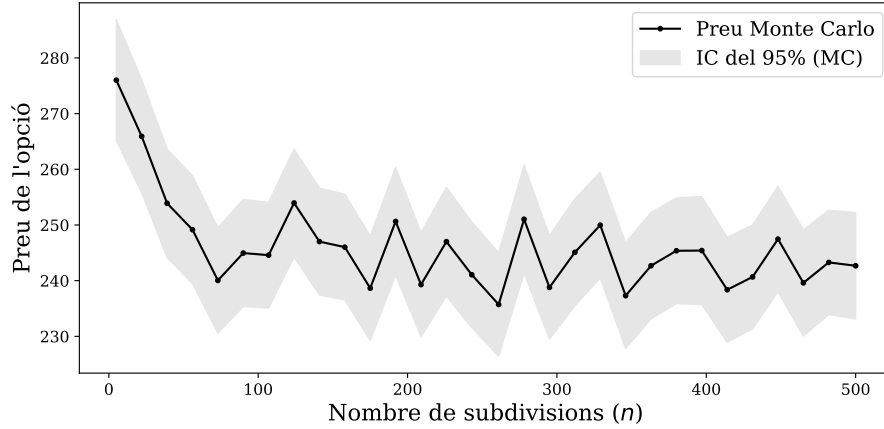


Figura 6: Estimació de Monte Carlo del preu de l'opció asiàtica amb monitoratge continu en funció de n amb $N = N_{base}/2$ fix. L'àrea ombrejada representa l'interval de confiança associat a l'estimació de Monte Carlo.

5.7.4 Reducció de la variància amb variables antitètiques

Per tal de millorar les estimacions anteriors, considerem l'aplicació d'un mètode de reducció de la variància: variables antitètiques, substituint cada font d'aleatorietat normal per la parella antitètica corresponent. Per evitar redundància, només aplicarem aquest mètode a l'opció call europea i a l'opció call asiàtica amb monitoratge discret (el cas continu es tracta numèricament de manera anàloga al cas discret un cop fixada la graella).

Tot i que la tècnica de variables antitètiques s'introdueix com un mètode de reducció de la variància, en els resultats ens centrarem principalment en l'error estàndard (SE), ja que aquesta és la magnitud que s'utilitza directament per construir els intervals de confiança i, per tant, permet valorar de manera més immediata la precisió de l'estimador. Recordem, a més, que per tal que els resultats siguin comparables, aplicarem la tècnica amb $N_{base}/2$ parelles antitètiques, de manera que el nombre total de camins simulats sigui N_{base} .

D'altra banda, com que les variables antitètiques no modifiquen l'esperança de l'estimador, el preu estimat hauria de ser coherent amb l'obtingut en els apartats anteriors amb Monte Carlo estàndard.

Per al cas europeu, la Taula 11 mostra els resultats obtinguts amb l'aplicació de variables antitètiques comparats amb els obtinguts amb l'estimador estàndard. Observem que el preu estimat és coherent en ambdós casos, però l'ús de variables antitètiques redueix l'error estàndard de manera notable (aproximadament un 28.66%), cosa que es reflecteix en un interval de confiança més estret per un mateix nombre total de camins simulats N_{base} . A més, notem que el preu de referència (Black-Scholes) és dins d'aquests dos intervals.

Mètode	Preu	SE	IC inferior	IC superior	BS en IC
MC estàndard	434.7138	6.1877	422.5862	446.8414	Sí
MC antitètic	430.8600	4.4145	422.2078	439.5123	Sí

Taula 11: Comparació del cas base per a l'opció call europea entre l'estimació Monte Carlo estàndard i la versió amb variables antitètiques: preu estimat, error estàndard (SE), interval de confiança del 95% (IC) i indicació de si el preu segons Black-Scholes (BS) es troba dins de l'interval de confiança.

Si ens fixem en el cas asiàtic discret exposat en la Taula 12, podem observar el mateix patró: els preus estimats són compatibles mentre que l'error estàndard és menor en el cas antitètic. En particular, notem una reducció de l'error estàndard una mica superior que en el cas europeu, d'un 29.32% aproximadament.

Mètode	Preu	SE	IC inferior	IC superior
MC estàndard	263.3267	3.6691	256.1353	270.5180
MC antitètic	259.5186	2.5933	254.4357	264.6014

Taula 12: Comparació del cas base per a l'opció call asiàtica amb monitoratge discret ($n = 12$) entre Monte Carlo estàndard i Monte Carlo amb variables antitètiques: preu estimat, error estàndard (SE) i interval de confiança del 95% (IC).

A més, si s'analitza l'evolució de l'error estàndard per diferents valors de N , es pot veure que la corba corresponent a l'estimador antitètic es manté sistemàticament per sota de l'estimador estàndard, indicant una menor variància estimada de l'estimador al llarg del rang de N considerat (veure figures A.2 i A.3 de l'Annex A). A més, en aquestes figures també es pot observar que l'error estàndard es comporta com $1/\sqrt{N}$ en tots els casos considerats.

Com a síntesi, la Taula 13 presenta l'error estàndard del cas base per a l'estimador estàndard i antitètic, així com el percentatge de reducció corresponent i la reducció mitjana².

Opció	SE estàndard	SE antitètic	Reducció cas base (%)	Reducció mitjana (%)
Europea	6.1877	4.4145	28.6566	28.3870
Asiàtica	3.6691	2.5933	29.3194	29.5089

Taula 13: Resum de la reducció d'error estàndard obtinguda amb variables antitètiques per a l'opció call europea i l'opció call asiàtica amb monitoratge discret ($n = 12$): error estàndard (SE) en el cas base i reducció de l'error estàndard per al cas base i en mitjana.

5.8 Discussió dels resultats

Per tancar la part d'implementació, fem un petit repàs dels resultats obtinguts i del paper que ha tingut cada experiment numèric. En primer lloc, l'estudi de l'opció call europea ens ha permès comprovar la coherència de la implementació, ja que el preu estimat per Monte Carlo és consistent amb el preu obtingut amb la fórmula de Black-Scholes i aquest

²La reducció mitjana s'ha calculat com la mitjana aritmètica del percentatge de reducció de l'error estàndard sobre el conjunt de valors de N considerats a les figures A.2 i A.3.

queda dins de l'interval de confiança corresponent (veure Taula 4). Tot i això, com que en aquest cas disposem d'una fórmula explícita, aplicar el mètode de Monte Carlo no és estrictament necessari des del punt de vista pràctic.

En canvi, en el cas de les opcions asiàtiques, per a les quals no disposem d'una fórmula explícita, el mètode de Monte Carlo guanya rellevància. Abans d'analitzar el cas base, l'opció asiàtica amb monitoratge discret ens ha permès fer una comprovació addicional de coherència: quan $n = 1$, el pagament es redueix al d'una opció call europea. Un cop feta aquesta comprovació, hem considerat el cas base amb monitoratge mensual ($n = 12$). En aquest cas, hem obtingut un preu més baix que el de l'opció europea. Això és coherent amb el fet que el pagament depèn d'una mitjana aritmètica dels preus i no només del valor final, de manera que es suavitza l'efecte dels valors extrems, fet que es reflecteix en un preu menor.

A continuació, hem considerat una aproximació numèrica a l'opció call asiàtica amb monitoratge continu. En aquest cas apareix una dificultat addicional respecte dels casos anteriors: com que el pagament depèn d'una integral, no pot ser calculat exactament amb una simulació en un nombre finit de punts i, per tant, l'hem d'aproximar. Això introdueix un error de discretització, diferent de l'error estadístic propi del mètode de Monte Carlo i que no queda recollit en l'error estàndard ni en l'interval de confiança calculats. Ara bé, hem observat empíricament que, a mesura que la discretització és més fina (és a dir, quan n augmenta) el preu s'estabilitza, indicant una reducció d'aquest darrer tipus d'error.

Paral·lelament, també hem analitzat l'efecte del nombre de simulacions N . Hem comprovat que l'error estàndard de l'estimador de Monte Carlo disminueix a mesura que N augmenta, amb un comportament similar a $1/\sqrt{N}$. Això és coherent amb els resultats exposats en la part teòrica sobre el comportament de l'error en el mètode de Monte Carlo.

Finalment, hem aplicat el mètode de variables antitètiques a l'opció call europea i a l'opció call asiàtica amb monitoratge discret. Els resultats obtinguts són coherents amb el que s'ha exposat a l'apartat 2.4.1: es manté l'esperança de l'estimador i se'n redueix l'error estàndard. En efecte, en els dos casos considerats, els preus obtinguts són coherents amb els del mètode de Monte Carlo usual i, al mateix temps, hi ha una reducció significativa de l'error estàndard, amb un valor d'aproximadament 28%-29% (veure Taula 13). Així, l'ús d'aquesta tècnica permet millorar la precisió de l'estimador sense augmentar el nombre total de simulacions.

6 Conclusions

En aquesta memòria s'ha desenvolupat i implementat un esquema de simulació de Monte Carlo per a la valoració d'opcions sota el model de Black-Scholes, des dels principis bàsics sobre el mètode de Monte Carlo i el moviment brownià fins a l'elaboració d'una aplicació financera completa. El fil conductor del treball ha estat entendre que, en un problema sota incertesa, l'objectiu no és eliminar l'atzar, sinó quantificar-lo: estimar un preu i acompanyar-lo d'una mesura explícita de la seva fiabilitat.

Per fer-ho, hem començat desenvolupant una base teòrica. Hem vist que l'estimador de Monte Carlo aproxima esperances i hem après a quantificar-ne la precisió mitjançant l'error estàndard i els intervals de confiança. A més, hem revisat com millorar-la a través de diverses tècniques de reducció de variància, que, en els casos adequats, permeten obtenir estimacions més eficients sense alterar el valor esperat de l'estimador.

A continuació, hem introduït què és el moviment brownià i com simular-lo i hem vist com aquest serveix de base per a models financers en temps continu. Per fer aquest pas, ha estat necessari introduir les equacions diferencials estocàstiques i el càlcul d'Itô, que permeten descriure l'evolució de variables sotmeses a una component aleatòria. En particular, hem connectat aquestes eines amb el moviment brownià geomètric, que és el model utilitzat per descriure la dinàmica del preu de l'actiu subjacent en el marc de Black-Scholes.

Per acabar, hem donat sentit a totes aquestes peces teòriques integrant-les en una aplicació pràctica: el càlcul del preu de tres opcions financeres, fent servir l'índex Euro Stoxx 50 com a actiu subjacent. L'opció call europea ens ha servit com a cas de referència i validació, ja que permet comparar l'estimació Monte Carlo amb una solució coneguda del problema, la fórmula de Black-Scholes. D'altra banda, amb l'opció call asiàtica amb monitoratge discret hem vist un context en què el mètode de Monte Carlo guanya rellevància: quan el pagament depèn del camí i no disposem d'una solució tancada simple. Tot seguit, el cas de monitoratge continu ens ha permès analitzar un escenari amb dues fonts d'error (l'error estadístic propi de Monte Carlo i l'error de discretització introduït en aproximar la integral) i observar com el preu estimat es va estabilitzant quan la discretització es fa més fina.

A més, hem comprovat empíricament que el comportament de l'error estudiat durant la part teòrica es correspon amb l'observat numèricament: per a tots els experiments, l'error estàndard mostra un comportament coherent amb l'ordre $1/\sqrt{N}$. Finalment, hem aplicat una de les tècniques descrites en la part teòrica, les variables antitètiques, per observar que, efectivament, el seu ús provoca una disminució considerable de l'error estàndard (al voltant del 29%), sense alterar l'esperança de l'estimador, tal com preveia la teoria.

Així, des de la teoria fins a la implementació, l'eix central ha estat el mateix: entendre què estimem, com ho estimem i amb quina fiabilitat.

En conjunt, els objectius plantejats a la introducció s'han assolit: s'ha construït el marc teòric necessari, s'ha implementat la simulació i la valoració d'opcions i s'ha quantificat la precisió i la millora d'eficiència amb reducció de variància.

Tot i això, cal tenir en compte que l'estudi incorpora diverses simplificacions. El model assumeix una volatilitat i un tipus d'interès lliure de risc constants i una dinàmica lognormal, cosa que no pot capturar completament les característiques reals del mercat. A més, alguns paràmetres, com la volatilitat, s'han estimat a partir de dades històriques,

que poden no representar el comportament futur. Finalment, l'absència de preus de tancament ajustats ha fet que no s'incorpori l'efecte de dividends, fet que pot afectar el nivell de preus obtingut.

Per aquest motiu, possibles extensions futures podrien millorar l'eficiència numèrica (per exemple, incorporant altres tècniques de reducció de la variància com variables de control) i l'ajust a la realitat (per exemple, considerant dividends o un tipus d'interès dinàmic), mantenint sempre un mateix principi metodològic: estimar i quantificar l'error.

En conclusió, els resultats mostren que, tot i les limitacions esmentades, el mètode de Monte Carlo és una eina robusta i flexible, especialment rellevant per valorar derivats amb pagaments més complexos, i que la seva precisió es pot millorar mitjançant tècniques de reducció de variància.

Referències

- [1] Estadísticas de tipos de interés. <https://www.bde.es/webbe/es/estadisticas/temas/tipos-interes.html>.
- [2] EURO STOXX 50 | ESTX 50 PR.EUR (^STOXX50E) Charts, Data & News - Yahoo Finance. <https://finance.yahoo.com/quote/%5ESTOXX50E/>.
- [3] Sinha Aziz, HM Nayem, and BM Golam Kibria. Sample Size Requirements for the Central Limit Theorem for Skewed Distributions: A simulation study. *Journal of Statistical Modelling and Analytics*, 7:16–31, December 2025.
- [4] Paolo Brandimarte. *Handbook in Monte Carlo Simulation: Applications in Financial Engineering, Risk Management, and Economics*. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2014.
- [5] Lawrence C. Evans. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014.
- [6] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, New York, 2004.
- [7] I. Guikhman and A. Skorokhod. *Introduction à La Théorie Des Processus Aléatoires*. Editions Mir, Moscou, 1980.
- [8] Peter Jäckel. *Monte Carlo Methods in Finance*. Wiley, Chichester Weinheim, repr. edition, 2010.
- [9] Ralf Korn, Elke Korn, and Gerald Kroisandt. *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*. CRC Press/Taylor & Francis, Boca Raton, FL, 2010.
- [10] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, Paris, 3e éd edition, 2012.
- [11] Michael J. Panik. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications in Population Dynamics Modeling*. John Wiley & sons, Hoboken, 2017.
- [12] Marta Sanz i Solé. *Probabilitats*. Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 1999.
- [13] Galen R. Shorack. *Probability for Statisticians*. Springer, New York, NY, 2009.

A Figures complémentaires

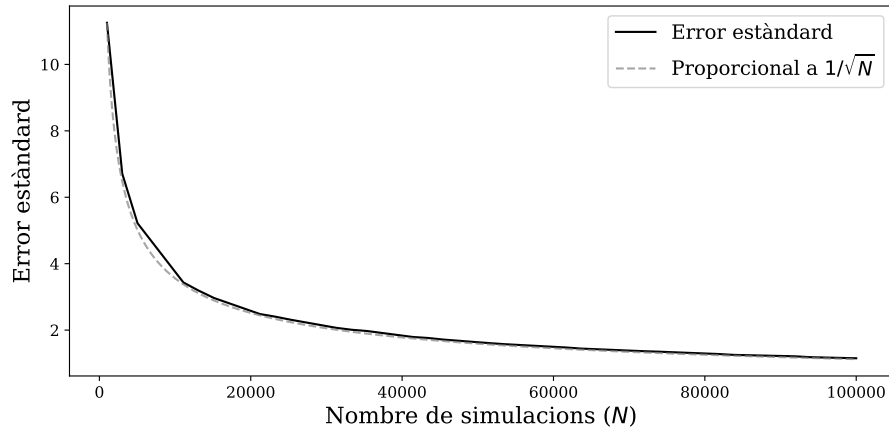


Figura A.1: Error estàndard de l'estimador de Monte Carlo per al preu de l'opció call asiàtica amb monitoratge discret ($n = 12$) en funció del nombre de simulacions N , comparat amb una corba proporcional a $1/\sqrt{N}$.

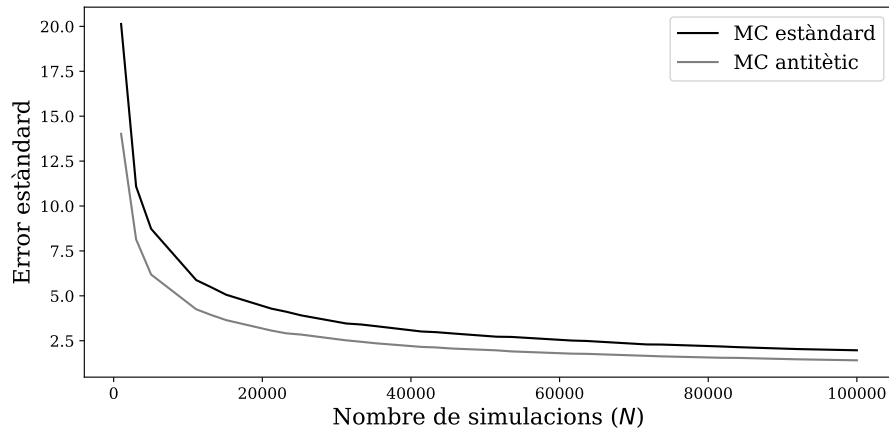


Figura A.2: Error estàndard de l'estimador de Monte Carlo en funció de N per a l'opció call europea, comparant l'estimador estàndard i amb variables antitètiques.

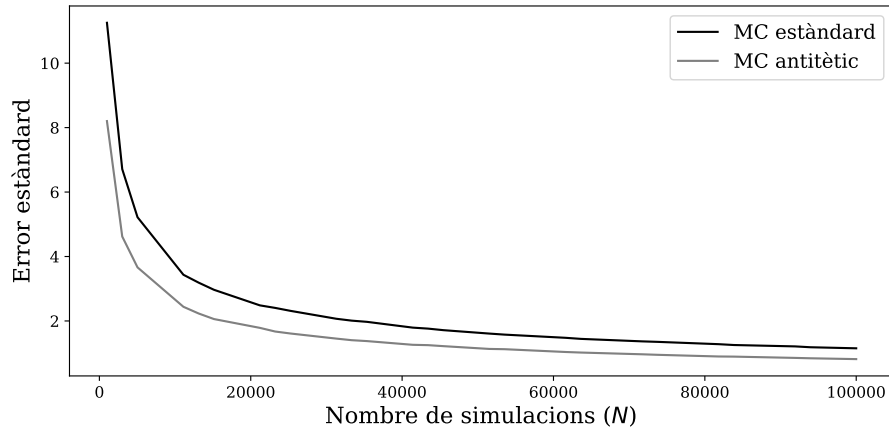


Figura A.3: Error estàndard de l'estimador en funció de N per a l'opció call asiàtica amb monitoratge discret ($n = 12$), comparant l'estimador estàndard i amb variables antitètiques.

B Codi i resultats de la implementació

Aquest annex recull el notebook de Jupyter complet utilitzat per a la implementació pràctica del treball. S'hi inclouen les cel·les de codi, les explicacions associades, els resultats obtinguts i les figures generades durant les simulacions.

Com que es tracta d'un notebook exportat, s'ha mantingut el seu format original per conservar la relació entre el codi, les sortides obtingudes i els comentaris explicatius. A més, el codi està estructurat de manera que les taules i figures generades es desen automàticament a les carpetes corresponents, per facilitar-ne la incorporació al document principal.

Annex B. Notebook de la implementació

Aquest notebook recull la implementació computacional utilitzada en el treball. Inclou el codi, les explicacions associades, els resultats obtinguts, les taules exportades i les figures generades durant les simulacions.

Les taules i figures generades en aquest notebook són les que s'han incorporat al cos del treball i als annexos. Els resultats poden presentar variacions si es modifica la llavor d'aleatorietat o la mostra de dades descarregada.

El notebook s'ha organitzat seguint el mateix ordre que la part aplicada del treball: primer es defineixen les dades i els paràmetres, després es valoren les opcions europea i asiàtiques, i finalment s'apliquen variables antitètiques.

Nota sobre el temps d'execució.

Les seccions d'estudi de convergència impliquen repetir la valoració per múltiples valors de N (i, en el cas de monitoratge continu, per múltiples valors de n). El cost computacional creix aproximadament de forma proporcional a N (i a $N \cdot n$ quan cal simular trajectòries completes), de manera que algunes cel·les poden requerir diversos minuts d'execució. En aquest notebook s'ha optat per una implementació clara i propera als algorismes descrits en el text, encara que això pugui implicar un temps d'execució més elevat.

Llibreries utilitzades i configuració general

Comencem definint la configuració general del notebook. En primer lloc, importem les llibreries que farem servir al llarg de la implementació.

```
In [1]: import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import yfinance as yf
from scipy.stats import norm
```

A continuació, fixem alguns paràmetres generals dels gràfics per tal de mantenir un format homogeni en totes les figures.

```
In [2]: plt.rcParams.update({
    "figure.figsize": (9, 4.5),
    "figure.dpi": 150,

    "font.family": "serif",
    "font.size": 11,
    "axes.labelsize": 16,
    "legend.fontsize": 14,
})
```

Ajustem la visualització del text per tal de millorar la presentació del document.

```
In [3]: from IPython.display import display, HTML

display(HTML("""
<style>
div.text_cell_render,
div.text_cell_render p,
.jp-RenderedHTMLCommon,
.jp-RenderedHTMLCommon p {
    text-align: justify !important;
}
</style>
"""))
```

Per garantir la reproductibilitat dels resultats establim una llavor d'aleatorietat.

```
In [4]: seed = 40
```

Per últim, si no existeixen, creem les carpetes on guardarem els arxius:

```
In [5]: import os

os.makedirs("dades", exist_ok=True)
os.makedirs("figures", exist_ok=True)
os.makedirs("tables", exist_ok=True)
```

Obtenció de dades i estimació de paràmetres

Importem les dades històriques de l'Euro Stoxx 50 (ticker `^STOXX50E`) des de Yahoo Finance fent servir la llibreria `yfinance`. Considerem el període que va de l'1 de gener de 2023 al 4 de maig de 2026 (fem servir `end = "2026-05-05"` perquè no inclou la data final). La taula següent mostra un extracte de les dades descarregades.

Aquestes dades es guarden en format `.csv` per facilitar la traçabilitat i permetre consultar la mostra utilitzada.

```
In [6]: data = yf.download("^STOXX50E", start = "2023-01-01", end = "2026-05-05", progress = False)
data.to_csv("dades/eurostoxx50_yahoo.csv")
data.round(2).tail()
```

```
Out[6]:
```

	Price	Close	High	Low	Open	Volume
Ticker	^STOXX50E	^STOXX50E	^STOXX50E	^STOXX50E	^STOXX50E	^STOXX50E
Date						
2026-04-27		5860.32	5932.33	5852.55	5878.86	13725000
2026-04-28		5836.10	5885.15	5822.26	5862.10	17077400
2026-04-29		5816.48	5850.30	5796.57	5833.86	17162200
2026-04-30		5881.51	5881.51	5747.76	5778.65	25383400
2026-05-04		5763.61	5882.01	5754.96	5878.79	23044900

Prendrem els preus de tancament diaris de l'índex com a preus de referència.

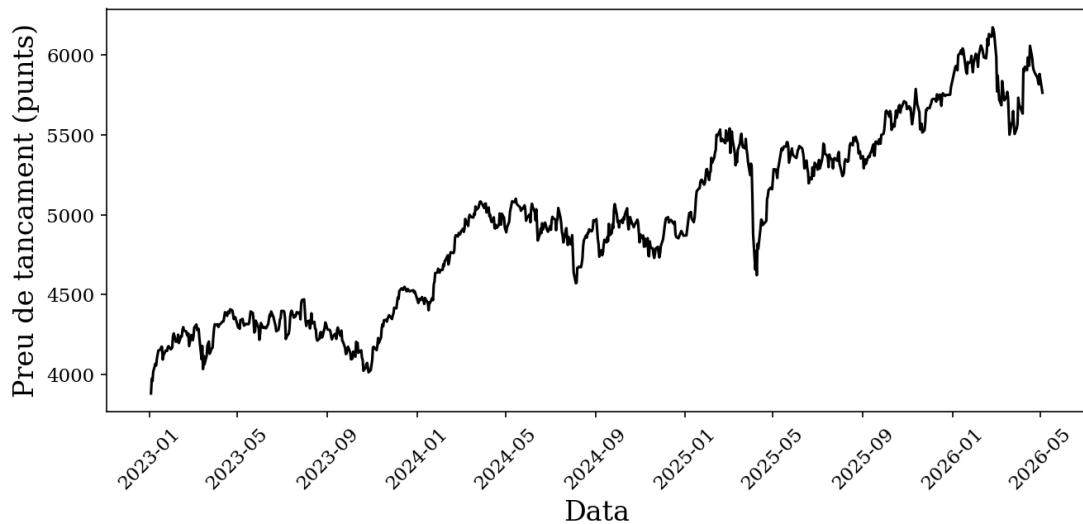
```
In [7]: df_price = data["Close"].dropna()
```

La figura següent mostra l'evolució dels preus de tancament durant el període considerat:

```
In [8]: plt.figure()
plt.plot(df_price, color="black")

plt.xlabel("Data")
plt.ylabel("Preu de tancament (punts)")
plt.xticks(rotation=45)

plt.tight_layout()
plt.savefig("figures/euro_stoxx_50_data.pdf", bbox_inches="tight")
plt.show()
```



A partir dels preus de tancament, calculem els rendiments logarítmics diaris i estímem la volatilitat anualitzada multiplicant la desviació estàndard dels rendiments logarítmics diaris per $\sqrt{252}$, assumint 252 dies de negociació a l'any.

```
In [9]: df_return = np.log(df_price/df_price.shift(1)).dropna()

daily_sigma = df_return.std().item()
sigma = daily_sigma * np.sqrt(252)

print(f"Volatilitat anual = {sigma:.5f}")
```

Volatilitat anual = 0.15451

Configuració del model

A partir de les dades anteriors, es defineixen els paràmetres del model. Considerarem com a preu inicial, $S(0)$, l'últim preu de tancament disponible.

```
In [10]: S0 = df_price.iloc[-1].item()
valuation_date = df_price.index[-1]

print(f"Es fixa  $S(0) = \{S0:.2f\}$  com a preu a en la data {valuation_date}.")
```

Es fixa $S(0) = 5763.61$ com a preu a en la data 2026-05-04 00:00:00.

El tipus d'interès lliure de risc, r , es fixa a partir de l'Euríbor a un any. El venciment de l'opció es pren igual a un any ($T = 1$) i el preu d'exercici es fixa *at-the-money*, és a dir, $K = S(0)$. Considerem un monitoratge mensual ($n = 12$) per a l'opció asiàtica amb monitoratge discret.

```
In [11]: S0 = df_price.iloc[-1].item()

r = 0.02747
K = S0
T = 1

n = 12
```

A continuació és mostra una taula resum amb el valor de tots els paràmetres del model i del contracte i una breu descripció:

```
In [12]: df_parameters = pd.DataFrame({
    "Paràmetre": [
        r"$S(0)$",
        r"$K$",
        r"$T$",
        r"$r$",
        r"$\sigma$",
        r"$n$"
    ]
})
```

```

],
"Descripció": [
    "Preu inicial de l'actiu subjacent",
    "Preu d'exercici",
    "Venciment",
    "Tipus d'interès lliure de risc",
    "Volatilitat anual estimada",
    "Nombre de dates de monitoratge de l'opció asiàtica discreta"
],
"Valor": [f"${S0:.2f}", f"${K:.2f}", f"${T} any", f"${r:.5f}", f"${sigma:.5f}", f"${n}"]
])

df_parameters.to_latex("tables/parameters.tex", index=False)
df_parameters

```

Out[12]:

	Paràmetre	Descripció	Valor
0	$S(0)$	Preu inicial de l'actiu subjacent	5763.61
1	K	Preu d'exercici	5763.61
2	T	Venciment	1 any
3	r	Tipus d'interès lliure de risc	0.02747
4	σ	Volatilitat anual estimada	0.15451
5	n	Nombre de dates de monitoratge de l'opció asià...	12

Finalment, pel cas base, es defineix N_{base} com el nombre de trajectòries simulades i n_{base} com el paràmetre de discretització per l'opció asiàtica amb monitoratge continu.

In [13]:

```

N_base = 10000
n_base = 252

df_parameters_sim = pd.DataFrame({
    "Paràmetre": [
        r"$N_{base}$",
        r"$n_{base}$"
    ],
    "Descripció": [
        "Nombre base de trajectòries simulades",
        "Nombre de punts de la graella per aproximar el monitoratge continu"
    ],
    "Valor": [N_base, n_base]
})

df_parameters_sim.to_latex("tables/parameters_sim.tex", index=False)
df_parameters_sim

```

Out[13]:

	Paràmetre	Descripció	Valor
0	N_{base}	Nombre base de trajectòries simulades	10000
1	n_{base}	Nombre de punts de la graella per aproximar el...	252

Per a l'estudi de la convergència, definim dos conjunts de valors de N : un de més reduït que farem servir per a les taules resum per facilitar la lectura dels resultats (`N_values`), i un més dens utilitzat en les representacions gràfiques (`N_values_smooth`). En el cas de `N_values`, incorporarem posteriorment el valor $N_{base} = 10000$ per tal de no repetir el càlcul. A més, notem que `N_values_smooth` té un rang més reduït, fins a 100 000 simulacions, per reduir el temps de càlcul. A més, ens limitarem a valors parells de N per tal de tenir exactament el mateix nombre de camins simulats en el cas antitètic.

In [14]:

```

N_values = [1000, 5000, 50000, 100000, 250000, 500000]

N_values_smooth = np.unique(np.linspace(1000, 100000, 50, dtype=int))
N_values_smooth = N_values_smooth[N_values_smooth % 2 == 0]

```

De forma anàloga definim `n_values` i `n_values_smooth` per a l'anàlisi de convergència respecte n . En aquest cas, per evitar repetir càlculs, incorporarem posteriorment els resultats per $n = 12$ (corresponent al cas base per a l'opció call asiàtica amb monitoratge discret) i $n_{base} = 252$ (corresponent al cas base per a l'opció call asiàtica amb

monitoratge continu). També es podria considerar afegir el cas $n = 1$ (corresponent al cas base per a l'opció call europea) però aquest fet no altera notablement el temps de càlcul.

```
In [15]: n_values = [1, 25, 50, 100, 500]
n_values_smooth = np.unique(np.linspace(5, 500, 30, dtype=int))
```

Funcions auxiliars

En aquesta secció es defineixen algunes funcions auxiliars que s'utilitzaran al llarg del treball per facilitar la implementació del mètode de Monte Carlo i l'anàlisi dels resultats.

La funció `confidence_interval` rep un vector de mostres Y i calcula l'error estàndard i un interval de confiança aproximat amb nivell $1 - \alpha$, basat en l'aproximació normal.

```
In [16]: def confidence_interval(Y, alpha=0.05):
    N = len(Y)
    if N < 2:
        raise ValueError("Calen almenys dues mostres per calcular l'error estàndard.")

    mean_Y = Y.mean()

    sample_var = (1/(N - 1)) * np.sum((Y-mean_Y)**2)
    standard_error = np.sqrt(sample_var / N)

    z = norm.ppf(1 - alpha/2)
    lower = mean_Y - z * standard_error
    upper = mean_Y + z * standard_error

    return lower, upper, standard_error
```

La funció `convergence_study` proporciona un `DataFrame` amb els resultats numèrics de l'estudi de convergència per a una funció de valoració donada.

```
In [17]: def convergence_study(pricing_function, N_values, *args, benchmark=None):
    results = []

    for N in N_values:
        price_mc, Y = pricing_function(*args, N)
        lower, upper, standard_error = confidence_interval(Y)

        experiment = ({
            "N": N,
            "Preu MC": price_mc,
            "SE": standard_error,
            "IC inferior": lower,
            "IC superior": upper,
        })

        if benchmark is not None:
            experiment["BS dins IC"] = ("Sí" if lower <= benchmark <= upper else "No")

        results.append(experiment)

    return pd.DataFrame(results)
```

Aplicació a una opció call europea

Definim la funció `mc_european_call` que calcula l'estimació de Monte Carlo per a una opció call europea seguint l'algoritme 5.20 en la seva forma vectorial.

```
In [18]: def mc_european_call(S0, sigma, r, T, K, N):
    Z = np.random.normal(0, 1, N)
    S_T = S0 * np.exp((r - sigma**2/2) * T + sigma * np.sqrt(T) * Z)
    X = np.maximum(S_T - K, 0)
    Y = np.exp(-r * T) * X
    return Y.mean(), Y
```

Apliquem aquesta funció al cas base i imprimim els resultats.

```
In [19]: np.random.seed(seed)

price_mc_eur, Y_eur = mc_european_call(S0, sigma, r, T, K, N_base)
lower_eur, upper_eur, se_eur = confidence_interval(Y_eur)

df_base_eur = pd.DataFrame({
    "Magnitud": ["Preu estimat", "Interval de confiança (95%)", "Error estàndard"],
    "Resultat": [f"{price_mc_eur:.2f}", f"[{lower_eur:.2f}, {upper_eur:.2f}]", f"{se_eur:.4f}"]
})

df_base_eur.to_latex("tables/base_eur.tex", index=False, escape=False)
df_base_eur
```

```
Out[19]:
```

	Magnitud	Resultat
0	Preu estimat	434.71
1	Interval de confiança (95%)	[422.59, 446.84]
2	Error estàndard	6.1877

Comprovació de coherència amb la fórmula de Black-Scholes

Definim la funció `black_scholes_european_call`, que implementa la fórmula de Black-Scholes (corol·lari 5.17) per a una opció call europea en el cas $t = 0$.

```
In [20]: def black_scholes_european_call(S0, K, r, sigma, T):
    d1 = (np.log(S0/K) + (r + sigma**2/2) * T)/(sigma * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
    price = S0 * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
    return price
```

Comprovem que la implementació del mètode de Monte Carlo es coherent comparant els resultats del cas base amb els resultats fent servir Black-Scholes.

```
In [21]: price_bs = black_scholes_european_call(S0, K, r, sigma, T)
dif_eur = price_mc_eur - price_bs
bs_in_IC = "Sí" if lower_eur <= price_bs <= upper_eur else "No"

results = {
    "Preu segons Monte Carlo": f"{price_mc_eur:.2f}",
    "Preu segons Black-Scholes": f"{price_bs:.2f}",
    "Diferència (MC - BS)": f"{dif_eur:.4f}",
    "BS dins IC": bs_in_IC
}

df_comp_bs = pd.DataFrame(list(results.items()), columns=["Magnitud", "Resultat"])

df_comp_bs.to_latex("tables/comp_bs.tex", index=False)
df_comp_bs
```

```
Out[21]:
```

	Magnitud	Resultat
0	Preu segons Monte Carlo	434.71
1	Preu segons Black-Scholes	433.69
2	Diferència (MC - BS)	1.0205
3	BS dins IC	Sí

Anàlisi de convergència

Repetim l'experiment per a diferents valors de N (nombre de simulacions) per obtenir diferents estimacions del preu, error estàndard (SE) i interval de confiança (IC). A més, comparem aquests resultats amb el resultat segons la fórmula de Black-Scholes.

```

In [22]: np.random.seed(seed)

# Obtenim els resultats pels valors N_values
df_results_eur = convergence_study(
    mc_european_call,
    N_values,
    S0, sigma, r, T, K,
    benchmark = price_bs
)

# Afegim el cas base a la llista de resultats
cas_base = {
    "N": N_base,
    "Preu MC": price_mc_eur,
    "SE": se_eur,
    "IC inferior": lower_eur,
    "IC superior": upper_eur,
    "Diferència amb BS": dif_eur,
    "BS dins IC": bs_in_IC
}
df_results_eur.loc[len(df_results_eur)] = cas_base
df_results_eur = df_results_eur.sort_values(by="N")

# Guardem i imprimim els resultats
df_results_eur.to_latex("tables/eur_results.tex", float_format="%.4f", index=False)
df_results_eur.round(4)

```

```

Out[22]:

```

	N	Preu MC	SE	IC inferior	IC superior	BS dins IC
0	1000	451.9671	20.1328	412.5074	491.4267	Sí
1	5000	433.0128	8.6607	416.0380	449.9876	Sí
6	10000	434.7138	6.1877	422.5862	446.8414	Sí
2	50000	436.3080	2.7880	430.8436	441.7724	Sí
3	100000	433.9017	1.9602	430.0598	437.7436	Sí
4	250000	434.0852	1.2393	431.6562	436.5142	Sí
5	500000	435.1093	0.8798	433.3850	436.8337	Sí

Si considerem una selecció més fina de valors per a N (`N_values_smooth`), podem representar gràficament l'evolució del preu i de l'error estàndard.

```

In [23]: np.random.seed(seed)

df_smooth_eur = convergence_study(
    mc_european_call,
    N_values_smooth,
    S0, sigma, r, T, K,
    benchmark = price_bs
)

```

```

In [24]: plt.figure()
plt.plot(
    df_smooth_eur["N"],
    df_smooth_eur["Preu MC"],
    marker=".",
    label = "Preu Monte Carlo",
    color="black"
)
plt.axhline(
    price_bs,
    linestyle="--",
    label="Preu Black-Scholes",
    color="black"
)
plt.fill_between(
    df_smooth_eur["N"],
    df_smooth_eur["IC inferior"],
    df_smooth_eur["IC superior"],
    alpha=0.1,
)

```

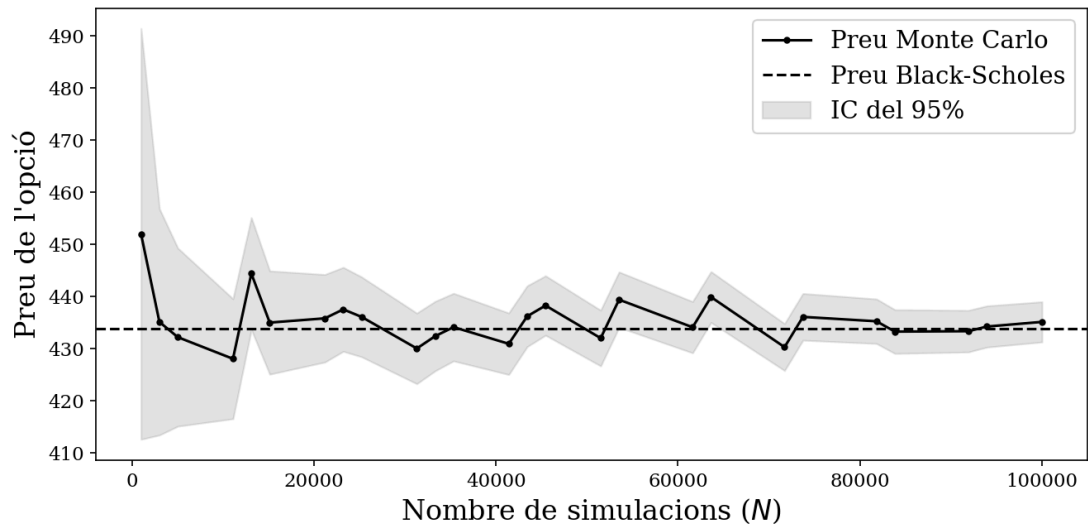
```

    label="IC del 95%",
    color="black"
)

plt.xlabel(r"Nombre de simulacions ($N$)")
plt.ylabel("Preu de l'opció")

plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.savefig("figures/price_european.pdf", bbox_inches="tight")
plt.show()

```



La figura següent mostra el comportament de l'error estàndard en comparació amb una corba proporcional a $1/\sqrt{N}$ (ordre teòric de l'error), escalada perquè ambdues corbes comencin en el mateix punt.

```

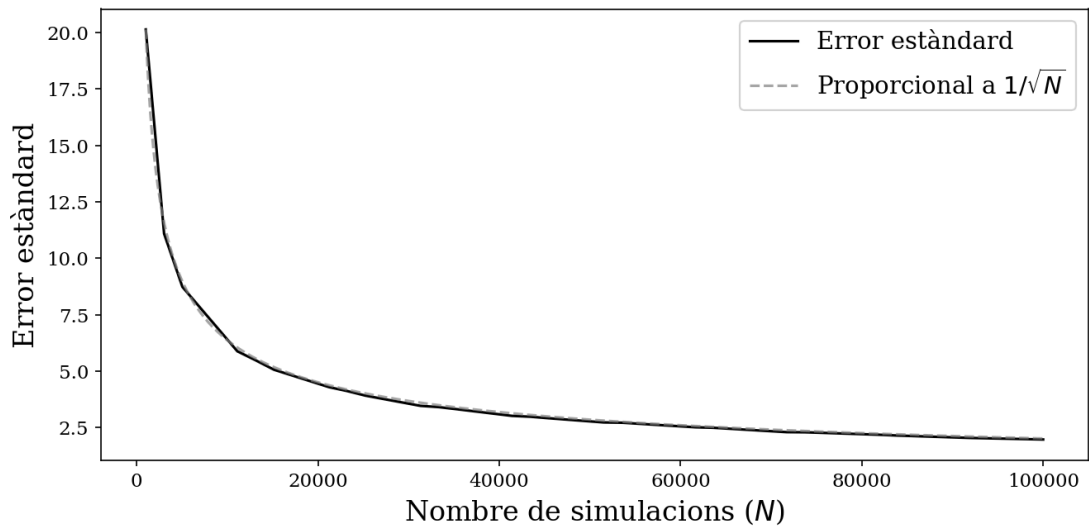
In [25]: # Obtenim els valors per a la corba teòrica
C = df_smooth_eur["SE"].iloc[0] * np.sqrt(df_smooth_eur["N"].iloc[0])
se_teorica = lambda N, C: C / np.sqrt(N)
N_plot = np.linspace(1000, 100000, 1000)

# Construïm la figura
plt.figure()
plt.plot(
    df_smooth_eur["N"],
    df_smooth_eur["SE"],
    color="black",
    label="Error estàndard",
    alpha=1
)
plt.plot(
    N_plot,
    se_teorica(N_plot, C),
    linestyle="--",
    label = r"Proporcional a  $1/\sqrt{N}$ ",
    color="gray",
    alpha=0.7
)

plt.xlabel(r"Nombre de simulacions ($N$)")
plt.ylabel("Error estàndard")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig("figures/se_european.pdf", bbox_inches="tight")
plt.show()

```



Aplicació a una opció call asiàtica amb monitoratge discret

Definim una funció `simulate_price_path` per a simular la trajectòria del preu de l'Euro Stoxx 50 seguint el model del moviment brownià geomètric segons l'algoritme 5.7. Per simplicitat, assumim punts de monitoratge equiespaiats.

```
In [26]: def simulate_price_path(S0, sigma, mu, T, n):
    a = mu - sigma**2/2
    Z = np.random.normal(0, 1, n)
    delta_t = T/n

    price_path = [S0]

    for z in Z:
        S_t = price_path[-1] * np.exp(a * delta_t + sigma * np.sqrt(delta_t) * z)
        price_path.append(S_t)

    return np.array(price_path)
```

Per visualitzar la simulació del procés, generem 50 trajectòries del preu de l'actiu i les representem gràficament.

```
In [27]: np.random.seed(seed)

n_paths = 50

price_vec = []

for i in range(n_paths):
    price_path = simulate_price_path(S0, sigma, r, T, n)
    price_vec.append(price_path)

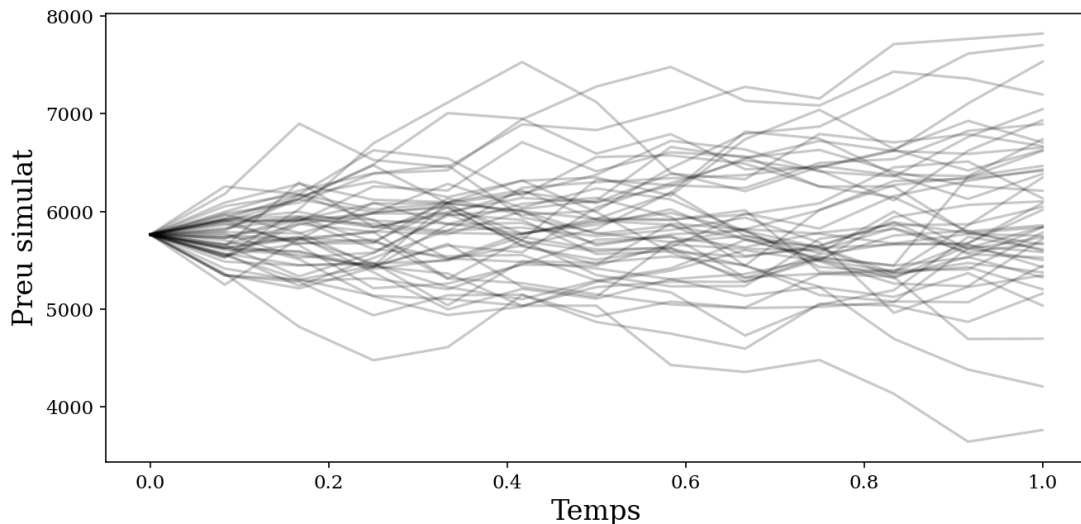
df_price_path = pd.DataFrame(price_vec).T
```

```
In [28]: time_grid = np.linspace(0, T, n+1)

plt.figure()
plt.plot(time_grid, df_price_path, alpha = 0.2, color="black")

plt.xlabel("Temps")
plt.ylabel("Preu simulat")

plt.tight_layout()
plt.savefig("figures/euro_stoxx_50_price_path.pdf", bbox_inches="tight")
plt.show()
```



Definim una funció `mc_asian_call` que calcula el preu d'una opció asiàtica i els seus pagaments descomptats a partir de les trajectòries simulades seguint l'algorisme 5.23. Aquesta funció servirà per als dos casos: monitoratge discret i monitoratge continu.

```
In [29]: def mc_asian_call(S0, sigma, r, T, K, n, N):
X=[]

for i in range(N):
    price_path = simulate_price_path(S0, sigma, r, T, n)
    S_mean = price_path[1:].mean() # S(0) no s'inclou a la mitjana
    X.append(max(S_mean-K, 0))

X = np.array(X)
Y = np.exp(-r * T) * X

return Y.mean(), Y
```

Per validar el funcionament de la funció anterior, comparem amb el cas $n = 1$, amb el qual hauríem d'obtenir un resultat similar al de l'opció europea.

```
In [30]: np.random.seed(seed)

price_mc_asian_1, _ = mc_asian_call(S0, sigma, r, T, K, 1, N_base)

results = {
    r"Preu opció asiàtica amb $n=1$ (MC)": f"{price_mc_asian_1:.2f}",
    "Preu opció europea (MC)": f"{price_mc_eur:.2f}",
    "Preu opció europea (BS)": f"{price_bs:.2f}",
    "Preu asiàtica dins IC europea": ("Sí" if lower_eur <= price_mc_asian_1 <= upper_eur else "No")
}

df_asian_1 = pd.DataFrame(list(results.items()), columns=["Magnitud", "Resultat"])

df_asian_1.to_latex("tables/asian_1.tex", index=False)
df_asian_1
```

```
Out[30]:
```

	Magnitud	Resultat
0	Preu opció asiàtica amb $n = 1$ (MC)	434.71
1	Preu opció europea (MC)	434.71
2	Preu opció europea (BS)	433.69
3	Preu asiàtica dins IC europea	Sí

A continuació es mostren els resultats per a l'opció asiàtica amb monitoratge discret mensual fent servir els paràmetres del cas base.

```
In [31]: np.random.seed(seed)

price_mc_asian, Y_asian = mc_asian_call(S0, sigma, r, T, K, n, N_base)
lower_asian, upper_asian, se_asian = confidence_interval(Y_asian)

results = {
    "Preu estimat": f"{price_mc_asian:.2f}",
    "Interval de confiança (95\%)": f"[{lower_asian:.2f}, {upper_asian:.2f}]",
    "Error estàndard": f"{se_asian:.4f}",
}

df_base_asian = pd.DataFrame(list(results.items()), columns=["Magnitud", "Resultat"])

df_base_asian.to_latex("tables/base_asian.tex", index=False)
df_base_asian
```

```
Out[31]:
```

	Magnitud	Resultat
0	Preu estimat	263.33
1	Interval de confiança (95\%)	[256.14, 270.52]
2	Error estàndard	3.6691

Anàlisi de convergència

Seguim el mateix procediment que en el cas de l'opció europea, repetint l'experiment per a diferents valors de N i mostrant els resultats.

```
In [32]: np.random.seed(seed)

# Obtenim els resultats pels valors N_values
df_results_asian = convergence_study(
    mc_asian_call,
    N_values,
    S0, sigma, r, T, K, n
)

# Afegim el cas base a la llista de resultats
cas_base = {
    "N": N_base,
    "Preu MC": price_mc_asian,
    "SE": se_asian,
    "IC inferior": lower_asian,
    "IC superior": upper_asian,
}
df_results_asian.loc[len(df_results_asian)] = cas_base
df_results_asian = df_results_asian.sort_values(by="N")

# Guardem i imprimim els resultats
df_results_asian.to_latex("tables/asian_results.tex", float_format="%.4f", index=False)
df_results_asian.round(4)
```

```
Out[32]:
```

	N	Preu MC	SE	IC inferior	IC superior
0	1000	256.6357	11.2521	234.5820	278.6894
1	5000	263.3968	5.2208	253.1641	273.6295
6	10000	263.3267	3.6691	256.1353	270.5180
2	50000	260.3491	1.6290	257.1563	263.5418
3	100000	258.9836	1.1583	256.7133	261.2538
4	250000	259.8822	0.7327	258.4462	261.3183
5	500000	258.6123	0.5169	257.5992	259.6254

La figura següent mostra el preu de l'opció call asiàtica amb monitoratge discret en funció de N .

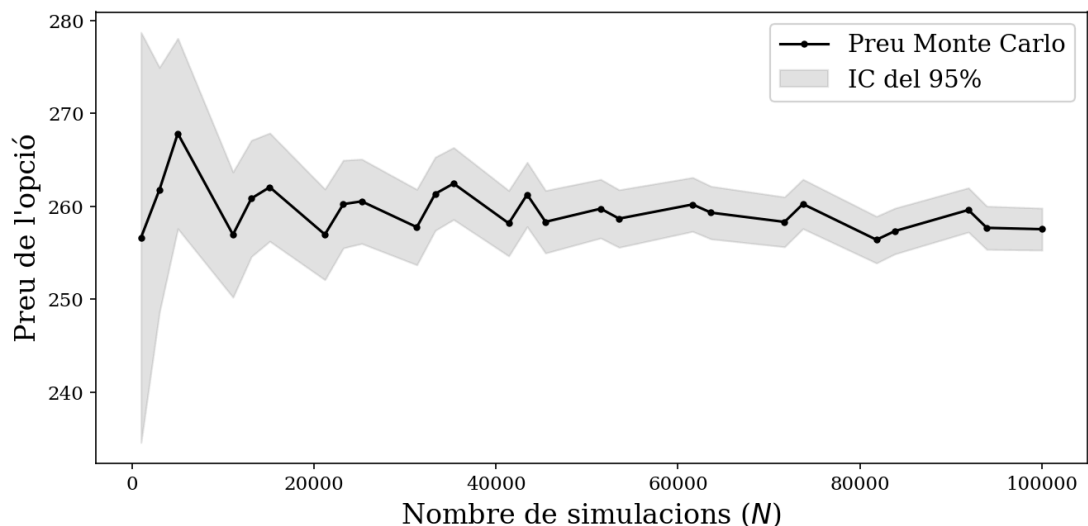
```
In [33]: np.random.seed(seed)
```

```
df_smooth_asian = convergence_study(
    mc_asian_call,
    N_values_smooth,
    S0, sigma, r, T, K, n
)
```

```
In [34]: plt.figure()
plt.plot(
    df_smooth_asian["N"],
    df_smooth_asian["Preu MC"],
    label = "Preu Monte Carlo",
    marker=".",
    color="black"
)
plt.fill_between(
    df_smooth_asian["N"],
    df_smooth_asian["IC inferior"],
    df_smooth_asian["IC superior"],
    alpha=0.1,
    label="IC del 95%",
    color="black"
)

plt.xlabel(r"Nombre de simulacions ($N$)")
plt.ylabel("Preu de l'opció")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig("figures/price_asian.pdf", bbox_inches="tight")
plt.show()
```



La següent figura mostra el comportament de l'error estàndard en funció del nombre de simulacions per l'opció asiàtica amb monitoratge discret.

```
In [35]: # Obtenim els valors per a la corba teòrica
C = df_smooth_asian["SE"].iloc[0] * np.sqrt(df_smooth_asian["N"].iloc[0])

# Construïm la figura
plt.figure()
plt.plot(
    df_smooth_asian["N"],
    df_smooth_asian["SE"],
    color="black",
    label="Error estàndard",
    alpha=1
)
plt.plot(
    N_plot,
    se_teorica(N_plot, C),
    linestyle="--",
    label = r"Proporcional a  $1/\sqrt{N}$ ",
)
```

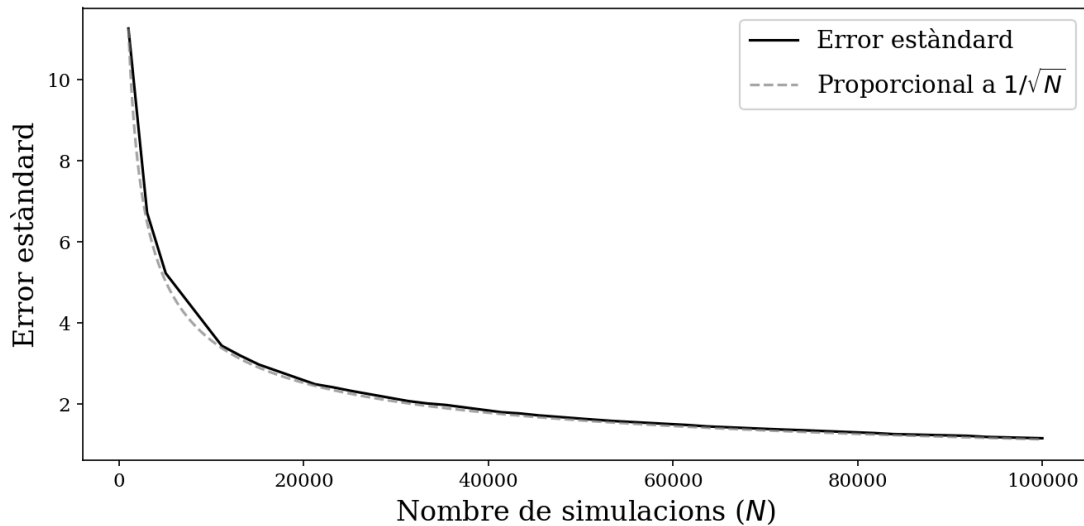
```

    color="gray",
    alpha=0.7
)

plt.xlabel(r"Nombre de simulacions ($N$)")
plt.ylabel("Error estàndard")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig("figures/se_asian.pdf", bbox_inches="tight")
plt.show()

```



Opció call asiàtica amb monitoratge continu

Per dur a terme la valoració de l'opció call asiàtica amb monitoratge continu, podem fer servir la mateixa funció de valoració que en el cas discret, però ara interpretem n com un paràmetre de discretització. Cal recordar que en aquest cas l'error estàndard només incorpora l'error de l'estimació de Monte Carlo, però no l'error de discretització derivat de l'aproximació de la integral.

A continuació es mostren els resultats per a l'opció asiàtica amb monitoratge continu fent servir els paràmetres del cas base.

```

In [36]: np.random.seed(seed)

price_mc_cont, Y_cont = mc_asian_call(S0, sigma, r, T, K, n_base, N_base)
lower_cont, upper_cont, se_cont = confidence_interval(Y_cont)

results = {
    "Preu estimat": f"{price_mc_cont:.2f}",
    "Interval de confiança (95\%)": f"[{lower_cont:.2f}, {upper_cont:.2f}]",
    "Error estàndard": f"{se_cont:.4f}",
}

df_base_cont = pd.DataFrame(list(results.items()), columns=["Magnitud", "Resultat"])

df_base_cont.to_latex("tables/base_cont.tex", index=False)
df_base_cont

```

```

Out[36]:

```

	Magnitud	Resultat
0	Preu estimat	254.94
1	Interval de confiança (95%)	[247.95, 261.92]
2	Error estàndard	3.5643

Anàlisi de convergència per als diferents valors de n

Repetim l'experiment per a diferents valors de n , mantenint la resta de paràmetres constants, per a estudiar la convergència respecte d'aquest paràmetre.

```
In [37]: np.random.seed(seed)

# Obtenim els resultats per a n_values
results=[]

for n_cont in n_values:
    price_mc, Y = mc_asian_call(S0, sigma, r, T, K, n_cont, N_base)
    lower, upper, standard_error = confidence_interval(Y)

    experiment = ({
        "n": n_cont,
        "Preu MC": price_mc,
        "SE (MC)": standard_error,
        "IC inferior (MC)": lower,
        "IC superior (MC)": upper,
    })

    results.append(experiment)

# Afegim el cas base (n=n_base) a la llista de resultats
cas_base = {
    "n": n_base,
    "Preu MC": price_mc_cont,
    "SE (MC)": se_cont,
    "IC inferior (MC)": lower_cont,
    "IC superior (MC)": upper_cont,
}
results.append(cas_base)

# Afegim el cas n=12 (cas discret) a la llista de resultats
cas_disc = {
    "n": n,
    "Preu MC": price_mc_asian,
    "SE (MC)": se_asian,
    "IC inferior (MC)": lower_asian,
    "IC superior (MC)": upper_asian,
}
results.append(cas_disc)

df_results_cont = pd.DataFrame(results).sort_values(by="n")

# Guardem i imprimim els resultats
df_results_cont.to_latex("tables/cont_results.tex", float_format="%.4f", index=False)
df_results_cont.round(4)
```

```
Out[37]:
```

	n	Preu MC	SE (MC)	IC inferior (MC)	IC superior (MC)
0	1	434.7138	6.1877	422.5862	446.8414
6	12	263.3267	3.6691	256.1353	270.5180
1	25	252.6523	3.5265	245.7404	259.5642
2	50	252.3615	3.5642	245.3758	259.3473
3	100	244.5045	3.4695	237.7044	251.3046
5	252	254.9360	3.5643	247.9500	261.9220
4	500	250.7546	3.4812	243.9316	257.5776

Considerant una graella de valors de n més fina, podem observar el resultat gràficament. En aquest pas considerarem un valor fixat de N menor per tal de reduir el temps d'execució. En particular, fixem $N = N_{base}/2$. La següent figura mostra el preu d'una opció call asiàtica amb monitoratge continu en funció de n .

```
In [38]: N_cont = N_base//2
```

```
In [39]: np.random.seed(seed)

results = []
```

```

for n_cont in n_values_smooth:
    price_mc, Y = mc_asian_call(S0, sigma, r, T, K, n_cont, N_cont)
    lower, upper, _ = confidence_interval(Y)

    experiment = ({
        "n": n_cont,
        "Preu MC": price_mc,
        "IC inferior": lower,
        "IC superior": upper
    })

    results.append(experiment)

df_smooth_cont = pd.DataFrame(results)

```

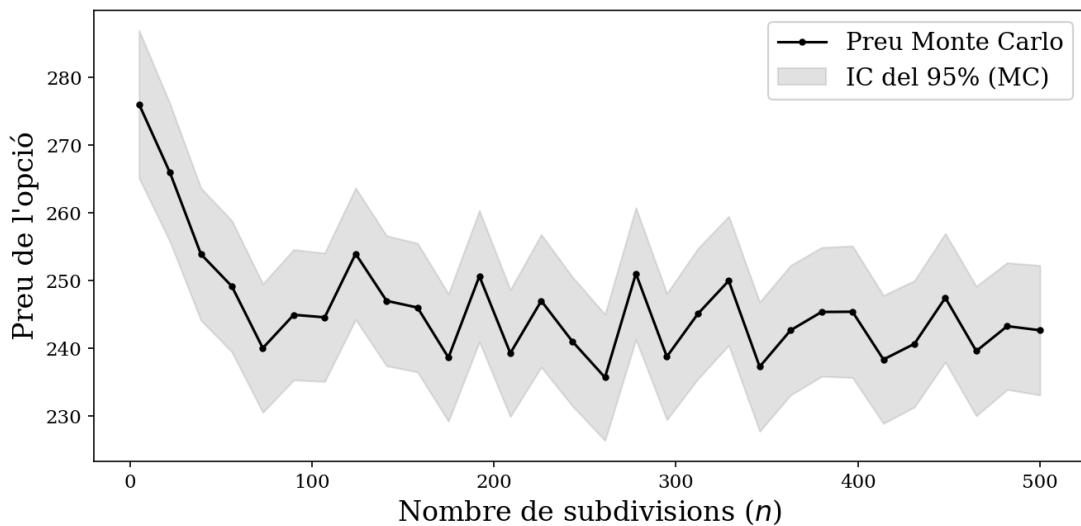
```

In [40]: plt.figure()
plt.plot(
    df_smooth_cont["n"],
    df_smooth_cont["Preu MC"],
    label = "Preu Monte Carlo",
    marker=".",
    color="black"
)
plt.fill_between(
    df_smooth_cont["n"],
    df_smooth_cont["IC inferior"],
    df_smooth_cont["IC superior"],
    alpha=0.1,
    label="IC del 95% (MC)",
    color="black"
)

plt.xlabel(r"Nombre de subdivisions ($n$)")
plt.ylabel("Preu de l'opció")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig("figures/price_cont.pdf", bbox_inches="tight")
plt.show()

```



Reducció de la variància mitjançant variables antitètiques

Per tal d'implementar el mètode de variables antitètiques per reduir la variància de l'estimador de Monte Carlo, farem servir $N_{base}/2$ parelles en el cas antitètic, de manera que el nombre total de camins simulats serà N_{base} i, per tant, podrem comparar amb l'estimador estàndard.

```

In [41]: N_anti = N_base//2

```

Opció call europea

Definim una nova funció, `mc_european_call_anti` per a l'aplicació del mètode antitètic en el cas de l'opció europea. Aquesta funció segueix la mateixa estructura que `mc_european_call` però per cada mostra aleatòria Z du a terme el procediment dues vegades (una amb Z i una amb $-Z$). Després considera la mitjana entre els dos pagaments descomptats resultants, tal com s'especifica en l'algoritme 5.28.

```
In [42]: def mc_european_call_anti(S0, sigma, r, T, K, N_pairs):
        Z = np.random.normal(0, 1, N_pairs)

        S_T1 = S0 * np.exp((r - sigma**2/2) * T + sigma * np.sqrt(T) * Z)
        S_T2 = S0 * np.exp((r - sigma**2/2) * T + sigma * np.sqrt(T) * -Z)

        X1 = np.maximum(S_T1 - K, 0)
        X2 = np.maximum(S_T2 - K, 0)
        X_anti = (X1 + X2)/2

        Y_anti = np.exp(-r * T) * X_anti
        return Y_anti.mean(), Y_anti
```

A continuació es mostren els resultats per al cas base amb l'estimador antitètic, comparats amb els resultats fent servir l'estimador estàndard:

```
In [43]: np.random.seed(seed)

price_mc_eur_anti, Y_eur_anti = mc_european_call_anti(S0, sigma, r, T, K, N_anti)
lower_eur_anti, upper_eur_anti, se_eur_anti = confidence_interval(Y_eur_anti)

In [44]: df_comparison_eur = pd.DataFrame({
        "Mètode": ["MC estàndard", "MC antitètic"],
        "Preu": [price_mc_eur, price_mc_eur_anti],
        "SE": [se_eur, se_eur_anti],
        "IC inferior": [lower_eur, lower_eur_anti],
        "IC superior": [upper_eur, upper_eur_anti],
        "BS en IC": [bs_in_IC, "Sí" if lower_eur_anti <= price_bs <= upper_eur_anti else "No"]
    })

df_comparison_eur.index = df_comparison_eur["Mètode"]
df_comparison_eur.drop(columns=["Mètode"], inplace=True)

df_comparison_eur.to_latex("tables/eur_anti_comparison.tex", float_format="%.4f")
df_comparison_eur.round(4)
```

Out[44]:

	Preu	SE	IC inferior	IC superior	BS en IC
--	------	----	-------------	-------------	----------

Mètode					
MC estàndard	434.7138	6.1877	422.5862	446.8414	Sí
MC antitètic	430.8600	4.4145	422.2078	439.5123	Sí

Comparem també l'error estàndard en ambdós casos en funció del valor de N per veure que, tot i mantenir el mateix ordre de convergència, l'estimador antitètic presenta un error estàndard menor. La següent figura mostra l'error estàndard en funció de N per l'opció call europea.

```
In [45]: np.random.seed(seed)

se_anti = []

for N in df_smooth_eur["N"]:
    _, Y_anti = mc_european_call_anti(S0, sigma, r, T, K, N//2)
    _, se = confidence_interval(Y_anti)
    se_anti.append(se)

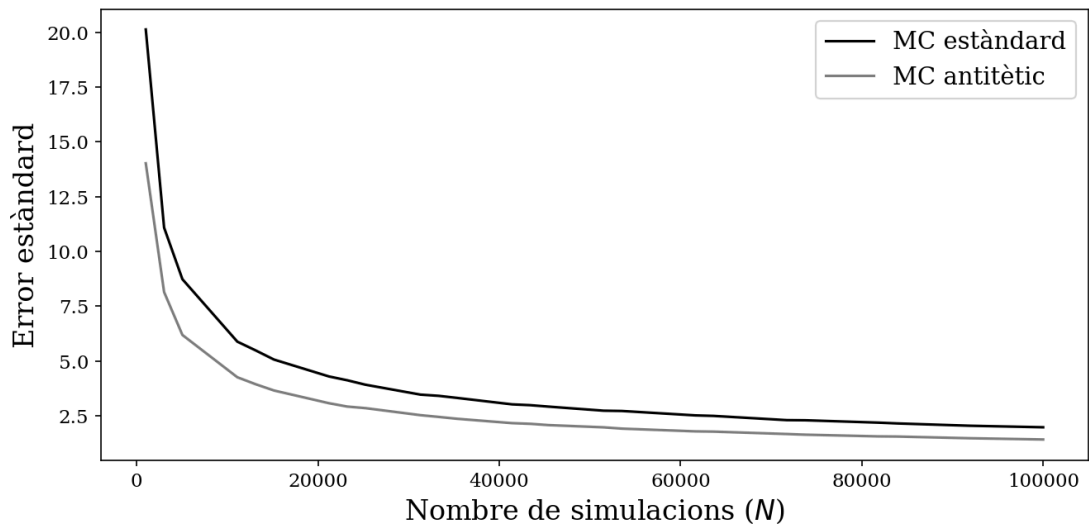
df_smooth_eur["SE antitètic"] = se_anti
df_smooth_eur["Reducció SE (%)"] = (1 - df_smooth_eur["SE antitètic"] / df_smooth_eur["SE"])*100
```

```
In [46]: plt.figure()
```

```
plt.plot(df_smooth_eur["N"], df_smooth_eur["SE"], label="MC estàndard", color="black")
plt.plot(df_smooth_eur["N"], df_smooth_eur["SE antitètic"], label = "MC antitètic", color="gray")

plt.xlabel(r"Nombre de simulacions ($N$)")
plt.ylabel("Error estàndard")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig("figures/se_european_anti.pdf", bbox_inches="tight")
plt.show()
```



Opció call asiàtica amb monitoratge discret

De forma similar al cas europeu, en lloc de construir un únic camí per cada mostra aleatòria, en construïm dos. Per tant, hem de modificar la funció `simulate_price_path` per a que retorni dos camins en lloc d'un.

```
In [47]: def simulate_price_path_anti(S0, sigma, mu, T, n):
a = mu - sigma**2/2
Z = np.random.normal(0, 1, n)
delta_t = T/n

price_path1=[S0]
price_path2=[S0]

for z in Z:
    S_t1 = price_path1[-1] * np.exp(a * delta_t + sigma * np.sqrt(delta_t) * z)
    price_path1.append(S_t1)

    S_t2 = price_path2[-1] * np.exp(a * delta_t + sigma * np.sqrt(delta_t) * -z)
    price_path2.append(S_t2)

return np.array(price_path1), np.array(price_path2)
```

Definim la funció `mc_asian_call_anti` per a que segueixi la mateixa estructura que `mc_asian_call` però segueixi els mateixos passos amb cadascun dels dos camins rebuts de `simulate_price_path_anti`, tal com especifica l'algoritme 5.28.

```
In [48]: def mc_asian_call_anti(S0, sigma, r, T, K, n, N_pairs):
X1=[]
X2=[]

for i in range(N_pairs):
    price_path1, price_path2 = simulate_price_path_anti(S0, sigma, r, T, n)

    S_mean1 = price_path1[1:].mean()
    X1.append(max(S_mean1-K, 0))

    S_mean2 = price_path2[1:].mean()
    X2.append(max(S_mean2-K, 0))
```

```

X = (np.array(X1) + np.array(X2))/2
Y = np.exp(-r * T) * X

return Y.mean(), Y

```

Apliquem el procediment al cas base i ho comparem amb els resultats obtinguts amb l'estimador estàndard.

```

In [49]: np.random.seed(seed)

price_mc_asian_anti, Y_asian_anti = mc_asian_call_anti(S0, sigma, r, T, K, n, N_anti)
lower_asian_anti, upper_asian_anti, se_asian_anti = confidence_interval(Y_asian_anti)

```

```

In [50]: df_comparison_asian = pd.DataFrame({
    "Mètode": ["MC estàndard", "MC antitètic"],
    "Preu": [price_mc_asian, price_mc_asian_anti],
    "SE": [se_asian, se_asian_anti],
    "IC inferior": [lower_asian, lower_asian_anti],
    "IC superior": [upper_asian, upper_asian_anti],
})

df_comparison_asian.index = df_comparison_asian["Mètode"]
df_comparison_asian.drop(columns=["Mètode"], inplace=True)

df_comparison_asian.to_latex("tables/asian_anti_comparison.tex", float_format="%0.4f")
df_comparison_asian.round(4)

```

```

Out[50]:

```

	Preu	SE	IC inferior	IC superior
Mètode				
MC estàndard	263.3267	3.6691	256.1353	270.5180
MC antitètic	259.5186	2.5933	254.4357	264.6014

La següent figura mostra l'error estàndard en funció de N per l'opció asiàtica amb monitoratge discret.

```

In [51]: np.random.seed(seed)

se_anti = []

for N in df_smooth_asian["N"]:
    _, Y_anti = mc_asian_call_anti(S0, sigma, r, T, K, n, N//2)
    _, se = confidence_interval(Y_anti)
    se_anti.append(se)

df_smooth_asian["SE antitètic"] = se_anti
df_smooth_asian["Reducció SE (%)"] = (1 - df_smooth_asian["SE antitètic"] / df_smooth_asian["SE"])*100

```

```

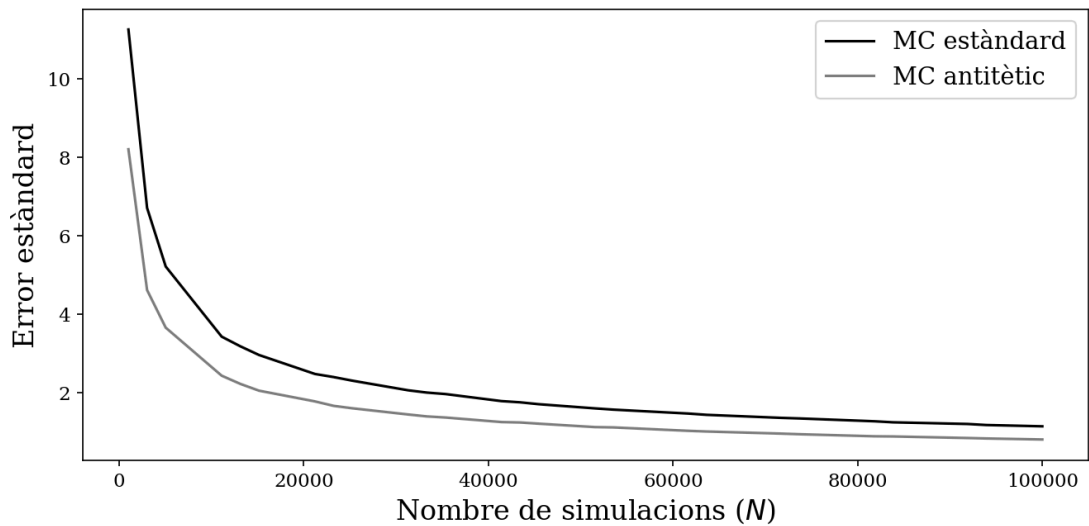
In [52]: plt.figure()

plt.plot(
    df_smooth_asian["N"],
    df_smooth_asian["SE"],
    label="MC estàndard",
    color="black"
)
plt.plot(df_smooth_asian["N"], df_smooth_asian["SE antitètic"], label = "MC antitètic", color="gray")

plt.xlabel(r"Nombre de simulacions ($N$)")
plt.ylabel("Error estàndard")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig("figures/se_asian_anti.pdf", bbox_inches="tight")
plt.show()

```



A continuació comparem la reducció de l'error estàndard en opció europea i l'opció asiàtica amb monitoratge discret.

```
In [53]: df_reduction_summary = pd.DataFrame({
    "Opció": ["Europea", "Asiàtica"],
    "SE estàndard": [se_eur, se_asian],
    "SE antitètic": [se_eur_anti, se_asian_anti],
    "Reducció cas base (%)": [
        (1 - se_eur_anti / se_eur) * 100,
        (1 - se_asian_anti / se_asian) * 100
    ],
    "Reducció mitjana (%)": [
        df_smooth_eur["Reducció SE (%)"].mean(),
        df_smooth_asian["Reducció SE (%)"].mean()
    ]
})

df_reduction_summary.to_latex(
    "tables/reduction_summary.tex",
    float_format="%.4f",
    escape=False,
    index=False
)

df_reduction_summary.round(4)
```

```
Out[53]:
```

	Opció	SE estàndard	SE antitètic	Reducció cas base (%)	Reducció mitjana (%)
0	Europea	6.1877	4.4145	28.6566	28.3870
1	Asiàtica	3.6691	2.5933	29.3194	29.5089