



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

DOBLE GRAU DE MATEMÀTIQUES I
ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESSES

Treball final de grau

PROCESSOS ESTOCÀSTICS EN
L'ANÀlisi DE DADES
ESPORTIVES

Autor: Guillermo Leopold Vicent

Director: Dr. Josep Vives Santa Eulalia

Realitzat a: Departament de Matemàtica Econòmica,
Financera i Actuarial

Directora: Dra. Maria Carmen Florit Selma

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2025

Abstract

This thesis presents a rigorous comparison between the Bachelier, Black-Scholes, and Stern models from both a mathematical and applied perspective, focusing on their usefulness for modeling the dynamics of random variables in finance and sports. Special emphasis is placed on the Stern model, which adapts Brownian motion with drift to describe the evolution of the point difference in a sporting match, and which proves particularly suitable for the quantitative analysis of sporting events such as basketball games.

The methodology is applied to a real case: a quarterfinal game in the ACB basketball league (Barça–Unicaja), using live betting odds and pregame market estimates. The Stern model allows for the calculation, at any given moment, of each team's probability of winning, the detection of possible market inefficiencies, and the identification of favorable betting opportunities, which can be exploited using mathematical criteria such as the Kelly criterion. The thesis also discusses the limitations of linear models with constant volatility and suggests possible extensions to better fit real-world data.

Overall, this thesis demonstrates the usefulness of stochastic models for the objective analysis of sporting events and the valuation of betting markets, thus building a bridge between financial theory and sports practice.

Resum

Aquest treball presenta una comparació rigorosa entre els models de Bachelier, Black-Scholes i Stern des d'una perspectiva matemàtica i aplicada, centrant-se en la seva utilitat per modelitzar la dinàmica de variables aleatòries en l'àmbit financer i esportiu. Es posa especial èmfasi en el model de Stern, que adapta el moviment brownià amb deriva per descriure l'evolució de la diferència de punts en un partit d'esport, i que es mostra especialment adequat per a l'anàlisi quantitativa d'esdeveniments esportius com els partits de bàsquet.

S'aplica la metodologia al cas real d'un partit de quarts de final de la lliga ACB (Barça–Unicaja), utilitzant dades de quotes d'apostes en directe i estimacions pre-partit dels mercats. El model de Stern permet calcular en tot moment la probabilitat de victòria de cada equip, detectar possibles ineficiències de mercat i identificar oportunitats d'aposta favorables, que poden ser explotades mitjançant criteris matemàtics com el de Kelly. El treball discuteix també les limitacions dels models lineals amb volatilitat constant i suggereix possibles extensions per millorar-ne l'ajust a la realitat.

En conjunt, el TFG posa de manifest la utilitat dels models estocàstics per a l'anàlisi objectiva d'esdeveniments esportius i la valoració de mercats d'apostes, tot oferint un pont entre la teoria financera i la pràctica esportiva.

Agraïments

Vull expressar el meu sincer agraïment als meus tutors, el Dr. Josep Vives Santa Eulàlia i la Dra. Maria Carmen Florit Selma, per la seva guia constant, els seus consells i el seu suport durant tot el desenvolupament d'aquest treball.

Evidentment, vull agrair als meus dos pares el seu suport incondicional. De manera especial, al meu pare, que va ser qui em va descobrir el Doble Grau i em va convèncer de cursar-lo en lloc del grau de Matemàtiques, que era el meu desig des de ben petit. Agradeixo profundament l'esforç que han fet tots dos i les decisions que van prendre durant la meua infància, encara que sovint no hi estigués d'acord. Un exemple d'això és quan, amb només cinc anys, em van apuntar com a activitat extraescolar al mètode Kumon de matemàtiques, que vaig concloure als setze. Gràcies a tota aquesta dedicació a les matemàtiques des de tan jove, sempre he tingut clar que volia orientar-me cap a aquest camí.

També vull agrair de tot cor a les meves dues àvies, al meu tiet i a la meua germana, que han estat un suport imprescindible no només durant la meua etapa universitària, sinó al llarg de tota la meua vida.

Per últim, voldria agrair als meus companys i amics Dani, Esteve, Òscar, Dylan, Ivan M., Ivan R., Álvaro L., Pau, Alicia, Guillem, Joan, Jorge, Estanis, Genís, Álvaro A. i Santi, per tots els moments i records compartits. Amb ells he viscut experiències inoblidables durant la meua etapa a la Universitat de Barcelona, algunes de les millors de la meua vida, i espero seguir compartint-ne moltes més en el futur. Sens dubte, han contribuït a fer que aquests anys hagin estat molt més agradables i plens.

Índex

1	Introducció. El model de Stern	1
2	Processos estocàstics	5
2.1	Definició de procés estocàstic	5
2.2	Trajèctoria d'un procés estocàstic	7
2.3	Llei d'un procés estocàstic	8
2.4	Teorema de Kolmogorov	9
2.5	Processos de Markov	10
3	El moviment Brownià	11
3.1	Definició de moviment Brownià	11
3.2	Propietats bàsiques	13
3.3	Convergència en distribució	14
3.4	Variacions del moviment Brownià	15
4	Martingales	18
4.1	Definició de martingala, submartingala i supermartingala	18
4.2	Propietats fonamentals	20
4.3	Teorema de caracterització de Lévy	22
4.4	Canvi de mesura i representació de martingales	22
5	Integració Estocàstica	24
5.1	Construcció de la integral estocàstica	24
5.2	Propietats fonamentals de la integral d'Itô	26
5.3	Lema d'Itô	27
6	Equacions Diferencials Estocàstiques (EDEs) i aplicacions	29
6.1	Fonaments de les EDEs	29
6.2	Resolució i canvi de mesura	31
6.3	Aplicacions en finances i esport	32

7	Models clàssics de preus d'actius: Bachelier i Black-Scholes	34
7.1	El model de Bachelier	35
7.2	El model de Black-Scholes	38
7.3	Comparació entre els models de Bachelier, Black-Scholes i Stern	41
8	Aplicació del model de Stern a un partit de bàsquet professional	42
9	Conclusions	49
A	Conceptes financers bàsics	51
A.1	Derivats financers	51
A.1.1	Definició general	51
A.1.2	Opció financera	51
A.2	Valor present i descompte	52
A.3	Tipus d'interès sense risc i actiu lliure de risc	52
A.4	Absència d'arbitratge	52
A.5	Mercats perfectes	52
A.6	Negociació contínua	53
A.7	No pagament de dividends	53
A.8	Cobertura i cartera replicant	53
A.9	Mesura neutral al risc	53
A.10	Volatilitat i volatilitat implícita	54
A.11	El criteri de Kelly	54
A.11.1	Formulació matemàtica (cas bàsic)	54
A.11.2	Interpretació i aplicacions	55
A.11.3	Limitacions i gestió del risc	55
B	Quotes d'apostes en directe del partit Barça-Unicaja	56

Capítol 1

Introducció. El model de Stern

Actualment, l'estudi de la incertesa en els resultats esportius ha guanyat rellevància tant en l'àmbit acadèmic com en el sector de les apostes esportives i l'anàlisi de dades. En aquest sentit, la capacitat de predir l'evolució d'un marcador i la seva incertesa és crucial per al desenvolupament d'eines estadístiques aplicades a la gestió de riscos i la presa de decisions. Un dels models matemàtics més utilitzats per representar aquest fenomen és el moviment Brownià, una eina fonamental en processos estocàstics que explicarem en detall al Capítol 3.

Dins d'aquest marc, l'article de Polson i Stern (2015)^{1.1} introdueix el concepte de volatilitat implícita en els resultats esportius, fent un paral·lelisme amb l'ús de la volatilitat implícita en finances per modelitzar la incertesa en els preus d'actius mitjançant el model de Bachelier. Aquest enfocament proporciona una nova manera de quantificar la incertesa en el resultat d'un partit a partir de dades de mercat, com ara les money-line odds i les diferències de punts esperades (point spreads).

Partint d'aquesta base, en aquest treball, es modelitza l'evolució del resultat entre dos equips com un procés estocàstic, representat per una variable aleatòria $X(t)$, que denota l'avantatge de l'equip A sobre l'equip B en el moment t . Els valors positius de $X(t)$ indiquen que l'equip A va per davant, mentre que els valors negatius representen que l'equip A va per darrere en el marcador. Amb l'objectiu de simplificar l'anàlisi, i sense pèrdua de generalitat, s'assumeix que el partit comença en el temps $t = 0$ amb $X(0) = 0$, és a dir, amb el marcador inicialment empatat 0 a 0. El partit finalitza en el temps $t = 1$, on $X(1)$ representa la diferència final de punts entre ambdós equips: un valor positiu si l'equip A guanya i un valor negatiu si guanya l'equip B. En aquest model, no es contempla la possibilitat de pròrroga.

L'objectiu principal d'aquest estudi és establir una especificació probabilística per a la distribució de $X(1)$ i, de manera més general, per a la trajectòria temporal $X(t)$ al llarg del partit. A partir d'aquest model probabilístic, es defineix la noció de volatilitat implícita associada al resultat del partit. Aquesta mesura proporciona una quantificació de la incertesa sobre el resultat final, tant per al conjunt de tot el partit com per a una part específica, com ara la segona meitat. L'anàlisi d'aquesta volatilitat permet avaluar la variabilitat del marcador i aporta informació sobre la dinàmica del partit en termes probabilístics. La diferència de punts proporciona una avaluació del marge de victòria esperat, que denotarem com a μ ; és a dir, la diferència de punts esperada. Les probabilitats

^{1.1}Polson, N. G., & Stern, H. S. (2015). *The Implied Volatility of a Sports Game*. *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, 11(3), 145–153.

associades a les money-line odds ofereixen una avaluació de la probabilitat que l'equip A guanyi, la qual denotarem com a p .

Des d'una perspectiva matemàtica, el model descriu l'evolució de l'avantatge de l'equip A sobre l'equip B en el temps t , representat per $X(t)$, com un procés de moviment brownià. Si $B(t)$ és un moviment brownià estàndard amb la propietat $B(t) \sim N(0, t)$, i s'hi incorporen termes per tenir en compte la deriva μ i la volatilitat σ , la dinàmica del resultat $X(t)$ es pot expressar com:

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

D'aquesta manera, la distribució del resultat del joc segueix un model de moviment brownià en què l'evolució del valor de $X(t)$ ve donada per l'equació diferencial estocàstica.

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

Com a conseqüència d'aquest model, la distribució del resultat final segueix una distribució normal, $X(1) \sim N(\mu, \sigma^2)$, on el paràmetre de deriva μ representa l'avantatge en punts de l'equip A durant la durada del partit, i el paràmetre de volatilitat σ indica la desviació estàndard o volatilitat del resultat, com ja hem explicat. La probabilitat que l'equip A guanyi, denotada com $p = P(X(1) > 0)$, es pot calcular tenint en compte la diferència de punts (o deriva) μ , la desviació estàndard (o volatilitat) σ , i la distribució de probabilitat assumida. Atès que el resultat segueix una distribució normal, $X(1) \sim N(\mu, \sigma^2)$, la probabilitat es pot expressar com:

$$p = P(X(1) > 0) = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right),$$

on Φ representa la funció de distribució acumulada de la normal estàndard. Per il·lustrar aquest concepte, considerem un exemple.

Exemple 1.0.1. Suposem que la deriva del partit és $\mu = 4$ punts i que la volatilitat és $\sigma = 3.1$ punts. Calculem la relació entre la deriva i la volatilitat:

$$\frac{\mu}{\sigma} = \frac{4}{3.1} \approx 1.29$$

Consultant la taula de distribució normal, obtenim:

$$\Phi(1.29) \approx 0.9015$$

Per tant, la probabilitat que l'equip A guanyi és aproximadament del 90,15%.

De manera particular, és rellevant l'anàlisi de les probabilitats condicionals a mesura que avança el partit. Per exemple, suposem que l'avantatge actual en el temps t és l punts, és a dir, $X(t) = l$. El model permet actualitzar la nostra avaluació de la distribució del resultat final mitjançant la distribució condicional $(X(1)|X(t) = l)$. Seguint aquest raonament, observem que $X(1) = X(t) + (X(1) - X(t))$. Com que $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$ i sota la condició $X(t) = l$, podem simplificar l'expressió per obtenir:

$$X(1) = l + \mu(1 - t) + \sigma(B(1) - B(t))$$

En aquest cas, tenim que $B(1) - B(t) = B(1 - t)$, que és independent de $X(t)$ i segueix una distribució $N(0, 1 - t)$.

Per determinar la distribució condicional, observem que encara queden $1 - t$ unitats de temps en el partit, amb una deriva μ . Així, la mitjana condicional serà l'avantatge actual l més l'avantatge esperat (o desavantatge) restant associat amb la deriva $\mu(1 - t)$. La incertesa condicional es modela com $\sigma B(1 - t)$, que segueix una distribució $N(0, \sigma^2(1 - t))$. Per tant, la distribució condicional del resultat final $X(1)$, donat que ha passat el temps t i l'equip A lidera per l punts, és:

$$X(1)|X(t) = l \sim N(l + \mu(1 - t), \sigma^2(1 - t))$$

A partir d'aquesta distribució condicional, podem calcular la probabilitat condicional que l'equip A guanyi a mesura que el partit avança. La probabilitat que l'equip A guanyi en el temps t , donat un avantatge actual de l punts, es calcula com:

$$p_{t,l} = P(X(1) > 0 | X(t) = l) = \Phi\left(\frac{l + \mu(1 - t)}{\sigma\sqrt{1 - t}}\right)$$

On hem afegit un subíndex a p per indicar la condició sobre el temps i l'avantatge.

Aquesta distribució condicional del resultat, donat el marcador en el temps t , té una variància de $\sigma^2(1 - t)$, és a dir, una volatilitat de $\sigma\sqrt{1 - t}$. La volatilitat és una funció decreixent de t , la qual cosa il·lustra que la volatilitat disminueix a mesura que avança el partit. Vegem alguns exemples.

Exemple 1.0.2. Suposem que hi ha una volatilitat inicial de $\sigma = 10$ punts, llavors havent transcorregut tres quartes part del partit, quan $t = 0.75$, la volatilitat restant és

$$\sigma\sqrt{1 - t} = 10 \times \sqrt{1 - 0.75} = 10 \times \sqrt{0.25} = 10 \times 0.5 = 5$$

Per tant, la volatilitat restant en aquest moment del partit és de 5 punts.

Exemple 1.0.3. Suposem que la volatilitat inicial del partit és $\sigma = 10$ punts, que falta un quart del temps de joc, és a dir, $t = 0.75$, i que l'avantatge actual del equip B és de $l = 6$ punts. Considerem també que la deriva és $\mu = -4$. Comencem calculant la volatilitat restant:

$$\sigma\sqrt{1 - t} = 10 \times \sqrt{1 - 0.75} = 10 \times \sqrt{0.25} = 10 \times 0.5 = 5$$

A continuació, calculem la mitjana condicional:

$$l + \mu(1 - t) = 6 + (-4)(1 - 0.75) = 6 - 1 = 5$$

La distància en desviacions estàndard respecte a zero és:

$$\frac{5}{5} = 1$$

Consultant la taula de distribució normal, tenim:

$$\Phi(1) = 0.8413$$

Per tant, la probabilitat que l'equip B guanyi és aproximadament del 84,13%.

Ara estem en disposició de definir la *volatilitat implícita* que prové de la *diferència de punts esperada* i les *money-line odds*. D'acord amb el nostre model, utilitzarem les probabilitats inferides de les money-line odds per proporcionar una avaluació del mercat sobre la probabilitat de guanyar, p , i la diferència de punts per avaluar el marge de victòria esperat, μ .

Les money-line odds es donen per a cada equip i proporcionen informació sobre el pagament d'una aposta a favor de la victòria d'aquell equip. Aquest pagament es pot utilitzar per inferir l'avaluació que fa el mercat de la probabilitat que l'equip guanyi.

Cal tenir en compte que quan $\mu = 0$ i $p = 0.5$, no hi ha informació del mercat sobre la volatilitat, ja que l'expressió $\frac{\mu}{\Phi^{-1}(p)}$ resulta indefinida. Aquest és el cas especial en què els equips es consideren igualats; el resultat esperat té una diferència de punts de zero i hi ha una probabilitat igual que qualsevol dels dos equips guanyi. En aquest escenari, no es pot calcular una volatilitat implícita, ja que la informació del mercat no proporciona cap avantatge discernible per a cap equip. Un cop tenim μ i p , podem inferir la *volatilitat implícita*, σ_{IV} , resolent

$$\frac{\mu}{\sigma_{IV}} = \Phi^{-1}(p), \quad \text{d'on obtenim} \quad \sigma_{IV} = \frac{\mu}{\Phi^{-1}(p)}.$$

Aquí, $\Phi^{-1}(p)$ denota la *funció quantil de la normal estàndard*, és a dir, el valor tal que l'àrea sota la corba normal estàndard a l'esquerra de $\Phi^{-1}(p)$ és igual a p .

Anteriorment hem vist com la quantitat de volatilitat restant en el joc no és constant, ja que el temps ha transcorregut, tot i que el paràmetre subjacent bàsic s'ha suposat constant. Aquesta suposició no ha de ser necessàriament certa. Més important encara, els mercats d'apostes poden proporcionar informació valuosa sobre la millor estimació del paràmetre de volatilitat en un moment determinat.

En aquest context, aquesta variabilitat temporal esdevé rellevant, ja que ofereix una mesura interpretable que permet ajustar l'anàlisi i avaluar millor el valor d'una oportunitat d'apostes. Això significa que la volatilitat dinàmica, ajustada segons les condicions del mercat, pot ser utilitzada per predir més acuradament l'evolució de l'avantatge d'un equip i la seva probabilitat de guanyar a mesura que avança el partit.

Amb l'aparició de les apostes en línia, existeix un contracte gairebé contínuament negociat disponible per avaluar l'esperança implícita de la probabilitat que l'equip A guanyi el partit en qualsevol moment t . Aquesta informació addicional proporcionada pel contracte continu permet actualitzar la volatilitat implícita condicional a la situació del joc en el moment t .

Suposem que el mercat d'apostes en línia ens proporciona una avaluació actual de $p_{t,l}$, la probabilitat que l'equip A guanyi basant-se en tota la informació disponible en el moment t . Podem utilitzar l'expressió prèviament definida per a la probabilitat condicional que A guanyi per resoldre una estimació de la volatilitat implícita variable en el temps, $\sigma_{IV,t}$:

$$\sigma_{IV,t} = \frac{l + \mu(1 - t)}{\Phi^{-1}(p_{t,l})\sqrt{1 - t}}$$

Aquí, la notació indica que la probabilitat condicional de guanyar $p_{t,l}$ depèn del temps actual t i de l'avantatge l . Aquesta anàlisi assumeix que el paràmetre de deriva μ roman constant i no varia al llarg del temps. Tanmateix, cal tenir en compte que, ja que només es disposa d'una sola avaluació de probabilitat en el moment t , no és possible inferir valors variables en el temps per ambdós paràmetres (la deriva μ i la volatilitat implícita $\sigma_{IV,t}$).

Capítol 2

Processos estocàstics

Aquest capítol es basa principalment en el **Capítol 1** del llibre *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications* de **P. Todorovic** (1992) i en el **Capítol 1** del llibre *Brownian Motion and Stochastic Calculus* de **I. Karatzas i S. Shreve** (1991). A més, la formulació del teorema de Kolmogorov–Centsov que apareix a l’apartat 2.4 segueix la **Secció 2.2.B** del mateix llibre de Karatzas i Shreve. Ambdós llibres estan referenciats a la bibliografia.

2.1 Definició de procés estocàstic

Un procés estocàstic és una representació matemàtica que descriu l’evolució temporal d’un fenomen aleatori. Per tal de formalitzar aquesta evolució, partim d’un *espai de probabilitat*, que és un triple $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on:

- Ω és l’espai de mostres, que conté tots els possibles resultats aleatoris;
- $\mathcal{F}$ és una σ -àlgebra sobre Ω , que recull els esdeveniments observables;
- $\mathbb{P}$ és una mesura de probabilitat definida sobre $\mathcal{F}$, que assigna probabilitats als esdeveniments.

Per descriure els valors que pren el procés, es defineix un *espai d’estats* $(S, \mathcal{Y})$, on S és l’espai en què es representen les observacions, i $\mathcal{Y}$ és una σ -àlgebra sobre S que fa possible definir variables aleatòries amb valors en aquest espai.

Un procés estocàstic es pot veure com una col·lecció ordenada de variables aleatòries que descriuen l’evolució d’un sistema al llarg del temps. Cada variable X_t , indexada per $t \in T$, representa el valor aleatori del sistema en l’instant t . Aquestes variables estan definides sobre un mateix espai de probabilitat i prenen valors en un espai d’estats comú.

Definició 2.1.1. *Un procés estocàstic és una família de variables aleatòries*

$$\{X_t : t \in T\},$$

definides sobre un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que prenen valors en un espai mesurable $(S, \mathcal{Y})$. Per a cada $t \in T$, la funció $X_t : \Omega \rightarrow S$ assigna a cada resultat aleatori $\omega \in \Omega$ un valor $X_t(\omega) \in S$, de manera que es pot calcular la probabilitat que el procés prengui certs valors.

Aquest conjunt T s'anomena *espai de paràmetres* i pot ser discret o continu:

- Si T és **discret**, com per exemple $T = \mathbb{N}$ o un subconjunt finit de $\mathbb{N}$, parlem d'un *procés a temps discret*, com les cadenes de Markov discretes.
- Si T és **no numerable**, habitualment $T = \mathbb{R}$ o $T = [a, b] \subset \mathbb{R}_+$, parlem d'un *procés a temps continu*, com és el cas del moviment Brownià.

D'altra banda, l'espai d'estats S és l'espai mesurable on prenen valors les variables X_t . En la majoria de models, $S = \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$, i en aquest cas es parla de *procés a valors reals* o *vectorials*. No obstant això, també poden considerar-se *espais discrets*, com conjunts finits o numerablement infinits, com ara $\{0, 1, 2, \dots\}$, en el cas de processos de comptatge.

Exemple 2.1.2. Considerem una successió de tirades independents d'una moneda equilibrada. Definim un procés estocàstic $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si la } n\text{-èsima tirada resulta en cara,} \\ 0 & \text{si la } n\text{-èsima tirada resulta en creu.} \end{cases}$$

Aquest procés descriu una seqüència binària de resultats i és un exemple de procés estocàstic en temps discret amb espai d'estats $\{0, 1\}$. Cada variable aleatòria X_n representa el resultat de la tirada n -èsima i té distribució Bernoulli amb paràmetres $p = 0.5$.

En molts contextos, no només ens interessa com evoluciona un procés estocàstic, sinó també *quina informació està disponible en cada moment del temps*. Per tractar aquesta qüestió formalment, introduïm el concepte de *filtració*, que representa l'evolució de la informació observada al llarg del temps.

De manera intuïtiva, podem entendre una filtració com un registre creixent del que sabem a mesura que passa el temps. En cada instant t , disposem d'un conjunt d'esdeveniments que podem observar o mesurar, i a mesura que t avança, aquest conjunt pot créixer però mai decreix.

Definició 2.1.3. Una **filtració** és una família $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ de sub- σ -àlgebres de l' σ -àlgebra total $\mathcal{F}$, tal que per a tot $s \leq t$, es compleix

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}.$$

Cada $\mathcal{F}_t$ representa la col·lecció d'esdeveniments observables fins al temps t . Amb aquesta noció d'informació en el temps, podem precisar el significat que un procés estocàstic sigui "compatible" amb el flux d'informació disponible. Això ens porta a la noció de *procés adaptat*.

Definició 2.1.4. Un procés estocàstic $\{X_t\}_{t \in T}$ es diu **adaptat** a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ si per a tot $t \in T$, la variable aleatòria X_t és $\mathcal{F}_t$ -mesurable. És a dir, el valor de X_t pot determinar-se únicament amb la informació disponible fins al temps t .

Aquest concepte és fonamental per a l'anàlisi de processos estocàstics en temps continu, especialment quan es tracta de modelitzar sistemes dinàmics en què l'accés a la informació és progressiu. L'estudi de *martingales*, *integrals estocàstiques* i *equacions diferencials estocàstiques* es basa essencialment en processos adaptats a una filtració donada. Ens ocuparem d'aquests temes en els capítols posteriors.

2.2 Trajectòria d'un procés estocàstic

Una altra manera d'entendre un procés estocàstic és considerar-lo com una aplicació

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\longrightarrow S \\ (t, \omega) &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

on, per a cada $\omega \in \Omega$, la funció $t \mapsto X_t(\omega)$ descriu una trajectòria o realització del procés.

Definició 2.2.1. Donat un punt $\omega \in \Omega$, la funció $t \mapsto X_t(\omega)$, definida sobre el conjunt de paràmetres T , s'anomena **trajectòria** (o **realització**) del procés estocàstic $X = \{X_t : t \in T\}$ associada a ω .

Aquest enfocament, basat en fixar un punt $\omega \in \Omega$, permet estudiar com evoluciona el sistema aleatori al llarg del temps, generant una trajectòria individual del procés. Aquesta visió complementa la més habitual, en què es fixa el temps $t \in T$ i es considera X_t com una variable aleatòria.

Així doncs, podem entendre un procés estocàstic com una funció bidimensional $X(t, \omega)$, que pot ser explorada:

- fixant t i observant X_t , que dona informació sobre la distribució de valors possibles en un instant;
- o fixant ω i estudiant la funció $t \mapsto X_t(\omega)$, que descriu el comportament temporal en una realització concreta.

Definició 2.2.2. Diem que un procés estocàstic té **trajectòries contínues** si, per a gairebé tot $\omega \in \Omega$, la funció $t \mapsto X_t(\omega)$ és contínua.

Aquesta propietat és central en la teoria de processos estocàstics i apareix sovint com una hipòtesi clau per garantir bons comportaments analítics. Per exemple, el moviment Brownià té trajectòries contínues gairebé segur, però cap d'elles no és diferenciable. Més endavant, veurem com el teorema de Kolmogorov-Centsov proporciona condicions per garantir l'existència d'una modificació del procés amb trajectòries contínues.

Observació 2.2.3. Quan les trajectòries són contínues, com en el cas del moviment Brownià, el procés es pot representar gràficament com una corba contínua en el pla temporal. Aquestes representacions visuals tenen una gran importància en l'anàlisi aplicada, especialment en finances, física o enginyeria.

Les trajectòries poden tenir propietats regulars o irregulars segons el tipus de procés. Per exemple:

- En el moviment Brownià, les trajectòries són contínues quasi per tot $\omega \in \Omega$ però no diferenciables.
- En un procés de Poisson, les trajectòries són funcions de tipus esglaonat, amb salts discrets.

Aquestes propietats són importants, ja que determinen si un procés pot ser integrable, diferenciable o si calen eines especials (com el càlcul d'Itô) per analitzar-lo. Aquests conceptes s'estudiaran amb més profunditat en els capítols següents, especialment en relació amb el moviment Brownià i les equacions diferencials estocàstiques.

2.3 Llei d'un procés estocàstic

Un cop definit el concepte de procés estocàstic i les seves trajectòries, el següent pas és estudiar la distribució de les seves variables. Aquesta distribució és coneguda com la *llei del procés estocàstic*. També és important introduir les propietats d'increments, especialment la *independència* i *estacionarietat*, que seran fonamentals per a la definició del moviment Brownià en el proper capítol.

Definició 2.3.1. Donat un procés estocàstic $X = \{X_t\}_{t \in T}$, la seva **llei finito-dimensional** és la col·lecció de totes les distribucions conjuntes dels vectors aleatoris de la forma

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}),$$

per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$ i qualsevol elecció de temps $t_1, \dots, t_n \in T$.

Les lleis finito-dimensionals permeten descriure completament el comportament probabilístic d'un procés a nivell de qualsevol nombre finit d'instantis de temps. No obstant això, per garantir que aquestes distribucions defineixen realment un procés estocàstic en el sentit estricte, cal que compleixin certes condicions de compatibilitat. Aquestes condicions, anomenades de *consistència*, seran tractades amb detall en el Teorema de Kolmogorov a l'apartat 2.4.

Definició 2.3.2. Un procés estocàstic $\{X_t : t \in T\}$ té **increments independents** si per a tota seqüència creixent de temps $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, els increments

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \quad X_{t_2} - X_{t_1}, \quad \dots, \quad X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

són independents.

Definició 2.3.3. Un procés estocàstic $\{X_t : t \in T\}$ té **increments estacionaris** si la distribució de $X_{t+h} - X_t$ depèn només de h , i no del temps inicial t .

Els processos amb increments independents i estacionaris apareixen sovint en aplicacions, ja que aquestes propietats faciliten l'anàlisi teòrica i la simulació. Són especialment importants en models com el moviment Brownià o el procés de Poisson. A continuació, veurem un exemple clàssic que combina aquestes dues propietats.

Exemple 2.3.4. Suposem que un procés $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ compleix que, per a tot $s < t$, l'increment $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, i que aquests increments són independents entre si. Aleshores, el procés té increments independents i estacionaris, ja que:

- Els increments són independents per construcció.

- La llei de cada increment $X_t - X_s$ només depèn de la longitud de l'interval $t - s$, i no dels punts s o t individualment.

Aquest exemple és un cas particular del **moviment Brownià estàndard**, que es definirà formalment al Capítol 3. Aquest procés és el prototip de procés amb increments normals, independents i estacionaris, i serveix com a base per al càlcul estocàstic.

2.4 Teorema de Kolmogorov

En aquest apartat ens plantegem si, a partir d'una col·lecció de distribucions finito-dimensionals d'un procés estocàstic, podem garantir l'existència d'un procés amb trajectòries amb un cert grau de regularitat, com ara la continuïtat. Aquesta qüestió fonamental s'aborda amb el conegut teorema de Kolmogorov-Centsov.

Abans, però, cal introduir el concepte de consistència de les lleis finito-dimensionals.

Definició 2.4.1. *Diem que una col·lecció de lleis finito-dimensionals és consistent si compleix les dues condicions següents:*

- **Invariància sota reordenació dels temps:** *la llei conjunta del vector aleatori $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ depèn només dels valors dels temps $t_1, \dots, t_n$, i no del seu ordre. És a dir, permutar els temps ha de donar lloc a la mateixa distribució (amb les components corresponentment permutades).*
- **Coherència amb els marginals:** *si considerem un subconjunt de temps $t_1, \dots, t_k$ amb $k < n$, la llei del vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ ha de coincidir amb la marginal de la llei de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ obtinguda descartant les coordenades restants.*

Aquesta condició de consistència és essencial perquè, segons el teorema de Kolmogorov, només quan les distribucions finito-dimensionals són consistents és possible construir un procés estocàstic a partir d'elles.

Teorema 2.4.2 (Kolmogorov-Centsov). ^{2.1} *Suposem que existeixen constants $\alpha > 0$, $\beta > 0$ i $C > 0$ tals que, per a tot $s, t \in [0, T]$, es compleix:*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C|t - s|^{1+\beta}.$$

Aleshores, existeix una versió del procés X que té trajectòries Hölder-contínues de qualsevol exponent $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$.

Aquest resultat no assegura que el procés original sigui continu, sinó que existeix una altra versió amb aquesta propietat. És aquesta versió regular la que s'utilitza en la majoria d'aplicacions pràctiques.

Comentari sobre la regularitat de les trajectòries. La regularitat de les trajectòries d'un procés estocàstic és un aspecte fonamental que condiciona tant el seu comportament com les tècniques que s'hi poden aplicar. Segons el procés considerat, podem trobar diferents graus de regularitat:

^{2.1}Vegeu Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer. Capítol 2, Teorema 2.8, pàgina 53.

- **Contínues:** les trajectòries són contínues en t per a gairebé tot ω ; és el cas del moviment brownià.
- **Hölder-contínues:** existeix un exponent $\gamma \in (0, 1)$ tal que $|X_t - X_s| \leq C|t - s|^\gamma$ per a s, t propers. Aquest tipus de regularitat proporciona un control local sobre l'oscil·lació de les trajectòries.
- **Càdlàg:** les trajectòries són contínues per la dreta i tenen límits per l'esquerra. Aquesta és la regularitat típica de processos amb salts, com el procés de Poisson.

2.5 Processos de Markov

Un dels conceptes més fonamentals dins la teoria dels processos estocàstics és el de **procés de Markov**. Intuïtivament, un procés és de Markov si el seu comportament futur depèn només del seu estat actual, i no del camí seguit per arribar-hi. És a dir, no té “memòria” més enllà del present.

Aquest tipus de processos apareixen de forma natural en molts contextos i constitueixen una classe àmplia i tractable de models estocàstics. En particular, el moviment Brownià estàndard, que desenvoluparem al capítol següent, és un exemple prototípic de procés de Markov.

Definició 2.5.1. *Si $\{X_t\}_{t \in T}$ un procés estocàstic definit sobre un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, amb valors en un espai d'estats S , i sigui $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ una filtració tal que X_t és $\mathcal{F}_t$ -adaptat. Es diu que $\{X_t\}$ és un **procés de Markov** respecte a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ si, per tot $s < t$ i per tota funció mesurable $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, es compleix:*

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_s] \quad (q.s.).$$

Aquesta propietat reflecteix que, conegut l'estat X_s , tota la informació rellevant per descriure el futur del procés està continguda en aquest estat. El coneixement del passat anterior a s no aporta informació addicional sobre X_t .

Capítol 3

El moviment Brownià

Aquest capítol es basa principalment en el *Capítol 2* del llibre *Brownian Motion and Stochastic Calculus* de **I. Karatzas i S. Shreve** (1991), en el *Capítol 2* del llibre *Stochastic Calculus: An Introduction with Applications* de **G. F. Lawler** (2014), i en la *Secció 3.2* del llibre *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* de **D. Lamberton i B. Lapeyre** (2008). Tots tres textos estan referenciats a la bibliografia.

3.1 Definició de moviment Brownià

El moviment Brownià és un dels processos estocàstics més importants i utilitzats en teoria de la probabilitat. Va ser introduït per descriure el moviment aleatori de partícules microscòpiques suspeses en un fluid, però el seu ús s'ha estès molt més enllà, des de la física fins a la biologia i les finances. Matemàticament, es tracta d'un procés que combina tres propietats fonamentals: soroll gaussià, increments independents i continuïtat temporal. Aquestes propietats es codifiquen en la definició següent:

Definició 3.1.1. *Un moviment brownià estàndard és un procés estocàstic $\{B_t\}_{t \geq 0}$, amb valors en $\mathbb{R}$, definit sobre un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que compleix:*

1. $B_0 = 0$ gairebé segur;
2. els increments $B_t - B_s$ són independents per a $0 \leq s < t$;
3. per a tot $0 \leq s < t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Observació 3.1.2. Gràcies al teorema de Kolmogorov-Centsov (vegeu l'apartat 2.4), aquest procés admet una versió amb trajectòries contínues gairebé segurament. Aquesta versió és la que s'utilitza habitualment en la pràctica i en la teoria.

Exemple 3.1.3. Suposem que volem modelitzar la posició d'una partícula que es mou dins d'un fluid en calma. Inicialment, la partícula es troba en el punt d'origen $B_0 = 0$. A mesura que passa el temps, el moviment de la partícula és aleatori a causa dels xocs constants amb les molècules del fluid.

Aquest comportament es pot descriure mitjançant un moviment Brownià estàndard $\{B_t\}_{t \geq 0}$, on per a cada temps t , la variable B_t representa la posició de la partícula. Aquest model assumeix que els increments del moviment són normals, independents, i

que les trajectòries són contínues però no diferenciables.

Així, si observem la partícula als temps $t = 0, 1, 2, 3$, podem obtenir realitzacions com:

$$B_0 = 0, \quad B_1 = 0,3, \quad B_2 = -0,1, \quad B_3 = 1,4,$$

amb valors que canvien de manera erràtica.

Aquest exemple il·lustra com el moviment Brownià proporciona un model realista per a fenòmens naturals amb comportament aleatori continu en el temps. El fet que les realitzacions siguin contínues però altament irregulars reflecteix bé la dinàmica microscòpica de molts sistemes físics.

Una de les característiques fonamentals del moviment Brownià és que les seves trajectòries són contínues. Aquest fet no només és part de la seva definició, sinó que pot demostrar-se rigorosament a partir del comportament dels moments dels increments:

Proposició 3.1.4. *Les trajectòries del moviment Brownià són contínues gairebé segurament.*

Demostració. Com que $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$, podem calcular:

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^4] = 3|t - s|^2.$$

Això satisfà la hipòtesi del teorema de Kolmogorov-Centsov amb $\alpha = 4$, $\beta = 1$ i $C = 3$, i per tant, existeix una versió del procés amb trajectòries contínues gairebé segurament. $\square$

Proposició 3.1.5. ^{3.1} *Les trajectòries del moviment Brownià no són diferenciables en cap instant, gairebé segurament.*

Demostració. Per a cada $h > 0$, tenim:

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h} \sim \mathcal{N}(0, 1/h),$$

és a dir, la variància de la derivada incremental és infinita quan $h \rightarrow 0$. Això implica que la derivada no pot existir en cap punt amb probabilitat 1. Formalment, s'obté que:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \right| = \infty \quad \text{gairebé segurament.}$$

$\square$

Aquest resultat, tot i ser contraintuïtiu, és clau per a la comprensió del moviment Brownià: el procés no és derivable en cap punt, gairebé segurament. Això implica que les eines de càlcul diferencial clàssiques no s'hi poden aplicar directament. En lloc d'això, caldrà desenvolupar una teoria pròpia, com la integral d'Itô, per tractar processos d'aquesta naturalesa.

Observació 3.1.6. El moviment Brownià estàndard també es coneix com a **procés de Wiener**, en honor a Norbert Wiener, que en va desenvolupar la construcció matemàtica formal a principis del segle XX. A la literatura, és habitual trobar-lo notat com W_t en lloc de B_t , especialment en contextos d'anàlisi estocàstica i equacions diferencials estocàstiques. Al llarg d'aquest treball, farem servir indistintament les notacions B_t i W_t , depenent del context o de les referències d'origen.

^{3.1}Vegeu Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2nd ed.). Springer. Teorema 9.18, capítol 2, pàgina 110.

3.2 Propietats bàsiques

El moviment Brownià estàndard és un dels processos estocàstics més estudiats, ja que combina diverses propietats que el fan especialment tractable i alhora útil en aplicacions reals. Aquestes propietats es deriven directament de la seva definició formal, i el distingeixen per la seva estructura probabilística particular. En aquest apartat analitzarem amb detall les propietats d'increments, moments i simetries del procés. A més, mostrarem com aquestes característiques el converteixen en un exemple paradigmàtic de procés gaussià amb una estructura d'invariància que el fa únic dins la teoria dels processos estocàstics continus.

Proposició 3.2.1. *El moviment Brownià té increments estacionaris.*

Demostració. Sigui $0 \leq s < t$, per definició del moviment Brownià:

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

La distribució d'aquest increment només depèn de $t - s$, i no dels valors absoluts de s o t . Per tant, els increments són estacionaris. $\square$

Aquestes dues propietats impliquen que el moviment Brownià és un procés amb estructura temporal molt regular. El fet que els increments siguin normals, independents i estacionaris el converteix en un procés gaussià centrat.

Definició 3.2.2. *Un procés estocàstic $\{X_t\}_{t \in T}$ és **gaussià** si per a tot conjunt finit $t_1, \dots, t_n \in T$, el vector aleatori $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ segueix una distribució normal multivariant.*

En el cas del moviment Brownià, el vector $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ és gaussià amb mitjana nul·la i matriu de covariància definida per:

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t).$$

Aquesta expressió es dedueix del fet que:

$$B_t = B_s + (B_t - B_s), \quad \text{amb } B_s \text{ i } B_t - B_s \text{ independents.}$$

Proposició 3.2.3. *Per a tot $t \geq 0$, es compleix:*

$$\mathbb{E}[B_t] = 0, \quad \text{Var}(B_t) = t.$$

Demostració. Per definició, $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, per tant, la mitjana és zero i la variància és t . $\square$

Proposició 3.2.4. *Per a tot $t \geq 0$, es compleixen:*

$$\mathbb{E}[B_t^2] = t, \quad \mathbb{E}[B_t^4] = 3t^2.$$

Demostració. Com que $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, és ben sabut que els moments centrals d'ordre parell d'una variable normal de mitjana zero són:

$$\mathbb{E}[B_t^2] = t, \quad \mathbb{E}[B_t^4] = 3(\text{Var}(B_t))^2 = 3t^2.$$

$\square$

Una altra propietat remarcable és l'**autosimilaritat** del moviment Brownià, que expressa una forma d'invariància respecte a l'escala.

Proposició 3.2.5. *Si $\lambda > 0$, el procés $X_t = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda t}$ és també un moviment Brownià.*

Demostració. Comprovem que el procés X_t satisfà les quatre propietats de la definició del moviment Brownià:

- $X_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_0 = 0$.
- Per a $0 \leq s < t$,

$$X_t - X_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(B_{\lambda t} - B_{\lambda s}) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda}(\lambda t - \lambda s)\right) = \mathcal{N}(0, t - s).$$

- Els increments $X_t - X_s$ són independents perquè són combinacions lineals d'increments de B , que ja són independents per definició.
- Les trajectòries de X són contínues perquè són imatges de les trajectòries contínues de B sota una aplicació lineal contínua.

Per tant, X és un moviment Brownià estàndard. □

3.3 Convergència en distribució

El moviment Brownià pot entendre's no només com un objecte axiomàtic, sinó també com el límit de processos aleatoris discrets més senzills. Aquesta perspectiva, que dona fonament a la seva naturalesa universal, s'estableix formalment mitjançant el teorema de Donsker, conegut també com a principi d'invariància. Aquest resultat afirma que la caminada aleatòria, convenientment escalada, convergeix en distribució cap al moviment Brownià.

Per tal d'enunciar el teorema de Donsker, comencem definint el procés discret interpolat que aproximarà el moviment Brownià.

Definició 3.3.1. *Siguin $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, amb $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ i $\text{Var}(\xi_i) = \sigma^2$. Definim el procés de caminada aleatòria reescalada i interpolada:*

$$X^{(n)}(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_i + (nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor+1} \right), \quad t \in [0, 1].$$

Aquest procés és aleatori, té trajectòries contínues per construcció, i es pot considerar com una variable aleatòria amb valors en l'espai $C([0, 1])$, és a dir, l'espai de funcions contínues sobre l'interval $[0, 1]$, equipat amb la topologia de la convergència uniforme.

Lema 3.3.2. *Sota les hipòtesis anteriors, per a qualsevol col·lecció d'instantis $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$, el vector aleatori*

$$(X^{(n)}(t_1), \dots, X^{(n)}(t_k))$$

convergeix en llei cap al vector

$$(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}),$$

on $\{B_t\}_{t \in [0,1]}$ és un moviment Brownià estàndard.

Aquest resultat reflecteix una forma funcional del teorema central del límit: no només les sumes de variables aleatòries convergeixen a una normal, sinó que els camins sencers convergeixen cap al moviment Brownià.

Teorema 3.3.3 (Teorema de Donsker). ^{3.2} *Siguin $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, amb esperança zero i variància $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Sigui $X^{(n)}$ el procés interpolat com en la definició anterior. Denotem per $\mathbb{P}^{(n)}$ la llei induïda per $X^{(n)}$ sobre $(C([0,1]), \mathcal{B}(C([0,1])))$. Aleshores,*

$$\mathbb{P}^{(n)} \Rightarrow \mathbb{P}^*,$$

on $\mathbb{P}^*$ és la llei del moviment Brownià estàndard sobre $C([0,1])$.

El símbol $\Rightarrow$ indica convergència feble de mesures. Aquest resultat és conegut com a *principi d'invariància*, ja que garanteix que, sota hipòtesis mínimes sobre les variables ξ_i , el límit és sempre el mateix: el moviment Brownià. Això destaca el paper fonamental d'aquest procés dins la teoria de la probabilitat.

Aquesta convergència també dona una base sòlida per a l'aproximació del moviment Brownià mitjançant simulacions, i per a la derivació de molts resultats del càlcul estocàstic com a límits de versions discretes.

3.4 Variacions del moviment Brownià

El moviment Brownià estàndard és un model central dins dels processos estocàstics, però en moltes aplicacions pràctiques cal adaptar-lo a contextos més específics. En aquest apartat es presenten tres variacions importants: el moviment Brownià amb deriva, el pont Brownià i el moviment Brownià multidimensional. Cada un d'aquests processos conserva algunes de les propietats bàsiques del Brownià estàndard, com la continuïtat de les trajectòries i la distribució gaussiana, però introdueix modificacions rellevants en la seva dinàmica o estructura.

Definició 3.4.1. *Donats $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, un moviment Brownià amb deriva i difusió és un procés $\{X_t\}_{t \geq 0}$ definit per:*

$$X_t = \mu t + \sigma B_t,$$

on $\{B_t\}$ és un moviment Brownià estàndard. Aquest procés s'anomena moviment Brownià amb deriva μ i coeficient de difusió σ .

El procés X_t és gaussià, amb:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu t, \quad \text{Var}(X_t) = \sigma^2 t.$$

La component μt introdueix una tendència determinista en la trajectòria del procés (la deriva), mentre que σB_t conserva la variabilitat aleatòria del moviment Brownià, amplificada pel coeficient σ .

^{3.2}Vegeu Karatzas, I., & Shreve, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1991. Capítol 2, Teorema 4.20, pàgina 70 i 71.

Exemple 3.4.2. Considerem un procés $X_t = 2t + \frac{1}{2}B_t$. Aquest procés representa un moviment Brownià amb deriva positiva $\mu = 2$ i volatilitat reduïda $\sigma = \frac{1}{2}$. Si simulem diverses trajectòries de X_t , observarem que totes elles fluctuen aleatòriament però al voltant d'una tendència clarament creixent. La mitjana creix de forma lineal, mentre que la dispersió creix amb $\sqrt{t}$, ajustada per σ .

Definició 3.4.3. ^{3.3}

Un **pont Brownià estàndard** és un procés estocàstic $\{X_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ definit per

$$X_t = W_t - tW_1,$$

on $\{W_t\}_{t \geq 0}$ és un moviment Brownià estàndard. Aquest procés gaudeix de les següents propietats:

1. $X_0 = X_1 = 0$ gairebé segur.
2. $\mathbb{E}[X_t] = 0$ per a tot $t \in [0, 1]$.
3. $\text{Var}(X_t) = t(1 - t)$.
4. $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(s, t) - st$.

Aquest procés és gaussià, i es pot entendre com un moviment Brownià condicionat a passar per l'origen en els instants $t = 0$ i $t = 1$.

Exemple 3.4.4. ^{3.4}

El procés

$$X_t = a(1 - \frac{t}{T}) + b\frac{t}{T} + (W_t - \frac{t}{T}W_T),$$

on W_t és un moviment Brownià estàndard, és un **pont Brownià** de a a b sobre l'interval $[0, T]$

Aquest procés satisfà $X_0 = a$, $X_T = b$, i per a cada t , $X_t \sim \mathcal{N}(a(1 - \frac{t}{T}) + b\frac{t}{T}, t(1 - \frac{t}{T}))$. Es pot interpretar com un moviment Brownià condicionat a tenir el valor b en l'instant final T , i per això perd la propietat de Markov respecte a la filtració natural del Brownià original.

Definició 3.4.5. Un moviment Brownià n -dimensional és un procés $\{B_t\}_{t \geq 0}$ amb valors en $\mathbb{R}^n$, tal que:

- $B_0 = 0$ (quasi segurament),
- els increments són independents i estacionaris,
- per a cada t , $B_t \sim \mathcal{N}(0, tI_d)$, amb I_d la matriu identitat $n \times n$,
- les components $B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(n)}$ són moviments Brownians independents.

^{3.3}Vegeu Calin, O. *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance*. Secció 2.5, pàgina 38.

^{3.4}Vegeu Karatzas, I., & Shreve, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1991. Capítol 5, Problema 6.14, pàgina 360.

Aquest procés té la mateixa estructura que el Brownià unidimensional, però amb múltiples dimensions. És una eina fonamental per modelitzar sistemes aleatoris vectorials, com el moviment d'una partícula en l'espai tridimensional.

Exemple 3.4.6. Sigui $\mathbf{B}_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$, on $B^{(1)}$ i $B^{(2)}$ són moviments Brownians independents. Aquest procés modelitza el moviment d'una partícula en un pla bidimensional, on cada component evoluciona de forma independent segons un moviment aleatori. Les trajectòries del procés poden interpretar-se com camins aleatoris continus en $\mathbb{R}^2$.

Aquestes variacions del moviment Brownià proporcionen models flexibles per capturar fenòmens amb tendències deterministes, condicions de frontera o múltiples dimensions. Tots aquests casos tindran aplicació directa en els models que desenvoluparem als capítols següents.

Capítol 4

Martingales

Aquest capítol es basa principalment en la Secció 1.2 del Capítol 1 del llibre *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* de D. Lamberton i B. Lapeyre (2008), així com en la Secció 1.2 del Capítol 1 del llibre *Stochastic Calculus: An Introduction with Applications* de G. Lawler (2006). Ambdós llibres estan referenciats a la bibliografia.

4.1 Definició de martingala, submartingala i supermartingala

La teoria de martingales constitueix una de les estructures fonamentals dins de l'estudi dels processos estocàstics. Aquest concepte modelitza situacions on, sota una certa informació prèvia, l'esperança condicional del procés es manté constant (en el cas de martingales), augmenta (submartingales) o disminueix (supermartingales). Abans de poder introduir el concepte de martingala, és necessari definir prèviament el concepte d'esperança d'una variable aleatòria respecte a una certa informació parcial, representada per una sub- σ -àlgebra. Intuïtivament, aquesta esperança representa la millor estimació d'una variable donada una informació disponible. A continuació es dona una definició rigorosa d'aquest concepte.

Notació 1. Quan diem que $X_t \in L^1$, ens referim al fet que és integrable: $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.

Definició 4.1.1. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ una variable aleatòria integrable, i $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub- σ -àlgebra. L'**expectació condicional** de X donada $\mathcal{G}$, denotada per $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$, és una variable aleatòria tal que:

1. $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ és $\mathcal{G}$ -mesurable;
2. Per a tot $G \in \mathcal{G}$,

$$\int_G \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}.$$

Aquesta definició determina $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ de manera única gairebé segurament.

L'operador $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{G}]$ compleix una sèrie de propietats fonamentals, entre les quals destaquen:

- Si X és $\mathcal{G}$ -mesurable, llavors $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = X$;

4.1. DEFINICIÓ DE MARTINGALA, SUBMARTINGALA I SUPERMARTINGALA 19

- Si $X, Y \in L^1$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, llavors $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + \beta \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$;
- Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, llavors $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}]$ (propietat de la torre);
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$ (conservació de l'esperança).

Aquestes propietats seran utilitzades de manera recurrent en l'estudi de les martingales i processos relacionats.

Definició 4.1.2. Un procés estocàstic $\{X_t\}_{t \in T}$ amb una filtració $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ és una **martingala** si:

1. $X_t \in L^1$, és a dir, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ per tot $t \in T$;
2. X_t és $\mathcal{F}_t$ -adaptat per a tot $t \in T$;
3. $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$, per a tot $s \leq t$

Definició 4.1.3. Amb la mateixa notació, el procés $\{X_t\}_{t \in T}$ és:

- una **submartingala** si $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$ per a tot $s \leq t$;
- una **supermartingala** si $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$ per a tot $s \leq t$;

i en tots els casos, X_t ha de ser $\mathcal{F}_t$ -adaptat i $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.

Aquestes tres categories tenen una interpretació intuïtiva molt útil: una martingala representa un “joc just”, en què el valor esperat futur és igual al present. Una submartingala modelitza un “joc favorable”, en què l'esperança futura tendeix a créixer, mentre que una supermartingala correspon a un “joc desfavorable”, amb esperança decreixent.

També podem construir submartingales aplicant funcions convexes a martingales. Aquest resultat és una aplicació elegant de la desigualtat de Jensen.

Observació 4.1.4. ^{4.1}

La desigualtat de Jensen estableix que, si φ és una funció convexa i $X \in L^1$, aleshores:

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

Aquest resultat també és vàlid en esperances condicionals:

$$\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{G}].$$

Proposició 4.1.5. ^{4.2}

(a) Si $\{X_t\}$ és una **martingala** i ϕ és una funció **convexa** tal que $\phi(X_t) \in L^1$, aleshores el procés $Y_t = \phi(X_t)$ és una **submartingala**.

(b) Si $\{X_t\}$ és una **submartingala** i ϕ és una funció **convexa i creixent** tal que $\phi(X_t) \in L^1$, aleshores el procés $Y_t = \phi(X_t)$ també és una **submartingala**.

^{4.1}Vegeu Calin, O. *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance*. Capítol 1, Teorema 1.12.1, pàgina 16.

^{4.2}Vegeu Calin, O. *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance*. Capítol 2, Proposició 2.9.3, pàgina 47.

Demostració. (a) Utilitzant la desigualtat de Jensen per a esperances condicionals (vegeu l'Exercici 1.12.6), tenim:

$$\mathbb{E}[Y_{t+s} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\phi(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] \geq \phi(\mathbb{E}[X_{t+s} | \mathcal{F}_t]) = \phi(X_t) = Y_t.$$

(b) A partir de la propietat de submartingala i la monotonia de ϕ , es té:

$$\phi(\mathbb{E}[X_{t+s} | \mathcal{F}_t]) \geq \phi(X_t).$$

Aplicant un raonament similar al de la part (a), obtenim que $Y_t = \phi(X_t)$ és també una submartingala. $\square$

4.2 Propietats fonamentals

Les martingales tenen propietats bàsiques que permeten combinar-les i transformar-les d'una manera controlada. En aquest apartat presentem algunes d'aquestes propietats, que seran útils per analitzar el comportament de processos estocàstics en evolució.

Definició 4.2.1. Un procés estocàstic $H = \{H_t\}_{t \geq 0}$ es diu **previsible** si és mesurable respecte a la σ -algebra previsible, és a dir, si per a cada $t > 0$, H_t és $\mathcal{F}_{t-}$ -mesurable. En temps discret, això equival simplement a que H_t sigui $\mathcal{F}_{t-1}$ -mesurable.

A més, diem que H és **fitat** si existeix una constant $K > 0$ tal que $|H_t(\omega)| \leq K$ per a tot t i $\omega \in \Omega$.

Proposició 4.2.2. Sigui $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ una martingala i $H = \{H_t\}_{t \geq 0}$ un procés previsible i fitat. Aleshores, el procés

$$Y_t := \int_0^t H_s dX_s$$

és una martingala.

Demostració. Com que H és un procés previsible i fitat, existeix una constant $K > 0$ tal que $|H_t(\omega)| \leq K$ per a tot $t \geq 0$ i $\omega \in \Omega$. A més, com que X és una martingala contínua, l'integral estocàstica $Y_t = \int_0^t H_s dX_s$ està ben definida com a integral d'Itô.

Per a demostrar que Y és una martingala, considerem $0 \leq s \leq t$. Llavors:

$$\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} \left[\int_0^s H_u dX_u + \int_s^t H_u dX_u \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

El primer terme $\int_0^s H_u dX_u$ és $\mathcal{F}_s$ -mesurable, i pel fet que H és previsible i fitat, i X és una martingala, l'esperança condicional del segon terme és nul·la. Així, obtenim:

$$\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s] = \int_0^s H_u dX_u = Y_s.$$

Per tant, $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ és una martingala. $\square$

El procés $Y_t = \int_0^t H_s dX_s$ s'anomena *producte estocàstic*, o també *transformació d'una martingala*.

Proposició 4.2.3. *Siguin $(B_t)_{t \geq 0}$ un moviment Brownià estàndard adaptat a una filtració $(\mathcal{F}_t)$. Aleshores, els següents processos són martingales:*

1. B_t ,
2. $B_t^2 - t$,
3. $M_t := \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$, per a tot $\sigma \in \mathbb{R}$.

Demostració.

1. El procés B_t és una martingala respecte a la seva filtració natural pel fet que els seus increments són independents, amb esperança nul·la i tenen moments finits.
2. Sigui $M_t := B_t^2 - t$. Per a $0 \leq s < t$, desenvolupem:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] + 2B_s\mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + B_s^2 \\ &= (t - s) + 0 + B_s^2 = B_s^2 + (t - s),\end{aligned}$$

per la independència dels increments i la normalitat centrada. Així doncs,

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = B_s^2 - s = M_s,$$

i per tant $(B_t^2 - t)$ és una martingala.

3. Sigui $\sigma \in \mathbb{R}$ i definim

$$M_t := \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right).$$

Per a $0 \leq s < t$, tenim:

$$M_t = M_s \cdot \exp\left(\sigma(B_t - B_s) - \frac{\sigma^2}{2}(t - s)\right).$$

Com que $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ i és independent de $\mathcal{F}_s$, la variable

$$Z := \exp\left(\sigma(B_t - B_s) - \frac{\sigma^2}{2}(t - s)\right)$$

és tal que $\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_s] = 1$. Per tant:

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s \cdot \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_s] = M_s.$$

Així, $(M_t)_{t \geq 0}$ és una martingala.

□

4.3 Teorema de caracterització de Lévy

El moviment Brownià es pot definir mitjançant diverses propietats: trajectòries contínues, increments independents i estacionaris, distribució normal i mitjana nul·la. Tot i això, la teoria moderna de martingales ens permet caracteritzar aquest procés de manera més econòmica i elegant, a partir de condicions internes més simples.

Aquesta idea es concreta en el que es coneix com a **teorema de caracterització de Lévy**, el qual proporciona condicions suficients (i en alguns casos necessàries) perquè un procés estocàstic amb trajectòries contínues sigui un moviment Brownià. En aquest apartat, presentem dues formulacions d'aquest resultat. La primera, més intuïtiva, es basa en dues martingales associades al procés. La segona, més concisa i moderna, utilitza la variació quadràtica del procés.

En molts contextos del càlcul estocàstic, apareixen processos que no són martingales pròpiament dites, però que es comporten com a martingales quan s'aturen convenientment. Aquest tipus de processos reben el nom de *martingales locals*. Abans de definir-les formalment, observem que aquests processos solen tenir trajectòries amb certa regularitat. En particular, sovint es requereix que siguin **càdlàg**, és a dir, contínues per la dreta i amb límits per l'esquerra. Tot i que no desenvoluparem aquesta noció en profunditat, és una propietat tècnicament important en l'estudi de processos en temps continu.

Definició 4.3.1. *Un procés estocàstic $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, adaptat a una filtració $\{\mathcal{F}_t\}$, es diu **martingala local** si existeix una successió creixent d'instants d'aturades $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\tau_n \uparrow \infty$ gairebé segur, i per a cada n , el procés truncat $X_t^{\tau_n} := X_{t \wedge \tau_n}$ és una martingala.*

En la definició anterior hem utilitzat el concepte de **procés truncat**. Donem-ne una breu explicació:

Definició 4.3.2. *Sigui $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un procés estocàstic i τ una aturada. El **procés truncat** X^τ és el procés definit per*

$$X_t^\tau := X_{t \wedge \tau}, \quad \text{per a tot } t \geq 0.$$

Això vol dir que X^τ coincideix amb X fins a l'instant τ , i a partir d'aquest moment roman constant.

Teorema 4.3.3 (Caracterització de Lévy).^{4.3} *Sigui $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ una martingala local contínua respecte d'una filtració $\mathcal{F}_t$, tal que:*

1. $M_0 = 0$,
2. $\langle M \rangle_t = t$, per a tot $t \geq 0$.

Aleshores, M és un moviment Brownià estàndard.

4.4 Canvi de mesura i representació de martingales

En molts contextos pràctics, especialment en finances, és habitual treballar amb processos estocàstics que incorporen una deriva. Això planteja una qüestió fonamental: és possible

^{4.3}Vegeu Karatzas, I., & Shreve, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1991. Capítol 3, Theorem 3.16, pàgina 157.

transformar un moviment Brownià amb deriva en un moviment Brownià estàndard? La resposta és afirmativa, i es fonamenta en el canvi de mesura, que permet reescriure el procés sota una nova probabilitat equivalent on la deriva desapareix.

Per exemple, el moviment Brownià amb deriva

$$X_t = \mu t + \sigma B_t$$

no és una martingala sota la mesura de probabilitat original, ja que té esperança $\mathbb{E}[X_t] = \mu t$, que no és constant. Tot i així, sota una mesura equivalent, aquest procés pot ser vist com un moviment Brownià, la qual cosa simplifica molt el càlcul d'esperances i probabilitats, especialment en el context de la valoració d'actius.

Exemple 4.4.1. Considerem el procés $X_t = \mu t + \sigma B_t$. Tot i que no és una martingala sota la mesura original, es pot construir una nova mesura de probabilitat sota la qual aquest procés es comporti com un moviment Brownià estàndard. Aquest canvi es pot fer a través de tècniques com el teorema de Girsanov, que s'ha desenvolupat detalladament a la secció 7.2. Així, per a finalitats de càlcul, podem substituir el procés amb deriva per un Brownià sota la nova mesura.

Més enllà d'aquest exemple, un dels resultats més potents de la teoria de martingales contínues és que tota martingala d'aquest tipus pot expressar-se com una integral estocàstica respecte al moviment Brownià. Aquesta representació és fonamental per a la teoria del càlcul estocàstic, ja que justifica l'ús del Brownià com a element generador d'incertesa.

Teorema 4.4.2 (Teorema de representació de martingales).^{4.4}

Sigui $B = (B_t)$ un moviment Brownià i $(\mathcal{F}_t)$ la seva filtració natural. Si $M = (M_t)$ és una martingala contínua amb moment d'ordre dos respecte a $(\mathcal{F}_t)$, llavors existeix un procés previsible $H = (H_t)$, tal que:

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s.$$

Aquest resultat mostra que, dins d'aquest marc, el moviment Brownià és suficient per generar qualsevol martingala contínua. Això no només té implicacions teòriques profundes, sinó que també permet construir models complexos a partir d'elements bàsics.

En conjunt, tant el canvi de mesura com la representació de martingales són eines essencials per a l'anàlisi de processos en temps continu. Són la base de moltes aplicacions, com veurem en capítols posteriors, des de la valoració de derivats financers fins a la modelització de dinàmiques estocàstiques en àmbits diversos.

^{4.4}Vegeu Lamberton, D., & Lapeyre, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall/CRC, 2a edició, 2008. Capítol 4, Teorema 4.2.4, pàgina 91.

Capítol 5

Integració Estocàstica

Aquest capítol es basa principalment en la Secció 4.1 del llibre *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance* de Calin, O., així com en la Secció 4.1 del llibre *Stochastic Processes and Their Applications to Mathematical Finance* de Fanning, S. & Parekh, J. Ambdós llibres estan referenciats a la bibliografia.

5.1 Construcció de la integral estocàstica

En aquest apartat introduïrem la integració estocàstica, que és l'eina matemàtica essencial per a treballar amb processos no diferenciables com el moviment Brownià. Aquest tipus d'integració és fonamental en la teoria de processos estocàstics i, en particular, constitueix la base analítica dels models com el de Stern (2015), on la variable aleatòria que descriu l'avantatge d'un equip sobre l'altre s'assumeix com a solució d'una equació diferencial estocàstica de la forma:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dB(t),$$

on $B(t)$ és un moviment Brownià estàndard. Per tal que aquesta expressió tingui un significat rigorós, cal definir què significa integrar respecte a $B(t)$.

Com hem vist anteriorment, el moviment Brownià presenta trajectòries contínues però no diferenciables, amb probabilitat 1. Aquesta irregularitat fa inviable l'ús de tècniques clàssiques d'integració com la de Riemann o Lebesgue. En lloc d'això, es requereix una teoria específica que tingui en compte la naturalesa aleatòria i la no anticipació dels processos implicats. Això dona lloc a la construcció de la **integral estocàstica**, i en particular, a la **integral d'Itô**.

Per tal de definir la integral de manera general i ben comportada, treballem amb el conjunt de processos adaptats $H : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfan la condició:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H(t)^2 dt \right] < \infty.$$

Aquests processos formen un espai funcional que denotem per $L^2([0, T] \times \Omega)$ on podem definir límits amb sentit probabilístic, fet que ens permet construir la integral d'Itô per aproximació. És important notar que aquest espai admet estructura de norma. Abans de definir la integral estocàstica, cal precisar la classe de processos sobre la qual es construeix inicialment la definició.

Definició 5.1.1. Un **procés simple** és un procés estocàstic $H : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que pren la forma:

$$H(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i(\omega) \cdot \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$

on $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ és una partició de l'interval $[0, T]$, i per a cada i , la variable aleatòria H_i és $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable.

Aquestes condicions asseguruen que el procés només depèn de la informació disponible fins a l'instant t_i , és a dir, *no anticipa* el futur. Aquests processos s'utilitzen com a base per definir la integral estocàstica per a casos més generals.

Donat un moviment Brownià $B(t)$ i un procés adaptat $H \in L^2([0, T] \times \Omega)$, considerem una successió de *processos simples adaptats* (H_n) tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (H_n(t) - H(t))^2 dt \right] = 0.$$

Per a cada procés simple H_n , la seva integral respecte a B es defineix com:

$$\int_0^T H_n(t) dB(t) := \sum_{i=0}^{n-1} H_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)),$$

on H_i és $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable.

Definició 5.1.2. Siguin $H \in L^2([0, T] \times \Omega)$ i (H_n) una successió de processos simples adaptats tal que $H_n \rightarrow H$ en L^2 . Aleshores, definim la integral d'Itô de H respecte al moviment Brownià B com:

$$\int_0^T H(t) dB(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T H_n(t) dB(t),$$

on el límit es pren en $L^2(\Omega)$.

Aquesta construcció es fonamenta en el concepte de **convergència en norma a L^2** . Donada una successió de processos adaptats (H_n) i un procés límit H , diem que $H_n \rightarrow H$ en $L^2([0, T] \times \Omega)$ si es compleix:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (H_n(t) - H(t))^2 dt \right] = 0.$$

Proposició 5.1.3. Aquesta definició no depèn de la successió de processos simples escollida, és a dir, el límit en L^2 és únic. A més, l'aplicació

$$H \mapsto \int_0^T H(t) dB(t)$$

és lineal i contínua de $L^2([0, T] \times \Omega)$ a $L^2(\Omega)$.

5.2 Propietats fonamentals de la integral d'Itô

En aquest apartat establim les propietats fonamentals de la integral estocàstica, que justifiquen la seva utilitat i la coherència de la seva definició. Aquestes propietats, com ara la linealitat, l'esperança nul·la o la famosa isometria d'Itô, són essencials per poder operar amb integrals estocàstiques de manera rigorosa i permeten desenvolupar eines analítiques per al càlcul estocàstic.

Proposició 5.2.1. *Sigui $H, K \in L^2([0, T] \times \Omega)$ dos processos adaptats de quadrat integrable, i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Aleshores:*

$$\int_0^T (\lambda H(t) + \mu K(t)) dB(t) = \lambda \int_0^T H(t) dB(t) + \mu \int_0^T K(t) dB(t).$$

Aquesta propietat deriva del fet que la combinació lineal de dues successions convergents també convergeix en L^2 , i la integral d'Itô conserva la linealitat a nivell de processos simples. És a dir, si $H_n \rightarrow H$ i $K_n \rightarrow K$ en L^2 , aleshores també:

$$\lambda H_n + \mu K_n \rightarrow \lambda H + \mu K,$$

i el límit de les integrals també es combina linealment.

Una altra propietat fonamental de la integral d'Itô és que té esperança nul·la. Aquest resultat és conseqüència directa del fet que el moviment Brownià té increments amb esperança zero, juntament amb la definició de la integral com a límit en L^2 .

Proposició 5.2.2. *Sigui $H \in L^2([0, T] \times \Omega)$ un procés adaptat. Aleshores:*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H(t) dB(t) \right] = 0.$$

Una de les propietats més importants de la integral d'Itô és la seva *isometria*, la qual estableix una igualtat entre la norma al quadrat (en $L^2(\Omega)$) de la integral i la norma al quadrat (en $L^2([0, T] \times \Omega)$) del procés que estem integrant. Aquesta propietat no només justifica l'extensió de la definició de la integral més enllà dels processos simples, sinó que també permet calcular de manera directa la variància de la integral.

Proposició 5.2.3. *Sigui $H \in L^2([0, T] \times \Omega)$ un procés adaptat. Aleshores:*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H(t) dB(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T H^2(t) dt \right].$$

Aquest resultat s'anomena isometria perquè mostra que l'esperança del quadrat de la integral d'Itô és igual a l'esperança de la integral del quadrat del procés integrat. Això significa que la variabilitat mitjana de la integral és exactament la mateixa que la del procés original.

Observació 5.2.4. L'isometria d'Itô és una eina fonamental tant per al càlcul explícit d'esperances i variàncies, com per justificar que la definició de la integral d'Itô és coherent i ben plantejada en l'àmbit L^2 . A més, aquest resultat és la base per a l'estudi del càlcul diferencial estocàstic.

Una conseqüència immediata de l'isometria d'Itô és la possibilitat de calcular de manera directa la *variància* de la integral d'Itô. Recordem que, per a qualsevol variable aleatòria amb esperança zero, la seva variància coincideix amb el seu segon moment:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] \quad \text{si } \mathbb{E}[X] = 0.$$

Com que ja sabem que:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H(t) dB(t) \right] = 0,$$

la variància de la integral és simplement:

$$\text{Var} \left(\int_0^T H(t) dB(t) \right) = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H(t) dB(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T H^2(t) dt \right].$$

Les propietats que hem presentat, linealitat, esperança nul·la, isometria i càlcul de la variància, són la base que fa possible treballar amb integrals estocàstiques de manera rigorosa. Aquestes propietats justifiquen que puguem operar amb aquestes integrals d'una forma similar a com ho fem amb les integrals clàssiques, però amb les precaucions pròpies del càlcul estocàstic.

En particular, l'isometria proporciona el control necessari per estendre el càlcul a processos més generals, i la combinació de totes aquestes propietats és essencial per formular i demostrar resultats com el *lema d'Itô*, que veurem a continuació. Aquest lema constitueix l'eina fonamental per derivar i transformar expressions que inclouen integrals respecte a moviment Brownià, i és l'equivalent estocàstic de la regla de la cadena del càlcul diferencial clàssic.

5.3 Lema d'Itô

El lema d'Itô és un dels resultats centrals del càlcul estocàstic. Es pot considerar com l'equivalent estocàstic de la regla de la cadena del càlcul diferencial clàssic. La seva funció és descriure com evoluciona una funció $f(X_t)$ quan X_t és un procés aleatori, com pot ser un moviment Brownià o, més generalment, un procés d'Itô. A diferència del càlcul clàssic, aquí cal tenir en compte la variació quadràtica del procés, la qual introdueix un terme addicional a la derivada.

Teorema 5.3.1 (Lema d'Itô).^{5.1} *Siguin $(B_t)_{t \geq 0}$ un moviment Brownià i $f \in C^2(\mathbb{R})$. Aleshores, el procés $Y_t = f(B_t)$ satisfà:*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds.$$

El primer terme del membre dret és una integral d'Itô, mentre que el segon és una integral clàssica (de Lebesgue). Aquesta expressió reflecteix que, fins i tot si f és suau, el comportament irregular del moviment Brownià fa que $f(B_t)$ tingui una evolució amb un component addicional degut a la seva variació quadràtica. Aquest fet fa aparèixer el terme amb f'' , absent en la regla de la cadena del càlcul clàssic.

^{5.1}Vegeu Kozdron, M. J., *Lectures on Stochastic Calculus with Applications to Finance*. Capítol 14, Teorema 14.1, pàgina 58.

Observació 5.3.2. Aquest resultat no només és útil per calcular expressions concretes, sinó que és fonamental per derivar equacions diferencials estocàstiques que governen l'evolució de processos transformats, com veurem en capítols posteriors.

Exemple 5.3.3. Considerem la funció $f(x) = x^2$, definida sobre $\mathbb{R}$. Tot i que aquesta funció és clàssica, podem aplicar-la a un procés estocàstic com el moviment Brownià B_t , simplement avaluant-la punt per punt al llarg de la trajectòria del procés. Això vol dir que definim un nou procés:

$$Y_t = f(B_t) = B_t^2.$$

Aplicant el lema d'Itô, i sabent que $f'(x) = 2x$ i $f''(x) = 2$, obtenim:

$$B_t^2 = B_0^2 + \int_0^t 2B_s dB_s + \int_0^t 1 ds.$$

Com que $B_0 = 0$, aquesta identitat es redueix a:

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Aquest càlcul mostra com el lema d'Itô permet obtenir expressions explícites per a integrals estocàstiques, i il·lustra com el terme amb f'' compensa el comportament irregular del moviment Brownià.

Capítol 6

Equacions Diferencials Estocàstiques (EDEs) i aplicacions

Aquest capítol es basa principalment en el Capítol 7 del llibre *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance* de Calin, O., en particular en les Seccions 7.1 i 7.4. Aquest llibre està referenciat a la bibliografia.

6.1 Fonaments de les EDEs

Les equacions diferencials estocàstiques (EDEs) són una extensió natural de les equacions diferencials ordinàries (EDOs) en què s'incorpora una part aleatòria per modelitzar la incertesa pròpia de molts fenòmens reals, com ara els mercats financers, la física de partícules o el rendiment esportiu.

Definició 6.1.1. *Una equació diferencial estocàstica és una equació de la forma:*

$$dX_t = a(t, W_t, X_t) dt + b(t, W_t, X_t) dW_t,$$

on:

- X_t és el procés estocàstic a determinar,
- $a(t, W_t, X_t)$ representa el terme de deriva (*drift*),
- $b(t, W_t, X_t)$ representa la volatilitat o coeficient de difusió,
- W_t és un moviment brownià estàndard.

Aquesta expressió diferencial s'interpreta com la següent equació integral en el sentit d'Itô:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, W_s, X_s) ds + \int_0^t b(s, W_s, X_s) dW_s.$$

El procés X_t es considera una solució forta si és adaptat a la filtració generada per W_t i satisfà aquesta equació integral amb una probabilitat igual a 1.

Observació 6.1.2. Dir que una equació s'ha de satisfer amb una probabilitat igual a 1 significa que la propietat és certa quasi segurament, és a dir, per a totes les trajectòries tret d'un conjunt de probabilitat nul·la.

Teorema 6.1.3 (Existència i unicitat).^{6.1} *Considerem l'equació diferencial estocàstica*

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = c,$$

on c és una constant i b i σ són funcions contínues definides a $[0, T] \times \mathbb{R}$, que satisfan:

1. $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$, per a tot $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$,
2. $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$, per a tot $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$,

amb $C, K > 0$ constants.

Aleshores, existeix un únic procés X_t solució, que és continu i satisfà

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t^2 dt \right] < \infty.$$

Les solucions d'equacions diferencials estocàstiques, així com molts dels processos implicats en el càlcul estocàstic, es consideren dins de l'espai funcional $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, format per totes les variables aleatòries X tals que

$$\mathbb{E}[X^2] < \infty.$$

com hem explicat al capítol anterior. Aquestes variables s'anomenen variables quadrat-integrables, o també podem dir que tenen segon moment finit. A més, gràcies a la desigualtat de Jensen, sabem que si una variable aleatòria és quadrat-integrable, llavors també és integrable, ja que

$$(\mathbb{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}[X^2].$$

Aquesta propietat permet treballar amb esperances, variàncies i covariàncies de manera ben definida dins l'àmbit de les EDEs.

Pel que fa a la interpretació dels termes que apareixen en una equació diferencial estocàstica del tipus

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t,$$

el coeficient $a(t, X_t)$, anomenat *drift* o *deriva*, representa la direcció i intensitat amb què el procés tendeix a evolucionar al llarg del temps. És a dir, indica cap a on i amb quina força es mou, de manera mitjana, el sistema que estem modelitzant. En canvi, el coeficient $b(t, X_t)$, conegut com a *volatilitat*, mesura quant de variable o incert és aquest moviment: quant pot arribar a desviar-se respecte d'aquesta tendència mitjana. Aquesta variabilitat es deu a l'efecte del *moviment brownià subjacent*, que introdueix una component aleatòria en l'evolució del procés.

^{6.1}Vegeu el Teorema 7.9.1 del Capítol 7 del llibre *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance*, d'O. Calin, pàgina 146.

En contextos aplicats com els models de Stern, utilitzats per estudiar l'evolució del marcador en competicions esportives, la deriva pot interpretar-se com l'avantatge o desavantatge mitjà entre dos equips, mentre que la volatilitat reflecteix la imprevisibilitat natural del desenvolupament del partit. Gràcies a aquests dos paràmetres, es poden quantificar probabilitats de victòria.

6.2 Resolució i canvi de mesura

Tot i que moltes equacions diferencials estocàstiques no es poden resoldre explícitament, en alguns casos és possible trobar una solució exacta. Aquest tipus de resolució s'assoleix quan els coeficients de l'equació compleixen certes condicions de regularitat i es poden relacionar amb una funció auxiliar adequada.

Definició 6.2.1 (Equació diferencial estocàstica exacta). *Considerem l'equació diferencial estocàstica:*

$$dX_t = a(t, W_t) dt + b(t, W_t) dW_t.$$

*Diem que aquesta equació és **exacta** si existeix una funció diferenciable $f(t, x)$ tal que:*

$$a(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x), \quad b(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x),$$

i les derivades $\partial_t f$, $\partial_x f$ i $\partial_x^2 f$ existeixen i són contínues.

En aquest cas, la solució de l'equació és:

$$X_t = f(t, W_t) + c,$$

on $c \in \mathbb{R}$ és una constant determinada per la condició inicial.

Exemple 6.2.2. Considerem l'equació diferencial estocàstica

$$dX_t = e^t(1 + X_t^2) dt + (1 + 2e^t X_t) dW_t,$$

on $\mu(t, x) = e^t(1 + x^2)$ és el terme de deriva, i $\sigma(t, x) = 1 + 2e^t x$ és el terme de difusió (volatilitat).

Volem trobar una solució exacta de la forma $X_t = f(t, W_t)$ per a una funció adequada f . La idea és construir f de manera que la seva derivada respecte a x coincideixi amb el terme de difusió. Com que la difusió és $\sigma(t, x) = 1 + 2e^t x$, proposem:

$$f(t, x) = x + e^t x^2.$$

Verifiquem ara que f genera la solució buscada. Calculem les derivades:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = e^t x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 1 + 2e^t x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 2e^t.$$

Substituïm a les expressions dels coeficients de l'EDE generada per f :

$$\mu(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = e^t x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2e^t = e^t x^2 + e^t = e^t(1 + x^2),$$

$$\sigma(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 1 + 2e^t x.$$

Aquests coeficients coincideixen amb els de l'equació inicial, i per tant f genera una solució exacta de l'EDE. La solució és:

$$X_t = f(t, W_t) + c = W_t + e^t W_t^2 + c,$$

on c es determina a partir de la condició inicial X_0 .

Una eina fonamental per a la manipulació de processos estocàstics és el canvi de mesura. Aquest canvi permet modificar l'estructura probabilística sota la qual s'observa un procés. Formalment, es fonamenta en el concepte de densitat de Radon-Nikodym.

Definició 6.2.3. *Siguin $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ dues mesures de probabilitat sobre un mateix espai de probabilitat. Es diu que $\mathbb{Q}$ és absolutament contínua respecte de $\mathbb{P}$, i s'escriu $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, si existeix una variable aleatòria $Z > 0$ tal que*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z.$$

Teorema 6.2.4 (Teorema de Girsanov).^{6.2} *Siguin $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ un procés adaptat que satisfà*

$$\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty \quad \text{gairebé segur,}$$

i tal que el procés $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ definit per

$$L_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

és una martingala. Aleshores, sota la probabilitat $\mathbb{Q}$ amb densitat L_T respecte a $\mathbb{P}$, el procés $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ definit per

$$W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$$

és un moviment brownià estàndard adaptat a $(\mathcal{F}_t)$.

Observació 6.2.5. El teorema de Girsanov permet transformar un moviment brownià amb deriva en un moviment brownià sota una mesura equivalent. Aquest canvi de mesura és essencial en contextos financers, ja que permet reformular l'evolució dels preus d'actius de manera que els preus descomptats es comportin com martingales sota la mesura de risc neutre.

6.3 Aplicacions en finances i esport

Les equacions diferencials estocàstiques (EDEs) són una eina fonamental per modelitzar sistemes afectats per la incertesa, com ara l'evolució del preu d'un actiu financer o el desenvolupament d'un esdeveniment esportiu. La presència del terme de deriva $\mu(t, X_t)$ i del terme de volatilitat $\sigma(t, X_t)$ permet descriure tant la tendència mitjana del sistema com la magnitud de la seva variabilitat.

^{6.2}Vegeu el Teorema 4.2.2 del Capítol 4 del llibre *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* de D. Lamberton i B. Lapeyre, pàgina 90.

En el context financer, és habitual representar el preu d'un actiu com un procés estocàstic continu en el temps. Una de les formulacions més bàsiques parteix del moviment brownià amb deriva i volatilitat constants:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

on S_t representa el preu de l'actiu en el temps t , μ és el creixement mitjà (esperat) i σ la volatilitat constant. Aquest tipus d'equació condueix al model de Black-Scholes, que es desenvoluparà amb detall al capítol 8.

Abans de considerar models complexos, convé entendre el comportament dels processos amb deriva i volatilitat constants. Suposem que X_t satisfà l'equació:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

En aquest cas, podem obtenir explícitament la seva esperança i variància:

$$\mathbb{E}[X_t] = X_0 + \mu t, \quad \text{Var}(X_t) = \sigma^2 t.$$

Això vol dir que el valor esperat del procés augmenta (o disminueix) de forma lineal, mentre que la incertesa creix com l'arrel quadrada del temps, reflectint la naturalesa difusiva del moviment brownià.

Aquest mateix tipus d'equació es pot aplicar a l'àmbit esportiu, com en els models de Stern, que modelitzen l'evolució del marcador entre dos equips. En aquest cas:

- la deriva μ representa l'avantatge esperat d'un equip sobre l'altre,
- la volatilitat σ reflecteix el nivell d'incertesa o irregularitat del partit.

El valor del procés es pot interpretar com un marcador latent que reflecteix l'evolució del partit. Si el procés pren valors positius, això pot indicar un avantatge latent de l'equip local; si és negatiu, de l'equip visitant. D'aquesta manera, la probabilitat de victòria d'un equip es pot associar a la probabilitat que el procés acabi per sobre (o per sota) d'un cert llindar, com ara el zero.

Aquesta aproximació permet incorporar tant informació observable, com la qualitat relativa dels jugadors, les estadístiques prèvies o l'estil de joc, com factors no observables, com ara la confiança, l'estrès o la fatiga, a través de l'ajust dels paràmetres de deriva i volatilitat. Així, el model s'adapta de forma flexible a la dinàmica de cada partit.

A més, en contextos esportius es poden considerar extensions del model com:

- una deriva no constant (per representar canvis de ritme o efectes de fatiga),
- una volatilitat creixent (per modelitzar moments de descontrol),
- o fins i tot processos amb reversió (per incorporar efectes de compensació).

Tant en finances com en esport, la interpretació del drift i la volatilitat depèn del context: mentre que a les finances el drift pot tenir significat econòmic o pot ser eliminat mitjançant un canvi de mesura, en l'esport acostuma a tenir una interpretació física o tàctica directa. En ambdós casos, però, les EDEs ofereixen una eina potent per analitzar l'evolució estocàstica d'un sistema, i preparen el terreny per al desenvolupament formal dels models de Bachelier i Black-Scholes al capítol següent.

A continuació, explorarem dos dels models més influents en la història de les finances quantitatives: el de Bachelier i el de Black-Scholes, que formalitzen amb detall les idees introduïdes en aquest capítol.

Capítol 7

Models clàssics de preus d'actius: Bachelier i Black-Scholes

En aquest capítol hem basat l'apartat 7.1 en la secció 3.3 del Capítol 3 de *Modeling Stock Prices with Differential Equations* de Barnett, J. i en la secció 2.1 del Capítol 2 de *On the Option Pricing Formula Based on the Bachelier Model*, de Terakado, S. i l'apartat 7.2 en la Secció 4.1 del Capítol 4 del llibre *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* de Lamberton, D. & Lapeyre, B., i en els Capítols 16 i 17 del llibre *Lectures on Stochastic Calculus with Applications to Finance* de Kozdron, M. J. Aquests llibres estan referenciats a la bibliografia.

L'ús de processos estocàstics per modelitzar fenòmens incerts en el temps és una eina fonamental tant en finances com en altres àmbits aplicats, com ara l'esport. En aquest treball, fem servir el model proposat per Polson i Stern (2015) per descriure com evoluciona l'avantatge d'un equip al llarg d'un partit mitjançant un moviment brownià amb deriva. Aquesta formulació ens permet quantificar la incertesa sobre el resultat mitjançant la noció de volatilitat implícita, un concepte estretament vinculat a la teoria financera.

Amb l'objectiu de situar teòricament el model de Stern dins del marc dels models estocàstics que s'han desenvolupat en finances, en aquest capítol presentarem dos models clàssics: el model de Bachelier, considerat el primer intent formal de modelitzar el preu d'un actiu amb eines estocàstiques; i el model de Black-Scholes, que ha esdevingut la base de la teoria moderna de valoració d'opcions. Tot i que cap dels dos no va ser pensat per al món esportiu, les seves estructures i idees tenen una relació directa amb el model que hem adoptat.

L'objectiu d'aquest capítol és, doncs, entendre com el model de Stern es compara amb els models estocàstics que han estat desenvolupats en finances. A través de la descripció dels models de Bachelier i Black-Scholes, es presentaran les principals característiques tècniques i matemàtiques d'aquests, mentre que els conceptes financers essencials com derivats europeus, carteres financeres i principi d'absència d'arbitratge es definiran i s'explicaran amb detall a l'apèndix A per facilitar la comprensió sense interrompre el fil principal del desenvolupament teòric.

7.1 El model de Bachelier

El model de Bachelier, proposat per Louis Bachelier l'any 1900 en la seva tesi doctoral *Théorie de la Spéculation*, constitueix la primera aplicació formal de les matemàtiques a l'estudi de l'evolució dels preus d'actius financers com accions o bons. Anys abans dels grans desenvolupaments del càlcul estocàstic, Bachelier ja va postular que els preus dels actius poden descriure's com un procés aleatori que evoluciona en el temps.

La innovació fonamental del seu model consisteix a suposar que els canvis de preu són aleatoris i segueixen una distribució normal, amb mitjana i variància constants. D'aquesta manera, els preus poden experimentar pujades o baixades imprevisibles, però dins d'una regularitat estadística ben definida.

Tot i que el model presenta limitacions importants, com la possibilitat de preus negatius, que no sempre té sentit econòmic, la seva aportació va ser decisiva per obrir la porta a la modelització estocàstica en finances, i molts dels conceptes introduïts per Bachelier continuen sent la base de models més avançats.

El model de Bachelier assumeix que el preu d'un actiu financer, que denotarem per S_t , evoluciona en el temps com la suma d'una tendència constant i d'unes fluctuacions aleatòries, representades per un procés brownià. Aquesta evolució s'expressa mitjançant una equació diferencial estocàstica de la forma següent:

Definició 7.1.1 (Model de Bachelier). *Es diu que un actiu financer $S = (S_t)_{t \geq 0}$ s'ajusta al model de Bachelier si el seu preu satisfà l'equació diferencial estocàstica*

$$dS_t = \mu dt + \sigma dB_t,$$

on:

- $\mu \in \mathbb{R}$ és la taxa mitjana de variació del preu (també anomenada deriva),
- $\sigma > 0$ és un paràmetre que mesura la magnitud de la volatilitat,
- $(B_t)_{t \geq 0}$ és un moviment brownià estàndard.

Aquesta equació reflecteix que els canvis en el preu d'un actiu són la suma d'un increment determinista i d'una part aleatòria. En el model de Bachelier, aquests canvis són absoluts i independents del nivell del preu, cosa que implica que el preu pot prendre qualsevol valor real, incloent-hi valors negatius. Aquesta característica fa que el model sigui especialment adequat per descriure variables que poden créixer o disminuir lliurement sense restriccions de signe, com per exemple certes variables financeres o esportives.

La simplicitat de l'equació diferencial estocàstica del model de Bachelier permet obtenir una solució explícita per integració directa. Procedim formalment a demostrar-ho.

Proposició 7.1.2 (Solució explícita del model de Bachelier). *Sigui $S = (S_t)_{t \geq 0}$ un procés que satisfà l'equació diferencial estocàstica del model de Bachelier, amb condició inicial S_0 . Llavors, per tot $t \geq 0$, tenim la solució explícita següent:*

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma B_t.$$

Demostració. Partim de l'equació diferencial estocàstica original del model:

$$dS_t = \mu dt + \sigma dB_t.$$

Per obtenir la solució, integrem aquesta expressió des de 0 fins a un temps $t > 0$:

$$\int_0^t dS_s = \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s.$$

La integral del terme de l'esquerra és simplement $S_t - S_0$. A la dreta, la integral del terme determinista μ és directa, mentre que la integral del terme estocàstic σdB_s correspon a una integral d'Itô sobre el moviment brownià:

$$S_t - S_0 = \mu t + \sigma B_t.$$

Aïllant S_t , obtenim immediatament la solució explícita anunciada:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma B_t,$$

tal com volíem demostrar. □

A partir de la solució explícita del model de Bachelier, podem caracteritzar amb precisió la distribució probabilística del preu de l'actiu en qualsevol moment del temps.

Proposició 7.1.3 (Distribució del preu de l'actiu en el model de Bachelier). *Per a tot $t \geq 0$, el preu de l'actiu S_t segueix una distribució normal, amb mitjana i variància donades per:*

$$S_t \sim \mathcal{N}(S_0 + \mu t, \sigma^2 t).$$

Demostració. Utilitzant la solució explícita del model de Bachelier ja demostrada, tenim:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma B_t.$$

Com que B_t és un moviment brownià estàndard, sabem que per definició $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. Per tant, $\sigma B_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.

Com que la suma d'una variable normal i una constant és normal, obtenim directament que:

$$S_t \sim \mathcal{N}(S_0 + \mu t, \sigma^2 t),$$

tal com volíem demostrar. □

Aquest resultat implica que la distribució del preu en el model de Bachelier és simètrica al voltant del valor mitjà $S_0 + \mu t$. La seva variància augmenta linealment amb el temps, fet que reflecteix la creixent incertesa sobre el preu futur a mesura que el temps avança.

La simplicitat i la distribució normal del preu en el model de Bachelier no només permeten caracteritzar fàcilment l'evolució de l'actiu, sinó que també faciliten el càlcul explícit del valor de derivats financers basats en aquest actiu.

Per a la valoració de derivats europeus basats en l'actiu subjacent S_t , considerem una data de venciment $T > t$ i una funció de pagament $\Phi(S_T)$. Sigui $C(S_t, t)$ el preu, en el

temps t , d'una opció europea de compra sobre l'actiu subjacent S_t . Aquest preu depèn del valor actual de l'actiu S_t i del temps restant fins al venciment T .

Donat que en el model de Bachelier S_T és una variable aleatòria normal amb mitjana

$$m = S_t + \mu(T - t)$$

i desviació típica

$$\sigma\sqrt{T - t},$$

és possible obtenir una expressió tancada per al valor $C(S_t, t)$ d'una opció europea de compra, amb preu d'exercici $K > 0$, la qual és:

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0).$$

La fórmula de Bachelier per al valor d'aquesta opció en l'instant $t \in [0, T)$ és

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \left[(m - K)\Phi(d) + \sigma\sqrt{T - t}\varphi(d) \right],$$

on

$$d = \frac{m - K}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

i on $\Phi(\cdot)$ i $\varphi(\cdot)$ representen respectivament la funció de distribució acumulada i la funció densitat de la normal estàndard.

Aquesta expressió es basa en la distribució normal de S_T i en la valoració per expectativa neutral al risc, assumint un tipus d'interès constant r .

La fórmula de Bachelier per al preu de l'opció de compra europea es basa en el fet que, sota la mesura neutral al risc, el valor actual del derivat és l'esperança del seu pagament futur descomptat. Això es pot expressar com

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0) \mid S_t].$$

Cal remarcar que l'existència d'una fórmula tancada i explícita per al preu de les opcions és un dels grans avantatges del model de Bachelier. No obstant això, l'ús d'aquest model ha de ser precís, ja que, com s'ha indicat, el preu pot prendre valors negatius, i la volatilitat es manté constant independentment del nivell del preu. Per aquests motius, el model resulta especialment útil en contextos on aquestes característiques són adequades, com ara en la valoració d'opcions sobre tipus d'interès en entorns de tipus negatius o en altres situacions on els preus poden, teòricament, esdevenir negatius com es menciona en *On the Option Pricing Formula Based on the Bachelier Model*, de Terakado, S.

A banda de les limitacions ja mencionades sobre els valors negatius, cal remarcar que el model de Bachelier assumeix una volatilitat constant i independent del nivell del preu. Aquesta hipòtesi simplificadora contrasta amb situacions habituals en mercats financers reals, on la volatilitat acostuma a canviar amb el temps i, sovint, augmenta proporcionalment al preu de l'actiu, com passa en el model de Black-Scholes. Aquesta diferència fa que, en contextos més complexos, el model de Bachelier pugui oferir prediccions menys precises.

Malgrat aquestes restriccions, aquest model continua sent útil i aplicable en determinats contextos específics. Així doncs, tot i les limitacions assenyalades, el model de Bachelier manté la seva rellevància en finances quantitatives, principalment per la seva simplicitat analítica i perquè encaixa perfectament en aquells escenaris particulars on les seves propietats bàsiques són adequades i realistes.

7.2 El model de Black-Scholes

Tot i que el model de Bachelier ofereix una descripció elegant però limitada de l'evolució dels preus, la realitat dels mercats financers va fer evident la necessitat d'un model en què els preus fossin sempre positius i les fluctuacions relatives fossin realistes. El model de Black-Scholes dona resposta a aquestes qüestions.

Aquest model descriu la dinàmica d'un actiu financer mitjançant un procés estocàstic multiplicatiu que reflecteix l'observació empírica que els preus no només fluctuen de manera aleatòria, sinó que aquestes fluctuacions són proporcionals al nivell de preu actual. Aquesta formulació assegura que el preu de l'actiu és sempre positiu i que els rendiments logarítmics segueixen una distribució normal. És per això que el model també es coneix com el moviment brownià geomètric.

Definició 7.2.1 (Model de Black-Scholes). *Sigui $S = (S_t)_{t \geq 0}$ un actiu financer i suposem que $S_0 > 0$. Es diu que l'actiu financer S s'ajusta al model de Black-Scholes si el seu preu satisfà l'equació diferencial estocàstica*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ és la taxa de creixement esperada del preu, $\sigma > 0$ és la volatilitat constant, i $(B_t)_{t \geq 0}$ és un moviment brownià estàndard.

Aquesta equació reflecteix una dinàmica on la deriva i la dispersió del procés són totes dues proporcionals al valor de l'actiu. Aquesta estructura implica que els canvis absoluts del preu poden ser més grans com més elevat sigui el seu valor, però els canvis relatius tenen una variabilitat constant. El fet que la variació sigui proporcional és essencial per garantir que el preu de l'actiu roman estrictament positiu.

La solució de l'equació es pot obtenir mitjançant un canvi de variables adequat i l'aplicació del càlcul d'Itô. Definim $X_t = \log S_t$. Aplicant la fórmula d'Itô a $X_t = \log S_t$, obtenim:

$$dX_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2.$$

Substituint dS_t per l'expressió de l'EDE:

$$dX_t = \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t.$$

Així, obtenim que $X_t = \log S_t$ segueix l'equació:

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t,$$

la qual és una EDE lineal amb solució explícita:

$$X_t = \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t.$$

Recuperant S_t , obtenim la solució del model de Black-Scholes:

Proposició 7.2.2 (Solució del model de Black-Scholes). ^{7.1} *La solució de l'equació diferencial estocàstica del model de Black-Scholes és*

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right), \quad t \geq 0.$$

^{7.1}Vegeu el llibre *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* de D. Lamberton i B. Lapeyre, Capítol 4, pàgina 88.

Aquest resultat mostra que el procés $S = (S_t)_{t \geq 0}$ és exponencial d'un moviment brownià amb deriva. Això implica que, per a tot temps $t \geq 0$, la variable $\log S_t$ és normal i, per tant, S_t segueix una distribució log-normal.

Proposició 7.2.3 (Distribució de S_t). ^{7.2} Per a tot $t \geq 0$, el procés S_t satisfà:

$$\log S_t \sim \mathcal{N} \left(\log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right),$$

i en conseqüència $S_t \sim \text{Lognormal}(\cdot)$.

La solució assegura que $S_t > 0$ amb probabilitat 1 per a tot t , ja que és l'exponencial d'una variable aleatòria. Això reflecteix millor la realitat dels mercats financers, on els preus d'actius no poden ser negatius. A més, el fet que $\log(S_t)$ sigui normalment distribuït implica que els rendiments logarítmics $\log(S_t/S_0)$ tenen distribució normal.

Finalment, cal destacar que el model de Black-Scholes es formula sota una sèrie d'hipòtesis ideals sobre el funcionament del mercat, com l'absència d'arbitratge, la negociació contínua, la inexistència de costos de transacció, i la possibilitat d'invertir tant en actius de risc com en un actiu lliure de risc. Per a una descripció detallada d'aquestes hipòtesis, vegeu l'Apèndix A. Aquest conjunt de supòsits no només permet descriure la dinàmica del preu d'un actiu financer, sinó que constitueix també la base per deduir una eina fonamental en finances: l'equació que ha de satisfer el valor d'un derivat que depèn d'aquest actiu. A partir d'aquestes hipòtesis, veurem com es pot construir una estratègia de cobertura que reproduïx el comportament d'una opció i com aquest plantejament condueix, de manera natural, a l'equació diferencial parcial coneguda com l'equació de Black-Scholes.

Suposem que es vol valorar un derivat financer europeu. Com que el preu de l'actiu segueix una dinàmica estocàstica segons el model de Black-Scholes, la funció $V(t, S_t)$ també serà una variable aleatòria que evoluciona en el temps. Per estudiar-ne l'evolució, aplicarem la fórmula d'Itô a la funció $V(t, S_t)$. Com $V(t, S_t)$ és una funció de classe $C^{1,2}$, aplicant la fórmula d'Itô, tenim:

$$dV(t, S_t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) (dS_t)^2.$$

Com que $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ i $(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$, obtenim:

$$dV(t, S_t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dB_t.$$

Per continuar amb la derivació de l'equació de Black-Scholes, considerarem una construcció fonamental en la teoria de valoració: la possibilitat de replicar el valor d'un derivat mitjançant una cartera formada per posicions en actius bàsics. Aquest enfocament parteix de la idea que, si és possible construir una cartera que reproduïx exactament els pagaments futurs d'un derivat, el valor d'aquest derivat hauria de coincidir amb el de la cartera, per evitar oportunitats d'arbitratge.

El valor total d'aquesta cartera en el temps t és:

$$V_t = \Delta_t S_t + \Pi_t.$$

^{7.2}Vegeu el llibre *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* de D. Lamberton i B. Lapeyre, Capítol 4, pàgina 88.

Suposem que aquesta cartera reproduceix exactament el valor del derivat en tot moment, és a dir, que $V_t = V(t, S_t)$, i que evoluciona de manera *autòfina*, és a dir, sense cap injecció externa de capital. Aquest plantejament permet deduir una equació diferencial per al valor del derivat basada en l'absència d'arbitratge.

A partir de la definició del valor de la cartera, la seva evolució temporal ve donada per:

$$dV_t = \Delta_t dS_t + r\Pi_t dt.$$

Substituint $\Pi_t = V(t, S_t) - \Delta_t S_t$, s'obté:

$$dV_t = \Delta_t dS_t + r(V(t, S_t) - \Delta_t S_t) dt.$$

D'altra banda, aplicant la fórmula d'Itô a $V(t, S_t)$, i fent servir la dinàmica de S_t , ja hem obtingut:

$$dV(t, S_t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dB_t.$$

Igualant les dues expressions anteriors per dV_t , i imposant que la cartera no presenti risc, és a dir, que el terme aleatori es cancel·li, obtenim:

$$\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t).$$

Substituint aquesta expressió a l'equació de la cartera, s'arriba a la condició següent:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

que és coneguda com l'**equació de Black-Scholes**.

Per tal d'obtenir una expressió explícita per al valor d'una opció de compra europea, considerem la següent condició terminal associada al derivat:

$$V(T, S) = \max(S - K, 0),$$

on $K > 0$ és el preu d'exercici de l'opció. Aquesta funció reflecteix el guany que obtindria el comprador si decidís exercir l'opció en el moment de venciment.

La resolució de l'equació de Black-Scholes amb aquesta condició terminal es pot efectuar mitjançant un canvi de variables adequat, que transforma l'equació en una equació de la calor homogènia. Tot i que els detalls tècnics de la transformació poden consultar-se en les fonts especialitzades, el resultat final d'aquesta resolució és la següent fórmula explícita:

Proposició 7.2.4 (Valor d'una opció europea de compra).^{7.3} *El preu d'una opció europea de compra amb venciment T i preu d'exercici K , en el temps $t \in [0, T)$, és:*

$$C(S, t) = S \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2),$$

on:

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

i $\mathcal{N}(\cdot)$ denota la funció de distribució acumulada d'una variable normal estàndard.

^{7.3}Vegeu el llibre *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* de Lamberton i Lapeyre, capítol 4, pàg. 94.

En resum, el model de Black-Scholes combina una formulació matemàtica sòlida amb unes hipòtesis de mercat que permeten obtenir una fórmula tancada per a la valoració d'opcions europees. Aquesta aportació va revolucionar la teoria financera moderna i, encara avui, la fórmula de Black-Scholes és un estàndard per a la valoració de derivats i per a la mesura de la volatilitat implícita en els mercats.

7.3 Comparació entre els models de Bachelier, Black-Scholes i Stern

El model de Stern representa una adaptació directa del model clàssic de Bachelier a l'àmbit esportiu. En lloc de modelitzar preus d'actius financers, Stern proposa descriure l'evolució de la diferència de punts entre dos equips durant un partit, una variable que pot prendre valors positius o negatius segons el marcador. Aquesta característica fa que el model lineal de Bachelier sigui especialment adequat per a aquest context, ja que no cal restringir la variable a valors positius.

En la formulació de Stern, la dinàmica del marcador s'expressa com un moviment brownià amb deriva, que representa l'avantatge esperat d'un equip, i amb una volatilitat que pot ser estimada i actualitzada a partir de la informació disponible. Aquesta volatilitat no és fixa, sinó que reflecteix la incertesa real i pot recalibrar-se dinàmicament a mesura que avança el partit, gràcies a les dades de mercat (quotes d'apostes) o a l'evolució del joc. Això permet adaptar el model a les condicions reals i canviants del partit, i fa possible una anàlisi més precisa i realista.

El model de Black-Scholes, en canvi, assumeix sempre preus positius i una dinàmica multiplicativa que resulta inaplicable a variables com la diferència de punts, ja que aquesta pot ser negativa. No obstant això, el marc conceptual de Black-Scholes ha inspirat elements fonamentals en el desenvolupament de models per a l'àmbit esportiu, com la valoració d'instruments derivats, l'ús de la volatilitat implícita i la gestió de riscos, que també poden tenir aplicació en la valoració d'apostes esportives dins de l'estructura de Stern.

L'avantatge principal de l'aproximació de Stern és la utilització d'un model estocàstic conegut i ben estudiat, el moviment brownià lineal, adaptat a la realitat esportiva. Això permet aplicar eines matemàtiques i estadístiques desenvolupades en finances per entendre i predir l'evolució dels partits, incloent la capacitat d'estimar la probabilitat de victòria d'un equip o la probabilitat que el marcador arribi a certs valors. La simplicitat i la tractabilitat del model faciliten la seva implementació computacional i la calibració amb dades reals, fent-lo útil per a aplicacions pràctiques com prediccions en temps real o la creació de mercats d'apostes més eficients i transparents.

Capítol 8

Aplicació del model de Stern a un partit de bàsquet professional

En aquest capítol s'aplica el model de Stern a l'anàlisi d'un partit real de bàsquet professional: el segon partit de quarts de final de la Lliga Endesa (ACB) entre el FC Barcelona i l'Unicaja de Màlaga, disputat el 6 de juny de 2025 al Palau Blaugrana, Barcelona. L'objectiu és mostrar de manera pràctica com els mètodes matemàtics i estadístics desenvolupats al llarg del treball es poden utilitzar per analitzar l'evolució d'un partit, estimar la probabilitat de victòria de cada equip a partir de les dades i de les quotes d'apostes en directe, i identificar possibles oportunitats d'aposta òptima.

La secció segueix l'estructura del model de Stern aplicada a esdeveniments esportius, adaptant-la al cas del bàsquet. En primer lloc, es presenta el context i la importància esportiva del partit, així com les variables clau estimades abans de l'inici (probabilitats pre-partit, expectativa de marcador, volatilitat). A continuació, s'analitza el desenvolupament del partit a través de diferents moments clau, comparant les probabilitats de victòria calculades pel model amb les estimades pel mercat d'apostes. Finalment, s'estudien possibles estratègies d'aposta a partir de les discrepàncies detectades, utilitzant el criteri de Kelly per determinar la mida òptima de l'aposta.

Aquest exemple pretén posar en valor la capacitat del model de Stern per avaluar de manera dinàmica la incertesa i l'evolució d'un partit real, així com la utilitat pràctica de la matemàtica financera en el context esportiu.

El partit analitzat correspon al segon enfrontament de la sèrie de quarts de final de la Lliga Endesa (ACB), disputada al millor de tres partits entre el FC Barcelona i l'Unicaja de Màlaga. El Barça arribava a aquest duel després d'haver guanyat el primer partit de la sèrie a Màlaga, en un final d'infart resolt a la pròrroga, i tenia l'oportunitat de segellar el passí a semifinals davant la seva afició. En canvi, per a l'Unicaja aquest era un partit decisiu: només la victòria li permetia forçar el tercer i definitiu partit de la sèrie.

El context de la temporada feia que l'enfrontament tingués una càrrega emocional i competitiva especialment alta. L'Unicaja arribava com un dels equips més en forma del bàsquet espanyol, després d'una temporada brillant en què ja havia aconseguit quatre títols: la Copa del Rei, la Supercopa d'Espanya, la Copa Intercontinental i la Basketball Champions League. A més havien aconseguit una meritòria quarta posició a la classificació regular de l'ACB. El Barça, en canvi, havia viscut una temporada molt irregular, finalitzant cinquè a la fase regular i sense títols, amb la necessitat imperiosa de

lluïtar pel campionat per salvar la temporada.

Els paràmetres inicials del model han estat obtinguts a partir de la informació proporcionada per la casa d'apostes **Bet365** just abans del començament del segon partit de quarts de final entre el FC Barcelona i l'Unicaja. Bet365 ha estat escollida per ser una de les plataformes més rellevants i utilitzades internacionalment, amb una àmplia cobertura i liquiditat per a esdeveniments esportius d'alt nivell, fet que garanteix dades representatives i fiables.

A més, per tal d'analitzar l'evolució de les probabilitats de victòria durant el partit, s'ha elaborat una taula on es recullen les quotes en directe de cada equip, segons les dades publicades per Bet365 al llarg del desenvolupament del partit. Aquesta taula completa es pot consultar a l'**Apèndix B**.

D'acord amb la informació proporcionada per Bet365, el **point spread** previ al partit era de +4 punts per al Barça. Aquest valor reflecteix l'expectativa del mercat que el Barça guanyaria el partit amb un avantatge mitjà de 4 punts sobre l'Unicaja. Aquest pronòstic estava justificat tant per l'avantatge de jugar a casa com pel fet d'haver guanyat el primer partit de la sèrie, fora de domicili i a la pròrroga, situant el Barça com a favorit per accedir a semifinals.

Per tot això, la deriva inicial del model s'estableix en $\mu = 4$, seguint la metodologia utilitzada per Stern (2015) i adaptant-la a la realitat del partit analitzat. Així doncs, la mitjana esperada de la diferència final de punts, $\mathbb{E}[X(1)]$, coincideix amb la deriva del model i és igual a 4:

$$\mathbb{E}[X(1)] = \mu = 4.$$

En l'aplicació del model de Stern a aquest partit, definim la variable aleatòria $X(t)$ com la diferència de punts a favor del Barça al minut t del partit, és a dir:

$$X(t) = (\text{Punts Barça fins al temps } t) - (\text{Punts Unicaja fins al temps } t).$$

Aquesta definició implica que si $X(1) > 0$ al final del temps reglamentari, el Barça és l'equip guanyador.

Cal remarcar que, de manera equivalent, es podria modelitzar $X(t)$ com l'avantatge de l'Unicaja sobre el Barça, definint $X(t) = (\text{Punts Unicaja fins al temps } t) - (\text{Punts Barça fins al temps } t)$. En aquest cas, la deriva del model seria -4 , i la resta de càlculs i resultats serien idèntics, simplement canviant el signe. Ambdues aproximacions són completament equivalents des del punt de vista matemàtic; l'elecció d'una o altra depèn únicament del punt de vista des del qual s'analitza el partit. En aquest treball, s'ha optat per modelitzar l'avantatge del Barça, per coherència amb la bibliografia i pel fet que el Barça era l'equip favorit segons les quotes pre-partit.

Abans de presentar les probabilitats implícites, cal aclarir que Bet365 proporciona quotes decimals, que són el valor que multiplicat per l'import apostat dona com a resultat el pagament total potencial; això és, els guanys més la quantitat apostada originalment. En canvi, el model de Stern utilitza quotes money-line per a les seves estimacions, les quals expressen el guany net que s'obtindria amb una aposta de 100 unitats (si la quota és positiva) o la quantitat que cal apostar per guanyar-ne 100 (si és negativa). Tot i això, aquestes dues formes són compatibles i es poden convertir fàcilment entre si mitjançant les fórmules següents:

$$\text{Moneyline} = \begin{cases} 100 \times (q - 1), & \text{si } q \geq 2, \\ -\frac{100}{q-1}, & \text{si } q < 2, \end{cases}$$

on q és la quota decimal.

La valoració prèvia al partit de la probabilitat que el Barça guanyés es va determinar a partir de les quotes decimals de Bet365, transformant-les en quotes money-line. En aquest cas, la quota moneyline del Barça era de -200 , mentre que la de l'Unicaja era de $+165$. Això significa que un apostador hauria de posar 200 unitats per guanyar 100 apostant pel Barça, mentre que una aposta de 100 unitats per l'Unicaja podria generar un guany de 165 en cas de victòria.

Aquestes quotes les podem convertir a probabilitats implícites de victòria per a cada equip mitjançant les fórmules:

$$p_{\text{favorit}} = \frac{|\text{moneyline}|}{|\text{moneyline}| + 100} \quad (\text{per a moneyline negatiu}),$$

$$p_{\text{outsider}} = \frac{100}{\text{moneyline} + 100} \quad (\text{per a moneyline positiu}).$$

Aplicant aquestes fórmules, obtenim que la probabilitat implícita de victòria del Barça és aproximadament 0.667, mentre que la de l'Unicaja és aproximadament 0.377. Aquestes probabilitats serveixen com a base per estimar la deriva inicial del model.

Les probabilitats implícites obtingudes a partir de les quotes no sumen exactament 1, sinó que la seva suma és superior a 1. Aquesta diferència s'anomena **market vig** o **bookmaker's edge**, i representa el marge de guany que els bookies (casa d'apostes) incorporen per assegurar-se un benefici independentment del resultat.

En el nostre cas, la suma de les probabilitats implícites per al Barça i l'Unicaja és

$$0.667 + 0.377 = 1.044,$$

és a dir, un $\approx 4.4\%$ de marge per a la casa d'apostes.

Per corregir aquest excés i obtenir probabilitats *netes* que sumen 1, podem ajustar les probabilitats inicials utilitzant una mitjana ponderada o un mètode de normalització. Per exemple, considerant $p_{\text{Barça}} = 0.667$ i $p_{\text{Unicaja}} = 0.377$, calculem la probabilitat corregida del Barça com

$$p = \frac{p_{\text{Barça}} + (1 - p_{\text{Unicaja}})}{2} = \frac{0.667 + (1 - 0.377)}{2} = 0.645,$$

que serà la probabilitat inicial que utilitzarem per al model, ajustada per tenir en compte el marge de la casa d'apostes.

Aquesta correcció és important per assegurar que el model de Stern treballi amb probabilitats coherents i que reflecteixin més fidelment la percepció del mercat sense el marge de beneficis dels bookies.

La volatilitat implícita del partit es calcula substituint el parell de paràmetres $(\mu, p) = (4, 0.645)$ en la nostra definició i resolent per σ_{IV} . Utilitzant la fórmula

$$\sigma_{\text{IV}} = \frac{\mu}{\Phi^{-1}(p)},$$

obtenim

$$\sigma_{IV} = \frac{4}{0.371} \approx 10.78,$$

on $\Phi^{-1}(p) \approx 0.371$ és la inversa de la funció de distribució normal estàndard aplicada a p . Aquest valor representa la volatilitat implícita que hem utilitzat per a l'anàlisi al llarg del partit.

Aquest valor de volatilitat implícita, d'uns 10.78 punts, té sentit en un partit de bàsquet de la Lliga ACB, ja que reflecteix la variabilitat típica que es pot esperar en el marcador durant el joc. Així, el model s'ajusta bé a la realitat esportiva que analitzem.

El segon partit de quarts de final de la Lliga ACB entre el Barça i l'Unicaja va ser un enfrontament decisiu per accedir a les semifinals. El Barça arribava a aquest partit amb un avantatge psicològic després de guanyar el primer partit a Màlaga en pròrroga, mentre que l'Unicaja necessitava la victòria per forçar el tercer i definitiu partit de la sèrie millor de tres.

Durant el transcurs del partit, la variable aleatòria $X(t)$, que representa la diferència de punts a favor del Barça en el minut t , va prendre els valors següents al final de cada quart:

$$X(0.25) = -7, \quad X(0.5) = -7, \quad X(0.75) = -16,$$

indicant una clara avantatge de l'Unicaja a mesura que avançava el partit. Al final del temps reglamentari, obtenim $X(1) = -22$ ja que el resultat final va ser 59-81, reflectint la victòria contundent de l'Unicaja.

És important destacar que l'anàlisi no inclou l'últim quart igual que la taula de quotes i probabilitats obtingudes de Bet365 que només arriba fins al final del tercer quart. En aquell moment, la probabilitat que l'Unicaja guanyés ja era aproximadament del 98%. Durant l'últim quart, la diferència en el marcador es va ampliar encara més, finalitzant el partit amb un resultat de 59-81 a favor de l'Unicaja. Aquesta evolució implica que la probabilitat de victòria de l'Unicaja també es va acostar a 1 a mesura que avançava l'últim quart. Per tant, la discrepància entre les probabilitats estimades pel model de Stern i les proporcionades pel mercat de Bet365 durant aquest període final va ser marginal, reflectint un consens clar en la predicció del resultat quan el domini d'un equip és evident.

El model permet identificar oportunitats d'aposta favorables quan existeix una diferència significativa entre la probabilitat estimada pel mercat i la probabilitat calculada pel model brownià amb paràmetres prepartit (deriva $\mu = 4$, volatilitat $\sigma = 10.78$). Aquesta estratègia pot ser vàlida mentre no es produeixin canvis rellevants en la informació (per exemple, lesions inesperades o girs de guió fora de model).

Per posar en pràctica el model de Stern i comprovar si s'identifiquen oportunitats de mercat reals, seleccionem el final de cadascun dels tres primers quarts del partit i calculem la probabilitat de victòria d'Unicaja segons el model, comparant-la amb la probabilitat implícita de les quotes de Bet365 en cada instant. Una oportunitat de mercat real es produeix quan la probabilitat estimada pel model és superior a la probabilitat implícita de les quotes del mercat.

Atès que les quotes decimals(q) i les probabilitats de victòria(p) estan inversament relacionades; és a dir,

$$p = \frac{1}{q},$$

una probabilitat més alta en el model implica que la quota equivalent seria més baixa que la quota ofertada pel mercat. La diferència entre aquestes quotes és el que permet identificar oportunitats explotables.

Final del primer quart ($t = 0,25$, $X(0,25) = -7$):

Aplicarem la fórmula següent, amb deriva $\mu = 4$ i volatilitat $\sigma = 10,78$:

$$z = \frac{X(t) + \mu(1-t)}{\sigma\sqrt{1-t}}$$

Substituïm els valors:

$$z = \frac{-7 + 4 \times 0,75}{10,78 \times \sqrt{0,75}} = \frac{-7 + 3}{10,78 \times 0,866} = \frac{-4}{9,33} \approx -0,43$$

La probabilitat de victòria d'Unicaja és:

$$p_{\text{Unicaja}} = 1 - \Phi(z) = 1 - \Phi(-0,43) \approx 1 - 0,334 = 0,666$$

La probabilitat de mercat (Bet365) era de 0,63.

El model identifica una oportunitat d'aposta a Unicaja, ja que la seva probabilitat segons el model és superior a la del mercat.

Final del segon quart ($t = 0,5$, $X(0,5) = -7$):

$$z = \frac{-7 + 4 \times 0,5}{10,78 \times \sqrt{0,5}} = \frac{-7 + 2}{10,78 \times 0,707} = \frac{-5}{7,62} \approx -0,66$$

$$p_{\text{Unicaja}} = 1 - \Phi(-0,66) \approx 1 - 0,255 = 0,745$$

La probabilitat de mercat (Bet365) era de 0,71.

De nou, el model suggereix una aposta a Unicaja, ja que la seva probabilitat és superior a la del mercat.

Final del tercer quart ($t = 0,75$, $X(0,75) = -16$):

$$z = \frac{-16 + 4 \times 0,25}{10,78 \times \sqrt{0,25}} = \frac{-16 + 1}{10,78 \times 0,5} = \frac{-15}{5,39} \approx -2,78$$

$$p_{\text{Unicaja}} = 1 - \Phi(-2,78) \approx 1 - 0,003 = 0,997$$

La probabilitat de mercat (Bet365) era de 0,98.

En aquest punt la diferència encara existeix però ja és marginal, donada la victòria pràcticament assegurada d'Unicaja.

En els tres moments analitzats, el model estima una probabilitat de victòria per Unicaja superior a la del mercat. Per tant, en tots tres casos s'identifica una oportunitat d'aposta favorable a Unicaja, especialment rellevant en els dos primers quarts, mentre que en el tercer la diferència és petita.

Tot i que el model identifica oportunitats d'aposta favorables a Unicaja en els tres finals de quart analitzats, cal tenir en compte el risc i el context de cada moment per valorar si realment seria una aposta òptima des del punt de vista pràctic.

Al final del primer quart, la diferència al marcador és de només 7 punts i encara resten tres quarts per jugar. Tot i que la probabilitat de victòria d'Unicaja estimada pel model

(66,6%) és superior a la del mercat (63%), aquest avantatge no és molt gran i el risc que la situació del partit es reverteixi encara és elevat. Apostar en aquest moment pot implicar una volatilitat considerable, ja que una diferència de set punts a bàsquet és relativament fàcil de remuntar i a més la volatilitat restant és de 9.34, major que la ventatge de 7 punts.

A l'altre extrem, al final del tercer quart la victòria d'Unicaja és pràcticament assegurada (99,7% segons el model), però la quota que ofereix el mercat és molt baixa (1,02). Això vol dir que per apostar 100 unitats només s'obtindria un benefici de 2, fet que fa poc atractiva l'aposta pel rendiment limitat.

La situació més interessant i pràctica es produeix al descans, al final del segon quart. Aquí la discrepància entre el model (74,5% de probabilitat de victòria) i la probabilitat de mercat (71%) és la més gran observada, i la quota (1,40) permetria un retorn més substancial si l'aposta resulta encertada. Aquesta combinació de probabilitat elevada, diferència significativa amb el mercat i una quota raonable fa d'aquest moment el millor per plantejar una aposta segons el model de Stern.

Per determinar la mida òptima de l'aposta al descans, apliquem el criteri de Kelly utilitzant la probabilitat estimada pel model i la quota del mercat. En aquest cas, la probabilitat d'Unicaja segons el model és $p = 0,745$, mentre que la quota decimal de Bet365 era $q = 1,40$, que correspon a una quota moneyline de $O_{\text{mkt}} = -250$.

La fórmula general del criteri de Kelly és:

$$\omega^* = p - \frac{1 - p}{|O_{\text{mkt}}|/100}$$

Així doncs,

$$\omega^* = 0,745 - \frac{0,255}{2,5} = 0,745 - 0,102 = 0,643$$

Això suggereix apostar aproximadament un 64,3% del capital disponible en aquest escenari.

Cal remarcar que, tot i que el criteri de Kelly proporciona la fracció teòricament òptima per maximitzar el creixement a llarg termini, normalment s'utilitza una fracció més petita per reduir el risc. Per exemple, amb un criteri de Kelly fraccional amb paràmetre d'aversion al risc $\gamma = 3$, la mida recomanada seria aproximadament un 21% del capital.

Per a una explicació detallada del criteri de Kelly i de com s'aplica a la gestió òptima de la mida de l'aposta, es pot consultar l'Appendix A.

Tal com s'ha explicat prèviament al Capítol 1, la *volatilitat implícita variable* $\sigma_{IV,t}$ representa una mesura ajustada de la incertesa restant en el partit, basada en la informació disponible en un moment concret t . Aquesta mesura és especialment útil per captar les expectatives actuals del mercat, que poden diferir de la volatilitat inicial suposada pel model, i permeten avaluar com evoluciona la percepció del risc al llarg del temps.

A continuació, es calcula la volatilitat implícita variable al descans del partit (temps $t = 0,5$), quan la diferència de punts era $l = X(0,5) = -7$, i la probabilitat de victòria del Barça segons el mercat (Bet365) era $p_{t,l} = 0,33$. La fórmula per a la volatilitat implícita variable és:

$$\sigma_{IV,t} = \frac{l + \mu(1 - t)}{\Phi^{-1}(p_{t,l})\sqrt{1 - t}},$$

on $\mu = 4$ és la deriva inicial.

Substituint els valors:

$$\sigma_{IV,0.5} = \frac{-7 + 4 \cdot (1 - 0.5)}{\Phi^{-1}(0.33) \cdot \sqrt{0.5}} = \frac{-7 + 2}{\Phi^{-1}(0.33) \cdot 0.707} = \frac{-5}{\Phi^{-1}(0.33) \cdot 0.707}.$$

Utilitzant que $\Phi^{-1}(0.33) \approx -0.4399$, obtenim:

$$\sigma_{IV,0.5} = \frac{-5}{-0.4399 \cdot 0.707} \approx 16.08.$$

Aquest valor de $\sigma_{IV,0.5}$ indica que, al descans, el mercat assignava una volatilitat implícita variable bastant superior a la inicial (que era de 10,78). Aquest augment reflecteix una percepció d'incertesa més gran en aquell moment del partit, possiblement pel fet que, malgrat la diferència negativa al marcador, el temps restant encara permetia remuntades, i la situació del partit es mantenia dinàmica.

Aquesta anàlisi mostra com la volatilitat implícita variable pot ser utilitzada per obtenir una visió més precisa de les expectatives del mercat i per ajustar el model a l'evolució real del joc. En futurs treballs, seria interessant estudiar l'evolució de $\sigma_{IV,t}$ al llarg del partit i comparar-la amb la volatilitat constant assumida inicialment, per detectar moments d'inestabilitat o canvis en la percepció del risc.

Un cop estimada la volatilitat implícita variable $\sigma_{IV,0.5} \approx 16.08$, es pot utilitzar aquest valor per recalculer la probabilitat de victòria d'Unicaja al acabar el tercer quart per exemple, ajustant el model a les condicions del moment. Aplicant la fórmula amb aquest nou valor de volatilitat, obtenim:

$$z = \frac{-7 + 2}{16.08 \cdot \sqrt{1 - 0.75}} \approx -0.6219 \quad p_{\text{Unicaja}} = 1 - \Phi(-0.6219) \approx 0.73.$$

És interessant observar que, en aquest cas concret, l'ús de la volatilitat implícita variable ha empitjorat dràsticament la precisió del model respecte a la probabilitat proporcionada pel mercat. De fet, quan s'utilitzava la volatilitat constant estimada prèviament ($\sigma = 10,78$), el model de Stern assignava a Unicaja una probabilitat de victòria a l'acabar el tercer quart de $p \approx 0,997$, més propera a la del mercat (0,98). En canvi, després d'ajustar la volatilitat segons la fórmula de la volatilitat implícita variable, obtenim $\sigma_{IV,0.5} \approx 16,08$, que redueix la probabilitat estimada pel model fins a $p \approx 0,73$.

Aquest resultat posa de manifest una paradoxa aparent: el model ajustat amb informació de mercat (mitjançant $\sigma_{IV,t}$) no sempre s'alinea millor amb les probabilitats del mercat. Això pot deure's a diversos factors, com ara el marge incorporat per la casa d'apostes, errors d'estimació en moments amb alta incertesa o la sensibilitat del model a variacions puntuals en la funció quantil normal. També pot indicar que, en certes fases del partit, la hipòtesi de volatilitat constant pot oferir una aproximació prou adequada, especialment quan la informació disponible és limitada o el marcador encara permet escenaris oberts.

En resum, aquest exemple il·lustra que la incorporació d'una volatilitat implícita variable no garanteix necessàriament una millor ajustabilitat al mercat en tots els instants, i que cal analitzar cas per cas l'aportació real d'aquesta complexitat addicional al model.

Capítol 9

Conclusions

En aquest treball s'ha presentat una comparació rigorosa entre els models de Bachelier, Black-Scholes i Stern, aplicant-los al context de l'esport i, en concret, a l'anàlisi quantitativa d'un partit real de bàsquet. Hem vist com el model de Stern, basat en un moviment brownià amb deriva, és especialment adequat per descriure l'evolució de la diferència de punts en un partit, permetent obtenir probabilitats dinàmiques de victòria per a cada equip a mesura que avança el joc.

A través de l'aplicació pràctica al partit de quarts de final de la lliga ACB entre el Barça i l'Unicaja, s'ha posat de manifest la utilitat d'aquest enfocament per detectar possibles ineficiències de mercat en les apostes esportives. El model no només proporciona una estimació alternativa a la de les cases d'apostes, sinó que també ofereix una eina per identificar oportunitats favorables i calcular l'aposta òptima mitjançant criteris matemàtics com el de Kelly.

Els resultats mostren que, si bé en escenaris de gran incertesa les diferències entre el model i el mercat poden ser notables, aquestes es redueixen a mesura que el partit avança i la informació disponible augmenta. En conjunt, el treball evidencia la importància de la modelització estocàstica en l'avaluació objectiva d'esdeveniments esportius i obre la porta a futures extensions, com la incorporació de volatilitat variable, informació contextual addicional o l'aplicació a altres esports.

Tanmateix, és important remarcar les limitacions inherents del model de Stern i de la metodologia aplicada. El model assumeix una deriva i una volatilitat constants al llarg del partit, fet que pot no reflectir adequadament situacions reals on la dinàmica del joc canvia per efecte de factors tàctics, emocionals o d'incidents puntuals (lesions, canvis d'estratègia, etc.). A més, la hipòtesi de normalitat pot no ser del tot precisa, especialment en partits amb marcadors molt ajustats o on es produeixen remuntades inusuals. Finalment, l'anàlisi descansa en la qualitat i disponibilitat de les dades de mercat, que poden ser incompletes o reflectir biaixos propis de les cases d'apostes.

Aquestes limitacions suggereixen la necessitat d'explorar extensions del model que incorporin volatilitat dinàmica, informació contextual i l'anàlisi de nous tipus de mercats.

La metodologia desenvolupada pot tenir utilitat pràctica no només per a apostadors sofisticats, sinó també per a organitzadors de mercats i analistes esportius que vulguin avaluar la justesa de les probabilitats de mercat en temps real.

Finalment, cal posar èmfasi en el fet que les apostes esportives comporten un risc molt

elevat, ja que l'esport és intrínsecament imprevisible. Un bon exemple d'aquesta incertesa el trobem en el primer partit de les Finals de l'NBA disputat a la matinada del mateix 6 de juny de 2025, entre els Oklahoma City Thunder i els Indiana Pacers. Els Thunder partien clarament com a favorits: jugaven a casa, havien aconseguit el primer lloc en la temporada regular amb un impressionant balanç de 68 victòries i 14 derrotes, i, a més, havien superat les rondes prèvies de playoff amb comoditat, excepte la segona ronda.

Durant el partit, Oklahoma va començar dominant el marcador i va ampliar l'avantatge de manera constant. A falta de 10:38 minuts per acabar l'últim quart, lideraven per 77 a 90, i la plataforma d'apostes Kalshi els atorgava una probabilitat del 91% de victòria. De fet, a menys de 9 minuts per al final, l'avantatge era de 15 punts, i la probabilitat estimada era encara superior. Davant d'aquesta situació, molts apostadors haurien considerat apostar per la victòria d'Oklahoma, ja que semblava una opció atractiva i amb un risc aparentment baix.

Tanmateix, la realitat va ser una altra: els Indiana Pacers van acabar guanyant el partit gràcies a una remuntada culminada a falta de només 0,3 segons per al final, després d'haver anat per darrere des del primer avantatge d'Oklahoma. Aquest exemple posa de manifest que, tot i que models com el de Stern proporcionen bones aproximacions i poden identificar oportunitats favorables, en l'esport sempre poden ocórrer esdeveniments inesperats i no quantificables. Per això, qualsevol apostador ha de ser conscient que existeix un risc irreductible que cap model matemàtic pot eliminar completament.

Apèndix A

Conceptes financers bàsics

Aquesta secció es basa en les definicions trobades a *Arbitrage Theory in Continuous Time* (3rd ed.) de Björk, T. El llibre està referenciat en la bibliografia.

A.1 Derivats financers

A.1.1 Definició general

Un **derivat financer** és un instrument financer el valor del qual depèn del comportament d'un altre actiu, anomenat *actiu subjacent*. Aquest actiu subjacent pot ser, per exemple, una acció, un tipus d'interès, un índex borsari o qualsevol altra variable econòmica quantificable.

Els derivats no tenen valor intrínsec propi, sinó que el seu valor prové de les condicions estipulades en el contracte i de l'evolució de l'actiu subjacent. Aquest vincle entre derivat i actiu subjacent és el que els fa útils per a diverses finalitats, com ara la cobertura del risc (hedging), l'especulació o l'arbitratge.

Entre els principals tipus de derivats hi trobem:

- **Opcions:** Drets, però no obligacions, de comprar o vendre un actiu en el futur a un preu determinat.
- **Futurs:** Obligació de comprar o vendre un actiu en una data futura a un preu pactat avui.
- **Swaps:** Contractes per intercanviar fluxos financers entre dues parts, sovint tipus d'interès o divises.

A.1.2 Opció financera

Una opció financera és un tipus de derivat que concedeix al comprador el dret, però no l'obligació, de comprar (opció de compra, *call*) o vendre (opció de venda, *put*) un actiu subjacent a un preu acordat (anomenat preu d'exercici o *strike*) en una data determinada (anomenada venciment).

Les opcions poden ser:

- **Europees:** Només es poden exercir en la data de venciment.
- **Americanes:** Es poden exercir en qualsevol moment fins al venciment.

El valor d'una opció depèn de diversos factors, com el preu del subjacent, el temps fins al venciment, la volatilitat i el tipus d'interès sense risc.

A.2 Valor present i descompte

El valor present és el valor actual d'un flux monetari que es rebrà en el futur, tenint en compte un tipus d'interès sense risc. En finances, és habitual descomptar els pagaments futurs per reflectir el cost d'oportunitat dels diners en el temps. Matemàticament, si un pagament de quantitat X es rebrà en el temps T i el tipus d'interès constant és r , el seu valor present al temps t és:

$$\text{Valor present} = X e^{-r(T-t)}$$

Aquest concepte és fonamental per valorar opcions i altres derivats, ja que els pagaments s'han de comparar en una base temporal comuna.

A.3 Tipus d'interès sense risc i actiu lliure de risc

El tipus d'interès sense risc és el rendiment associat a una inversió que no té risc de pèrdua de capital, com per exemple els bons sobirans a curt termini de països estables. Aquest tipus d'interès serveix com a referència per a la valoració d'actius financers, ja que representa el cost d'oportunitat dels diners sense risc.

L'actiu lliure de risc és qualsevol actiu que genera aquest tipus d'interès sense risc de default, i en molts models financers s'assumeix que es pot invertir o endeutar-se en aquest actiu de manera il·limitada. El tipus d'interès sense risc s'utilitza per descomptar els fluxos futurs en la valoració de derivats i altres actius.

A.4 Absència d'arbitratge

El principi d'absència d'arbitratge estableix que no pot existir una estratègia que, sense risc i sense inversió inicial, generi un guany segur en qualsevol situació de mercat. Aquest principi és fonamental en la valoració d'actius financers i, especialment, en la teoria dels derivats. Si hi hagués oportunitats d'arbitratge, els preus dels actius s'ajustarien ràpidament fins a eliminar-les. Els models de valoració de derivats, com el de Black-Scholes, es construeixen sota la hipòtesi que el mercat és lliure d'arbitratge.

A.5 Mercats perfectes

Un mercat perfecte és un mercat financer on no existeixen costos de transacció ni impostos, i on és possible comprar o vendre qualsevol quantitat d'actius, incloent fraccions. Aquesta hipòtesi facilita la modelització matemàtica i la valoració de derivats, tot i que sovint no es compleix exactament en la realitat.

A.6 Negociació contínua

La negociació contínua és la possibilitat de comprar o vendre actius en qualsevol instant de temps, sense restriccions de periodicitat ni horaris. Aquesta hipòtesi permet ajustar i modificar una cartera financera de manera instantània per construir estratègies de cobertura perfectes, tal com requereixen models com el de Black-Scholes.

A.7 No pagament de dividends

L'hipòtesi de no pagament de dividends estableix que l'actiu subjacent no distribueix cap tipus de dividend o pagament als accionistes durant la vida del derivat. Això simplifica la valoració, ja que el preu de l'actiu no es veu alterat per fluxos addicionals de caixa. Aquest supòsit es pot relaxar i generalitzar per tractar casos reals on hi ha pagaments de dividends.

A.8 Cobertura i cartera replicant

La cobertura (*hedging*) consisteix en la creació d'una estratègia que redueixi o elimini el risc associat a una posició financera. En el context dels derivats, una cartera replicant és una combinació d'actius (per exemple, accions i actiu lliure de risc) que reproduceix exactament els fluxos de caixa d'un derivat concret.

En el model de Black-Scholes, la valoració d'una opció es basa en la construcció d'aquesta cartera replicant, de manera que, sota certes condicions, el preu de l'opció coincideix amb el cost de formar la cartera que la replica. Aquesta idea és fonamental per deduir l'equació de Black-Scholes i garantir que no existeixin oportunitats d'arbitratge.

Una **cartera financera** és qualsevol combinació d'actius financers. Quan aquesta cartera s'utilitza per reproduir exactament els fluxos de caixa d'un derivat, s'anomena **cartera replicant**.

A.9 Mesura neutral al risc

La mesura neutral al risc (o mesura martingala) és una probabilitat fictícia sota la qual el valor esperat descomptat d'un actiu o derivat coincideix amb el seu preu de mercat. Aquesta mesura permet calcular el valor dels derivats com l'esperança del seu pagament futur, descomptat al tipus d'interès sense risc. En models com el de Black-Scholes, la valoració sota la mesura neutral al risc garanteix l'absència d'arbitratge i simplifica els càlculs, ja que tots els actius “creixen” al mateix ritme que l'actiu lliure de risc.

Matemàticament, sota la mesura neutral al risc $\mathbb{Q}$ i tipus d'interès sense risc constant r , el preu V_t d'un derivat amb pagament futur H en el temps T es pot expressar com:

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H \mid \mathcal{F}_t]$$

on $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ denota l'esperança sota la mesura neutral al risc i $\mathcal{F}_t$ la informació disponible fins al temps t . Aquesta expressió es coneix com a **valoració per expectativa** sota mesura neutral al risc.

A.10 Volatilitat i volatilitat implícita

La **volatilitat** és una mesura de la variabilitat o incertesa associada a les fluctuacions del preu d'un actiu financer al llarg del temps. Matemàticament, la volatilitat es defineix habitualment com la desviació estàndard dels rendiments logarítmics de l'actiu en un període de temps donat. En els models de valoració d'opcions, com el de Black-Scholes, la volatilitat és un dels paràmetres clau i determina l'amplitud de les oscil·lacions esperades en el preu de l'actiu subjacent.

La **volatilitat implícita** és el valor de la volatilitat que, inserit en un model de valoració (com el de Black-Scholes), fa que el preu teòric de l'opció coincideixi amb el seu preu observat al mercat. S'obté resolent la fórmula del model a l'inrevés, a partir dels preus reals. La volatilitat implícita proporciona una mesura de la incertesa futura que el mercat assigna al preu del subjacent i sovint difereix de la volatilitat històrica calculada a partir de dades passades.

A.11 El criteri de Kelly

Aquesta secció es basa en *Understanding The Kelly Criterion*, de Thorp, E. O., que està referenciat en la bibliografia.

El **criteri de Kelly**, desenvolupat originalment per J.L. Kelly (1956) i divulgat àmpliament per Edward O. Thorp, és una estratègia matemàtica que indica quina fracció del capital total cal apostar o invertir en cada oportunitat per maximitzar el creixement esperat del patrimoni a llarg termini. Aquest criteri s'ha convertit en una eina central tant en finances quantitatives com en el món de les apostes esportives i el joc d'atzar.

La filosofia del criteri de Kelly es basa en maximitzar l'esperança del logaritme de la riquesa futura, és a dir, el *creixement geomètric* esperat del capital. Si W_n és la riquesa abans de fer l'aposta n , i W_{n+1} després, el criteri proposa maximitzar $\mathbb{E}[\log(W_{n+1}/W_n)]$. Aquesta estratègia condueix, en situacions repetides, al màxim creixement exponencial possible del patrimoni a llarg termini.

A.11.1 Formulació matemàtica (cas bàsic)

Considerem una aposta amb dues possibilitats:

- Amb probabilitat p , es guanya una quantitat proporcional b a l'aposta feta.
- Amb probabilitat $q = 1 - p$, es perd l'aposta realitzada.

Si f és la fracció del capital que s'aposta, l'evolució del patrimoni és:

$$W_{n+1} = W_n(1 + fb) \quad (\text{si es guanya})$$

$$W_{n+1} = W_n(1 - f) \quad (\text{si es perd})$$

El creixement mitjà del capital ve donat per:

$$G(f) = p \log(1 + fb) + q \log(1 - f)$$

El criteri de Kelly consisteix a escollir f que maximitzi $G(f)$. Derivant i igualant a zero s'obté la fracció òptima:

$$f^* = \frac{pb - q}{b}$$

On b és el guany net per unitat apostada (per exemple, si la quota decimal és q , $b = q - 1$).

A.11.2 Interpretació i aplicacions

Si $f^* > 0$, el criteri de Kelly indica la fracció del capital que cal apostar per maximitzar el creixement a llarg termini. Si $f^* \leq 0$, el model indica que no s'ha d'apostar.

Aquesta metodologia es pot aplicar tant a apostes esportives com a decisions d'inversió financera, i assegura que a llarg termini cap altra estratègia d'apostes repetides proporciona un creixement mitjà superior del patrimoni.

A.11.3 Limitacions i gestió del risc

Tot i els avantatges, el criteri de Kelly presenta algunes limitacions pràctiques:

- És molt sensible als errors d'estimació de les probabilitats p . Sobreestimar l'avantatge pot portar a apostar massa i córrer grans riscos de pèrdua temporal.
- La volatilitat a curt termini pot ser elevada (*drawdown*).
- Per reduir el risc, sovint es recomana apostar només una fracció del valor de Kelly (*fractional Kelly*), per exemple la meitat ($f^*/2$).

Edward O. Thorp, pioner en l'ús pràctic del criteri de Kelly al blackjack i a les finances, recomana disciplina i prudència, especialment si les probabilitats p no són conegudes de forma exacte.

Apèndix B

Quotes d'apostes en directe del partit Barça-Unicaja

En aquesta secció es presenta la taula completa de quotes recollides durant el partit, segons les dades facilitades per la casa d'apostes Bet365. Aquestes quotes serveixen de base per calcular les probabilitats implícites de victòria i comparar-les amb les estimacions del model de Stern en diferents moments del partit.

BARÇA - UNICAJA 2n partit Quarts de Final Playoff Liga Endesa - 06/06/2025 19:00h

Marcador	Temps restant	Quart	Cuota Barça	Cuota Unicaja	Money-line odds FCB	Money-line odds UNI
Pre-partit (18:00h)			1,50	2,65	-200,00	165,00
0-0	10:00	1r	1,50	2,60	-200,00	160,00
3-0	9:45	1r	1,27	2,83	-370,37	183,00
5-3	8:44	1r	1,43	2,80	-232,56	180,00
5-6	8:09	1r	1,86	2,55	-116,28	155,00
8-6	7:14	1r	1,52	2,55	-192,31	155,00
10-7	5:30	1r	1,52	2,55	-192,31	155,00
10-9	4:38	1r	1,68	2,15	-147,06	115,00
10-12	3:56	1r	1,83	1,90	-120,48	-111,11
10-14	3:40	1r	1,86	1,86	-116,28	-116,28
12-17	2:55	1r	1,64	2,25	-156,25	125,00
12-19	2:03	1r	1,71	2,10	-140,85	110,00
14-19	1:54	1r	2,10	1,71	110,00	-140,85
17-24	0:58	1r	2,15	1,68	115,00	-147,06
17-26	0:00	1r	2,40	1,58	140,00	-172,41
17-26	9:18	2n	2,35	1,60	135,00	-166,67
20-26	8:24	2n	2,00	1,76	100,00	-131,58
22-26	7:37	2n	1,90	1,83	-111,11	-120,48
25-29	6:51	2n	1,86	1,86	-116,28	-116,28
25-31	6:39	2n	2,15	1,68	115,00	-147,06
25-33	5:56	2n	2,50	1,54	150,00	-185,19
25-36	5:20	2n	2,80	1,43	180,00	-232,56
27-36	4:40	2n	2,60	1,50	160,00	-200,00
31-38	3:09	2n	2,35	1,60	135,00	-166,67
33-38	2:18	2n	2,05	1,74	105,00	-135,14
33-40	2:01	2n	2,30	1,62	130,00	-161,29
33-42	1:41	2n	2,65	1,47	165,00	-212,77
35-42	0:49	2n	2,50	1,54	150,00	-185,19
35-44	0:00	2n	3,00	1,40	200,00	-250,00
35-46	8:08	3r	3,50	1,29	250,00	-344,83
37-46	7:50	3r	3,25	1,33	225,00	-303,03
38-48	6:42	3r	3,10	1,37	210,00	-270,27
38-50	6:01	3r	3,90	1,25	290,00	-400,00
38-52	5:47	3r	5,00	1,16	400,00	-625,00
42-52	4:18	3r	4,10	1,23	310,00	-434,78
44-52	3:18	3r	3,15	1,35	215,00	-285,71
44-54	3:03	3r	4,75	1,18	375,00	-555,56
44-56	2:09	3r	5,50	1,14	450,00	-714,29
44-58	1:09	3r	10,50	1,05	950,00	-2000,00
44-60	0:49	3r	12,00	1,04	1100,00	-2500,00
44-62	0:26	3r	15,00	1,025	1400,00	-4000
48-65	0:00	3r	16,00	1,02	1500,00	-5000,00

Marcador	Probabilitats FCB	Probabilitats UNI
Pre-partit (18:00h)	0,67	0,38
0-0	0,67	0,38
3-0	0,79	0,35
5-3	0,70	0,36
5-6	0,54	0,39
8-6	0,66	0,39
10-7	0,66	0,39
10-9	0,60	0,47
10-12	0,55	0,53
10-14	0,54	0,54
12-17	0,61	0,44
12-19	0,58	0,48
14-19	0,48	0,58
17-24	0,47	0,60
17-26	0,42	0,63
17-26	0,43	0,63
20-26	0,50	0,57
22-26	0,53	0,55
25-29	0,54	0,54
25-31	0,47	0,60
25-33	0,40	0,65
25-36	0,36	0,70
27-36	0,38	0,67
31-38	0,43	0,63
33-38	0,49	0,57
33-40	0,43	0,62
33-42	0,38	0,68
35-42	0,40	0,65
35-44	0,33	0,71
35-46	0,29	0,78
37-46	0,31	0,75
38-48	0,32	0,73
38-50	0,26	0,80
38-52	0,20	0,86
42-52	0,24	0,81
44-52	0,32	0,74
44-54	0,21	0,85
44-56	0,18	0,88
44-58	0,10	0,95
44-60	0,08	0,96
44-62	0,07	0,975609756097561
48-65	0,06	0,98

Bibliografia

- [1] Barnett, J. (2019). *Modeling Stock Prices with Differential Equations*. University of Alabama at Birmingham.
- [2] Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (3rd ed.). Oxford University Press.
- [3] Calin, O. *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance*.
- [4] Fanning, S., & Parekh, J. *Stochastic Processes and their Applications to Mathematical Finance*. 2018.
- [5] Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2nd ed.). Springer.
- [6] Kozdron, M. J. *Lectures on Stochastic Calculus with Applications to Finance*. Department of Mathematics and Statistics, University of Regina.
- [7] Lamberton, D., & Lapeyre, B. (2008). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC.
- [8] Lawler, G. F. *Stochastic Calculus: An Introduction with Applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.
- [9] Polson, N. G., & Stern, H. S. (2015). *The Implied Volatility of a Sports Game*. Journal of Quantitative Analysis in Sports, 11(3), 145–153.
- [10] Stern, H. S. (1994). *A Brownian Motion Model for the Progress of Sports Scores*. Journal of the American Statistical Association, 89(427), 1128–1134.
- [11] Terakado, S. (2019). *On the Option Pricing Formula Based on the Bachelier Model*. Graduate School of Science and Engineering, Chuo University.
- [12] Thorp, E. O. (2016). *Understanding The Kelly Criterion*. Reimprès i revisat a partir de la sèrie “A Mathematician on Wall Street” publicada a Wilmott Magazine, 2008.
- [13] Todorovic, P. *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications*. Springer, 1992.