Trabajo final de grado

GRADO DE MATEMÁTICAS

Facultad de Matemáticas e Informática
Universidad de Barcelona

# El pre-cálculo diferencial en las cartas de Pierre de Fermat.

Autor: Mariana Ramírez Castro

| | |
|---|---|
| Director: | Dr. Carlos Dorce i Polo |
| Realitzado en: | Departamento de Matemáticas e Informática. |
| Barcelona, | 20 de junio de 2019 |

## Abstract

Pierre de Fermat developed a method to obtain maxima and minima of a given curve. His findings are known from his correspondance with Mersenne and Roberval among others. The analysis of his method allows us to conclude that Fermat approached to the concept of limits and he was a pioneer in writing a method to determinate maxima and minima from a geometric perspective.

## Resumen

Pierre de Fermat desarrolló un método sobre el cálculo de máximos y de mínimos de una curva dada. Se conoce de sus hallazgos a través de la correspondencia sostenida con Mersenne, Roberval entre otros. El análisis de su método permite afirmar que Fermat se aproximó al concepto de limite y fue pionero al desarrollar un método para calcular máximos y mínimos desde un punto de vista geométrico.

## Résumé

Pierre de Fermat a développé une méthode de calcul de maximums et de minimums d'une courbe donnée. Nous connaissons aujourd´hui ses découvertes à travers de ses correspondances avec Mersenne et Roberval, entre autres. L'analyse de sa méthode nous a permis d'affirmer que Fermat s'est rapproché de près du concept de limite et fût pionnier dans le dévelopement d'une méthode pour calculer maximums et minimums d'un point de vue géométrique.


2010 Mathematics Subject Classification. 01A45, 26A06

## Agradecimientos

A mi profesor Walter Beyer por inspirarme la pasión por la historia de las matemáticas.

Al profesor Carlos Dorce i Polo guiarme en este duro camino.

A Vincent por su paciencia infinita.

A Carlos Arturo Cruz por ayudarme sin esperar nada a cambio.

A mis compañeros de estudio Isaac, Clara, Jose Carlos, Neus, Gemma y Natxo por creer en mi y darme ánimos.

# Índice

# 1. Introducción

Las definiciones fundamentales del cálculo, el concepto de derivada y el de integral, son hoy en día conceptos claramente presentados en los libros de textos de cálculo, y a su vez, las operaciones que estos conllevan están totalmente sistematizadas en la práctica de la enseñanza; da la impresión que este conocimiento nos pertenece de forma natural. Parece entonces fácil olvidar la dificultad con la que estos conceptos básicos han sido desarrollados [3].

En la actualidad, se sabe que Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) concibieron la idea fundamental del cálculo diferencial e integral. Tenemos el teorema fundamental del cálculo, que establece que la diferenciación y la integración son operaciones inversas y más precisamente, relaciona los valores de antiderivadas con integrales definidas. Sin embargo, el cálculo es el resultado de un largo tren de pensamientos matemáticos, desarrollados lentamente y con gran dificultad por muchos pensadores. Boyer [3] afirma que no es de extrañar que otros matemáticos hubieran hecho trabajos de importancia relacionados con esta rama de las matemáticas entre ellos Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665).

Para Boyer [3], Pierre de Fermat es uno de los más grandes matemáticos franceses del siglo XVII. Este es conocido por su pequeño teorema, que es uno de los teoremas clásicos de teoría de números relacionado con la divisibilidad. Por otra parte, es conocido por los matemáticos por su último gran teorema, el cual permaneció sin demostración aproximadamente 350 años. Además, se le adjudica su contribución al cálculo por su *Methodus ad disquirendam maxima et minimam*, casi había llegado al cálculo diferencial tanto que Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) no tiene reparo en considerar a Fermat como 'el primer inventor del nuevo cálculo'. La opinión de Lagrange relativa a la influencia de Fermat sobre Leibniz, en la invención del Cálculo Diferencial parece tener confirmación hasta en el título mismo del informe en que Leibniz expone sus principios: *Nova methode pro maximis et minimis*, que publicó en las *Actas Eruditorum* en 1684.

Por otra parte, en el *Précis de Œuvres mathematiques de Pierre Fermat, et de l'arithmetique de Diophante* [4], en su introducción Fermat es presentado por los primeros geómetras de la época, como el inventor del cálculo infinitesimal y como el fundador de la teoría de números. Según esta obra, sus descubrimientos geométricos y sus teoremas aritméticos son hoy en día (para aquel entonces 1853) tema de investigación.

Sin embargo, es imposible adquirir una idea exacta de los trabajos y de los descubrimientos de Fermat. Debido a que se encuentran en extractos de citaciones incompletas de sus obras, las cuales se pueden encontrar en obras de análisis estimadas de la época.

En la primera parte del mencionado *Précis* se presenta un resumen completo de las contribuciones hecha por Fermat. Esta contiene: *Opera Varia*, publicada en Toulouse en 1679 por Clement-Samuel Fermat, hijo del autor. La primera memoria, bajo el título d'*Introduction aux liuex plans* (Introducción a los lugares del plano), versa sobre un tratado conciso de geometría analítica, comprende la teoría de las líneas rectas y curvas de segundo grado. No es seguro que sus hallazgos sean anteriores a los de René Descartes (1596-1650) quien publica *La géométrie* en 1637. Sin embargo hay cartas de Fermat que evidencian que en 1636 él estaba en posesión de estos métodos analíticos.

Además, también se conservan registros de la teoría de máximos, de tangentes y sobre cuadraturas. Según Brassine [4]:

> no parece ser la parte más importante de la *Opera Varia*. No obstante, se afirma, que fueron escritos antes de la geometría de Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647, publicado en Bolonia, 1653), y antes de la publicación de *Méthode des tangentes* de John Wallis (1616-1703) y de Sluze, le dan los derechos a Fermat por la invención del cálculo diferencial y del cálculo integral.[2]

Además, argumenta:

> Dentro de este tratado de *maximis et de tangentes*, el ilustre geómetra añade a la abscisa una indeterminada $e$ infinitamente pequeña, y como resultado de ese cálculo, sin conservar que es infinitamente pequeño de primer orden, aunque después elimina los infinitamente pequeños de orden superior. Esto, aplicado de seguido y con rara elegancia de su método a cuestiones muy difíciles, tales como la determinación de la tangente de la cicloide, la búsqueda del centro de gravedad del paraboloide, los puntos de inflexión, etcétera. Decartes mismo, quien no reconocía el rigor del método de tangentes, después de una larga polémica, acepta que su método es exacto aunque poco ingenioso.

A su vez, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) y Pierre-Simon Laplace (1749-1827) remontan al método de máximos y tangentes, el origen del cálculo infinitesimal pero estos dos ilustres sabios no citan el tratado de cuadraturas que completa el análisis diferencial de Fermat. Por otro lado, también se sabe que el trabajo de Fermat se ve influenciado por François Viète (1540-1603).

En la era de la digitalización, se puede tener acceso a la obra de Pierre de Fermat a través de la pagina web de la Biblioteca Nacional de Francia. Allí se puede acceder a cuatro tomos donde se recoge de forma basta y amplia su obra y sus cartas. A grandes rasgos se puede describir el contenido de estos tomos organizados de la forma siguiente: en el tomo I [9] se encuentran sus obras matemáticas diversas siendo de interés para esta investigación el Tratado de máximos y mínimos y además de encontrarse Observaciones sobre la aritmética de Diofanto de Alejandría (c. s. III); en el segundo tomo [10] se encuentra parte de su correspondencia sostenida con el Marin Mersenne (1588-1648), René Descartes, Gilles Personne de Roberval (1602-1675) entre otros desde 1636 hasta 1665. En el tomo tercero [11] se encuentra la traducción del latín de la obra de Fermat expuesta en el primer tomo. En el último tomo [12] se halla el suplemento de la correspondencia de Fermat, *La Discussion sur la méthode de maximis et minimis* entre Descartes, Mydorge, Roberval, Desargues, Mersenne y Hardy, extractos de la correspondencia entre matemáticos de la época en relación con Fermat, Notas matemáticas, siendo importante señalar que aparece *Sur le mêthode de maximis et minimis*.

## 1.1. El proyecto

Por lo previamente expuesto, se posee suficiente información para revisar las contribuciones de Fermat, siendo posible analizar su trabajo y someter a discusión las cuestiones por las cuales Fermat podría ser considerado el padre del cálculo infinitesimal.

En este trabajo se considera pre-cálculo al conocimiento generado durante al período previo al descubrimiento del cálculo, necesario para llegar a este concepto. Se pretende

[2] Traducción propia.

a través de esta memoria describir la contribución de Pierre de Fermat al desarrollo del concepto del cálculo analizando su Tratado de Máximos y Mínimos publicado por Mersenne producto de la correspondencia sostenida por el autor con los matemáticos de la época.

## 1.2. Metodología

A lo largo del trabajo se han consultado los libros que se presentan en la bibliografía. La obra de Fermat esta traducida del latín al francés y el tratado de los máximos y mínimos se puede encontrar traducido al catalán [7]. No obstante, dado que el francés y latín son los idiomas en que Fermat escribía, con frecuencia se presentan citas en el idioma original. De esta manera, lectores con dominio de estos idiomas podrán conocer directamente en el idioma del Senador de Toulouse parte de su metodología.

## 1.3. Estructura de la Memoria

Este trabajo se ha estructurado de la siguiente forma, primero se desarrolla un capítulo donde se explica el contexto histórico en el que vive nuestro protagonista y las personas con quien hace vida. Con este capítulo se busca aclarar por qué Fermat no realizó publicaciones, quién incentiva las ideas de sus ideas y cómo es reconocido dentro del círculo matemático.

Posteriormente, en la tercera parte se presenta el tratado de máximos y mínimos publicado por Mersenne que versa sobre el trabajo de Fermat recogido en sus cartas, dedicando este capítulo a explicar algunos de los problemas y describir como se realizaría por un estudiante del siglo XXI; también se analiza qué hacía que el método de Fermat funcionara. También, se incluye un aporte de Fermat no publicado pro Mersenne en el mencionado tratado. Su inclusión viene motivada a que refleja profundización del concepto alcanzado por Fermat al respecto.

Era de nuestro interés colocar la explicación de cada uno de los problemas planteados por Fermat. Sin embargo, por cuestiones de espacio y para no ser reiterativos se han omitido algunas de estas.

Finalmente, se presenta las conclusiones de este trabajo. La bibliografía correspondientes y la lista de figuras.

## 2. Sobre el contexto histórico y algunos matemáticos de la época.

En esta sección presentamos un breve resumen del contexto histórico de la primera mitad del siglo XVII relacionado con el círculo matemático de Mersenne y aspectos biográficos relevantes Fermat, Mesernne, Roberval, Descartes y Viète. Cabe destacar que la relevancia de Mersenne recae en que sirvió de vínculo entre ellos y es quien publicó extractos de la correspondencia sostenida con sus coetáneos, en particular con Fermat.

### 2.1. Contexto Histórico

En Francia, durante la primera mitad del siglo XVII, la actividad matemática era de alto nivel [2]. Parte de ello se debe al interés entusiástico de Mersenne, así como por Descartes discípulo de este. El grupo liderado por el Mersenne perseguía un amplio rango de actividades pero como el interés principal de Mersenne era el estudio las ciencias naturales y de las matemáticas, estos temas tienden a dominar las discusiones. En nombre del grupo de París, Mersenne se escribía con matemáticos y científicos alrededor de Europa: Galileo Galilei (1564-1642), Cavalieri y Evangelista Torricelli (1608-1647) en Italia se mantenían en contacto con Roberval en París, Fermat quien estaba en Toulousse y Descartes quien se encontraba en Holanda.

Mersenne no pretendía formular problemas de su interés para la consideración de sus consultas a otros. Él se hizo responsable de la circulación de manuscritos para comentarios. A pesar que en algunas oportunidades esto generara problemas, gracias a sus buenos oficios resolviendo puntos conflictivos, estos fueron resueltos la mayoría de la veces alcanzando gran claridad.

Durante este período de intensa actividad matemática, solamente una pequeña parte de la gran cantidad de material producido recibió el beneficio de publicación directa: la mayoría se comunicaba de forma verbal, a través de correspondencia, y por la inclusión en trabajos de otros. Bajo estas circunstancias las disputas fueron inevitables.

Sin embargo, Baron (p.151, [2]) afirma que quien iniciaba la mayoría de los problemas que estimulaban las habilidades y el ingenio de su círculo no era miembro del grupo íntimo alrededor de Mersenne en París, sino Fermat. No se tiene evidencia de que Fermat haya visitado París, pero mantuvo comunicación con los italianos a través de Jean de Beaugrand (1584 -1640) y Pierre de Carcavi (1603-1684) y se envió correspondencia con Mersenne a partir de 1636.

Para poder comprender mejor como Fermat llega estar en contacto con el circulo íntimo de Mersenne y convertirse en el motivador de investigación, parece prudente conocer mas sobre la vida de Pierre de Fermat.

### 2.2. Pierre de Fermat

El 17 de agosto del año 1601 nace en Beaumont-de-Lomagne Pierre Fermat; hijo de Dominique Fermat quien desempeñaba diversos cargos políticos dentro de la administración local y Claire de Long miembro de la nobleza de Toulusse. Se puede afirmar que nació dentro del seno de una familia que gozaba de privilegios económicos. Pierre estudió leyes en la Universidad de Toulouse.

Posee cierta relevancia señalar que la traducción al latín de la Aritmética de Diofanto realizada por Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638) y publicada en el año 1621 es uno de los detonantes de la pasión por las matemáticas de Fermat. Este al poseerla descubre un mundo nuevo de reflexión, de búsqueda y de problemas. Es entonces, alrededor del año 1625, en la ciudad de Burdeos, donde Fermat comienza sus estudios matemáticos, destacando entre estos una reconstrucción del *Plane Loci* de Apolonio de Perga (c.262 aC.- c. 190 aC). Es en esteperiodo que el envia a Étienne D'Espagnet (1596-c. 1640) su *Methodus ad disquirendam maximam et miniman* donde expone su preludio del cálculo diferencial [6].

D'Espagnet era hijo del Presidente del Parlamento de Burdeos Jean D'Espagnet y muy amigo de François Viète (1540-1603); por esta razón los D'Espagnet estaban en posesión de los libros de Viète. Y es Étienne quien hereda la biblioteca de su padre. Por otra parte, se convirtió en consejero parlamentario en 1617 donde coincidió con Fermat. D'Espagnet compartía con este el interés por las matemáticas y esta relación permitió a Fermat tener acceso a la obra de Viète. Por otra parte, Fermat también estaba en contacto con Beaugrand quien habia sido discípulo del antes mencionado Viète.

La obra de Viète influyó sobre Fermat y Descartes, esto se puede observar en la notación utilizada por ambos se dedicará un apartado para ampliar la información sobre él con la intención de hacer comparaciones posteriormente.

En la Universidad de Orleans (1637), Fermat recibe el grado de leyes civiles y, ya en posesión de su título de abogado compra su posición en las oficinas del consejo del Parlamento de Toulusse. Es aquí donde cambia su nombre por Pierre de Fermat como es conocido actualmente [6]. Contrae nupcias con Lousie de Long con quien tiene 5 hijos; el primero de ellos Clèment-Samuel será el que mostrará afición por las matemáticas y quien publicará parte de la obra de su padre.

El entretenimiento del Fermat eran las matemáticas, las cuales desarrollaba simultáneamente con su trabajo en el Parlamento. Fermat no era el único quien se dedicaba a las leyes y a las matemáticas. Carcavi mostraba los mismos intereses que Fermat [3]. La relevancia de Carcavi en esta narración se debe que es él quien al ser trasladado a París entra en contacto con Mersenne, sirviendo de puente para la obra de Fermat con el mundo exterior [6].

La información proporcionada por Carcavi motiva a Mersenne a escribir a Fermat quien responde el 26 de abril 1636. Con la intención de divulgar su trabajo, Fermat incluye en su comunicación su reconstrucción del *Plane Loci*, una obra sobre los espirales y dos problemas sobre optimización. Roberval y Mersenne comparten la opinión que estos problemas eran muy complicados. Después, Fermat se ve en la obligación de enviar su *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum.*

Fermat se preocupaba simplemente de resolver los problemas matemáticos propios de los tiempos que le tocó vivir, en todos y cada uno de los campos en que se producían. Por esta razón, le va a preocupar la nueva manera de entender la geometría a la manera de Viète. Las cuestiones relativas a la determinación de las tangentes a las curvas y problemas afines entre otros evitando como era obligado en aquella época, el método griego exhaustivo, la rectificación de curvas, etcétera. [7].

Blaise Pascal propone a Pierre de Fermat reflexionar sobre los problemas que se derivan de los juegos de azar, y en particular el problema de los puntos. Fermat acepta el reto y

[3]Viète es otro ejemplo.

propone un método de resolución que, finalmente sería adoptado por el propio Pascal e integrado a su resolución del problema en el *Traité du triangle arithmethique* [7].

Existe evidencia a través de la correspondencia de Fermat que después del año 1636, éste ya había hecho un progreso sustancial en lo que posteriormente sería el campo del análisis infinitesimal; donde había intercambiado sus ideas con Roberval y posteriormente con Descartes. Se cree que alrededor del año 1629 Fermat desarrolló el bien sabido método de la tangente, basado en el concepto de incremento pequeño de una variable [2].

Fermat no se propone nunca como objetivo un futuro como profesional de la matemática, en el sentido que era necesario articular las creaciones en un corpus formalmente estructurado, deductivamente coherente, con metodologías bien establecidas y totalmente fundamentadas. Fermat no realizo publicación alguna como por ejemplo realizo Descartes. Los textos de Fermat son independientes, son extracciones de su correspondencia sostenida con el círculo del Padre Mersenne y para profundizar en una partes hay que tomar en consideración algunas otras[7].

A partir entonces, del año 1637 Fermat mantiene con el círculo de París correspondencia fluida, la cual propicia el desarrollo de diversos campos de la matemática. Producto de su ascenso a la cámara alta del parlamento y a la sobrecarga de trabajo, Fermat se aleja del círculo de Mersenne[6].

A partir de 1643, los intereses de Fermat se centran en la teoría de números. En el año 1652 es ascendido a la corte criminal, y en 1654 retoma el contacto con París y más concretamente con Pascal [6]. En 1663, Fermat se traslada a Castres, lugar donde muere el 12 de enero de 1665.

## 2.3. François Viète

Nace en Fontenay-le-Comte en año de 1540. Siguiendo los pasos de su padre estudio en la Universidad de Poitiers donde consigue el título de abogado. Estos estudios le permitirán desempeñar cargos ligados a los distintos reyes.

Su obra se divide en dos grandes aportaciones: la primera realizada entre los años 1564-1571 aproximadamente denominada *Canon Mathematicus* y *Universalium Inspectionum Liber Singularis* las cuales consistían en tablas trigonométricas muy completas así como la resolución de triángulos planos y esféricos. La segunda aportación comenzó alrededor del año 1584, es en este periodo cuando Viète escribe *Isagoge in artem Analyticem* (Introducción al arte Analítico). El autor va a utilizar las vocales mayúsculas A, E, I, O, U e Y para denotar las incógnitas, las consonantes mayúsculas B, G, D... para los coeficientes. Esto le permitió hacer generalizaciones de casos concretos lo cual no se había escrito hasta el momento [5]. Por tanto, esta obra puede ser considerada como la primera generalización del álgebra simbólica.

Entre otras cosas, el planteamiento general va a ser a través de la *zetètica*, denominada así por los antiguos, que se refiere a la transformación de un problema en una ecuación que relaciona las incógnitas con las cantidades conocidas y *porística* que se entiende como el procedimiento que explora la veracidad de un teorema mediante la manipulación teórica apropiada. Viète va a agregar la *exegètica* que la considera como el arte de transformar la ecuación obtenida por la zetètica para hallar el valor de la incógnita.

Viète va a abordar la teoría de la ecuaciones tomando problemas y ejemplos de distintas fuentes. Para resolver cada problema, el procedimiento consiste en deducir una ecuación y resolverla. A continuación se presenta un ejemplo que después servirá para compararlo con Fermat. Se plantea: "Dada la diferencia y la suma de dos raíces, hallar dichas raíces."

Viète denota con la letra $B$ la diferencia y con la letra $D$ la suma. Las raíces las expresa como $A$ y $A+B$. Por tanto, tiene que la suma de las raíces sería $2A+B$ y que en consecuencia surge la ecuación $2A+B=D$ de donde se obtiene que $A=\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}B$. Después, realiza el mismo procedimiento pero considerando que $E$ como la raíz mayor y $E-B$ la raíz menor. y repitiendo el procedimiento obtiene como resultado $A=\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}B$. Además esta generalización le permite llegar al caso concreto que si $B=40$ y $D=100$, entonces $A=30$ y $E=70$.

## 2.4. Gilles Personne de Roberval

Gilles Personne de Roberval es un matemático y físico francés que nace el 9 de agosto de 1602 y muere el 27 de octubre de 1675 en París. Gilles Personne es el hijo de pequeños agricultores que viven en Roberval. Él es el único de sus hermanos y hermanas que recibió una educación, desde la edad de 14 años, gracias al párroco de Rhuis, quien se había dado cuenta de su aguda inteligencia. Por lo tanto, se presume que recibe una sólida formación en matemáticas, en latín y probablemente en griego.

Gracias a esta formación, Roberval se ve en la capacidad e interés de abandonar su aldea y emprender una gira por Francia para completar su educación. Vive dando clases particulares. En estos viajes tiene la oportunidad de conocer diversos profesores universitarios lo que le va a permitir seguir formándose como científico. Va a Burdeos, donde conoce a Fermat, que tiene la misma edad que él. En 1627 estuvo en La Rochelle, donde asiste a la sede de la ciudad, lo que le permite hacer varios comentarios sobre el arte de las fortificaciones y la balística. En 1628 va a entrar en el círculo de Mersenne.

Sus contribuciones en matemáticas ilustran el vínculo inseparable entre la física y las matemáticas en el siglo clásico. Hace una contribución al mundo de la matemáticas y parte de su obra se va a publicar póstumamente [6].

Dorce [6] tambien afirma, que una de los primeros aportes de Roberval es el cálculo de la recta tangente a un curva dada. Un poco antes de 1636, Roberval crea un nuevo método para trazar las tangente mientras estaba investigando sobre las propiedades de la cicloide.

Dado que Roberval y Fermat eran coetáneos y que además ambos mostraron interés en la búsqueda de la recta tangente; a continuación se expone brevemente el método de Roberval para hallar la recta tangente de determinadas curvas.

### 2.4.1. Método de Roberval para calcular la recta tangente.

Roberval consideraba que si el movimiento se compone de dos movimientos simples, entonces la velocidad instantánea también debía descomponerse en las correspondientes velocidades del movimiento simple. Hoy en día conocemos este método como la ley del paralelogramo. Este método no es único de Roberval, ya que también fue desarrollado por Torricelli entre 1630 y 1640, quien lo dio a conocer en su *Opera geometrica* mientras que el método de Roberval va a ser editada y publicada por Mersenne en *Cogitata phisico-mathematica* (Pensamientos físico-matemáticos) en el año 1644.

Presentamos un ejemplo sobre la espiral de Arquímedes (287-212 A.C.). En coordenadas polares:

$$\begin{cases} r & = at \\ \alpha & = \omega t \end{cases}$$

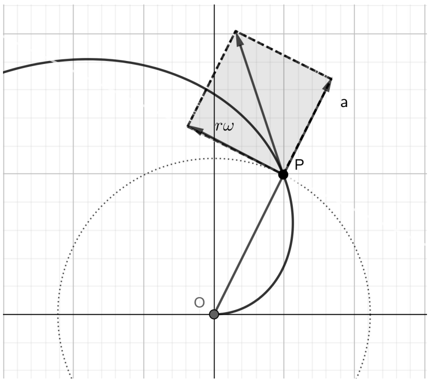


Figura 1: Cálculo de la tangente de la espiral de Arquímedes.

son las ecuaciones de la espiral de Arquímedes; donde $a$ es la velocidad radial y $\omega$ es la angular (ver figura 1). El movimiento de un punto $P$ a través de la espiral será descrito como el resultado de la suma del movimiento radial desde el origen y el movimiento angular. Para hallar la recta tangente a la espiral en el punto $P$, Roberval construye un vector radial de longitud $a$ (velocidad radial) y otro vector de longitud $r\omega$ (velocidad angular) tangente a la circunferencia de radio $r$ en $P$. La diagonal del paralelogramo determinado por estos dos vectores es la velocidad de $P$ y, por tanto, determina la recta tangente a la espiral en $P$.

Roberval dirigió su método a Descartes quien considera el resultado del primero de mucha belleza y no sería de mucha dificultad para cualquier geómetra un poco experimentado [6] .

### 2.4.2. Aplicación del método de Roberval para hallar la recta tangente de la cicloide.

Roberval va a describir que un punto $P$ de la cicloide en un instante concreto está descrito por dos movimientos:

1. Un movimiento rectilíneo uniforme en dirección $PH$, paralela a la base $AN$.
2. Un movimiento de rotación uniforme alrededor de la circunferencia generatriz de dirección $PK$, tangente a la circunferencia en el punto $P$ (ver figura 2).

Estas velocidades son iguales ya que $RN = NHV$, de manera que $PH = PK$ y el paralelogramo resultante es un rombo. Esto implica que la tangente $PS$ ha de ser la bisectriz del ángulo $\angle KPH$. Si se construye el segmento $PQ$, el triángulo $PQR$ es isósceles,

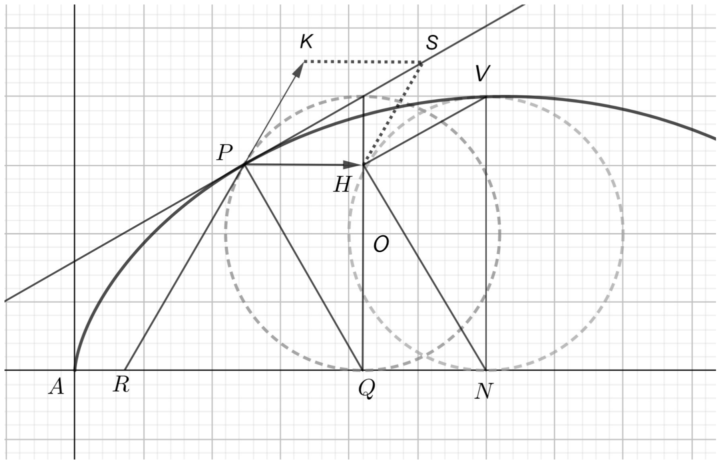


Figura 2: Cálculo de la tangente de la cicloide.

ya que $RP = RQ$. Como $PH$ es paralela a la base $AN$, entonces los ángulos $\angle RPQ$, $\angle PQR$ y $\angle QPH$ son iguales, teniendo que $PQ$ ha de ser la bisectriz del ángulo $\angle RPH$. Entonces, se tiene que $PQ$ y $PS$ son las bisectrices exteriores e interiores de un mismo ángulo y en consecuencia son perpendiculares. Por tanto, si la recta $PS$ buscada es la tangente de la cicloide, la recta $PQ$ que pasa por la base de la circunferencia generadora es la normal de la cicloide.

### 2.4.3. Aplicación del método de Roberval para hallar la recta tangente de una elipse.

Este método también le permitió a Roberval conseguir trazar las tangentes de las cónicas. En particular, sea una elipse de focos $F1$ y $F2$, cualquier punto $P$ cumplirá la propiedad:

$$d(F1, P) + d(F2, P) = 2OA \quad \text{constante.}$$

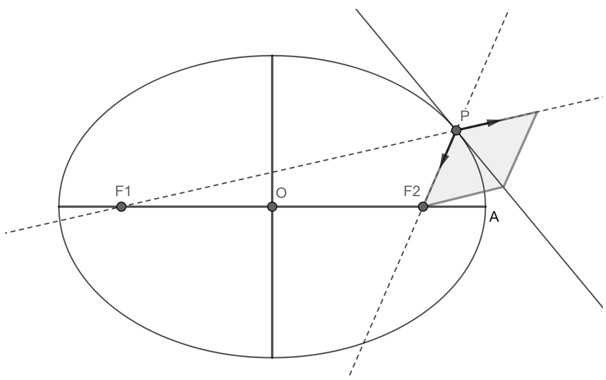


Figura 3: Cálculo de la tangente de la elipse por el método de Roberval.

En la figura 3, si $P$ se mueve a través de la elipse bajo estas condiciones, $d(F1, P)$ aumenta en la misma medida que $d(F2, P)$ disminuye y los movimientos correspondientes respecto al foco también deben seguir la misma regla. Por tanto el paralelogramo vuelve a ser un rombo y la tangente será la bisectriz del ángulo de lados iguales a $PF1$ y $PF2$.

## 2.5. René Descartes

Si bien la obra completa de Descartes es amplia e interesante, esta se escapa de nuestro objetivo su estudio. No cabe duda que Descartes al igual que Fermat es uno de los matemáticos más influyentes de la primera mitad del siglo XVII. Solamente se hará mención a su conexión con el Padre Mersenne y el papel de este último en su comunicación con Fermat.

René Descartes nace en La Haye-en-Touraine en el año 1596 y muere en Estocolmo en el año de 1650. En el período comprendido entre los años 1607 y 1614 estudia en el colegio Collège Royal Henri-le-Grand en La Flèche donde coincide con Mersenne (8 años mayor que él).

Para la primavera del año 1629 Descartes se establece en las Provincias Unidas (actualmente Países Bajos) y consagra enteramente su vida a los estudios. Deseando no ser molestado, nunca indica en sus cartas el verdadero lugar de residencia, sino que da el nombre de algunas ciudades. Para 1630 formula su teoría de la creación de verdades eternas y lo hace porque se está preguntando sobre el lugar de la ciencia; su metafísica se desarrolla así a partir de sus reflexiones de la física, y aún no tiene claras todas las bases que se expresarán en sus trabajos posteriores.

Las cartas de este período evidencian a todos ocupados con la ciencia. En su carta a Mersenne del 4 de noviembre de 1630, Descartes dice que piensa hacer un tratado moral. Mersenne es el centro de una red de matemáticos y científicos de muchos países. Siendo Mersenne considerado el líder ineludible de la vida científica en París y uno de los primeros partidarios vigorosos del pensamiento de Descartes en Francia, a pesar que este último no ha publicado ningún libro insignia.

Descartes también se dedica a las matemáticas: reformó el sistema de notación, utilizando al igual que en la notación de Viète y Thomas Harriot (1560-1621), el uso de las letras del alfabeto latino para designar magnitudes mensurables. Fue en 1631, cuando Jacob Golius (1596-1667) le propuso el problema de Papo de Alejandría (s. III-IV), que descubrió los principios de la geometría analítica. Comienza *Les Meteors* con motivo de la observación de parhelions (observaciones hechas en Roma en 1629). Estudia óptica, redescubre las leyes de la refracción que Willebrord Snell van Royen (1580-1626)[4] ya encontró pero no publicó, y completa la redacción del *Le dioptrique.*

El *Discours de la méthode* y sus tres anexos: (1) *La dioptrique*, (2) *Les météores* y (3)*La géométrie* son publicados en Leiden (Países Bajos) en el año de 1637 de forma anónima. Descartes elabora un método que él quería universal, aspirando a extender la certeza matemática a todo el conocimiento, y esperando fundar una *mathesis universalis*, una ciencia universal. Descartes afirma que el universo en su conjunto (aparte de la mente que es de una naturaleza diferente del cuerpo) es susceptible de una interpretación matemática.

El anexo de la geometría no va ser escrita juntamente con los otros anexos de El Discurso. Descartes consideraba que su obra necesitaba una referencia, un lugar donde extender todo el potencial de su forma de pensar y es por esta razón que decide plasmar en un libro toda su geometría algebraica.

La geometría se divide en tres libros:

1. Problemas que pueden construirse utilizando solo círculos y líneas rectas.

[4]También conocido como Snellius y reflejado solamente como Snell.

2. De la naturaleza de las líneas curvas.

3. De la construcción de problemas sólidos o más que sólidos.

Nuestro interés se centra en el segundo libro el cual contiene el cálculo de la recta normal de una curva. El problema de determinar la tangente de un espiral propuesto por Arquímedes ha sido caracterizado como *diferenciación* o si cabe decir *al equivalente de nuestro actual uso del cálculo diferencial.* Sin embargo se considera que este argumento es poco válido ya que Arquímedes no hizo esfuerzo alguno en desarrollar su idea en un método uniforme para resolver el problema de las tangentes de otras curvas. Es en el siglo XVII que el método reaparece en el trabajo de Torricelli, Roberval, Barrow y Descartes [3]. Fermat también estaba interesado en este problema [6].

A continuación explicaremos el método de Descartes para calcular la recta normal y que se encuentra en el libro II mencionado anteriormente.

### 2.5.1. Método de Descartes para hallar la recta normal.

Suponemos que se tiene una linea curva $CE$ y que la recta $CP$ es la recta normal buscada.

Se prolonga dicha recta hasta $P$ sobre la recta $AG$ el cual servirá de eje de referencia (ver figura 4).

Si $AM = y$ y $CM = x$, se busca la relación entre la $x$ y la $y$ que viene determinada por la curva. Se considera $PC = s$, $PA = v$, $PM = v - y$, y por el triángulo $PMC$ se puede obtener $s^2$ aplicando el teorema de Pitágoras.

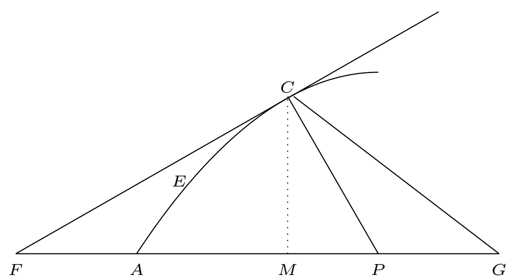


Figura 4: Cálculo de la recta normal según Descartes.

$$
\begin{aligned}
s^2 &= PC^2 = CM^2 + PM^2 \\
s^2 &= x^2 + (v - y)^2 \\
s^2 &= x^2 + v^2 - 2vy + y^2. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Ahora de la ecuación 2.1 se despeja $x$ por una parte e $y$ por otra, obteniendo:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2} \qquad (2.2) \\
y &= v + \sqrt{s^2 - x^2}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo cualquiera de estas últimas relaciones en la ecuación de la curva se establece la relación que hay entre los puntos de $CE$ y los de la recta $AG$.

### 2.5.2. Aplicación del Método de Descartes para hallar la recta normal de la elipse.

Descartes aplica su método a la elipse. Sea la elipse $CE$, se tiene que $CB = AM = y$ y $BA = CM = x$, y por tanto la elipse tiene ecuación

$$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2. \tag{2.3}$$

Esta ecuación se corresponde con la expresión deducida de la proposición 13 del libro I de las *Cónicas de Apolonio*. En la ecuación (2.3) se tiene que $r$ es el lado recto y que $q$ es el eje transversal. De la expresión 2.2 elevada al cuadrado se puede igualar con (2.3) y se obtiene:

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

y por tanto se tiene:

$$y^2 + \frac{qry - 2vqy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0.$$

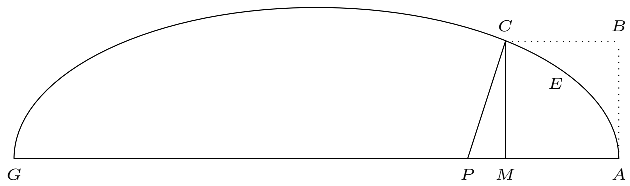


Figura 5: Cálculo de la recta normal de la elipse.

Para determinar $r$ y $s$, se considera un circunferencia de centro $P$ pasando por $C$ [5] y se observa que la ecuación entre la curva, en este caso la elipse, y la circunferencia ha de tener un raíz doble en el caso de ser tangentes. Sea $e$ esta raíz doble de la ecuación resultante, con lo cual se debe obtener un polinomio del tipo $A \cdot (y - e)^2$:

$$y^2(q - r) + qry - 2vqy + qv^2 - qs^2 = A \cdot (y - e)^2.$$

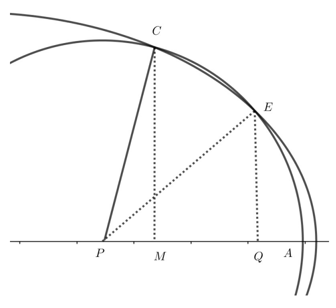


Figura 6: Aplicación del método de Descartes a la elipse.

Este cálculo es conocido como el método de los coeficientes indeterminados, ya que Descartes desarrolla el segundo término de la ecuación resultante y se dedica a ir igualando los coeficientes (se ha de notar que iguala directamente la expresión con el denominador

[5] Yo he colocado por C aunque en el libro de [6] dice P.

de $(y-e)^2$ y que a pesar que lleva las operaciones con el denominador $q-r$, no ha introducido el parámetro $A$):

$$y^2(q-r)+qry-2vqy+qv^2-qs^2=Ay^2-2Aey+Ae^2.$$

Igualando los coeficientes en $y^2$, es evidente que $A=q-r$. Igualando los coeficientes de los términos lineales se tiene que:

$$-2A\cdot e=q(r-2v)\Rightarrow e=\frac{q(r-2v)}{-2A}=\frac{q(r-2v)}{-2(q-r)}.$$

Si se despeja $v$ de esta última expresión y se iguala $e=y$, se obtiene:

$$v=P\cdot A=\left(1-\frac{r}{q}\right)e+\frac{1}{2}r.$$

De aquí, dado un punto $(x,y)$, podremos calcular la distancia $v=PA$ que nos servirá para ubicar el punto $P$ por donde pasa la recta normal. Si es necesario hallar el valor de $s$, solo basta con sustituir el valor de $s$ en la igualdad correspondiente a los dos términos independientes de la ecuación resultante del Método de los Coeficientes indeterminados.

En palabras de Dorce i Polo [6]:

> Esta resolución algebraica va significar un gran avance en las matemáticas de la época, por un lado abría la posibilidad de encontrar rectas tangentes y normales haciendo nomás unos cuantos cálculos y dejando de un lado las reglas y compases geométricos.

Sin embargo, más adelante dentro de la investigación, podremos comparar el método de Descartes con el propuesto por Fermat.

## 3. Sobre el método de máximos y mínimos.

En esta sección revisaremos parte del legado de Fermat referente al método de los máximos y mínimos. Nos centraremos en la publicación hecha por Mersenne que se basa en la correspondencia sostenida con Fermat.

Pla i Carrera y otros [7] afirman que en las cartas de Fermat se evidencia como su pensamiento evoluciona desde las curvas algebraicas a las curvas con radicales y a las curvas trascendentes empleando siempre el método de ad-igualación. Con este procedimiento Fermat busca resolver lo que hoy en día resolvemos con el cálculo diferencial y que la influencia de este sobre Leibniz se hace evidente en el título que escoge el matemático para su texto inicial de cálculo diferencial *Nova Methodus pro maximis et minimis.*

En la advertencia del primer tomo de la Obra de Fermat consta donde se ha encontrado parte de su trabajo. Si bien se sabe que una parte de su correspondencia se extravió, parte de su trabajo, como mencionamos anteriormente, fue publicado por Mersenne; sin embargo, muchas de las publicaciones de este no hacen mención explícita de los colaboradores de su publicación.

Mersenne, en sus trabajos, toma parte de la información de la correspondencia de Fermat y otros; pero la mayoría de las veces usa frases parafraseadas que no siempre permiten distinguir con seguridad lo que pertenece a los diversos geómetras con los que estaba en relación. Por lo tanto, es posible acercarse, a algunas de las diversas cartas de Fermat, a través de las obras de Mersenne sobre ciertos temas puesto que en algunos casos se hizo referencia explicita a la autoria de Fermat.

La primera mención impresa de un folleto manuscrito de Fermat por Mersenne; se refiere al *Methodus ad disquirendam maximam y minimam*, y según consta en la advertencia de la Obra de Fermat fue publicado en: *Brouillon projet d'exemple d'une manièreuniverselle du S. G. D. L. touchant lapratique du trait à preuçespour la coupe des pierres en l'Architecture*, impreso en París en agosto de 1640. En esta se analizará esta publicación ya que reúne la mayoría de los aportes de Fermat al cálculo de los máximos y mínimos transmitido a través de sus cartas; lo cual es el objeto de esta investigación.

Este método de Fermat es el que generó conflicto con Descartes. Fue expuesto bajo su nombre por P. Hérigone en 1642 que además menciona sus tratados manuscritos de los Lugares del Plano de Apolonio y de la Introducción a los planos sin grabados.

A continuación presentaremos el método de los máximos y mínimos. Se ha parafraseado en gran medida el contenido conservando el sentido de las ideas de Fermat. Se incluye comentarios, si el caso lo amerita, y las explicaciones que se consideren oportunas de como resolveríamos este método en la actualidad.

La publicación de Mersenne sobre el Método de máximos y mínimos desarrolado por Fermat, mencionado anteriormente, posee la siguiente estructura:

(i) Método para la búsqueda de máximos y de mínimos.
   - Tangentes de lineas curvas.

(ii) Centro de gravedad de un conoide parabólico de acuerdo con el mismo método.

(iii) Sobre el mismo método.

(iv) Método del máximo y del mínimo.

(v) Apéndice del método del máximo y del mínimo.

(vi) Sobre el mismo método.

(vii) Problema enviado al R. P. Mersenne.

(viii) Análisis para la refracción.

(ix) Síntesis para las refracciones.

Por las limitaciones, en cuanto a longitud de esta investigación, nos ceñiremos a desarrollar los siete primeros puntos de la publicación de Mersenne. Si bien el punto VII y IX gozan de cierto interés por la disputa que genero entre Fermat y Descartes no están relacionados directamente con el método de máximos y mínimos.

Entonces, basado en lo publicado por Mersenne, el método para calcular los máximos y mínimos de Fermat se redacta en la sección 3.1.

## 3.1. Método para la búsqueda de máximos y de mínimos

Toda doctrina de la búsqueda de máximos y mínimos se basa en la suposición de dos incógnitas en esta proposición única.

1. Sea $a$ una incógnita arbitraria del problema (que puede tener una, dos o tres dimensiones según convenga a aquello que se propone).
2. Se trata de buscar la cantidad máxima o mínima en términos de $a$, los cuales puedes estar afectados por grados diversos.
3. Seguidamente $a$ se sustituye por $a+e$ y entonces la cantidad máxima o mínima viene expresada en términos que contiene $a$ y $e$, afectados también de grados diversos.
4. Ad-igualaremos, hablando en términos de Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima, y se eliminará los términos comunes de una parte y de la otra.
5. Hecho esto, se tiene que de una parte y de la otra los términos serán afectados de $e$ o de una de sus potencias.
6. Dividiremos todos los términos por $e$, o de una potencia de $e$ afectado de un grado conveniente tal que uno de los miembros quede sin $e$.
7. La solución de esta última ecuación dará el valor de $a$ que conducirá a un máximo o un mínimo substituido en esa primera expresión.

Se propone el siguiente ejemplo:

**Problema 3.1.** Dividimos la recta $AC$ en $E$ de manera que el rectángulo $AEC$ sea máximo (ver figura 7).

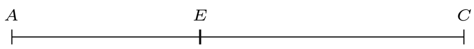


Figura 7: Recta $AC$.

La recta $AC$ la denominamos $b$. Dividimos la recta en dos partes $AE = a$ y $EC = b-a$

El rectángulo esta formado por los dos segmentos y tiene por área:

$$A(a,b) = a \cdot (b-a) = ab - a^2$$

Esta es la cantidad que se quiere maximizar. Ahora es necesario hacer $a \simeq a+e$ y en consecuencia la otra parte equivaldría a $b-a-e$. El nuevo rectángulo tiene por área

$$A(a,b,e) = (a-e) \cdot (b-a-e) = ab - a^2 - 2ae + be - e^2.$$

Igualando ambas expresiones tenemos

$$\begin{aligned} ab - a^2 &= ab - a^2 - 2ae + be - e^2 \\ be &= 2ae + e^2 \\ be &\cong 2a + e, \end{aligned}$$

donde $\cong$ significa en lenguaje de Fermat adigualar; eliminado $e$ resulta:

$$b = 2a.$$

Por tanto, parar resolver el problema, es necesario dividir el segmento $b$ por la mitad.

Fermat afirma:

> Il est impossible de donner une méthode plus générale.[6]

Fermat con esta afirmación parece estar convencido del alcance de su método, aunque dado la cantidad de problemas que presentaremos a continuación su metodología carecía de argumentos para convencer al círculo de Mersenne. ¿Consideraba Fermat completa su metodología y suficientemente argumentada sus demostraciones?

### 3.1.1. Explicación moderna del problema 3.1

Pero, ¿por qué funciona el método de Fermat?. Hoy en día plantearíamos este problema en una clase de pre-cálculo de la siguiente manera. Dada una longitud de un segmento cualquiera $a$, determinar el rectángulo de mayor área tal que $b + h = a$. Definiríamos la función área como

$$f(x) = b(x) \cdot h(x)$$

donde $b(x) = x$ la definimos como la función de la base que depende de $x$ y $h(x) = a - x$ la función altura. Por tanto nuestra función quedaría definida de la siguiente forma:

$$f(x) = x \cdot (a - x) = ax - x^2.$$

Sabemos que por definición de la función derivada tenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{ax - x^2 - [a(x-h) - (x-h)^2]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{ax - x^2 - ax + ah + x^2 - 2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{ah - 2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} a - 2x + h \\
&= a - 2x.
\end{aligned}$$

Una vez derivada la función, para calcular los extremos relativos se iguala la función derivada a cero $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
a - 2x &= 0 \\
a &= 2x \\
\frac{a}{2} &= x.
\end{aligned}$$

[6]No es posible ofrecer un método más general.

Obteniendo el mismo resultado que Fermat. Ahora bien, por el método actual se puede discernir si se trata de un máximo o un mínimo. Es nuestro caso un máximo.

Para Fermat, podía suponer que cualquier otra partición del segmento conduciría a un área menor y por esta razón hablaba de máximo.

### 3.1.2. A propósito de las tangentes y de las lineas curvas.

Continuando con lo publicado por Mersenne; dentro de la I parte de esta publicación también encontramos el siguiente problema. Fermat reduce el cálculo de la recta tangente en un punto dado de una curva arbitraria, al método precedente.

**Problema 3.2.** Cálculo de la recta tangente de una parábola.

Suponemos, como en la figura 8, la parábola $BDN$ de vértice $D$ y diámetro $DC$. Consideramos un punto $B$ de la parábola, por el cual dibujaremos la recta $BE$, tangente a la parábola, la cual corta el diámetro en el punto $E$.

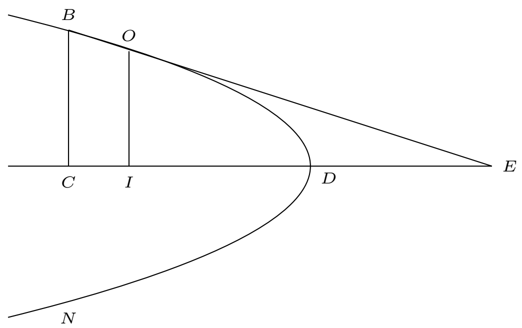


Figura 8: Cálculo de la recta tangente de una parábola.

Sea $O$ un punto cualquiera de la recta $BE$, y consideramos la ordenada $OI$ y la ordenada $BC$ del punto $B$, tendremos la desigualdad entre las proporciones

$$\frac{CD}{ID} > \frac{BD^2}{OI^2}$$

donde, el punto $O$ es exterior a la parábola. Por semejanza de triángulos,

$$\frac{BC^2}{OI^2} > \frac{CE^2}{IE^2}$$

y por tanto

$$\frac{CD}{ID} > \frac{CE^2}{IE^2}.$$

El punto $B$ esta dado, por tanto $BC$ y, en consecuencia, se tiene el punto $C$. Por tanto, el segmento $CD$ esta dado.

Sea entonces, igual a una cantidad dada $d$, y hacemos $CE = a$ y $CI = e$. Entonces tenemos que

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}.$$

Multiplicando medios y extremos se obtiene,

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

De acuerdo con el método precedente se ad-iguala y una vez simplificados los términos comunes se tiene

$$de^2 - 2dae \cong a^2e,$$

que es lo mismo que

$$de^2 + a^2e \cong 2dae.$$

Si lo dividimos todo por $e$ se tiene

$$de + a^2 \cong 2da$$

Se elimina $de$. Queda $a^2 = 2da$ y, por tanto, $a = 2d$.

Se establece de esta manera que $CE$ es el doble de $CD$, y lo cual es correcto.

En palabras de Fermat:

> Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de - gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.[7]

Como se ha comentado anteriormente, el método no falla y esta convencido rotundamente de esto. Pero no es más que un ejemplo y no es una generalización o demostración de su método.

### 3.1.3. Explicación moderna del problema 3.2

Consideremos

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0) \tag{3.1}$$

una parábola de eje real horizontal. Si se quiere calcular su pendiente en un punto cualquiera $(x_1, y_1)$ se puede proceder de la siguiente forma. De la expresión (3.1) despejamos la $y$, obteniendo:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= 2\sqrt{p}\sqrt{x - x_0} \qquad (3.2)\\ y &= 2\sqrt{p}\sqrt{x - x_0} - y_0. \end{aligned}$$

derivamos

$$\begin{aligned} y' &= 2\sqrt{p} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - x_0}} \\ &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{x - x_0}}. \qquad (3.3) \end{aligned}$$

[7]Este método nunca falla, y puede extenderse a muchas preguntas muy hermosas; gracias a el, hemos encontrado los centros de gravedad de las figuras terminadas en líneas rectas y curvas, así como las de sólidos y muchas otras cosas que podemos tratar en otros lugares, si tenemos tiempo libre.

Despejando $\sqrt{x-x_0}$ de la ecuación (3.2) y sustituyendo en (3.3), obtenemos:

$$y' = \frac{2p}{y-y_0}$$

obteniendo exactamente el mismo resultado.

En este caso, hemos omitido hacer la derivada por definición pero sabemos que en esto recae la similitud del método de Fermat con el concepto de derivada.

## 3.2. Centro de gravedad de un conoide parabólico.

**Problema 3.3.** Sea *CBAV* un conoide parabólico, teniendo como eje *IA* y base circular de diámetro *CIV*. Determinar el centro de gravedad.

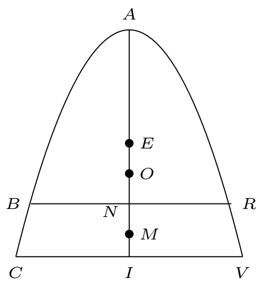


Figura 9: Conoide parabólico $CBAV$.

Sea $CBAV$ un conoide parabólico, de eje $IA$ y de base circular de diámetro $CIV$ como se muestra en la figura 9. Se busca determinar el centro de gravedad por este método. En palabras de Fermat:

> et prouvons ainsi, par de nouveaux exemples et par un nouvel et brillant emploi de cette méthode, l'erreur de ceux qui croient qu'elle peut être en défaut [11][8].

Para poder establecer el análisis, hacemos el eje $IA = b$. Suponemos que $O$ es el centro de gravedad y la recta desconocida $OA$ la denominamos $a$. Cortamos el eje $IA$ por un plano arbitrario $BN$ y hacemos $IN$ igual a $e$. Entonces $NA$ será igual a $b - e$.

> Il est clair que, dans cette figure et les semblables (paraboles ou paraboliques), les centres de gravité, dans les segments retranchés par les parallèles à la base, divisent les axes dans un rapport constant (il est évident, en effet, que la démonstration d'Archimède pour la parabole peut s'étendre, par un raisonnement identique, à toutes les paraboles et aux conoïdes paraboliques)[9].

Por tanto, el centro de gravedad del segmento, donde $NA$ es el eje, $BN$ el radio de la base, divide $AN$ en un punto $E$, de manera que:

[8] Probando así, con nuevos ejemplos y por un nuevo y brillante uso de este método, el error de aquellos que creen que el método puede fallar.

[9] Es claro que tanto en esta figura como en otras semejantes (. . . ) los centros de gravedad, los segmentos limitados por paralelas a la base dividen a los ejes en un razón constante(. . . ).

$$\frac{NA}{AE} = \frac{IA}{AO}$$

traducido en símbolos

$$\frac{b-e}{AE} = \frac{b}{a}.$$

La porción del eje $AE = \dfrac{ab - ae}{b}$ y el intervalo de los centros de gravedad $OE = \dfrac{ae}{b}$.

Denominamos $M$ el centro de gravedad de la parte del conoide parabólico $CBRV$, el cual necesariamente esta entre $N$ e $I$ y de acuerdo con el postulado 9 de *De aequiponderantibus* de Arquímedes, conocemos que la figura $CBRV$ es cóncava por todo su interior. Denotando parte $CBRV$[10] a la parte del conoide definida por los puntos $C$, $B$, $R$, $V$ (aplica para el resto de los casos)

$$\frac{\text{parte } CBRV}{\text{parte } BAR} = \frac{EO}{OM}$$

porque $O$ es el centro de gravedad de la figura total $CAV$, y $E$ y $M$ son los centros de gravedad de las partes.

Pero en los conoides de Arquímedes

$$\frac{\text{parte } CBRV}{\text{parte } BAR} = \frac{IA^2}{NA^2} = \frac{b^2}{b^2 + e^2 - 2be}$$

y dividiendo

$$\frac{\text{parte } CBRV}{\text{parte } BAR} = \frac{2be - e^2}{b^2 + e^2 - 2be}.$$

Pero hemos establecido que

$$\frac{\text{parte } CBRV}{\text{parte } BAR} = \frac{EO}{OM}$$

$$\frac{2be - e^2}{b^2 + e^2 - 2be} = \frac{EO}{OM} \quad \text{y} \quad \frac{2be - e^2}{b^2 + e^2 - 2be} = \frac{\frac{ae}{b}}{OM}.$$

Por lo que:

$$OM = \frac{ab^2e + ae^3 - 2abe^2}{2b^2e - be^2}.$$

Como $M$ pertenece al segmento $NI$ tenemos que $OM < IM$ y $OI = b - a$ conduciendo la pregunta a nuestro modo, podemos escribir:

$$b - a = \frac{ab^2e + ae^3 - 2abe^2}{2b^2e - be^2},$$

de donde se obtiene

$$2b^3e - b^2e^2 - 2ab^2e + abe^2 \cong ab^2e + ae^3 - 2abe^2,$$

simplificando por una $e$

[10] Notación utilizada por Fermat.

$$2b^3 - b^2e - 2ab^2 + abe \cong ab^2 + ae^2 - 2abe,$$

eliminando todos los términos que no tiene $e$

$$2b^3 - 2ab^2 \cong ab^2$$
$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2}.$$

Por consiguiente;

$$\frac{IA}{AO} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AO}{OI} = \frac{a}{b-a} = \frac{2}{1}$$

Solución que ya era conocida por Arquímedes.

## 3.3. Sobre el mismo método.

Llegamos así a la tercera parte de la publicación de Mersenne sobre el método de Fermat, quien plantea:

**Problema 3.4.** Dividir la recta $AC$ por un punto $B$ de manera que le sólido $AB^2 \times BC$ sea máximo.

Dividimos la recta $AC$ por un punto arbitrario B.

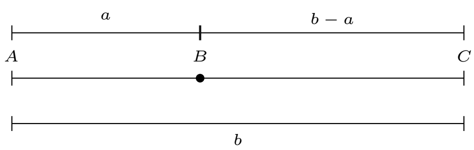


Figura 10: Recta AC, calculo del solido $AB^2 \times BC$.

Definimos $AB = a$ y $AC = b$ (figura 10). Como el sólido buscado debe satisfacer las condiciones de la pregunta; tenemos que:

$$V_1 = a^2 \cdot (b - a),$$

ahora consideraremos $AB = a + e$ y por tanto $BC = b - a - e$ obteniendo:

$$V_2 = (a + e)^2 \cdot (b - a - e).$$

Después de resolver la potencia y realizar el producto se obtiene:

$$V_2 = a^2b + e^2b - 3a^2e + 2abe - a^3 - 3ae^2 - e^3,$$

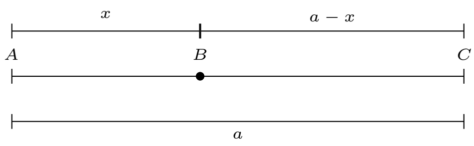


Figura 11: Recta $ABC$

aplicando el método de *ad-igualación* entre el primer sólido y el segundo. Reduciendo términos semejantes y finalmente dividiendo por $e$ tantas veces sea necesario, se tiene:

$$\begin{aligned} a^2b - a^3 &= a^2b + e^2b - 3a^2e + 2abe - a^3 - 3ae^2 - e^3 \\ be^2 + 2abe &= 3ae^2 + 3a^2e + e^3 \\ be + 2ba &= 3ae + 3a^2 + e^2. \end{aligned}$$

Eliminando los términos donde aparece $e$, resulta:

$$2ba = 3a^2$$

simplificando

$$2b = 3a$$

obteniendo la proporción $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{2}$ siendo

$$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}. \tag{3.4}$$

En palabras de Fermat:

> je dis que le solide $AB^2 \times BC$ est le maximum de tous ceux qui peuvent être formés sur la ligne $AC$, par une autre division quelconque.[11]

Fermat confía del resultado que consigue y así lo afirma.

### 3.3.1. Explicación moderna del problema 3.4

Para resolver este problema, en la actualidad, se emplearía una notación bastante unificada en los textos de pre-cálculo.

La función volumen que buscamos máximizar sería

$$f(x) = x^2 \cdot (a - x) = ax^2 - x^3,$$

derivando se obtiene $f'(x) = 2ax - 3x^2$ y los posible extremos relativos se obtienen de resolver la ecuación $f'(x) = 0$ de donde resulta $x = 0$ y $x = \frac{2a}{3}$. Este último es el máximo de la función definida que se corresponde con el resultado (3.4).

Esto se corresponde a que al aplicar la definición de derivada el procedimiento de llevar al límite se corresponde el incremento $h$ al mismo incremento que hace Fermat con la $e$. Sin embargo, nuestro concepto es infinitesimal y Fermat no define que es para él la $e$.

Continuando con el método, Fermat plantea la siguiente proposición:

[11]Yo digo que el sólido $AB^2 \times BC$ es el máximo de todos los que pueden formarse en la línea $AC$, por cualquier otra división.

**Problema 3.5.** Sea $OMID$ una recta dada y sean $O$, $M$, $I$, $D$ cuatro puntos dados sobre ésta. La parte $MI$ la dividimos por un punto $N$ de manera que el rectángulo $OND$ tenga con el rectángulo $MNI$ una proporción menor que cualquier otra proporción entre los rectángulos $MNI$ y $OND$ arbitrarios.

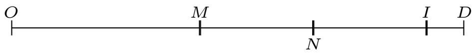


Figura 12: Recta $OMNDC$

Hacemos $OM = b$, la recta $DM = Z$ e $MI = g$. El segmento $MN = a$ que es el segmento buscado. Entonces tenemos que el rectángulo $OND$ será

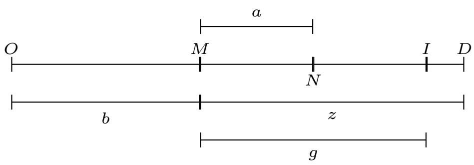


Figura 13: Recta OMND

$$(b + a) \cdot (z - a) = bz - ba + za - a^2$$

y el rectángulo $MNI$:

$$g \cdot (g - a) = ga - a^2$$

por tanto es necesario que la proporción

$$\frac{bz - ba + za - a^2}{ga - a^2}$$

sea mínima entre todas las que se pueden conseguir de la línea $MI$. Si en lugar de $a$ colocamos $a + e$ tenemos

$$\frac{bz - ba - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae}{ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae}.$$

esta expresión es necesario compararla con la primera. Colocamos en el primer miembro el producto del primer término con el cuarto término, y el segundo y el tercero en el segundo miembro; comparamos ambos productos.

$$(bz - ba + za - a^2) \times (ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae)$$

$$(bz - ba - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae) \times (ga - a^2).$$

Comparamos ambos productos por igualación. Suprimimos los términos que son comunes, y dividimos el resultado entre $e$:

$$bgz - a^2g - bze + abe - aez - 2abz - a^2z + 2a^2b \cong -aeg + a^2e - 2a^2g + a^2b - za^2.$$

Eliminamos los términos con $e$:

$$bzg - a^2g - 2bza - 2za^2 + 2ba^2 = -2a^2g + a^2b - za^2$$

y trasponiendo los términos obtenemos

$$-ba^2 + za^2 - ga^2 + 2bza = bzg.$$

Resolviendo esta ecuación obtendremos el valor de $a$ y, en consecuencia, el valor de $MN$, y, por tanto, el punto $N$. Entonces verificamos la proposición de Papo que indica que para encontrar el punto $N$, es necesario:

$$\frac{OM \times MD}{OI \times ID} = \frac{MN^2}{NI^2},$$

ya que la resolución de esta ecuación nos llevará a la misma construcción.

Para Fermat el método es aplicable para otras cónicas además de la parábola. También nos señala, que para resolver el método de las tangentes es necesario proceder de la siguiente forma indicada en el problema 3.6.

**Problema 3.6.** Calcular la tangente de la elipse.

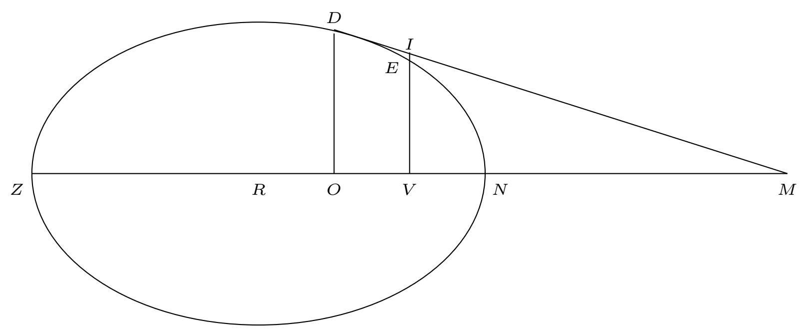


Figura 14: Elipse ZDN

Sea la elipse $ZDN$ de eje $ZN$ y de centro $R$. Sea $D$ un punto de la elipse[12]. Trazamos un recta $DM$ tangente de la elipse. Tomamos la ordenada $DO$. Utilizando el lenguaje algebraico, hacemos $OZ = b$ y $ON = g$. El segmento buscado $OM$ los denominados $a$. Entendemos como $OM$ la porción del eje comprendida entre el punto $O$ y el punto en que la tangente corta el eje.

Como $DM$ es tangente a la elipse, si trazamos la recta $IEV$ paralela a $DO$ por un punto $V$, escogido a voluntad entre $O$ y $N$, la recta $IEV$ cortará ciertamente a la recta tangente $DM$ y también, a la elipse en los puntos $E$ e $I$ respectivamente. Como $DM$ es la tangente, cualquier otro punto diferente de $D$ se halla fuera de la elipse. De ahí, se tiene que $IV > EV$, y en consecuencia:

$$\frac{DO^2}{EV^2} > \frac{DO^2}{IV^2}$$

.

Ahora por las propiedades de la elipse

$$\frac{DO^2}{EV^2} = \frac{ZO \times ON}{ZV \times VN}$$

[12]En el texto original en francés se refiere a un punto $D$ de la circunferencia pero se refiere a la elipse.

por otro lado[13],

$$\frac{DO^2}{IV^2} = \frac{OM^2}{VM^2},$$

obtenemos:

$$\frac{ZO \times ON}{ZV \times VN} > \frac{OM^2}{VM^2}.$$

Ahora hacemos $OV$, que hemos escogido arbitrariamente igual a $e$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} ZO \times ON &= bg \\ ZV \times VN &= bg - be + ge - e^2 \\ OM^2 &= a^2 \\ VM^2 &= a^2 + e^2 - 2ae. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión anterior resulta:

$$\frac{bg}{bg - be + ge - e^2} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}.$$

Si multiplicamos el primer termino por el cuarto, y el segundo por el tercero, tenemos:

$$bga^2 + bge^2 - 2bgae > bga^2 - bea^2 + gea^2 - a^2e^2.$$

Aplicando el Método de Fermat para poder ad-igualar es necesario suprimir los términos iguales y dividir el resto por $e$. Obteniendo entonces

$$bge - 2bga \cong ba^2 + ga^2 - a^2e.$$

Eliminando los términos que aun tienen una $e$, se obtiene:

$$-2bga \cong ba^2 + ga^2,$$

miembros que de acuerdo con el método se deben igualar. Escribiéndolo deforma adecuada:

$$ba - ga = 2bg.$$

Fermat afirma que su solución es la misma que la de Apolonio, porque de acuerdo con su construcción, para encontrar la tangente, se debe hacer:

$$\frac{b - g}{g} = \frac{2b}{a}$$

o bien:

$$\frac{ZO - ON}{ON} = \frac{2ZO}{OM}.$$

En cambio, según Apolonio, es necesario que $\frac{ZO}{ON} = \frac{ZM}{MN}$.

Fermat al terminar afirma que:

[13]Por proporción de triángulos semejantes entre $\triangle DOM$ y $\triangle IVM$

> Je pourrais ajouter nombre d'autres exemples, tant du premier que du second cas de ma méthode, mais ceux-ci suffisent, et prouvent assez qu'elle est générale et ne tombe jamais en défaut.
>
> Je n'ajoute pas la démonstration de la règle, ni les nombreuses autres applications qui pourraient en confirmer la haute valeur, comme l'invention des centres de gravité et des asymptotes, dont j'ai envoyé un exemple au savant M. de Roberval.[14]

Para Fermat no queda duda del valor de su hallazgo pero no incluye las demostraciones, que no sabemos si lo ha realizado, ni tampoco las aplicaciones que tiene en mente.

### 3.3.2. Explicación moderna del problema 3.6.

Consideremos una la elipse de centro $(x_0, y_0)$ y de ejes conocidos $a$ y $b$ que tiene por ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Hacemos los cálculos necesario para despejar $y$,

$$\begin{aligned}
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= 1 \\
b^2(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 &= a^2 \cdot b^2 \\
a^2(y-y_0)^2 &= a^2 \cdot b^2 - b^2(x-x_0)^2 \\
a^2(y-y_0)^2 &= b^2\left(a^2-(x-x_0)^2\right) \qquad (3.5) \\
(y-y_0)^2 &= \frac{b^2\left(a^2-(x-x_0)^2\right)}{a^2} \\
y-y_0 &= \sqrt{\frac{b^2\left(a^2-(x-x_0)^2\right)}{a^2}} \\
y &= \pm\frac{b\cdot\sqrt{a^2-(x-x_0)^2}}{a} + y_0. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Derivamos (3.6) y se obtiene la expresión:

$$y' = \mp\frac{b\cdot(x-x_0)}{a\cdot\sqrt{a^2-(x-x_0)^2}}.$$

Haciendo ciertos ajustes y sustituyendo 3.5 convenientemente en la raíz del denominador obtenemos:

$$y' = \mp\frac{(x-x_0)}{y-y_0}.$$

[14] Podría agregar muchos otros ejemplos, tanto del primer como del segundo caso de mi método, pero estos son suficientes y demuestran suficientemente que es general y nunca falla.

No agrego la demostración de la regla, ni las numerosas otras aplicaciones que podrían confirmar su alto valor, como la invención de los centros de gravedad y las asíntotas, de los cuales he enviado un ejemplo al sabio M. de Roberval.

## 3.4. Método del máximo y el mínimo

Fermat, analizado el método de Viète de la *sincresi* y la *anastrofa*, explora detalladamente su aplicación a la búsqueda de la constitución de las ecuaciones correlativas. Esto se refiere que dado un punto singular se expresan dos ecuaciones ambiguas [15] relacionadas a dicho punto, estas son las ecuaciones correlativas. Fermat afirma que:

> il m'est venu à l'esprit d'en dériver un procédé pour trouver le maximum ou le minimum et pour résoudre ainsi aisément toutes les difficultés relatives aux conditions limites, qui ont causé tant d'embarras aux géomètres anciens et modernes[16] .

Parafraseando a Fermat, él expresa que los máximos y los mínimos son de hecho únicos y singulares, como lo había dicho Papo y como lo sabían ya los antiguos, a pesar que Federico Commandino (1509-1575) ignora el significado de singular en los textos de Papo. De esto se sigue que, a un lado y al otro del punto que constituye el límite, uno puede tomar una ecuación ambigua y de los dos puntos que se toman, uno de cada lado, se obtienen las ecuaciones ambiguas correlacionadas, iguales y semejantes.

Se propone el siguiente ejemplo:

**Problema 3.7.** Dividir la recta $b$ de manera que el producto de sus segmentos sea máximo [17].

El punto que satisface esta pregunta es precisamente el que biseca a la recta dada y se obtiene que el rectángulo máximo es igual a la cuarta parte de $b^2$. Ninguna otra división de la recta dada proporciona un producto igual a la cuarta parte de $b^2$.

En cambio si se propone:

**Problema 3.8.** Dividir la recta $b$ de manera que el área del rectángulo que generen los segmentos sea igual a $z\,plano$[18][19] (donde este área es más pequeña que $\frac{b^2}{4}$).

Entonces hay dos puntos que satisfacen la pregunta, y se encuentran a cada lado del punto que proporciona el rectángulo máximo. Si, en efecto, $a$ es uno de los segmentos de la recta $b$, tendremos que $ba - a^2 = z\,plano$, que es una ecuación ambigua porque la recta puede encontrarse a uno de los lados como Fermat explica. Sea entonces, $be - e^2 = z\,plano$ la ecuación correlativa. Comparemos las dos ecuaciones siguiendo el método de Viète[20]:

$$ba - a^2 = be - e^2.$$

[15] Que tiene una mas de una raíz.

[16] Le ha venido en mente hacer un procedimiento para hallar el máximo o el mínimo y para poder resolver así todas las dificultades relativas a la condiciones límite, que son la causa de preocupación de los geómetras antiguos y modernos.

[17] Este problema propuesto es exactamente el mismo problema 3.1, planteado de otra manera.

[18] Se refiere al área buscada.

[19] En [7] aparece la notación $z^{pl}$, en la versión de [11] se utiliza la notación $z^{\Pi}$ y se utiliza la versión de [9] por ser que la mas cercana a la utilizada por Fermat.

[20] Fermat no incluye sus cálculos pero podemos suponer que

$$\begin{aligned} ba - be &= a^2 - e^2 \\ b(a-e) &= (a-e)(a+e). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dividimos 3.7 por $a - e$, y obtenemos

$$b = a + e,$$

donde $a$ y $e$ son diferentes. Si en lugar del valor de *zplano*, tomamos uno más grande, pero, en todo caso, más que pequeño que $\frac{b^2}{4}$, entonces las rectas $a$ y $e$ diferirían entre ellas menos que las precedentes, y los puntos de división se aproximan más al punto que determina el rectángulo máximo a medida que más disminuye la diferencia entre ellas, hasta que alcanza la división final, que corresponde al rectángulo máximo, esta diferencia se desvanece. En este caso hay singularidad, o sea una solución mínima, y las dos cantidades se igualan. Es decir $a$ es igual a $e$.

De todo esto resulta que, si hacemos $a$ igual a $e$ en el valor $b = a + e$, obtenido con el método de Viète, aplicado a las ecuaciones correlativas anteriormente establecidas (situación que se debe siempre que el punto corresponde al máximo o mínimo), tendremos, en el caso propuesto

$$b = 2a.$$

Que implica que, cuando la recta se divide por la mitad, el segmento formado por los segmentos es máximo.

Este problema guarda correspondencia con el problema 3.1 ya resuelto, es por ello que no se considera necesario agregar explicación alguna sobre este solución.

Considerando otro ejemplo:

**Problema 3.9.** Dividir la recta $b$ en dos partes de manera que el sólido que se obtiene con el cuadrado de uno de ellos y el otro sea máximo [21].

Hacemos unos de los segmentos igual a $a$ y queremos que

$$ba^2 - a^3$$

sea máximo.

En este caso la ecuación correlativa y semejante es

$$be^2 - e^3. \tag{3.8}$$

Comparándola de acuerdo con el método de Viète obtenemos

$$ba^2 - a^3 = be^2 - e^3.$$

Dividiéndolo entre $a - e$ se convierte en

$$ba + be = a^2 + ae + e^2,$$

que es la ecuación que proporciona la constitución de la ecuaciones correlacionadas.

Para hallar el máximo hacemos $e = a$ y obtenemos:

$$2ba = 3a^2,$$

es decir,

$$2b = 3a$$

y el problema estará resuelto.

Fermat expresa:

[21] Este problema va en correspondencia con el problema 3.4 comentado anteriormente.

> Toutefois, comme pratiquement les divisions par un binome sont généralement compliquées et trop pénibles, il est préférable, en comparant les équations corrélatives, de mettre en évidence les différences des racines, pour n'avoir à opérer qu'une simple division par cette différence [22] .

Entonces, queremos que:

$$b^2a - a^3$$

sea máximo.

De acuerdo con el método comentado antes, es necesario tomar como ecuación correlativa $b^2e - e^3$. Ahora bien, como además de $e$, la $a$ es una incógnita, esto no impide en lo absoluto que la designemos $a + e$. Entonces tendremos:

$$b^2a + b^2e - a^3 - e^3 - 3a^2e - 3e^2a = b^2a - a^3.$$

Es evidente que si suprimimos todos los términos semejantes, los términos restantes estarán afectados por la incógnita $e$. Colocando los términos que contengan $a$ y $e$ simultáneamente de la siguiente forma:

$$b^2e = e^3 + 3a^2e + 3e^2a,$$

y después simplificándolos todos por $e$, tenemos que

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae, \tag{3.9}$$

que nos da la constitución de las dos ecuaciones correlativas de esta forma.

Para hallar el máximo es necesario igualar las dos raíces de las dos ecuaciones (3.8) y (3.9) con tal de satisfacer las reglas del primer método, donde se sigue la forma de proceder y de operar.

Es necesario hacer $a$ igual $a + e$. De donde resulta $e = 0$. Pero, entonces, de acuerdo con la forma que hemos visto que tenemos la ecuaciones correlativas, $b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae$. En esta igualdad, debemos suprimir todos los términos que este afectados por $e$, todos reduciéndolos a cero. Obteniendo así:

$$b^2 = 3a^2,$$

que es la ecuación que nos da el máximo del sólido propuesto.

Fermat afirma:

> Pour montrer plus complètementla généralité de cette double méthode, considérons de nouveaux genres d'équations corrélatives dont Viète n'a pas traité et que nous emprunterons au Livre de la Section déterminée d'Apollonius (dans Pappus, Livre VII, prop. 61), dont les conditions de limites sont expressément reconnues comme difficiles par Pappus [23] .

Resumiendo, Fermat intenta mostrar más plenamente el uso del método general, considera un nuevo género de ecuaciones correlativas que Viète no trata.

[22] Así mismo, como en la practica, la divisiones por un binomio son muy complicadas e intricadas, es preferible, a la hora de comparar las ecuaciones correlativas, poner de manifiesto las diferencias que hay entre las raíces, de manera que no haya que hacer otra cosa que una simple división por esta diferencia.

[23] Para mostrar más completamente la generalidad de este método doble, consideremos nuevos tipos de ecuaciones correlativas con las que Viète no trató y que tomaremos prestadas del Libro de la Sección Determinada de Apolonio (en Papo, Libro VII, prop. 61) cuyas condiciones de borde son expresamente reconocidas como difíciles por Papo.

### 3.4.1. Explicación moderna del problema 3.9.

**Problema 3.10.** Consideremos la recta $BDEF$, de la cual nos dan los puntos $B$, $D$, $E$, $F$. Se nos pide hallar entre los puntos $D$ y $E$ un punto $N$ tal que el rectángulo $BNF$ y el rectángulo $DNE$ tengan razón mínima (Fermat se refiere al área).

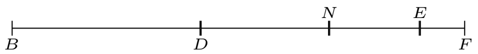


Figura 15: Recta BDEF

Hacemos la recta $DE = b$, $DF = z$, $BD = d$ y $DN = a$. Entonces queremos que la razón

$$\frac{dz - da + za - a^2}{ba - a^2}$$

sea mínima.

La ecuación correlacionada, de acuerdo con el primer método, es:

$$\frac{dz - de + ze - e^2}{be - e^2}.$$

Igualamos ahora el producto de los términos medios con el de los extremos. Tendremos:

$$\begin{aligned} &dzbe - dze^2 - dabe + dae^2 + zabe - zae^2 - a^2be + a^2e^2 = \\ =&dzba - dza^2 - deba + dea^2 + zeba - zea^2 - e^2ba + e^2a^2. \end{aligned}$$

Suprimiendo los términos semejantes y haciendo las transposiciones necesarias tenemos:

$$dzba - dzbe + dea^2 - dae^2 - zea^2 + zae^2 + a^2be - e^2ba = dza^2 - dze^2$$

Dividiendo los dos miembros por $a - e$ (proceso que se facilita si colocamos uno al lado del otro, agrupando términos correlativos, es decir, haciendo $\frac{dzba-dzbe}{a-e} = dzb$, y análogamente, $\frac{dea^2-dae^2}{a-e} = dae$, etc. de manera que sean divisible por $a - e$). Después de hacer las divisiones obtendremos:

$$dzb + dae - zae + bae = dza + dze,$$

que es la igualdad que expresa la constitución de las ecuaciones relativas. Si de esta expresión, queremos deducir el mínimo de acuerdo con el método, debemos hacer $e = a$. Donde resulta:

$$dzb + da^2 - za^2 + ba^2 = 2dza.$$

La solución de esta ecuación nos dará el valor de $a$, para el cual la razón propuesta será mínima.

Fermat escribe:

> L'analyste ne sera pas arrêté par ce que cette équation a deux racines, car celle qu'il faut prendre se trahira d'elle-même, quand on ne voudrait pas la reconnaître. Même avec des équations ayant plus de deux racines, un analyste

tant soit peu sagace pourra toujours se servir de l'une ou de l'autre de nos méthodes [24].

Para Fermat este último ejemplo pone en evidencia que el primer método es menos cómodo de manejar, porque obliga a recurrir al segundo de los métodos, el cual, como se deriva directamente del primero, proporciona a los analistas hábiles una facilidad y elegancia, en la búsqueda de las tangentes, de los centros de gravedad, de las asíntotas y de otras cuestiones análogas.

> C'est donc avec la même confiance que jadis, que j'affirme toujours aujourd'hui que la recherche du maximum et du minimum se ramène à cette règle unique et générale, dont l'heureux succès sera toujours légitime et non pas dû au hasard, comme certains l'ont pensé.

Fermat confía plenamente y una vez más que la búsqueda máximos y mínimos se reduce a esta regla única y general, el éxito del cual es legítimo en todos los casos y no responde como algunos han pensado al azar. Fermat escribe:

> Soit a une inconnue (voir page 121, ligne 6 à ligne dernière)... sa première expression.

que se refiere al método explicado al principio de este capítulo.

### 3.4.2. Explicación moderna del problema 3.10

Para resolver este problema hemos nombrado los valores conocidos de la siguiente forma:

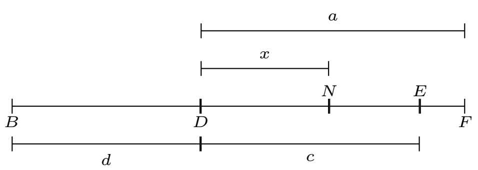


Figura 16: recta $BDEF$

Donde $a, c, d > 0$ y $x$ el valor desconocido a minimizar. Tenemos que:

$$BNF = (d + x) \cdot (a - x) = ad - dx + ax - x^2$$

y por otra parte:

$$DNE = (c - x) \cdot x = cx - x^2.$$

Por tanto la proporción buscada seria:

$$\frac{BNF}{DNE} = \frac{(d + x) \cdot (a - x) = ad - dx + ax - x^2}{cx - x^2}$$

[24]El analista no se debe detener por el hecho de ser una ecuación ambigua, ya que, lo que se quiere obtener de ella se obtiene de la misma, cuando no se quiere reconocer. Asimismo un analista con dos ecuaciones ambiguas y dos raíces, cualquier analista con la condición de un mínimo de perspicacia siempre podrá usar o uno de nuestros métodos.

que depende de x. Escribimos la expresión $f(x) = \frac{d + x) \cdot (a - x)}{cx - x^2} = \frac{ad - dx + ax - x^2}{cx - x^2}$ que se pretende minimizar y derivamos en función de la $x$, obteniendo:

$$f'(x) = \frac{(-a + d - c) \cdot x^2 + 2ad \cdot x - acd}{(cx - x^2)^2}.$$

Al igualar $f'(x) = 0$ y resolver la ecuación generada se obtienen los valores que minimizan la función. Y esta en correspondencia con la solución obtenida por Fermat.

Fermat mantiene que: si alguien piensa que aun este método es debido al azar, puede intentar conseguir uno parecido. A todos estos que aun no lo hayan empleado, Fermat propone:

**Problema 3.11.** Dado tres puntos, hallar un punto desde el cual, si trazamos tres rectas a los tres puntos dados, la suma de las longitudes de los segmentos sea mínima.

Este problema no aparece resuelto, se deja indicado ya que era el estilo de Fermat proponer problemas.

## 3.5. Apéndice al método del máximo y el mínimo.

En la resolución de problemas, en muchas ocasiones intervienen los radicales. El analista no debe dudar de usar una tercera incógnita y de otras si es necesario. Así evitará las potencias que, cuando se repiten, complican normalmente los cálculos. El método quedará explicado en los ejemplos siguientes:

**Problema 3.12.** Consideremos un semicírculo de diámetro $AB$, con perpendicular $DC$ al diámetro. Se quiere el máximo de la suma $AC + CD$.

Sea $b$ el diámetro. Hacemos $AC = a$. Tendremos que $CD = \sqrt{ba - a^2}$. Se quiere calcular la máxima cantidad

$$a + \sqrt{ba - a^2}.$$

Aplicando los reglas del método las ecuaciones que se deben *adigualar* son muy elevadas. ¿Por qué habríamos de abandonar el método de Viète según el cual las cantidades variables se expresan por medio de vocales [25]

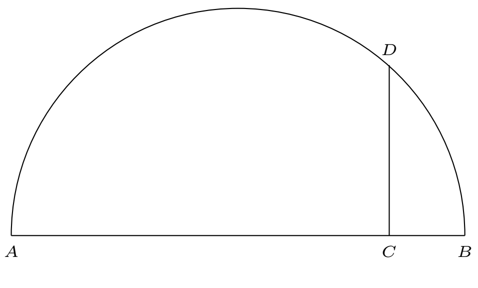


Figura 17: Semicírculo $ADB$

Tendremos entonces,

$$o = a + \sqrt{ba - a^2}.$$

[25]Aquí Fermat critica implícitamente la introducción de $x, y, z, \ldots$ como variables adoptadas por Descartes en *La Géométrie*.

y, por tanto,

$$CD = \sqrt{ba - a^2},$$

que elevada al cuadrado nos da:

$$o^2 + a^2 - 2ao = ba - a^2.$$

Una vez hecho esto, hemos de realizar las transformaciones necesarias para que el término afectado por el exponente más alto esté solo. Entonces, podremos encontrar el máximo, que es la finalidad de este método. Hechas estas transformaciones, tenemos que:

$$ba - 2a^2 + 2ao = o^2.$$

Ahora bien, por hipótesis, $o$ es la cantidad máxima y, por tanto, $o^2$, cuadrado de una cantidad máxima, también será máximo. En consecuencia,

$$ba - 2a^2 + 2ao$$

(que es la expresión que es igual a $o^2$) ha de ser máxima.

Esta expresión no tiene radical. Manipulándola, según el método, como si $o^2$ fuera una cantidad variable. Por ad-igualación tendremos que

$$ba - 2a^2 + 2ao = ba + be - 2a^2 - 2e^2 - 4ae + 2oa + 2oe.$$

Suprimimos los término comunes y el resto los dividimos por $e$:

$$b + 2o \cong 2e + 4a.$$

Anulamos $2e$, de acuerdo con el método. Tendremos:

$$b + 2o = 4a,$$

o sea,

$$4a - b = 2o,$$

y pon tanto,

$$2a - \frac{1}{2}b = o.$$

Esta última igualdad se ha obtenido aplicando el método. Ahora bien hemos de regresar a la primera ecuación, según la cual

$$a + \sqrt{ba - a^2} = o.$$

Pero hemos de hallar que $o = 2a - \frac{1}{2}b$. En consecuencia,

$$2a - \frac{1}{2}b = a + \sqrt{ba - a^2}.$$

De donde resulta: $a - \frac{1}{2}b = \sqrt{ba - a^2}$. Elevando todo al cuadrado:

$$a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ba = ba - a^2$$

de donde finalmente se obtiene:

$$ba - a^2 = \frac{1}{8}b^2.$$

Fermat concluye que, de esta última ecuación se encuentra el valor de $a$ que corresponde al máximo buscado.

Continua planteando el siguiente problema, en el cual según él se puede usar este mismo método:

**Problema 3.13.** Hallar el cono de superficie máxima inscrito dentro de una esfera dada.

Sea $AD$ el diámetro de una esfera dada, $AC$ la altura del cono que buscamos, $AB$ su lado y $BC$ el radio de la base. Según Arquímedes, será necesario que la suma $AB \times BC + BC^2$ sea máxima. Hacemos $AD = b$ y $AC = a$. Tendremos que $AB = \sqrt{ba}$ y $BC = \sqrt{ba - a^2}$. Donde el rectángulo $AB \times BC$ más $BC^2$ es igual a [26]

$$\sqrt{b^2a^2 - ba^3} + ba - a^2.$$

Lo igualamos a $o$ plano $+ a^2 - ba = \sqrt{b^2a^2 - ba^3}$.

Elevamos al cuadrado. El método que hemos indicado conducirá a una ecuación que nos dará $o$plano, y que permitirá resolver lo que nos hemos planteado inicialmente

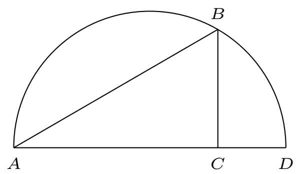


Figura 18: Cono de superficie máxima dado una esfera.

Fermat considera que, en este problema, podemos conseguir la solución sin recurrir a una tercera incógnita porque, dada la recta $AB$ en el triángulo $\triangle CAB$, se puede reducir a encontrar el máximo de la razón

$$\frac{CB \times BA + CB^2}{AD^2}$$

y en este caso, el método ordinario es suficiente. Sea $AB = b$ la recta dada. hacemos $CB = a$. tendremos $AC^2 = b^2 - a^2$. Pero $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AD^2}$. Donde resulta que $AD^2 = \frac{b^4}{b^2 - a^2}$. Queremos que la razón entre $ba + a^2$ y esta expresión sea máxima.

Multiplicamos el numerador y el denominador por $b^2 - a^2$. La razón

$$\frac{b^4}{b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4}$$

ha de ser mínima. Pero $b^4$ esta dado porque es el cuadrado de un valor $b$ dado. Por tanto, la cantidad $b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4$ ha de ser máxima.

El método lleva a la ecuación

$$b^3 + 2b^2a = 3ba^2 + 4a^3,$$

[26]Fermat expresa esto usando la terminología vietana [7].

podemos reducir un grado inmediatamente. Se obtiene,

$$4a^2 - ba = b^2$$

y la solución es ahora evidente.

La idea de Fermat era:

> Nous ne nous arrêtons pas davantage sur un sujet désormais éclairci; on voit comment, en recourant à une troisième ou à une quatrième inconnue, et, s'il le faut, en multipliant encore le nombre des positions auxiliaires, on peut se débarrasser des radicaux et de tous les autres obstacles qui peuvent arrêter l'analyste [27].

Así mismo, y para que la determinación de las tangentes se sigue el mismo método general, podemos observar que, en ciertos casos, las preguntas relativas a los máximos y mínimos se puede resolver con mucha elegancia y puede ser mucho más geométrico, por medio de la construcción de una tangente.

### 3.5.1. Explicación moderna del problema 3.13

Fermat proporciona un único ejemplo que puede, según él, valer para otros casos.

**Problema 3.14.** Dentro del semicírculo $FBD$, trazamos la perpendicular $BE$; se nos pide el máximo producto $FE \times EB$.

De acuerdo con Fermat, si se pretende construir el rectángulo $FE \times EB$, dado un valor, utilizando el método planteado; el problema se reduce a describir una hipérbola de asíntotas $AF$, $FC$, y relativamente a las cuales los productos de las abscisas $FE$ por las ordenadas $EB$ tengan un valor dado. Los puntos de intersección de la hipérbola y del semicírculo satisfarán lo que se pregunta. Pero, dado que el producto $FE \times EB$ ha de ser máximo, se trata de hacer una hipérbola de asíntotas $AF$ y $FC$ en lugar de cortar el semicírculo, le sean tangente, por ejemplo en el punto $B$. Y esto se debe a que los puntos de contacto determinan las cantidades máxima y mínima.

Suponemos el problema resuelto [28]. Si la hipérbola toca el semicírculo en $B$ **??** [he perdido esta referencia], la tangente en $B$ al semicírculo será igualmente tangente a la hipérbola. Sea $ABC$ esta recta tangente a la hipérbola en $B$ y cortando las asíntotas en $A$ y $C$.

Entonces, según Apolonio, $AC = BC$. En consecuencia, $FE = EC$, y $AF = 2BE = 2AN$. Pero, como tangente del circulo, $BA = AF$. Por tanto, $BA = 2AN$ y, por la semejanza de los triángulos, si $M$ es el centro, $MB = 2ME$. Pero el radio $MB$ esta dado. Por tanto el punto $E$ lo está.

Se puede, según Fermat, reducir, en general, todas la búsqueda de máximos y mínimos a la construcción geométrica de la tangente. Eso no obstante, no disminuye en nada la importancia del método general, dado que la construcción de las tangentes depende, de la misma manera que la determinación de los máximos y mínimos.

[27]No nos detendremos más en un tema que ya esta bastante claro. Se ha visto que recurriendo a una tercera o cuarta incógnita y si fuera necesario, multiplicando aun más el número posible de incógnitas auxiliares, se puede librar de los radicales y cualquier otro obstáculo que pueda detener al analista.

[28]Uso explicito del análisis de Viète [7].

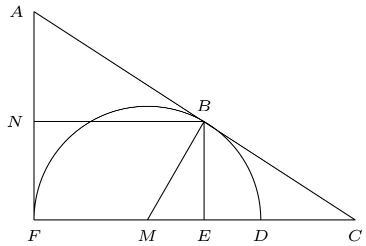


Figura 19: Semicírculo $FBD$.

### 3.6. Sobre el mismo método.

Para Fermat, la teoría de la tangentes es una consecuencia del método de la determinación de máximos y mínimos, que permite resolver con mucha facilidad todas las cuestiones límite y de forma particular, insiste una vez más en los famosos problemas que según afirma Papo las preguntas límites con muy difíciles.

Las líneas curvas a las cuales se le determinan las tangentes tienen unas propiedades específicas, que se puede expresar o bien, por líneas rectas, o bien, mediante curvas complicadas como nos gustaría como con otras lineas rectas u otras curvas. Se ha resuelto el primer caso cuando la regla general, que, al ser tan conciso, puede resultar difícil, pero todo esto ha estado reconocido de forma legítima.

De hecho, Fermat considera las curvas arbitrarias en el plano, expresadas por dos posiciones dadas, una de las cuales la podemos denominar diámetro, y la otra, ordenada[29]. Entonces consideremos la tangente en un punto dado de la curva ya construida, y por ad-igulación, consideremos la propiedad especifica de la curva, no ya sobre la curva sino sobre la tangente que buscamos.

Eliminemos, de acuerdo con la doctrina de los máximos y los mínimos, los términos que sean necesario, y arribemos a una igualdad que permita determinar el punto de corte de la tangente con el diámetro y, por tanto, la propia tangente.

Fermat proporciona el ejemplo de la cisoide.

**Problema 3.15.** Calcular la tangente de la cisoide de Diocles (3.10).

Consideremos un círculo de diámetro $AG$ y $BI$ que se corten perpendicularmente, y la cissoide $IHG$, a la cual le trazamos por uno de sus puntos, por ejemplo $H$, la tangente.

Suponemos el problema resuelto, y sea $F$ la intersección de $CG$ y la tangente $HF$. Se toma $DF = a$ y, tomamos un punto arbitrario $E$ entre $D$ y $F$, $DF = e$.

De acuerdo con la propiedad específica de la cisoide,

$$\frac{MD}{DG} = \frac{DG}{DH},$$

tendremos, expresando analíticamente la *adigualación*,

$$\frac{NE}{EG} \cong \frac{EG}{EO},$$

[29]Fermat utiliza el término *applicata*. Se debe reconocer que Fermat, como también lo hace Descartes en *La Géométrie*, recorre de forma explicita a la curva, entendida como una función entre los puntos del diámetro y los de la curva, los cuales quedan determinados por el valor que toma, para cada punto del diámetro y de la ordenada [7, p.167].

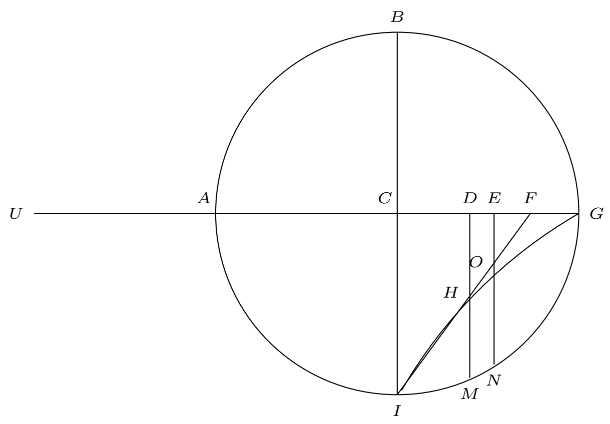


Figura 20: Cálculo la tangente de la cisoide de Diocles

donde $EO$ es la posición de la recta $EN$ interceptada por la curva y la tangente.

Hacemos la ordenada $AD = z$, el dato $DG = n$ y la incógnita $DF = a$, y el segmento arbitrario $DE$ igual a $e$.

Tendremos que

$$EG = n - e, \quad EO = \frac{ra - re}{a}, \quad EN = \sqrt{zn - ze + ne - e^2}.$$

De acuerdo con la regla, es necesario considerar la propiedad especifica, no sobre la curva, sino sobre la tangente, y colocar entonces:

$$\frac{NE}{EG} = \frac{EG}{EO},$$

donde $EO$ es la ordenada de la tangente, o bien, con notación analítica,

$$\frac{\sqrt{zn - ze + ne - e^2}}{n - e} = \frac{n - e}{\frac{ra - re}{a}}.$$

Lo elevamos al cuadrado para eliminar el radical:

$$\frac{zn - ze + ne - e^2}{n^2 - 2ne + e^2} = \frac{n^2 - 2ne + e^2}{\frac{r^2a^2 - 2r^2ae + r^2e^2}{a^2}}.$$

Multiplicando por $a^2$ y adigualando, de acuerdo con la regla propuesta, el producto de los extremos con el cuadrado del termino medio, y suprimiendo los términos superfluos, de acuerdo con el método, nos dará:

$$3za + na = 2zn.$$

De aquí la construcción siguiente de la tangente. Prolongamos el radio $CA$ del círculo dado hasta $U$ y tomamos $AU = AC$. Dividimos $AD \times DG$ por $UD$. Sea $DF$ el cociente. Unimos $FH$ y tendremos la tangente a la cisoide.

### 3.6.1. Explicación moderna del cálculo de la tangente de la cisoide (problema 3.15).

La expresión de la cisoide en coordenadas cartesianas es

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}. \tag{3.10}$$

A partir de la expresión $y = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$C, se tiene aislada la $y$ y podemos proceder a derivar. Obteniendo:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}} \cdot \frac{2 \cdot (-x^3 + 3ax^2)}{(2a-x)^2}$$

que una vez simplificado se reduce:

$$y' = \frac{-x^3 + 3ax^2}{(x \cdot (2a-x))^{\frac{1}{2}}}.$$

Fermat también proporciona la forma de proceder en el cálculo de la tangente de la *concoide de Nicomedes*, aunque solo proporciona las indicaciones para no extenderse mucho.

**Problema 3.16.** Calcular la tangente en la concoide de Nicomedes (3.11).

Consideremos la concoide, construida de acuerdo con la figura 21. Fermat aquí hace mención que la imagen se refiere a la que se encuentra en Papo y Eutocio. Sea $I$ el polo [tengo duda sin traducimos así al castellano], y $KG$ la asíntota de la curva, $IHE$ la perpendicular a la asíntota, $N$ un punto arbitrario de la curva dado, por el cual queremos trazar una tangente $NBA$ que corte $IE$ en el punto $A$.

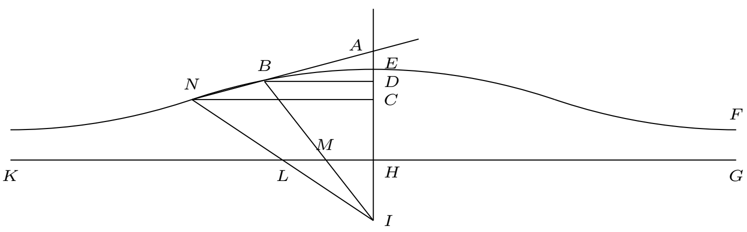


Figura 21: Tangende de la cisoide.

Suponemos el problema resuelto tal como muestra la figura 21. Trazamos $NC$ paralela a $KG$. De acuerdo con la propiedad especifica de la curva , la recta $LN$ es igual a la recta $HE$.

Tomamos un punto arbitrario $D$, entre $C$ y $E$, por el cual trazamos la paralela $CN$ que contara a la tangente en el punto $B$. Dado que la propiedad específica la hemos de considerar en la tangente, unimos $B$ e $I$. Esta recta cortará a la recta $KG$ en $M$.

De acuerdo con las leyes del método, la recta $MB$ será igual a la recta $HE$. Así llegaremos a la ecuación buscada.

Para conseguirlo, hacemos $CA = a$, $CD = e$ y $EH = z$, y los otros datos por sus nombres. Entonces, fácilmente encontraremos al expresión analítica de la recta $MB$ y, si ad-igualamos de acuerdo con el método explicado, a la recta $HE$, habremos resuelto el problema. Lo que se ha indicado es suficiente para el primer caso. Es cierto que hoy una infinidad de artificios. En la práctica hay, ciertamente, una infinidad de artificios par abreviar los cálculos. Fermat afirma[30]:

> Pour le second cas, que jugeait difficile M. Descartes, à qui rien ne l'est, on y satisfait par une méthode très élégante et assez subtile[31].

Mientras los términos estén formados solamente por líneas rectas, se podrán buscar y designar por la regla precedente. Además, con tal de evitar los radicales, se permite substituir las ordenadas de las curvas por las tangente encontradas siguiendo el método anterior. En fin, este es el punto importante, los arcos de curvas se pueden substituir por las longitudes que corresponden a las tangentes ya encontradas, y se llega a la adigualación tal como hemos indicado. Así, conseguiremos resolver el problema sin mucho esfuerzo.

$$(x-b)^2 \cdot (x^2+y^2) = h^2x^2. \tag{3.11}$$

Fermat considera la curva del Señor Roberval [32].

**Problema 3.17.** Calcular la tangente de la cicloide.

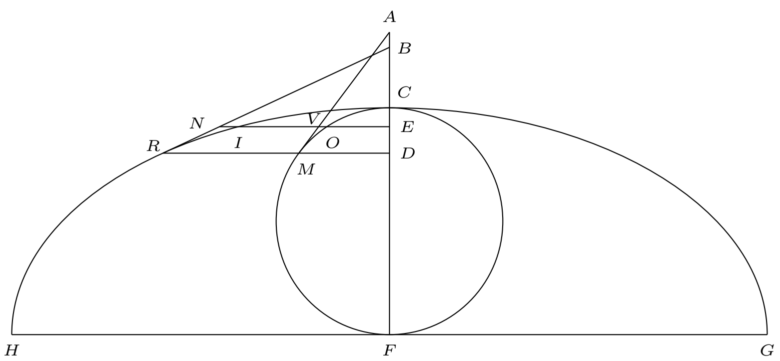


Figura 22: Tangente de la cicloide.

Sea $HRIC$ la curva, de vértice $C$ y eje $CF$. Consideremos el semicírculo $COMF$ y, sobre la curva tomamos el punto $R$ arbitrario, por el cual trazamos la tangente $RB$.

Por el punto $RMD$, perpendicular a $CDF$, que corta al semicírculo en el punto $M$

La propiedad especifica de la curva es que la recta $RD$ es igual a la suma de el arco del círculo $CM$ y de la ordenada $DM$.

Con el método precedente, trazaremos la recta tangente $MA$ al círculo (el mismo procedimiento es aplicable cuando la curva $COM$ es de una naturaleza diferente).

[30]Carta de Roberval a Fermat del 4 de agosto de 1640, y la de Descartes a Fermat del 25 de septiembre de 1638.

[31]El segundo caso, que Descartes consideraba, y por este método no lo es, mi método lo resuelve de manera elegante y sutil.

[32]Carta de Roberval a Fermat del 4 de agosto de 1640, y la de Descartes a Fermat del 25 de septiembre de 1638. Se refiere a la *cicloide* o *roulette*, como le diría Blaise Pascal 1643, o *trocoide* como le denominaban los matemáticos italianos.

Suponemos la construcción ya efectuada [33]. Sea $DB = a$ la incógnita, y $DA = b$, $MA = d$, $MD = p$, $DR = z$, las rectas dadas, $CM = n$, el arco del círculo dado y $DE = e$, la recta arbitraria.

Por $E$ trazaremos la recta $EOVIN$, paralela a la recta $RMD$. Tenemos que

$$\frac{a}{a-e} = \frac{z}{NIVOE},$$

donde resulta que $NIVOE = \frac{za-ze}{a}$.

Ahora a causa de la propiedad especifica de la curva que consiste en considerarla sobre al recta tangente) es necesario ad-igualar esta recta, $\frac{za-ze}{a}$, a la suma $OE + arc(CO)$[34] . Pero: $arc(CO) = arc(CM) - arc(MO)$. Donde resulta:

$$\frac{za-ze}{a} \cong OE + arc(CM) - arc(MO).$$

Para conseguir la expresión analítica de los últimos tres términos, evitando los radicales, podemos tomando en cuenta la observación precedente, substituir $OE$ por la ordenada sobre la tangente $EV$, y el $arc(MO)$ por el trozo de tangente $OV$ que le es adyacente. Para encontrar la expresión analítica de $EV$, se dispone de $\frac{b}{b-e} = \frac{r}{EV}$. Donde resulta que

$$EV = \frac{rb-re}{b}.$$

Para hallar la de $MV$ usamos los triángulos semejante de antes y obtenemos que $\frac{b}{d} = \frac{e}{MV}$. Donde resulta que $MV = \frac{de}{b}$.

Finalmente, hacemos el arco $CM = n$. Analíticamente, tendremos, entonces,

$$\frac{za-ze}{a} \cong \frac{rb-re}{b+n-\frac{de}{b}+n-\frac{de}{b}}.$$

Multiplicando los dos miembros por $ab$, obtenemos:

$$zba - ze \cong rba - rae + bna - dae.$$

Pero de acuerdo con la propiedad de la curva $z = r+n$. Donde resulta: $zba = rba+bna$. Y, suprimimos ahora los términos comunes, obtenemos:

$$zbe \cong rae + dae.$$

Ahora dividimos todo por $e$ y, como que no queda ningún término superfluo, no es necesario hacer otra supresión, tenemos:

$$zb = ra + da.$$

De donde se obtiene:

$$\frac{r+d}{d} = \frac{z}{a}.$$

Para construirla, hay que hacer $\frac{MA+MD}{DA} = \frac{RD}{DB}$, así que es fácil demostrar, podemos hacer $\frac{MD}{DC} = \frac{RD}{DB}$, o bien, con el bien con el objetivo de que la construcción sea más elegante, unir $MC$ y tirar la paralela $RB$.

[33] Siempre el método del análisis vietá.

[34] *arc* se refiere a la longitud del arco definido por esos puntos.

La même méthode donnera les tangentes à toutes les courbes de cette espèce. Nous avons indiqué il y a longtemps leur construction générale[35] .

Entre las aplicaciones de Fermat encontramos el cálculo de la tangente de la Cuadratriz de Dinostrato.

Fermat indica que cuando se quiere calcular la tangente a la cuadratriz de Dinóstrato, la construimos con el método precedente así:

**Problema 3.18.** Calcular la tangente de la cuadratriz de Dinóstrato.

Consideremos un cuadrante de circunferencia $ABI$ como se muestra en la figura, y la cuadratriz $AMC$ a la cual queremos trazar una tangente en un punto $M$ dado.

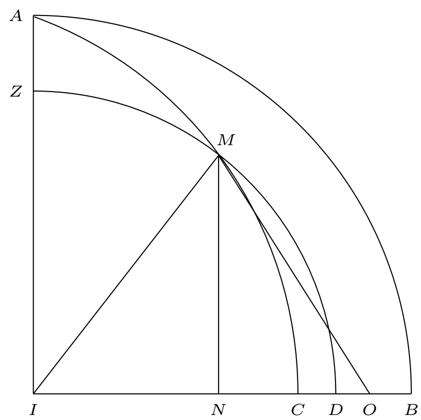


Figura 23: Tangente de la cuadratriz de Diofanto.

Unimos $M$ e $I$. Con centro en $I$, y radio $MI$, describimos la cuarta parte de la circunferencia $ZMD$ y, una vez dibujada la perpendicular $MN$, hacemos:

Como $MN$ es a $IM$, en la misma proporción la porción de la cuarta parte de la circunferencia $MD$ es la recta $IO$.

Uno $M$ y $O$ y obtengo la tangente a la cuadratriz. Eso es suficiente.

Ahora bien, a veces, la curvatura cambia, como en la concoide (primer caso), y en todas las especies , llevado de la primera, de la curva de Roberval (segundo caso).

Con tal de poder dibujar la curva correctamente, hay que determinar matemáticamente los puntos de inflexión, en los cuales la curva pasa de convexa a cóncava, o al revés.

Esta pregunta se resuelve elegantemente por el método de los máximos y los mínimos, de acuerdo con el lema general siguiente.

**Problema 3.19.** Consideremos la curva $AGFH$ en la cual la curvatura cambia, por ejemplo en el punto $H$. Trazamos la tangente $HB$ y la ordenada $HC$. El ángulo $HBC$ será mínimo entre todos los que hace la tangente con respecto al eje $ACD$, tanto si se encuentra por encima del punto $H$ como si esta por debajo.

Si tomamos un punto $M$ por encima del punto $H$, la tangente en este punto cortar el eje $AB$ en el punto $N$. El ángulo en $N$ será, por tanto más grande que el ángulo en $B$.

[35]El mismo método sirve para calcular todas las tangente de todas las curvas de este especie. Hace tiempo ya voy a indicar su construcción general.

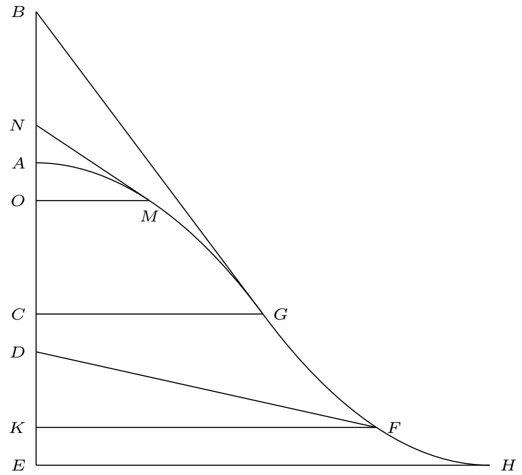


Figura 24: Curva $AGFH$

Análogamente, si tomamos un punto $F$ por debajo del punto $H$, el punto $D$ en que la tangente corta al eje se encontrar por debajo de $B$, y la tangente $DF$ cortara , en todo momento la tangente $BH$ del costado $FH$. El ángulo $D$ será, por tanto, más grande que el ángulo $B$. No describo todos y cada uno de los casos, no más indico la manera de hacerlo, porque las formas de las curvas varían de muchas formas.

Así, para hallar, por ejemplo, el punto $H$ de la figura anterior, calculamos de entrada, con el método precedente, la propiedad de la tangente en un punto arbitrario de la curva.

Después, con la doctrina de los máximos y de los mínimos determinaremos el punto $H$ tal que, trazamos una perpendicular $HC$ y la tangente $HB$, la razón sea mínima.

Entonces el ángulo $B$ será mínimo.

Fermat asevera que el punto $H$, así determinado, será aquel en el cual comienza el cambio de curva.

El mismo método de los máximos y mínimos proporciona también, usando un artificio particular, la determinación de los centros de gravedad, como ya se ha indicado en otra oportunidad a Roberval.

Fermat nos trasmite:

> Mais, comme couronnement, on peut encore trouver les asymptotes d'une courbe donnée, recherche qui conduit à de remarquables propriétés pour les courbes indéfinies. Nous pourrons un jour les développer et les démontrer plus au long[36] .

## 3.7. Un problema enviado a Mersenne.

Fermat propone:

**Problema 3.20.** Hallar el cilindro de superficie máxima inscrita en una esfera dada.

[36] Para coronar el trabajo, podemos aun más encontrar las asíntotas de una curva dada, una búsqueda que conduce a unas propiedades muy notables de la curvas indefinida. Algún día podré desarrollarlas y demostrarlas más ampliamente.

Consideremos la esfera de diámetro $AD$ de centro $C$ como se muestra en la figura 25. Se pide que se inscriba el cilindro de superficie máxima.

Suponemos el problema resuelto[37]. Sea $DE$ el diámetro de la base del cilindro y $EA$ su lado. Podemos suponer esta posición del cilindro, dado que el angulo inscrito en el semicírculo es recto). La superficie del cilindro es proporcional a $DE^2 + 2DE \times EA$. Es necesario, entonces, enocntrar el máximo de la suma $DE^2 + 2DE \times EA$.

Si trazamos una perpendicular $EB$, tenemos de un lado que $DE^2 = AD \times DB$ y del otro que $DE \times EA = AD \times BE$. Hemos de buscar, entonces, el máximo de la suma $AD \times DB + 2AD \times BE$. O bien, una vez que hayamos divido la recta dada $AD$, el máximo de la suma $DB + 2BE$.

Este cuestionamiento es fácil. No más es necesario hacer $CB = \frac{1}{2}BE$ o bien, el que es lo mismo, $BC = \frac{CE}{\sqrt{3}}$. El punto $E$ satisfará el problema.

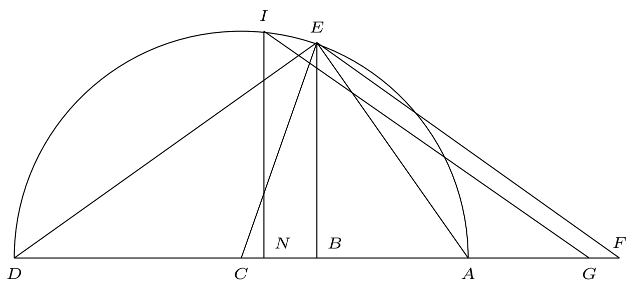


Figura 25: Cilindro de superficie máxima.

Trazamos una tangente $EF$ que contra a la prolongación del diámetro en el punto $F$. Fermat asegura que la suma $DB + 2BE$ es máxima.

De hecho, dado que $CB = \frac{1}{2}BE$, $BE = \frac{1}{2}BF$. Por tanto, $BF = 2BE$. Donde resulta $DF = DB + 2BE$. puesto así, es evidente que la suma $DB + 2BE$ es máxima.

Agarramos un punto arbitrario $I$ del semicírculo y bajamos la perpendicular $IN$. Por el mismo punto $I$, hacemos $IG$ paralela a la tangente. Cortará siempre el diámetro en $G$. Este punto $G$ se encuentra entre los puntos $F$ y $D$, porque otra paralela $GI$ no cortaría al semicírculo.

Por el paralelismo anterior tenemos que:

$$\frac{FB}{BE} = \frac{GN}{NI}.$$

Pero $BF = 2BE$. Por tanto, $GN = 2NI$, y por tanto, $GD = DN + 2NI$. Pero dado que $GD$ que es igual a$DN + 2NI$) es más pequeño que $DF$ que es igual a$DB + 2BE$), se sigue que $DB + 2BE$ es un máximo y el cilindro buscado tendrá como base $BE$ y como lado $EA$.

De lo anterior podemos deducir que la razón $\frac{DE}{EA}$ es la hay entre el mas grande y el más pequeño de los segmentos de una recta dividida en mediana y extrema razón. Ahora, podemos hallar y construir un cilindro de la superficie dada.

Será necesario reducir la pregunta la igualdad entre la suma $DN + 2NI$ y una recta dada, como ahora $DG$, que, de acuerdo con el valor encontrado por el máximo, ha de ser, como mucho igual a $DF$.

[37]Método de análisis de Viète [7].

Trazamos entonces $DI$ por la paralela a $FE$. El punto $E$ satisface lo que se pide y así podremos obtener dos cilindros, ahora bien solamente uno de los dos resuelve la condición propuesta.

Si, en efecto, el punto $G$ cae entre $F$ y $A$, los dos cilindros diferentes satisfarán el problema, pero si $G$ cae en $A$ o mas cerca de $D$, la solución será única.

## 4. Carta a Brûlart de Saint-Martin (†1652).

Por petición de Brûlart, Fermat envía a Mersenne una carta donde satisfacerá la solicitud hecha sobre su métodos de máximos y mínimos. Esta carta cobra relevancia porque en ella Fermat realiza una demostración de su método y no una aplicación como en los casos antes vistos. Además, Fermat intenta hacer una demostración del método de los máximos y mínimos basado en el desarrollo de Taylor de una función polinómica alrededor de un punto extremo. No conforme, Fermat utiliza la segunda derivada para saber si aquello que obtiene es un máximo o un mínimo. A continuación se presenta una traducción de un extracto de esta carta enviada por Fermat extraída de [7]. Posteriormente, añadimos dos explicaciones alternativas al método de Fermat. En primer lugar una aclaración moderna de su método (interpretación de [7]), y seguido la resolución de este problema con métodos actuales mas sencillos.

El método de los máximos y los mínimos se basa solamente en dos o tres fundamentos.

De antemano supongo que la búsqueda conlleva a una situación que depende de un termino único, como ahora por ejemplo cuando se quiere

**Problema 4.1.** Dividir una línea de manera que el rectángulo que formen las dos partes tenga un área dada.

En la recta tenemos dos puntos que satisfacen la pregunta. Ahora bien, si lo que queremos es determinar el más grande de todos los rectángulos posibles, solamente hay un punto que lo cumple, que en nuestro ejemplo, es el punto medio del segmento. He aquí la razón por la cual Papo, en su libro séptimo, lo denomina siempre *máximim, unicam et sigularem*, y tambien *minimam*.

Es necesario buscar un punto único, a la derecha y la izquierda del cual todos los puntos den siempre los mismos valores más grades o más pequeños que el que producen el punto que buscamos.

Importa, por tanto, comparar el punto único con todos los puntos de la derecha e izquierda que se puedan imaginar. Esto desgraciadamente no se puede hacer con una sola posición, porque si, por ejemplo, la línea que da el punto único la denominamos $a$, entonces hay que agregarle o quitarle lo que sea necesario para conseguir la relación que hay entre el punto único los que se encuentran con dos lados de él. Por tanto, para encontrar un punto único con un punto de los lados podemos denominar la línea que el determina $a+e$.

De forma análoga, para compararlo con un punto al otro lado, se puede denominar $a-e$. Uno queda determinado por la adición y el otro por la sustracción.

Es necesario entonces, hallar un método por el cual $a+e$ y $a-e$ proporcionan ambos el mismo término para representar $a$. Con tal que $a$ represente efectivamente el punto medio.

Todo lo que se encuentra a su lado aumenta o disminuye cuando buscamos un valor más grande o el valor mas pequeño.

Parece que el método proporciona la misma ecuación cuando utilizamos $a+e$ y cuando usamos $a-e$, algo que la experiencia y la razón podrán de manifiesto de seguido.

Dado que $a+e$ y $a-e$ proporcionan , en ambos casos, los mismo términos, observándose una diferencia en los términos en los cuales las potencias son impares porque se presentan como signos opuestos a aquellos en los cuales las potencias son pares, resulta que la ecuación no cambia ni en un caso ni en el otro.

Parece que el método de Fermat $a+e$ proporciona la misma ecuación que $a-e$. pero esto, solo, no es suficiente, porque si la única cosa que necesitas fuera encontrar la misma ecuación cuando hacemos $a+e$ o $a-e$, podríamos agarrar, por ejemplo, los dos términos que tiene $e^2$ o $e^3$, etc. en lugar de agarrar los que tienen solamente $e$ e igualarlos entre si, algo que no seria exitoso. Algo que nunca sucedería.

Es necesario entonces, y dada la extensa presentación precedente, que impone que $a+e$ de la misma ecuación que $a-e$, agregar otra condición:

*Si $a+e$ da el valor más pequeño que no pase por $a$, es necesario también que $a-e$ lo de, si análogamente, si $a+e$ da un valor mas grande que no pasa por $a$, es necesario también que $a-e$ de más grande.*

Se aclarará con el siguiente ejemplo:

**Problema 4.2.** Dividir una línea recta de manera que el sólido que se obtiene con uno de los términos cuando lo multiplican por el cuadrado de otro sea el máximo.

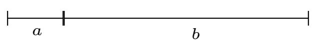


Figura 26: Recta que genera el sólido con volumen máximo.

Sea $a$ uno de los términos de la recta que da el punto único. El sólido será, si la línea dada la hacemos igual a $b$, $ba^2-a^3$. Entonces:

$$\begin{aligned} a+e \text{ dará } & ba^2-a^3+be^2-3ae^2+2bae-3a^2e-e^3, \\ a-e \text{ dará } & ba^2-a^3+be^2-3ae^2-2bae+3a^2e+e^3. \end{aligned}$$

Si tomamos los términos que son medidos sólo por $e$, tendremos que las dos ecuaciones de $a+e$ y $a-e$ darían la misma ecuación, dado que habría que igualar $2bae$ y $3a^2e$.

Si tomamos, en cambio, los términos que son medidos por $e^2$, también tendremos una misma ecuación en el caso $a+e$ y en el caso $a-e$, porque, en ambos casos, tendremos que igualar a $be^2$ a $3ae^2$. Es necesario justificar porque tomamos el caso $e$ simple en lugar que cualquier otra potencia.

La razón es que es necesario que en las dos posiciones los términos homogéneos que se comparan con $ab-a^2$ sean ambos más pequeños que $ba^2-a^3$.

Se hace necesario que:

$$\begin{aligned} & ba^2-a^3+be^2-3ae^2+2bae-3a^2e-e^3 \text{ sea más pequeño que } ba^2-a^3 \\ & ba^2-a^3+be^2-3ae^2-2bae+3a^2e+e^3 \text{ sea más pequeño que } ba^2-a^3 \end{aligned}$$

algo que solamente se consigue igualando entre si los términos que son medidos por las potencia más pequeña de $e$, que en este ejemplo es $e$.

La razón de todo esto es que en términos, por la potencia mas baja de $e$, tiene siempre una relación mas grande que sucede con los que son medidos por $e^2$, y una relación mas grande los términos medidos por $e^3$, $e^4$, etc.

En este ejemplo, si tomamos $a + e$ y consideramos la ecuación de los dos términos medidos solamente por $e$, tendremos de una lado, $2bae$ y del otro $3a^2e$, donde $2bae$ tiene más razón con $3a^2e$ que (si tomamos los dos términos medidos por $e^2$) $be^2$ con $3ae^2$. La justificación de todo esto es que la multiplicación analítica, en la ecuación precedente, dobla la $b$, mientras que aquí es simple.

Si igualamos, entonces, $2bae$ con $3a^2e$, entonces $be^2$ será mas pequeño que $3ae^2$. Con esto probaremos que todos los términos que son marcados por el signo $+$ son mas pequeños que los que lo están por el signo $-$.

La última potencia de $e$, que siempre se encuentra sola, y que en este ejemplo es $e^3$, no cambia en nada el orden de la ecuación sea cual se el signo que este marcado, lo cual se nos muestra con toda claridad por simple observación.

La razón principal de esto es que los dos términos marcados por $e^2$, están en una relación mas grande que no pasas a las potencias superiores a la de $e^2$, sirven de clave para determinar el valor máximo o el valor mínimo. porque, si el termino que esta marcado por un $+$ es más pequeño que el termino marcado por un $-$, m entonces la proposición proporciona un máximo; si en cambio, el que está marcado por un $+$ es de grado superior al término marcado por un $-$, obtenemos el mínimo.

Ahora bien, si usamos $4a - e$, lo dos términos medidos por $e^2$ tendrán el mismo signo.

Y por tanto, todos los términos que estén marcados por el signo $+$ serán inferiores a aquellos, que estén marcados pro el signo $-$.

Y resulta que el método y las razones que he aportado son generales.

## 4.1. Explicaciones alternativas de la solución.

### 4.1.1. Explicación sin derivar.

Si $x$ es uno de los segmentos y $b$ es una recta dada, la expresión del sólido es $bx^2 - x^3$. Si $x_0$ es el valor de $x$ que hace que la expresión consiga alcanzar el valor máximo, entonces $bx^2 - x^3 = M$, donde $M$ es el volumen máximo posible por el solido construido con las condiciones que impone el enunciado. Por el principio de unicidad,resulta que, para otros valores de $x$, como ahora $x_0 \pm h$, tendremos $b(x_0 \pm h)^2 - (x_0 \pm h)^3 < M$. Entonces Fermat extrae las siguientes implicaciones de esta afirmación:

1. Los valores $x_0 + h$ y $x_0 - h$ 'arrojan la misma ecuación'. Es curioso observar el parecido que hay con la técnica de Descartes en La Geometría para determinar la normal, donde, de hecho, el valor único, vale $x_0$ y es doble.

2. Los dos polinomios difieren en los términos en los cuales $h$ tiene exponente impar, que tiene el signo cambiado.

$$(bx_0^2 - x_0^3) + h(bx_0 - 3x_0^3) + h^2(b - 3x) + h^3$$
$$(bx_0^2 - x_0^3) - h(bx_0 - 3x_0^3) + h^2(b - 3x) - h^3$$

3. Usamos la unión de esta dos ecuaciones al mismo tiempo como base para determinar la desigualdad básica que sirve para establecer una ecuación que proporciona el valor $x_0$.

4. Todos los valores diferentes de $x_0$ proporcionan valores inferiores al valor de $M$ cuando se aplican a la ecuación inicial $bx^2 - x^3$.

5. Esto nada más puede pasar cuando el coeficientes de $x_o$ es idénticamente nulo, porque si fuera más grande que 0, el valor para $x_0 + h$ sería más grande que $M$ y en cambio, si fuera más pequeño que 0, el valor para $x_0 - h$ seria mas pequeño que $M$.

6. Por tanto, $2bx_0 - 3x_0^2 = 0$ y, eliminando el valor $x_0$, tendremos $x_0 = \frac{2}{3}b$.

### 4.1.2. Explicación convencional.

El volumen se puede escribir como

$$V(x) = x^2(y - x)$$

donde $x$ corresponde a un lado de la base del sólido e $y$ a la altura de este. Esto se corresponde con el problema planteado en estudio. Derivando e igualando a cero

$$V'(x) = 2xy - 3x^2 = 0$$

por lo tanto se obtiene que $x = \frac{2}{3}y$. Sabemos que esto es máximo ya que $V''(\frac{2}{3}) = -2y < 0$.

# 5. Conclusiones

Fermat sin duda alguna contribuyó al desarrollo de las matemáticas de la primera mitad del siglo XVII. En particular, hemos observado su aporte en problemas de optimización relevantes de la época. Se tiene evidencia de esto por la correspondencia sostenida con Mersenne y el círculo matemático de este último.

Fermat crea una interpretación geométrico-algebraico de la optimización a través de una aproximación del concepto de infinitesimal. Es decir, traslada el problema a un contexto geométrico del cual obtiene relaciones algebraicas que posteriormente *optimiza* introduciendo un parámetro $e$. Como muchos autores han indicado, se dice que Fermat se acerca al concepto de límite. Sin embargo, una revisión de los problemas planteados y sus respectivas soluciones o indicaciones, permite afirmar una vez más que Fermat no define el incremento $e$ utilizado en su metodología y que su idea es netamente geométrica y no numérica.

Además, Fermat intuye la relación entre la recta tangente de una curva y un valor extremo de una función como se mostró en 3.6; donde se evidencia la conexión del uso de la derivada para el cálculo de la tangente en un punto dado como el punto máximo o mínimo.

Tambien, Fermat consigue desarrollar en un caso particular un *polinomio de Taylor* 'rudimentario' gracias a la optimización; explicado en 4.1.1. Decimos que parece un polinomio de Taylor porque considera funciones polinómicas evaluadas en $x + h$ que llevan a una expresión polinómica en $h$.

Todos sus conceptos provienen de la interpretación físico geométrica de los problemas. Es más, se buscan soluciones que tengan una interpretación 'sencilla' y útil. Esto se puede observar en la cicloide, en la maximización del volumen de sólidos, y en este ultimo caso su interpretación se ve determinada por alternativas donde se descarta la que trivialmente no es solución. El método de máximos y mínimos expresado por Fermat no permite, en general, diferenciar cuando se trata de un máximo o de un mínimo. Se presume que Fermat no necesitaba esto ya que se podía predecirlo dados los problemas planteados.

Fermat y Descartes utilizan la notación de Viète. En el caso de Fermat esto se evidencia en el sección 3.4. También, Fermat utiliza el concepto de lo que hoy conocemos como ordenada y abscisa del sistema de referencia cartesiano mas no lo explica. Sería interesante profundizar en la influencia de Viète sobre esto grandes matemáticos y quizás otros personajes de la época.

Fermat, Descartes y Roberval, quizás guiados por Mersenne, compartían el interés de hallar un método para el cálculo de la recta tangente o, equivalemntemente, la recta normal de una curva dada. El método de Roberval es quizás es el más físico de todos. Su método utilizaba el concepto vectorial de las velocidades y de ahí la respuesta de Descartes a su método. También se aprecia que el método desarrollado por Fermat sería, dentro de lo que cabe, el más generalizado y a su vez el más sencillo de los tres. Como se mencionó en la introducción, ya Descartes había reconocido la ventaja del método de Fermat con respecto al que él había propuesto. Esto se puede apreciar en los cálculos desarrollados por cada uno de estos para hallar la tangente de la elipse.

Los cálculos hechos por Fermat eran muchos más engorrosos; como es de esperarse, la geometría es netamente euclidiana y requiere un dominio de ésta para poder aplicar su metodología. Los problemas matemáticos de la época en gran medida eran de origen físico como son el caso de la cisoide de Roberval y la cuadratriz de Dinostrato entre otros. Sin embargo, Fermat logra separar levemente el concepto físico de la idea matemática al proponer su método expuesto en la sección 3.

El método analizado carece de una demostración general, que en repetidas veces Fermat consideró innecesario expuesto en palabras de Fermat repetidas veces a largo de este escrito. Se puede apreciar que si bien Fermat gozaba de una capacidad para las matemáticas envidiable, quizás por su estilo de vida, intereses y formación (recordemos que no estudio formalmente matemáticas), para él no era necesario el formalismo y el rigor matemático. Esto es cónsono con la demostración de su último teorema, el cual muchos ponen en duda que haya demostrado.

# Índice de figuras

## Referencias

[1] Arenzana H, Víctor: Las curvas mecánicas en la geometría griega: La cuadratriz de Dinostrato. Revista Suma 28. Junio 1999 p. 31-36.

[2] Baron, Margaret E.: The origins of the infintesimal Calculus. Dover Phoenix Editions Oxford, New York Pergamon Press, 1969.

[3] Boyer B. Carl: The history of the calculus and its conceptual development: the concepts of the calculus, 1994.

[4] Brassine M. E.: Précis de Œuvres mathematiques de Pierre Fermat, et de l'arithmetique de Diophante, 1853.

[5] Dorce i Polo, C.: *Història de la Matemàtica, des de Mesopotàmia fins al Renaixement.* 2a ed. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2015. ISBN 978-84-475-4217-8.

[6] Dorce i Polo, C.: *Història de la Matemàtica, Des del segle XVII fins a l'inici de l'època contemporània.* 1a ed. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2014. ISBN 978-84-475-3799-0.

[7] Pla i Carrera, J; Viader i Canals, P.; Paradís i Balux, J. *Pierre de Fermat 1601-1665. Obra mateàtica vària.* Traducció comentada i anotada. Barcelona 2008.

[8] Sabra A.I. *Theories of Light. From Descartes to Newton.* Cambridge University Press. Canada, 1981. ISBN 0 521 28436 8

[9] Tannery, P; Henry, C. *Œuvres de Fermat* . Tome Première Œuvres mathématiques diverses. -Observation sur Diophante. . Ministere de l'Instruction Publique. París, 1891.

[10] Tannery, P; Henry, C. *Œuvres de Fermat* . Tome Deuxième Correspondance. Ministere de l'Instruction Publique. París, 1895.

[11] Tannery, P; Henry, C. *Œuvres de Fermat* . Tome Troisème Supplément a la correspondance. Appendice. Notes et Tables. Ministere de l'Instruction Publique. París, 1896.

[12] Tannery, P; Henry, C. *Œuvres de Fermat* . Tome Troisème Correspondance. Ministere de l'Instruction Publique. París, 1912.