



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

# EL CONJUNTO DE MÓDULO MÁXIMO DE FUNCIONES ENTERAS

---

Autora: Samanta Ruiz Arbos

Directora: Dra. Leticia Pardo Simón  
Realitzat a: Departament de  
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de junio de 2026

## Abstract

This work is dedicated to the rigorous study of the geometric structure of the maximum modulus set  $M(f)$  of an entire function  $f$ . This set is defined as the family of points where the entire function attains its maximum modulus for each radius. Furthermore, we also study the growth of the function that counts the number of points where the maximum is attained on  $\partial D(0, r)$  for each radius  $r \geq 0$ , which we will denote by  $v(r)$ .

In the first part of this work, Blumenthal's main theorem [Blu07] is reconstructed and detailed, applying tools from local analytic geometry to prove that, except for monomials, the set  $M(f)$  consists of a countable number of analytic curves. Next, examples calculating this set for specific functions are presented. Finally, the work addresses Erdős's question of whether the number of maximum points on a circle can be arbitrarily large as the radius varies; that is, the unboundedness of  $v(r)$ . The proposal of a holomorphic function in the unit disk given by Herzog and Piranian [HP68] is analyzed and detailed. Furthermore, a limitation in the original construction of that article is exposed, and an alternative solution is proposed, confirming the affirmative answer to Erdős's question.

## Resumen

Este trabajo se dedica al estudio riguroso de la estructura geométrica del conjunto de módulo máximo  $M(f)$  de una función entera  $f$ . Este conjunto se define como la familia de puntos donde la función entera alcanza su módulo máximo para cada radio. Además, también estudiamos el crecimiento de la función que cuenta el número de puntos donde alcanza el máximo en  $\partial D(0, r)$  para cada radio  $r \geq 0$ , que denotaremos por  $v(r)$ .

En la primera parte del trabajo, se reconstruye y detalla el teorema principal de Blumenthal [Blu07], aplicando herramientas de geometría analítica local para demostrar que, salvo para monomios, el conjunto  $M(f)$  se compone de una cantidad numerable de curvas analíticas. A continuación, se exponen ejemplos del cálculo de este conjunto para funciones específicas. Finalmente, el trabajo aborda la pregunta de Erdős sobre si el número de puntos de máximo en una circunferencia puede ser arbitrariamente grande al variar el radio; es decir, la no acotación de  $v(r)$ . Se analiza y detalla la propuesta de una función holomorfa en el disco unidad dada por Herzog y Piranian [HP68]. También se expone una limitación sobre la construcción original de dicho artículo y se propone una solución alternativa, confirmando la respuesta afirmativa a la cuestión de Erdős.

## Resum

Aquest treball es dedica a l'estudi rigorós de l'estructura geomètrica del conjunt de mòdul màxim  $M(f)$  d'una funció sencera  $f$ . Aquest conjunt es defineix com la família de punts on la funció sencera assoleix el seu mòdul màxim per a cada radi. A més, també estudiem el creixement de la funció que compta el nombre de punts on s'assoleix el màxim a  $\partial D(0, r)$  per a cada radi  $r \geq 0$ , que denotarem per  $v(r)$ .

En la primera part del treball, es reconstrueix i es detalla el teorema principal de Blumenthal [Blu07], aplicant eines de geometria analítica local per demostrar que, llevat dels monomis, el conjunt  $M(f)$  es compon d'una quantitat numerable de corbes analítiques. A continuació, s'exposen exemples del càlcul d'aquest conjunt per a funcions específiques.

Finalment, el treball aborda la pregunta d'Erdős sobre si el nombre de punts de màxim en una circumferència pot ser arbitràriament gran en variar el radi; és a dir, la no-acotació de  $v(r)$ . S'analitza i es detalla la proposta d'una funció holomorfa en el disc unitat donada per Herzog i Piranian [HP68]. També s'exposa una limitació sobre la construcció original de l'article esmentat i es proposa una solució alternativa, confirmant la resposta afirmativa a la qüestió d'Erdős.

## Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutora, Leticia. Gracias por haberme acompañado en todo este proceso con una cercanía y una paciencia infinitas, y por haber confiado en mí desde el primer momento. Estaré eternamente agradecida por tu apoyo y disposición en todo momento. Sobre todo, gracias por haberme dado la oportunidad de hacer este trabajo juntas. Ojalá todos los alumnos tuvieran la suerte de tener un tutor con tu entrega y dedicación.

A mis padres y abuelos, Carmen, Pablo, Felisa y Antonio, por no cortarme las alas nunca y apoyarme siempre en mis decisiones. Gracias por haber confiado en mí, incluso en los momentos en los que ni yo misma lo hacía. A vuestro lado he aprendido que rendirse nunca es una opción. Gracias por cada sacrificio que habéis hecho para que yo pudiera llegar hasta aquí; todo lo que soy hoy es gracias a vosotros.

A mi hermana melliza, Saray. Mi compañera de vida, mi mayor confidente y mi persona favorita. Si hoy estoy terminando esta etapa tan importante es, en gran parte, gracias a ti. Gracias por estar siempre a mi lado y recordarme muchas veces, incluso sin palabras, que nunca voy a estar sola; eres mi refugio. Gracias también por ser quien más confía en mí y por la admiración con la que siempre hablas de mí. Juntas vamos a conseguir todo lo que nos propongamos. Te admiro y te adoro a partes iguales.

A mis compañeras de universidad, por estar juntas desde el primer día hasta el último. Sin todas las risas que hemos compartido, este camino habría sido mucho más complicado. En especial a ti, Esther; miro atrás y no me imagino estos cuatro años sin ti. Gracias por haber sido mi apoyo incondicional y por demostrar que somos la mejor dupla estudiando juntas día a día. No podría contar con las manos las veces que nos hemos reído sin poder parar, consiguiendo que las épocas de estrés tuvieran momentos de desconexión y carcajadas. Gracias por tu apoyo y por estar siempre; estoy muy orgullosa de todo lo que hemos conseguido y, sobre todo, de haberlo hecho juntas.

A mis amigas de siempre, porque gracias a vosotras sé lo que es una amistad de verdad. Ojalá todo el mundo pudiera decir, tan orgullosa como yo, que lleva toda la vida con el mismo círculo. En especial a Lucía, mi mejor amiga de la infancia: gracias por no soltarme nunca la mano. No recuerdo un solo momento en el que no hayas estado a mi lado, apoyándome en cada bache y celebrando todos mis logros. Y también a Andrea, gracias por escucharme siempre con tanta atención y por hacerme sentir que tengo un lugar seguro al que recurrir cuando el mundo se me viene encima.

Y, por último, a mí misma. Por no haberme rendido nunca y por haber sacado fuerzas de donde no las había para continuar. Por haberme demostrado que soy capaz de conseguir todo lo que me propongo, por mucho que cueste. Porque la Samanta de hace cuatro años jamás se habría imaginado llegar hasta aquí.

# Índice general

|                                                                                                  |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                                                                           | <b>1</b>  |
| <b>2. Estructura del conjunto de módulo máximo</b>                                               | <b>5</b>  |
| 2.1. Preliminares . . . . .                                                                      | 5         |
| 2.2. Herramientas de geometría analítica local . . . . .                                         | 7         |
| 2.3. Resultado principal . . . . .                                                               | 9         |
| 2.3.1. La geometría del conjunto $S(f)$ . . . . .                                                | 11        |
| 2.3.2. La geometría del conjunto $M(f)$ . . . . .                                                | 15        |
| <b>3. Ejemplos</b>                                                                               | <b>18</b> |
| 3.1. Blumenthal . . . . .                                                                        | 18        |
| 3.1.1. Función lineal . . . . .                                                                  | 18        |
| 3.1.2. Polinomio cuadrático con raíces reales de diferente signo . . . . .                       | 18        |
| 3.2. Hardy . . . . .                                                                             | 23        |
| 3.2.1. Caso $5a^2 > 4b^2$ : Continuidad y puntos de cruce . . . . .                              | 26        |
| 3.2.2. Caso $\frac{3}{4}b^2 < a^2 < \frac{4}{5}b^2$ : Discontinuidad y puntos de salto . . . . . | 27        |
| 3.3. Otros ejemplos . . . . .                                                                    | 28        |
| <b>4. Crecimiento no acotado de <math>v(r)</math></b>                                            | <b>29</b> |
| 4.1. Resultado principal . . . . .                                                               | 29        |
| 4.2. Limitaciones de la construcción de Piranian y Herzog . . . . .                              | 37        |
| 4.3. Prueba alternativa . . . . .                                                                | 40        |
| 4.3.1. La elección de los puntos y de los sectores . . . . .                                     | 40        |
| 4.3.2. El operador de corrección . . . . .                                                       | 46        |
| 4.3.3. Convergencia normal . . . . .                                                             | 48        |
| <b>A. Preliminares de análisis complejo</b>                                                      | <b>51</b> |
| <b>B. Ejemplos extra</b>                                                                         | <b>53</b> |
| B.1. Casos extra sobre el ejemplo de Blumenthal . . . . .                                        | 53        |
| B.1.1. Polinomio cuadrático con raíces complejas conjugadas . . . . .                            | 53        |
| B.1.2. Polinomio cuadrático con raíces reales del mismo signo . . . . .                          | 54        |
| B.2. Casos extra sobre el ejemplo de Hardy . . . . .                                             | 54        |
| B.2.1. Caso $4a^2 < 3b^2$ : Hipérbola y eje real disjuntos . . . . .                             | 54        |
| B.2.2. Caso $5a^2 = 4b^2$ : El escenario límite de curvatura . . . . .                           | 55        |
| B.2.3. Caso $4a^2 = 3b^2$ : Hipérbola degenerada . . . . .                                       | 55        |

# Capítulo 1

## Introducción

El análisis complejo es una de las ramas clásicas de las matemáticas que tiene sus raíces en el siglo XIX. El núcleo de esta disciplina se centra en el estudio de las funciones holomorfas, es decir, aquellas que son diferenciables en el sentido complejo sobre un dominio abierto. Es bien sabido que el que una función compleja sea diferenciable en el sentido complejo (es decir, que sea holomorfa) tiene consecuencias mucho más fuertes que la diferenciabilidad usual en el ámbito real. Por ejemplo, toda función holomorfa se puede expresar como una serie de potencias convergente en algún disco abierto, mientras que existen funciones reales que son diferenciables en un punto pero no analíticas.

Esta diferencia se vuelve aún más evidente cuando estudiamos las funciones enteras, que son aquellas que son holomorfas en todo el plano. En este caso, el comportamiento global de la función está intrínsecamente ligado a su crecimiento. Esta relación la podemos observar en teoremas clásicos como el Teorema de Liouville, que establece que una función entera acotada debe ser necesariamente constante. Por lo tanto, para estudiar las funciones no constantes, es fundamental medir de alguna manera cómo van creciendo a medida que nos alejamos del origen. Para cuantificar este crecimiento, se introduce la función de módulo máximo:

**Definición 1.0.1.** Sea  $f$  una función entera. Definimos el módulo máximo de  $f$  en el círculo de radio  $r \geq 0$  como

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Una de las herramientas más potentes para analizar esta función de crecimiento es el Principio de Módulo Máximo. Este principio nos asegura que una función holomorfa no constante en un dominio acotado no puede alcanzar su módulo máximo en el interior de este, forzando a que dicho valor se alcance necesariamente en la frontera del dominio. Aplicándolo a discos centrados en el origen para una función entera, obtenemos que para cada radio  $r$ , el valor  $M(r)$  se encuentra en la circunferencia de este radio. Sin embargo, este principio no especifica la naturaleza geométrica de los puntos donde ocurre dicho máximo. Nace así uno de los objetivos centrales de este trabajo: el estudio riguroso del conjunto de módulo máximo.

**Definición 1.0.2.** Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera. El conjunto de módulo máximo de  $f$  es el conjunto de puntos donde  $|f|$  alcanza su máximo, es decir,

$$M(f) := \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| = M(|z|)\}.$$

El estudio de este conjunto tiene una gran riqueza matemática; lejos de comportarse como una colección caótica o desestructurada de puntos, veremos que  $M(f)$  se compone de la unión de distintas curvas continuas y de alta regularidad.

Es importante destacar que el comportamiento más trivial se produce cuando  $f$  es un monomio de la forma  $f(z) = az^m$  (con  $a \in \mathbb{C}$  y  $m \in \mathbb{N}$ ). En este caso singular, el módulo de la función es constante sobre cualquier circunferencia centrada en el origen, lo que

implica que el conjunto de módulo máximo es todo el plano complejo. Por lo tanto, nos centraremos en funciones que no adopten dicha forma.

El estudio riguroso de este conjunto tiene sus raíces en los trabajos de principios del siglo XX, siendo el matemático alemán Otto Blumenthal (1876-1944) el primero en analizarlo con profundidad. Él logró tender un puente entre el análisis complejo y la geometría analítica local de dos variables para poder caracterizar la estructura geométrica de  $M(f)$ . Nuestro objetivo es retomar y detallar estas investigaciones, cuyo resultado principal se enuncia a continuación:

**Teorema 1.0.3** (Estructura geométrica de  $M(f)$ ). *En todo el plano, el conjunto  $M(f)$  de una función entera  $f$  que no sea un monomio se compone de, a lo sumo, un conjunto numerable de arcos de curvas algebroides. Además, no hay más que un número finito de estas curvas que intersequen cualquier compacto. Asimismo, los radios  $r$  para los cuales el máximo de  $|f|$  cambia de una rama algebroides a otra (puntos excepcionales) son puntos aislados.*

La demostración detallada y rigurosa de este teorema fundamental, así como el desarrollo de las herramientas de geometría analítica local necesarias para su justificación, se exponen a lo largo del Capítulo 2. Para poder entender este teorema, necesitamos la definición de curva algebroides:

**Definición 1.0.4.** *Una curva algebroides entera es una curva real  $y = y(x)$  de la variable real  $x$ , finita y continua para todos los valores finitos de  $x$ , analítica y regular para todos los valores de  $x$ , excepto a lo sumo para una infinidad numerable de puntos que tienden hacia el infinito como único punto límite. Además, en los puntos excepcionales (es decir, en los que no es analítica o regular), admite un desarrollo en serie de Puiseux (serie con potencias fraccionarias, véase Definición 2.2.5).*

De este modo, figuras familiares como las rectas, las parábolas o la curva  $y^2 = x^3$  son ejemplos de curvas algebroides. Por el contrario, quedan excluidas aquellas curvas que no son continuas o aquellas que tienen puntos excepcionales que no pueden expresarse mediante potencias fraccionarias, por ejemplo,  $y = |x|$ .

La estrategia ideada por Blumenthal para demostrar el Teorema 1.0.3 empieza por el estudio de la estructura del conjunto donde se anula la derivada angular del módulo, que denotaremos como  $S(f)$ .

**Definición 1.0.5.** *Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera y  $G(r, \varphi) = |f(re^{i\varphi})|$ . Definiremos el conjunto de ceros de la derivada angular como*

$$S(f) := \left\{ re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \varphi}(r, \varphi) = 0 \right\}.$$

Mediante la aplicación del Teorema de Preparación de Weierstrass 2.2.4 y el Teorema de Puiseux 2.2.8 en el entorno analítico de dos variables, conseguiremos factorizar la derivada angular expresada en coordenadas polares como un producto de elementos algebroides.

Fijado un radio  $r_0$ , los puntos de módulo máximo son un subconjunto de los puntos críticos de  $G(r_0, \varphi)$ . Si bien  $S(f)$  es un conjunto más amplio que engloba también a los mínimos locales y a otros extremos relativos, la rigidez geométrica demostrada para este conjunto se hereda de manera directa para  $M(f)$ .

Una vez demostrada la regularidad geométrica del conjunto  $M(f)$ , en el Capítulo 3 estudiamos varios ejemplos que permiten visualizar su comportamiento y analizar casos característicos que muestran cómo esta regularidad local puede dar pie a comportamientos globales muy distintos.

En primer lugar, a través de los polinomios cuadráticos analizados por Blumenthal [Blu07], podremos observar cómo dos de estas curvas algebroides en  $M(f)$  pueden colisionar y cambiar su trayectoria de manera continua en los denominados *puntos de cruce*. En su artículo, Blumenthal estudia el conjunto de módulo máximo del polinomio  $f(z) = (z - e_1)(z - e_2)$ , donde  $e_1$  y  $e_2$  tienen signos contrarios y  $e_1 + e_2 \neq 0$ . Ver Figura 1.1a.

En cambio, gracias al estudio de una función exponencial propuesta por Hardy [Har09] veremos un comportamiento más abrupto: la aparición de puntos de discontinuidad, en los cuales el máximo salta de una rama algebroide a otra. La familia de funciones estudiada por Hardy en su artículo es  $f(z) = e^{-z^3 - 3az^2 - 3b^2z}$ , donde  $a > 0, b > 0$  y  $\frac{3}{4}b^2 < a^2 < \frac{4}{5}b^2$  o  $5a^2 > 4b^2$ . En el primer caso, podemos observar la aparición de puntos de discontinuidad; al variar el radio, el máximo global salta de una curva a otra. Ver Figuras 1.1b y 1.1c.

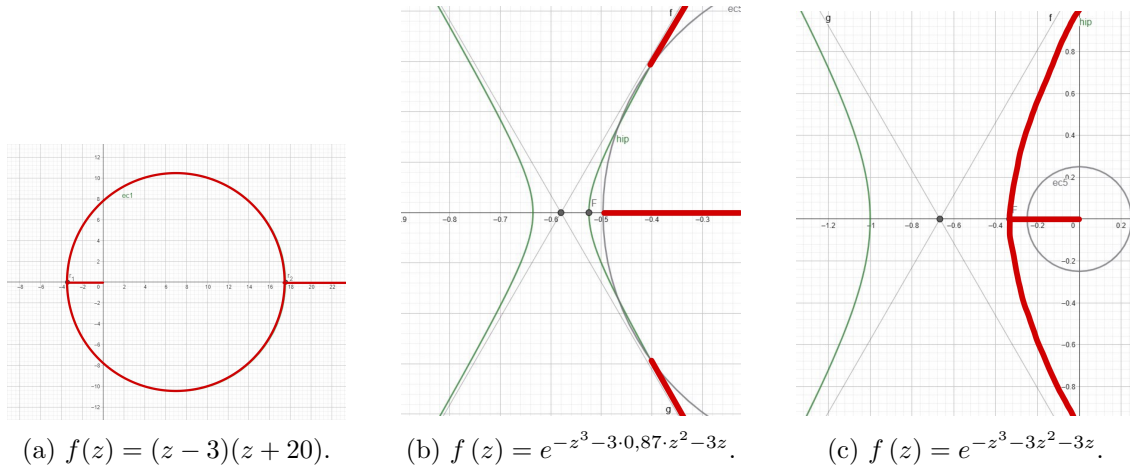


Figura 1.1: Representación del conjunto de módulo máximo  $M(f)$  para diferentes funciones. Se ilustran en color rojo las componentes algebroides del conjunto.

Por último, se introducen otros ejemplos más recientes donde podremos ver que el conjunto puede tener incluso componentes aisladas.

Finalmente, en el Capítulo 4, se estudia la siguiente función:

**Definición 1.0.6.** Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera. Para  $r \geq 0$ , definimos

$$v(r) = \# \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, |f(z)| = M(r)\} = M(f) \cap \partial D(0, r). \quad (1.1)$$

Esta función  $v$  cuenta el número de puntos donde se alcanza el máximo del módulo de la función  $f$  en  $\partial D(0, r)$ . En 1964, Erdős planteó si existía una función holomorfa, diferente de la forma  $f(z) = cz^n$ , para la que  $v(r)$  no estuviera acotada superiormente o bien tendiera a infinito al variar el radio. La primera vez que este problema parece haber aparecido en la literatura fue en el libro de Hayman de 1967 sobre problemas abiertos en teoría de funciones [Hay67]; también en su edición del 50 aniversario [HL19, Problema 2.16].

En 1968, Herzog y Piranian respondieron afirmativamente a la cuestión de Erdős, construyendo una función holomorfa en el disco unidad para la que  $v(r)$  no está acotada superiormente. La idea de la construcción se basa en elegir una sucesión creciente de radios  $r_j \rightarrow 1^-$  tal que el disco  $D(0, r_j)$  se envía a un dominio estrellado donde las puntas se encuentran sobre el círculo de radio  $\rho_j$ , donde  $\{\rho_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente de números reales positivos. De este modo, la imagen del círculo  $|z| = r_j$  interseca dicho nivel en, al menos,  $j$  puntos distintos; por lo tanto,  $v(r_j) \geq j$  y  $\limsup_{r \rightarrow 1^-} v(r) = \infty$ .

Para ilustrar la idea central de la construcción, en las Figuras 4.2 y 4.1 se presenta una versión simplificada utilizando únicamente los primeros niveles. De este modo, se puede visualizar cómo la imagen de cada círculo  $|z| = r_j$  (para  $j = 1, 2$ ) consiste en un entorno del origen junto con sus puntas correspondientes.

Para la construcción de esta función, Herzog y Piranian proponen un procedimiento iterativo. La función  $f$  se obtiene como el límite de una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  que aproximan el comportamiento deseado. Para asegurar la convergencia del proceso iterativo, los autores fundamentan su demostración sobre la norma  $\ell^1$ .

El último capítulo se dedica a analizar, detallar y reconstruir dicho procedimiento. No obstante, más allá de la mera reproducción teórica, en este trabajo se manifiesta una sutil pero crucial limitación geométrica en el artículo original. Cabe destacar que Herzog y Piranian publicaron este resultado en un artículo de apenas dos páginas, apoyándose en intuiciones geométricas pero omitiendo los detalles analíticos de la prueba. Gracias al desarrollo detallado y riguroso de la construcción, se demuestra que las condiciones originales impuestas sobre la distribución de las puntas y el empleo de la norma  $\ell^1$  no resultan suficientes para asegurar la convergencia general del proceso. De hecho, esta falta de control analítico nos ha permitido hallar un contraejemplo donde la construcción original diverge. Sin embargo, en la última sección se expone una solución alternativa mediante unas condiciones geométricas más restrictivas y el uso de una norma de tipo supremo ponderado, consolidando y blindando rigurosamente la validez del teorema clásico.

## Capítulo 2

# Estructura del conjunto de módulo máximo

El objetivo de este capítulo es estudiar la geometría del conjunto de puntos donde una función entera alcanza su crecimiento máximo sobre cada círculo centrado en el origen. Recordamos que en la introducción hemos definido el conjunto de módulo máximo de una función  $f$  como:

$$M(f) := \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| = M(|z|)\}.$$

Demostraremos que este conjunto  $M(f)$  no es una colección arbitraria de puntos, sino que se compone de una familia numerable de arcos de curvas algebroides. Antes de abordar el teorema principal, es necesario establecer algunos preliminares que necesitaremos para la prueba.

### 2.1. Preliminares

En esta sección, presentaremos los resultados de análisis que servirán de base para las demostraciones posteriores. El enfoque se centra en aquellas propiedades de las funciones holomorfas y armónicas que rigen el comportamiento del módulo de una función entera y sus derivadas angulares.

**Definición 2.1.1.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  un abierto. Una función  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica en  $U$  si, sobre  $U$ , tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden y satisfacen la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

en  $U$ , donde  $(x, y)$  representan las coordenadas cartesianas del plano complejo. Se escribe  $\Delta f = 0$ .

**Lema 2.1.2.** Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera. Las funciones  $\operatorname{Re} f$  y  $\operatorname{Im} f$  son armónicas. Además, si  $f(z_0) \neq 0$  para algún  $z_0 \in \mathbb{C}$ , entonces  $\log |f(z)|$  también es armónica en un entorno de dicho punto.

*Demostración.* Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera. Denotamos por  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  su parte real y por  $B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  su parte imaginaria, de modo que  $f(x + iy) = A(x, y) + iB(x, y)$ . Como  $f$  es entera,  $A$  y  $B$  tienen derivadas parciales de todos los órdenes y estas son continuas. Además, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial x}.$$

Para comprobar que  $A$  es armónica, derivamos la primera ecuación respecto a  $x$  y la segunda respecto a  $y$  y sumamos las dos expresiones, obteniendo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y}.$$

Usando el Teorema de Schwarz A.0.4 aplicado a la función  $B$ ,  $\frac{\partial^2 B}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} = 0$ , por lo tanto,  $A$  es armónica. De manera análoga, se demuestra que  $B$  es armónica.

Por otro lado, consideremos un punto  $z$  tal que  $f(z) \neq 0$ . Como  $f$  es continua, existe un entorno alrededor de  $z$  donde la función no se anula. En ese entorno, podemos elegir una rama holomorfa del logaritmo, que denotaremos por  $\log f(z)$ . Como  $\log |f|$  es la parte real de la función analítica  $\log f$ , basándonos en lo que acabamos de demostrar (que la parte real de una función holomorfa es siempre armónica), concluimos  $\log |f|$  es armónica en un entorno de cualquier punto donde  $f(z) \neq 0$ .  $\square$

Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera. Denotaremos  $z = re^{i\varphi}$  en coordenadas polares, donde  $r \in (0, +\infty)$  y  $\varphi \in [0, 2\pi]$  y  $\partial D(0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ . Definimos las siguientes funciones:

$$G(r, \varphi) = |f(re^{i\varphi})|, \quad A(r, \varphi) = \operatorname{Re} f(re^{i\varphi}), \quad B(r, \varphi) = \operatorname{Im} f(re^{i\varphi}).$$

**Lema 2.1.3.** Si  $r \neq 0$ , las funciones derivadas  $\frac{\partial A}{\partial \varphi}$  y  $\frac{\partial B}{\partial \varphi}$  son armónicas. Además, si  $f \neq 0$ ,  $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$  también es armónica.

*Demostración.* Si  $r \neq 0$ , la ecuación de Laplace (2.1) en coordenadas polares para una función armónica cualquiera  $u(r, \varphi)$  se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.2)$$

Para demostrar que  $\frac{\partial A}{\partial \varphi}$  es armónica, tenemos que ver que satisface (2.2), es decir,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^3} = 0.$$

Como  $A$  tiene derivadas parciales de todos los órdenes y son continuas, podemos aplicar el Teorema de Schwarz A.0.4 para intercambiar el orden de las derivadas. Además, como  $r$  no depende de  $\varphi$ , podemos sacar la derivada angular fuera y tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^3} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^3} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} \right].$$

En el Lema 2.1.2 hemos demostrado que  $A$  es armónica, por lo tanto, satisface la ecuación (2.2). Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^3} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{\partial}{\partial \varphi} [0] = 0,$$

como queríamos demostrar.

Podríamos hacer el mismo procedimiento con  $B$  y  $\log G$  (con el mismo argumento local alrededor de los puntos donde  $f(z) \neq 0$  de la prueba anterior) para acabar la demostración de este lema.  $\square$

A continuación representaremos la función  $f$  mediante series de potencias en coordenadas polares, lo que nos permitirán pasar de un problema de análisis complejo a un problema de geometría analítica local, que resolveremos usando las propiedades de la siguiente sección.

**Lema 2.1.4** (Desarrollo en serie de potencias de  $G^2$ ). Sea  $f$  una función entera. El cuadrado de su módulo, denotado por  $G^2(r, \varphi)$ , es una función analítica en las variables  $(r, \varphi)$  en un entorno de cualquier punto con  $r \in (0, +\infty)$  y  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . En particular, admite un desarrollo de la forma

$$G^2(r, \varphi) = g_0 + r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{kl} r^k \varphi^l,$$

donde  $g_0, g_{kl} \in \mathbb{R} \forall k, l \geq 0$ .

*Demostración.* Como  $f$  es una función entera, por tanto analítica en todo punto del plano, podemos expresarla mediante su serie de potencias centrada en el origen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (2.3)$$

con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ . Sustituyendo  $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  y denotando  $a_n = a'_n + ia''_n$ , con  $a'_n, a''_n \in \mathbb{R}$ , podemos separar la parte real e imaginaria:

$$A(r, \varphi) = a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a'_n \cos n\varphi - a''_n \sin n\varphi), \quad (2.4)$$

$$B(r, \varphi) = a''_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a''_n \cos n\varphi + a'_n \sin n\varphi). \quad (2.5)$$

Como  $f$  es entera, sabemos que la serie anterior (2.3) converge uniforme y absolutamente en cualquier compacto. En consecuencia, las series (2.4) y (2.5) también lo hacen, por ser la parte real e imaginaria de la serie anterior, por lo que podemos reordenar los términos de la serie sin alterar la convergencia. Además, podemos hacer el desarrollo de Taylor del coseno y del seno, ya que son funciones analíticas,  $\cos n\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(n\varphi)^{2i}}{(2i)!}$  y  $\sin n\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(n\varphi)^{2i+1}}{(2i+1)!}$ . Si sustituimos estos desarrollos y reagrupamos en las expresiones (2.4) y (2.5) obtenemos:

$$A(r, \varphi) = a'_0 + r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c'_{kl} r^k \varphi^l, \quad B(r, \varphi) = a''_0 + r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c''_{kl} r^k \varphi^l,$$

para algunos coeficientes  $c'_0, c''_0, c'_{kl}, c''_{kl} \in \mathbb{R} \forall k, l \geq 0$ . Si ahora elevamos estas series al cuadrado, las sumamos y reagrupamos los términos, obtenemos la siguiente expresión

$$G^2(r, \varphi) = A^2(r, \varphi) + B^2(r, \varphi) = g_0 + r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{kl} r^k \varphi^l, \quad (2.6)$$

donde  $g_0, g_{kl} \in \mathbb{R} \forall k, l \geq 0$ . □

## 2.2. Herramientas de geometría analítica local

Nuestro objetivo en la siguiente sección será estudiar el conjunto de módulo máximo de una función entera, que requerirá estudiar los ceros de la derivada angular de  $G^2$ . Por

lo tanto, necesitamos algunos resultados para poder estudiar localmente los ceros de una función holomorfa en dos variables ( $r$  y  $\varphi$ ). Para facilitar el estudio, vamos a factorizar la serie de potencias (2.6) para describir el conjunto de ceros como una colección de curvas.

Denotamos por  $(z_1, z_2)$  las coordenadas en  $\mathbb{C}^2$ .

**Definición 2.2.1.** Un polidisco abierto en  $\mathbb{C}^2$  es el producto cartesiano de dos discos abiertos en el plano complejo. Es decir, es un conjunto de la forma

$$P := D(a_1, r_1) \times D(a_2, r_2) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_j - a_j| < r_j, j = 1, 2\},$$

con  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ ,  $r_1, r_2 > 0$ . El punto  $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$  se dice que es el centro del polidisco y  $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$  el radio.

**Definición 2.2.2.** Sea  $U \subset \mathbb{C}^2$  abierto y  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Decimos que  $f$  es holomorfa en  $U$  si para cada punto  $a = (a_1, a_2) \in U$  existe un polidisco abierto  $a \in P \subset U$  tal que podemos expresar  $f$  como una serie de potencias convergente en  $P$ . Es decir,

$$f(z) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (z_1 - a_1)^i (z_2 - a_2)^j,$$

donde  $a_{ij} \in \mathbb{C} \forall i, j \in \mathbb{N}$ .

**Definición 2.2.3.** Un polinomio de Weierstrass de  $z_1$  es un polinomio de la forma

$$P(z_1, z_2) = z_1^d + a_{d-1}(z_2)z_1^{d-1} + \dots + a_1(z_2)z_1 + a_0(z_2),$$

donde  $d \in \mathbb{N}$  es el grado del polinomio de Weierstrass, las funciones  $a_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son holomorfas en un entorno del 0 y  $a_i(0) = 0 \forall i \in \{0, \dots, d\}$ .

**Teorema 2.2.4** (Teorema de preparación de Weierstrass). [Xua18, Thm. 4.7]

Sea  $f$  es una función holomorfa en un entorno del origen de  $\mathbb{C}^2$  y no idénticamente cero en el eje  $z_2$ . Entonces, en un entorno del origen,  $f$  se expresa de manera única como  $f = P \cdot h$  donde  $P$  es un polinomio de Weierstrass de  $z_2$  y  $h: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa tal que  $h(0, 0) \neq 0$ .

**Definición 2.2.5.** [CA00, Eq.1.1] Una serie de Puiseux sobre  $\mathbb{C}$  es una serie de la forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{N}},$$

donde  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{C}$ . Tras simplificar los exponentes para que  $N$  y  $\gcd\{i : a_i \neq 0\}$  no tengan factores comunes, llamamos a  $N$  el orden de polidromía, denotado por  $\nu(\varphi)$ .

**Definición 2.2.6.** Un conjugado de una serie de Puiseux  $\varphi(x)$  es la serie de Puiseux que se obtiene sustituyendo  $x^{\frac{1}{N}}$  por  $\varepsilon x^{\frac{1}{N}}$ , donde  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  es una raíz  $N$ -ésima de la unidad, es decir,  $\varepsilon^N = 1$ . Existen exactamente  $\nu(\varphi)$  conjugados distintos.

**Definición 2.2.7.** Sea  $\varphi(x)$  una serie de Puiseux y  $\varphi = \varphi_1(x), \dots, \varphi_\nu(x)$  todos los conjugados de  $\varphi$ . Entonces definimos, para  $x, y \in \mathbb{C}$ ,

$$g_\varphi(x, y) = \prod_{i=1}^{\nu} (y - \varphi_i(x)).$$

**Teorema 2.2.8** (Teorema de Puiseux). [[CA00](#), Thm. 1.8.3]

Sea  $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  una serie de potencias convergente en las variables  $x$  e  $y$ . Entonces existen una serie invertible  $u(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , un entero  $r \geq 0$ , y series de Puiseux  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ , con  $m \geq 0$ , tales que

$$f(x, y) = u(x, y)x^r g_{\varphi_1}(x, y) \dots g_{\varphi_m}(x, y).$$

Finalmente, recordamos la definición del objeto geométrico que caracterizará la estructura del conjunto de módulo máximo: la curva algebroide ([1.0.4](#)). Para visualizar mejor la definición de curva algebroide, exponemos algunos ejemplos a continuación.

**Ejemplos 2.2.9.** Ejemplos de curvas algebroides:

1. Cualquier curva analítica real es, en particular, una curva algebroide. Por ejemplo, cualquier recta  $y = mx + n$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$  o la parábola  $y = x^2$ .
2. La curva  $y^3 = x^5$ , ya que en el punto  $x = 0$  no es analítica (su segunda derivada diverge), pero es continua y admite el desarrollo de Puiseux  $y = x^{\frac{5}{3}}$ .
3. Cualquier curva definida como una serie de potencias fraccionarias (serie de Puiseux),  $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x - x_0)^{\frac{i}{N}}$ ,  $a_i, x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , define localmente una curva algebroide alrededor de  $x_0$ . El único punto donde no es analítica o regular es en  $x_0$ , pero es continua y admite un desarrollo en serie de Puiseux por definición.

**Ejemplos 2.2.10.** Ejemplos de curvas no algebroides:

1. La curva  $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  no es algebroide, ya que no es continua en  $x = 0$ .
2. La curva  $y = |x|$  es continua para todos los valores de  $x$  y analítica excepto en el 0. Para que fuera algebroide, en  $x = 0$  tendríamos que poder escribir  $y = a_1 x^{\frac{1}{N}} + a_2 x^{\frac{2}{N}} + \dots$ , con  $a_i \in \mathbb{R}$  y  $N \in \mathbb{N}$ . Pero en un entorno del 0, la función  $|x|$  se define como  $-x$  para  $x < 0$  y  $x$  para  $x > 0$ , y no hay ninguna serie de potencias que cumpla esto.

## 2.3. Resultado principal

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema [1.0.3](#), siguiendo la prueba de Blumenthal [[Blu07](#), secciones 4-8].

Antes de empezar, descartaremos el caso  $f(z) = az^m$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Para estas funciones, el módulo es constante sobre cualquier círculo centrado en el origen, lo que implica que el conjunto de módulo máximo coincide con todo el plano complejo. La siguiente proposición ofrece una caracterización de este tipo de funciones, permitiéndonos excluir también estos casos.

**Proposición 2.3.1.** [*Caracterización de los monomios*] Una función entera  $f$  con módulo constante sobre un círculo de radio  $R > 0$  centrado en el origen es de la forma  $f(z) = az^m$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Pasa lo mismo si  $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$  en todo un círculo.

*Demostración.* En primer lugar, si la función  $f$  es constante e igual a 0 en el círculo  $\partial D(0, R)$ , por el Principio de Prolongación Analítica [A.0.2](#) es idénticamente cero en todo el plano; por lo tanto, es de la forma  $az^m$  con  $a = 0$ .

A partir de ahora suponemos que en el círculo  $\partial D(0, R)$ , el módulo  $G$  es constante y estrictamente positivo. Para completar la demostración, analizaremos la estructura de la función en el interior del disco, distinguiendo según la existencia y la cantidad de ceros.

Si la función  $f$  no se anula en el interior del disco, por el Principio del Módulo Máximo A.0.7 y el Principio del Módulo Mínimo A.0.9,  $G$  alcanza su valor máximo y mínimo en la frontera. Dado que  $G$  es constante en la frontera, su valor máximo y mínimo coincidirán, lo que obliga a que  $G$  sea constante en todo el disco cerrado. Finalmente, como  $f$  es una función entera con módulo constante en  $\overline{D(0, R)}$ , concluimos que  $f(z) = a$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , de nuevo por el Principio de Prolongación Analítica A.0.2.

Si  $f$  se anula en el interior del disco  $D(0, R)$  en un número infinito de puntos, los ceros de  $f$  tendrán un punto de acumulación dentro del disco (ya que estamos asumiendo que en la frontera no se anula) y, por el Principio de Prolongación Analítica A.0.2, la función es nula; por lo tanto, es de la forma  $az^m$  con  $a = 0$ .

Supongamos ahora que  $f$  se anula en un número finito de puntos en el interior del disco. Si el origen es un cero de orden  $m \geq 0$ , podemos escribir  $f(z) = z^m g(z)$ , donde  $g$  es una función entera tal que  $g(0) \neq 0$ . Como  $|f|$  es constante en la frontera del disco,  $|g|$  también lo será. Entonces, si  $g$  no se anula en el interior del disco, por el caso anterior tenemos que  $g = a$ ,  $a \in \mathbb{C}$  y, por lo tanto,  $f = z^m g(z) = az^m$ , como queríamos.

Para demostrar que el escenario anterior es el único posible, veamos que  $g$  no puede anularse en el interior del disco. Supongamos, por reducción al absurdo, que  $a_1, \dots, a_k$  son ceros de  $g$  en  $D(0, R)$  (todas las raíces distintas de cero). Para cada  $a_i$ , definimos:

$$\psi_i(z) := \frac{R(z - a_i)}{R^2 - \overline{a_i}z}.$$

Estas funciones  $\psi_i$  son holomorfas en el disco cerrado, ya que su único polo se encuentra en  $z = \frac{R^2}{\overline{a_i}}$ , que tiene módulo estrictamente mayor que  $R$  (ya que  $|a_i| < R$ ). Por construcción, cada  $\psi_i$  se anula exactamente en  $a_i$  y tiene módulo constante igual a 1 en la frontera. Efectivamente, si  $|z| = R$ , entonces:

$$|\psi_i(z)|^2 = \left| \frac{R(z - a_i)}{R^2 - \overline{a_i}z} \right|^2 = \frac{R(z - a_i)}{R^2 - \overline{a_i}z} \cdot \overline{\left( \frac{R(z - a_i)}{R^2 - \overline{a_i}z} \right)} = \frac{R^2(z - a_i)(\overline{z} - \overline{a_i})}{(R^2 - \overline{a_i}z)(R^2 - a_i\overline{z})} = 1.$$

Construimos la función auxiliar

$$h(z) = \frac{g(z)}{\psi_1(z) \cdot \dots \cdot \psi_k(z)}.$$

La función  $h$  es holomorfa en  $D(0, R)$ , ya que los ceros del denominador son exactamente los mismos que los del numerador. Además, tiene el mismo módulo que  $g$  en  $\partial D(0, R)$  y no se anula en el interior del disco. Por lo tanto,  $h$  es constante en  $D(0, R)$ , argumentando como anteriormente. Esto implica que, dentro del disco, tenemos

$$g(z) = \lambda \psi_1(z) \cdot \dots \cdot \psi_k(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$F(z) = z^m \lambda \psi_1(z) \cdot \dots \cdot \psi_k(z),$$

tenemos que  $f(z) = F(z)$  en  $D(0, R)$ . Entonces, por el Principio de Prolongación Analítica A.0.2 estas funciones coincidirán donde ambas sean holomorfas; es decir,  $f(z) =$

$F(z) \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{R^2}{a_i} \right\}_{i=1}^k$ . Sin embargo, esto lleva a una contradicción, ya que si tomamos una sucesión de puntos  $\{z_n\}$  que tienda a uno de los polos de  $F$ , por ejemplo,  $z_0 = \frac{R^2}{a_i}$ , tomando límites tendríamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) = \infty.$$

Pero, por hipótesis,  $f$  es una función entera, lo que implica que es continua y finita en todo el plano complejo, por lo tanto, el límite debe ser un número complejo finito ( $f(z_0)$ ). Esta contradicción demuestra que no pueden existir estos factores  $\psi_i$  y, por consiguiente,  $g$  no puede anularse en el interior del círculo.

Finalmente, si partimos de la hipótesis  $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$  en  $\partial D(0, R)$ , esto implica que  $G$  es constante en  $\partial D(0, R)$ , por lo que se reduce al caso anterior.  $\square$

### 2.3.1. La geometría del conjunto $S(f)$

Para poder demostrar el Teorema 1.0.3, necesitamos primero estudiar el conjunto  $S(f)$  (1.0.5), dado que  $M(f) \subset S(f)$ . Empezamos con un teorema para ver la estructura de  $S(f)$ , utilizando para ello los resultados de factorización y analiticidad local expuestos en las secciones anteriores.

**Teorema 2.3.2** (Estructura geométrica de  $S(f)$ ). *En todo el plano, el conjunto  $S(f)$  de una función entera  $f$  que no sea un monomio se compone de, a lo sumo, un conjunto numerable de curvas algebroides. Además, no hay más que un número finito de estas curvas que intersequen cualquier compacto.*

Esta sección se dedicará exclusivamente a demostrar este Teorema. Para que la prueba resulte más accesible, la dividiremos en una serie de lemas que conectan el análisis complejo con las herramientas de geometría analítica local presentadas anteriormente.

A partir de ahora consideraremos valores de  $r$  estrictamente positivos, ya que las coordenadas polares no están definidas para  $r = 0$ . Veremos al final de la sección que el comportamiento en el origen queda determinado por el comportamiento de los puntos de alrededor.

**Lema 2.3.3** (Equivalencia de ceros). *En todo punto  $(r_0, \varphi_0)$  tal que  $G(r_0, \varphi_0) \neq 0$ , los ceros de  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$  son los mismos que los de  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$ <sup>1</sup>.*

*Demostración.* Consideremos un punto  $(r_0, \varphi_0)$  donde  $G(r_0, \varphi_0) \neq 0$ . En un entorno de este punto podemos aplicar la regla de la cadena para obtener la identidad:

$$\frac{\partial G^2}{\partial \varphi} = 2G \frac{\partial G}{\partial \varphi}. \quad (2.7)$$

Sea  $(r_0, \varphi_0)$  un cero de  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$ . Por (2.7), se deduce que el producto  $2G \frac{\partial G}{\partial \varphi}$  debe anularse. Como estamos bajo la hipótesis de que  $G(r_0, \varphi_0) \neq 0$ , el factor  $2G$  es estrictamente positivo, lo que fuerza a que  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0) = 0$ .

<sup>1</sup>Notemos que restringir la equivalencia a los puntos donde  $G \neq 0$  no supone ninguna limitación para el propósito de este trabajo, ya que nuestro objetivo es caracterizar el conjunto de módulo máximo  $M(f)$ . Al ser  $G$  una función no negativa, los puntos donde  $G = 0$  representan mínimos absolutos y, por lo tanto, quedan descartados de forma automática como candidatos a máximo, ya que para ese mismo radio habrá otro punto donde  $G > 0$ .

Recíprocamente, si  $(r_0, \varphi_0)$  es un cero de  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ , la sustitución directa en (2.7) anula inmediatamente el término de la derecha, demostrando que  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0) = 0$ .  $\square$

Esta equivalencia es fundamental. ya que estudiar los ceros de  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$  resultará más sencillo gracias a la expresión en serie de potencias (2.6).

**Lema 2.3.4.** *No existe ningún punto aislado  $(r_0, \varphi_0)$  para el que  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0) = 0$ .*

*Demostración.* Distinguimos dos casos según el valor del módulo  $G$  en el punto crítico:  $G(r_0, \varphi_0) \neq 0$  o  $G(r_0, \varphi_0) = 0$ .

Si  $G(r_0, \varphi_0) \neq 0$ , la función  $\log G$  está bien definida en un entorno  $U$  de  $(r_0, \varphi_0)$ . Por la relación

$$\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{G(r_0, \varphi_0)} \frac{\partial G}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0) = 0, \quad (2.8)$$

sabemos que  $(r_0, \varphi_0)$  es un cero de  $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$ . En la sección anterior hemos visto que, por el Lema 2.1.3,  $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$  es una función armónica en  $U$ . Por la propiedad de la media para funciones armónicas A.0.5, para cualquier radio  $c > 0$  tal que  $\partial D_c \subset U$  tenemos:

$$0 = \frac{\partial \log G}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_c} \frac{\partial \log G}{\partial \varphi},$$

donde  $\partial D_c$  es el círculo centrado en  $(r_0, \varphi_0)$  y de radio  $c$ . Como  $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$  es continua y la integral en el círculo vale 0, sobre el círculo tiene que tomar valores positivos y negativos (ya que el caso en que se anula sobre todo el círculo lo hemos excluido). Por el Teorema de Bolzano, existe al menos un punto del círculo  $\partial D_c$  donde  $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$  se anula, por lo que  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$  se anula también, por (2.8). Como nuestro argumento sirve para cualquier radio  $c > 0$  suficientemente pequeño, si hacemos el límite cuando  $c \rightarrow 0$  tenemos que el cero  $(r_0, \varphi_0)$  de  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$  no es un punto aislado.

Si  $G(r_0, \varphi_0) = 0$ , dado que  $G$  es, por definición, una función no negativa, el valor 0 representa un mínimo absoluto de la función. Si consideramos el círculo de centro 0 y radio  $r_0$ , la función  $G(r_0, \varphi) = 0$  debe alcanzar este valor mínimo en  $\varphi_0$ . Para que un punto sea un mínimo local de una función continua y no constante, la función debe ser decreciente justo antes del punto  $\left(\frac{\partial G}{\partial \varphi} < 0\right)$  y creciente justo después  $\left(\frac{\partial G}{\partial \varphi} > 0\right)$ . Ahora consideramos un radio  $c > 0$  suficientemente pequeño tal que la intersección del círculo de radio  $c$  y centro  $(r_0, \varphi_0)$  con el círculo de centro 0 y radio  $r_0$  sean dos puntos. En uno de estos puntos de intersección tendremos que  $\frac{\partial G}{\partial \varphi} > 0$  y en el otro,  $\frac{\partial G}{\partial \varphi} < 0$ . Nuevamente, por el Teorema de Bolzano, encontramos puntos donde  $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$  para cualquier entorno del punto inicial. Por lo tanto, el cero no puede ser un punto aislado.  $\square$

Ahora supongamos que  $(r_0, \varphi_0)$  es un cero de  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$ . Queremos estudiar el conjunto  $S(f)$  alrededor de este punto crítico. Para ello, necesitamos estudiar el comportamiento local de la función  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$ . Para facilitar el proceso, expresaremos la derivada angular como una serie de potencias alrededor de  $(r_0, \varphi_0)$ .

**Observación 2.3.5** (Desarrollo en serie de potencias de  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$ ). Existen coeficientes  $\gamma_{kl} \in \mathbb{R}$  tales que la derivada angular se puede expresar localmente alrededor de  $(r_0, \varphi_0)$  como:

$$\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{kl} (r - r_0)^k (\varphi - \varphi_0)^l. \quad (2.9)$$

*Demostración.* Como hemos visto en (2.6), podemos expresar  $G^2$  mediante la serie de potencias  $G^2(r, \varphi) = g_0 + r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{kl} r^k \varphi^l$ . Como  $G^2$  es una función analítica real en las variables  $(r, \varphi)$  para todo  $r > 0$  (el origen lo estudiaremos por separado), podemos centrar el desarrollo de la serie en el punto  $(r_0, \varphi_0)$ , obteniendo

$$G^2(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g'_{kl} (r - r_0)^k (\varphi - \varphi_0)^l,$$

para ciertos coeficientes  $g'_{kl} \in \mathbb{R} \forall k, l \in \mathbb{N}$ . Dado que las series de potencias son derivables término a término dentro de su radio de convergencia, la derivada angular admite también un desarrollo local en serie de potencias:

$$\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) g'_{k, l+1} (r - r_0)^k (\varphi - \varphi_0)^l.$$

□

Este desarrollo local es el que nos permitirá emplear las herramientas de geometría analítica presentadas anteriormente. No obstante, para aplicar el Teorema de Preparación de Weierstrass 2.2.4 a la serie (2.9), debemos garantizar primero que la función no se anula idénticamente sobre los círculos, requisito que demostramos en el siguiente lema.

**Lema 2.3.6.** *Fijado un  $r_0 > 0$ ,  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r_0, \varphi) = 0$  no puede ser idénticamente nula para todo  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .*

*Demostración.* Supongamos, por reducción al absurdo, que la derivada angular se anula en todo el círculo de radio  $r_0$ , es decir,  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r_0, \varphi) = 0$  para todo  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Entonces, la función  $G^2(r_0, \varphi)$  debe ser constante sobre dicho círculo. Dado que  $G^2 = |f|^2$ , esto implica directamente que el módulo de la función entera  $f$  es constante en la circunferencia  $\partial D(0, r_0)$ . Sin embargo, por la Proposición 2.3.1, hemos descartado este caso. □

Para poder utilizar las herramientas de geometría local de la sección anterior, admitamos por un momento valores complejos para  $r - r_0$  y  $\varphi - \varphi_0$ . Una vez obtenida la estructura del conjunto de ceros en el dominio complejo, restringiremos de nuevo el análisis al plano real para, junto con el Lema 2.3.4, completar la demostración del Teorema 2.3.2.

**Lema 2.3.7** (Factorización local de la derivada angular en series de Puiseux). *Existen funciones analíticas  $h$  y  $U$ , con  $h(r_0, \varphi_0) \neq 0$ ,  $U(r_0, \varphi_0) \neq 0$ , tales que la derivada angular admite la siguiente factorización local, con  $\varepsilon^{(\lambda)}$  series de Puiseux,*

$$\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r, \varphi) = h(r, \varphi) U(r, \varphi) \prod_{\lambda=1}^d \left( (\varphi - \varphi_0) - \varepsilon^{(\lambda)}(r - r_0) \right).$$

*Demostración.* Por el Teorema de Preparación de Weierstrass 2.2.4, y dado que por el Lema 2.3.6 la derivada angular no es idénticamente nula sobre el círculo de radio  $r_0$ , podemos expresar

$$\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{kl} (r - r_0)^k (\varphi - \varphi_0)^l = P(r, \varphi) \cdot h(r, \varphi), \quad (2.10)$$

con  $h$  función analítica,  $h(r_0, \varphi_0) \neq 0$  y  $P$  un polinomio de Weierstrass de la variable  $(\varphi - \varphi_0)$  de grado  $d \geq 1$ :

$$P(r, \varphi) = (\varphi - \varphi_0)^d + a_{d-1}(r - r_0)(\varphi - \varphi_0)^{d-1} + \dots + a_0(r - r_0),$$

con  $a_i$  funciones analíticas tales que  $a_i(0) = 0$ . Puesto que  $h(r_0, \varphi_0) \neq 0$  en un entorno del punto  $(r_0, \varphi_0)$ , los ceros de  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r, \varphi)$  coinciden localmente con los ceros del polinomio de Weierstrass  $P$ .

A continuación, aplicando el Teorema de Puiseux 2.2.8 al polinomio  $P$ , tenemos que:

$$P(r, \varphi) = U(r, \varphi)(r - r_0)^l \prod_{\lambda=1}^d \left( (\varphi - \varphi_0) - \varepsilon^{(\lambda)}(r - r_0) \right), \quad (2.11)$$

con  $\varepsilon^{(\lambda)}$  series de Puiseux,  $U$  función analítica tal que  $U(r_0, \varphi_0) \neq 0$  y  $l \in \mathbb{N}$ . Como antes hemos visto que fijado un  $r_0$ , la función  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$  no puede anularse siempre, se tiene  $l = 0$ .

Finalmente, combinando las expresiones (2.10) y (2.11), obtenemos la factorización deseada en un entorno local del punto crítico:

$$\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r, \varphi) = h(r, \varphi) U(r, \varphi) \prod_{\lambda=1}^d \left( (\varphi - \varphi_0) - \varepsilon^{(\lambda)}(r - r_0) \right),$$

donde  $h(r_0, \varphi_0) \neq 0$ ,  $U(r_0, \varphi_0) \neq 0$ . □

Por lo tanto, localmente alrededor de  $(r_0, \varphi_0)$ , los ceros de  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$  son de la forma

$$\varphi^{(\lambda)} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{(\lambda)} (r - r_0)^{\frac{i}{p}}, \quad \lambda \in \{1, \dots, d\}, \quad (2.12)$$

con  $p$  entero positivo y  $\varepsilon_i^{(\lambda)} \in \mathbb{C} \forall i \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \{1, \dots, d\}$ .

**Proposición 2.3.8** (Estructura local de  $S(f)$ ). *Los ceros de  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$  forman localmente un número finito de elementos algebroides reales.*

*Demostración.* Si ahora volvemos a considerar nuestras variables  $(r, \varphi)$  en  $\mathbb{R}$ , debemos identificar cuáles de estas ramas complejas (2.12) tienen traza en  $\mathbb{R}^2$ .

Como hemos supuesto que  $(r_0, \varphi_0)$  es un cero (real) de  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$  y hemos demostrado en el Lema 2.3.4 que los ceros de la derivada angular no pueden ser aislados, debe existir una sucesión de puntos reales pertenecientes a las curvas (2.12) que se acumule en  $(r_0, \varphi_0)$ . Dado que tenemos un número finito de curvas y un número infinito de puntos en la sucesión, alguna curva contendrá una subsucesión infinita de ceros reales. Por lo tanto, por el Principio de Prolongación Analítica A.0.3, al menos uno de los desarrollos anteriores (2.12) tiene que ser real en todo un entorno de  $(r_0, \varphi_0)$ .

En consecuencia, acabamos de ver que los ceros de  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$  y, por lo tanto, los de  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ , forman localmente un número finito de elementos algebroides reales, ya que los desarrollos (2.12) son series de potencias fraccionarias; es decir, elementos algebroides. □

**Proposición 2.3.9** (Finitud global de  $S(f)$  sobre compactos). *En cualquier compacto  $K$  contenido en el plano, el conjunto de ceros  $S(f)$  se compone de un número finito de curvas algebroides.*

*Demostración.* Supongamos, por reducción al absurdo, que existen infinitas curvas de la forma (2.12) intersecando a  $K$ , o bien una sola curva que interseca al compacto infinitas veces. Como estamos trabajando sobre un compacto y las curvas son continuas, existiría un radio  $r^*$  tal que el círculo  $\partial D(0, r^*)$  intersecaría a una cantidad infinita de estas curvas. Esto implicaría que la función analítica de una variable  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}(r^*, \varphi)$  tendría infinitos ceros en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . En consecuencia, por el PPA A.0.2, la función  $\frac{\partial G^2}{\partial \varphi}$  debería ser nula sobre todo el círculo, caso que hemos excluido en el Lema 2.3.6.  $\square$

Finalmente, analizamos el comportamiento en el origen ( $r = 0$ ). Puesto que la función  $f$  no es un monomio,  $G$  no es constante sobre las circunferencias. Por la compacidad de  $[0, 2\pi]$ ,  $G(r, \varphi)$  alcanza siempre un máximo y un mínimo para cada radio  $r$ , lo que garantiza la existencia de puntos en  $S(f)$  para todo radio  $r > 0$ . Dado que  $S(f)$  es localmente una unión de curvas algebroides y estas curvas son continuas, la existencia de estos ceros para radios arbitrariamente pequeños implica que dichas curvas deben aproximarse al origen cuando  $r \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el origen actúa como punto de intersección de un número finito de curvas algebroides del tipo (2.12), cerrando así la estructura global de  $S(f)$ .

### 2.3.2. La geometría del conjunto $M(f)$

Una vez establecida la estructura geométrica de  $S(f)$  como una colección de curvas algebroides, el siguiente paso natural es estudiar su relación con el conjunto de puntos de módulo máximo,  $M(f)$ . Dado que el valor  $M(r)$  se define como el máximo del módulo sobre un círculo de radio fijo, los puntos donde se alcanza este valor corresponden a puntos críticos de la derivada angular de  $G$ , es decir, puntos del conjunto  $S(f)$ . Por lo tanto, acabamos de ver que  $M(f) \subset S(f)$ . Es importante notar que, en general, esta inclusión es estricta, pues el conjunto de ceros de la derivada angular también contiene los mínimos absolutos y los extremos relativos de  $G$ , que no pertenecen a  $M(f)$ .

Esto implica que los puntos de módulo máximo se encuentran necesariamente sobre la colección de curvas algebroides descritas anteriormente en (2.12). Esta relación es la que nos permite trasladar la regularidad de las curvas algebroides al estudio del conjunto de módulo máximo. Para formalizar este estudio, empezaremos definiendo los puntos de módulo máximo para cada radio:

**Definición 2.3.10.** Si fijamos un radio  $r_0 > 0$ , definimos los puntos máxima del círculo de radio  $r_0$  como los puntos en los que  $G(r, \varphi)$  alcanza el valor máximo  $M(r_0)$ , es decir,

$$M_{r_0}(f) := \{(r_0, \varphi), \varphi \in [0, 2\pi] : G(r_0, \varphi) = M(r_0)\} = M(f) \cap \partial D(0, r_0).$$

Una vez fijado un círculo de radio  $r_0 > 0$ , el objetivo es ver cómo varían los puntos máxima cuando nos movemos en un entorno de ese radio, es decir, sobre los círculos vecinos. Dado que diferentes ramas de  $S(f)$  pueden competir por el valor máximo absoluto, tenemos que distinguir los casos  $r > r_0$  y  $r < r_0$ , pues la trayectoria de los puntos de módulo máximo podría no ser continua o cambiar de rama algebroide al atravesar  $r_0$ .

**Definición 2.3.11.** Sea  $r_0 > 0$  un radio fijo y  $C = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  las curvas algebroides de  $S(f)$  que pasan por algún punto  $p \in M(f) \cap \partial D(0, r_0)$ . Decimos que  $r_0$  es un punto excepcional si el conjunto de módulo máximo cambia de rama algebroide o de posición de manera no continua al atravesar el radio  $r_0$ . Formalmente, esto pasa cuando existe un punto  $p \in M(f) \cap \partial D(0, r_0)$  para el cual  $M(f) \cap C \cap D(0, r_0)$  no coincide con las curvas

análogas en el conjunto  $\{z : |z| > r_0\}$  en un entorno de  $p$ . Podemos tener dos tipos de puntos excepcionales:

- Puntos de cruce o excepcionales de primer tipo: *existe un punto  $p \in M(f) \cap \partial D(0, r_0)$  común a, al menos, dos curvas algebroides distintas  $\gamma_i, \gamma_j \in C$ . Solo se puede dar cuando pasan varias curvas algebroides de  $S(f)$  por un mismo punto. En este caso, el conjunto  $M(f)$  recorre la rama  $\gamma_i$  para  $r < r_0$  y la rama  $\gamma_j$  para  $r > r_0$ .*
- Puntos de discontinuidad o excepcionales del segundo tipo: *las curvas algebroides que contienen a  $M(f)$  a ambos lados de  $r_0$  intersecan al círculo  $\partial D(0, r_0)$  en puntos diferentes. Es decir, existen  $p_1, p_2 \in \partial D(0, r_0)$  con  $p_1 \neq p_2$  tales que*

$$p_1 = \lim_{r \rightarrow r_0^-} M(f) \cap \partial D(0, r) \text{ y } p_2 = \lim_{r \rightarrow r_0^+} M(f) \cap \partial D(0, r).$$

Recordamos que el objetivo de esta sección es probar el Teorema 1.0.3, es decir, si  $f$  es una función entera distinta de la forma  $az^m$ , el conjunto  $M(f)$  se compone de un conjunto numerable de arcos de curvas algebroides; es decir, no es una colección caótica de puntos.

Para demostrarlo, utilizaremos el hecho de que, para cualquier conjunto compacto  $K$ , el conjunto  $M(f) \cap K$  está constituido por una unión finita de arcos (se deduce de la Proposición 2.3.9). Dado un radio  $r_0 > 0$ , demostraremos que existe un entorno  $I := (r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon)$  tal que para cada  $r \in I$ , el máximo se alcanza sobre una (o un número finito) de las ramas algebroides (2.12). La analiticidad de las funciones involucradas garantiza que, dadas dos ramas candidatas, existe un subentorno donde una de ellas domina a la otra en términos de magnitud, excluyendo así la existencia de puntos de acumulación de cambios de rama (oscilaciones infinitas).

*Demostración del Teorema 1.0.3.* Fijamos un radio  $r_0 > 0$  y denotamos por  $\{(r_0, \varphi_0^{(\lambda)})\}$  el conjunto finito de puntos máxima del círculo  $\partial D(0, r_0)$ . Por (2.12), cada uno de estos puntos actúa como el centro de una o varias ramas de ceros de la derivada angular. Para facilitar la notación, introduciremos el cambio de variable  $t := (r - r_0)^{\frac{1}{p}}$ , el cual permite reescribir dichas ramas como series de potencias ordinarias en la variable  $t$ :

$$\gamma_\lambda := \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{C} : \varphi - \varphi_0^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{(\lambda)} t^i \right\}.$$

Este paso es fundamental, ya que permite aplicar los resultados sobre funciones analíticas a nuestras curvas.

Aunque sabemos que estas curvas son soluciones locales de  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}(r, \varphi) = 0$ , debemos analizar su comportamiento al variar  $r$ ; es decir, si para  $r \neq r_0$  las ramas conservan su carácter real y su condición de máximo. Para ello, planteamos el desarrollo de Taylor de  $G^2$  centrado en  $(r_0, \varphi_0^{(\lambda)})$ , para ciertos coeficientes  $\delta_{kl}^{(\lambda)} \in \mathbb{R} \forall k, l, \lambda$ ,

$$G^2(r, \varphi) = M^2(r_0) + \sum \delta_{kl}^{(\lambda)} (r - r_0)^k \left( \varphi - \varphi_0^{(\lambda)} \right)^l.$$

Si denotamos  $G_\lambda(r)$  los valores de  $G(r, \varphi)$  sobre las curvas  $\gamma_\lambda$  tenemos que

$$G_\lambda^2(r) = M^2(r_0) + \sum \delta_{kl}^{(\lambda)} t^{p \cdot k} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{(\lambda)} t^i \right)^l = M^2(r_0) + \sum B_i^{(\lambda)} t^i,$$

para algunos coeficientes  $B_i^{(\lambda)} \in \mathbb{R} \forall i, \lambda$  que se obtienen reescribiendo la suma anterior y agrupando términos.

Es importante notar que estamos suponiendo que  $M(r_0) \neq 0$ , ya que si fuera cero, por el Principio del Módulo Máximo A.0.7 tendríamos que la función sería constante igual a 0 sobre el círculo de radio  $r_0$ , caso que hemos excluido al principio. Bajo esta premisa, podemos reescribir la igualdad anterior extrayendo factor común,  $G_\lambda(r) = M(r_0) \left(1 + \frac{\sum B_i^{(\lambda)} t^i}{M^2(r_0)}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Para radios  $r$  suficientemente cercanos a  $r_0$ , la variable  $t$  tiende a cero, lo que implica que la suma  $\sum B_i^{(\lambda)} t^i$  se hace arbitrariamente pequeña. Esto nos permite emplear el desarrollo de Taylor  $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \dots$ , válido para  $|u| < 1$ . Sustituyendo este desarrollo en la suma anterior y agrupando términos, obtenemos la expresión:

$$G_\lambda(r) = M(r_0) + \sum A_i^{(\lambda)} t^i,$$

para ciertos coeficientes  $A_i^{(\lambda)} \in \mathbb{R} \forall i, \lambda$ . Sin pérdida de generalidad, si para dos índices  $\lambda \neq \mu$  las funciones  $G_\lambda(r)$  y  $G_\mu(r)$  coinciden en un entorno de  $r_0$  (es decir, tienen los mismos coeficientes  $A_i$ ), consideraremos únicamente una de ellas para el análisis.

Supongamos ahora que  $r > r_0$ , para  $r$  suficientemente cercano a  $r_0$ , y restamos los valores de  $G_\lambda$  y  $G_\mu$  para dos índices  $\lambda, \mu$  cualesquiera

$$G_\mu - G_\lambda = t^s \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(\lambda, \mu)} t^i,$$

con  $s \geq 1$ ,  $A_i^{(\lambda, \mu)} \in \mathbb{R} \forall i$  y  $A_0^{(\lambda, \mu)} \neq 0$ , ya que estamos suponiendo que son todas diferentes dos a dos. Esta resta tiene un signo constante para valores de  $r$  suficientemente cercanos a  $r_0$ , determinado unívocamente por el signo de  $A_0^{(\lambda, \mu)} t^s$ .

Dado que tenemos un número finito de curvas, al hacer todas las restas 2 a 2, podemos encontrar un valor de  $\lambda$  para el que la resta con todos los demás sea no negativa en un entorno lateral. Esto implica que  $G_\lambda$  es superior (o igual) al resto de las funciones en dicho entorno, por lo que  $M(r) = G_\lambda(r)$  para  $r > r_0$ . Podemos hacer el mismo procedimiento para  $r < r_0$  y obtenemos  $M(r) = G_\mu(r)$  en un entorno de  $r_0$ ,  $r < r_0$ .

Si las ramas  $G_\mu$  y  $G_\lambda$  no coinciden, decimos que  $r_0$  es un punto excepcional. Dado que el número de ramas candidatas  $\gamma_\lambda$  es finito y la diferencia entre los valores del módulo sobre dos de ellas,  $G_\mu - G_\lambda$ , tiene un número finito de ceros en cualquier compacto (por el Principio de Prolongación Analítica A.0.2), se deduce la existencia de radios  $r^- < r_0 < r^+$  tales que:

1. Para todo  $r \in (r^-, r_0]$ , el máximo se alcanza de forma persistente sobre una única rama ( $\gamma_\mu$ ).
2. Para todo  $r \in [r_0, r^+)$ , el máximo se alcanza de forma persistente sobre una única rama ( $\gamma_\lambda$ ).

En conclusión, hemos demostrado que el conjunto  $M(f)$  se compone de, a lo sumo, un conjunto numerable de trozos de curvas algebroides. Además, el conjunto coincide localmente con un arco de curva algebroide a cada lado de  $r_0$ , lo que excluye la posibilidad de que el máximo oscile infinitas veces entre distintas ramas en un entorno del radio crítico. Esto otorga al conjunto de módulo máximo una estructura geométrica bien definida y no caótica.  $\square$

# Capítulo 3

## Ejemplos

En esta sección calcularemos el conjunto de módulo máximo para diferentes funciones enteras. En cada uno de ellos podremos observar alguno de los fenómenos que hemos definido en la sección anterior.

### 3.1. Blumenthal

A continuación, desarrollaremos los ejemplos de Blumenthal [Blu07, Sección 10] para funciones lineales y cuadráticas, analizando los conjuntos de módulo máximo y la aparición de puntos excepcionales de primer tipo o puntos de cruce.

#### 3.1.1. Función lineal

El primer ejemplo se trata del caso más elemental; consideramos una función lineal de la forma

$$f(z) = z + \beta,$$

donde  $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se excluye el valor  $\beta = 0$  para evitar los monomios, cuyo conjunto de módulo máximo es todo el plano complejo.

Geoméricamente, la función  $f$  representa una translación del plano por el vector constante  $\beta$ . Por lo tanto, para cada  $r \geq 0$ , el módulo de  $f$  sobre el círculo  $\partial D(0, r)$  satisface

$$|f(z)| = |z + \beta| \leq |z| + |\beta| = r + |\beta|,$$

aplicando la desigualdad triangular. Dicha cota superior se alcanza si y solo si los números complejos  $z$  y  $\beta$  tienen el mismo argumento. Por lo tanto, el valor máximo  $M(r) = r + |\beta|$  es único para cada radio y se localiza en el punto  $z = re^{i \arg(\beta)}$ .

En conclusión, el conjunto de módulo máximo  $M(f)$  se compone de la semirrecta que nace en el origen y se extiende indefinidamente pasando por el punto  $\beta$ . Es decir, se trata de una única curva analítica sin puntos excepcionales.

#### 3.1.2. Polinomio cuadrático con raíces reales de diferente signo

Consideramos un polinomio de segundo grado de la forma:

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta = (z - e_1)(z - e_2).$$

El caso más interesante se da cuando  $e_1$  y  $e_2$  son números reales de signos diferentes. Supondremos que  $e_1 = |e_1|$ ,  $e_2 = -|e_2|$  y  $e_1 + e_2 < 0$ . Se pueden ver los detalles de otros casos en el Apéndice B.1.

Este es el escenario más rico desde el punto de vista geométrico, ya que las curvas de nivel  $|f(z)| = |z - e_1||z - e_2| = a^2$  corresponden a curvas de Cassini con focos en  $e_1$  y  $e_2$

(ver Figura 3.1). Una curva de este tipo tiene, a lo sumo, cuatro puntos reales comunes con un círculo centrado en el origen. La ecuación de Cassini con focos reales  $e_1$  y  $e_2$  es:

$$|f(z)|^2 = \left[ (x - e_1)^2 + y^2 \right] \left[ (x - e_2)^2 + y^2 \right] = a^4. \quad (3.1)$$

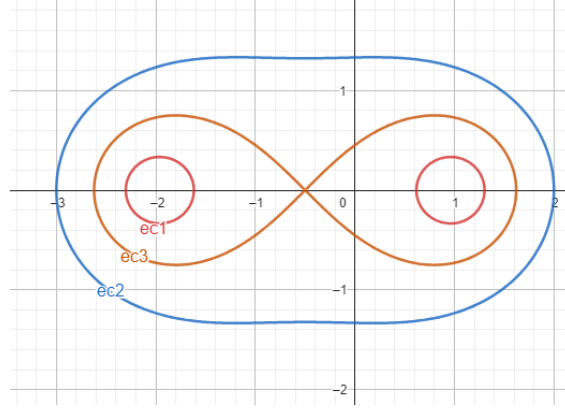


Figura 3.1: Representación de las curvas de Cassini para diferentes valores del módulo con focos asimétricos  $e_1 = 1$  y  $e_2 = -2$ .

Denotaremos  $M(r) = a_r^2$  el máximo módulo sobre el círculo  $\partial D(0, r)$ . Para que el valor  $a_r$  corresponda realmente al máximo de la función sobre dicho círculo,  $\partial D(0, r)$  debe estar contenido por completo en el interior de la curva de Cassini  $|f(z)| = a_r^2$  y debe tener al menos un punto en común con ella; de lo contrario, el módulo máximo sería mayor o menor a  $a_r^2$ , respectivamente. En estos puntos de contacto, debe existir tangencia entre la curva y el círculo.

**Lema 3.1.1.** *Tenemos dos casos a distinguir sobre los puntos de tangencia del círculo  $\partial D(0, r)$  con su correspondiente curva de Cassini  $|f(z)| = a_r^2$ :*

1. *El círculo tiene un solo punto de contacto con la curva de Cassini que, por razones de simetría, está situado sobre el eje  $x$ . En este caso diremos que el círculo es simplemente tangente.*
2. *El círculo tiene dos puntos de contacto con la curva, simétricos respecto al eje  $x$ . En este caso diremos que el círculo es doblemente tangente.*

*Demostración.* Como los ceros de  $f$  son reales, se cumple  $|f(z)| = |f(\bar{z})|$  para todo  $z$ . Esto implica que si  $z_0 \in \partial D(0, r)$  es un punto de contacto con la curva  $|f(z)| = a_r^2$ , su conjugado, que también pertenece al círculo, satisface  $|f(\bar{z}_0)| = a_r^2$ , constituyendo así otro punto de contacto. La única forma de que haya un único punto de contacto es que  $z_0$  sea real. Asimismo, si tiene dos puntos de contacto distintos, estos deben ser simétricos respecto al eje  $x$ .

Finalmente, se descarta la posibilidad de cuatro puntos de contacto en el contexto del módulo máximo. Si hubiera cuatro, parte del círculo saldría por fuera de la curva de Cassini y el valor  $a_r$  no correspondería al máximo en este círculo.  $\square$

Por lo tanto, para los radios  $r$  en que el círculo sea simplemente tangente, el máximo se obtendrá sobre un punto del eje real. Nuestro interés es buscar los radios  $r$  para los que tenemos un círculo doblemente tangente.

**Lema 3.1.2** (Condición de tangencia doble). *El contacto doble ocurre exclusivamente cuando el radio  $r$  satisface:*

$$r_1 := \left( \sqrt{|e_1|} - \sqrt{|e_2|} \right)^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{|e_1 + e_2|} < r < \left( \sqrt{|e_1|} + \sqrt{|e_2|} \right)^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{|e_1 + e_2|} =: r_2.$$

*Demostración.* Para empezar, vamos a buscar la ecuación que define los puntos máxima del círculo  $\partial D(0, r)$ . Sustituyendo  $y^2 = r^2 - x^2$  en la ecuación de Cassini (3.1), obtenemos una ecuación que depende únicamente de la abscisa  $x$ :

$$(-2e_1 x + e_1^2 + r^2)(-2e_2 x + e_2^2 + r^2) = a_r^4.$$

Al desarrollar los paréntesis y agrupar términos, llegamos a la siguiente ecuación cuadrática:

$$4e_1 e_2 x^2 - 2(e_1 + e_2)(e_1 e_2 + r^2)x + (e_1^2 + r^2)(e_2^2 + r^2) = a_r^4. \quad (3.2)$$

Para que el valor  $a_r^2$  corresponda al máximo absoluto, el círculo debe ser tangente a la curva de Cassini, lo que exige que el discriminante de esta ecuación sea cero. Esto garantiza una raíz doble  $x_t$  que actúa como vértice de la parábola definida por (3.2). Al ser  $4e_1 e_2 < 0$ , dicho vértice representa un máximo. Un discriminante distinto de cero implicaría, o bien cuatro puntos de intersección (donde parte del círculo quedaría fuera de la curva), o bien dos soluciones reales distintas, escenarios que invalidarían a  $a_r^2$  como máximo absoluto.

Al imponer que el discriminante sea nulo y aislar  $a_r^4$ , obtenemos el valor del módulo máximo en función del radio,

$$a_r^4 = \frac{4e_1 e_2 (e_1^2 + r^2)(e_2^2 + r^2) - (e_1 + e_2)^2 (e_1 e_2 + r^2)^2}{4e_1 e_2} = \frac{(e_1 - e_2)^2 (r^2 - e_1 e_2)^2}{4|e_1 e_2|}. \quad (3.3)$$

En este escenario de tangencia, la abscisa común de los dos puntos de contacto es

$$x_t = \frac{(e_1 + e_2)(e_1 e_2 + r^2)}{4e_1 e_2}. \quad (3.4)$$

Para que existan dos puntos de contacto simétricos fuera del eje real, es necesario que  $|x_t| < r$ , lo que equivale a que la ordenada  $y_t^2 = r^2 - x_t^2$  sea estrictamente positiva. Sustituyendo  $x_t$  en la ecuación del círculo, obtenemos:

$$y_t^2 = r^2 - \frac{(e_1 + e_2)^2 (e_1 e_2 + r^2)^2}{16e_1^2 e_2^2}, \quad (3.5)$$

evidentemente negativo para valores de  $r$  suficientemente grandes o suficientemente pequeños, lo que indica que el contacto doble solo existe en un intervalo determinado.

Para determinar el lugar geométrico de estos puntos al variar  $r$ , aislamos  $r^2$  de (3.4) y lo sustituimos en (3.5), obteniendo, tras completar cuadrados,

$$\left( x_t - \frac{2e_1 e_2}{e_1 + e_2} \right)^2 + y_t^2 = -e_1 e_2 + \frac{4e_1^2 e_2^2}{(e_1 + e_2)^2}. \quad (3.6)$$

Esta ecuación describe un círculo que contiene todos los posibles puntos de contacto doble. El centro de dicho círculo es

$$\left( \frac{2e_1 e_2}{e_1 + e_2}, 0 \right),$$

y su radio

$$\sqrt{|e_1 e_2|} \left| \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2} \right|.$$

El fenómeno del contacto doble nace y muere cuando este círculo interseca el eje real  $y_t = 0$ . Cortará el eje en dos puntos

$$x = \frac{2e_1 e_2}{e_1 + e_2} \pm \sqrt{|e_1 e_2|} \left| \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2} \right|.$$

Simplificando estas expresiones, obtenemos

$$x_1 = - \left( \sqrt{|e_1|} + \sqrt{|e_2|} \right)^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{e_1 + e_2} \quad y \quad x_2 = \left( \sqrt{|e_1|} - \sqrt{|e_2|} \right)^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{e_1 + e_2}.$$

Por lo tanto, por nuestras consideraciones iniciales sobre los valores  $e_1$  y  $e_2$ , el primer punto estará a la derecha del origen y el segundo, a la izquierda. En estos puntos críticos el contacto es sobre el eje real, es decir, se tiene  $|x| = r$ , lo que define los radios críticos  $r_1$  y  $r_2$  del enunciado.  $\square$

En conclusión, para  $r_1 < r < r_2$ , hay dos curvas de máximos, que corresponden a los semicírculos superior e inferior del círculo (3.6). En estos casos, la función  $M(r)$  viene dada por

$$M(r) = \frac{|e_1| + |e_2|}{2\sqrt{|e_1 e_2|}} (r^2 + |e_1 e_2|),$$

tal y como hemos visto en (3.3). A continuación, tenemos que estudiar los valores  $r \leq r_1$  y  $r \geq r_2$ . Hemos visto que para estos valores solo hay círculos simplemente tangentes, por lo tanto, las curvas de máximos son segmentos del eje real.

**Lema 3.1.3** (Trayectoria inicial sobre el semieje real negativo). *Para  $0 \leq r \leq r_1$ , la curva de máximos es el segmento negativo entre  $x = 0$  y  $x = -r_1$ .*

*Demostración.* Para demostrarlo, es necesario asegurarse de que  $|f(r)| < |f(-r)|$  para estos valores de  $r$ . Calculamos estos valores:

1.  $|f(-r)| = |r + e_1| |r - |e_2||$
2.  $|f(r)| = |r - e_1| |r + |e_2||$

Según nuestras hipótesis sobre  $e_1, e_2$ , tenemos que  $|e_1 + e_2| = |e_2| - |e_1|$ , por lo tanto,

$$r \leq r_1 = \frac{\left( \sqrt{|e_1|} - \sqrt{|e_2|} \right)^2}{|e_2| - |e_1|} \sqrt{|e_1 e_2|} = \frac{\sqrt{|e_1|} - \sqrt{|e_2|}}{\sqrt{|e_1|} + \sqrt{|e_2|}} \sqrt{|e_1 e_2|} < \sqrt{|e_1 e_2|} < |e_2|. \quad (3.7)$$

Por lo tanto,

$$|f(-r)| = (r + |e_1|) (|e_2| - r),$$

mientras que existen dos hipótesis admisibles para  $|f(r)|$ , dependiendo de si  $r < |e_1|$  o  $r > |e_1|$ :

1.  $|f(r)| = (|e_1| - r) (r + |e_2|).$

$$2. |f(r)| = (r - |e_1|)(r + |e_2|).$$

Con la primera hipótesis, tenemos:

$$|f(-r)| - |f(r)| = 2r(|e_2| - |e_1|) > 0.$$

Con la segunda, tenemos:

$$|f(-r)| - |f(r)| = 2(|e_1 e_2| - r^2) > 0,$$

donde en la última igualdad hemos usado la desigualdad demostrada en (3.7). Por lo tanto, en ambos casos obtenemos la desigualdad que buscábamos:

$$|f(r)| < |f(-r)|.$$

□

**Lema 3.1.4** (Trayectoria final sobre el semieje real positivo). *Para  $r_2 \leq r$ , la curva de máximos es el segmento positivo a partir de  $x = +r_2$ .*

*Demostración.* En este caso, queremos ver que  $|f(-r)| < |f(r)|$ . Utilizando de nuevo las hipótesis sobre  $e_1$  y  $e_2$  obtenemos

$$r \geq r_2 = \frac{(\sqrt{|e_1|} + \sqrt{|e_2|})^2}{|e_2| - |e_1|} \sqrt{|e_1 e_2|} = \frac{\sqrt{|e_1|} + \sqrt{|e_2|}}{\sqrt{|e_1|} - \sqrt{|e_2|}} \sqrt{|e_1 e_2|} > \sqrt{|e_1 e_2|} > |e_1|. \quad (3.8)$$

Por lo tanto,

$$|f(r)| = (r - |e_1|)(r + |e_2|),$$

mientras que existen dos hipótesis admisibles para  $|f(-r)|$ , dependiendo de si  $r > |e_2|$  o  $r < |e_2|$ :

$$1. |f(-r)| = (r + |e_1|)(r - |e_2|).$$

$$2. |f(-r)| = (r + |e_1|)(|e_2| - r).$$

Con la primera hipótesis, tenemos

$$|f(r)| - |f(-r)| = 2r(|e_2| - |e_1|) > 0.$$

Con la segunda, tenemos

$$|f(r)| - |f(-r)| = 2(r^2 - |e_1 e_2|) > 0,$$

donde en la última igualdad hemos usado la desigualdad demostrada en (3.8). Por lo tanto, en ambos casos obtenemos la desigualdad que buscábamos:

$$|f(-r)| < |f(r)|.$$

□

Recopilando toda la información obtenida tenemos que el conjunto de módulo máximo se compone de:

1.  $0 \leq r \leq r_1$ : una sola curva máxima, el segmento  $[0, -r_1]$  del eje  $x$ .
2.  $r_1 < r < r_2$ : dos curvas máxima, los dos semicírculos (3.6).
3.  $r \geq r_2$ : una sola curva máxima, el segmento  $[r_2, \infty)$  del eje  $x$ .

En este caso los puntos excepcionales son  $r_1$  y  $r_2$  y ambos se tratan de puntos excepcionales del primer tipo o puntos de cruce. Para ver la representación del conjunto de módulo máximo en este caso, ver Figura 1.1a.

## 3.2. Hardy

A continuación, analizaremos un ejemplo fundamental que incluye puntos excepcionales de segundo tipo o puntos de discontinuidad. Siguiendo el trabajo original de Hardy [Har09], analizaremos la función exponencial

$$f(z) = e^{-z^3 - 3az^2 - 3b^2z},$$

centrándonos en cómo la relación entre los parámetros  $a > 0$  y  $b > 0$  puede romper la continuidad del conjunto de módulo máximo.

Para facilitar el estudio de  $M(f)$ , analizaremos el logaritmo del módulo de  $f$ ,  $\log |f(z)|$ , lo cual simplifica la expresión a un polinomio de tercer grado en coordenadas polares:

$$\log G(r, \theta) = -r^3 \cos 3\theta - 3ar^2 \cos 2\theta - 3b^2r \cos \theta.$$

**Lema 3.2.1** (Determinación de  $S(f)$ ). *Los puntos de módulo máximo de la función  $f$  se localizan necesariamente sobre el eje real o sobre la hipérbola:*

$$3x^2 - y^2 + 4ax + b^2 = 0.$$

*Demostración.* Las curvas de máximos deben satisfacer  $\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0$ , que es equivalente a  $\frac{\partial \log G}{\partial \theta} = 0$ , ya que  $G$  no se anula nunca. Multiplicamos por  $\frac{1}{3}$  para simplificar la ecuación y obtenemos

$$\frac{1}{3G} \frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{1}{3} \frac{\partial \log G}{\partial \theta} = r^3 \sin 3\theta + 2ar^2 \sin 2\theta + b^2r \sin \theta = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que encontrar los ceros de

$$r^3 \sin 3\theta + 2ar^2 \sin 2\theta + b^2r \sin \theta = r^3 \sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta) + 4ar^2 \sin \theta \cos \theta + b^2r \sin \theta.$$

De esta igualdad se derivan dos posibilidades:

1.  $\sin \theta = 0$ , que corresponde al eje real ( $y = 0$ ).
2.  $r^2 (3 - 4 \sin^2 \theta) + 4ar \cos \theta + b^2 = r^2 (4 \cos^2 \theta - 1) + 4ar \cos \theta + b^2 = 0$ , que corresponde a una hipérbola.

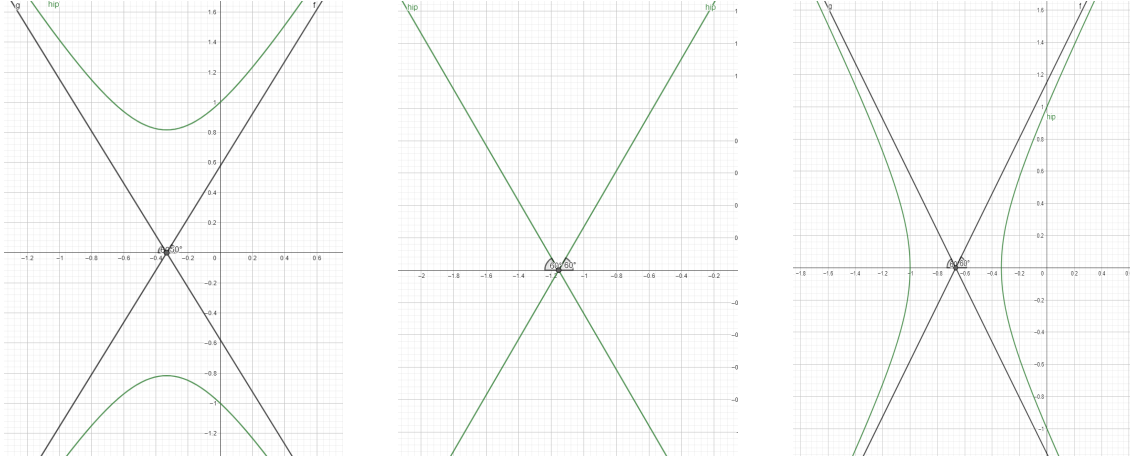
Para ver que el segundo caso corresponde a una hipérbola, escribimos su ecuación en coordenadas cartesianas y obtenemos

$$3x^2 - y^2 + 4ax + b^2 = 0,$$

que se trata de la hipérbola de centro  $(-\frac{2}{3}a, 0)$  y cuyas asíntotas forman ángulos iguales a  $\frac{1}{3}\pi$  con el eje real.  $\square$

Dependiendo de la relación entre los parámetros  $a$  y  $b$ , la geometría de la hipérbola y sus intersecciones con el eje real varían (ver Figura 3.2):

1. Si  $4a^2 = 3b^2$ , la hipérbola degenera en las líneas rectas  $3x \pm y\sqrt{3} + 2a = 0$ .
2. Si  $4a^2 > 3b^2$ , corta el eje real en los puntos reales  $\left(-\frac{2}{3}a \pm \frac{1}{3}\sqrt{4a^2 - 3b^2}, 0\right)$  y la hipérbola se sitúa entre los ángulos mayores entre sus asíntotas.
3. Si  $4a^2 < 3b^2$ , la hipérbola no corta el eje real y se sitúa entre los ángulos menores.



(a) Caso  $4a^2 < 3b^2$ , con  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ .

(b) Caso  $4a^2 = 3b^2$ , con  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 2$ .

(c) Caso  $4a^2 > 3b^2$ , con  $a = 1$ ,  $b = 1$ .

Figura 3.2: Diferentes configuraciones de la hipérbola  $3x^2 - y^2 + 4ax + b^2 = 0$  que define las posibles curvas de máximos de  $f(z) = e^{-z^3 - 3az^2 - 3b^2z}$ .

Ahora debemos calcular el valor de  $G$  a lo largo de las curvas para las cuales  $\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0$ , con el fin de determinar los puntos máxima para cada radio.

**Lema 3.2.2** (Descarte del semieje real positivo). *Sobre el eje real, el máximo módulo solo puede alcanzarse en el semieje real negativo.*

*Demostración.* Calculamos el valor de  $G$  para  $\sin \theta = 0$ , es decir,  $\theta = 0, \pi$ .

- Si  $\theta = 0$ ,  $\log G = -r^3 - 3ar^2 - 3b^2r$ .
- Si  $\theta = \pi$ ,  $\log G = r^3 - 3ar^2 + 3b^2r$ .

Comparando ambas expresiones, es evidente que  $\log G(r, \pi) > \log G(r, 0)$  para todo  $r > 0$ . Por lo tanto, de los puntos sobre el eje real, solo el semieje negativo puede proporcionar valores de  $M(r)$ .  $\square$

**Lema 3.2.3** (Descarte de la rama izquierda de la hipérbola). *Sobre la hipérbola, los puntos máxima se localizan exclusivamente en la porción situada a la derecha de la recta  $x = -\frac{1}{2}a$ .*

*Demostración.* La ecuación de la hipérbola puede reescribirse de la forma:

$$2x + a = \pm \sqrt{r^2 + a^2 - b^2} =: \pm \Delta. \quad (3.9)$$

Sustituyendo esta relación en la expresión del logaritmo del módulo, se obtiene:

$$\log G = \pm \Delta^3 + \frac{3}{2}ar^2 + \frac{3}{2}ab^2 - a^3.$$

Para maximizar este valor, debemos elegir el signo positivo de  $\Delta$ , correspondiente a la parte de la hipérbola que se encuentra a la derecha de la línea  $x = -\frac{1}{2}a$ .  $\square$

Según la relación entre los parámetros  $a$  y  $b$ , la recta  $x = -\frac{1}{2}a$  interseca la hipérbola de distintas maneras:

1. Si  $4a^2 < 3b^2$ , esta línea divide cada rama de la curva (superior e inferior) en dos piezas.
2. Si  $\frac{3}{4}b^2 < a^2 < \frac{4}{5}b^2$ , esta línea corta la rama derecha, resultando el signo positivo en dos componentes separadas de la rama derecha.
3. Si  $5a^2 > 4b^2$ , la línea no corta la rama derecha, por lo que el signo positivo corresponde a la rama derecha completa.

Cabe notar que cuando la recta  $x = -\frac{1}{2}a$  corta la hipérbola, los puntos de intersección pertenecen también al círculo  $x^2 + y^2 = b^2 - a^2$ , por la ecuación (3.9).

Establecidas las curvas candidatas, el conjunto  $M(f)$  se obtendrá eligiendo el valor máximo entre el eje real negativo y la rama derecha de la hipérbola, según si:

$$r^3 - 3ar^2 + 3b^2r \gtrless (r^2 + a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}ar^2 + \frac{3}{2}ab^2 - a^3.$$

Si pasamos todo a la derecha y denotamos  $2r - a = \kappa$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta^3 - r^3 + \frac{9}{2}ar^2 - 3b^2r + \frac{3}{2}ab^2 - a^3 &= \Delta^3 - \frac{1}{2}\kappa(\kappa^2 - 3\Delta^2) = \\ &= \frac{1}{2}(2\Delta^3 + 3\kappa\Delta^2 - \kappa^3) = \frac{1}{2}(\Delta + \kappa)^2(2\Delta - \kappa), \end{aligned}$$

y tiene, por lo tanto, el signo de

$$\Phi(r) = 2\Delta - \kappa = 2\sqrt{r^2 + a^2 - b^2} + a - 2r.$$

Si  $\Phi(r) > 0$ , el módulo es mayor sobre la hipérbola; si  $\Phi(r) < 0$ , el máximo se alcanza en el eje real negativo.

**Lema 3.2.4** (Determinación del radio crítico de salto).  $\Phi(r)$  es negativa para  $\sqrt{b^2 - a^2} \leq r < \frac{4b^2 - 3a^2}{4a}$  y positiva para  $r > \frac{4b^2 - 3a^2}{4a}$ .

*Demostración.* Debemos analizar bajo qué condiciones se cumple  $2\sqrt{r^2 + a^2 - b^2} > 2r - a$ . Es importante notar que si  $2r - a < 0$ , la desigualdad es trivialmente cierta puesto que el término de la izquierda es una raíz positiva. En caso de que ambos sean positivos, elevándolos al cuadrado se mantiene la desigualdad y obtenemos la condición equivalente:

$$4(r^2 + a^2 - b^2) > 4r^2 - 4ar + a^2 \Leftrightarrow 3a^2 - 4b^2 > -4ar.$$

Despejando  $r$ , la condición para que la hipérbola gane al eje real es  $r > \frac{4b^2 - 3a^2}{4a}$ , como queríamos probar.  $\square$

A continuación, analizaremos cómo el signo de  $\Phi(r)$  determina la continuidad o discontinuidad del conjunto  $M(f)$  según los valores de  $a$  y  $b$ .

### 3.2.1. Caso $5a^2 > 4b^2$ : Continuidad y puntos de cruce

El objetivo en este caso es ver que  $\Phi(r)$  es positiva en todo el dominio de existencia de la hipérbola. Esto implicaría que el módulo máximo se traslada a la trayectoria hiperbólica en el instante en que el círculo  $\partial D(0, r)$  interseca a dicha curva por primera vez. Veremos que el primer contacto entre el círculo y la hipérbola se da en el vértice de esta última, que se sitúa en el eje real negativo. En consecuencia, el cambio de curva máxima será continuo y tendremos un punto excepcional del primer tipo.

Recordamos que, bajo la hipótesis  $5a^2 > 4b^2$ , el signo positivo en (3.9) corresponde a la rama derecha de la curva representada en la Figura 3.2c.

**Lema 3.2.5.** *El primer valor de  $r$  para el que círculo  $\partial D(0, r)$  interseca a la hipérbola es:*

$$r_v = \frac{2a - \sqrt{4a^2 - 3b^2}}{3}.$$

*Además, el primer contacto se produce en el vértice de la hipérbola.*

*Demostración.* Para garantizar que el contacto inicial sea en el vértice, es necesario probar que este es el punto de la hipérbola más cercano al origen. Geométricamente, esto ocurre si el origen está entre la hipérbola y su evoluta; de lo contrario, el círculo de radio creciente intersecaría los lados de la hipérbola antes de alcanzar el eje real.

El radio de curvatura de la hipérbola en el vértice es  $\sqrt{4a^2 - 3b^2}$ . La condición para que el origen se encuentre entre la curva y su evoluta es que dicho radio de curvatura sea estrictamente mayor que la distancia del vértice al origen:

$$\sqrt{4a^2 - 3b^2} > \frac{1}{3} \left( 2a - \sqrt{4a^2 - 3b^2} \right).$$

Operando algebraicamente, esta igualdad es equivalente a  $5a^2 > 4b^2$ , que es exactamente lo que estamos suponiendo. Por lo tanto, el primer punto donde el círculo toca la hipérbola es el vértice, que está situado sobre el eje real y el radio correspondiente es:

$$r_v = \frac{2a - \sqrt{4a^2 - 3b^2}}{3}.$$

□

Para acabar la prueba de este caso, necesitamos ver que, para radios mayores a  $r_v$ ,  $\Phi(r)$  es positiva. Con esto, veremos que las curvas de máximos consisten en:

1. El eje real, desde  $z = 0$  hasta  $\frac{-2a + \sqrt{4a^2 - 3b^2}}{3}$  (el vértice de la hipérbola).
2. La rama derecha de la hipérbola (signo positivo de (3.9)).

**Lema 3.2.6.** *Para  $r > r_v$ ,  $\Phi(r)$  es positiva.*

*Demostración.* Basta con demostrar que el radio del vértice es superior al radio de equilibrio hallado en el Lema 3.2.4:

$$r > r_v = \frac{2a - \sqrt{4a^2 - 3b^2}}{3} > \frac{4b^2 - 3a^2}{4a}.$$

Para ver la última desigualdad, operamos algebraicamente hasta llegar a la expresión  $(5a^2 - 4b^2)^2 > 0$ , la cual es estrictamente cierta bajo la hipótesis inicial.  $\square$

Como el punto de contacto entre el eje real y la hipérbola ocurre precisamente en el vértice de esta, la trayectoria de los puntos de máximo módulo es continua en todo su dominio. Por lo tanto, el valor crítico de  $r$  ( $r_v$ ) es un valor excepcional del primer tipo.

Para ver la representación del conjunto de módulo máximo en este caso, ver Figura 1.1c.

### 3.2.2. Caso $\frac{3}{4}b^2 < a^2 < \frac{4}{5}b^2$ : Discontinuidad y puntos de salto

En el Lema 3.2.4 hemos probado que  $\Phi(r)$  es negativa para  $\sqrt{b^2 - a^2} \leq r < \frac{4b^2 - 3a^2}{4a}$  y positiva para  $r > \frac{4b^2 - 3a^2}{4a}$ . En este caso, queremos ver que el cambio de curva máxima no se produce de manera continua, es decir, que tenemos un punto excepcional de segundo tipo.

Recordamos que en este caso el signo positivo en (3.9) corresponde a dos componentes conexas de la rama derecha de la curva representada en 3.2c.

Para comprender la naturaleza del salto, es fundamental analizar la relación de orden entre los radios característicos bajo la hipótesis actual:

$$r_v = \frac{2a - \sqrt{4a^2 - 3b^2}}{3} > r_0 = \frac{4b^2 - 3a^2}{4a} > r_{nac} = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Recordamos el significado físico de estos valores:

- $r_v$  es el radio del vértice de la hipérbola, es decir, donde toca el eje  $x$ .
- $r_0$  es el radio donde  $\Phi(r) = 0$ , es decir, la hipérbola iguala al valor en el eje real.
- $r_{nac}$  es el valor donde nacen las ramas de las hipérbolas que estamos considerando (ver eq. (3.9)).

El salto se produce porque el radio de equilibrio  $r_0$  es menor que el radio del vértice  $r_v$ . Esto implica que el máximo abandona el eje real para trasladarse a la rama hiperbólica en un radio donde la hipérbola aún no ha alcanzado su vértice, es decir, aún no ha intersecado el eje real. Tenemos, por lo tanto, un valor excepcional de  $r$  de segundo tipo, o punto de discontinuidad.

En el instante del salto ( $r = r_0$ ), el círculo de radio crítico corta la rama derecha de la hipérbola en cuatro puntos, cuyas abscisas son:

$$\frac{4b^2 - 9a^2}{8a}, \quad \frac{a^2 - 4b^2}{8a}.$$

De estas soluciones, la primera es mayor y la segunda es menor que  $-\frac{1}{2}a$ . Por lo tanto, el máximo absoluto se obtendrá sobre la segunda pareja.

Así pues, en este caso,  $M(f)$  discurre a lo largo del eje real negativo hasta el punto  $z = -r_0$ . En este radio se detiene y comienza de nuevo sobre la hipérbola (existiendo, por supuesto, dos arcos hiperbólicos, por encima y por debajo del eje real). Las coordenadas de inicio en la hipérbola tras el salto son:

$$x = \frac{4b^2 - 9a^2}{8a}, \quad y = \pm \sqrt{r_0^2 - x^2}.$$

Para ver la representación del conjunto de módulo máximo en este caso, ver Figura 1.1b.

Los detalles geométricos y la idea principal de los casos omitidos respecto a la relación entre los parámetros  $a$  y  $b$  se desarrollan en el Apéndice B.2.

### 3.3. Otros ejemplos

Para finalizar la sección, mencionaremos brevemente tres casos que ilustran comportamientos aún más singulares.

1. **Infinitos valores excepcionales.** Hardy [Har09, Sección 10] expone un ejemplo más complejo en el que hay infinitos valores excepcionales de  $r$ , todos de segundo tipo. Se trata de la función entera

$$f(z) = e^{e^{z^2} + \sin z}. \quad (3.10)$$

Demostó que existe un radio crítico  $r_0 > 0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , las curvas de máximos están todas situadas exclusivamente en el eje real. Sin embargo, su posición alterna bruscamente: se localizan en el semieje positivo si  $\sin r > 0$  y en el semieje negativo si  $\sin r < 0$ . Como consecuencia, todos los valores  $r = k\pi$ , con  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k\pi > r_0$ , son puntos excepcionales de segundo tipo.

2. **Aparición de puntos aislados.** Tyler [Ty100, Sección 3] adaptó la función anterior expuesta por Hardy (3.10) para demostrar que el conjunto  $M(f)$  puede contener puntos totalmente aislados en el plano. En su trabajo estudia la función entera

$$f(z) = e^{e^{z^2} + 2z \sin^2 z}.$$

Prueba que para todo radio  $r > 4$ ,  $f(z)$  alcanza su módulo máximo exclusivamente en el eje real. En concreto, el conjunto  $M(f)$  está formado por todo el semieje positivo, mientras que en el semieje negativo se manifiesta como una sucesión infinita de puntos aislados que aparecen cuando  $\sin^2 r = 0$ .

3. **Discontinuidades en polinomios.** Jassmin y London [JL86] analizaron un ejemplo donde demuestran que una función más sencilla, como un polinomio cúbico, también puede tener puntos de discontinuidad. El polinomio en cuestión es

$$p(z) = z^3 + \alpha z^2 - z + \beta,$$

donde  $\beta > 0$  y  $\alpha\beta > 1 + 2\beta$ . En este artículo se demuestra que  $r = 1$  es un punto de discontinuidad. Para probarlo, estudian la función  $f_r(x) = |p(re^{i\theta})|^2$  (donde  $x = \cos \theta$ ) y observan que para  $r = 1$  se iguala el valor en los puntos  $x = 1$  y  $x = -1$ . No obstante, para  $r < 1$  el máximo se alcanza únicamente en el eje real negativo, mientras que para  $r > 1$  se traslada al eje real positivo.

# Capítulo 4

## Crecimiento no acotado de $v(r)$

En esta sección estudiaremos la cantidad de puntos donde se alcanza el módulo máximo de una función analítica sobre un círculo de radio  $r \in (0, 1)$ . Mientras que Blumenthal describe la estructura geométrica de este conjunto, Piranian y Herzog se centran en contar la cantidad de dichos puntos para cada radio. Para ello, recordamos la función definida en (1.1):

$$v(r) = \# \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, |f(z)| = M(r)\}.$$

El objetivo de esta sección es demostrar que existe una función  $f$  holomorfa en el disco unidad  $\mathbb{D}$  e inyectiva para la que  $v(r)$  no está acotada. Concretamente, probaremos que:

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} v(r) = \infty.$$

Para ello, seguiremos, detallaremos y refinaremos la construcción presentada por Piranian y Herzog en [HP68, Thm. 1].

### 4.1. Resultado principal

Denotamos por  $\mathbb{D}$  el disco unidad. Este capítulo se dedica a la demostración de diversos resultados auxiliares que constituyen la base de la prueba del teorema principal, el cual se enuncia a continuación:

**Teorema 4.1.1.** *Existe una función holomorfa e inyectiva  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  para la cual  $v(r)$  no está acotada cuando  $r \rightarrow 1^-$ .*

El propósito de este capítulo es dotar de rigurosidad analítica a la intuición geométrica que se ha presentado en la introducción de este trabajo, definiendo de forma precisa las funciones involucradas. En esta sección detallaremos la construcción clásica de Piranian y Herzog, que se fundamenta en fijar, en el plano de llegada, una sucesión creciente de radios positivos  $\rho_j$ . A partir de esta sucesión, el objetivo es diseñar una función inyectiva que envíe el disco unidad a un dominio estrellado  $H$ , compuesto por un entorno del origen y una sucesión de puntas radiales asociadas a dichos niveles. Para lograrlo, a lo largo de la demostración se determina una sucesión creciente de radios  $r_j \rightarrow 1^-$  en el disco de partida (el disco unidad) tales que la curva imagen del círculo  $\{|z| = r_j\}$  interseca el nivel de módulo  $\rho_j$  en al menos  $j$  puntos distintos, de manera que  $v(r_j) \geq j$ .

Para ilustrar de forma intuitiva esta construcción geométrica, en las Figuras 4.1 y 4.2 se presenta un esquema simplificado de la imagen de los dos primeros niveles.

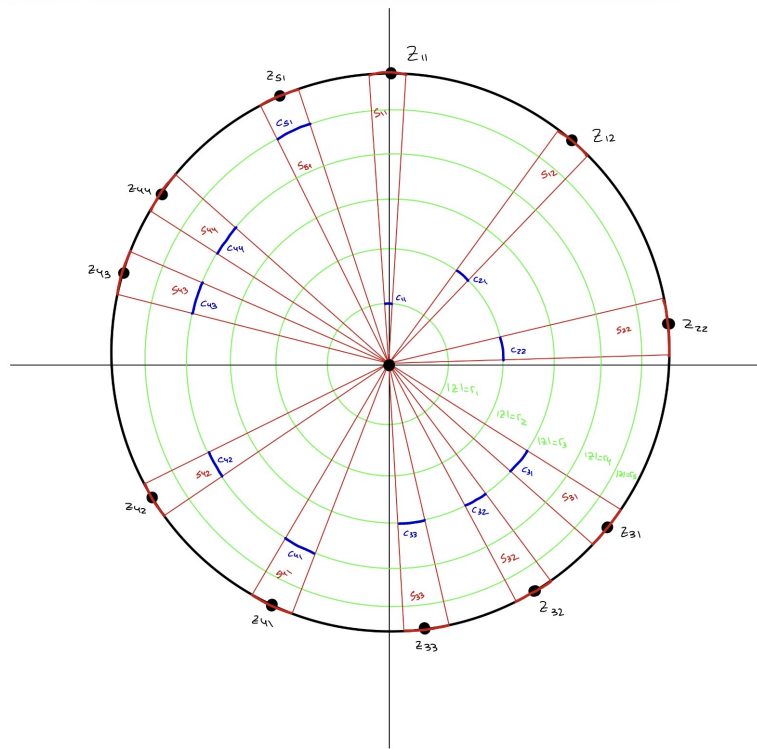


Figura 4.1: Representación en el plano  $z$  de los círculos concéntricos de radios  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $r_4$  y  $r_5$ . Los sectores marcados sobre cada circunferencia indican las direcciones angulares en las que la función alcanzará sus valores máximos para cada nivel.

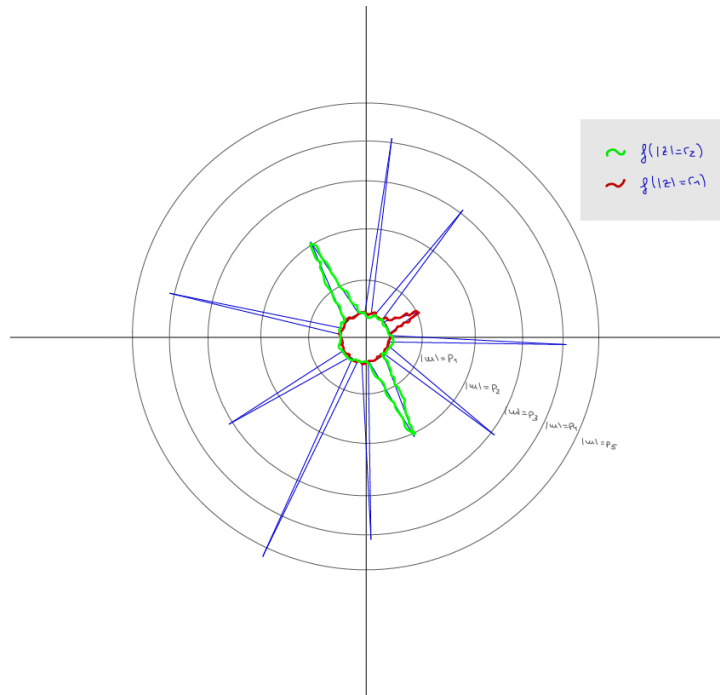


Figura 4.2: Imagen de los círculos formando el dominio estrellado. La imagen de la curva  $|z| = r_1$  alcanza su máximo en la punta de nivel  $\rho_1$ , mientras que la de la curva  $|z| = r_2$  alcanza su máximo en las dos puntas de nivel  $\rho_2$ .

Para empezar a profundizar con los detalles, primero definimos la sucesión  $\{\rho_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  como

$$\rho_j = 1 - 2^{-j} \quad \text{o} \quad \rho_j = j,$$

dependiendo de si queremos que nuestra función  $f$  sea acotada o no. Además, elegimos un conjunto de puntos

$$\{z_{11}, z_{21}, z_{22}, z_{31}, z_{32}, z_{33}, z_{41}, \dots\}$$

del círculo unidad, es decir,  $|z_{jm}| = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \forall m = 1, \dots, j$ , de manera que ningún punto límite de este conjunto pertenezca al propio conjunto. Construimos también una familia de sectores abiertos disjuntos  $\{S_{jm}\}$  en  $\mathbb{D}$  tal que cada sector  $S_{jm}$  contiene al segmento abierto  $(0, z_{jm})$  que une el origen con el punto correspondiente. Sabemos que podemos elegir estos sectores disjuntos porque los puntos  $z_{jm}$  son puntos aislados del conjunto, lo que nos permite rodear cada uno de estos segmentos (excluyendo el origen) con un entorno suficientemente pequeño como para no intersectar con los demás sectores, ver Figura 4.1.

Para construir nuestra función  $f$ , primero definiremos las siguientes funciones auxiliares,  $\forall j \in \mathbb{N}$  y  $\forall m = 1, \dots, j$ :

$$g_{jm}: \mathbb{C} \setminus \{t \cdot z_{jm} : t > 1\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

dadas por

$$g_{jm}(z) = z_{jm} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right)^{k_j} \right],$$

con  $0 < k_j < 1$  valores suficientemente pequeños que fijaremos a lo largo de la prueba del teorema.

Resultará conveniente elegir los radios  $r_j$  de manera que queden determinados automáticamente por los valores de  $k_j$ . Dado que necesitaremos que el máximo de  $|g_{jm}(z)|$  en el círculo  $|z| = r_j$  sea casi 1, definimos

$$r_j := 1 - e^{-k_j^{-2}}.$$

De esta manera, el valor de  $g_{jm}$  en  $r_j z_{jm}$  resulta

$$g_{jm}(r_j z_{jm}) = z_{jm} \left[ 1 - (1 - r_j)^{k_j} \right] = z_{jm} \left[ 1 - e^{-k_j^{-1}} \right].$$

Al tomar valores de  $k_j$  suficientemente pequeños, el módulo de esta expresión se aproxima a 1 tanto como queramos.

**Lema 4.1.2** (Dominio de holomorfía de  $g_{jm}$ ). *Las funciones  $g_{jm}$  son holomorfas en el dominio abierto*

$$\Omega_{jm} := \mathbb{C} \setminus \{t \cdot z_{jm} : t \geq 1\},$$

*el cual contiene a  $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{z_{jm}\}$ .*

*Demostración.* Consideramos la rama principal del logaritmo  $\text{Log}(w)$ , definida para argumentos en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ , con  $\text{Log}(1) = 0$  y analítica en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Con esta determinación, las funciones  $g_{jm}$  se definen mediante

$$\left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right)^{k_j} = \exp \left( k_j \text{Log} \left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right) \right).$$

Para que  $g_{jm}$  sea holomorfa, el argumento  $w = \left(1 - \frac{z}{z_{jm}}\right)$  debe evitar el semieje real negativo. Supongamos que  $\left(1 - \frac{z}{z_{jm}}\right) = -t$ , para algún  $t \geq 0$ , despejando  $z$  obtenemos  $z = (1+t)z_{jm}$ . Es decir,  $g_{jm}$  no es analítica sobre el rayo que nace en  $z_{jm}$  y se aleja del origen. Por lo tanto,  $g_{jm}$  es holomorfa en el conjunto  $\Omega_{jm} = \mathbb{C} \setminus \{\lambda z_{jm} : \lambda \geq 1\}$ .  $\square$

**Lema 4.1.3** (Acotación de  $|g_{jm}|$ ). *El módulo máximo de cada función  $g_{jm}$  en  $\overline{\mathbb{D}}$  es 1.*

*Demostración.* Usando el Principio del Módulo Máximo A.0.7 con  $\Omega = \mathbb{D}$ , tenemos que ver que en la frontera del disco unidad el módulo de  $g_{jm}$  es menor o igual a 1. Como  $|z_{jm}| = 1$ , esto es equivalente a probar que el módulo de  $h(z) = 1 - (1-z)^k$ , con  $0 < k < 1$ , es menor o igual a 1 en  $\partial\mathbb{D}$ .

Consideramos el desarrollo de Taylor de  $h$  centrado en el origen:

$$h(z) = 1 - (1-z)^k = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} (-z)^n = kz + \frac{k(1-k)}{2!} z^2 + \frac{k(1-k)(2-k)}{3!} z^3 + \dots,$$

donde en la última igualdad hemos usado que  $0 < k < 1$ , lo que permite extraer un signo  $(-1)$  de cada factor y cancelar los signos negativos de la suma.

Queremos ver que converge absoluta y uniformemente en todo  $\overline{\mathbb{D}}$  para poder usar este desarrollo en la frontera del disco para ver que el módulo es menor o igual a 1. Para verlo, usaremos el Criterio M de Weierstrass A.0.10, con

$$h_n(z) = -\binom{k}{n} (-z)^n = (-1)^{n+1} \binom{k}{n} z^n$$

y  $A = \overline{\mathbb{D}}$ . Observamos primero que los coeficientes de cada sumando,  $M_n := (-1)^{n+1} \binom{k}{n}$ , son siempre positivos, ya que  $0 < k < 1$ . Por lo tanto, si  $|z| \leq 1$ ,

$$|h_n(z)| \leq (-1)^{n+1} \binom{k}{n} = M_n.$$

Para poder usar el criterio M de Weierstrass, tenemos que ver que la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \binom{k}{n} < \infty$ . Usando el Criterio de Raabe A.0.11, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{(-1)^{n+2} \binom{k}{n+1}}{(-1)^{n+1} \binom{k}{n}}\right) = 1 + k > 1,$$

por lo tanto, el desarrollo de  $h$  en serie de potencias converge en todo  $\overline{\mathbb{D}}$  uniforme y absolutamente. Esto garantiza que  $h$  se extiende de forma continua en todo el disco cerrado, incluyendo el punto  $z = 1$ , donde la fórmula logarítmica inicial no estaba definida. Así, el valor de la suma en dicho punto coincide con el límite:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(1) = h(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [1 - (1-x)^k] = 1.$$

Finalmente, para cualquier punto de la frontera  $|z| = 1$ , aplicamos la desigualdad triangular:

$$|h(z)| \leq \left(k|z| + \frac{k(1-k)}{2!} |z|^2 + \frac{k(1-k)(2-k)}{3!} |z|^3 + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n = 1.$$

De este modo, queda demostrado que el módulo máximo de cada función  $g_{jm}$  en  $\overline{\mathbb{D}}$  es 1 (alcanzándose en el punto  $z_{jm}$ ).  $\square$

**Lema 4.1.4** (Convergencia uniforme a cero sobre compactos). *Dado cualquier compacto  $K \subset \overline{\mathbb{D}}$  tal que  $z_{jm} \notin K$ , el módulo  $|g_{jm}(z)|$  puede hacerse tan pequeño como queramos en  $K$  eligiendo un valor de  $k_j$  lo suficientemente pequeño.*

*Demostración.* Fijamos  $\varepsilon > 0$ . Queremos demostrar que existe  $0 < k_j < 1$  tal que  $|g_{jm}(z)| < \varepsilon$  para todo  $z \in K$ . Por la definición de  $g_{jm}$ , su módulo es

$$|g_{jm}(z)| = |z_{jm}| \left| 1 - \left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right)^{k_j} \right| = \left| 1 - \exp \left( k_j \operatorname{Log} \left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right) \right) \right|.$$

Como  $K \subset \Omega_{jm}$ , la función  $\operatorname{Log} \left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right)$  es holomorfa en un entorno del compacto  $K$ , por lo tanto está acotada, es decir, existe una constante  $M_K > 0$  tal que:

$$\left| \operatorname{Log} \left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right) \right| \leq M_K, \quad \forall z \in K.$$

Por la continuidad de la exponencial en el origen, sabemos que existe un  $\delta > 0$  tal que, si  $|w| < \delta$ , entonces  $|e^w - 1| < \varepsilon$ .

Finalmente, si elegimos el exponente  $k_j$  tal que  $0 < k_j < \frac{\delta}{M_K}$ , se verifica que:

$$|g_{jm}(z)| = \left| 1 - \exp \left( k_j \operatorname{Log} \left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right) \right) \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in K.$$

$\square$

Sin especificar todavía los valores de  $k_j$ , definimos la serie:

$$f_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j \rho_j g_{jm}(z).$$

Esta serie converge a una función inyectiva y holomorfa en  $\mathbb{D}$ , siempre que  $k_j \rightarrow 0$  con suficiente rapidez y será una primera aproximación de la función  $f$  que queremos construir.

**Lema 4.1.5** (Holomorfía de  $f_0$ ). *La función  $f_0$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  si los exponentes  $k_j$  son suficientemente pequeños.*

*Demostración.* Para probar que  $f_0$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ , demostraremos que la serie converge uniforme y absolutamente sobre los compactos de  $\mathbb{D}$  y aplicaremos el Teorema de Convergencia de Weierstrass [A.0.12](#).

Es fundamental que la elección de los exponentes  $k_j$  no dependa de un compacto arbitrario, de modo que la función  $f_0$  quede bien definida en todo el dominio. Para ello, consideramos la sucesión creciente de compactos  $\{K_n\}$  definida por

$$K_n := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 - \frac{1}{n+1} \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

cuya unión recubre todo el disco. Dado que  $z_{jm}$  no pertenece a ninguno de estos compactos, el Lema [4.1.4](#) asegura que para cada par  $j, m$  existe un exponente  $k_{jm}$  lo suficientemente

pequeño tal que  $|g_{jm}(z)| < \frac{1}{j\rho_j 2^j}$ ,  $\forall z \in K_j$ . Al definir  $k_j := \min_{1 \leq m \leq j} k_{jm}$ , obtenemos un exponente que depende solo del nivel  $j$  y que satisface

$$|g_{jm}(z)| < \frac{1}{j\rho_j 2^j}, \quad \forall z \in K_j, \quad m = 1, \dots, j. \quad (4.2)$$

Sea ahora  $K \subset \mathbb{D}$  un compacto arbitrario. Como la sucesión  $\{K_n\}$  recubre todo el disco, existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset K_N$  y, por monotonía,  $K \subset K_n \forall n \geq N$ . Así, la cota definida en (4.2) nos asegura que

$$|\rho_j g_{jm}(z)| < \frac{1}{j2^j}, \quad \forall z \in K, \quad j \geq N, \quad m = 1, \dots, j.$$

Aplicando el Criterio M de Weierstrass A.0.10, observamos que, para todo  $z \in K$ ,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j |\rho_j g_{jm}(z)| \leq \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{m=1}^j |\rho_j g_{jm}(z)| + \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{m=1}^j \frac{1}{j2^j} \leq C_N + \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty,$$

donde  $C_N = \max_{z \in K} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{m=1}^j |\rho_j g_{jm}(z)| < \infty$ . Esto garantiza la convergencia absoluta y uniforme en  $K$  de  $f_0$ .

Finalmente, puesto que las sumas parciales

$$h_k(z) = \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^j \rho_j g_{jm}(z)$$

son holomorfas en  $\mathbb{D}$  por ser sumas finitas de funciones holomorfas, y dado que convergen uniformemente sobre compactos a  $f_0$ , el Teorema de Convergencia de Weierstrass A.0.12 asegura que  $f_0$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ , como queríamos probar.  $\square$

**Lema 4.1.6** (Inyectividad de  $f_0$ ). *La función  $f_0$  es inyectiva.*

*Demostración.* Para demostrar la inyectividad de  $f_0$ , utilizaremos el Teorema A.0.13. Dado que el disco  $\mathbb{D}$  es un dominio convexo y  $f_0$  es holomorfa en él, tenemos que ver que  $\operatorname{Re} f'_0(z) > 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

En virtud del Teorema de Convergencia de Weierstrass A.0.12 y la convergencia absoluta y uniforme sobre compactos demostrada en el Lema 4.1.5, la derivada de  $f_0$  viene dada por la suma de las derivadas de sus términos,

$$f'_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j \rho_j g'_{jm}(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Puesto que  $\rho_j > 0$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ , es suficiente ver que  $\operatorname{Re} g'_{jm}(z) > 0$ ,  $\forall z \in \mathbb{D}$ ,  $\forall j, m$ . La derivada de cada término es:

$$g'_{jm}(z) = k_j \left(1 - \frac{z}{z_{jm}}\right)^{k_j-1}.$$

La condición  $\operatorname{Re} g'_{jm}(z) > 0$  es equivalente a que el argumento de  $\left(1 - \frac{z}{z_{jm}}\right)^{k_j-1}$  esté entre  $-\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$ . Notemos que si  $z \in \mathbb{D}$ , entonces  $1 - \frac{z}{z_{jm}} \in D(1, 1)$ , lo que implica que su parte real es positiva, por lo que  $\left|\arg\left(1 - \frac{z}{z_{jm}}\right)\right| < \frac{\pi}{2}$ .

Por las propiedades de las potencias complejas, tenemos finalmente:

$$\left| \arg \left( \left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right)^{k_j-1} \right) \right| = |k_j - 1| \left| \arg \left( 1 - \frac{z}{z_{jm}} \right) \right| < 1 \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2},$$

Esto garantiza que  $\operatorname{Re} g'_{jm}(z) > 0$  para cada término de la serie. Como la parte real de la suma es la suma de las partes reales (y estas son estrictamente positivas), concluimos que  $\operatorname{Re} f'_0(z) > 0$ , lo que prueba que  $f_0$  es inyectiva en  $\mathbb{D}$ .  $\square$

A partir de esta primera aproximación  $f_0$ , el objetivo es construir de forma inductiva una sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que corrijan paso a paso los coeficientes de la serie para aproximar de manera más precisa el comportamiento deseado. Para detallar el primer paso de esta construcción, sea  $C_{jm}$  un arco compacto totalmente contenido en  $\{|z| = r_j\} \cap S_{jm}$ , tal que contenga el punto  $z_{jm}$ . Reemplazamos cada coeficiente  $\rho_j$  de nuestra serie por un número positivo apropiado  $L_{jm1}$  tal que

$$\max_{z \in C_{jm}} |f_0(z) + (L_{jm1} - \rho_j) g_{jm}(z)| = \rho_j.$$

En otras palabras, cada término de nuestra serie se somete a una corrección que llevaría el módulo máximo de  $f_0$  en  $C_{jm}$  al valor deseado, si todos los demás términos permanecieran inalterados. Para demostrar que estos valores existen, definimos la función continua

$$h(L_{jm1}) = \max_{z \in C_{jm}} |f_0(z) + (L_{jm1} - \rho_j) g_{jm}(z)|.$$

Queremos ver que existe un  $L_{jm1} > 0$  tal que  $h(L_{jm1}) = \rho_j$ . Para poder demostrarlo, veremos en el Lema 4.1.7 que

$$h(0) = \max_{z \in C_{jm}} |f_0(z) - \rho_j g_{jm}(z)| < \rho_j.$$

Por otro lado,

$$\lim_{L_{jm1} \rightarrow \infty} h(L_{jm1}) = \infty,$$

por lo tanto, por la continuidad de  $h$  y el Teorema de Bolzano, existe un  $L_{jm1} > 0$  tal que  $h(L_{jm1}) = \rho_j$ .

**Lema 4.1.7.** *Podemos escoger los exponentes  $k_j > 0$  suficientemente pequeños de manera que, para todo  $j \in \mathbb{N}$  y todo  $m = 1, \dots, j$ , se cumpla*

$$\max_{z \in C_{jm}} |R_{jm}(z)| < \rho_j,$$

donde

$$R_{jm}(z) := f_0(z) - \rho_j g_{jm}(z) = \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{n=1}^i \rho_i g_{in}(z) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^j \rho_j g_{jn}(z) + \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{n=1}^i \rho_i g_{in}(z).$$

*Demostración.* Definimos  $\rho_* := \inf_{j \geq 1} \rho_j$ . En los dos casos considerados para la sucesión  $\{\rho_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  se tiene  $\rho_* > 0$ : si  $\rho_j = 1 - 2^{-j}$ , entonces  $\rho_* = \frac{1}{2}$ , y si  $\rho_j = j$ , entonces  $\rho_* = 1$ . Escogemos ahora una sucesión de números positivos  $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \rho_*.$$

Por ejemplo, podemos tomar  $\eta_i = \frac{\rho_*}{2^{i+1}}$ .

Fijemos  $i \in \mathbb{N}$  y  $n \in \{1, \dots, i\}$ . Por el Lema 4.1.4, como  $g_{in}$  puede hacerse tan pequeña como queramos en el compacto  $\mathbb{D} \setminus S_{in}$  escogiendo  $k_i$  suficientemente pequeño, existe  $\delta_{in} > 0$  tal que, si  $0 < k_i < \delta_{in}$ , entonces

$$|g_{in}(z)| < \frac{\eta_i}{i\rho_i}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus S_{in}.$$

Como para cada  $i$  solo hay un número finito de índices  $n = 1, \dots, i$ , podemos escoger  $0 < k_i < \min_{1 \leq n \leq i} \delta_{in}$ . Con esta elección obtenemos, para todo  $n = 1, \dots, i$ ,

$$\rho_i |g_{in}(z)| < \frac{\eta_i}{i}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus S_{in}.$$

Veamos ahora que esta elección implica la desigualdad deseada. Fijamos  $j \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \{1, \dots, j\}$  y  $z \in C_{jm}$ . Como  $C_{jm} \subset S_{jm}$  y los sectores  $S_{in}$  son dos a dos disjuntos, se tiene

$$z \in \mathbb{D} \setminus S_{in} \quad \text{para todo } (i, n) \neq (j, m).$$

Por tanto, para cada par  $(i, n) \neq (j, m)$ , podemos aplicar la cota anterior:  $\rho_i |g_{in}(z)| < \frac{\eta_i}{i}$ .

Usando esta cota y la desigualdad triangular, obtenemos

$$|R_{jm}(z)| \leq \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{n=1}^i \rho_i |g_{in}(z)| + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^j \rho_j |g_{jn}(z)| + \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{n=1}^i \rho_i |g_{in}(z)| < \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \rho_*.$$

Como  $\rho_* \leq \rho_j$ , concluimos que  $|R_{jm}(z)| < \rho_j$ . Como la desigualdad vale para todo  $z \in C_{jm}$ , se obtiene  $\max_{z \in C_{jm}} |R_{jm}(z)| < \rho_j$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Una vez garantizado que el resto de la serie está bajo control gracias al Lema 4.1.7, podemos desarrollar la estrategia iterativa de Herzog y Piranian para afinar los coeficientes.

Partiendo de nuestra primera aproximación  $f_0$ , definimos la siguiente función corregida

$$f_1(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j L_{jm1} g_{jm}(z).$$

De manera análoga, reduciendo los  $k_{jm}$  si es necesario, determinamos números positivos  $L_{jm2}$  mediante el requisito

$$\max_{z \in C_{jm}} |f_1(z) + (L_{jm2} - L_{jm1}) g_{jm}(z)| = \rho_j.$$

Inductivamente, definimos  $f_n$  escogiendo  $L_{jmn} > 0$  tales que:

$$\max_{z \in C_{jm}} |f_{n-1}(z) + (L_{jmn} - L_{jm,n-1}) g_{jm}(z)| = \rho_j.$$

Para poder finalizar el argumento siguiendo la prueba de Herzog y Piranian, quedaría demostrar que existe una elección de exponentes positivos  $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tales que las sucesiones  $\{L_{jmq}\}_{q \in \mathbb{N}}$  convergen a unos límites  $L_{jm}$ , y definir finalmente

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j L_{jm} g_{jm}(z).$$

Es aquí donde la demostración original requiere una revisión. En su artículo [HP68], los autores fundamentan la convergencia de los coeficientes afirmando que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j |\rho_j - L_{jm1}| < \frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

Sin embargo, un análisis minucioso de las hipótesis geométricas originales revela que las condiciones impuestas originalmente sobre los puntos  $z_{jm}$  son demasiado débiles y no resultan suficientes para asegurar la cota que proponen con esta norma.

Para demostrar esta limitación, en la siguiente subsección construiremos un contraejemplo (Lema 4.2.2) donde se cumplen rigurosamente todas las hipótesis de la construcción de Piranian y Herzog, pero que hace divergir la suma de las correcciones en el espacio  $\ell^1$ . Lo que este contraejemplo demuestra es que dicha acotación requiere necesariamente alguna hipótesis adicional o algún mecanismo de cancelación que no aparece en la prueba publicada; en particular, no puede deducirse únicamente del hecho de que los puntos  $z_{jm}$  no tengan puntos de acumulación pertenecientes al propio conjunto.

Finalmente, en la última sección del capítulo introduciremos una distribución geométrica más restrictiva para los puntos  $z_{jm}$  y consideraremos una norma de tipo supremo ponderado, permitiendo modificar la prueba del teorema clásico para confirmar su validez.

## 4.2. Limitaciones de la construcción de Piranian y Herzog

Para estudiar la limitación de la convergencia, comenzaremos introduciendo un lema técnico que establece una condición geométrica suficiente bajo la cual la serie de las correcciones de los coeficientes (4.3) diverge, Lema 4.2.1. A continuación, en el Lema 4.2.2, probaremos que es posible diseñar una sucesión de puntos  $z_{jm}$  que cumpla rigurosamente las condiciones del artículo original y que, al mismo tiempo, cumpla las condiciones del Lema 4.2.1, demostrando así la debilidad de la prueba clásica.

**Lema 4.2.1.** *Supongamos que existe una sucesión infinita de pares  $(j_\ell, m_\ell)$ , con  $j_\ell \rightarrow \infty$ , y una constante  $a > 0$  tales que  $\operatorname{Re}(R_{j_\ell m_\ell}(\zeta_{j_\ell m_\ell}) \overline{z_{j_\ell m_\ell}}) \geq a$  para todo  $\ell$ , donde  $\zeta_{j_\ell m_\ell} = r_{j_\ell} z_{j_\ell m_\ell}$ . Supongamos además que los exponentes  $k_{j_\ell}$  se han escogido de modo que  $\rho_{j_\ell} e^{-1/k_{j_\ell}} \leq \frac{a}{2}$  para<sup>1</sup> todo  $\ell$ . Entonces*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j |L_{jm1} - \rho_j| = \infty.$$

*Demostración.* Escribimos, para abreviar,  $p_\ell = (j_\ell, m_\ell)$ . Por definición,  $L_{p_\ell,1}$  se escoge de modo que  $\max_{z \in C_{p_\ell}} |R_{p_\ell}(z) + L_{p_\ell,1} g_{p_\ell}(z)| = \rho_{j_\ell}$ . En particular, evaluando en el punto central del arco  $C_{p_\ell}$ ,  $\zeta_{p_\ell} = r_{j_\ell} z_{p_\ell}$ , tenemos

$$|R_{p_\ell}(\zeta_{p_\ell}) + L_{p_\ell,1} g_{p_\ell}(\zeta_{p_\ell})| \leq \rho_{j_\ell}.$$

Ahora bien,  $g_{p_\ell}(\zeta_{p_\ell}) = z_{p_\ell} \left(1 - e^{-1/k_{j_\ell}}\right)$ . Denotamos

$$\alpha_{j_\ell} := 1 - e^{-1/k_{j_\ell}}.$$

---

<sup>1</sup>Esta condición no es restrictiva: se puede imponer escogiendo  $k_{j_\ell}$  suficientemente pequeño, porque  $e^{-1/k_{j_\ell}} \rightarrow 0$  cuando  $k_{j_\ell} \rightarrow 0$ . Su único papel es asegurar que  $g_{j_\ell m_\ell}(\zeta_{j_\ell m_\ell}) = z_{j_\ell m_\ell} (1 - e^{-1/k_{j_\ell}})$  está suficientemente cerca de  $z_{j_\ell m_\ell}$ .

Como  $|z_{p_\ell}| = 1$ , de la desigualdad anterior se deduce que

$$\rho_{j_\ell} \geq \operatorname{Re}[(R_{p_\ell}(\zeta_{p_\ell}) + L_{p_\ell,1}g_{p_\ell}(\zeta_{p_\ell}))\overline{z_{p_\ell}}] = \operatorname{Re}(R_{p_\ell}(\zeta_{p_\ell})\overline{z_{p_\ell}}) + \alpha_{j_\ell}L_{p_\ell,1} \geq a + \alpha_{j_\ell}L_{p_\ell,1}.$$

Reescribimos la desigualdad anterior como

$$a + \alpha_{j_\ell}L_{p_\ell,1} \leq \rho_{j_\ell} = \alpha_{j_\ell}\rho_{j_\ell} + (1 - \alpha_{j_\ell})\rho_{j_\ell}.$$

Reordenando y usando que  $\alpha_{j_\ell} > 0$ , concluimos que

$$\rho_{j_\ell} - L_{p_\ell,1} \geq \frac{a - \rho_{j_\ell}(1 - \alpha_{j_\ell})}{\alpha_{j_\ell}}.$$

Pero  $1 - \alpha_{j_\ell} = e^{-1/k_{j_\ell}}$ . Por hipótesis,  $\rho_{j_\ell}e^{-1/k_{j_\ell}} \leq a/2$ , y por tanto,

$$\rho_{j_\ell} - L_{p_\ell,1} \geq \frac{a}{2\alpha_{j_\ell}} \geq \frac{a}{2}.$$

Así,  $|L_{p_\ell,1} - \rho_{j_\ell}| \geq \frac{a}{2}$  para infinitos índices  $\ell$ , y la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j |L_{jm1} - \rho_j|$  diverge.  $\square$

**Lema 4.2.2** (Construcción de una obstrucción radial). *Existe una elección admisible de puntos  $z_{jm} \in \partial\mathbb{D}$ , sin puntos de acumulación pertenecientes al propio conjunto, y existe una sucesión de exponentes  $0 < \hat{k}_j < 1$  con  $\hat{k}_j \rightarrow 0$  tales que, para toda elección  $0 < k_j < \hat{k}_j$ , existe una sucesión infinita de pares  $(j_\ell, m_\ell)$ , con  $j_\ell \rightarrow \infty$ , y una constante  $a > 0$  para la cual*

$$\operatorname{Re}(R_{j_\ell m_\ell}(\zeta_{j_\ell m_\ell})\overline{z_{j_\ell m_\ell}}) \geq a$$

para todo  $\ell$  suficientemente grande, donde  $\zeta_{j_\ell m_\ell} = r_{j_\ell} z_{j_\ell m_\ell}$ .

*Demostración.* Tomamos  $z_{11} = -1$ . Entonces  $g_{11}(z) = -1[1 - (1+z)^{k_1}]$ , y, en particular,  $g_{11}(1) = 2^{k_1} - 1 > 0$ . Definimos  $A := \rho_1(2^{k_1} - 1) > 0$ . Por continuidad, existe un entorno  $U$  de 1 en  $\mathbb{D}$  y existe un arco  $V \subset \partial\mathbb{D}$  alrededor de 1 tales que, si  $z \in U$  y  $w \in V$ , entonces

$$\operatorname{Re}(\rho_1 g_{11}(z)\overline{w}) \geq \frac{3A}{4}. \quad (4.4)$$

Reduciendo  $V$ , si es necesario, podemos suponer además que existe una constante  $\eta > 0$  tal que  $\operatorname{Re}(z_0\overline{w}) \geq \eta$  para todos  $z_0, w \in V$ . Asimismo, fijamos un radio  $r^* \in (0, 1)$  cercano a 1 para asegurar que la variable  $\xi := 1 - rw/z_0$  verifique siempre  $\operatorname{Re}(\xi) > 0$  cuando  $r \in [r^*, 1)$ , manteniéndose alejada del corte de rama del logaritmo.

Escogemos ahora todos los puntos  $z_{jm}$ , salvo  $z_{11}$ , dentro del arco  $V$ , de modo que el único punto de acumulación del conjunto sea 1, y que  $1 \notin \{z_{jm}\}$ . En particular, esta elección es admisible, pues ningún punto de acumulación pertenece al propio conjunto. Escogemos una sucesión infinita de pares  $(j_\ell, m_\ell)$ , con  $j_\ell \rightarrow \infty$ , tal que  $z_{j_\ell m_\ell} \rightarrow 1$ .

Para demostrar el Lema, necesitamos controlar uniformemente las posibles contribuciones radiales negativas de las espigas  $(j, m) \neq (1, 1)$  a la parte real del resto  $R_{j_\ell m_\ell}$ . Con este propósito, utilizaremos la siguiente afirmación auxiliar.

**Afirmación.** Fijados  $\rho > 0$  y  $\varepsilon > 0$ , existe un exponente  $k_0 = k_0(\rho, \varepsilon) > 0$  tal que, si  $0 < k < k_0$ , entonces

$$\operatorname{Re}\left(\rho z_0 \left[1 - \left(1 - \frac{rw}{z_0}\right)^k\right] \overline{w}\right) \geq -\varepsilon$$

para todo  $r \in [r^*, 1)$  y para todos  $z_0, w \in V$ .

*Prueba de la afirmación.* Denotamos  $\xi = 1 - rw/z_0$ . Por la elección previa de  $V$  y  $r^*$ , sabemos que  $\operatorname{Re}(z_0\bar{w}) \geq \eta > 0$  y que  $\xi$  permanece en un sector controlado donde la rama principal del logaritmo es holomorfa.

Fijamos un radio  $\delta \in (0, 1)$  suficientemente pequeño. Si  $|\xi| \leq \delta$ , entonces para cualquier exponente  $k \in (0, 1)$  se cumple que  $|\xi^k| \leq \delta^k \leq 1$ . En esta región, al tender  $\xi \rightarrow 0$ , el término  $z_0(1 - \xi^k)\bar{w}$  permanece uniformemente en un sector centrado en la dirección positiva de  $z_0\bar{w}$ . Dado que  $\operatorname{Re}(z_0\bar{w}) \geq \eta > 0$ , la parte real de  $z_0(1 - \xi^k)\bar{w}$  no puede ser arbitrariamente negativa. Por lo tanto, tomando un  $\delta$  fijo y suficientemente pequeño, podemos asegurar que:

$$\operatorname{Re}\left(z_0(1 - \xi^k)\bar{w}\right) \geq -\varepsilon/\rho, \quad \text{para todo } |\xi| \leq \delta \text{ y para todo } k \in (0, 1).$$

Si  $|\xi| \geq \delta$ ,  $\xi$  está confinado en un conjunto compacto de  $\mathbb{C}$  que no contiene al origen ni interseca el corte de rama del logaritmo principal, por lo tanto,  $\xi^k \rightarrow 1$  cuando el exponente  $k \rightarrow 0$ . En consecuencia,

$$z_0(1 - \xi^k)\bar{w} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow 0.$$

Finalmente, existe un exponente  $k_0 > 0$  tal que, si  $0 < k < k_0$ , se cumple

$$\operatorname{Re}\left(z_0(1 - \xi^k)\bar{w}\right) \geq -\varepsilon/\rho, \quad \text{para todo } |\xi| > \delta.$$

Combinando ambos casos, concluimos que para todo  $0 < k < k_0$ , la desigualdad se satisface en todo el dominio, lo que demuestra la afirmación.  $\square$

Sea ahora  $(\varepsilon_{jm})_{j \geq 2, 1 \leq m \leq j}$  una sucesión de números positivos tal que

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sum_{m=1}^j \varepsilon_{jm} < \frac{A}{4}.$$

Aplicamos la afirmación anterior con  $\rho = \rho_j$  y  $\varepsilon = \varepsilon_{jm}$ . Como para cada  $j$  solo hay finitos índices  $m = 1, \dots, j$ , podemos tomar el mínimo de los  $k_0$  obtenidos para cada  $m$ . Así, existe un umbral  $0 < \hat{k}_j < 1$  tal que, para cualquier exponente que verifique  $0 < k_j < \hat{k}_j$  (y para todo  $m = 1, \dots, j$ , con  $m \neq 1$  si  $j = 1$ ), se tiene  $\operatorname{Re}(\rho_j g_{jm}(rw)\bar{w}) \geq -\varepsilon_{jm}$  para todo  $w \in V$  y para todo  $r \in [r^*, 1)$ .

Haciendo esta elección inductivamente para  $j = 2, 3, \dots$ , y disminuyendo los  $\hat{k}_j$  si es necesario, podemos suponer además que  $\hat{k}_j \rightarrow 0$ , por ejemplo imponiendo  $\hat{k}_j < 1/j$ . Cualquier elección futura de exponentes  $k_j \in (0, \hat{k}_j)$  cumplirá automáticamente que  $k_j \rightarrow 0$ . También podemos imponer simultáneamente cualquier condición adicional de la forma  $\rho_j e^{-1/\hat{k}_j} \leq \eta_j$ , porque  $e^{-1/\hat{k}_j} \rightarrow 0$  cuando  $\hat{k}_j \rightarrow 0$ .

Como  $r_{j_\ell} = 1 - e^{-k_{j_\ell}^{-2}} \rightarrow 1$  y  $z_{j_\ell m_\ell} \in V$  para  $\ell$  grande, obtenemos que, para todo  $\ell$  suficientemente grande y para todo  $(j, m) \neq (1, 1)$ ,  $\operatorname{Re}(\rho_j g_{jm}(\zeta_{j_\ell m_\ell})\overline{z_{j_\ell m_\ell}}) \geq -\varepsilon_{jm}$ . Además,  $\zeta_{j_\ell m_\ell} = r_{j_\ell} z_{j_\ell m_\ell} \rightarrow 1$ , por tanto, para  $\ell$  suficientemente grande,  $\zeta_{j_\ell m_\ell} \in U$  y  $z_{j_\ell m_\ell} \in V$ , y usando (4.4), obtenemos

$$\operatorname{Re}(\rho_{1g_{11}}(\zeta_{j_\ell m_\ell})\overline{z_{j_\ell m_\ell}}) \geq \frac{3A}{4}.$$

Recordemos que

$$R_{j_\ell m_\ell}(z) = \sum_{(j,m) \neq (j_\ell, m_\ell)} \rho_j g_{jm}(z).$$

Como la serie que define  $R_{j_\ell m_\ell}$  converge localmente uniformemente en  $\mathbb{D}$ , podemos tomar partes reales término a término. Entonces, para  $\ell$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(R_{j_\ell m_\ell}(\zeta_{j_\ell m_\ell}) \overline{z_{j_\ell m_\ell}}) &= \operatorname{Re}(\rho_1 g_{11}(\zeta_{j_\ell m_\ell}) \overline{z_{j_\ell m_\ell}}) + \sum_{\substack{(j,m) \neq (1,1) \\ (j,m) \neq (j_\ell, m_\ell)}} \operatorname{Re}(\rho_j g_{jm}(\zeta_{j_\ell m_\ell}) \overline{z_{j_\ell m_\ell}}) \\ &\geq \frac{3A}{4} - \sum_{(j,m) \neq (1,1)} \varepsilon_{jm} > \frac{3A}{4} - \frac{A}{4} = \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, tomando  $a := A/2 = \rho_1(2^{k_1} - 1)/2 > 0$ , obtenemos  $\operatorname{Re}(R_{j_\ell m_\ell}(\zeta_{j_\ell m_\ell}) \overline{z_{j_\ell m_\ell}}) \geq a$  para todo  $\ell$  suficientemente grande.  $\square$

### 4.3. Prueba alternativa bajo una elección geométrica adicional

La obstrucción anterior muestra que no podemos justificar, bajo las hipótesis de la construcción original, la estimación

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j |L_{jm1} - \rho_j| < \frac{1}{2}.$$

En esta sección presentamos una estrategia alternativa. La idea es no controlar las correcciones en norma  $\ell^1$  sobre todos los pares  $(j, m)$ , sino trabajar con una norma de tipo supremo ponderado. Para que esta estrategia funcione, impondremos una elección más concreta de los puntos  $z_{jm}$  y de los sectores  $S_{jm}$ .

Enumeramos los pares  $(j, m)$ ,  $1 \leq m \leq j$ , como una sucesión  $p = 1, 2, 3, \dots$ , respetando el orden de los niveles  $j$ . Escribiremos

$$z_p = z_{jm}, \quad C_p = C_{jm}, \quad S_p = S_{jm}, \quad g_p = g_{jm}, \quad \rho_p = \rho_j.$$

También denotaremos por  $\zeta_p = r_j z_{jm}$  el punto central del arco  $C_p$ .

#### 4.3.1. La elección de los puntos y de los sectores

Escogemos como único punto de acumulación de  $\{z_p\}$  el punto  $1 \in \partial\mathbb{D}$ . Para ello tomamos una sucesión estrictamente decreciente  $\theta_p \downarrow 0$  tal que  $\theta_{p+1} < \frac{\theta_p}{8}$  para todo  $p$ , y definimos  $z_p = e^{i\theta_p}$ . Elegimos los sectores

$$S_p = \{re^{it} : 0 < r < 1, |t - \theta_p| < \varepsilon_p\},$$

con  $0 < \varepsilon_p < \theta_p/8$ , para asegurar que estos sectores sean disjuntos dos a dos. Tomamos además los arcos compactos  $C_p$  suficientemente pequeños alrededor de  $\zeta_p = r_p z_p$  para que sus argumentos estén totalmente contenidos en  $(\theta_p - \varepsilon_p, \theta_p + \varepsilon_p)$ . Estos arcos los iremos fijando a lo largo de la prueba.

Para cada  $q$ , escogemos  $\delta_q > 0$  suficientemente pequeño y definimos  $U_q := D(1, \delta_q)$ . Imponemos que la sucesión  $\{\delta_q\}_{q \in \mathbb{N}}$  sea estrictamente decreciente para garantizar que estos entornos estén anidados decrecientemente, es decir,  $U_{q+1} \subset U_q$  para todo  $q \geq 1$ . Además, imponemos que

$$\overline{U_q} \cap \overline{S_q} = \emptyset, \quad z_q \notin \overline{U_q}, \quad U_q \cap \mathbb{D} \subset \{re^{it} : |t| < \theta_q/4\}.$$

En particular,  $U_q \cap \mathbb{D}$  queda contenido en una componente de  $\mathbb{D} \setminus S_q$  en la que la rama de  $\log\left(1 - \frac{z}{z_q}\right)$  usada para definir  $g_q$  es holomorfa.

Cabe destacar que con esta notación se tiene que  $k_p$  es el mismo exponente para todos los índices  $p = (j, m)$  del mismo nivel  $j$ . Por lo tanto, cuando impongamos condiciones sobre  $k_p$  tomaremos el mínimo de un número finito de restricciones, una por cada  $m = 1, \dots, j$ , de modo que las condiciones del nivel  $j$  se satisfagan simultáneamente. De la misma manera, denotaremos  $r_p = 1 - e^{-k_p^{-2}}$  que coincidirán para todos los índices  $p = (j, m)$  del mismo nivel  $j$ .

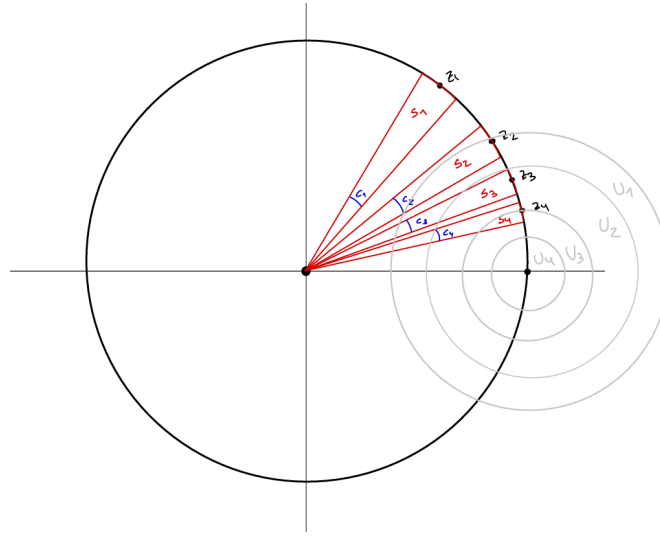


Figura 4.3: Representación geométrica de la nueva construcción.

Sea  $\delta_0 > 0$  una constante suficientemente pequeña que fijaremos a lo largo de la prueba. Escogemos  $B > 0$  tal que  $2e^{-B} < \delta_0$ . Definimos  $\sigma := e^{-B}/64$  y fijamos  $0 < \alpha < \sigma/8$ .

**Lema 4.3.1.** *Definimos los arcos*

$$C_p := \{r_p e^{it} : |t - \arg z_p| \leq \exp(-B/k_p)\}.$$

*Reduciendo los exponentes  $k_p$  si es necesario, podemos suponer que, para todo  $p$ ,*

$$\max_{z \in C_p} |g_p(z) - z_p| \leq \delta_0.$$

*Demostración.* En el punto central del arco se tiene  $g_p(\zeta_p) = z_p(1 - e^{-1/k_p})$ , que tiende a  $z_p$  cuando  $k_p \rightarrow 0$ .

Tomando  $k_p$  suficientemente pequeño, el arco  $C_p$  queda totalmente contenido en  $S_p$ . Además, si  $z = r_p e^{it} \in C_p$ , entonces, imponiendo  $k_p \leq 1/B$  obtenemos

$$|1 - z/z_p| \leq \exp(-k_p^{-2}) + \exp(-B/k_p) \leq 2 \exp(-B/k_p).$$

Por tanto, como  $2e^{-B} < \delta_0$ ,

$$|g_p(z) - z_p| = \left| (1 - z/z_p)^{k_p} \right| \leq 2^{k_p} e^{-B} < 2^{k_p-1} \delta_0 < \delta_0.$$

□

A partir de este momento no trabajaremos con las elecciones particulares  $\rho_j = 1 - 2^{-j}$  ni  $\rho_j = j$ , sino con una sucesión creciente  $(\rho_j)_{j \geq 1}$  de números positivos que crecerá suficientemente rápido. Esta modificación no afecta al objetivo del teorema, pues únicamente necesitamos construir una función holomorfa e inyectiva para la cual  $v(r)$  no esté acotada. Elegimos recursivamente  $(\rho_j)$  de modo que  $\rho_1 = 1$  y, para todo  $j \geq 2$ ,

$$2 \sum_{\ell=1}^{j-1} \ell \rho_\ell \leq \frac{\alpha}{4} \rho_j. \quad (4.5)$$

En particular,  $(\rho_j)$  es creciente, no acotada, y  $\rho_* := \inf_j \rho_j = \rho_1 > 0$ .

Para asegurar que el proceso iterativo de corrección de los coeficientes  $\{L_{jm}\}$  funcione, necesitamos garantizar que sea estable. El siguiente lema técnico demuestra precisamente esto: la diferencia entre dos coeficientes de ajuste,  $|L_U - L_V|$ , está directamente controlada por la distancia máxima entre las funciones  $U$  y  $V$  de las que provienen. Este comportamiento de tipo Lipschitz será la herramienta clave para probar, más adelante, que el algoritmo es una contracción y que, por tanto, el proceso converge.

**Lema 4.3.2** (Estabilidad local del coeficiente de corrección). *Sea  $p$  un índice cualquiera y  $U, V$  funciones continuas en  $C_p$  tales que*

$$\max_{C_p} |U| \leq \delta_0 \rho_p, \quad \max_{C_p} |V| \leq \delta_0 \rho_p.$$

*Disminuyendo  $\delta_0$  si es necesario, existen constantes únicas  $L_U, L_V > 0$  que satisfacen*

$$\max_{z \in C_p} |U(z) + L_U g_p(z)| = \rho_p, \quad \max_{z \in C_p} |V(z) + L_V g_p(z)| = \rho_p.$$

*Además, existe una constante absoluta  $A > 0$ , independiente de  $p$ ,  $U$  y  $V$ , tal que*

$$|L_U - L_V| \leq A \max_{z \in C_p} |U(z) - V(z)|.$$

*Demostración.* Multiplicando todas las funciones por  $\overline{z_p}$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $z_p = 1$ . Entonces  $|g_p(z) - 1| \leq \delta_0$  en  $C_p$ , por el Lema 4.3.1. En particular,

$$1 - \delta_0 \leq |g_p(z)| \leq 1 + \delta_0, \quad \operatorname{Re} g_p(z) \geq 1 - \delta_0.$$

Primero vamos a demostrar la existencia de las constantes positivas. Si definimos

$$M_U(L) := \max_{z \in C_p} |U(z) + L g_p(z)|,$$

entonces  $M_U$  es continua. Evaluando en los extremos tenemos

$$M_U(0) \leq \delta_0 \rho_p < \rho_p,$$

mientras que

$$M_U(2\rho_p) \geq 2\rho_p(1 - \delta_0) - \delta_0 \rho_p > \rho_p$$

si  $\delta_0$  es suficientemente pequeño. Por el teorema del valor intermedio existe al menos una solución  $L_U$  real y positiva (y el mismo argumento aplica para  $L_V$ ). La unicidad la demostraremos al final de la prueba.

A continuación, observamos que  $L_U$  y  $L_V$  son comparables con  $\rho_p$ . En efecto, de  $\max_{C_p} |U + L_U g_p| = \rho_p$ , usando que  $|U| \leq \delta_0 \rho_p$ , obtenemos

$$\rho_p \leq \delta_0 \rho_p + L_U(1 + \delta_0) \quad \text{y} \quad \rho_p \geq L_U(1 - \delta_0) - \delta_0 \rho_p.$$

Si  $\delta_0 < 1/3$ , estas desigualdades implican

$$\frac{\rho_p}{2} \leq L_U \leq 2\rho_p.$$

El mismo argumento da  $\rho_p/2 \leq L_V \leq 2\rho_p$ .

Sea ahora  $W$  una función continua en  $C_p$  con  $\max_{C_p} |W| \leq \delta_0 \rho_p$ , y definamos la función

$$M_W(L) := \max_{z \in C_p} |W(z) + L g_p(z)|.$$

Vamos a probar que  $M_W$  crece en el intervalo  $[\rho_p/2, 2\rho_p]$  con pendiente estrictamente mayor que cero.

Para  $z \in C_p$ , ponemos  $\phi_z(L) := |W(z) + L g_p(z)|$ . Si  $L \in [\rho_p/2, 2\rho_p]$ , entonces

$$|W(z) + L g_p(z)| \geq L |g_p(z)| - |W(z)| \geq \frac{\rho_p}{2} (1 - \delta_0) - \delta_0 \rho_p > 0.$$

Por tanto,  $\phi_z$  es derivable en ese intervalo.

Además,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( g_p(z) \left( \overline{W(z) + L g_p(z)} \right) \right) &= \operatorname{Re} \left( g_p(z) \overline{W(z)} \right) + L |g_p(z)|^2 \\ &\geq -|g_p(z)| |W(z)| + L |g_p(z)|^2 \\ &\geq -(1 + \delta_0) \delta_0 \rho_p + \frac{\rho_p}{2} (1 - \delta_0)^2. \end{aligned}$$

Si  $\delta_0$  es suficientemente pequeño, existe una constante absoluta  $c_1 > 0$  tal que

$$\operatorname{Re} \left( g_p(z) \left( \overline{W(z) + L g_p(z)} \right) \right) \geq c_1 \rho_p.$$

Por otra parte,

$$|W(z) + L g_p(z)| \leq \delta_0 \rho_p + 2\rho_p(1 + \delta_0) \leq c_2 \rho_p$$

para cierta constante absoluta  $c_2 > 0$ . Por tanto,

$$\phi'_z(L) = \frac{\operatorname{Re} \left( g_p(z) \left( \overline{W(z) + L g_p(z)} \right) \right)}{|W(z) + L g_p(z)|} \geq c$$

para todo  $z \in C_p$  y todo  $L \in [\rho_p/2, 2\rho_p]$ , donde  $c := c_1/c_2 > 0$  es una constante absoluta.

De aquí se deduce que, si  $\rho_p/2 \leq L_1 \leq L_2 \leq 2\rho_p$ , entonces

$$\phi_z(L_2) \geq \phi_z(L_1) + c(L_2 - L_1)$$

para todo  $z \in C_p$ . Tomando un punto  $z_1 \in C_p$  donde se alcanza el máximo de  $\phi_z(L_1)$ , obtenemos

$$M_W(L_2) \geq \phi_{z_1}(L_2) \geq \phi_{z_1}(L_1) + c(L_2 - L_1) = M_W(L_1) + c(L_2 - L_1).$$

Por tanto,  $M_W$  crece en  $[\rho_p/2, 2\rho_p]$  con pendiente al menos  $c$ .

Denotemos  $s := \max_{C_p} |U - V|$ . Supongamos, por ejemplo, que  $L_U \geq L_V$ . Como  $M_V(L_V) = \rho_p$ , la desigualdad anterior da

$$M_V(L_U) \geq \rho_p + c(L_U - L_V).$$

Por otro lado, para todo  $L$  se tiene  $|M_U(L) - M_V(L)| \leq s$ , ya que las funciones  $U + Lg_p$  y  $V + Lg_p$  difieren exactamente en  $U - V$ . En particular,

$$M_V(L_U) \leq M_U(L_U) + s = \rho_p + s.$$

Comparando ambas desigualdades, obtenemos  $L_U - L_V \leq s/c$ . El caso  $L_V \geq L_U$  es idéntico. Por tanto, si  $A = 1/c$ ,

$$|L_U - L_V| \leq A \max_{C_p} |U - V|.$$

Por último, la unicidad de  $L_U$  y  $L_V$  se deduce de la monotonía estricta probada en el intervalo  $[\rho_p/2, 2\rho_p]$ , junto con la comparación que muestra que cualquier solución pertenece a dicho intervalo.  $\square$

**Lema 4.3.3.** *Para cada nivel  $j$ , y para cada  $m = 1, \dots, j$ , el exponente  $k_{jm} = k_p$  y el arco  $C_{jm} = C_p$  se pueden elegir de modo que se satisfagan las siguientes condiciones:*

- a)  $e^{-1/k_p} \leq \alpha/8$ .
- b) Si  $p = (j, m)$ , entonces, para todo nivel anterior  $i < j$ ,  $2\rho_j \max_{|z|=r_i} |g_p(z)| \leq \frac{\alpha\rho_i}{2^{j+2j}}$ .
- c)  $\sup_{z \in \partial D(0, r_p) \setminus C_p} |g_p(z)| \leq 1 - \sigma$ .
- d)  $2\rho_p \sup_{z \in \partial D(0, r_p) \setminus S_p} |g_p(z)| \leq \frac{\alpha}{4p} \rho_p$ .

*Demostración.* a) Es posible porque  $e^{-1/k_p} \rightarrow 0$  cuando  $k_p \rightarrow 0$ .

b) Si  $p = (j, m)$ , cuando escogemos el exponente  $k_p = k_{jm}$ , los radios  $r_1, \dots, r_{j-1}$  ya han sido fijados. Por tanto, cada circunferencia  $\partial D(0, r_i)$ , con  $i < j$ , es un compacto contenido en  $\mathbb{D}$  que no contiene el punto  $z_p$ . Aplicando el Lema 4.1.4 y tomando  $k_p$  suficientemente pequeño, podemos imponer simultáneamente la cota anterior para todos los niveles  $i < j$ .

c) Si  $z = r_p e^{it} \notin C_p$ , entonces  $|t - \arg z_p| \geq \exp(-B/k_p)$ , por como hemos definido  $C_p$  en el Lema 4.3.1. Escribiendo  $u = (1 - z/z_p)^{k_p}$ , se obtiene, para  $k_p$  suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{2}e^{-B} \leq |u| \leq 1 + \frac{1}{64}e^{-B}, \quad |\arg u| \leq \frac{1}{64}e^{-B}.$$

La primera desigualdad se deduce de que fuera de  $C_p$  se tiene  $|1 - z/z_p| \geq c e^{-B/k_p}$ , para cierta constante absoluta  $c > 0$ , mientras que siempre  $|1 - z/z_p| \leq 2$ . La segunda se deduce de que  $|\arg(1 - z/z_p)| \leq \pi/2$  en el disco unidad.

Por tanto,

$$|1 - u| \leq |1 - |u|| + |u||1 - e^{i \arg u}| \leq 1 - \frac{1}{4}e^{-B}.$$

Como  $\sigma = e^{-B}/64$ , concluimos que

$$|g_p(z)| = |1 - u| \leq 1 - \sigma.$$

- d) Fuera del sector  $S_p$ , el cociente  $1 - z/z_p$  permanece separado de cero, de manera uniforme para  $z \in \partial D(0, r_p) \setminus S_p$ . Además, la rama de  $\log(1 - z/z_p)$  permanece uniformemente acotada en ese conjunto. Por tanto

$$g_p(z) = z_p \left( 1 - \exp \left( k_p \log \left( 1 - \frac{z}{z_p} \right) \right) \right)$$

tiende uniformemente a 0 en  $\partial D(0, r_p) \setminus S_p$  cuando  $k_p \rightarrow 0$ . Reduciendo  $k_p$ , obtenemos la cota deseada. □

El siguiente lema sustituye a la estimación  $\ell^1$  de Herzog y Piranian. No pedimos que las interacciones sean sumables al sumar sobre todos los arcos, sino que en cada arco la suma de las demás espigas sea pequeña en comparación con  $\rho_p$ .

**Lema 4.3.4** (Control fuera de la diagonal en norma supremo ponderada). *Podemos escoger los exponentes  $k_p > 0$  suficientemente pequeños de modo que, para toda familia de coeficientes  $a = (a_p)$  con*

$$\|a\|_\rho := \sup_p \frac{|a_p|}{\rho_p} < \infty,$$

*se cumpla, para todo  $p$ ,*

$$\max_{z \in C_p} \left| \sum_{q \neq p} a_q g_q(z) \right| \leq \alpha \rho_p \|a\|_\rho.$$

*Demostración.* Basta probar el resultado cuando  $\|a\|_\rho \leq 1$ , pues el caso general se obtiene multiplicando por  $\|a\|_\rho$ . Así, suponemos  $|a_q| \leq \rho_q$  para todo  $q$ .

Fijamos un arco  $C_p = C_{jm}$ , donde  $p = (j, m)$ , y un punto  $z \in C_{jm}$ . Dividimos la suma en tres bloques: niveles anteriores, mismo nivel y niveles posteriores.

Primero estimamos los niveles anteriores. Como  $|g_{in}(z)| \leq 1$  en  $\mathbb{D}$ , la condición (4.5) da

$$\sum_{i < j} \sum_{n=1}^i |a_{in}| |g_{in}(z)| \leq \sum_{i < j} i \rho_i \leq \frac{\alpha}{8} \rho_j.$$

Consideremos ahora las espigas del mismo nivel. Si  $n \neq m$ , entonces  $C_{jm} \subset \partial D(0, r_j) \setminus S_{jn}$ , porque los sectores del nivel  $j$  son disjuntos. Por la condición (d) del Lema 4.3.3,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^j |a_{jn}| |g_{jn}(z)| \leq \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^j \rho_j \max_{\partial D(0, r_j) \setminus S_{jn}} |g_{jn}| \leq \frac{\alpha}{8} \rho_j.$$

Finalmente estimamos los niveles posteriores. Si  $i > j$ , aplicamos la condición (b) del Lema 4.3.3 a la espiga  $g_{in}$  sobre la circunferencia anterior  $|z| = r_j$ . Obtenemos

$$\sum_{i>j} \sum_{n=1}^i |a_{in}| |g_{in}(z)| \leq \sum_{i>j} \sum_{n=1}^i \frac{\alpha \rho_j}{2^{i+3} i} < \frac{\alpha}{8} \rho_j.$$

Juntando las tres estimaciones, se obtiene

$$\max_{z \in C_{jm}} \left| \sum_{q \neq p} a_q g_q(z) \right| \leq \alpha \rho_j.$$

Como  $\rho_p = \rho_j$ , esto prueba el lema en el caso  $\|a\|_\rho \leq 1$ . El caso general se obtiene por homogeneidad.  $\square$

### 4.3.2. El operador de corrección

Para formalizar el algoritmo iterativo de corrección de los coeficientes  $\{L_{jmq}\}$ , definimos un operador matemático que actúe sobre todos los coeficientes a la vez, en lugar de hacerlo de forma secuencial. El objetivo es hallar directamente el vector de coeficientes definitivos  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  que define la serie global

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p g_p(z).$$

La idea de este operador es la siguiente: toma un vector de coeficientes sugeridos  $(A_p)$ , analiza las interferencias exteriores

$$U_p^A(z) := \sum_{q \neq p} A_q g_q(z) \tag{4.6}$$

que genera el resto de la serie sobre cada arco  $C_p$ , y nos devuelve los nuevos coeficientes corregidos para compensar exactamente esa perturbación.

Consideramos el espacio de Banach

$$\ell_\rho^\infty := \left\{ A = (A_p) : A_p \in \mathbb{C}, \|A\|_\rho := \sup_p \frac{|A_p|}{\rho_p} < \infty \right\}.$$

Si  $A = (A_p) \in \ell_\rho^\infty$ , escribimos formalmente

$$F_A(z) := \sum_p A_p g_p(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

La convergencia normal de esta serie se justificará más adelante.

Por el Lema 4.3.4, si los exponentes se han escogido con  $\alpha > 0$  suficientemente pequeño, entonces la serie (4.6) converge uniformemente en  $C_p$  y satisface

$$\max_{z \in C_p} |U_p^A(z)| \leq \alpha \rho_p \|A\|_\rho.$$

Sea

$$\mathcal{B} := \{A \in \ell_\rho^\infty : \|A\|_\rho \leq 2\}$$

una bola suficientemente pequeña de  $\ell_\rho^\infty$ , definimos  $T_p: \mathcal{B} \rightarrow (0, \infty)$  tal que  $T_p(A)$  es el único número real y positivo  $L > 0$  que satisface

$$\max_{z \in C_p} |U_p^A(z) + Lg_p(z)| = \rho_p.$$

La existencia y unicidad se sigue del Lema 4.3.2, aplicado al caso en que la perturbación exterior tiene tamaño menor que  $\delta_0 \rho_p$ . De este modo, definimos el operador de corrección  $T: \mathcal{B} \rightarrow \ell_\rho^\infty$  mediante  $T(A) := (T_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ .

Así, un punto fijo de  $T$  proporciona coeficientes  $A_p$  tales que, si la serie  $f(z) = \sum_p A_p g_p(z)$  converge normalmente en compactos de  $\mathbb{D}$ , entonces

$$\max_{z \in C_p} |f(z)| = \rho_p$$

para todo  $p$ , como queremos conseguir.

**Proposición 4.3.5** (Convergencia por contracción). *Reduciendo  $\alpha$  y  $\delta_0$  si es necesario, el operador  $T$  tiene un único punto fijo en la bola  $\mathcal{B}$ . En particular, los coeficientes de la construcción pueden obtenerse como límite de una iteración convergente. Además, si  $A = (A_p)$  es el punto fijo de  $T$ , para todo  $p$  se cumple*

$$|A_p| \leq (1 + \alpha + 2A_0\alpha) \rho_p,$$

donde  $A_0 > 0$  es una constante absoluta.

*Demostración.* Si  $A \in \mathcal{B}$ , el Lema 4.3.4 da

$$\max_{z \in C_p} \left| \sum_{q \neq p} A_q g_q(z) \right| \leq 2\alpha \rho_p.$$

Escogemos  $\alpha$  tan pequeño que  $2\alpha \leq \delta_0$ . Entonces la perturbación exterior  $U_p^A$  tiene tamaño menor que  $\delta_0 \rho_p$ , y podemos aplicar el Lema 4.3.2.

Primero vemos que  $T$  envía  $\mathcal{B}$  en sí misma. Sea  $L_p^0$  el coeficiente que corresponde a la perturbación nula, es decir,

$$\max_{z \in C_p} |L_p^0 g_p(z)| = \rho_p. \quad (4.7)$$

Multiplicando todas las funciones por  $\overline{z_p}$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $z_p = 1$ . Como  $|g_p(z) - 1| \leq \delta_0$  en  $C_p$ , se tiene

$$\frac{\rho_p}{1 + \delta_0} \leq L_p^0 \leq \frac{\rho_p}{1 - \delta_0}.$$

En particular, si  $\delta_0$  es suficientemente pequeño,  $L_p^0 \leq 3\rho_p/2$ .

Aplicamos ahora el Lema 4.3.2 a las perturbaciones  $U_p^A$  y 0. Denotamos por  $T_p(A)$  el coeficiente asociado a  $U_p^A$  y por  $L_p^0$  el coeficiente asociado a la perturbación nula. Obtenemos, para cierta constante absoluta  $A_0 > 0$ ,

$$|T_p(A) - L_p^0| \leq A_0 \max_{z \in C_p} |U_p^A(z)| \leq 2A_0\alpha \rho_p. \quad (4.8)$$

Escogiendo  $\alpha$  suficientemente pequeño para que  $2A_0\alpha \leq 1/2$ , resulta

$$|T_p(A)| \leq L_p^0 + |T_p(A) - L_p^0| \leq 2\rho_p.$$

Así,  $\|T(A)\|_\rho \leq 2$ , y por tanto  $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ .

Veamos ahora que  $T$  es una contracción. Sean  $A, B \in \mathcal{B}$ . Para cada  $p$ , definimos

$$U_p(z) := \sum_{q \neq p} A_q g_q(z), \quad V_p(z) := \sum_{q \neq p} B_q g_q(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Por el Lema 4.3.4,

$$\max_{z \in C_p} |U_p(z) - V_p(z)| \leq \alpha \rho_p \|A - B\|_\rho.$$

Además, como  $A, B \in \mathcal{B}$ , tenemos

$$\max_{z \in C_p} |U_p(z)| \leq 2\alpha \rho_p \leq \delta_0 \rho_p, \quad \max_{z \in C_p} |V_p(z)| \leq 2\alpha \rho_p \leq \delta_0 \rho_p.$$

Por el Lema 4.3.2,  $|T_p(A) - T_p(B)| \leq A_0 \alpha \rho_p \|A - B\|_\rho$ . Dividiendo por  $\rho_p$  y tomando supremo en  $p$ , obtenemos

$$\|T(A) - T(B)\|_\rho \leq A_0 \alpha \|A - B\|_\rho.$$

Finalmente escogemos  $\alpha$  de modo que  $A_0 \alpha < 1$ . Entonces  $T$  es una contracción en la bola cerrada  $\mathcal{B}$ . Como  $\mathcal{B}$  es un subconjunto cerrado del espacio de Banach  $\ell_\rho^\infty$ , también es completo. Por el teorema del punto fijo de Banach,  $T$  tiene un único punto fijo en  $\mathcal{B}$ , y la iteración  $A^{(n+1)} = T(A^{(n)})$  converge a dicho punto fijo para cualquier elección inicial  $A^{(0)} \in \mathcal{B}$ .

Sea ahora  $A = (A_p)$  el punto fijo de  $T$ . Para el punto  $\zeta_p \in C_p$  tenemos

$$1 - e^{-1/k_p} = |g_p(\zeta_p)| \leq \max_{z \in C_p} |g_p(z)| \leq 1.$$

Así, usando (4.7),

$$\rho_p \leq L_p^0 \leq \frac{\rho_p}{1 - e^{-1/k_p}}.$$

Como hemos impuesto  $e^{-1/k_p} \leq \alpha/8$ , obtenemos, si  $\alpha < 7$ ,  $L_p^0 \leq (1 + \alpha) \rho_p$ . Juntando esta cota con (4.8) obtenemos

$$(1 - 2A_0 \alpha) \rho_p \leq A_p \leq (1 + \alpha + 2A_0 \alpha) \rho_p.$$

Si imponemos  $\alpha \leq \frac{1}{2A_0}$  se obtiene la cota deseada.  $\square$

### 4.3.3. Convergencia normal

Aplicando la Proposición 4.3.5 con la sucesión inicial  $A^{(0)} = (\rho_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ , obtenemos un vector límite de coeficientes  $A = (A_p) \in \mathcal{B}$  que es punto fijo del operador, es decir,  $T(A) = A$ . Con estos coeficientes definitivos, construimos nuestra función límite como

$$f(z) := \sum_{p=1}^{\infty} A_p g_p(z). \quad (4.9)$$

Por la propia definición del operador de corrección, si esta serie converge normalmente en los compactos de  $\mathbb{D}$ , la función cumplirá la propiedad que estábamos buscando:

$$\max_{z \in C_p} |f(z)| = \rho_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Así pues, el último paso de la demostración consiste en garantizar dicha convergencia normal, la cual nos asegurará, simultáneamente, que  $f$  es una función holomorfa e inyectiva en el disco unidad.

**Lema 4.3.6** (Convergencia normal). *Los exponentes  $k_p$  pueden escogerse, además de satisfacer las condiciones impuestas en el Lema 4.3.3 y el Lema 4.3.4, de modo que para todo compacto  $K \subset \mathbb{D}$  la serie*

$$\sum_p \rho_p \max_{z \in K} |g_p(z)| \quad (4.10)$$

*converja. En consecuencia, la serie (4.9) converge normalmente en compactos de  $\mathbb{D}$  y es holomorfa.*

*Demostración.* Para asegurar la convergencia de la serie (4.10) de forma global y no dependiente de un compacto particular, empleamos un argumento análogo al del Lema 4.1.5. Consideramos la misma sucesión creciente de compactos  $K_n$  definida en (4.1), cuya unión recubre  $\mathbb{D}$ . Aplicando el Lema 4.1.4, podemos imponer que

$$|g_p(z)| < \frac{1}{\rho_p 2^p}, \quad \forall z \in K_p,$$

reduciendo los exponentes  $k_p$  si fuera necesario.

Dado un compacto  $K \subset \mathbb{D}$  arbitrario, existirá un índice  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset K_n$  para todo  $n \geq N$ . En consecuencia:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \max_{z \in K} |g_p(z)| = \sum_{p=1}^{N-1} \rho_p \max_{z \in K} |g_p(z)| + \sum_{p=N}^{\infty} \rho_p \max_{z \in K} |g_p(z)| \leq C_N + \sum_{p=N}^{\infty} \frac{1}{2^p} < \infty.$$

Por tanto, la serie (4.10) converge.

Si ahora  $\|A\|_{\rho} < \infty$ , entonces  $|A_p| \leq \|A\|_{\rho} \rho_p$ , y por tanto

$$\sum_p |A_p| \max_{z \in K} |g_p(z)| \leq \|A\|_{\rho} \sum_p \rho_p \max_{z \in K} |g_p(z)| < \infty.$$

Así, la serie  $\sum_p A_p g_p$  converge uniformemente y absolutamente en  $K$ . Como cada  $g_p$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ , el límite de la serie es holomorfo en  $\mathbb{D}$ , usando el Teorema de Convergencia de Weierstrass A.0.12.  $\square$

Combinando la Proposición 4.3.5 con el Lema 4.3.6, obtenemos una función holomorfa  $f(z) = \sum_p A_p g_p(z)$  tal que, para cada arco  $C_p$ ,  $\max_{z \in C_p} |f(z)| = \rho_p$ . Además, dado que el operador fuerza a que los coeficientes  $A_p$  del punto fijo sean reales y positivos, la inyectividad de la función  $f$  se demuestra de manera completamente análoga a la de  $f_0$  en el Lema 4.1.6.

La siguiente proposición demuestra que los picos locales forzados en cada arco dominan geoméricamente sobre el resto de la circunferencia.

**Proposición 4.3.7** (Determinación del módulo máximo global). *Reduciendo  $\alpha$  si es necesario, para cada nivel  $j \in \mathbb{N}$ , el módulo máximo de la función  $f$  sobre la circunferencia  $\partial D(0, r_j)$  es  $M(r_j) = \rho_j$ . Además, este valor se alcanza como mínimo en  $j$  puntos distintos, verificándose que  $v(r_j) \geq j$ .*

*Demostración.* Ya sabemos que, para cada  $m = 1, \dots, j$ ,  $\max_{z \in C_{jm}} |f(z)| = \rho_j$ . En particular,  $M(r_j) \geq \rho_j$ , y este valor se alcanza al menos una vez en cada uno de los arcos disjuntos  $C_{j1}, \dots, C_{jj}$ .

Queda probar que no hay puntos de  $\partial D(0, r_j)$  donde el módulo sea mayor que  $\rho_j$ . Sea

$$z \in \partial D(0, r_j) \setminus \bigcup_{m=1}^j C_{jm}.$$

Descomponemos

$$f(z) = \sum_{\ell < j} \sum_{m=1}^{\ell} A_{\ell m} g_{\ell m}(z) + \sum_{m=1}^j A_{jm} g_{jm}(z) + \sum_{\ell > j} \sum_{m=1}^{\ell} A_{\ell m} g_{\ell m}(z).$$

Primero estimamos los niveles anteriores. Como  $|g_{\ell m}(z)| \leq 1$  en  $\mathbb{D}$  y  $|A_{\ell m}| \leq 2\rho_{\ell}$ , la condición (4.5) da

$$\sum_{\ell < j} \sum_{m=1}^{\ell} |A_{\ell m}| |g_{\ell m}(z)| \leq 2 \sum_{\ell < j} \ell \rho_{\ell} \leq \frac{\alpha}{4} \rho_j.$$

Estimamos ahora los niveles posteriores. Usando  $|A_{\ell m}| \leq 2\rho_{\ell}$  y la condición (b) del Lema 4.3.3, obtenemos

$$\sum_{\ell > j} \sum_{m=1}^{\ell} |A_{\ell m}| |g_{\ell m}(z)| \leq \sum_{\ell > j} \sum_{m=1}^{\ell} \frac{\alpha \rho_j}{2^{\ell+2\ell}} = \sum_{\ell > j} \frac{\alpha \rho_j}{2^{\ell+2}} < \frac{\alpha}{4} \rho_j.$$

Nos queda controlar las espigas del propio nivel  $j$ . Como los sectores  $S_{j1}, \dots, S_{jj}$  son disjuntos, el punto  $z$  pertenece como mucho a uno de ellos.

Si  $z \notin \bigcup_{m=1}^j S_{jm}$ , entonces, por la condición (d) del Lema 4.3.3,

$$\sum_{m=1}^j |A_{jm}| |g_{jm}(z)| \leq \sum_{m=1}^j 2\rho_j |g_{jm}(z)| \leq \frac{\alpha}{4} \rho_j.$$

Supongamos ahora que  $z \in S_{jm_0}$  para cierto  $m_0$ . Como  $z \notin C_{jm_0}$ , la condición (c) del Lema 4.3.3 implica  $|g_{jm_0}(z)| \leq 1 - \sigma$ .

Por otro lado, si  $m \neq m_0$ , entonces  $z \notin S_{jm}$ , y por la condición (d) del Lema 4.3.3 tenemos

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq m_0}}^j |A_{jm}| |g_{jm}(z)| \leq \frac{\alpha}{4} \rho_j.$$

Además, por la Proposición 4.3.5,  $|A_{jm_0}| \leq (1 + \alpha + 2A_0\alpha)\rho_j$ . Por consiguiente,

$$\sum_{m=1}^j |A_{jm}| |g_{jm}(z)| \leq (1 + \alpha + 2A_0\alpha)(1 - \sigma)\rho_j + \frac{\alpha}{4} \rho_j.$$

Juntando las cotas anteriores, obtenemos, en el peor caso,

$$|f(z)| \leq \left( (1 + \alpha + 2A_0\alpha)(1 - \sigma) + \frac{3\alpha}{4} \right) \rho_j.$$

Imponiendo  $\alpha < \frac{\sigma}{(1-\sigma)(1+2A_0)+3/4}$  se obtiene  $(1 + \alpha + 2A_0\alpha)(1 - \sigma) + \frac{3\alpha}{4} < 1$ . Por tanto,  $|f(z)| < \rho_j$  para todo  $z \in \partial D(0, r_j) \setminus \bigcup_{m=1}^j C_{jm}$ .  $\square$

# Apéndice A

## Preliminares de análisis complejo

En este apéndice se recopilan los resultados fundamentales de análisis complejo que sustentan las demostraciones principales de este trabajo. Denotaremos a partir de ahora  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$ .

**Definición A.0.1.** Sea  $X \subset \mathbb{K}$  un abierto y  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ . Se dice que  $f$  es analítica en  $x \in X$  si  $\exists R > 0$  y una sucesión  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  tal que

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i h^i,$$

donde  $|h| < R$ . Es decir, si se puede expresar localmente alrededor del punto como una serie de potencias convergente. Se dice que  $f$  es analítica en  $G$  si es analítica en todos los puntos de  $G$ .

**Proposición A.0.2** (Principio de prolongación analítica). [M25, Thm. 3.2.29]

Sea  $G \subset \mathbb{K}$  un abierto conexo y  $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$  funciones analíticas en  $G$ . Si existe un conjunto  $M \subset G$  con un punto de acumulación en  $G$  tal que  $f|_M = g|_M$ , entonces  $f = g$  en  $G$ .

**Corolario A.0.3.** Sea  $G \subset \mathbb{K}$  un abierto conexo y  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  función analítica en  $G$ . Si existe un conjunto  $M \subset G$  con un punto de acumulación en  $G$  tal que  $f$  toma valores reales en  $M$ , entonces  $f$  toma valores reales en todo  $G$ .

*Demostración.* Aplicando la Proposición A.0.2 a las funciones analíticas  $f$  y  $\bar{f}$ . □

**Teorema A.0.4** (Teorema de Schwarz).

Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  un abierto y  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que existen sus derivadas cruzadas de cualquier orden y son continuas en  $U$ . Para cualquier punto  $(a_1, a_2) \in U$  se cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2).$$

**Proposición A.0.5** (Propiedad de la media para funciones armónicas). [Ran95, Thm. 1.1.6]

Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $u$  una función armónica en  $\Omega$ . Si  $a \in \Omega$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  verifican que  $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ , se tiene que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it}) dt.$$

**Proposición A.0.6** (Principio del módulo máximo para funciones holomorfas). [M25, Thm. 4.1.14]

Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto conexo y  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\Omega$ . Si  $|f|$  tiene un máximo relativo o absoluto en  $\Omega$ , entonces  $f$  es constante.

**Corolario A.0.7.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto conexo acotado y  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\Omega$  y continua en  $\overline{\Omega}$ . El máximo de  $|f|$  se alcanza en un punto de la frontera de  $\Omega$ .

**Proposición A.0.8** (Principio del módulo mínimo para funciones holomorfas). [M25, Remark 4.1.15]

Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto conexo y  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\Omega$ . Si  $|f|$  tiene un mínimo relativo o absoluto en  $a \in \Omega$ , entonces, o bien  $f(a) = 0$ , o bien  $f$  es constante.

**Corolario A.0.9.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto conexo acotado y  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\Omega$  y continua en  $\overline{\Omega}$ . Si  $f(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$ , el mínimo de  $|f|$  se alcanza en un punto de la frontera de  $\Omega$ .

**Proposición A.0.10** (Criterio M de Weierstrass).

Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  una serie de funciones con  $f_n: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Si existe una sucesión  $\{M_n\}$  de manera que  $|f_n(z)| \leq M_n \forall z \in A$ , con  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ , entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  es absoluta y uniformemente convergente en  $A$ .

**Proposición A.0.11** (Criterio de Raabe).

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una serie de números reales estrictamente positivos y

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right).$$

Si el límite existe y  $\beta > 1$ , entonces la suma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es convergente. Si  $\beta < 1$ , entonces la suma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es divergente.

**Teorema A.0.12** (Teorema de convergencia de Weierstrass). [ÚF18, Thm. 4.19]

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones holomorfas en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  y sea  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre todos los compactos de  $\Omega$ . Entonces,  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ . Además, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , la sucesión de derivadas  $\{f_n^{(k)}\}$  converge uniformemente a  $f^{(k)}$  sobre todos los compactos de  $\Omega$ .

**Teorema A.0.13.** [TTV18, Thm. 2.2.1] Sea  $f$  una función analítica en un dominio  $D$  convexo. Si  $\operatorname{Re} f'(z) > 0 \forall z \in D$ , entonces  $f$  es inyectiva en  $D$ .

*Demostración.* Supongamos que  $z_1$  y  $z_2$  son puntos distintos de  $D$ . Como  $D$  es convexo,  $f$  está definida en el segmento que une  $z_1$  y  $z_2$ . Por lo tanto:

$$f(z_1) - f(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz = (z_2 - z_1) \int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1) dt \neq 0,$$

ya que  $\operatorname{Re} f'(z) > 0, \forall z \in D$ . Entonces,  $f(z_1) \neq f(z_2)$  y  $f$  es inyectiva en  $D$ , como queríamos probar.  $\square$

# Apéndice B

## Ejemplos extra

En este apéndice se retoman y detallan cálculos explícitos del conjunto de módulo máximo  $M(f)$  para diversas familias de funciones. Estos ejemplos permiten ilustrar la estructura algebroide demostrada en el Capítulo 2 y observar fenómenos globales como los puntos de cruce y de discontinuidad analizados en el Capítulo 3.

### B.1. Casos extra sobre el ejemplo de Blumenthal

A continuación, profundizamos en el estudio de los polinomios de segundo grado para raíces complejas conjugadas o reales del mismo signo, complementando el análisis del polinomio con raíces reales de distinto signo realizado en la Sección 3.1. Recordamos la definición de  $f$  en este caso,

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta = (z - e_1)(z - e_2),$$

donde  $\alpha, \beta, e_1, e_2 \in \mathbb{C}$ .

#### B.1.1. Polinomio cuadrático con raíces complejas conjugadas

Observamos primero que si  $e_1 = e_2 = 0$ , entonces la función se reduce al monomio  $f(z) = z^2$  y  $M(f) = \mathbb{C}$ . Descartamos a partir de ahora este caso.

La función  $M(r)$  es particularmente simple si los ceros  $e_1, e_2$  son números complejos conjugados (y en los casos que se reducen a este mediante una rotación del plano). Denotamos las raíces por  $e_1 = \rho e^{i\theta}$  y  $e_2 = \rho e^{-i\theta}$  con  $\rho > 0$ , el polinomio se expresa como:

$$f(z) = (z - e_1)(z - e_2) = z^2 - (e_1 + e_2)z + e_1 e_2 = z^2 - 2\rho \cos \theta z + \rho^2.$$

Si evaluamos la función en un punto del círculo  $|z| = r$ , es decir,  $z = r e^{i\varphi}$ , aplicando la desigualdad triangular obtenemos la cota:

$$G(r, \varphi) = |f(r e^{i\varphi})| = |r^2 e^{2i\varphi} - 2\rho \cos \theta r e^{i\varphi} + \rho^2| \leq r^2 |e^{2i\varphi}| + 2\rho r |\cos \theta| |e^{i\varphi}| + \rho^2.$$

Por lo tanto, el máximo  $M(r)$  se alcanzará cuando los tres sumandos del interior del módulo tengan el mismo argumento. Como  $\rho^2$  es un número real positivo, esta condición exige que  $e^{2i\varphi}$  y  $-2\rho \cos \theta r e^{i\varphi}$  también sean reales positivos. De este requisito se derivan los siguientes escenarios según el signo de  $\cos \theta$ :

1. Si  $\cos \theta < 0$ , se requiere  $\varphi = 0$ . El conjunto  $M(f)$  es el semieje real positivo.
2. Si  $\cos \theta > 0$ , se requiere  $\varphi = \pi$ . El conjunto  $M(f)$  es el semieje real negativo.
3. Si  $\cos \theta = 0$ , tenemos los dos puntos correspondientes a  $\varphi = 0$  y  $\varphi = \pi$ . El conjunto  $M(f)$  es la recta real completa.

En los tres casos descritos el valor máximo sobre cada círculo viene dado por  $M(r) = r^2 + 2\rho|\cos\theta|r + \rho^2$  y el conjunto  $M(f)$  se trata de una única curva analítica sin puntos excepcionales.

### B.1.2. Polinomio cuadrático con raíces reales del mismo signo

Analizamos ahora el caso en que las raíces  $e_1$  y  $e_2$  son números reales del mismo signo. Vamos a ver que este escenario se reduce al caso anterior. Para demostrarlo, evaluamos el módulo sobre el círculo  $|z| = r$  y aplicamos la desigualdad triangular:

$$G(r, \varphi) = |f(re^{i\varphi})| = |r^2e^{2i\varphi} - (e_1 + e_2)re^{i\varphi} + e_1e_2| \leq r^2|e^{2i\varphi}| + r|e_1 + e_2||e^{i\varphi}| + e_1e_2.$$

Nuevamente, el módulo máximo se obtendrá para los valores de  $\varphi$  para los que  $r^2e^{2i\varphi}$  y  $-(e_1 + e_2)re^{i\varphi}$  sean números reales positivos, dado que el producto  $e_1e_2$  es un número real positivo. Esto nos permite distinguir los siguientes casos:

1. Si  $e_1 + e_2 > 0$ , se requiere  $\varphi = \pi$ . El conjunto  $M(f)$  es el semieje real negativo.
2. Si  $e_1 + e_2 < 0$ , se requiere  $\varphi = 0$ . El conjunto  $M(f)$  es el semieje real positivo.
3. Si  $e_1 + e_2 = 0$ , dado que las raíces tienen el mismo signo, esto implica necesariamente que  $e_1 = e_2 = 0$ , caso que hemos descartado anteriormente.

Finalmente, el conjunto  $M(f)$  se compone, una vez más, de una única curva analítica sin puntos excepcionales siempre que las raíces no sean nulas.

## B.2. Casos extra sobre el ejemplo de Hardy

Esta sección complementa el análisis de la función exponencial de Hardy que introdujimos en la Sección 3.2. Aquí exploramos cómo las diferentes configuraciones de los parámetros  $a$  y  $b$  modifican la trayectoria de los puntos donde la función alcanza su máximo, permitiéndonos ver otros ejemplos con puntos de discontinuidad. En este caso, la función exponencial es:

$$f(z) = e^{-z^3 - 3az^2 - 3b^2z}.$$

### B.2.1. Caso $4a^2 < 3b^2$ : Hipérbola y eje real disjuntos

En este caso, la hipérbola está orientada de manera que no corta el eje real. Sin embargo, el análisis necesario para nuestro propósito es prácticamente el mismo que en el caso  $\frac{3}{4}b^2 < a^2 < \frac{4}{5}b^2$ , y nuestras conclusiones son exactamente las mismas.

Dado que la hipérbola no corta el eje real, el cambio de curva de máximos resultará en un punto excepcional de segundo tipo. Como hemos visto en el Lema 3.2.4,  $\Phi(r)$  es positiva para  $r > r_0 = \frac{4b^2 - 3a^2}{4a}$ . En consecuencia, el conjunto de módulo máximo se compone de:

1. El eje real, desde  $z = 0$  hasta  $\frac{3a^2 - 4b^2}{4a}$ .
2. Los dos arcos de la hipérbola que comienzan en los puntos donde el círculo de radio  $r_0$  interseca a las ramas superior e inferior de la hipérbola (signo positivo de (3.9)).

### B.2.2. Caso $5a^2 = 4b^2$ : El escenario límite de curvatura

Este caso representa el escenario límite en el que se cumple la igualdad de los tres radios característicos analizados en la Sección 3.2 ( $r_0, r_v, r_{nac}$ ):

$$\frac{2a - \sqrt{4a^2 - 3b^2}}{3} = \frac{4b^2 - 3a^2}{4a} = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{1}{2}a.$$

Bajo esta condición, el origen de coordenadas es el centro de curvatura en el vértice; el círculo de radio  $r = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{1}{2}a$  es el círculo de curvatura; y la recta  $x = -\frac{1}{2}a$  es tangente en el vértice.

En este caso, igual que en el primero de ellos, el conjunto de módulo máximo se compone de:

1. El eje real, desde  $z = 0$  hasta  $-\frac{1}{2}a$  (el vértice de la hipérbola).
2. La rama derecha de la hipérbola (signo positivo de (3.9)).

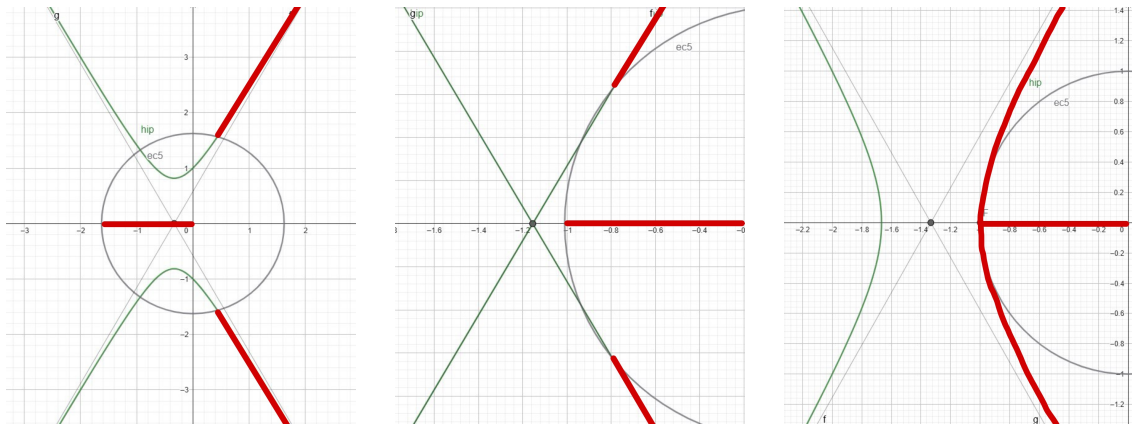
Este radio crítico  $r = \frac{1}{2}a$  es, por tanto, un punto excepcional de primer tipo. Representa la frontera más rígida de la continuidad antes de entrar en los casos de salto o discontinuidad.

### B.2.3. Caso $4a^2 = 3b^2$ : Hipérbola degenerada

Finalmente nos queda estudiar el caso degenerado en que la hipérbola se convierte en dos rectas concurrentes que intersecan en el eje real. En este caso también tenemos la misma desigualdad de radios que en el caso  $\frac{3}{4}b^2 < a^2 < \frac{4}{5}b^2$ :

$$r_v = \frac{2a}{3} > r_0 = \frac{7a}{12} > r_{nac} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

En consecuencia, el comportamiento del conjunto de módulo máximo es cualitativamente idéntico al del caso  $\frac{3}{4}b^2 < a^2 < \frac{4}{5}b^2$ , con la diferencia de que en este caso se trata de trayectorias rectilíneas en lugar de hiperbólicas.



(a) Caso  $4a^2 < 3b^2$ , con  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ .

(b) Caso  $4a^2 = 3b^2$ , con  $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $b = 2$ .

(c) Caso  $5a^2 = 4b^2$ , con  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{5}$ .

Figura B.1: Representación del conjunto de módulo máximo  $M(f)$  para los diferentes casos de estudio de la función de Hardy.

# Bibliografía

- [Blu07] O. Blumenthal. Sur le mode de croissance des fonctions entières. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 35:213–232, 1907.
- [CA00] Eduardo Casas-Alvero. *Singularities of Plane Curves*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2000.
- [Har09] GH Hardy. The maximum modulus of an integral function. *Quart. J. Math.*, 41:1–9, 1909.
- [Hay67] W. K. Hayman. *Research problems in function theory*. The Athlone Press [University of London], London, 1967.
- [HL19] Walter K Hayman and Eleanor F Lingham. *Research Problems in Function Theory: Fiftieth Anniversary Edition*. Problem Books in Mathematics. Springer Nature, Cham, 1st ed. 2019. edition, 2019.
- [HP68] F. Herzog and G. Piranian. The counting function for points of maximum modulus. In *Entire Functions and Related Parts of Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., La Jolla, Calif., 1966)*, volume XI of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 240–243. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [JL86] S. A. Jassim and R. R. London. On the maximum modulus paths of a certain cubic. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 37(146):189–191, 1986.
- [M25] Jürgen Müller. *Concepts of function theory—real and complex analysis of one variable*, volume 12 of *Mathematics Study Resources*. Springer, Berlin, [2025] ©2025. Translated from the 2018 German original [4398214].
- [Ran95] Thomas Ransford. *Potential Theory in the Complex Plane*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [TTV18] Derek K. Thomas, Nikola Tuneski, and Allu Vasudevarao. *Univalent Functions*. De Gruyter, Berlin, Boston, 2018.
- [Ty100] T. F. Tyler. Maximum curves and isolated points of entire functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(9):2561–2568, 2000.
- [ÚF18] Manuel Úbeda Flores. *Análisis complejo: teoría de las funciones analíticas de una variable*. Editorial Universidad de Almería, Almería, España, 2018.
- [Xua18] Li Xuan. The weierstrass preparation theorem and some applications. 2018.