



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

# DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS Y ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Trabajo de final de grado

---

## Valoración de Opciones Financieras mediante Modelos Binomiales y Teoría de Martingalas

---

Autor: Blanca Fabra Soucheiron

Director: Dr. Josep Vives Santa Eulalia  
Realizado en: Departamento de Matemática  
Económica, Financiera y Actuarial

Barcelona, 12 de enero de 2026

## Abstract

Fair valuation of financial derivatives in uncertain environments is one of the fundamental pillars of modern finance. This work presents a study of the discrete-time Cox–Ross–Rubinstein binomial model, demonstrating how the no-arbitrage principle leads to the risk-neutral measure and the behavior of discounted prices as martingales.

Both European options, through the construction of replicating portfolios and the backward induction algorithm, and American options, where the optimal stopping problem is formulated and solved using the Snell Envelope, are studied. A practical application is conducted by valuing a call option on Apple Inc. shares using a custom algorithm developed in C language. The results obtained validate the convergence of the discrete model towards the continuous Black–Scholes formula and allow for the analysis of price sensitivity regarding historical and implied market volatility.

**Keywords:** Binomial model, Cox–Ross–Rubinstein, Martingales, American options, Snell Envelope, Black–Scholes.

## Resumen

La valoración justa de derivados financieros en entornos de incertidumbre es uno de los pilares fundamentales de las finanzas modernas. Este trabajo presenta un estudio del modelo binomial de Cox–Ross–Rubinstein en tiempo discreto, que demuestra cómo el principio de ausencia de arbitraje conduce a la medida neutral al riesgo y al comportamiento de los precios descontados como martingalas.

Se estudian tanto las opciones europeas, mediante la construcción de carteras replicantes y el algoritmo de inducción hacia atrás, como las opciones americanas, donde el problema de parada óptima se formula y resuelve mediante la Envoltente de Snell. Se realiza una aplicación práctica valorando una opción de compra *call* sobre acciones de Apple Inc. utilizando un algoritmo propio desarrollado en lenguaje C. Los resultados obtenidos validan la convergencia del modelo discreto hacia la fórmula continua de Black–Scholes y permiten analizar la sensibilidad del precio ante la volatilidad histórica e implícita del mercado.

**Palabras clave:** Modelo binomial, Cox–Ross–Rubinstein, Martingalas, Opciones americanas, Envoltente de Snell, Black-Scholes.

## Agradecimientos

Este trabajo pone fin a cinco años y medio intensos de formación académica y personal. Estar escribiendo estas líneas me llena de orgullo y emoción.

Primero, quiero agradecer a todos los profesores que me han acompañado durante estos años. En especial, al Dr. Josep Vives por haber confiado en mí cuando parecía que el tiempo apretaba, por haberme guiado en estos meses y, en definitiva, por toda la ayuda prestada en la realización de este trabajo.

También me gustaría agradecer a mis compañeros y amigos con los que he compartido infinidad de recuerdos. En especial, quiero dar las gracias a *mi mejor amiga de la uni*, Lucía. No solo hemos compartido lo académico, hemos compartido lo personal. ¡Muchas aventuras vividas y muchas por vivir!

Por último, agradezco a mis padres, hermanos y abuelos, por su incondicional apoyo y orgullo desde el primer día; y a Luis, por su ánimo constante y por creer en mí cuando ni yo misma lo hacía. Este trabajo marca el final de una etapa y el inicio de otra muy emocionante.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Estructura del trabajo . . . . .	2
<b>2. Fundamentos de probabilidad y procesos estocásticos</b>	<b>3</b>
2.1. Espacios de probabilidad y variables aleatorias . . . . .	3
2.2. Filtraciones e información disponible en el mercado . . . . .	5
2.3. Esperanza condicionada . . . . .	7
2.4. Procesos adaptados y martingalas . . . . .	9
2.5. Precios descontados y ausencia de arbitraje . . . . .	12
2.5.1. Modelo de mercado y precios descontados . . . . .	12
2.5.2. Estrategias de inversión y arbitraje . . . . .	13
2.5.3. El Primer Teorema Fundamental . . . . .	15
<b>3. Modelo binomial para la valoración de activos</b>	<b>17</b>
3.1. Opciones europeas . . . . .	17
3.2. Modelo de Cox–Ross–Rubinstein . . . . .	19
3.2.1. Formulación matemática . . . . .	20
3.2.2. Construcción del árbol binomial . . . . .	21
3.2.3. Parámetros del modelo . . . . .	21
3.2.4. Viabilidad del modelo . . . . .	22
3.3. Cartera replicante y ausencia de arbitraje . . . . .	23
3.3.1. Cartera replicante . . . . .	23
3.3.2. Ausencia de arbitraje . . . . .	24
3.4. Medida neutral al riesgo . . . . .	24
3.4.1. Derivación de la probabilidad neutral . . . . .	25
3.4.2. Interpretación y existencia . . . . .	26

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
3.4.3. Propiedad martingala del precio . . . . .	26
3.5. <i>Backward induction</i> en opciones europeas . . . . .	27
3.5.1. Valoración en el vencimiento . . . . .	28
3.5.2. Valoración en nodos anteriores . . . . .	28
3.5.3. Fórmula cerrada de valoración . . . . .	28
3.5.4. Ejemplo numérico . . . . .	29
<b>4. Valoración de opciones americanas</b>	<b>34</b>
4.1. Opciones americanas y ejercicio temprano . . . . .	34
4.2. La Envoltente de Snell y supermartingalas . . . . .	36
4.3. Algoritmo binomial para opciones americanas . . . . .	39
4.3.1. Valoración en el vencimiento . . . . .	40
4.3.2. Valoración en nodos anteriores . . . . .	40
4.3.3. Ejemplo numérico . . . . .	41
<b>5. Aplicación práctica: valoración de una opción</b>	<b>47</b>
5.1. Selección del activo y obtención de datos . . . . .	47
5.1.1. Datos del activo . . . . .	48
5.1.2. Cotización . . . . .	48
5.2. Parámetros del modelo binomial . . . . .	48
5.2.1. Horizonte temporal y volatilidad . . . . .	49
5.2.2. Parámetros del árbol . . . . .	50
5.3. Resultados de la valoración y validación del modelo . . . . .	50
5.3.1. Valoración binomial y convergencia con Black–Scholes . . . . .	51
5.3.2. Justificación del tipo de opción . . . . .	51
5.4. Comparación con el mercado real . . . . .	52
<b>6. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>
<b>A. Cálculos en Excel</b>	<b>57</b>
A.1. Ejemplo opción europea . . . . .	57
A.2. Ejemplo opción americana . . . . .	58
A.3. Black–Scholes . . . . .	59
<b>B. Programa en C y datos</b>	<b>60</b>

*ÍNDICE GENERAL*

v

B.1. Código C . . . . .	60
B.2. Datos históricos Apple Inc. . . . .	63
B.3. Documento de configuración . . . . .	64
B.4. Documento de resultados . . . . .	64

# Capítulo 1

## Introducción

La incertidumbre es una de las características más representativas de los mercados financieros. Históricamente, los agentes económicos han buscado herramientas para protegerse ante las fluctuaciones de precios o para especular sobre ellas. Es precisamente en este contexto en el que surgen los derivados financieros y, en particular, las opciones, instrumentos que otorgan el derecho, pero no la obligación, de realizar una compra o venta en una fecha futura [7].

La pregunta que surge a partir de estos instrumentos es: ¿cuál debería ser el precio justo (*fair price*) de la opción hoy? Si el precio es muy alto, nadie comprará; si es muy bajo, el vendedor asume un riesgo demasiado alto. La respuesta a este problema, acompañada de la hipótesis de ausencia de arbitraje, ha sido uno de los pilares de las finanzas modernas.

El modelo de Black–Scholes, desarrollado en 1973 y reconocido con el premio Nobel de Economía de 1997, es el modelo estándar para la valoración de opciones en tiempo continuo. Su complejidad matemática puede dificultar la implementación numérica en algunos casos. En 1979, Cox, Ross y Rubinstein propusieron una alternativa en tiempo discreto, el modelo binomial de Cox–Ross–Rubinstein (CRR) [6]. Este modelo, además de simplificar la comprensión de la dinámica de los precios mediante la construcción de árboles binomiales, converge a la solución continua de Black–Scholes cuando los pasos temporales tienden a infinito.

El principal objetivo de este trabajo es estudiar el marco matemático y financiero para el modelo binomial de valoración de opciones. Analizaremos las opciones europeas, cuya característica principal es el ejercicio en el vencimiento, y las opciones americanas, que permiten el ejercicio anticipado. Para ello, introduciremos herramientas matemáticas como las martingalas, los espacios de probabilidad filtrados y la Envoltura de Snell [16].

### 1.1. Motivación

La motivación para realizar este estudio nace de mi formación en el Doble Grado en Matemáticas y Administración y Dirección de Empresas. El plan de estudios pro-

puesto por las facultades presentaba la asignatura de Modelización como optativa, una materia que aborda fundamentos teóricos de modelización tanto en el ámbito financiero como en el físico. Debido a la incompatibilidad horaria y al interés por otras especialidades, no la cursé en su momento.

Por tanto, este trabajo se plantea como un reto personal. No solo supone el broche final tras cinco años intensos de estudios, sino que responde a mi motivación por adquirir las competencias financieras y de modelización de manera autodidacta para cubrir este vacío formativo. En este proceso, he contado con la guía del tutor Josep Vives, quien impartió esta asignatura en la Facultad de Matemáticas durante años, garantizando así el rigor de los contenidos expuestos.

## 1.2. Estructura del trabajo

El trabajo se estructura de la siguiente manera:

- En el **Capítulo 2** se establecen los fundamentos matemáticos. Aparecen definiciones formales de los espacios de probabilidad, las filtraciones y las martingalas, herramientas clave para entender la valoración neutral al riesgo.
- En el **Capítulo 3** desarrollamos el modelo binomial para opciones europeas. Construimos la cartera replicante y deducimos la fórmula de valoración mediante argumentos de no arbitraje.
- En el **Capítulo 4** nos centramos en las opciones americanas, la prima por ejercicio temprano y la Envolvente de Snell. Por último, aplicamos el algoritmo de inducción hacia atrás.
- Finalmente, en el **Capítulo 5** realizamos una aplicación práctica como caso de estudio. Seleccionamos un activo real (Apple Inc.), estimamos su volatilidad histórica y valoramos una opción cotizada en el mercado NASDAQ, comparando valores teóricos con precios reales del mercado. Calculamos una aproximación al resultado de Black–Scholes para comprobar la convergencia entre ambos métodos. Todos los cálculos se realizan con un programa propio desarrollado en lenguaje C.

Con este estudio, el objetivo final es demostrar cómo las herramientas matemáticas discretas permiten modelizar y valorar instrumentos financieros en mercados reales.

# Capítulo 2

## Fundamentos de probabilidad y procesos estocásticos

El objetivo de este capítulo es establecer el marco matemático necesario para desarrollar el modelo binomial. Primero definiremos los espacios de probabilidad y las variables aleatorias, para introducir después la modelización de la información mediante las filtraciones. Por último, definiremos las martingalas y su conexión fundamental con la ausencia de arbitraje.

La teoría presentada a continuación recopila resultados clásicos, principalmente de las obras de Shreve [16] y Hull [7], así como de los apuntes de Josep Vives [18] y José Manuel Corcuera [5].

### 2.1. Espacios de probabilidad y variables aleatorias

La base de cualquier modelo de incertidumbre es un espacio de probabilidad. La evolución del precio de un activo financiero es un fenómeno aleatorio que podemos modelizar gracias a los espacios de probabilidad.

**Definición 2.1.1.** *Sea  $\Omega$  un conjunto no vacío. Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos de  $\Omega$ .  $\mathcal{F}$  posee estructura de  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ , si y solo si, se verifica:*

- $\Omega \in \mathcal{F}$ .
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ , es decir, es estable respecto del paso al complementario.
- Si  $I$  es un conjunto de índices finito o numerable,

$$\{A_i, i \in I\} \subset \mathcal{F} \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F},$$

*es decir, es estable respecto a uniones finitas o numerables.*

**Definición 2.1.2.** Sea  $\Omega$  un espacio topológico. Una  $\sigma$ -álgebra de Borel, denotada por  $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\Omega)$ , es la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de  $\Omega$ .

Dicho de otra manera, la  $\sigma$ -álgebra de Borel es la menor  $\sigma$ -álgebra que incluye todos los subconjuntos abiertos de  $\Omega$  [2].

**Definición 2.1.3.** Un **espacio de probabilidad** es una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , donde:

- $\Omega$  es el **espacio muestral**: un conjunto cuyos elementos  $\omega$  representan todos los resultados posibles de un fenómeno aleatorio.
- $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ . Sus elementos se denominan **eventos**.
- $\mathbb{P}$  es una **medida de probabilidad**, es decir, una función

$$\mathbb{P} : A \in \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$$

tal que:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
- Para toda sucesión numerable de conjuntos disjuntos dos a dos de  $\mathcal{F}$  ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ), se tiene:

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Aplicado al contexto financiero en el que estamos trabajando, interpretamos la terna como:

- **Espacio muestral**  $\Omega$ : representa el conjunto de todas las posibles trayectorias de precios del activo desde el momento inicial  $n = 0$  hasta el momento final  $n = N$ . Concretamente,  $\omega \in \Omega$  representa una trayectoria concreta. Dado que trabajaremos con modelos discretos y finitos (como el modelo binomial), asumiremos que  $\Omega$  es un conjunto finito [16].
- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ : es la familia de todos los sucesos observables posibles (subconjuntos) de  $\Omega$  al final del periodo temporal.
- **Medida de probabilidad**  $\mathbb{P}$ : asigna a cada evento (cierto escenario del mercado) una probabilidad de ocurrencia. Más adelante veremos que para la valoración de derivados será fundamental introducir una *medida neutral al riesgo*  $\mathbb{P}^*$ .

**Definición 2.1.4.** Una **variable aleatoria** es una función

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

medible respecto a  $\mathcal{F}$ , es decir, tal que  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ , para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Una variable aleatoria asigna un número real a cada escenario posible  $\omega$ . Estas, nos permiten representar el precio final de un activo ( $S_N$ ) o el pago (*payoff*) de una opción. Dado nuestro contexto, exigiremos que las variables sean integrables, es decir, que su valor esperado esté bien definido y sea finito ( $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ ). En un modelo de mercado finito donde  $\Omega$  tiene un número finito de elementos, toda variable aleatoria es automáticamente integrable, ya que la esperanza es simplemente una suma finita.

Una vez definida la variable aleatoria, introducimos la dimensión temporal.

**Definición 2.1.5.** *Un **proceso estocástico** en tiempo discreto es una sucesión de variables aleatorias  $X = \{X_n, n \in \mathbb{T}\}$ , definidas sobre el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e indexadas por un conjunto temporal  $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, N\}$ . Introducimos también el conjunto  $\mathbb{T}^* = \{1, 2, \dots, N\}$  [13, 18].*

## 2.2. Filtraciones e información disponible en el mercado

En los mercados financieros la información no llega de golpe, cada día se va revelando nueva información, la incertidumbre se resuelve gradualmente. Hoy sabemos el precio de cierre de ayer, pero no el de mañana. Las decisiones en el momento  $n$  solo se pueden tomar con la información disponible hasta ese momento concreto.

Para ver cómo se modela el flujo de información, es decir, cómo los agentes del mercado obtienen conocimiento sobre los precios, introducimos las filtraciones.

**Definición 2.2.1.** *Una **filtración** asociada a un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es una sucesión de  $\sigma$ -álgebras  $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{T}\}$  tales que [16, 18]:*

- $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{T}$ .
- $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{T}^*$ , es decir, es una sucesión creciente.

$\mathcal{F}_n$  representa el conjunto de toda la información disponible en el mercado y accesible por los inversores en el momento  $n$ . La condición de *anidamiento*, el hecho de que la familia sea creciente,  $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ , garantiza que la información no se pierde con el paso del tiempo, lo que se sabía en  $n - 1$  se sigue sabiendo en  $n$ .

La filtración permite ver que las decisiones de inversión, los precios de los activos y la valoración de derivados deben estar basados únicamente en la información conocida en el momento en que se toma la decisión.

Un concepto asociado a las filtraciones es el de *proceso adaptado*. Pues las variables que dependen del tiempo deben ser observables en ese preciso instante. Definimos este concepto a continuación.

**Definición 2.2.2.** *Se dice que un proceso estocástico  $X = \{X_n, n \in \mathbb{T}\}$  definido sobre un espacio de probabilidad filtrado es **adaptado** a la filtración  $\mathbb{F}$  si, para cada  $n \in \mathbb{T}$ , la variable aleatoria  $X_n$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible.*

Un proceso es adaptado si su valor en el momento  $n$  se puede conocer observando la información disponible en  $n$ . El precio de un activo  $S_n$  debe ser un proceso adaptado, pues observamos el precio actual. En cambio, el valor de una opción en su vencimiento,  $S_N$ , no es  $\mathcal{F}_n$ -medible, pues no es observable antes de tiempo.

En muchos modelos no partimos de una filtración dada, sino que se construye a partir de las observaciones del propio proceso. Esto se conoce como *filtración natural*.

**Definición 2.2.3.** *Dado un proceso estocástico  $X$ , se define su **filtración natural** como la sucesión de  $\sigma$ -álgebras*

$$\mathcal{F}_n := \sigma\{X_k, k \leq n\}$$

es decir, las  $\sigma$ -álgebras generadas por las propias variables del proceso.

**Observación 2.2.4.** Todo proceso estocástico es adaptado a su filtración natural.

En el contexto financiero, nuestra fuente de información son los precios. Por tanto, si denotamos por  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  al proceso de precios, trabajaremos con la filtración natural generada por estos:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

Esta  $\sigma$ -álgebra contiene exactamente toda la información histórica del mercado hasta el instante  $n$ .

**Ejemplo 2.2.5.** Consideremos un modelo binomial cuyo espacio temporal son dos periodos ( $N = 2$ ). El precio inicial es  $S_0$  y en cada periodo el activo puede subir ( $u$ ) o bajar ( $d$ ). El espacio muestral es

$$\Omega = \{(u, u), (u, d), (d, u), (d, d)\}$$

que representan las cuatro trayectorias posibles en los dos periodos. La evolución de la información  $\mathbb{F}$  sería la siguiente:

- $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ : información trivial. Solo conocemos el precio inicial  $S_0$ . No se distingue ninguna trayectoria de  $\Omega$ .
- $\mathcal{F}_1$ : ya se sabe si el precio ha subido o ha bajado en el primer periodo. Podemos distinguir entre los sucesos que empiezan por  $u$  y los que empiezan por  $d$ .
- $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ : se conoce la trayectoria completa. Es posible distinguir los cuatro escenarios.

Finalmente, definimos un **espacio de probabilidad filtrado** como la cuaterna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ .

**Definición 2.2.6.** *Un **espacio de probabilidad filtrado** es un espacio de probabilidad con una filtración asociada  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ .*

Este marco permite distinguir dos tipos de variables en modelos financieros:

- **Variables adaptadas:** como el precio  $S_n$ . Su valor en el instante  $n$  es conocido dada la información  $\mathcal{F}_n$ .
- **Variables previsibles:** como las estrategias de inversión  $\phi_n$  (cantidad de activos que mantenemos en cartera durante el periodo  $n$ ). Se dice que un proceso es previsible si  $\phi_n$  es  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medible; es decir, la decisión de cuánto invertir para el periodo que empieza debe tomarse con la información que tenemos al cierre del periodo anterior.

## 2.3. Esperanza condicionada

En un entorno incierto como un mercado financiero, los agentes deben tomar decisiones sin disponer de toda la información de los acontecimientos del futuro. Las decisiones se toman con la información que se posee en ese instante. En esta sección definiremos la esperanza condicionada y sus principales propiedades. Es lo que permite formalizar este tipo de razonamientos. Describe el valor esperado de una variable aleatoria futura (por ejemplo, el precio de un activo  $S_N$ ) condicionado a la información disponible hasta el momento de la decisión ( $\mathcal{F}_n$ ).

Empezamos recordando dos conceptos básicos de la teoría de la probabilidad que sirven de preámbulo.

**Definición 2.3.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y sea  $B \in \mathcal{F}$  tal que  $\mathbb{P}(B) > 0$ . La **probabilidad de A condicionada a B** se define como:

$$\mathbb{P}(A | B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Definición 2.3.2.** Dos eventos  $A$  y  $B$  son **estocásticamente independientes** si la ocurrencia de uno no afecta a la probabilidad del otro, esto es:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

**Definición 2.3.3.** Sea  $X$  una variable aleatoria discreta que toma valores en un conjunto  $\{x_i\}_{i \in I}$ , con  $I = \{1, \dots, n\}$  finito y probabilidad  $p_i = \mathbb{P}[X = x_i]$ . La **esperanza matemática**  $\mathbb{E}[X]$  se define como:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbb{P}[X = x_i] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i.$$

El concepto de esperanza matemática  $\mathbb{E}[X]$  es un número real determinista (una media ponderada). En finanzas necesitamos una noción de esperanza cuyo valor dependa de la información parcial revelada hasta el momento. Esta es la esperanza condicionada respecto a una  $\sigma$ -álgebra.

**Definición 2.3.4.** Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , una variable aleatoria integrable  $X$  y una sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , **la esperanza condicionada de  $X$  respecto a  $\mathcal{G}$** , denotado por  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ , se define como la única variable aleatoria (definida casi seguramente) que cumple las siguientes propiedades:

- **$\mathcal{G}$ -medibilidad:**  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  es medible respecto a  $\mathcal{G}$  (su valor depende únicamente de la información contenida en  $\mathcal{G}$ ).
- **Propiedad de la media parcial:** para cualquier conjunto  $G \in \mathcal{G}$ ,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathbf{1}_G] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_G].$$

Recordemos que  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  es una variable aleatoria, no un número constante (la esperanza o la esperanza condicionada a un evento sí que es un número constante). Su valor depende del escenario  $\omega$ , pero solo a través de la información disponible  $\mathcal{G}$ . A partir de lo que se sabe en el momento  $n$ ,  $\mathbb{E}[S_N|\mathcal{F}_n]$  es la mejor estimación del precio futuro  $S_N$ .

**Ejemplo 2.3.5.** Consideremos un activo cuyo precio hoy es  $S_0 = 100$ . Mañana,  $t = 1$ , el precio puede subir a 110 (escenario  $\omega_{up}$ ) o bajar a 90 (escenario  $\omega_{down}$ ) con probabilidades  $p$  y  $1 - p$  respectivamente.

$$S_1(\omega_{up}) = 110, \quad S_1(\omega_{down}) = 90.$$

Sea  $X$  el *payoff* de una opción en  $t = 1$ .

- En  $t = 0$ , la filtración es trivial,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , porque no tenemos información de qué escenario ocurrirá. La esperanza condicionada es constante:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_0](\omega) = \mathbb{E}[X] = pX(\omega_{up}) + (1 - p)X(\omega_{down}), \quad \forall \omega.$$

- En  $t = 1$ , la filtración  $\mathcal{F}_1$  ya sabe si el precio ha subido o ha bajado. La esperanza condicionada es una variable aleatoria que toma distintos valores en función del nodo del árbol.

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1](\omega) = \begin{cases} X(\omega_{up}) & \text{si } \omega = \omega_{up} \\ X(\omega_{down}) & \text{si } \omega = \omega_{down} \end{cases}$$

En  $t = 1$ , la filtración  $\mathcal{F}_1$  contiene la información para determinar el *payoff*  $X$ . Este *payoff*  $X$  es  $\mathcal{F}_1$ -medible. Por tanto, la esperanza condicionada coincide con la variable misma.

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] = X.$$

Este comportamiento dependiente del nodo es la base de la inducción hacia atrás en la valoración de opciones.

La siguiente proposición recoge las propiedades más relevantes que utilizaremos más adelante para demostrar la ausencia de arbitraje.

**Proposición 2.3.6.** Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias integrables y  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  una sub- $\sigma$ -álgebra. Se cumplen las siguientes propiedades casi seguramente:

1. **Linealidad:**

$$\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. **Independencia:** si  $X$  es independiente de  $\mathcal{G}$ ,

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$

Es decir, si la información de  $\mathcal{G}$  no aporta nada sobre  $X$ , entonces la mejor estimación es la media global.

3. **Sacar lo conocido:** si  $Y$  es  $\mathcal{G}$ -medible,

$$\mathbb{E}[X \cdot Y \mid \mathcal{G}] = Y \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

En particular, se tiene  $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] = Y$ .

4. **Propiedad de la Torre:** si  $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ ,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1].$$

*Demostración.* Consultar demostración en [16, 18]. □

La interpretación financiera de la propiedad de la torre es muy intuitiva: la mejor predicción hoy ( $\mathcal{G}_1$ ) de mi predicción de mañana ( $\mathcal{G}_2$ ) es simplemente mi predicción hoy.

Finalmente, una fórmula muy útil para modelos discretos (como el binomial) es la siguiente: si  $\mathcal{G}$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por una partición  $\{A_i, i \in I\}$ , tales que los  $A_i$  son disjuntos y cubren  $\Omega$  con  $\mathbb{P}(A_i) > 0$ , entonces, la esperanza condicionada de  $X$  respecto a  $\mathcal{G}$  se convierte en la variable aleatoria:

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[X \mid A_i] \mathbf{1}_{A_i}.$$

Esto significa que en cada conjunto de la partición, la esperanza condicionada es simplemente el promedio de  $X$  dentro de ese conjunto específico.

## 2.4. Procesos adaptados y martingalas

La noción de proceso adaptado, previamente introducida en la sección 2.2 al definir las filtraciones, permite garantizar que el modelo respeta la evolución del sistema. Es decir, en un modelo probabilístico donde la información se va revelando con el tiempo, debemos asegurar que las variables que dependen del tiempo  $n$  sean observables en ese instante.

Vamos a considerar únicamente procesos estocásticos a tiempo discreto, vamos a suponer que el horizonte temporal es  $\mathbb{T} := \{0, 1, \dots, N\}$  para cierto  $N \in \mathbb{N}$  fijado (o  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ).

Con el concepto de la esperanza condicionada, definimos una clase de proceso estocástico, muy relevante para la valoración de activos: las martingalas.

**Definición 2.4.1.** *Un proceso  $M := \{M_n, n \in \mathbb{T}\}$  es una **martingala** respecto a una filtración  $\mathbb{F}$  si [7, 16, 9, 18]:*

1. **Adaptabilidad:**  $M$  es un proceso adaptado a  $\mathbb{F}$ .
2. **Integrabilidad:**  $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{T}$ , es decir, todas las variables del proceso son integrables.
3. **Propiedad de martingala:** para todo  $n \in \mathbb{T}^*$ , se cumple:

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}, \quad c.s.$$

La propiedad de martingala se puede reescribir como  $\mathbb{E}[M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ . Esto implica que, dada toda la información disponible hasta hoy ( $n - 1$ ), la mejor predicción del valor de mañana ( $M_n$ ), es el valor presente. Financieramente, una martingala representa un *fair game* (juego justo) porque no existe una tendencia predecible al alza ni a la baja, si nos basamos en la historia del proceso.

**Definición 2.4.2.** *Decimos que un proceso  $M$  es una **submartingala** si se cumplen las propiedades 1 y 2 de la definición de martingala y*

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] \geq M_{n-1}, \quad c.s., \quad \forall n \in \mathbb{T}^*.$$

**Definición 2.4.3.** *Decimos que un proceso  $M$  es una **supermartingala** si se cumplen las propiedades 1 y 2 de la definición de martingala y*

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] \leq M_{n-1}, \quad c.s., \quad \forall n \in \mathbb{T}^*.$$

Por lo tanto, la interpretación financiera de estos procesos es la siguiente:

- Una **martingala** modela un mercado en equilibrio, sin deriva predecible.
- Una **submartingala** tiene una tendencia esperada creciente. Un ejemplo es la evolución del capital invertido en un activo con rendimiento esperado positivo.
- Una **supermartingala** tiene una tendencia esperada decreciente. Un ejemplo es el capital de un jugador en un casino con esperanza de ganancia negativa.

Una consecuencia de la definición de martingala es que la esperanza matemática del proceso se mantiene constante a lo largo del tiempo. Veámoslo formalmente en la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.4.** *Si  $M$  es una martingala, entonces  $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0], \forall n \in \mathbb{T}$ . En el caso de una submartingala, se tiene  $\mathbb{E}[M_n] \geq \mathbb{E}[M_{n-1}]$ , la esperanza es creciente; y en el de una supermartingala,  $\mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_{n-1}]$ , es decreciente.*

*Demostración.* Para el caso de la martingala, por definición tenemos  $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}]]$  y, aplicando la propiedad de la torre de la esperanza condicionada:

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[M_{n-1}].$$

y por inducción obtenemos el resultado esperado  $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$ . Procedemos con un razonamiento análogo para las desigualdades de la submartingala y de la supermartingala [18].  $\square$

Veremos en las próximas secciones cómo el precio de un activo  $S_n$ , en general, no es una martingala. No obstante, sí que lo es bajo la medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^*$ . La existencia de esta medida neutral de probabilidad es equivalente a la condición de **ausencia de arbitraje**, que introduciremos en la próxima sección.

Introducimos brevemente el concepto de tiempo de parada, que nos será muy útil para modelar decisiones como el ejercicio de una opción americana.

**Definición 2.4.5.** *Dada una filtración  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{T}\}$ , se define el **tiempo de parada** (stopping time) como una variable aleatoria:*

$$\tau : \omega \in \Omega \longrightarrow \tau(\omega) \in \mathbb{T} \cup \{\infty\}$$

tal que para todo  $n \in \mathbb{T}$ ,  $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  [16, 4].

La condición  $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  significa que en el instante  $n$ , debemos ser capaces de decidir si el evento  $\tau$  ya ha ocurrido o no, basándonos únicamente en  $\mathcal{F}_n$ , la información disponible hasta ese momento, sin mirar al futuro.

**Ejemplo 2.4.6.** Consideremos  $S_n$  un proceso de precios. Definimos  $\tau$  como el primer instante en que el precio del activo supere un nivel  $K$ :

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{T} : S_n \geq K\}.$$

Este es un tiempo de parada, ya que para saber si  $\tau \leq n$  (si ya hemos cruzado la barrera en o antes del día  $n$ ), solo necesitamos observar los precios  $S_0, S_1, \dots, S_n$ , información contenida en  $\mathcal{F}_n$ .

Por el contrario, el momento en que el activo alcanza su máximo global en todo el periodo  $[0, N]$  no es un tiempo de parada, ya que para saber si el máximo se ha alcanzado durante el día de hoy, necesitaríamos conocer los precios futuros para asegurar que no habrá un mayor valor mañana.

## 2.5. Precios descontados y ausencia de arbitraje

En los mercados financieros los precios de los activos evolucionan de forma incierta y dependen de la información disponible en cada instante. La teoría de martingalas nos proporciona las herramientas para poder estudiar esta evolución.

Esta sección también vinculará la imposibilidad de ganar dinero sin riesgo de forma sistemática, la realidad económica, con las martingalas. Veremos cómo la ausencia de arbitraje en un mercado es equivalente a la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo bajo la cual los precios descontados actúan como martingalas.

Dentro de los activos tenemos activos con riesgo, cuyo precio evoluciona de manera indeterminada según la ley de la oferta y la demanda; y activos sin riesgo, cuya evolución es de manera específica. Un ejemplo de este tipo de activos puede ser nuestra cuenta bancaria, en la que nuestros ahorros crecen con un tipo de interés constante  $r \geq 0$ . Supongamos que también podemos pedir préstamos a nuestra entidad bancaria a este tipo de interés  $r$ .

### 2.5.1. Modelo de mercado y precios descontados

Consideremos un mercado financiero compuesto por  $d+1$  activos que se negocian en un tiempo discreto  $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, N\}$ . El primero de estos activos, es un activo libre de riesgo (por ejemplo, una cuenta bancaria) cuyo precio  $S^0$  evoluciona según una tasa de interés constante  $r \geq 0$ .

**Definición 2.5.1.** *Los **procesos de precios del activo sin riesgo** se definen como:*

$$S^0 := \{S_n^0, n \geq 0\},$$

de manera que  $S_n^0 = (1+r)S_{n-1}^0$  y  $S_0^0 = 1$ . Por tanto:

$$S_n^0 = (1+r)^n, \quad \forall n \in \mathbb{T}.$$

Asumimos que esta tasa  $r$  es con la que los inversores pueden tanto depositar como pedir dinero.

Los otros  $d$  activos son activos con riesgo (acciones, divisas...), cuyos precios evolucionan de manera estocástica.

**Definición 2.5.2.** *Los **procesos de precios de los  $d$  activos con riesgo** se definen como un vector  $d$ -dimensional:*

$$S := \{S_n = (S_n^1, \dots, S_n^d), n \in \mathbb{T}\}.$$

Donde cada componente  $S_n^i$  es una variable aleatoria positiva y  $\mathcal{F}_n$ -medible.

Podemos definir un espacio de probabilidad finito  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  como modelo de este mercado donde:

- **El espacio muestral**  $\Omega$ : conjunto finito de escenarios posibles. Cada  $\omega \in \Omega$  representa una trayectoria completa y simultánea de los precios de todos los activos del mercado.
- **La filtración**  $\mathbb{F}$ : filtración  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{T}\}$  que modela el flujo de información. Supondremos en general que  $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$  y que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$ . El conjunto  $\mathcal{F}_n$  representa la información disponible hasta el instante  $n$  (precios históricos).
- **La medida de probabilidad**  $\mathbb{P}$ : esta medida es desconocida pero podemos suponer que  $\mathbb{P}(\omega) > 0$  para todo  $\omega \in \Omega$ , es decir,  $\Omega$  es el conjunto de las evoluciones realmente posibles.

Como operamos con activos en diferentes momentos del tiempo, debemos eliminar el efecto del valor temporal del dinero.

**Definición 2.5.3.** *Un precio descontado o actualizado del activo  $i$ -ésimo lo denotamos por:*

$$\tilde{S}_n^i := \frac{S_n^i}{S_n^0} = \frac{S_n^i}{(1+r)^n}.$$

$\tilde{S}_n^i$  denota el precio del activo  $i$ -ésimo en el instante  $n$  valorado con el valor actual de la moneda. Tenemos que  $\tilde{S}_n^0 = 1$  para todo  $n \in \mathbb{T}$  pues recordemos que  $S_n^0$  es el activo sin riesgo. El descuento elimina la tendencia natural de crecimiento de los precios debido a la inflación o al interés.

## 2.5.2. Estrategias de inversión y arbitraje

Los inversores operan en el mercado construyendo carteras. Una **cartera** es un conjunto de activos con riesgo y un activo sin riesgo.

**Definición 2.5.4.** *Una estrategia de inversión es un proceso  $(d+1)$ -dimensional previsible  $\phi$  tal que*

$$\phi_n := \{(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d) \in \mathbb{R}^{d+1}, n \in \mathbb{T}^*\}.$$

*Es decir, suponemos que todo  $\phi_n^i$  es  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medible.*

$\phi_n^i$  denota el número de activos de tipo  $i$  que tendremos en la cartera a lo largo del día  $n$ . La decisión del valor de esta cartera se toma en base a la información de los precios de cierre del día anterior,  $n-1$ . Por tanto, es razonable suponer que  $\phi_n$  es previsible (se basa en la información disponible al final del día  $n-1$ , que modelizamos mediante  $\mathcal{F}_{n-1}$ ).

**Definición 2.5.5.** *El valor de la cartera al final del momento  $n$  es*

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n = \sum_{i=0}^d \phi_n^i \cdot S_n^i.$$

donde  $S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d)$  y el producto es el producto escalar en  $\mathbb{R}^{d+1}$ . El valor descontado de la cartera es

$$\tilde{V}_n(\phi) = \frac{\phi_n \cdot S_n}{(1+r)^n} = \frac{V_n(\phi)}{S_n^0} = \phi_n \cdot \tilde{S}_n.$$

Nos interesan las estrategias que no requieren inyecciones ni retirada de capital, es decir, que los cambios en la cartera  $\phi_n$  se deban únicamente a la evolución de los precios. Introducimos el concepto de estrategia autofinanciada.

**Definición 2.5.6.** Una **estrategia autofinanciada** es una estrategia de inversión tal que

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n, \quad \forall n \in \mathbb{T}^*.$$

En una estrategia autofinanciada, la variación se debe exclusivamente a la fluctuación de los precios de mercado:

$$V_n(\phi) - V_{n-1}(\phi) = \phi_n \cdot (S_n - S_{n-1}).$$

Con todos los elementos que hemos introducido podemos definir el concepto de arbitraje.

**Definición 2.5.7.** Una oportunidad de **arbitraje** es una estrategia autofinanciada  $\phi$  tal que:

- $V_0(\phi) = 0$  (coste inicial nulo).
- $V_N(\phi) \geq 0$  para todo  $\omega \in \Omega$  (sin riesgo de pérdida).
- $\mathbb{P}(V_N(\phi) > 0) > 0$  (probabilidad positiva de ganancia).

Un mercado se dice **viable** si no existen oportunidades de arbitraje [7].

Es decir, una estrategia de arbitraje es una estrategia de inversión que nos da la posibilidad de ganar dinero sin riesgo. Las finanzas actuales se basan en la hipótesis de que esto no es posible.

Veamos un ejemplo de un caso de un mercado abierto y líquido en el que las oportunidades de arbitraje desaparecen muy rápidamente.

**Ejemplo 2.5.8.** Imaginemos un producto financiero que cotiza en dos mercados en divisas diferentes. Las fluctuaciones en los tipos de cambio de las divisas pueden hacer que los precios sean diferentes. La estrategia de comprar el precio barato y vender el caro sería un arbitraje. Pero si mucha gente lo hace, el precio barato sube, se equilibra con el caro y desaparece la oportunidad de arbitraje.

Por tanto, el principio de imposibilidad de arbitraje es un axioma económico empírico. En los mercados líquidos y eficientes, generalmente, no es posible obtener beneficios seguros sin riesgo.

### 2.5.3. El Primer Teorema Fundamental

**Definición 2.5.9.** Dado un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ , se dice que una medida de probabilidad  $\mathbb{P}^*$  es **equivalente** a  $\mathbb{P}$  si para todo  $A \in \mathcal{F}$  se tiene

$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{P}^*(A) = 0.$$

Denotamos que  $\mathbb{P}^*$  es equivalente a  $\mathbb{P}$  como  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ .

En un espacio muestral finito se tiene

$$\mathbb{P}(\omega) > 0 \iff \mathbb{P}^*(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

**Definición 2.5.10.** Una medida de probabilidad  $\mathbb{P}^*$  se denomina **medida neutral al riesgo** si:

- Es equivalente a la medida real ( $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ ).
- Bajo  $\mathbb{P}^*$ , los precios descontados de los activos  $\tilde{S}^i$  son martingalas respecto a la filtración  $\mathbb{F}$ . Es decir:

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_{n+1}^i \mid \mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n^i, \quad \forall n, \forall i.$$

Denotamos por  $\mathbb{E}^*$  la esperanza asociada a esta medida de probabilidad neutral al riesgo. Veremos a continuación, como consecuencia del Primer Teorema Fundamental de las Finanzas (2.5.11), que bajo esta medida de probabilidad  $\mathbb{P}^*$ , el rendimiento esperado de cualquier activo es igual a la tasa libre de riesgo  $r$ .

#### **Teorema 2.5.11. Primer Teorema Fundamental de las Finanzas**

Un mercado financiero finito es viable si y solo si existe una medida de probabilidad  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$  neutral al riesgo.

*Demostración.* Consultar demostración en [15, 16, 18]. □

En conclusión, la ausencia de arbitraje es la condición necesaria para que un mercado sea viable. Las martingalas representan esta idea de juego justo. A través del Primer Teorema Fundamental de las Finanzas hemos visto que un mercado es viable si y solo si existe una medida de probabilidad  $\mathbb{P}^*$ , equivalente a la medida real  $\mathbb{P}$ , neutral al riesgo.

**Definición 2.5.12.** Decimos que un perfil de beneficios  $G$  es **replicable** si existe una constante  $V_0$  y una estrategia autofinanciada  $\phi$  tal que  $V_N(\phi) = G$ .

**Definición 2.5.13.** Decimos que un mercado viable es **completo** si todo perfil de beneficios es replicable.

#### **Teorema 2.5.14. Segundo Teorema Fundamental de las Finanzas**

Consideremos un mercado finito y viable, y supongamos que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$ . El mercado es completo si y solo si existe una única medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ .

*Demostración.* Consultar demostración en [15, 13, 18].  $\square$

Bajo esta medida, los precios descontados de los activos con riesgo  $\tilde{S}^i$  se comportan como martingalas respecto a la filtración del mercado  $\mathbb{F}$ . Esto implica financieramente que:

- El rendimiento esperado de cualquier activo bajo  $\mathbb{P}^*$  es exactamente la tasa libre de riesgo  $r$ .
- Al trabajar con precios descontados, se elimina la tendencia del mercado, simplificando la valoración de activos a un cálculo de esperanzas condicionales.

En resumen, este capítulo ha construido los cimientos estocásticos necesarios para la valoración: hemos definido el espacio de probabilidad, modelado el flujo de información mediante filtraciones y caracterizado el equilibrio del mercado mediante martingalas. Con este marco teórico, podemos introducir en el próximo capítulo el Modelo Binomial de Cox–Ross–Rubinstein, donde aplicaremos esta medida neutral al riesgo para valorar opciones financieras de manera concreta.

# Capítulo 3

## Modelo binomial para la valoración de activos

En el capítulo anterior hemos establecido el marco teórico necesario para modelizar la incertidumbre en los mercados financieros. En este capítulo, aplicaremos la teoría para desarrollar el Modelo Binomial de Cox, Ross y Rubinstein (CRR), una de las herramientas más intuitivas y poderosas para la valoración de opciones.

Empezaremos definiendo los contratos básicos (opciones europeas) y construyendo el árbol binomial que modela la evolución del activo subyacente. A continuación, deduciremos la fórmula de valoración. Finalmente, presentaremos el algoritmo de inducción hacia atrás, acompañado de un ejemplo numérico.

La parte teórica de este capítulo se fundamenta principalmente en el artículo original de Cox, Ross y Rubinstein [6, 17], así como en los textos de referencia de Hull [7] y Shreve [16].

### 3.1. Opciones europeas

Introduzcamos brevemente el concepto de opción europea. Para ello, definimos conceptos financieros básicos.

#### Definición 3.1.1.

- **Activo subyacente:** es un activo real (activo tangible) o financiero (activo intangible) sobre el que se basa el precio de un producto o contrato derivado (contratos para una fecha futura que se utilizan para gestionar riesgos de precios o para especular).
- **Derivado financiero:** es un producto financiero cuyo valor depende de la evolución del precio del activo subyacente. Los swaps son un ejemplo de derivado financiero [7, 1].

**Definición 3.1.2.** Una **opción europea de compra** (call) es un contrato financiero que otorga el derecho, pero no la obligación, de comprar un activo subyacente

a un precio predeterminado  $K$  (precio de ejercicio o *strike*). Solo se puede ejercer en la fecha de vencimiento del contrato ( $N$ ). El comprador paga una prima al vendedor, que tiene la obligación de vender el activo si el comprador decide ejercer su opción [7].

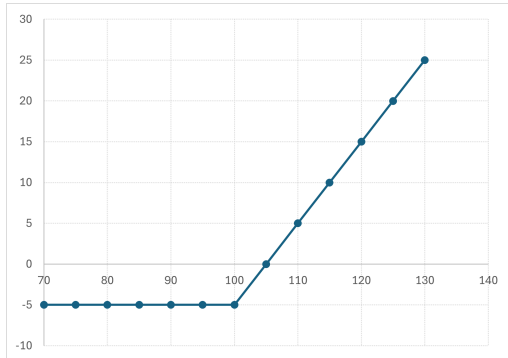
Es decir, el titular de la opción tiene el derecho de comprar un activo subyacente a un precio predeterminado, pero solo en la fecha específica de vencimiento. No se puede ejercer en ningún momento anterior a esa fecha.

Si en la fecha  $N$  de vencimiento el precio de mercado del activo,  $S_N$ , es superior al precio de ejercicio  $K$ , se puede ejercer la opción de compra y comprar el producto a precio  $K$ . Este producto se puede vender inmediatamente en el mercado obteniendo el beneficio  $S_N - K$ . En cambio, si el precio de mercado es inferior a  $K$ , no tiene sentido ejercer la opción de compra, pues comprar directamente el producto en el mercado es más barato. El beneficio (*payoff*) de una opción de compra es  $G = (S_N - K)^+ = \max(S_N - K, 0)$ .

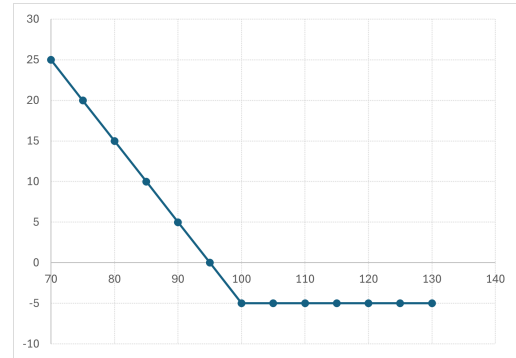
Análogamente, existen las opciones europeas de venta.

**Definición 3.1.3.** Una **opción europea de venta** (*put*) es un contrato financiero que otorga el derecho, pero no la obligación, de vender un activo subyacente a un precio predeterminado  $K$ . Solo se puede ejercer en la fecha de vencimiento del contrato ( $N$ ). El comprador paga una prima al vendedor, que tiene la obligación de comprar el activo si el comprador decide ejercer su opción.

En este caso, el comprador obtiene beneficio si el precio de mercado es inferior a  $K$ . Su beneficio sería de  $G = (K - S_N)^+ = \max(K - S_N, 0)$ .



(a) *Payoff* de la opción *call*



(b) *Payoff* de la opción *put*

Figura 3.1: Comparación de una *call* y una *put* (*Strike*= 100, *prima*= 5).

Comentemos lo que se observa en la Figura 3.1:

- El eje horizontal representa el precio del activo subyacente en el vencimiento  $N$ .
- *Payoff* de una *call* (Figura 3.1a):

- Zona de pérdida máxima: para precios del subyacente en el intervalo  $(0, 100)$ . Aquí, la opción no se ejercería, pues es más barato comprar directamente en el mercado. La pérdida está limitada y fija en 5, la prima pagada.
  - Punto de equilibrio:  $Strike + Prima = 100 + 5 = 105$ . En este punto, se recupera la inversión inicial. Si el precio sube por encima de 105 se entra en la zona de ganancias ilimitadas.
- *Payoff* de una *put* (Figura 3.1b):
- Zona de pérdida máxima: en el intervalo  $(100, \infty)$ . Aquí, la opción no se ejercería, pues es más beneficioso vender directamente en el mercado. La pérdida máxima es 5, la prima pagada.
  - Punto de equilibrio:  $Strike - Prima = 100 - 5 = 95$ . En este punto, se recupera la inversión inicial. Si el precio baja por debajo de 95 se entra en la zona de ganancias.
  - A diferencia del caso de la *call*, los beneficios tienen un límite, el precio no puede ser inferior a 0.

**Observación 3.1.4.** Cuando sea necesario distinguir el tipo de opción, utilizaremos  $C$  para las opciones de compra (*call*) y  $P$  para las de venta (*put*). En expresiones generales,  $V$  denota el valor de una opción cualquiera.

## 3.2. Modelo de Cox–Ross–Rubinstein

Para poder valorar derivados financieros como las opciones europeas necesitamos un modelo que describa cómo evoluciona a lo largo del tiempo el precio de un activo subyacente.

Los precios de los activos cambian constantemente y están sujetos a mucha incertidumbre. No obstante, es útil considerar un entorno discreto, ya que matemáticamente es más sencillo. El modelo binomial de Cox–Ross–Rubinstein describe de manera sencilla estos cambios en los precios.

El modelo fue formalizado por Cox, Ross y Rubinstein en 1979 y, claramente, debe su nombre a sus autores [6]. Traza la evolución de un activo subyacente en un intervalo de tiempo entre el momento de valoración y la fecha de vencimiento. Se basa en la idea de que un activo con riesgo solo puede evolucionar de dos maneras: multiplicándose por un factor de subida  $u$  o por uno de bajada  $d$ . Se representa mediante un árbol cuyos nodos representan el posible precio del activo en cierto instante  $n$ .

Este modelo está diseñado de tal manera que si se aumentan los pasos del modelo y hacemos que los periodos sean más pequeños ( $N \rightarrow \infty$ ), el modelo converge al modelo continuo de Black–Scholes [6, 16, 7].

### 3.2.1. Formulación matemática

Para poder formalizar el modelo, debemos estructurar los elementos que intervienen en él. Supongamos:

- Un mercado finito en el que hay dos activos, uno con riesgo, cuyo precio es  $S$  y otro sin riesgo (como una cuenta bancaria), cuyo valor es  $S^0 > 0$ .
- Un tipo de interés constante  $r \geq 0$ . Podemos escribir  $S_n^0 = (1 + r)^n$ .
- Un tiempo discreto  $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, N\}$ , donde  $N$  es el número de periodos.
- Un horizonte temporal total  $T$  (en años) hasta el vencimiento.
- En cada periodo, el precio del activo con riesgo sube un factor  $1 + u$  o baja un factor  $1 + d$ .
- $S_0$  es constante.
- $-1 < d < u$ , para que los precios no sean negativos.

Dada esta situación, podemos definir las variables aleatorias  $\{T_n, n \in \mathbb{T}\}$  tales que:

$$T_n := \frac{S_n}{S_{n-1}},$$

que representan el rendimiento relativo del activo en el periodo  $n$ . Como el modelo solo permite dos posibles movimientos en cada periodo,  $T_n$  solo puede tomar los valores  $1 + u$  (subida) o  $1 + d$  (bajada).

El precio del activo en cualquier momento  $n$  puede expresarse como:

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^n T_i.$$

Bajo estas suposiciones podemos construir el espacio de probabilidad finito  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  del modelo binomial (o modelo CRR) tal que:

- **El espacio muestral**  $\Omega$ : conjunto finito de los posibles retornos,  $\Omega = \{(1 + d), (1 + u)\}^N$ . Tiene todas las posibles secuencias de subidas y bajadas.
- **La filtración**  $\mathbb{F}$ : filtración  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{T}\}$  con  $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_0, T_1, \dots, T_n\} = \sigma\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$   $\sigma$ -álgebra generada por el histórico de precios, donde  $\mathcal{F}_n$  recoge la información disponible hasta el momento  $n$ .
- **La medida de probabilidad**  $\mathbb{P}$ : medida de probabilidad sobre  $\Omega$  tal que

$$\mathbb{P}(T_1 = x_1, \dots, T_N = x_N) > 0, \text{ para todo } (x_1, \dots, x_N) \in \Omega,$$

asigna probabilidad positiva a cualquier trayectoria posible del árbol.

### 3.2.2. Construcción del árbol binomial

El modelo funciona de manera iterativa: se parte desde el precio conocido  $S_0$  y en cada paso temporal el precio se ramifica en función del posible futuro, subida o bajada del precio.

Tras  $n$  pasos, el activo puede haber subido  $k$  veces y haber bajado  $n - k$  veces. Con la característica de que si primero sube y luego baja o si primero baja y luego sube, se llega al mismo resultado. Es decir, el árbol es **recombinante** debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación:

$$S_0(1 + u)(1 + d) = S_0(1 + d)(1 + u).$$

Esta propiedad implica que el precio depende del número total de movimientos al alza  $k$  hasta ese momento. Reduce el número de nodos (crece linealmente, pues en el momento  $n$  hay  $n + 1$  precios posibles, y no exponencialmente con  $2^n$  nodos, facilitando mucho los cálculos computacionales) y facilita la valoración mediante la inducción hacia atrás. El valor del precio del nodo  $n$  es:

$$S_n^{(k)} = S_0(1 + u)^k(1 + d)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

El número de combinaciones posibles para llegar hasta la situación  $S_n^{(k)}$  es el coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$ .

Veamos un ejemplo gráfico de la evolución del precio en los dos primeros periodos:

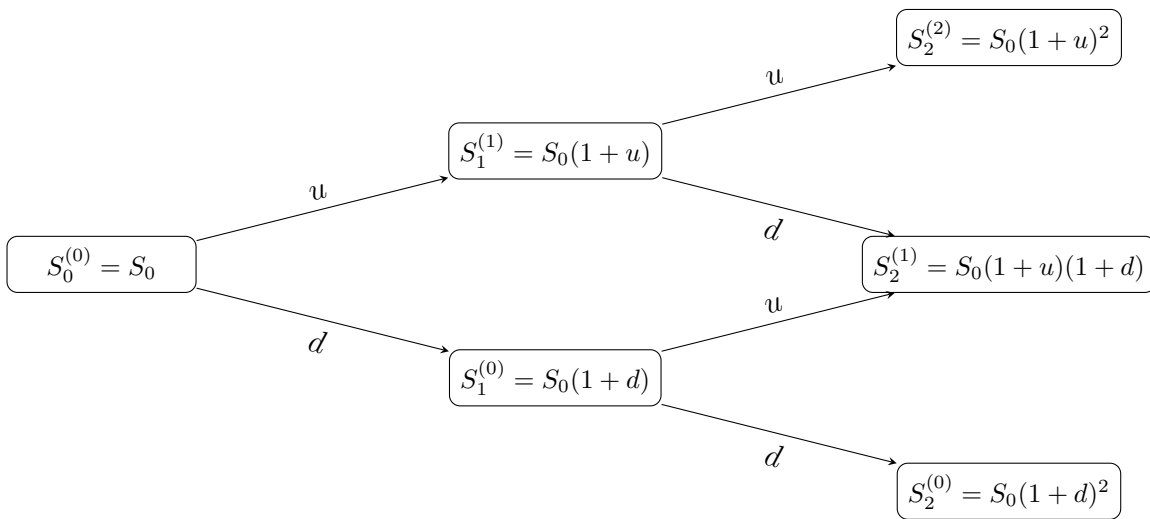


Figura 3.2: Árbol binomial de precios teórico para dos periodos.

Valoraremos los derivados trabajando desde los nodos finales en  $N$  hacia el origen, mediante la inducción hacia atrás.

### 3.2.3. Parámetros del modelo

Sabemos que el modelo se basa en que en el momento  $n$ , el precio  $S_{n+1}$  se obtiene a partir del precio  $S_n$  mediante la evolución al alza  $u$ , o a la baja  $d$ . Hemos supuesto

que  $-1 < d < u$ , para asegurar los precios positivos. Hasta ahora estos valores se han tratado como constantes arbitrarias. Estos valores deben reflejar el verdadero comportamiento de un activo en el mercado, por tanto debemos tener en cuenta la volatilidad del activo.

Cox, Ross y Rubinstein [6] establecieron que, si la volatilidad anual del activo es  $\sigma$  y  $\Delta t = \frac{T}{N}$  es la longitud del periodo, los factores  $u$  y  $d$  deben escogerse como:

$$1 + u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad 1 + d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{1 + u}.$$

Esta elección garantiza que cuando el número de pasos tiende a infinito,  $N \rightarrow \infty$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), la media y la varianza convergen a las de la distribución log-normal, asumida en el modelo continuo de Black–Scholes [17, 7].

### 3.2.4. Viabilidad del modelo

En el capítulo anterior hemos visto que para que un mercado sea viable es necesario que haya ausencia de arbitraje. Es por ello, que impondremos condiciones sobre  $u$ ,  $d$  y  $r$ , pues si el activo libre de riesgo pagara más que el rendimiento en el mejor escenario del activo con riesgo, o menos que en el peor escenario, el mercado estaría roto.

**Lema 3.2.1.**  $\tilde{S}$  es una  $\mathbb{P}$ -martingala si y solo si  $\mathbb{E}[T_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 1 + r$  para todo  $n \in \mathbb{T}^*$ .

*Demostración.* Efectivamente,  $\tilde{S}$  es una martingala si y solo si

$$\mathbb{E}[T_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \tilde{S}_{n-1} \iff \mathbb{E}\left[\frac{\tilde{S}_n}{\tilde{S}_{n-1}} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] = 1 \iff \mathbb{E}\left[\frac{T_n}{1+r} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] = 1.$$

□

**Proposición 3.2.2.** El modelo CRR es viable si y solo si  $d < r < u$ .

*Demostración.* ( $\implies$ ) Para demostrar que la viabilidad implica  $d < r < u$  es suficiente ver que si  $r \leq d$  o  $r \geq u$  podemos contruir un arbitraje. Por ejemplo, si  $r \leq d$  podemos pedir  $S_0$  en préstamos y comprar el activo. En la fecha de vencimiento tenemos

$$N_n = S_N - S_0(1+r)^N \geq [(1+d)^N - (1+r)^N]S_0 \geq 0 \quad \text{y} \quad [(1+u)^N - (1+r)^N]S_0 > 0.$$

( $\impliedby$ ) Si  $r \geq u$ , vendemos al descubierto el activo y ponemos las ganancias en la cuenta bancaria. En la fecha de vencimiento tenemos

$$S_0(1+r)^N - S_0(1+u)^N \geq 0 \quad \text{y} \quad S_0(1+r)^N - S_0(1+d)^N > 0.$$

Si  $r \in (d, u)$  podemos contruir  $\mathbb{P}^*$  como la probabilidad que hace que las variables  $T_0, \dots, T_n$  sean independientes e idénticamente distribuidas con la ley de Bernoulli sobre  $\{1 + d, 1 + u\}$  y tal que

$$p^* = \mathbb{P}^*(T_n = 1 + u) = \frac{r - d}{u - d} \quad \text{y} \quad 1 - p^* = \mathbb{P}^*(T_n = 1 + d) = \frac{u - r}{u - d}.$$

Notemos que bajo  $\mathbb{P}^*$

$$\mathbb{E}^*[T_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}^*(T_n) = (1 + d)(1 - p^*) + (1 + u)p^* = 1 + r$$

y por tanto utilizando el lema anterior,  $\mathbb{P}^*$  es una medida neutral al riesgo y el modelo de mercado CRR es viable [16, 18].  $\square$

### 3.3. Cartera replicante y ausencia de arbitraje

Conocemos la dinámica del comportamiento del precio de los activos subyacentes, pero, ¿cómo determinamos el precio justo de un derivado en un instante  $n$ ?

La idea del modelo CRR es construir una cartera de inversión ficticia [6, 11] (compuesta por el activo subyacente y el activo libre de riesgo, como hemos expuesto anteriormente) que replique el *payoff* de la opción en cualquier escenario futuro. Si conseguimos esa cartera, podemos concluir que el valor de la opción en el momento  $n$  debe ser igual al coste de construir la cartera. Esta conclusión viene dada por el principio de ausencia de arbitraje. Esta cartera recibe el nombre de cartera replicante.

#### 3.3.1. Cartera replicante

Consideremos un momento  $n$  cualquiera del árbol binomial y consideremos un nodo cualquiera asociado a este momento  $n$ . Supongamos que conocemos el valor de la opción en el próximo periodo  $n + 1$ . Para las dos posibles evoluciones del mercado que conocemos tenemos  $V_u$  y  $V_d$ , el valor de la opción si el activo sube ( $S_n(1 + u)$ ) y si el activo baja ( $S_n(1 + d)$ ), respectivamente.

El objetivo es encontrar la composición de una cartera  $\phi = (\alpha_n, \beta_n)$ , donde  $\alpha_n$  es el número de unidades del activo con riesgo y  $\beta_n$  es la cantidad invertida en el activo sin riesgo, de manera que el valor de esta cartera en  $n + 1$  coincida con el de la opción en sus dos posibles escenarios. Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \alpha_n S_n(1 + u) + \beta_n(1 + r) = V_u \\ \alpha_n S_n(1 + d) + \beta_n(1 + r) = V_d \end{cases}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y por la condición de viabilidad sabemos que  $u \neq d$ , por lo tanto, el sistema tiene una única solución. Si despejamos  $\alpha_n$  obtenemos:

$$\alpha_n S_n [(1 + u) - (1 + d)] = V_u - V_d \implies \alpha_n S_n (u - d) = V_u - V_d,$$

$$\alpha_n = \frac{V_u - V_d}{S_n(u - d)}. \quad (3.3.1)$$

Notemos que  $\alpha_n$  representa la sensibilidad del precio de la opción ante los cambios del precio del activo subyacente [7]. En finanzas se conoce como Delta ( $\Delta$ ) de la opción. Geométricamente, se corresponde a la pendiente de la recta que une los pagos  $V_u$  y  $V_d$ . Esta estrategia se denomina *delta-neutral*.

Una vez conocemos  $\alpha_n$ , la cantidad de activo con riesgo en la cartera, sustituimos en cualquiera de las ecuaciones originales y encontramos la inversión necesaria en el activo sin riesgo. Esta es:

$$\beta_n = \frac{V_u - \alpha_n S_n(1 + u)}{1 + r}. \quad (3.3.2)$$

### 3.3.2. Ausencia de arbitraje

Hemos construido una cartera cuyo *payoff* final replica exactamente los flujos de una opción. En un mercado eficiente y sin arbitraje, dos activos con los mismos flujos de caja deben tener el mismo precio en el presente. Por lo tanto, el valor de la opción en el momento  $n$ ,  $V_n$ , debe ser igual al valor actual de la cartera replicante:

$$V_n = \alpha_n S_n + \beta_n.$$

Sustituyendo con los valores obtenidos para  $\alpha_n$  y para  $\beta_n$ , obtenemos la siguiente expresión:

$$V_n = \frac{1}{1 + r} \left[ \left( \frac{r - d}{u - d} \right) V_u + \left( \frac{u - r}{u - d} \right) V_d \right]. \quad (3.3.3)$$

Más adelante identificaremos los coeficientes que multiplican a  $V_u$  y a  $V_d$ .

Este resultado conecta con la teoría de martingalas expuesta en el capítulo anterior. Hemos visto que para valorar la opción no necesitamos conocer las probabilidades reales del mercado  $\mathbb{P}$ . El *fair price* es el valor esperado de los pagos futuros, calculados bajo la medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^*$ , que veremos a continuación, y descontado a la tasa libre de riesgo  $r$ . Esta propiedad nos permitirá valorar opciones en árboles mediante la inducción hacia atrás, el algoritmo recursivo que detallaremos más adelante.

## 3.4. Medida neutral al riesgo

En capítulos anteriores hemos introducido las martingalas y cómo esta herramienta permite valorar activos financieros en modelos estocásticos. Recordemos que en un mercado completo, el precio de un activo replicable es igual al valor esperado descontando los pagos futuros, bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo. El precio de los activos depende mucho del riesgo de los mismos, y es que a más riesgo, más incertidumbre, y se exigen más beneficios.

En esta sección vamos a construir esta medida de probabilidad  $\mathbb{P}^*$  neutral al riesgo, bajo la cual el precio descontado de los activos se comporta como una martingala. El objetivo es encontrar una probabilidad  $p^*$  (la probabilidad de que el activo suba en el siguiente paso) de manera que el rendimiento esperado del activo coincida con la tasa libre de riesgo. Esto nos permitirá expresar el precio de cualquier derivado como una esperanza condicionada.

### 3.4.1. Derivación de la probabilidad neutral

Bajo la medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^*$ , el precio esperado del activo en el momento  $n + 1$ , dado el precio en  $n$ , debe ser igual al precio actual capitalizado al tipo libre de riesgo  $r$ . La expresión matemática es la siguiente:

$$\mathbb{E}^*[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = S_n(1 + r). \quad (3.4.1)$$

Veamos cómo obtenemos esta expresión. En un mercado sin arbitraje, los precios descontados deben ser martingalas y, como hemos definido anteriormente, el precio descontado es:

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n}{(1 + r)^n},$$

y queremos imponer que

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n.$$

Sustituimos con las definiciones de  $\tilde{S}_n$  y  $\tilde{S}_{n+1}$  y multiplicando ambos lados por  $(1 + r)^{n+1}$  obtenemos la condición de equilibrio en términos de precio de mercado:

$$\mathbb{E}^* \left[ \frac{S_{n+1}}{(1 + r)^{n+1}} \mid \mathcal{F}_n \right] = \frac{S_n}{(1 + r)^n} \iff \mathbb{E}^*[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = S_n(1 + r).$$

Esta expresión nos dice que en un mercado neutral al riesgo, la mejor predicción del precio de mañana es el precio de hoy capitalizado al tipo sin riesgo.

En el modelo binomial descrito hasta ahora, el precio de un activo  $S_n$  solo puede tomar dos valores en el momento  $n + 1$ :

- $S_n(1 + u)$  con probabilidad  $p^*$ .
- $S_n(1 + d)$  con probabilidad  $1 - p^*$ .

Si sustituimos estos valores en la esperanza, obtenemos:

$$S_n(1 + u)p^* + S_n(1 + d)(1 - p^*) = S_n(1 + r),$$

$S_n$  es un precio, por tanto podemos suponer que  $S_n > 0$  y podemos dividirlo en la ecuación y obtener:

$$(1 + u)p^* + (1 + d)(1 - p^*) = 1 + r,$$

aislando  $p^*$  obtenemos la siguiente expresión:

$$p^*[(1 + u) - (1 + d)] + 1 + d = 1 + r,$$

la fórmula fundamental de la medida neutral al riesgo en el modelo CRR [16, 13]:

$$p^* = \frac{r - d}{u - d} = \mathbb{P}^*(T_{n+1} = 1 + u) \quad (3.4.2)$$

Tenemos, por tanto, que:

$$1 - p^* = 1 - \frac{r - d}{u - d} = \frac{u - d - (r - d)}{u - d} = \frac{u - r}{u - d} = \mathbb{P}^*(T_{n+1} = 1 + d) \quad (3.4.3)$$

Notamos que, bajo  $\mathbb{P}^*$ , se cumple

$$\mathbb{E}^*[T_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}^*[T_n] = (1 + d)(1 - p^*) + (1 + u)p^* = 1 + r.$$

### 3.4.2. Interpretación y existencia

La expresión de  $p^*$  (3.4.2) nos dice que la probabilidad neutral al riesgo para valorar derivados depende de los parámetros del modelo  $u$  y  $d$  y del tipo de interés  $r$ , no depende de la probabilidad real de subida del mercado o de creencias subjetivas.

A continuación, comprobaremos que efectivamente este valor  $p^*$  es matemáticamente válido, es decir, comprobaremos que  $p^* \in (0, 1)$ . Si asumimos que  $d < r < u$ , que por la viabilidad del modelo vista en 3.2.4 sabemos que podemos asumir, observamos:

- $r > d \implies r - d > 0$ , por tanto, el numerador es positivo.
- $u > d \implies u - d > 0$ , por tanto, el denominador es positivo.
- $r < u \implies r - d > u - d$ , por tanto, el numerador es menor que el denominador.

Tenemos pues que  $p^* \in (0, 1)$ , y, siempre que no haya arbitraje en el mercado, la medida neutral al riesgo  $p^*$  existe y está bien definida. En el modelo binomial, esta medida es única, pues la hemos obtenido de un sistema lineal con solución única. Por el Segundo Teorema Fundamental, el mercado es completo (y cualquier derivado puede ser valorado y replicado) [15].

### 3.4.3. Propiedad martingala del precio

Una vez conocida la medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^*$  y dado que el mercado es completo y sin arbitraje, el precio descontado de cualquier activo debe comportarse como una martingala bajo esta medida. Esto aplica tanto al activo subyacente  $S$  como al derivado  $V$ . Si el activo subyacente descontado es una martingala, cualquier

cartera formada por ese activo y ese bono también lo es (particularmente, la cartera replicante). Como el derivado y la cartera replicante tienen los mismos flujos en el futuro, en un mercado sin arbitraje deben tener el mismo precio hoy y la misma evolución descontada.

Si definimos el proceso de precios descontados de la opción como:

$$\tilde{V}_n = \frac{V_n}{(1+r)^n},$$

la condición de martingala bajo  $\mathbb{P}^*$  impone que:

$$\mathbb{E}^*[\tilde{V}_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \tilde{V}_n.$$

Desarrollando la expresión, obtenemos:

$$\mathbb{E}^* \left[ \frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n \right] = \frac{V_n}{(1+r)^n}.$$

Multiplicando a ambos lados por la constante conocida  $(1+r)^{n+1}$ , podemos despejar el precio actual y obtener la expresión fundamental de valoración:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*[V_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \frac{1}{1+r} \left[ \left( \frac{r-d}{u-d} \right) V_u + \left( \frac{u-r}{u-d} \right) V_d \right] = \\ &= \frac{1}{1+r} [p^* V_u + (1-p^*) V_d]. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Esta ecuación nos dice que el valor de la opción en cualquier nodo es el valor esperado de sus pagos inmediatos descontados un periodo. Hemos llegado a la misma expresión que con el argumento de la cartera replicante y la ausencia de arbitraje, visto en 3.3.3.

En la siguiente sección utilizaremos esta propiedad para valorar a lo largo de todo el árbol binomial.

### 3.5. *Backward induction* en opciones europeas

Ahora que ya sabemos qué es una opción europea, qué dice el modelo de Cox–Ross–Rubinstein, qué es una cartera replicante, qué significa la ausencia de arbitraje y qué es la medida neutral al riesgo, podemos entrar en el tema de valoración de las opciones europeas. Recordemos la idea general desarrollada hasta ahora: el valor de la opción hoy es el valor esperado descontado de sus valores futuros, bajo la medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^*$ .

El proceso que utilizaremos para la valoración se conoce como inducción hacia atrás (*backward induction*) [14, 12]. Empezamos la valoración en la fecha de vencimiento, donde el valor de la opción es conocido, y se va retrocediendo nodo a nodo hasta llegar al instante inicial.

### 3.5.1. Valoración en el vencimiento

Supongamos que tenemos una opción europea con vencimiento  $N$ . Su valor en el momento de vencimiento  $N$  es igual a su *payoff* [7]:

- Para una opción de compra (*call*):

$$C_N^{(k)} = \max(S_N^{(k)} - K, 0), \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

- Para una opción de venta (*put*):

$$P_N^{(k)} = \max(K - S_N^{(k)}, 0), \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Sabemos, por contrato, que este va a ser el valor, por lo tanto, no interviene ninguna probabilidad.

### 3.5.2. Valoración en nodos anteriores

Una vez conocemos el valor en el momento  $N$ , podemos pasar a calcular el valor en el momento  $N - 1$ . El valor de la opción en cualquier nodo intermedio  $n$  (donde  $k$  representa el número de subidas acumuladas hasta  $n$ ) es la esperanza descontada de los valores futuros:

$$V_n^{(k)} = \frac{1}{1+r} \left[ p^* V_{n+1}^{(k+1)} + (1-p^*) V_{n+1}^{(k)} \right]. \quad (3.5.1)$$

Esto cálculo se repite para todos los nodos  $k = 0, 1, \dots, n$  y de manera iterativa para todos los momentos  $n = N - 1, N - 2, \dots, 0$ , obteniendo la recurrencia:

$$V_N \longrightarrow V_{N-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_0.$$

### 3.5.3. Fórmula cerrada de valoración

Los métodos recursivos son adecuados para implementarse computacionalmente. En esta sección obtendremos una fórmula más directa para el precio inicial, sustituyendo recursivamente la ecuación anterior.

Recordemos que la fórmula generalizada del modelo CRR del precio de una *call* europea en el instante 0 es:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \mathbb{E}^* \left[ (S_N - K)^+ \right] \quad (3.5.2)$$

donde la esperanza  $\mathbb{E}^*$  es bajo la medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^*$ ,  $(S_N - K)^+ = \max(S_N - K, 0)$ ,  $S_N = S_0(1+u)^k(1+d)^{N-k}$  y  $k$  es el número de subidas del activo en  $N$  pasos.

También tenemos que la distribución de  $S_N$  bajo la medida neutral al riesgo sigue una distribución binomial  $B(N, p^*)$ , por lo tanto, podemos expresar la esperanza como una suma ponderada [6, 12]:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} (S_0(1+u)^k(1+d)^{N-k} - K)^+. \quad (3.5.3)$$

Esta expresión es la fórmula generalizada de Cox–Ross–Rubinstein y converge a la fórmula de Black–Scholes cuando  $N \rightarrow \infty$  [16].

La fórmula para el *put* europeo es análoga, simplemente se cambia el *payoff*:

$$P_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} (K - S_0(1+u)^k(1+d)^{N-k})^+. \quad (3.5.4)$$

En todos los casos,

$$p^* = \frac{r-d}{u-d}, \quad 1-p^* = \frac{u-r}{u-d}.$$

### 3.5.4. Ejemplo numérico

Para ver el funcionamiento del algoritmo, consideramos la valoración de una opción de compra (*call*) con las siguientes características:

- Precio actual del activo:  $S_0 = 100$ .
- Precio de ejercicio:  $K = 100$ .
- Horizonte temporal:  $N = 3$  periodos.
- Tasa libre de riesgo por periodo:  $r = 3\%$  (0,03).
- Factores de rendimiento:  $u = 0,30$ ,  $d = -0,15$ .

Primero, calculamos la probabilidad neutral al riesgo:

$$p^* = \frac{r-d}{u-d} = \frac{0,03 - (-0,15)}{0,30 - (-0,15)} = 0,40, \quad 1-p^* = 1 - 0,40 = 0,60.$$

#### Paso 1: Árbol de precios del activo $S_n^{(k)}$

Calculamos la evolución del subyacente multiplicando por 1,30 (subida) o 0,85 (bajada):

**Periodo  $n = 0$ :**

- $S_0 = 100,00$

**Periodo  $n = 1$ :**

- $S_1^{(0)} = S_0(1 + d) = 100 \cdot 0,85 = \mathbf{85,00}$
- $S_1^{(1)} = S_0(1 + u) = 100 \cdot 1,30 = \mathbf{130,00}$

**Periodo  $n = 2$ :**

- $S_2^{(0)} = S_1^{(0)}(1 + d) = 85 \cdot 0,85 = \mathbf{72,25}$
- $S_2^{(1)} = S_1^{(0)}(1 + u) = S_1^{(1)}(1 + d) = 85 \cdot 1,30 = 130 \cdot 0,85 = \mathbf{110,50}$
- $S_2^{(2)} = S_1^{(1)}(1 + u) = 130 \cdot 1,30 = \mathbf{169,00}$

**Periodo  $n = N = 3$ :**

- $S_3^{(0)} = S_2^{(0)}(1 + d) = 72,25 \cdot 0,85 = \mathbf{61,41}$
- $S_3^{(1)} = S_2^{(1)}(1 + d) = S_2^{(0)}(1 + u) = 110,50 \cdot 0,85 = 72,25 \cdot 1,30 = \mathbf{93,93}$
- $S_3^{(2)} = S_2^{(1)}(1 + u) = S_2^{(2)}(1 + d) = 110,50 \cdot 1,30 = 169 \cdot 0,85 = \mathbf{143,65}$
- $S_3^{(3)} = S_2^{(2)}(1 + u) = 169 \cdot 1,30 = \mathbf{219,70}$

**Paso 2: Valoración de la opción  $C_n^{(k)}$**

Una vez calculados los valores de  $S_n^{(k)}$ , calculamos los valores en el vencimiento  $C_N^{(k)} = \max(S_N^{(k)} - K, 0)$ .

**Periodo  $n = N = 3$ :**

- $C_3^{(0)} = \max(61,41 - 100, 0) = \mathbf{0,00}$  (pues  $61,41 < 100$ )
- $C_3^{(1)} = \max(93,93 - 100, 0) = \mathbf{0,00}$  (pues  $93,93 < 100$ )
- $C_3^{(2)} = \max(143,65 - 100, 0) = \mathbf{43,65}$
- $C_3^{(3)} = \max(219,70 - 100, 0) = \mathbf{119,70}$

Para los siguientes nodos utilizamos la fórmula recursiva:

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{1 + r} \left[ p^* C_{n+1}^{(k+1)} + (1 - p^*) C_{n+1}^{(k)} \right].$$

**Periodo  $n = 2$ :**

- $C_2^{(0)} = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot C_3^{(1)} + 0,60 \cdot C_3^{(0)}] = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot 0,00 + 0,60 \cdot 0,00] = \mathbf{0,00}$
- $C_2^{(1)} = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot C_3^{(2)} + 0,60 \cdot C_3^{(1)}] = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot 43,65 + 0,60 \cdot 0,00] = \mathbf{16,95}$
- $C_2^{(2)} = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot C_3^{(3)} + 0,60 \cdot C_3^{(2)}] = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot 119,70 + 0,60 \cdot 43,65] = \mathbf{71,91}$

**Periodo  $n = 1$ :**

- $C_1^{(0)} = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot C_2^{(1)} + 0,60 \cdot C_2^{(0)}] = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot 16,95 + 0,60 \cdot 0,00] = \mathbf{6,58}$
- $C_1^{(1)} = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot C_2^{(2)} + 0,60 \cdot C_2^{(1)}] = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot 71,91 + 0,60 \cdot 16,95] = \mathbf{37,80}$

**Periodo  $n = 0$ :**

- $C_0 = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot C_1^{(1)} + 0,60 \cdot C_1^{(0)}] = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot 37,80 + 0,60 \cdot 6,58] = \mathbf{18,51}$

A continuación, vemos este ejemplo gráficamente:

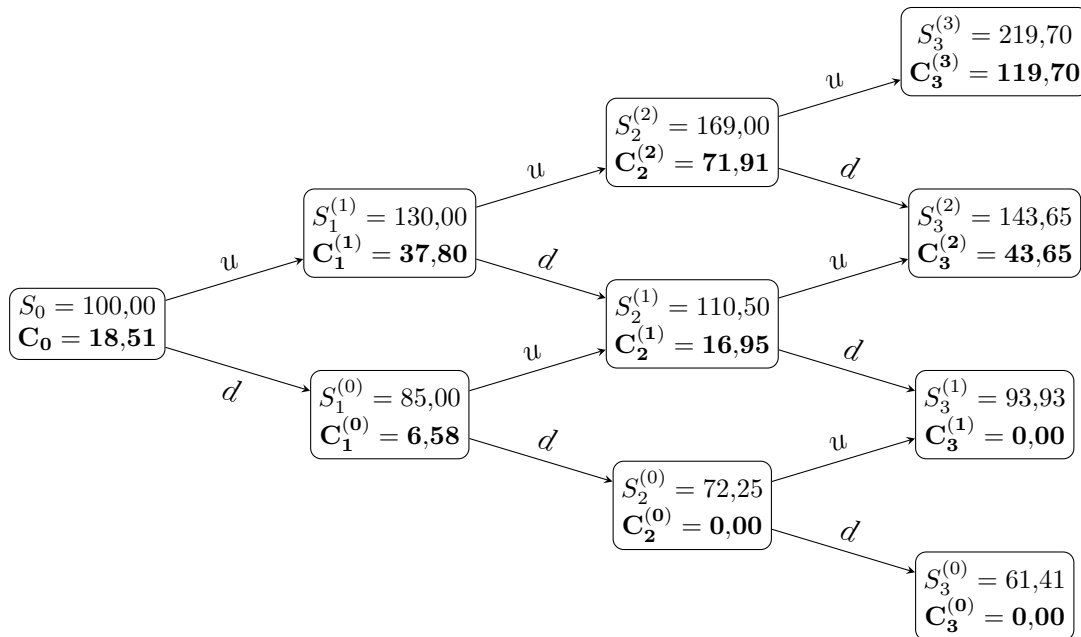


Figura 3.3: Árbol binomial para la valoración de la opción de compra (*call*) europea.

El precio justo de la opción *call* hoy es de **18,51** unidades monetarias. Este precio se corresponde al valor de la prima teórica. Para el comprador, es el precio que debe desembolsar en  $t = 0$  para adquirir el derecho de compra del activo subyacente a  $K = 100$ . Si el mercado es eficiente, este precio garantiza que no está pagando de más, es el valor actual de los beneficios esperados ajustados por el riesgo. Para el

vendedor (emisor), es la cantidad que necesita para poder construir la cartera de cobertura inicial y cubrirse ante cualquier movimiento futuro del mercado, asegurando que podrá hacer frente al pago sin incurrir en pérdidas netas.

### Comprobación cartera replicante

Cerramos el ejemplo con la composición de la cartera replicante para una trayectoria concreta. A medida que el precio del activo subyacente cambia, la sensibilidad de la opción varía, por lo que el vendedor debe ajustar su cartera en cada periodo. Esta cartera le servirá al vendedor de la opción para eliminar el riesgo de mercado.

Para ilustrar este proceso, analizamos la evolución de la cartera replicante siguiendo una trayectoria específica. Supongamos que el movimiento del mercado es **subida – bajada – subida**.

**Momento  $n = 0$ :** utilizando los valores obtenidos para el nodo  $n = 1$  ( $C_u = C_1^{(1)} = 37,80$ ,  $C_d = C_1^{(0)} = 6,58$ ) y los parámetros del modelo ( $u = 0,30$ ,  $d = -0,15$ ,  $S_0 = 100$ ), calculamos la Delta de la opción ( $\alpha_0$ ):

$$\alpha_0 = \frac{C_u - C_d}{S_0(u - d)} = \frac{37,80 - 6,58}{100(0,30 - (-0,15))} \approx 0,6938.$$

Esto significa que por cada opción vendida, el vendedor (emisor de la opción) debe comprar 0,6937 acciones del activo subyacente hoy.

En cuanto al activo libre de riesgo, obtenemos:

$$\beta_0 = \frac{C_u - \alpha_0 S_0(1 + u)}{1 + r} = \frac{37,80 - 0,6937 \cdot 100 \cdot 1,30}{1,03} \approx -50,86.$$

El valor negativo indica que se trata de un préstamo. Financieramente, la estrategia de cobertura consiste en:

- Comprar 0,6937 acciones (coste: 69,37 unidades monetarias).
- Pedir prestado al banco 50,86 unidades monetarias.

El coste neto de montar esta cartera es:

$$V_0(\phi) = 69,37 - 50,86 = 18,51.$$

Por la teoría de no arbitraje, este coste coincide exactamente con la prima  $C_0$  que hemos calculado mediante la valoración neutral al riesgo.

**Momento  $n = 1$  (subida):** el precio del activo sube a  $S_1^{(1)} = 130,00$ . Antes de realizar cualquier ajuste, determinamos el valor actual de la cartera constituida en el periodo anterior:

$$V_1(\phi) = \alpha_0 S_1^{(1)} + \beta_0(1 + r) = 0,6938 \cdot 130 - 50,86 \cdot 1,03 = \mathbf{37,80}.$$

Este valor coincide con el precio teórico de la opción en ese nodo,  $C_1^{(1)} = 37,80$ , por lo que la cobertura ha funcionado correctamente. Para poder mantener esta cobertura para el siguiente periodo debemos actualizar  $\alpha$  y  $\beta$  con los nuevos datos del árbol a partir de este nodo<sup>1</sup>:

$$\alpha_1 = \frac{C_2^{(2)} - C_2^{(1)}}{S_2^{(2)} - S_2^{(1)}} = \frac{71,91 - 16,95}{169,00 - 110,50} \approx \mathbf{0,9395}.$$

$$\beta_1 = V_1 - \alpha_1 S_1^{(1)} = 37,80 - 0,9395 \cdot 130,00 \approx \mathbf{-84,34}$$

La nueva estrategia de cobertura consiste en:

- Comprar más acciones (pasar de 0,6938 a 0,9395).
- Aumentar el préstamo (pasar de 50,86 a 84,34).

**Momento  $n = 2$  (bajada):** el precio del activo cae a  $S_2^{(1)} = 110,50$ . El valor de la cartera con los datos heredados del periodo anterior es:

$$V_2(\phi) = \alpha_1 S_2^{(1)} + \beta_1(1 + r) = 0,9395 \cdot 110,50 - 84,34 \cdot 1,03 = \mathbf{16,95}.$$

De nuevo, coincide con el valor de la opción en el nodo,  $C_2^{(1)} = 16,95$ . La nueva composición de la cartera para el último periodo es:

$$\alpha_2 = \frac{C_3^{(2)} - C_3^{(1)}}{S_3^{(2)} - S_3^{(1)}} = \frac{43,65 - 0,00}{143,65 - 93,93} \approx \mathbf{0,8778}$$

$$\beta_2 = V_2 - \alpha_2 S_2^{(1)} = 16,95 - 0,8778 \cdot 110,50 \approx \mathbf{-80,05}$$

La nueva estrategia de cobertura consiste en:

- Vender parte de las acciones (pasar de 0,9395 a 0,8778).
- Reducir la deuda (pasar de 84,34 a 80,05).

**Momento  $n = 3$  (subida):** el precio del activo sube a  $S_3^{(2)} = 143,65$ . El valor final de la cartera es:

$$V_3(\phi) = \alpha_2 S_3^{(2)} + \beta_2(1 + r) = 0,8778 \cdot 143,65 - 80,05 \cdot 1,03 = \mathbf{43,65}.$$

Coincide exactamente con el valor del *payoff* de la opción en el nodo,  $C_3^{(2)} = 43,65$ . Con el valor de la cartera, el vendedor puede hacer frente al pago de la opción ejercida por el comprador sin incurrir en pérdidas.

En el apéndice A.2 se pueden consultar los cálculos realizados en un libro Excel.

En el caso de las opciones europeas, el problema de valoración queda determinado por el pago en la fecha de vencimiento. La ausencia de ejercicio anticipado permite expresar el precio como una esperanza descontada bajo la medida neutral al riesgo y aplicar la inducción hacia atrás. En el siguiente capítulo veremos qué pasa cuando sí se permite el ejercicio anticipado.

<sup>1</sup>Para  $\beta_1$  utilizamos el valor de la cartera actual, 37,80.

# Capítulo 4

## Valoración de opciones americanas

En este capítulo introduciremos las opciones americanas y analizaremos sus principales diferencias con las europeas. Hasta ahora hemos trabajado con estas últimas, que únicamente permiten el ejercicio del derecho de compra o venta en la fecha de vencimiento  $N$ . No obstante, la mayoría de las opciones negociadas en el mercado son de tipo americano. Estas, a diferencia de las europeas, pueden ejercerse en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento. Esta flexibilidad introduce una dificultad adicional en la valoración. En cada momento del tiempo, el titular de la opción debe decidir si le conviene ejercer inmediatamente o mantener la opción *viva* esperando una mejor evolución del activo subyacente.

Por tanto, la valoración de una opción americana no consiste únicamente en calcular el valor esperado del pago futuro, sino también en determinar el momento óptimo de ejercicio, resolviendo un problema de optimización. Este problema lo resolveremos mediante la teoría de la Envolvente de Snell.

Este capítulo desarrolla la teoría de parada óptima, expuesta por Shreve [16]; la Envolvente de Snell, por Mordecki [13]; y la frontera de ejercicio libre, incluida en la tesis doctoral de Camaño [4].

### 4.1. Opciones americanas y ejercicio temprano

**Definición 4.1.1.** *Una opción americana de compra o de venta es un contrato financiero que otorga el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo subyacente a un precio predeterminado  $K$  (precio de ejercicio o strike). Se puede ejercer en cualquier momento  $n$  dentro del conjunto de tiempo discreto  $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, N\}$ .*

La valoración en este tipo de opciones se vuelve más compleja, pues no basta con calcular el pago esperado descontado. En cada nodo del árbol binomial se puede ejercer la opción y obtener el valor inmediato o mantener la opción *viva* esperando beneficios futuros mayores.

Es justamente por esta flexibilidad de ejercer o no que el valor de las opciones

americanas nunca puede ser inferior al de la correspondiente opción europea. Esto es, siendo  $V_{Am}$  y  $V_{Eur}$  el valor de la opción americana y europea, respectivamente, se cumple

$$V_{Am} \geq V_{Eur}. \quad (4.1.1)$$

La diferencia  $V_{Am} - V_{Eur} \geq 0$  se conoce como la **prima por ejercicio temprano** (*early exercise premium*).

El titular de una opción americana debe elegir un momento aleatorio  $\tau$  (tiempo de parada, formalmente definido en 2.4.5) para ejercer la opción y maximizar su beneficio. Denotamos por  $\mathcal{T}_{n,N}$  el conjunto de todos los tiempos de parada  $\tau$  tales que  $n \leq \tau \leq N$ . Este conjunto representa todas las estrategias de ejercicio posibles desde el momento  $n$  hasta el vencimiento  $N$ .

En el instante 0,  $V_0$  es el supremo de la esperanza descontada sobre todos los posibles tiempos de parada  $\tau \in \mathcal{T}_{0,N} \subset \{0, 1, \dots, N\}$  [4, 13, 16]:

$$V_0 = \sup_{\tau} \mathbb{E}^* \left[ \frac{G_{\tau}}{(1+r)^{\tau}} \right], \quad (4.1.2)$$

donde, de manera análoga al caso de las europeas,  $G_n$  es el *payoff* si se ejerce la opción en el momento  $n$ :

- Opción americana de compra (*call*):  $G_n = (S_n - K)^+$ .
- Opción americana de venta (*put*):  $G_n = (K - S_n)^+$ .

La dificultad está en encontrar el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$  que maximiza esta expresión.

A continuación veremos cómo en el caso de las opciones americanas de compra (*call*) sin dividendos esta flexibilidad no aporta valor extra si el tipo de interés es positivo.

**Proposición 4.1.2.** *Para una opción americana de compra (*call*) sobre un activo que no paga dividendos con un tipo de interés positivo ( $r > 0$ ), nunca es óptimo ejercerla antes del vencimiento. Por tanto,*

$$C_{Am} = C_{Eur}.$$

*Demostración.* Al ejercer una *call* de manera anticipada, en el momento  $n$ , el comprador paga el *strike*  $K$  en el momento  $n$  en vez de pagarlo en el futuro. Es entonces cuando se pierde el valor temporal del dinero (los intereses que generaría  $K$ ). También se pierde el seguro implícito que ofrece la opción contra caídas del precio. Por tanto, la opción *viva* vale más que su valor de ejercer.

El ejercicio temprano de opciones *call* solo tiene sentido si el activo subyacente paga dividendos lo suficientemente grandes como para compensar la pérdida del valor temporal. No obstante, para las opciones de venta *put*, el ejercicio temprano puede ser óptimo incluso sin dividendos, pues recibir el *strike*  $K$  permite reinvertirlo a la tasa  $r$  [11, 7].  $\square$

Sin embargo, si el activo paga dividendos discretos<sup>1</sup> durante la vida de la opción, el precio de la acción cae en la fecha ex-dividendo<sup>2</sup>. Aquí, podría ser óptimo ejercer una *call* justo antes de esa fecha.

## 4.2. La Envolvente de Snell y supermartingalas

La herramienta que permite resolver el problema global de optimización estocástica mencionado en la sección anterior, encontrar el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$  que maximiza la expresión 4.1.2, es la teoría de la Envolvente de Snell. Esta herramienta nos permite comparar el valor de ejercer y el valor de continuar en cada momento.

**Definición 4.2.1.** Sea  $(G_n)_{n=0}^N$  la secuencia de los payoffs de la opción. La **Envolvente de Snell**  $(Z_n)_{n=0}^N$  se define como el menor proceso adaptado que domina al proceso  $G = (G_n)_{n=0}^N$  y satisface [16, 18]:

$$Z_N = G_N,$$

y para todo  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ,

$$Z_n = \max \left( G_n, \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^* [Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] \right).$$

El proceso  $Z_n$  representa el valor de la opción americana en el momento  $n$ . En cada nodo del árbol binomial el valor de la opción se obtiene comparando dos cantidades:

- **El valor intrínseco**  $G_n$ , que corresponde al beneficio de ejercer.
- **El valor de continuidad**  $\frac{1}{1+r} \mathbb{E}^* [Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ , que corresponde al valor esperado descontado de mantener la opción un periodo más.

El instante óptimo de ejercicio es el primer tiempo en el que el valor intrínseco es mayor o igual que el valor de continuación.

Una propiedad clave de la Envolvente de Snell es su relación con la teoría de supermartingalas.

**Proposición 4.2.2.** El proceso de precios descontados de una opción americana

$$\tilde{Z}_n = \frac{Z_n}{(1+r)^n}$$

es una supermartingala bajo la medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^*$ . Es decir,

$$\mathbb{E}^* \left[ \tilde{Z}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right] \leq \tilde{Z}_n.$$

<sup>1</sup>Los dividendos discretos son dividendos con periodicidad definida.

<sup>2</sup>La fecha ex-dividendo es aquella a partir de la cual la acción ya no tiene derecho a recibir el dividendo anunciado (y si se compra la acción en esa fecha o posterior, el dividendo correspondiente se lo llevará el vendedor).

*Demostración.* Queremos demostrar que el proceso de precios descontados  $\tilde{Z}_n$  es una supermartingala bajo la medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^*$ . Partimos de la esperanza condicionada en  $n + 1$  dada la información en  $n$ :

$$\mathbb{E}^* \left[ \tilde{Z}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right] = \mathbb{E}^* \left[ \frac{Z_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n \right].$$

El factor de descuento  $(1+r)^{-(n+1)}$  es constante, por tanto, podemos extraerlo de la esperanza:

$$\mathbb{E}^* \left[ \tilde{Z}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right] = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \mathbb{E}^* [Z_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

Por definición del valor de la opción americana (4.2.1),  $Z_n \geq \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^* [Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ . Multiplicando la desigualdad por  $(1+r)^{-n}$ , que es siempre positivo, obtenemos:

$$\frac{Z_n}{(1+r)^n} \geq \frac{1}{(1+r)^n} \cdot \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^* [Z_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

Reagrupamos términos y sustituimos por la definición de  $\tilde{Z}_n$ :

$$\tilde{Z}_n \geq \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \mathbb{E}^* [Z_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

El lado derecho coincide con la expresión que hemos obtenido al principio para  $\mathbb{E}^* \left[ \tilde{Z}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right]$ . Concluimos pues,

$$\tilde{Z}_n \geq \mathbb{E}^* \left[ \tilde{Z}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right].$$

Con esto, queda demostrado que el proceso de precios descontados es una supermartingala [16, 18].  $\square$

Lo que quiere decir esta propiedad es que si el titular no ejerce la opción en el instante óptimo, el valor esperado descontado de la opción no aumenta. Retrasar el ejercicio más allá del instante óptimo implica una pérdida de valor relativo frente al activo libre de riesgo.

La Envolvente de Snell justifica el algoritmo de valoración por inducción hacia atrás en el modelo binomial.

La teoría de la Envolvente de Snell garantiza que existe el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$ .

**Definición 4.2.3.** *El instante de ejercicio óptimo  $\tau^*$  es el primer momento en el que el valor intrínseco de la opción iguala a su valor teórico:*

$$\tau^* = \min\{k \in \{0, \dots, N\} : Z_k = G_k\}$$

El tiempo de parada  $\tau_n^*$  (tiempo de óptimo a partir de  $n$ ) satisface la optimalidad:

$$Z_n = \mathbb{E}^* \left[ \frac{G_{\tau_n^*}}{(1+r)^{\tau_n^* - n}} \middle| \mathcal{F}_n \right].$$

De aquí obtenemos el criterio práctico de ejercicio utilizado en los algoritmos:

- **Región de continuación** ( $Z_k > G_k$ ): si el valor de la opción (Envolvente de Snell) es estrictamente mayor que el pago inmediato, es mejor mantener la opción viva. Pues ejercer implica renunciar al valor temporal.
- **Región de ejercicio** ( $Z_k = G_k$ ): si el valor de la opción coincide con el pago inmediato, el beneficio de esperar desaparece y la estrategia óptima es ejercer la opción en ese instante.

Es por eso que en el algoritmo de inducción hacia atrás, que veremos con más detalle a continuación, en cada paso se compara  $G_n$  con el valor de continuación y se escoge el máximo entre ambos. Se comprueba si el tiempo y precio actual pertenecen a la región de parada óptima.

Gráficamente, podemos visualizarlo en la Figura 4.1. La línea roja representa el *payoff* inmediato  $G_n(S)$ , mientras que la azul representa el valor de la opción americana  $Z_n(S)$ .

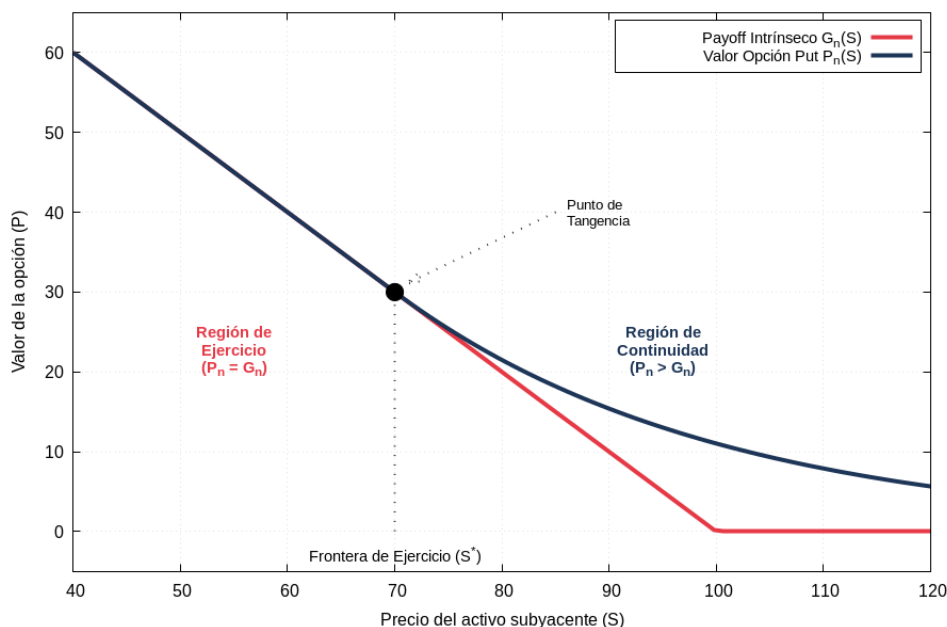


Figura 4.1: Valor de una opción *put* americana, *payoff* y frontera de ejercicio.

Observamos dos zonas diferenciadas por un punto crítico  $S^*$ :

1. **Región de ejercicio** (a la izquierda de  $S^*$ ): para precios del subyacente suficientemente bajos, el valor temporal desaparece. La opción pierde su convexidad y se comporta linealmente. Aquí,  $Z_n(S) = G_n(S)$ .
2. **Región de continuidad** (a la derecha de  $S^*$ ): la curva azul es convexa y se sitúa estrictamente por encima de la roja. La distancia vertical entre ambas curvas representa el valor temporal.

El punto de tangencia entre ambas funciones se conoce como la **frontera de ejercicio libre**, denotada por  $S^*$ .

Como observación adicional, en el límite continuo, al considerar pasos temporales cada vez más pequeños ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), el problema discreto de determinar el momento óptimo de ejercicio converge a un *problema de frontera libre*. Existe una función que depende del tiempo,  $S^*(t)$ , tal que, si el precio del subyacente cumple  $S_t \leq S^*(t)$ , la mejor opción es la de ejercer la opción de venta en ese momento concreto. En el modelo binomial, esta frontera se ve en los nodos del árbol en los que el valor intrínseco coincide con el valor de la opción [10, 4].

Una característica de la Envolvente de Snell es que el proceso de precios descontados detenido en el momento óptimo  $\tau^*$  se convierte en una martingala. Lo vemos en la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.4.** *El proceso detenido  $\tilde{Z}_{\min(n, \tau^*)}$  es una martingala bajo  $\mathbb{P}^*$  hasta el instante de ejercicio óptimo. Es decir, mientras sea óptimo mantener la opción viva ( $n < \tau^*$ ), el valor de la opción crece exactamente a la tasa libre de riesgo  $r$ :*

$$Z_n = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] \quad \text{para todo } n < \tau^*.$$

*Demostración.* Por definición,  $Z_n = \max(G_n, \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n])$  y el instante óptimo se define como  $\tau^* = \min\{k : Z_k = G_k\}$ .

Si estamos en un tiempo  $n$  anterior al ejercicio óptimo ( $n < \tau^*$ ), tenemos por definición de  $\tau^*$  que  $Z_n > G_n$ . La consecuencia directa de  $Z_n > G_n$  es que

$$Z_n = \max\left(G_n, \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]\right) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n],$$

como queríamos ver [16]. □

La condición de *óptimo* viene dada por esta dualidad supermartingala global – martingala local hasta el ejercicio. El proceso se comporta como una martingala en la región de continuidad (conserva valor) y se convierte en una supermartingala en la región de ejercicio (deja de crecer por encima de la tasa libre de riesgo).

En resumen, la Envolvente de Snell proporciona una herramienta para la valoración de opciones americanas y determinar el momento óptimo de ejercicio. Esta herramienta justifica de manera rigurosa el algoritmo de inducción hacia atrás utilizado en el modelo binomial, que será aplicado en la siguiente sección.

### 4.3. Algoritmo binomial para opciones americanas

Al igual que en el caso de las opciones europeas y como hemos visto en la sección anterior, podemos aplicar la inducción hacia atrás. La diferencia está que, en el caso de las opciones americanas, compararemos el valor de ejercer la opción con el valor de continuar.

Matemáticamente, si denotamos por  $V_n^{(k)}$  el valor de la opción en el periodo  $n$  con  $k$  subidas, el algoritmo se define por la siguiente recurrencia:

$$V_n^{(k)} = \text{máx} \left( G_n^{(k)}, \frac{1}{1+r} \left[ p^* V_{n+1}^{(k+1)} + (1-p^*) V_{n+1}^{(k)} \right] \right) \quad (4.3.1)$$

### 4.3.1. Valoración en el vencimiento

Supongamos que tenemos una opción americana con vencimiento  $N$ . Su valor en el momento de vencimiento  $N$  es igual a su *payoff*:

- Para una opción de compra (*call*):

$$C_N^{(k)} = (S_N - K)^+.$$

- Para una opción de venta (*put*):

$$P_N^{(k)} = (K - S_N)^+.$$

Sabemos, por contrato, que este va a ser el valor, por lo tanto, no interviene ninguna probabilidad. En este caso, el valor coincide con el de una opción europea.

### 4.3.2. Valoración en nodos anteriores

Una vez conocemos el valor en el momento  $N$ , podemos pasar a calcular el valor en el momento  $N-1$ . El valor de la opción en cualquier nodo intermedio  $n$  dependerá de lo que elija el titular de la opción. Aquí es donde entra la Envolvente de Snell. Lo lógico será quedarse con el máximo entre ejercer o esperar. Los posibles valores son:

- **Valor de continuación**  $V_{cont}$ : es el valor de mantener la opción viva un periodo más. Equivale, por tanto, al valor esperado descontado bajo la medida neutral al riesgo  $p^*$ :

$$V_{cont} = \frac{1}{1+r} \left[ p^* V_{n+1}^{(k+1)} + (1-p^*) V_{n+1}^{(k)} \right].$$

- **Valor de ejercicio**  $V_{ejer}$ : es el valor que se obtendría si se ejerciese la opción en el momento  $n$ :

$$V_{ejer} = G_n^{(k)}.$$

El valor de la opción americana en el nodo  $n$  es el máximo entre ambas cantidades (siempre buscando maximizar el beneficio):

$$V_n^{(k)} = \text{máx}(V_{ejer}, V_{cont}). \quad (4.3.2)$$

Al igual que en el caso de la valoración de las opciones europeas, esto se repite para todos los nodos  $k = 0, 1, \dots, n$  y de manera iterativa para todos los momentos  $n = N - 1, N - 2, \dots, 0$ , obteniendo la recurrencia:

$$V_N \longrightarrow V_{N-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_0.$$

Si en algún nodo se tiene que  $V_{ejer} > V_{cont}$  entonces el ejercicio temprano es óptimo. Es decir, el valor intrínseco supera a la esperanza del valor futuro descontado.

### 4.3.3. Ejemplo numérico

Para ver el funcionamiento del algoritmo y también ver la diferencia con la valoración europea, consideramos la valoración de una opción de venta (*put*) con las mismas características que en el ejemplo anterior<sup>3</sup> (3.5.4). A diferencia de la europea, en este caso debemos verificar en cada nodo si es mejor ejercer o continuar.

- Precio actual del activo:  $S_0 = 100$ .
- Precio de ejercicio:  $K = 100$ .
- Horizonte temporal:  $N = 3$  periodos.
- Tasa libre de riesgo por periodo:  $r = 3\%$  (0,03).
- Factores de rendimiento:  $u = 0,30$  (subida del 30%),  $d = -0,15$  (bajada del 15%).
- Probabilidad neutral al riesgo:  $p^* = 0,40$  y  $1 - p^* = 0,6$  (3.5.4).

#### Paso 1: Árbol de precios del activo $S_n^{(k)}$

Podemos recuperar los cálculos hechos para el caso de la opción europea.

Calculamos la evolución del subyacente multiplicando por 1,30 (subida) o 0,85 (bajada). Recordemos que  $(k)$  indica el número de subidas acumuladas.

**Periodo  $n = 0$ :**

- $S_0 = 100,00$

**Periodo  $n = 1$ :**

- $S_1^{(0)} = 85,00$
- $S_1^{(1)} = 130,00$

---

<sup>3</sup>Como hemos demostrado en la proposición 4.1.2, para una opción de compra sin dividendos el ejercicio temprano no es óptimo, por lo que el precio americano coincidirá con el europeo. La diferencia de valor se aprecia en las opciones de venta (*put*).

**Periodo  $n = 2$ :**

- $S_2^{(0)} = 72,25$
- $S_2^{(1)} = 110,50$
- $S_2^{(2)} = 169,00$

**Periodo  $n = N = 3$ :**

- $S_3^{(0)} = 61,41$
- $S_3^{(1)} = 93,93$
- $S_3^{(2)} = 143,65$
- $S_3^{(3)} = 219,70$

**Paso 2: Valoración de la opción por inducción hacia atrás**

Una vez calculados los valores de  $S_n^{(k)}$ , calculamos los valores en el vencimiento  $P_N^{(k)} = \max(K - S_N^{(k)}, 0)$

**Periodo  $n = N = 3$ :**

- $P_3^{(0)} = \max(100 - 61,41, 0) = 38,59$
- $P_3^{(1)} = \max(100 - 93,93, 0) = 6,08$
- $P_3^{(2)} = \max(100 - 143,65, 0) = 0,00$  (pues  $100 - 143,65 < 100$ )
- $P_3^{(3)} = \max(100 - 219,70, 0) = 0,00$  (pues  $100 - 219,70 < 100$ )

En  $n = N = 3$  el valor es intrínseco. Para los siguientes nodos utilizamos la Envoltente de Snell:

$$\begin{aligned}
 P_n^{(k)} &= \max \left( \underbrace{K - S_n^{(k)}}_{\text{Ejercer (G)}}, \underbrace{\frac{1}{1+r} \mathbb{E}^* [P_{n+1} | \mathcal{F}_n]}_{\text{Mantener (H)}} \right) = \\
 &= \max \left( \underbrace{K - S_n^{(k)}}_{\text{Ejercer (G)}}, \underbrace{\frac{1}{1+r} (p^* P_{n+1}^{(k+1)} + (1-p^*) P_{n+1}^{(k)})}_{\text{Mantener (H)}} \right).
 \end{aligned}$$

**Periodo  $n = 2$ :**

**Nodo  $k = 0$  ( $S_2^{(0)} = 72,25$ ):**

- Valor de Mantener ( $H$ ):

$$H_2^{(0)} = \frac{1}{1,03}[0,40 \cdot 6,08 + 0,60 \cdot 38,59] = 24,84$$

- Valor de Ejercer ( $G$ ):

$$G_2^{(0)} = \text{máx}(100 - 72,25, 0) = 27,75$$

- **Decisión (Snell):** como  $G > H$  ( $27,75 > 24,84$ ), se ejerce.

$$P_2^{(0)} = \mathbf{27,75}$$

En el caso de una opción europea, el valor habría sido 24,84, perdiendo valor.

**Nodo  $k = 1$  ( $S_2^{(1)} = 110,50$ ):**

- Valor de Mantener ( $H$ ):

$$H_2^{(1)} = \frac{1}{1,03}[0,40 \cdot 0,00 + 0,60 \cdot 6,08] = 3,54$$

- Valor de Ejercer ( $G$ ):

$$G_2^{(1)} = \text{máx}(100 - 110,50, 0) = 0$$

- **Decisión (Snell):** como  $H > G$ , mantenemos la opción.

$$P_2^{(1)} = \mathbf{3,54}$$

**Nodo  $k = 2$  ( $S_2^{(2)} = 169,00$ ):**

- Valor de Mantener ( $H$ ):

$$H_2^{(2)} = \frac{1}{1,03}[0,40 \cdot 0,00 + 0,60 \cdot 0,00] = 0,00$$

- Valor de Ejercer ( $G$ ):

$$G_2^{(2)} = \text{máx}(100 - 169, 0) = 0$$

- **Decisión (Snell):** mantenemos la opción.

$$P_2^{(2)} = \mathbf{0,00}$$

**Periodo  $n = 1$ :**

**Nodo  $k = 0$  ( $S_1^{(0)} = 85,00$ ):**

- Valor de Mantener ( $H$ )<sup>4</sup>:

$$H_1^{(0)} = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot 3,54 + 0,60 \cdot 27,75] = 17,54$$

- Valor de Ejercer ( $G$ ):

$$G_1^{(0)} = \text{máx}(100 - 85, 0) = 15,00$$

- **Decisión (Snell):** como  $H > G$ , mantenemos la opción.

$$P_1^{(0)} = \mathbf{17,54}$$

**Nodo  $k = 1$  ( $S_1^{(1)} = 130,00$ ):**

- Valor de Mantener ( $H$ ):

$$H_1^{(1)} = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot 0,00 + 0,60 \cdot 3,54] = 2,06$$

- Valor de Ejercer ( $G$ ):

$$G_1^{(1)} = \text{máx}(100 - 130, 0) = 0,00$$

- **Decisión (Snell):** como  $H > G$ , mantenemos la opción.

$$P_1^{(1)} = \mathbf{2,06}$$

**Periodo  $n = 0$ :**

**Nodo inicial ( $S_0 = 100,00$ ):**

- Valor de Mantener ( $H$ ):

$$H_0 = \frac{1}{1,03} [0,40 \cdot 2,06 + 0,60 \cdot 17,54] = 11,02$$

- Valor de Ejercer ( $G$ ):

$$G_0 = \text{máx}(100 - 100, 0) = 0,00$$

- **Decisión (Snell):** El valor de la opción americana es el de continuación.

$$P_0 = \mathbf{11,02}$$

---

<sup>4</sup>Usamos  $P_2^{(0)} = 27,75$  y no 24,83, el valor de continuación que tendríamos en el caso de las opciones europeas.

A continuación, vemos este ejemplo gráficamente:

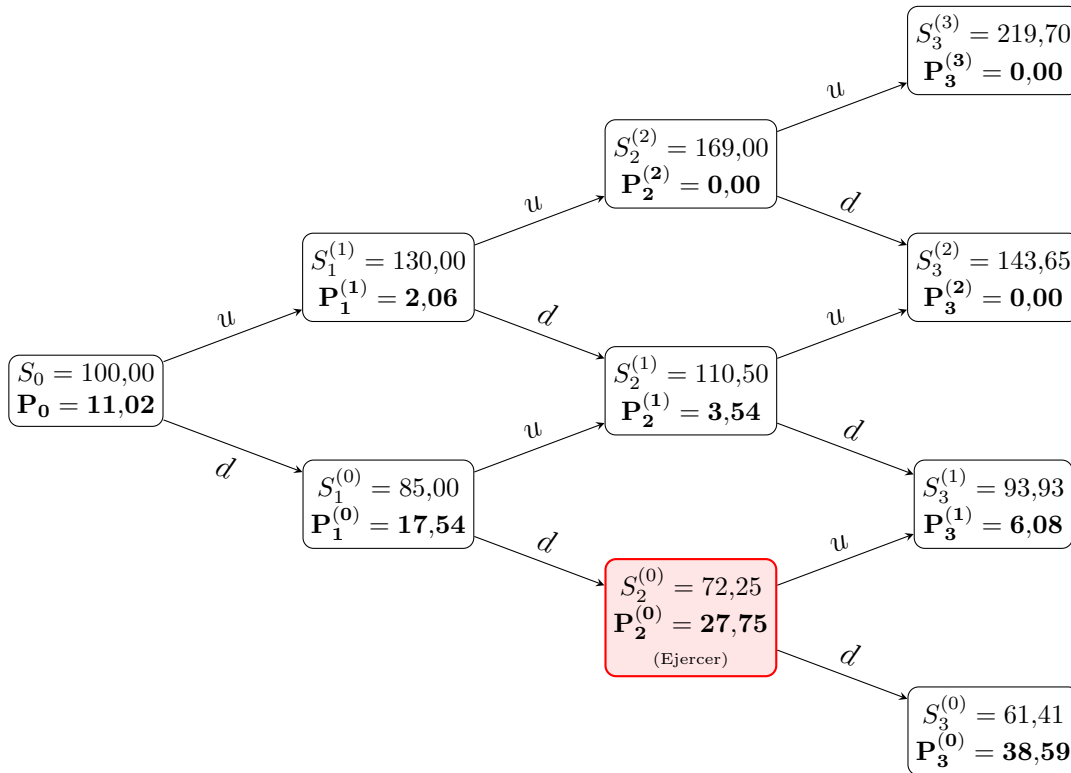


Figura 4.2: Árbol binomial para la opción de venta americana.

El nodo destacado en rojo ( $n = 2, k = 0$ ) indica dónde el valor de ejercicio inmediato (27,75) supera al valor de continuación (24,84), activando el ejercicio temprano según la Envoltente de Snell.

El precio justo de la opción americana *put* hoy es de **11,02** unidades monetarias. Este precio se corresponde al valor de la prima teórica. Para el comprador, es el coste en  $t = 0$  para adquirir el derecho a vender el activo a  $K = 100$ . Si el mercado es eficiente, este precio garantiza que no está pagando de más, es el valor actual de los beneficios esperados ajustados por el riesgo. Para el vendedor (emisor), es la cantidad que necesita para poder construir la cartera de cobertura inicial. Con 11,02 unidades monetarias, el vendedor puede comprar la cantidad adecuada del activo subyacente y bonos para cubrirse ante cualquier movimiento futuro del mercado, asegurando que podrá hacer frente al pago sin incurrir en pérdidas netas. Si hubiéramos valorado esta opción como una europea, en el nodo  $n = 2, k = 0$  no hubiéramos ejercido la opción y el resultado que hubiéramos obtenido habría sido de **10,03**<sup>5</sup>. La prima por ejercicio temprano es de

$$P_{Am} - P_{Eur} = 11,02 - 10,03 = \mathbf{0,99}.$$

<sup>5</sup>El nodo  $n = 2, k = 0$ , el único en el que se ejercería la opción antes y por tanto el único valor que cambia, es  $P_2^{(0)} = 24,84$ . Este cambio se arrastra al valor del siguiente nodo, obteniendo  $P_1^{(0)} = 15,84$ , y, por último,  $P_0^{(0)} = 10,03$ .

Este valor representa el beneficio adicional que aporta la flexibilidad de poder ejercer en cualquier momento.

### Comprobación cartera replicante

Al igual que en el caso europeo, cerramos el ejemplo con la composición de la cartera replicante. Como el procedimiento es análogo al caso europeo, únicamente haremos esta comprobación en el instante inicial  $n = 0$ . Esta cartera permite cubrir el riesgo hasta el siguiente periodo, siempre y cuando la opción no sea ejercida de manera anticipada.

Utilizando los valores obtenidos para el nodo  $n = 1$  ( $P_u = P_1^{(1)} = 2,06$ ,  $P_d = P_1^{(0)} = 17,54$ ) y los parámetros del modelo ( $u = 0,30$ ,  $d = -0,15$ ,  $S_0 = 100$ ), calculamos la Delta de la opción ( $\alpha_0$ ):

$$\alpha_0 = \frac{P_u - P_d}{S_0(u - d)} = \frac{2,06 - 17,54}{100(0,30 - (-0,15))} \approx -0,3440.$$

Esto significa que por cada opción vendida, el vendedor (emisor de la opción) debe vender 0,3440 acciones del activo subyacente hoy.

En cuanto al activo libre de riesgo, obtenemos:

$$\beta_0 = \frac{P_u - \alpha_0 S_0(1 + u)}{1 + r} = \frac{2,06 - (-0,3440) \cdot 100 \cdot 1,30}{1,03} = \frac{2,06 - (-44,72)}{1,03} \approx 45,42.$$

El valor positivo indica que se trata de un depósito (inversión). Financieramente, la estrategia de cobertura consiste en:

- Vender 0,3440 acciones (ingreso: 34,40 unidades monetarias).
- Invertir en el activo libre de riesgo 45,42 unidades monetarias.

El coste neto de montar esta cartera es:

$$P_0(\phi) = -34,40 + 45,42 = 11,02.$$

Este resultado coincide con el precio  $P_0$  calculado mediante la inducción hacia atrás y la Envolvente de Snell. Vemos reflejado el principio de no arbitraje y que el modelo es consistente.

En el apéndice A se pueden consultar los cálculos realizados en un libro Excel.

# Capítulo 5

## Aplicación práctica: valoración de una opción

En los capítulos anteriores hemos desarrollado el marco teórico necesario del modelo binomial de Cox–Ross–Rubinstein. Hemos expuesto la dinámica del precio del activo, la cartera replicante, la medida neutral al riesgo y las condiciones de no arbitraje y hemos visto las opciones europeas y americanas, la Envolverte de Snell y cómo la flexibilidad de las opciones americanas tiene un valor tangible (la prima por ejercicio temprano).

Dedicaremos este capítulo a la implementación computacional del modelo. Traduciremos las fórmulas abstractas a la realidad del mercado financiero. Para ello, hemos desarrollado un programa en lenguaje C que automatiza los cálculos. El proceso consiste en seleccionar un activo subyacente real, determinar los parámetros del modelo  $(u, d, p^*)$  a partir de los datos históricos del mercado obtenidos de Yahoo Finance [19] e Investing.com [8], y valorar una opción europea de compra (*call*) cotizada actualmente.

Por último, validaremos los resultados mediante una doble comparación con la fórmula analítica de Black-Scholes (validación teórica) y la prima real del mercado (validación empírica).

### 5.1. Selección del activo y obtención de datos

Para la selección del activo subyacente evaluamos distintas empresas cotizadas (Inditex, Banco Santander, NVIDIA y Apple Inc.) basándonos en la disponibilidad de datos, la estabilidad del activo, el reparto o no de dividendos y la volatilidad.

Tras compararlas, escogimos **Apple Inc. (AAPL)** ya que:

- **Inditex**: no encontramos información pública suficiente sobre las opciones.
- **Banco Santander**: tiene una rentabilidad por dividendo muy alta. Para poder trabajar con estas acciones, se debería modificar la fórmula cambiando  $r$  por  $r - q$ , donde  $q$  es la tasa de dividendos [7].

- **NVIDIA:** actualmente, debido al fuerte impulso y a la alta especulación del sector de la inteligencia artificial, estas acciones tienen una volatilidad elevada, y esto podría distorsionar la calibración del modelo.
- **Apple Inc.:** aunque reparte dividendos, para este ejercicio académico simplificaremos el modelo asumiendo que no hay reparto de dividendos durante la vida de la opción (3 meses)<sup>1</sup>; presenta una volatilidad moderada y existe abundante información en las plataformas financieras mencionadas anteriormente.

### 5.1.1. Datos del activo

- **Activo subyacente:** acciones de **Apple Inc.** (Ticker: AAPL).
- **Mercado en el que cotiza:** NASDAQ.
- **Fecha de obtención de datos:** 9 de diciembre de 2025.
- **Fuente de los datos:** plataforma Investing.com.

### 5.1.2. Cotización

- **Precio del subyacente ( $S_0$ ):** **277,40 USD.**
- **Opción seleccionada:** opción de compra (*call*).
- **Precio del ejercicio:**  **$K = 280,00$  USD.**
- **Fecha de vencimiento:** **20 de marzo de 2026.**
- **Precio de mercado ( $C_{mkt}$ ):** **14,46 USD.**
- **Volatilidad implícita del mercado ( $\sigma_{imp}$ ):** **24,84 %.**
- **Tasa libre de riesgo ( $r$ ):** **3,60 % anual<sup>2</sup>.**

## 5.2. Parámetros del modelo binomial

La correcta estimación de los parámetros es clave para poder hacer una valoración lo más realista posible.

*Nota sobre notación:* en los capítulos anteriores hemos utilizado capitalización discreta  $(1 + r)$ . Ahora, para mejor convergencia con Black–Scholes, utilizamos la versión continua  $R = e^{r\Delta t}$  [7, 16]. Estas dos son equivalentes cuando  $\Delta t$  es pequeño.

<sup>1</sup>Aunque Apple si que reparte dividendos, esta simplificación nos permitirá comparar directamente la convergencia teórica con la fórmula de Black–Scholes para opciones europeas.

<sup>2</sup>Utilizamos como referencia la rentabilidad de las Letras del Tesoro de EE. UU. a 3 meses (*T-Bills*).

### 5.2.1. Horizonte temporal y volatilidad

Calculamos el tiempo desde la fecha de valoración (9 de diciembre de 2025) hasta el vencimiento (20 de marzo de 2026), un total de 101 días. En años:

$$T = \frac{101}{365} \approx 0,2767 \text{ años.}$$

Hemos desarrollado un programa en C (Apéndice B.1) que calcula la volatilidad y el precio teórico de la opción mediante la inducción hacia atrás con datos del último año. El proceso del cálculo de la volatilidad ha sido el siguiente:

1. Apertura y lectura del archivo de texto (`precios.txt`, B.1) cuyo contenido son los precios de cierre diario del activo  $S_i$  correspondiente al año entre el 09/12/2024 y el 07/12/2025, con  $i = 0, 1, \dots, n$ , es decir,  $n + 1$  precios.
2. Cálculo de los rendimientos logarítmicos diarios. El modelo CRR trabaja con rendimientos compuestos continuamente, es por eso que calculamos los logarítmicos y no los aritméticos [7]:

$$u_i = \ln \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$S_i$  es el precio del día  $i$  y  $S_{i-1}$  es el precio del día anterior  $i - 1$ .

3. Cálculo de la media de los rendimientos logarítmicos previamente calculados.

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$$

4. Cálculo de la volatilidad diaria mediante la desviación típica muestral:
  - Varianza insesgada diaria:  $\sigma_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2$ .
  - Volatilidad diaria:  $\sigma_t = \sqrt{\sigma_t^2}$ .
5. Cálculo de la volatilidad anual bajo la premisa de que en el mercado financiero hay aproximadamente 252 días de negociación al año:  $\sigma = \sigma_t \times \sqrt{252}$

Los datos obtenidos tras ejecutar el programa han sido los siguientes:

- **Volatilidad diaria** ( $\sigma_t$ ): 2,0388 %.
- **Volatilidad anual** ( $\sigma$ ): 32,3648 %.

Estos son los datos que utilizaremos para construir el árbol binomial.

### 5.2.2. Parámetros del árbol

Con la volatilidad calculada por el programa, podemos calcular los parámetros del modelo binomial. Los pasos implementados en el programa son los siguientes:

1. Apertura y lectura del archivo de texto (`conf.txt`, B.3) cuyo contenido es el precio de *strike*  $K$ , la tasa libre de riesgo anual  $r$ , la cantidad de días hasta el vencimiento y el número de pasos en el árbol.
2. Cálculo del factor de crecimiento libre de riesgo ( $R$ ). Debemos ajustar la tasa anual  $r$  al tamaño del paso temporal  $\Delta t$  utilizando capitalización compuesta continua (representa el crecimiento de una inversión segura durante un paso del árbol):

$$R = e^{r\Delta t}.$$

3. Cálculo de los parámetros  $u$  y  $d$ , factores de movimiento:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}.$$

4. Cálculo de la probabilidad neutral al riesgo:

$$p^* = \frac{R - d}{u - d}.$$

Los parámetros obtenidos tras ejecutar el programa han sido los siguientes:

- **Factor de subida ( $u$ ):** 1,017171.
- **Factor de bajada ( $d$ ):** 0,983119.
- **Probabilidad neutral ( $p^*$ ):** 0,498669.

Una vez calculados estos parámetros, el programa procede a calcular los nodos del árbol mediante la inducción hacia atrás. Con un bucle se van calculando los valores de los nodos hasta llegar al primer nodo y obtener, por lo tanto, el valor teórico. En este caso, el resultado del precio teórico de la opción *call* de Apple Inc. ha sido de **18,8750 USD**. Recordemos que el precio real de mercado de dicha opción en el momento de la valoración era de 14,46 USD. El programa devuelve un archivo de texto con toda esta información (`report.txt`, B.4).

## 5.3. Resultados de la valoración y validación del modelo

El siguiente paso en este análisis es validar la fiabilidad de los cálculos. Para ello, contrastaremos el resultado con la fórmula de Black–Scholes y veremos las implicaciones del ejercicio anticipado (opción americana).

### 5.3.1. Valoración binomial y convergencia con Black–Scholes

Sabemos que cuando el número de pasos  $N$  es suficientemente grande, el modelo binomial converge al precio de Black–Scholes–Merton. La fórmula para una opción de compra europea es [3]:

$$C_{BS} = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Donde  $\mathcal{N}(\cdot)$  representa la función de distribución normal acumulada.

Utilizando los mismos parámetros de entrada calculados anteriormente:

- $S_0 = 277,40$
- $K = 280$
- $r = 3,60\%$
- $T = 0,2767$ .
- $\sigma_{hist} = 32,36\%$ .

Calculamos:

$$d_1 \approx 0,0888, \quad d_2 \approx -0,0814.$$

$$\mathcal{N}(d_1) \approx 0,5354, \quad \mathcal{N}(d_2) \approx 0,4676.$$

El precio resultante según Black–Scholes es:

$$C_{BS} = 277,40 \cdot 0,5354 - 280e^{-0,036 \cdot 0,2767} \cdot 0,4676 \approx \mathbf{18.8969 \text{ USD}}.$$

En el apéndice A.5 se pueden consultar los cálculos realizados en un libro Excel.

Al comparar con nuestro resultado binomial (18,8750 USD) con Black–Scholes (18,8969 USD), la diferencia es de apenas 0,0219 USD. Esto valida la correcta implementación del algoritmo y la convergencia del modelo discreto al continuo.

### 5.3.2. Justificación del tipo de opción

Las opciones cotizadas sobre las acciones de Apple Inc. son realmente de tipo americano. No obstante, dado que en nuestro modelo simplificado hemos asumido ausencia de dividendos ( $q = 0$ ) (5.1) podemos aplicar la proposición 4.1.2, y podemos afirmar que nunca será óptimo el ejercicio anticipado de una *call* sin dividendos. Por tanto, bajo la hipótesis del ejemplo, se cumple  $C_{Am} = C_{Eur}$  justificando la aplicación de la fórmula de Black–Scholes (válida únicamente para opciones europeas) como referente. La prima por ejercicio temprano es nula en este caso concreto.

## 5.4. Comparación con el mercado real

Finalmente, comparamos nuestros resultados teóricos con el precio real de cotización en el mercado NASDAQ<sup>3</sup>.

Método	Precio de la Opción ( <i>call</i> )
Precio de Mercado ( $C_{mkt}$ )	14.46 USD
Modelo CRR ( $C_0$ )	18.88 USD
Fórmula Black–Scholes ( $C_{BS}$ )	18.90 USD
<b>Diferencia (<math>C_0 - C_{mkt}</math>)</b>	<b>+4.42 USD</b>
<b>Diferencia (<math>C_{BS} - C_{mkt}</math>)</b>	<b>+4.44 USD</b>

Cuadro 5.1: Comparativa entre precio de mercado y modelos teóricos.

Observamos una sobrevaloración de los modelos teóricos respecto al mercado. La diferencia se explica por dos factores:

1. **Diferencia en la volatilidad histórica e implícita:** para el modelo hemos usado la volatilidad histórica, basada en el pasado, que ha sido del 32,36 %. El mercado cotiza la opción con una volatilidad implícita (expectativa de futuro) del 24,84 %, dato obtenido de Investing.com. Como el modelo tiene una volatilidad mayor (32,36 % > 24,84 %), aumenta la probabilidad de que la opción termine con un valor alto, ya que el rango de precios posibles finales es más amplio. Existe una relación directa entre volatilidad y precio: a mayor volatilidad ( $\sigma$ ), mayor es el precio de la opción *call* [7]<sup>4</sup>.
2. **Efecto de los dividendos:** al principio de la sección hemos comentado que Apple Inc. reparte dividendos, pero que considerábamos que durante los 3 meses que la opción estaba viva no había reparto de dividendos, es decir,  $q = 0$ . No obstante, los dividendos sí influyen porque reducen el precio de la acción, lo que disminuye el valor de una opción de compra. Al no descontar estos dividendos, obtenemos un precio teórico superior al real.

En conclusión, esta diferencia no se debe a un error matemático, sino que refleja que el mercado tiene unas expectativas de volatilidad más bajas para los próximos tres meses que la volatilidad observada en el mercado en el último año. Esto es, el mercado espera que Apple sea más estable (menos volátil) en los próximos 3 meses de lo que fue el año pasado.

<sup>3</sup>Valores redondeados a dos decimales.

<sup>4</sup>La sensibilidad del precio de una opción ante cambios en la volatilidad se define como Vega  $\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma} > 0$ . Por tanto, para una opción básica como la que estamos analizando, a mayor volatilidad, mayor precio.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Al principio de la memoria del trabajo nos planteábamos una pregunta que ha marcado el desarrollo de los mercados financieros modernos: ¿cómo determinar un precio justo de un activo financiero en un entorno de incertidumbre? A lo largo de la memoria hemos comprobado que la respuesta a esta pregunta no está en la especulación subjetiva, sino en la construcción rigurosa de modelos matemáticos basados en el principio de ausencia de arbitraje.

En este contexto, el modelo binomial de Cox–Ross–Rubinstein se presenta como una herramienta adecuada para la valoración de derivados financieros. Su formulación en tiempo discreto permite modelizar la evolución del precio del activo subyacente mediante árboles binomiales y facilita el planteamiento de los distintos escenarios del mercado. La introducción de la medida neutral al riesgo  $\mathbb{P}^*$  y el comportamiento de martingala de los precios descontados bajo esta medida permiten derivar fórmulas para valorar activos complejos con precisión.

En el caso de las opciones europeas, como solo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento, la valoración se simplifica. Esto permite centrarse en el valor final de la opción, el *payoff*, sin tener que decidir si conviene ejercer antes. Dentro del modelo binomial, el precio de una opción europea se obtiene construyendo una cartera que reproduce su pago final, así, el valor actual de la opción coincide con el coste de dicha cartera, de acuerdo con el principio de ausencia de arbitraje. Esto conecta con la valoración como esperanza condicionada descontada bajo la medida neutral al riesgo.

Para las opciones americanas, la flexibilidad del ejercicio anticipado introduce una dificultad adicional transformándolo en un problema de optimización estocástica. La Envolvente de Snell es la herramienta matemática clave para resolver este problema. El valor de la opción es la menor supermartingala que domina al *payoff*, lo que justifica el algoritmo de inducción hacia atrás y explica la aparición de la prima por ejercicio temprano. Esta formulación también nos permite interpretar las regiones de continuación y ejercicio, relacionando el modelo discreto con el concepto de frontera libre en el límite continuo.

En cuanto a la aplicación práctica, el análisis sobre una opción de compra de Apple Inc. ha permitido contrastar los resultados teóricos con la realidad del mercado

NASDAQ. El precio obtenido mediante el modelo binomial (18,88 USD) se acerca mucho al resultado de la fórmula de Black–Scholes (18,90 USD), confirmando la correcta implementación del algoritmo (y validando el código C) y demuestra que el modelo discreto converge al continuo cuando el número de pasos es suficientemente grande. Por otro lado, la diferencia observada respecto al precio de mercado real (14,46 USD) demuestra que los modelos son representaciones simplificadas de la realidad. La elección entre volatilidad histórica e implícita, el tratamiento de los dividendos y las expectativas del mercado introducen diferencias entre lo teórico y lo real.

Finalmente, desde una perspectiva personal y académica, este trabajo ha cumplido con el objetivo de profundizar en el ámbito de la modelización financiera. Considero que ha sido la integración perfecta entre el rigor del Grado en Matemáticas (necesario para comprender las  $\sigma$ -álgebras, las filtraciones y las martingalas) y la visión de mercado del Grado en Administración y Dirección de Empresas (necesaria para interpretar los resultados de Apple y el arbitraje).

En conclusión, el modelo binomial se presenta como una herramienta potente e intuitiva para la valoración de opciones financieras. Es una base sólida para el estudio de modelos continuos más avanzados, como Black–Scholes, y para extensiones que incorporen características adicionales del mercado, como dividendos, estructuras de tipo de interés más complejas o volatilidad no constante.

# Bibliografía

- [1] Banco Santander. (s.f.). Informe de Riesgos. Documentación corporativa.
- [2] Berrendero, J. R. (s.f.). *Probabilidad I*. Universidad Autónoma de Madrid. <https://matematicas.uam.es/joser.berrendero/MatProbII.html>
- [3] Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [4] Camaño, A. (2002). Opciones americanas, valoración numérica y cálculo de la frontera de valores críticos. *Tesis Doctoral*. Universidade da Coruña.
- [5] Corcuera, J. M. (s.f.). *Introducción a las Finanzas Cuantitativas*. Universidad de Barcelona. (Apuntes de curso).
- [6] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263.
- [7] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th global ed.). Pearson.
- [8] Investing.com. (2025). *Apple stock Price today — NASDAQ: AAPL Live*. Consultado el 09/12/2025 de <https://www.investing.com/equities/apple-computer-inc>
- [9] Knill, O. (s.f.). *Probability Theory and Stochastic Processes with Applications*. Harvard University. Recuperado de <https://people.math.harvard.edu/knill/probability/>
- [10] MEFF. (s.f.). *Opciones sobre Acciones Americanas*. BME. Recuperado de <https://www.meff.es/esp/Derivados-Financieros/Opciones-sobre-Acciones-Americanas>
- [11] Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183. <https://doi.org/10.2307/3003143>
- [12] Milanesi, G., & Tohmé, F. (2013). Árboles binomiales implícitos, momentos estocásticos de orden superior y valuación de opciones. *Revista de economía política de Buenos Aires*, 7(12).

- [13] Mordecki, E. (2006). *Modelos matemáticos en finanzas: Valuación de opciones*. Centro de Matemática, Facultad de Ciencias, Montevideo, Uruguay.
- [14] Rogers, L. C. G., & Talay, D. (1997). *Numerical methods in finance*. Cambridge University Press.
- [15] Sánchez Peralta, A. (2010). El Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (Teorema Fundamental de las Finanzas). *Tesis de Maestría*. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, México.
- [16] Shreve, S. E. (2012). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model* (1st ed., Vol. 1). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-22527-2>
- [17] Tagliafichi, R. A. (2003). La volatilidad, su cálculo y su incidencia en los precios de los derivados. *Cuadernos del CIMBAGE*, (6), 97-117.
- [18] Vives, J. (2023). Apuntes de la asignatura Modelización. Universidad de Barcelona.
- [19] Yahoo Finance. (2025). *Precio de acciones, noticias, cotización e historial de Apple Inc. (AAPL)*. Consultado el 09/12/2025 de <https://es.finance.yahoo.com/quote/AAPL/>

# Apéndice A

## Cálculos en Excel

A pesar de tener todos los cálculos exhaustivamente desglosados en el cuerpo del trabajo, he utilizado un Excel para verificar y agilizar estos cálculos. A continuación, se muestran las capturas de las hojas utilizadas.

### A.1. Ejemplo opción europea

En esta sección se detallan los cálculos hechos para el ejemplo de la opción de compra (*call*) europea.

CALL EUROPEA

$S_0$	100	$S_{1^*1}$	130	$S_{2^*2}$	169	$S_{3^*3}$	219,7
V	18,51514605	V	37,80186634	V	71,91262136	V	119,7
		$S_{1^*0}$	85	$S_{2^*1}$	110,5	$S_{3^*2}$	143,65
		V	6,583089829	V	16,95145631	V	43,65
				$S_{2^*0}$	72,25	$S_{3^*1}$	93,925
				V	0	V	0
						$S_{3^*0}$	61,4125
						V	0

d	0,85	-0,15
u	1,3	0,3
K	100	
r	0,03	
$p^{**}$	0,4	
$1-p^{**}$	0,6	

alfa_0	0,693750589	alfa_0*S_0*(1+u)	90,18757659
beta_0	-50,8599129	-50,8599129	

Coste neto	
cartera	18,51514605

Figura A.1: Cálculo en Excel para la *call* europea

alfa_1	0,939507095		alfa_2	0,877828054		
beta_1	-84,334056	-84,334056	beta_2	-80,0485437	-80,0485437	
Coste neto cartera 1	9,616653494		Coste neto cartera 2	7,734261741		
Cartera_1	37,80186634		Cartera_2	16,95145631	Cartera_3	43,65

Figura A.2: Cálculo en Excel para la cartera de la *call* europea

## A.2. Ejemplo opción americana

En esta sección se muestran los cálculos hechos para el ejemplo de la opción de venta (*put*) americana.

PUT AMERICANA				S_3_3	219,7000
				V	0,0000
		S_2_2	169,0000		
		V	0,0000	S_3_2	143,6500
S_0	100,0000	G	0,0000	V	0,0000
V	11,0177	H	0,0000		
G	0,0000	S_2_1	110,5000	S_3_1	93,9250
H	11,0177	V	3,5388	V	6,0750
		G	0,0000		
		H	3,5388	S_3_0	61,4125
		S_2_0	72,2500	V	38,5875
		V	27,7500		
		G	27,7500		
		H	24,8374		

d	0,85	-0,15
u	1,3	0,3
K	100	
r	0,03	
p <sup>*</sup>	0,4	
1-p <sup>*</sup>	0,6	

alfa_0	-0,34395325	alfa_0*S_0*(1+u)	-44,7139221
beta_0	45,4129897	45,41299	
Coste neto cartera	11,01766498		

Figura A.3: Cálculo en Excel para la *put* americana



# Apéndice B

## Programa en C y datos

En este capítulo se muestra el código fuente íntegro en lenguaje C y los datos utilizados.

### B.1. Código C

A continuación, se expone el código en lenguaje C desarrollado para el cálculo de la volatilidad histórica y la desviación estándar anualizada, así como la ejecución del algoritmo de valoración binomial.

```
1
2 #include <stdio.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #include <math.h>
5 #include <time.h>
6
7 #define MAX_DATOS 1000
8 #define DIAS_ANUAL 252
9
10 double max(double a, double b);
11
12 int main (void) {
13     FILE *precios, *conf, *salida;
14     double p[MAX_DATOS], suma_r = 0.0, media_r, suma_2 = 0.0, var, desv, vol, S0
15     ;
16     int n = 0, i, n_r; /*n representan las n + 1 observaciones*/
17
18     /* LECTURA DE LOS PRECIOS DEL FICHERO */
19     precios = fopen ("precios.txt", "r");
20     if (precios == NULL) {
21         printf("Error; No se encuentra el archivo 'precios.txt'\n");
22         return 0;
23     }
24     while (fscanf(precios, "%lf", &p[n]) != EOF && n < MAX_DATOS) {
25         n++;
26     }
27     fclose(precios);
```

```

28     n_r = n - 1; /* n_r es la cantidad de rendimientos que calculamos */
29
30     /* CÁLCULO DE RENDIMIENTOS LOGARÍMICOS */
31     double rend[n_r];
32     for (i = 0; i < n_r; i++) {
33         rend[i] = log (p[i] / p[i + 1]);
34         suma_r += rend[i];
35     }
36     S0 = p[0];
37
38     media_r = suma_r / n_r;
39
40     /* CÁLCULO DE LA VARIANZA MUESTRAL */
41     for (i = 0; i < n_r; i++) {
42         suma_2 += pow (rend[i] - media_r, 2);
43     }
44
45     var = suma_2 / (n_r - 1);
46     desv = sqrt (var);
47
48     /* ANUALIZACIÓN */
49     vol = desv * sqrt (DIAS_ANUAL);
50
51     /* PARÁMETROS DEL ÁRBOL */
52     double dt, up, down, r, prob, T, R, ST, CO, *V, K;
53     int N_pasos, T_dias, j;
54
55     /* LECTURA DE LOS PARÁMETROS BÁSICOS DEL FICHERO */
56     conf = fopen ("conf.txt", "r");
57     if (conf == NULL) {
58         printf("Error; No se encuentra el archivo 'conf.txt'\n");
59         return 0;
60     }
61
62     fscanf(conf, " %lf", &K);          /* strike */
63     fscanf(conf, " %lf", &r);          /* tasa */
64     fscanf(conf, " %d", &T_dias);     /* días */
65     fscanf(conf, " %d", &N_pasos);    /* pasos del árbol (N) */
66
67     fclose(conf);
68
69     T = T_dias / 365.;
70     dt = T / N_pasos;
71     R = exp(r * dt);
72     up = exp(vol * sqrt(dt));
73     down = 1. / up;
74     prob = (R - down) / (up - down);
75
76     /* COMPROBACIÓN TEÓRICA RÁPIDA DE p^* */
77     if (prob < 0 || prob > 1) {
78         printf("Error; La probabilidad p* no es válida (debe estar entre 0 y 1)
79         .\n");
80         printf("Verifica que dt sea suficientemente pequeño o la volatilidad no
81         sea extrema.\n");
82     }

```

```

81
82  /* PAYOFFS E INDUCCIÓN HACIA ATRÁS */
83  V = (double *) malloc ((N_pasos + 1) * sizeof (double));
84
85  if (V == NULL) {
86      printf("Error de memoria.\n");
87      exit(1);
88  }
89
90  for (i = 0; i <= N_pasos; i++) {
91      ST = S0 * pow(up, i) * pow(down, N_pasos - i);
92      V[i] = max(ST - K, 0.0);
93  }
94
95  for (i = N_pasos - 1; i >= 0; i--) {
96      for (j = 0; j <= i; j++) {
97          V[j] = 1. / R * (prob * V[j+1] + (1.0 - prob) * V[j]);
98      }
99  }
100
101  C0 = V[0];
102
103  salida = fopen ("report.txt", "w");
104  if (salida == NULL) {
105      printf("Error al crear el archivo de salida 'report.txt'\n");
106      return 0;
107  } else {
108      fprintf(salida, "REPORTE DE VALORACIÓN CRR\n");
109      fprintf(salida, "1. DATOS DEL ACTIVO (APPLE INC.)\n");
110      fprintf(salida, "    Precio Actual (S0):    %.4f USD\n", S0);
111      fprintf(salida, "    Datos analizados:        %d días\n", n);
112      fprintf(salida, "    Volatilidad Anual:      %.4f%%\n\n", vol * 100);
113
114      fprintf(salida, "2. CARACTERÍSTICAS DE LA OPCIÓN\n");
115      fprintf(salida, "    Tipo:                    CALL Europea\n");
116      fprintf(salida, "    Strike (K):              %.2f USD\n", K);
117      fprintf(salida, "    Vencimiento:            %d días (%.4f años)\n",
T_dias, T);
118      fprintf(salida, "    Tasa libre riesgo (r):  %.2f%%\n\n", r * 100);
119
120      fprintf(salida, "3. PARÁMETROS DEL MODELO (N=%d)\n", N_pasos);
121      fprintf(salida, "    Delta t (dt):           %.6f\n", dt);
122      fprintf(salida, "    Factor subida (u):       %.6f\n", up);
123      fprintf(salida, "    Factor bajada (d):       %.6f\n", down);
124      fprintf(salida, "    Prob. Neutral (p*):     %.6f\n\n", prob);
125
126      fprintf(salida, "    PRECIO TEÓRICO:         %.4f USD\n", C0);
127
128      fclose(salida);
129      printf("Reporte generado exitosamente en 'report.txt'\n");
130  }
131
132  free(V);
133
134  return 0;

```

```

135 }
136
137 double max(double a, double b) {
138     if (a > b) {
139         return a;
140     } else {
141         return b;
142     }
143 }

```

Listing B.1: Algoritmo de cálculo de volatilidad histórica y valoración binomial

## B.2. Datos históricos Apple Inc.

A continuación se listan los datos descargados de *Investing.com*. Son los precios de cierre utilizados para el cálculo de la volatilidad histórica [8].

Cuadro B.1: Precios históricos de cierre de Apple Inc. (09/12/2025 - 09/12/2024)

277.3	262.77	238.47	210.16
277.89	262.24	229.72	209.11
278.78	252.29	232.14	208.62
280.7	247.45	232.56	211.16
284.15	249.34	230.49	212.41
286.19	247.77	229.31	211.14
283.1	247.66	227.16	210.01
278.85	245.27	227.76	209.95
277.55	254.04	224.9	213.55
276.97	258.06	226.01	212.44
275.92	256.48	230.56	207.82
271.49	256.69	230.89	205.17
266.25	258.02	231.59	201.08
268.56	257.13	232.78	201.
267.44	255.45	233.33	201.56
267.46	254.63	229.65	200.3
272.41	254.43	227.18	201.5
272.95	255.46	229.35	201.
273.47	256.87	220.03	196.58
275.25	252.31	213.25	195.64
269.43	254.43	202.92	198.42
268.47	256.08	203.35	196.45
269.77	245.5	202.38	199.2
270.14	237.88	207.57	198.78
270.04	238.99	209.05	202.67
269.05	238.15	211.27	201.45
270.37	236.7	214.05	203.92
271.4	234.07	213.88	200.63
269.7	230.03	213.76	202.82
269.	226.79	214.15	203.27
268.81	234.35	214.4	201.7
262.82	237.88	212.48	200.85
259.58	239.69	211.18	199.95
258.45	239.78	210.02	200.42

200.21	202.52	235.93	222.64
195.27	198.15	238.03	229.98
201.36	190.42	241.84	228.26
202.09	198.85	237.3	237.87
206.86	172.42	240.36	233.28
208.78	181.46	247.04	234.4
211.26	188.38	247.1	236.85
211.45	203.19	245.55	242.7
212.33	223.89	245.83	242.21
212.93	223.19	244.87	245.
210.79	222.13	244.47	243.36
198.53	217.9	244.6	243.85
197.49	223.85	241.53	250.42
196.25	221.53	236.87	252.2
198.51	223.75	232.62	255.59
198.89	220.73	227.65	259.02
205.35	218.27	227.63	258.2
213.32	214.1	233.22	255.27
212.5	215.24	232.47	254.49
211.21	212.69	232.8	249.79
210.14	214	228.01	248.05
209.28	213.49	236	253.48
208.37	209.68	237.59	251.04
204.6	216.98	239.36	248.13
199.74	220.84	238.26	247.96
193.16	227.48	229.86	246.49
196.98	239.07	222.78	247.77
194.27	235.33	223.66	246.75
202.14	235.74	223.83	

### B.3. Documento de configuración

El programa lee los parámetros de entrada desde el archivo `conf.txt`. Este incluye el valor del *strike*  $K$ , el valor de la tasa anual libre de riesgo  $r$ , el número de días de vencimiento de la opción (101 días entre el 09/12/2025 y el 20/03/2026) y el número de nodos del árbol.

```

1 280.00 /* K strike */
2 0.036 /* r tasa */
3 101 /* T días */
4 100 /* N pasos del árbol */

```

Listing B.2: Documento de configuración

### B.4. Documento de resultados

Por último, al ejecutar el programa, se crea un documento de resultados con los datos más relevantes.

```

1 REPORTE DE VALORACIÓN CRR
2 1. DATOS DEL ACTIVO (APPLE INC.)
3 Precio Actual (S0): 277.3000 USD
4 Datos analizados: 251 días

```

```
5 Volatilidad Anual:      32.3648%
6
7 2. CARACTERÍSTICAS DE LA OPCIÓN
8 Tipo:                  CALL Europea
9 Strike (K):            280.00 USD
10 Vencimiento:          101 días (0.2767 años)
11 Tasa libre riesgo (r): 3.60%
12
13 3. PARÁMETROS DEL MODELO (N=100)
14 Delta t (dt):         0.002767
15 Factor subida (u):    1.017171
16 Factor bajada (d):    0.983119
17 Prob. Neutral (p*):   0.498669
18
19 PRECIO TEÓRICO:       18.8758 USD
```

Listing B.3: Reporte de salida (report.txt)