Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teorema de Lyapunov

Autora: Soraya García Heredia

Director: Dr. Gerard Gómez Muntané

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de juny de 2019

Abstract

In this work we study the Lyapunov theorem, which gives us a way to find periodic solutions for Hamiltonian systems. In the second part of the document we have the study of The Restricted Three Body Problem.

Resum

El teorema de Lyapunov ens dóna condicions necessàries d'existència de solucions periòdiques en sistemes diferencials no lineals pròximes a les solucions periòdiques de la seva part lineal. En aquest treball estudiem aquest teorema aplicat a sistemes que admeten integral primera, més concretament a sistemes Hamiltonians. A més, fem un petit estudi del problema restringit de tres cossos i relacionem els resultats amb el teorema treballat.

2010 Mathematics Subject Classification. 34K13, 70F07

Agraïments

Primer de tot voldria donar-li les gràcies al meu tutor Dr.Gerard Gómez per haver-me guiat en aquest treball i per tota l'ajuda donada.

Seguidament vull agrair a tots els companys i amics que he trobat durant la carrera que han fet que aquest camí sigui molt millor, especialment a Raquel i Laura per tot el suport que he rebut de vosaltres.

Finalment agrair a la meva família que sempre ha estat al meu costat i als meus amics de sempre.

Gràcies a tots de veritat per creure en mi.

Índex

1 Introducció

El projecte

El teorema de Lyapunov ens diu que donat un sistema d'equacions diferencials, el qual admet una integral primera, existeix una família uniparamètrica de solucions periòdiques si els valors propis són de la forma $\pm i\beta, \lambda_3, \cdots, \lambda_m$ tal que $\frac{\lambda_i}{i\beta}$ no és un enter. A més ens diu que el període de les solucions és proper a $\frac{2\pi}{\beta}$.

En aquest treball, fem l'estudi d'aquest teorema començant per uns exemples motivadors. A més, ens centrarem en la demostració del teorema utilitzant dos mètodes. El primer mètode de demostració es fa mitjançant el teorema de bifurcació de Hopf i el segon es basa en la demostració de manera més metòdica.

Finalment fem un petit estudi del problema restringit dels tres cossos, donant les equacions del moviment per a diferents sistemes de referència (inercial i sinòdic) i calculem els punts d'equilibri, seguidament fem un estudi de l'estabilitat dels punts i apliquem el teorema de Lyapunov en el cas on sigui possible per demostrar l'existència d'òrbites periòdiques.

Estructura de la Memòria

Comencem la memòria presentant alguns conceptes preliminars i algunes propietats, principalment sobre els valors propis que anirem utilitzant durant el treball, majoritàriament en la demostració metòdica del teorema. A més, aquest primer capítol serveix per fixar la nomenclatura que utilitzarem.

En el capítol 3 comencem tractant el teorema de Lyapunov mitjançant dos exemples previs motivadors, a continuació fem la demostració del teorema utilitzant el teorema de bifurcació de Hopf. Finalment, fem també la demostració d'una manera més constructiva.

El capítol 4 tracta el problema restringit de 3 cossos, obtenim les equacions del moviment utilitzant un sistema d'equacions inercial i un altre sinòdic. A més, transformem les equacions per a un sistema Hamiltonià. En el desenvolupament del capítol busquem les solucions d'equilibri del problema i estudiem la seva estabilitat. Finalment relacionem aquest problema amb el teorema de Lyapunov.

En l'últim capítol trobem les conclusions a les quals arribem un cop hem desenvolupat tota la memòria.

2 Preliminars

Abans de començar presentem uns conceptes preliminars i propietats que tindrem en compte durant el desenvolupament del treball.

2.1 Definicions preliminars

Definició 2.1. [2] *Sigui $\dot{x}(t) = f(x(t))$ un sistema d'equacions diferencials, sigui Ω l'espai de fase. Considerem una funció $g(x(t))$ amb derivades contínues en Ω, diem que $g(x(t))$ és integral primera de $\dot{x}(t) = f(x(t))$ si*

$$< grad(g(x(t))), f(x(t)) >= 0$$

Definició 2.2. *[4] Sigui A una matriu $2n \times 2n$, es diu que és simplèctica amb multiplicador $\mu \neq 0$, si*

$$A^T J A = \mu J$$

amb

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\mu = 1$ aleshores es diu que A és simplèctica.

Definició 2.3. [3] *Una funció real (complexa) f és analítica en un punt x_0 del seu domini si existeix una sèrie de potències centrada en x_0 de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

que convergeix en un entorn $U \subseteq \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{C}$) de x_0 de manera que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \forall x \in U$$

Definició 2.4. [4] *Sigui E un subconjunt obert de $\mathbb{R}^{2n}$ i sigui $H \in \mathcal{C}^2(E)$ on $H = H(x, y)$ amb $x, y \in \mathbb{R}^n$. Un sistema de la forma*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

amb

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T$$

es denomina sistema Hamiltonià amb n graus de llibertat en E.

[2] C.Fernández; Fco.J.Vázquez; J.M.Vegas: Ecuaciones diferenciales y en diferencias
[3] `https://es.wikipedia.org/wiki/Funcion_analitica`
[4] M.Swager;L.L.Harvard: Hamiltonian Systems and Chaos Overview.

Definició 2.5. *[2] Siguin* $f(x) = \sum_l a_{l_1,\cdots,l_m} x_1^{l_1}, \cdots, x_m^{l_m}$ *i* $g(x) = \sum_l b_{l_1,\cdots,l_m} x_1^{l_1}, \cdots, x_m^{l_m}$ *dues sèries de potències, no necesàriament convergents, diem que* $g(x)$ *és una sèrie majorant de* $f(x)$, $f \prec g$, *si*

$$|a_{l_1,\cdots,l_m}| \leq b_{l_1,\cdots,l_m}$$

per a tots els coeficients.

Estimacions de Cauchy [5]

Si

$$f(y) = \sum a_n y^n,$$

és una sèrie de potències convergent en un entorn obert de l'origen de radi r, tal que $\max_{|y|\leq r} |f(y)| = d$, aleshores

$$|a_n| r^n \leq \max_{|y|=r} |f(y)|, \quad n = 0, 1, \cdots \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq \frac{d}{r^n}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

d'aquesta manera podem escriure

$$f(y) \prec d\left(1 - \frac{y}{r}\right)^{-1} = d\left(1 + \frac{y}{r} + \frac{y^2}{r^2} + \cdots\right)$$

Si $y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, i per $\|y\| \leq r$ la funció f està fitada, $\max_{\|y\|=r} |f(y)| = d$, aleshores

$$f(y) \prec d \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{y_l}{r}\right)^{-1}$$

2.2 Valors propis

Considerem un sistema de m equacions diferencials de primer ordre

$$\dot{x} = f(x), \; x \in \mathbb{R}^m \tag{2.1}$$

tal que $f(0) = 0$ i les f_k són analítiques en un entorn de $x = 0$, és a dir, són de la forma

$$f_k(x) = \sum_{l=0}^{m} a_{kl} x_l + ...$$

o equivalentment

$$f(x) = Ux + ...$$

on $U = (a_{kl})$. Aleshores reformulant obtenim el sistema lineal

$$\dot{x} = Ux \tag{2.2}$$

del qual intentarem buscar solucions periòdiques que tractarem d'estendre al cas no lineal. Si el sistema (2.1) és Hamiltonià (o bé té una integral primera) podem construir una solució periòdica de (2.1) a través de la solució periòdica de (2.2).

[5] H.Cartan. Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.Selecciones Científicas,1968

Lema 2.6. *Suposem que U té tots els valors propis diferents* $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \Rightarrow \exists C$ *no singular tal que*

$$C^{-1}UC = \ L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

on C no és única.

Lema 2.7. *Les columnes* $C^{(k)}$ *de la matriu de canvi de base queden determinades excepte un factor constant* p_k.

Demostració: Per a resoldre el sistema $\dot{x} = Ux$. Suposem que U té tots els valors propis diferents $\lambda_1, ..., \lambda_m$ aleshores utilitzant el lema 2.6 tenim que $\exists\ C$ no singular tal que

$$C^{-1}UC = \ L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Sigui $C^{(1)}, ..., C^{(m)}$ les columnes de C, que queden determinades per:

$$UC = CL \leftrightarrow UC^{(k)} = C^{(k)}\lambda_k \quad per \quad k = 1 \div m \leftrightarrow (\lambda_k I - U)C^{(k)} = 0$$

Però, observem que la matriu $\lambda_k I - U = C(\lambda_k I - L)C^{-1}$ (pel fet que λ_k són diferents) té rang $m-1$. Aleshores les $C^{(k)}$ queden determinades excepte un factor constant p_k. $\square$

Definició 2.8. *Considerem*

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_m \end{pmatrix}$$

amb p_i *arbitraris,* $p_i \neq 0$ *i* $B = CP$ *amb* $detB \neq 0$

Lema 2.9. *Aleshores* $B^{-1}UB = L$

Demostració: $B^{-1}UB = P^{-1}C^{-1}UCP = P^{-1}LP = L.$ $\square$

Observació 2.10. Observem que les $C^{(k)}$ estan determinats per factors diferents de zero.

Considerem ara un sistema Hamiltonià $H = H(w)$ on $w = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ analític en un entorn de l'origen que suposem punt d'equilibri. Sigui

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

matriu canònica simplèctica.
La sèrie de potències de H comença amb un terme quadràtic que podem expressar com

$$H = \frac{1}{2}w^T Gw + \ldots \quad on \ \ G = (H_{w_i w_k}) \tag{2.5}$$

Aleshores podem expressar $H_w = Gw + \ldots$ i tenim

$$\dot{w} = \ Uw + \ldots \ = \ JGw + \ \ldots$$

(ja que $U = JG$) i el polinomi característic que considerem és $p(\lambda) = |\lambda I - JG|$.

Propietats

(i) $J^T = J^{-1} = -J$ i $|J| = 1$

(ii) $G^T = G$, és a dir, G és simètrica

(iii) $(\lambda I - JG)^T = \lambda I - (JG)^T = \lambda I + G^T(-J)^T = \lambda I + GJ = J(-\lambda I - JG)J$

(iv) $p(\lambda)$ és una funció senar, i.e, $p(\lambda) = |\lambda I - JG| = |-\lambda I - JG| = p(-\lambda)$

Lema 2.11. *Si λ és una arrel de $p(\lambda)$ també ho és $-\lambda$. Suposem que tots els valors propis són simples i diferents de 0 $\Rightarrow \exists C$ matriu invertible tal que*

$$C^{-1}JGC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n \end{pmatrix} = L = \begin{pmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & -L_0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

on la transformació $w = Cz$ és canònica, quan C és simplèctica.

Demostració: Volem demostrar que C és simplèctica, primer de tot considerem diferents transformacions de la matriu C. Si considerem la transposició de (2.6) obtenim:

$$\begin{array}{rclcl} C^{-1}JGC = L & \Rightarrow & JGC = CL & \Rightarrow^T & (JGC)^T = (CL)^T \Rightarrow \\ C^TG(-J) = LC^T & \Rightarrow & C^TGJ = -LC^T \Rightarrow & & C^TG = -LC^TJ^{-1} \end{array}$$

D'altra banda tenim que $-LJ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & L_0 \\ L_0 & 0 \end{pmatrix}$ és simètrica. Ho podem comprovar veient que $-LJ^{-1} = -(LJ^{-1})^T$, per tant

$$\begin{aligned} -LJ^{-1} &= -\begin{pmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & -L_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_0 \\ L_0 & 0 \end{pmatrix} \\ -(LJ^{-1})^T &= -(J^{-1})^TL^T = -(-J)^TL = -JL = \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & L_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_0 \\ L_0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

aleshores $LJ^{-1} = JL$.

Tenim que

$$\begin{aligned} C^TGJ = -LC^T \Rightarrow JC^TGJ = -JLC^T &\Rightarrow JC^TG = -JLC^TJ = LJ^{-1}C^TJ \\ &\Rightarrow JC^TG = LJ^{-1}C^TJ \end{aligned}$$

aleshores si calculem

$$\begin{aligned} (J^{-1}C^TJ)JG &= -JC^TJ^2G = JC^TG = -LC^TJ^{-1} = \\ &= -J(LC^TJ^{-1}) = JLC^TJ = LJ^{-1}C^TJ \\ &\Rightarrow (J^{-1}C^TJ)JG(J^{-1}C^TJ)^{-1} = L \end{aligned}$$

(on hem considerat $-J^2 = I$; $C^T G = -LC^T J^{-1}$; $JL = LJ^{-1}$).

Sigui $B = (J^{-1}C^T J)^{-1}$ tal que

$$\begin{cases} |B| \neq 0 \\ B^{-1}JGB = L \end{cases}$$

aleshores la matriu queda determinada com $C = BP$ on

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

és una matriu diagonal invertible amb P_1 i P_2 matrius diagonals de dimensió $n \times n$.
Per defició de B , a més, obtenim que

$$\left.\begin{array}{r} B^{-1} = J^{-1}C^T J \Rightarrow JB^{-1} = C^T J \Rightarrow C^T JC = JB^{-1}C = JP = \begin{pmatrix} 0 & P_2 \\ -P_1 & 0 \end{pmatrix} \\ (C^T JC)^T = C^T J^T C = -C^T JC \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 = P_2$$

Sigui

$$Q = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

demostrem que $Q^T JQ = JP$.

D'una banda

$$Q^T JQ = \begin{pmatrix} P_1^T & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^T & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -P_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P_1^T \\ -P_1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'altra banda

$$JP = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P_1 \\ -P_1 & 0 \end{pmatrix}$$

i la igualtat és certa, ja que P_1 és una matriu diagonal, aleshores $P_1 = P_1^T$.

Finalment, reanomenem $\bar{C} = CQ^{-1}$ aleshores

(i) $\bar{C}^{-1}JG\bar{C} = QC^{-1}JGCQ^{-1} = QLQ^{-1} = L$

(ii) $\bar{C}^T J\bar{C} = (Q^{-1})^T C^T JCQ^{-1} = (Q^T)^{-1}Q^T JPQ^{-1} = (Q^T)^{-1}Q^T JQQ^{-1} = J \Rightarrow C$ és simplèctica.

(iii) $\bar{C}^T G\bar{C} = -(\bar{C}^T J\bar{C})\bar{C}^{-1}JG\bar{C} = -J\bar{C}^{-1}JG\bar{C} = -JL = \begin{pmatrix} 0 & L_0 \\ L_0 & 0 \end{pmatrix}$

Aleshores diem que G l'hem dut a la seva forma normal via una transformació canònica.
□

3 Teorema de Lyapunov

El problema que ens plantegem en aquest treball és trobar solucions periòdiques d'un sistema diferencial amb almenys una integral primera, com pot ser un sistema Hamiltonià, pròxima a la solució periòdica del sistema lineal. El resultat per aquest problema és conegut com a teorema de Lyapunov.

Teorema 3.1 (Lyapunov). *Considerem el sistema*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \tag{3.1}$$

on f és una funció diferenciable que val zero ella i les seves primeres derivades per $x = 0$. Suposem que el sistema admet una integral primera de la forma $I(x) = \frac{1}{2}x^T Sx + \cdots$ amb $S = S^T$ i $detS \neq 0$. Siguin els valors propis de A de la forma $\pm i\beta, \lambda_3, \cdots, \lambda_n, \beta \neq 0$. Aleshores si $\frac{\lambda_i}{i\beta} \notin \mathbb{Z}$ per $j = 3 \div n$ el sistema té una família uniparamètrica de solucions periòdiques que quan tendeix cap a l'origen el seu període ho fa cap a $\frac{2\pi}{\beta}$. [1]

Primer de tot tractem aquest teorema en un parell d'exemples.

3.1 Exemples previs motivadors

Exemple 3.2. En aquest primer exemple podem observar que la part lineal del sistema té solucions periòdiques però en canvi el sistema no lineal no té cap solució periòdica. Considerem el següent sistema d'equacions diferencials

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y + x(x^2+y^2)^p \\ \dot{y} & = & x + y(x^2+y^2)^p \end{array}\right\}$$

$p \in \mathbb{N}$, on el sistema lineal és de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y \\ \dot{y} & = & x \end{array}\right\}$$

és centre lineal amb solucions

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) \\ y & = & \alpha\sin(t) - \beta\cos(t) \end{array}\right\}$$

és a dir, totes les solucions són periòdiques. Si prenem coordenades polars

$$\left.\begin{array}{c} x = r\cos(\phi) \\ y = r\sin(\phi) \end{array}\right\}$$

tenim que

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi} \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi} \end{array}\right\}$$

A més, sabem que $x^2 + y^2 = r^2$.

Substituint directament a les equacions inicials obtenim

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi} & = & -r\sin(\phi) + r^{2p+1}\cos(\phi) \\ \dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi} & = & r\cos(\phi) + r^{2p+1}\sin(\phi) \end{array}\right\}$$

i operant correctament acabem obtenint

$$\left.\begin{array}{rcl}\dot{r} & = & r^{2p+1} \\ \dot{\phi} & = & 1\end{array}\right\}$$

amb solució

$$\left.\begin{array}{rcl}r & = & (a-2pt)^{-\frac{1}{2p}} \\ \phi & = & b+t\end{array}\right\}$$

Tal i com hem avançat, les solucions no lineals del sistema no són solucions periòdiques, de fet, excepte $r=0$, les solucions són espirals i, per tant, no són periòdiques.

Exemple 3.3. En aquest segon exemple, podem veure que aquest sistema té solucions periòdiques associades a un valor propi, però en canvi l'altre valor propi no en té. Considerem el següent sistema Hamiltonià:

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2) - x_2^2 - y_2^2 + x_1y_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2-y_1^2)y_2$$

El sistema diferencial corresponent és:

$$\left.\begin{array}{rcl}\dot{x_1} & = & y_1 + x_1x_2 - y_1y_2 \\ \dot{x_2} & = & -2y_2 + \frac{1}{2}(x_1^2-y_1^2) \\ \dot{y_1} & = & -x_1 - y_1x_2 - x_1y_2 \\ \dot{y_2} & = & 2x_2 - x_1y_1\end{array}\right\}$$

Observem que l'origen és una solució d'equilibri. El sistema lineal és:

$$\begin{array}{ll}\dot{x_1} = y_1 & \dot{y_1} = -x_1 \\ \dot{x_2} = -2y_2 & \dot{y_2} = 2x_2\end{array}$$

Amb polinomi característic $p(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4$, que trobem de fer el determinant de:

$$\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}$$

I els valors propis d'aquest polinomi característic són $\lambda_1 = i, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -i, \lambda_4 = -2i$. Si considerem el valor propi λ_2, observem que existeix una família de solucions periòdiques que es pot construir explícitament prenent com a condicions inicials $x_1 = y_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl}x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & \alpha\cos(2t) - \beta\sin(2t) \\ y_1 & = & 0 \\ y_2 & = & \alpha\sin(2t) + \beta\cos(2t)\end{array}$$

que són cercles al pla (x_2, y_2) de període π.

Si en canvi prenem com a valor propi λ_1, podem veure que no existeixen solucions periòdiques amb períodes pròxims a 2π. Pel teorema d'unicitat de solucions $p = x_1^2 + y_1^2$ sempre és positiva per les solucions que no són de la forma ja considerada($x_1 = 0$, $y_1 = 0$).

Anomenem $q = x_2^2 + y_2^2$. El sistema diferencial pot escriure's amb termes d'aquestes dues variables com: $\ddot{p} = 4pq + p^2$ i observem que $p^2 > 0$ i $4pq \geq 0 \Rightarrow \ddot{p} > 0$. Aleshores $p(t)$ és una funció estrictament convexa i no és periòdica, per tant no existeixen solucions periòdiques addicionals.

A continuació passem a veure la demostració del teorema mitjançant dos mètodes, el primer utilitzant el teorema de bifurcació de Hopf i el segon de manera més metòdica.

3.2 Demostració mitjançant el Teorema de Hopf

Teorema 3.4 (bifurcació de Hopf). *Sigui*

$$\dot{x}(t) = F(x(t), \mu) \tag{3.2}$$

un sistema autònom d'equacions diferencials ordinàries que depèn d'un paràmetre real μ. Suposarem que $F(x, \mu)$ és dues vegades diferenciable respecte les dues variables i a més, $x = x(\mu)$ és una família de punts d'equilibri de (3.2) tal que $F(x(\mu), \mu) = 0$. Sense pèrdua de generalitat suposarem $x(\mu) = 0$, i.e, $F(0, \mu) = 0$. Suposem que per a un cert valor de μ, $\mu = 0$, la matriu $F_x(0, \mu)$ té dos valors propis imaginaris purs $\pm i\beta$ i no té cap altre valor propi de $F_x(0, 0)$ que és múltiple enter de $i\beta$. Si $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ és la continuació del valor propi $i\beta$ (per tant, $\alpha(0) = 0$), suposarem que $\alpha'(0) \neq 0$.
Aleshores existeixen funcions diferenciables $\mu = \mu(\epsilon)$, $T = T(\epsilon)$ depenent d'un paràmetre ϵ, amb $\mu(0) = 0$, $T(0) = \frac{2\pi}{\beta}$ tals que hi ha solucions periòdiques no constants $x(t, \epsilon)$ de (3.2) amb període $T(\epsilon)$ que tendeixen cap a l'origen si $\epsilon \to 0$. [1]

Demostració: Considerem un canvi lineal de coordenades i introduïm un temps fictici $\tau = \beta(\mu)t$ i podem fer el canvi:

$$\dot{x} = F(x, \mu) \longrightarrow \begin{array}{rcl} \dot{x_1} &=& (a(\mu) + i)x_1 + f_1(x_1, x_2, y, \mu) \\ \dot{x_2} &=& (a(\mu) - i)x_2 + f_2(x_1, x_2, y, \mu) \\ \dot{y} &=& B(\mu)y + g(x_1, x_2, y, \mu) \end{array} \tag{3.3}$$

S'aconsegueix tenint en compte el desenvolupament de Taylor

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= F(0, \mu) = F(0, 0) + DF(0, 0)x + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(\mu) + i\beta(\mu) & & \\ & \alpha(\mu) - i\beta(\mu) & \\ & & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} + \cdots \end{aligned}$$

Considerant el canvi que hem fet tenim les igualtats següents:

$$\tau = \beta(\mu)t \qquad \frac{d\tau}{dt} = \beta(\mu) \qquad \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\beta(\mu)} \frac{d}{dt}$$

Considerem la notació

$$t\frac{d}{dt} = \dot{}, \quad \tau\frac{d}{d\tau} = '$$

i obtenim

$$\dot{x_1} = \frac{1}{\beta(\mu)} \frac{d}{dt} x_1 = x_1' = (\alpha(\mu) + i\beta(\mu))x_1 + f_1(x_1, x_2, y, \mu) = \left(\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)} + i \right) x_1 + f_1(x_1, x_2, y, \mu)$$

$$\dot{x_2} = \frac{1}{\beta(\mu)}\frac{d}{dt}x_2 = x_2' = (\alpha(\mu) - i\beta(\mu))x_2 + f_2(x_1, x_2, y, \mu) = \left(\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)} - i\right)x_2 + f_2(x_1, x_2, y, \mu)$$

on notarem $a(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}$ i obtenim el sistema (3.3) que volíem amb $y \in \mathbb{R}^{n-2}$ i $B(\mu) = B_0 + O(\mu)$ matriu de dimensió $(n-2) \times (n-2)$ no necessàriament en forma canònica, però B_0 no té cap valor propi de la forma $n \cdot i$, $n \in \mathbb{Z}$. A més, les funcions f_1, f_2, g i les seves primeres derivades parcials s'anul·len quan $x_1 = x_2 = y = 0$.
Introduïm els factors d'escala:

$$\begin{aligned} \mu &= \epsilon\mu_1 \\ x_j &= \epsilon^2\xi_j, \quad j = 1, 2 \\ y &= \epsilon^2\eta \end{aligned}$$

i obtenim el sistema

$$\begin{aligned} \epsilon^2\dot{\xi}_1 &= (a(\epsilon\mu_1) + i)\epsilon^2\xi_1 + f_1(\epsilon^2\xi_1, \epsilon^2\xi_2, \epsilon^2\eta, \epsilon\mu_1) \\ \epsilon^2\dot{\xi}_2 &= (a(\epsilon\mu_1) - i)\epsilon^2\xi_2 + f_2(\epsilon^2\xi_1, \epsilon^2\xi_2, \epsilon^2\eta, \epsilon\mu_1) \\ \epsilon^2\dot{\eta} &= B(\epsilon\mu_1)\eta + g(\epsilon^2\xi_1, \epsilon^2\xi_2, \epsilon^2\eta, \epsilon\mu_1) \end{aligned}$$

considerant el desenvolupament de Taylor

$$a(\epsilon\mu_1) = a(0) + \epsilon\mu_1 a'(0) + \frac{(\epsilon\mu_1)^2}{2}a''(0) + \cdots = \epsilon\mu_1 a'(0) + O(\epsilon^2)$$

aleshores

$$\begin{aligned} \epsilon^2\dot{\xi}_1 &= (\epsilon\mu_1 a'(0) + i)\epsilon^2\xi_1 + f_1(\epsilon^2\xi_1, \epsilon^2\xi_2, \epsilon^2\eta, \epsilon\mu_1) \\ \epsilon^2\dot{\xi}_2 &= (\epsilon\mu_1 a'(0) - i)\epsilon^2\xi_2 + f_2(\epsilon^2\xi_1, \epsilon^2\xi_2, \epsilon^2\eta, \epsilon\mu_1) \\ \epsilon^2\dot{\eta} &= B(\epsilon\mu_1)\eta\epsilon^2 + g(\epsilon^2\xi_1, \epsilon^2\xi_2, \epsilon^2\eta, \epsilon\mu_1) \end{aligned}$$

i finalment s'obtenen les equacions

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= i\xi_1 + \epsilon\mu_1 a'(0)\xi_1 + O(\epsilon^2) \\ \dot{\xi}_2 &= -i\xi_2 + \epsilon\mu_1 a'(0)\xi_2 + O(\epsilon^2) \\ \dot{\eta} &= B_0\eta + O(\epsilon) \end{aligned}$$

Si busquem solucions periòdiques de període pròxim a 2π, veiem que:

- per $\epsilon = 0$, hem de fer $\eta = 0$ i ξ_1, ξ_2 amb condicions inicials arbitràries. A causa del caràcter autònom podem prendre $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 1$ i obtenim la solució 2π periòdica $\xi_1 = e^{it}$ i $\xi_2 = e^{-it}$.

- per $\epsilon \neq 0$ podem trobar solucions periòdiques pròximes de període $T = 2\pi(1 + \epsilon\delta)$ si podem verificar les condicions de periodicitat següents:

$$\begin{aligned} \xi_j(T) - \xi_j(0) &= 0, \quad \textit{per} \quad j = 1, 2 \\ \eta(T) - \eta(0) &= 0 \end{aligned}$$

  amb $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 1$ i $\eta(0) = \eta_0$.
  Verificant primer la tercera equació tenim

$$\begin{aligned} \eta(t) = \eta_0 e^{B_0 t} + O(\epsilon) \quad &\Rightarrow \quad \eta(2\pi(1+\epsilon\delta)) = \eta_0 e^{2\pi B_0 + 2\pi\epsilon\delta B_0} + O(\epsilon) \\ \eta(T) - \eta(0) \quad &= \quad (e^{2\pi B_0} - I)\eta_0 + O(\epsilon) \end{aligned}$$

Per la primera equació tenim:

$$\xi_1(t) = e^{(i+\epsilon\mu_1 a'(0))t} + O(\epsilon^2)$$

$$\xi_1(T) = e^{2\pi i+2\pi\epsilon(\mu_1 a'(0)+\delta i)+O(\epsilon^2)} + O(\epsilon^2) \Rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon}(\xi_1(T)-1) = i\delta + a'(0)\mu_1 + O(\epsilon)$$

i anàlogament obtenim també la segona equació, trobant així les anomenades equacions de bifurcació:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{1}{2\pi\epsilon}(\xi_1(T)-1) = i\delta + a'(0)\mu_1 + O(\epsilon) = 0\\
\Gamma_2 &= \frac{1}{2\pi\epsilon}(\xi_2(T)-1) = -i\delta + a'(0)\mu_1 + O(\epsilon) = 0\\
\Gamma &= \eta(T) - \eta_0 = (e^{2\pi B_0} - I)\eta_0 + O(\epsilon) = 0
\end{aligned}$$

Si $\epsilon = 0$ aquest sistema té solució única $\delta = 0$, $\mu_1 = 0$, $\eta_0 = 0$ i calculem

$$\frac{\partial(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma)}{\partial(\delta, \mu_1, \eta_0)} = \begin{pmatrix} i & a'(0) & 0 \\ -i & a'(0) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi B_0} - I \end{pmatrix}$$

que té rang n.
Aleshores pel teorema de la funció implícita el sistema té solució $\delta(\epsilon), \mu_1(\epsilon), \eta_0(\epsilon)$ si $|\epsilon| \neq 0$ tal com volíem veure.

$\square$

Observacions 3.5.
1. Normalment al teorema de Hopf es demana que la parella de valors propis que creuen l'eix imaginari sigui única, aquí només cal excloure els casos ressonants.
2. La funció $F(x, \mu)$ pot ser $\mathcal{C}^r$ o analítica, aleshores la família de solucions periòdiques depèn de ϵ, $\mathcal{C}^{r-1}$ o analíticament.

Demostració:[Teorema de Lyapunov]
Considerem el sistema modificat

$$\dot{x} = Ax + f(x) + \mu gradI(x)$$

Anem a veure què es verifiquen les condicions del teorema de Hopf i que les solucions periòdiques no estacionàries es donen únicament si $\mu = 0$.
Per veure la segona afirmació avaluem $\frac{dI}{dt}$ al llarg de les solucions del sistema modificat.

$$\frac{dI}{dt} =< gradI(x), \dot{x} >=< gradI(x), Ax + f(x) + \mu gradI(x) >= \mu|gradI(x)|^2$$

ja que $I(x)$ és integral primera de $\dot{x} = Ax+f(x)$ (a més, hem utilitzat que $< gradI(x), Ax+ f(x) >= 0$) aleshores $\frac{1}{\mu}\frac{dI}{dt}$ és una funció monòtona creixent excepte si

$$gradI(x(t)) = 0 \Rightarrow Sx(t) + \cdots = 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

Si volem aplicar el teorema de Hopf, només cal veure com es comporta la part real del valor propi pròxim a $i\beta$. Fent una transformació lineal podem escriure la part lineal del sistema inicial en forma canònica, suposant que ja ho hem fet tenim:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

on $\tilde{A}$ és una matriu de dimensió $(n-2)\times(n-2)$. Com que $I(x) = \frac{1}{2}x^T Sx + \cdots$ és integral primera aleshores

$$0 =< gradI(x), Ax + f(x) >=< x^T S + \cdots , Ax + f(x) >\Rightarrow x^T SAx = 0$$

que trasposant i sumant obtenim $SA + A^T S = 0$, aquesta condició ens diu que S és del tipus

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & \tilde{S} \end{pmatrix}$$

amb $a \neq 0$, ja que $detS \neq 0$. De la matriu

$$A + \mu S = \begin{pmatrix} \mu a & \beta & 0 \\ -\beta & \mu a & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A} + \mu\tilde{S} \end{pmatrix}$$

tenim que el valor pròxim a $i\beta$ té part real $\alpha(\mu) = a\mu$ i per tant, $\alpha'(0) = a \neq 0$ i podem aplicar el teorema de Hopf. □

3.3 Demostració clàssica

En aquesta demostració més constructiva, primer de tot demostrarem l'existència del teorema i de les solucions periòdiques i per finalitzar trobem la demostració de la convergència de les sèries de potències que utilitzem en la primera part de la demostració.[2]

Demostració: Considerem un sistema d'equacions diferencials no lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{3.4}$$

Suposem que la matriu U té valors propis $\lambda_1, \lambda_2 = -\lambda_1$ (difereixen només en signe), és a dir, $Spec(Df) = \{\lambda_1, \lambda_2 = -\lambda_1, \cdots\}$.

Busquem una solució particular on considerem $x_1(t), \cdots, x_m(t)$ com a sèries de potències de dues funcions auxiliars desconegudes $\xi = \xi(t)$ i $\eta = \eta(t)$, de manera que

$$x(t) = x(\xi(t), \eta(t))$$

Suposarem que totes les sèries de potències són convergents i més endavant ho demostrarem. Aleshores l'equació diferencial (3.4) es transforma en

$$x_\xi(\xi, \eta)\dot{\xi} + x_\eta(\xi, \eta)\dot{\eta} = f(x(\xi, \eta)) \tag{3.5}$$

Suposem que les funcions $\xi(t)$ i $\eta(t)$ satisfan

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha\xi \\ \dot{\eta} &= \beta\eta \end{aligned} \tag{3.6}$$

on α i β també són sèries de potències en $\xi(t)$ i $\eta(t)$

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha(\xi,\eta) &= \sum_{i,j} \alpha_{ij}\xi^i\eta^j \\ \beta = \beta(\xi,\eta) &= \sum_{i,j} \beta_{ij}\xi^i\eta^j \end{aligned}$$

D'aquesta manera, podem reescriure l'equació diferencial (3.5) com

$$x_\xi(\xi,\eta)\xi\alpha + x_\eta(\xi,\eta)\eta\beta = f(x(\xi,\eta)) \tag{3.7}$$

que cal resoldre formalment com una igualtat entre sèries de potències en ξ i η.

Considerem el canvi lineal $x = Cy$ per diagonalitzar la diferencial de f, que transforma (3.7) en

$$y_\xi\xi\alpha + y_\eta\eta\beta - \mathfrak{L}y = g(y) \tag{3.8}$$

on la sèrie de potències

$$g(y) = C^{-1}G(Cy) - \mathfrak{L}y$$

comença amb termes quadràtics, i on $\mathfrak{L}$ és la matriu diagonal

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Considerant aquest canvi lineal tenim

$$\begin{aligned} x_\xi &= Cy_\xi \\ x_\eta &= Cy_\eta \end{aligned}$$

A més, considerant $f(x) = Ux + G(x)$ i que $C^{-1}UC = \mathfrak{L}$, tenim

$$\begin{aligned} Cy_\xi\xi\alpha + Cy_\eta\eta\beta &= UCy + G(Cy) \Rightarrow \\ y_\xi\xi\alpha + y_\eta\eta\beta &= C^{-1}UCy + C^{-1}G(Cy) \Rightarrow \\ y_\xi\xi\alpha + y_\eta\eta\beta &= \mathfrak{L}y + g(y) \end{aligned}$$

i obtenim l'equació (3.8). A continuació, considerem la component k-èsima de (3.8)

$$(y_k)_\xi\xi\alpha + (y_k)_\eta\eta\beta - \lambda_k y_k = g_k(y) \tag{3.9}$$

i les $m+2$ sèries que cal calcular són $y_k(\xi,\eta)$ $(k = 1,\cdots,m)$, $\alpha(\xi,\eta)$ i $\beta(\xi,\eta)$ que obtindrem igualant els coeficients de $\xi^p\eta^q$ en (3.9).

Imposem les següents tres condicions:

1. Les sèries $y_1 - \xi$, $y_2 - \eta$, y_k per $k = 3 \div m$ han de començar amb termes quadràtics.

2. No hi haurà terme de la forma $\xi(\xi\eta)^l$ en $y_1 - \xi$, tampoc hi haurà terme de la forma $\eta(\xi\eta)^l$ en $y_2 - \eta$.

3. Les sèries $\alpha(\xi, \eta)$ i $\beta(\xi, \eta)$ estaran en potències del producte de $\xi\eta = w$.

A més, suposarem que els m valors propis $\lambda_1, \lambda_2 = -\lambda_1, \lambda_3, \cdots, \lambda_m$ són diferents i que les divisions $\frac{\lambda_3}{\lambda 1}, \cdots, \frac{\lambda_m}{\lambda_1}$ no són enteres.
Ara, volem afegir les $m+2$ sèries de potències $y_k(\xi, \eta), \alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta)$ amb els coeficients indeterminats en l'equació (3.8) i comparar les parts lineals

$$\begin{array}{rcl}(y_1)_\xi\xi\alpha + (y_1)_\eta\eta\beta - \lambda_1 y_1 & = & g_1(y) \\ (y_2)_\xi\xi\alpha + (y_2)_\eta\eta\beta + \lambda_1 y_2 & = & g_2(y) \\ & \vdots & \\ (y_k)_\xi\xi\alpha + (y_k)_\eta\eta\beta - \lambda_k y_k & = & g_k(y), \qquad k = 3 \div m\end{array}$$

Per això, considerem les hipòtesis i observem que les sèries són de la forma

- $y_1 - \xi = \sum (y_1)_{jk}\xi^j\eta^k \Rightarrow y_1 = \xi + \sum (y_1)_{jk}\xi^j\eta^k = \xi + y_{20}\xi^2 + y_{21}\xi\eta + y_{22}\eta^2 + y_{30}\xi^3 + y_{32}\xi\eta^2 + y_{33}\eta^3 + \cdots$
- $y_2 - \eta = \sum (y_2)_{jk}\xi^j\eta^k \Rightarrow y_2 = \eta + \sum (y_2)_{jk}\xi^j\eta^k = \eta + y_{20}\xi^2 + y_{21}\xi\eta + y_{22}\eta^2 + y_{30}\xi^3 + y_{31}\xi^2\eta + y_{33}\eta^3 + \cdots$
- $\alpha(\xi, \eta) = \sum_{j\geq 0} \alpha_j(\xi\eta)^j = \alpha_0 + \alpha_1(\xi\eta) + \alpha_2(\xi\eta)^2 + \cdots$
- $\beta(\xi, \eta) = \sum_{j\geq 0} \beta_j(\xi\eta)^j = \beta_0 + \beta_1(\xi\eta) + \beta_2(\xi\eta)^2 + \cdots$
- $(y_1)_\xi = 1 + 2y_{20}\xi + y_{21}\eta + 3y_{30}\xi^2 + y_{32}\eta^2 + \cdots$
- $(y_1)_\eta = y_{21}\xi + 2y_{22}\eta + 2y_{32}\xi\eta + 3y_{33}\eta^2 + \cdots$
- $\xi\alpha = \xi\alpha_0 + \alpha_1\xi^2\eta + \alpha_2\xi^3\eta^2 + \cdots$
- $\eta\beta = \beta_0\eta + \beta_1\xi\eta^2 + \beta_2\eta^3\xi^2 + \cdots$
- $(y_2)_\xi = 2y_{20}\xi + y_{21}\eta + 3y_{30}\xi^2 + 2y_{31}\xi\eta + \cdots$
- $(y_2)_\eta = 1 + y_{21}\xi + 2y_{22}\eta + y_{31}\xi^2 + 3y_{33}\eta^2 + \cdots$
- $y_k = y_{20}\xi^2 + y_{21}\xi\eta + y_{22}\eta^2 + y_{30}\xi^3 + y_{31}\xi^2\eta + y_{32}\xi\eta^2 + y_{33}\eta^3 + \cdots$
- $(y_k)_\xi = 2y_{20}\xi + y_{21}\eta + 3y_{31}\xi^2 + 2y_{31}\xi\eta + y_{32}\eta^2 + \cdots$
- $(y_k)_\eta = y_{21}\xi + 2y_{22}\eta + y_{31}\xi^2 + 2y_{32}\xi\eta + 3y_{33}\eta^2 + \cdots$

Utilitzant la primera equació i comparant només la part lineal tenim que

$$(y_1)_\xi\xi\alpha + (y_1)_\eta\eta\beta - \lambda_1 y_1 = g_1(y) = 0$$

$$\xi\alpha_0 - \lambda_1\xi = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \lambda_1$$

i utilitzant la segona equació obtenim

$$(y_2)_\xi\xi\alpha + (y_2)_\eta\eta\beta + \lambda_1 y_2 = g_2(y) = 0$$

$$\eta\beta_0 + \eta\lambda_1 = 0 \Rightarrow \beta_0 = -\lambda_1$$

Obtenim que els termes constants de les sèries $\alpha(\xi,\eta), \beta(\xi,\eta)$ són λ_1 i $-\lambda_1$ respectivament.

Sigui $s \in \mathbb{N}$, suposem que comparant els coeficients d'ordre $\leq s$ en (3.8) queden únicament determinats els coeficients fins a s en $y(\xi,\eta)$ i fins a $s-1$ en $\alpha(\xi,\eta)$ i $\beta(\xi,\eta)$.
Comparant els coeficients en termes de la forma $\xi^p\eta^q$ on $(p+q=s+1)$ en (3.8), observem que, donat que $g(y)$ comença amb termes quadràtics, per a $g(y)$ el coeficient en qüestió és un polinomi en els coeficients ja coneguts de $y_1, \cdots, y_m$.
Sigui γ el coeficient que volem trobar de $\xi^p\eta^q$ en $y_k(\xi,\eta)$, considerem

$$\begin{aligned}
(y_k)_\xi \xi\alpha + (y_k)_\eta \eta\beta - \lambda_k y_k &= g_k(y) \Rightarrow \\
(y_k)_\xi(\lambda_1\xi + \cdots) + (y_k)_\eta(-\lambda_1\eta + \cdots) - \lambda_k y_k &= g_k(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum p y_k \xi^{p-1}\eta^q\right)\xi\alpha + \left(\sum q y_k \xi^p \eta^{q-1}\right)\eta\beta - \lambda_k y_k &= g_k(y) \\
\left(\sum p y_k \xi^p \eta^q\right)\lambda_1 - \left(\sum q y_k \xi^p \eta^q\right)\lambda_1 - \lambda_k y_k &= g_k(y) \\
(\lambda_1(p-q) - \lambda_k)\gamma &= g_k(y)
\end{aligned}$$

Suposem que no estem en el cas $k=1$ i $p=q+1$ o $k=2$ i $q=p+1$, com que al costat dret tenim un polinomi amb coeficients coneguts i el coeficient $(\lambda_1(p-q)-\lambda_k)$ és diferent de zero, aleshores γ queda unívocament determinat.

D'altra banda

- Si $k=1$ i $p=q+1$ tenim

  $$(\lambda_1(q+1-q) - \lambda_1)\gamma = (\lambda_1 - \lambda_1)\gamma = g_1(y)$$

  on $\gamma = \xi^{q+1}\eta^q$
- Si $k=2$ i $q=p+1$ tenim

  $$(\lambda_1(p-p-1) + \lambda_1)\gamma = (-\lambda_1 + \lambda_1)\gamma = g_2(y)$$

  on $\gamma = \xi^p\eta^{p+1}$

en tots dos casos, la segona de les tres condicions que hem imposat ens diu que $\gamma = 0$. Malgrat això, encara cal afegir al costat esquerre el coeficient indeterminat de $w^q = (\xi\eta)^q$ en $\alpha(\xi,\eta)$ si $k=1$ i el coeficient $w^p = (\xi\eta)^p$ en $\beta(\xi,\eta)$ si $k=2$, mentre que els altres termes són ja coneguts.
Llavors tenim que la hipòtesi és certa per $s+1$ en lloc de per s, i també és certa per $s=1$, l'equació (3.8) queda únicament determinada sota aquestes condicions.

Si ara suposem que el sistema és Hamiltonià, podem veure que $\alpha(\xi,\eta) = -\beta(\xi,\eta)$.
Considerem una nova notació, sigui

$$\begin{aligned}
z_k &= x_k \\
z_{k+n} &= y_k, \quad (k = 1 \div n)
\end{aligned}$$

en lloc de les m variables $y_1, \cdots, y_m$, i corresponentment $\lambda_{n+1} = -\lambda_1$. Considerem un sistema Hamiltonià tal que

$$H = \frac{1}{2} z^T C^T G C z + \cdots = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k + \cdots$$

està en la seva transformació canònica.

Observem que

$$\dot{z} = JH_z = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{z_1} \\ \vdots \\ H_{z_n} \\ \vdots \\ H_{z_{2n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \\ \dot{z}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{z_{n+1}} \\ \vdots \\ H_{z_{2n}} \\ -H_{z_1} \\ \vdots \\ -H_{z_n} \end{pmatrix}$$

L'equació (3.8) es transforma en

$$z_\xi \xi \alpha + z_\eta \eta \beta = JH_z, \qquad dH = H_\xi d\xi + H_\eta d\eta$$

Recordem que $J^{-1} = -J$ i $J^T = -J$, aleshores

$$\begin{aligned} H_z &= J^{-1}(z_\xi \xi \alpha + z_\eta \eta \beta) = -J(z_\xi \xi \alpha + z_\eta \eta \beta) \\ H_z^T &= -(\xi \alpha z_\xi^T + \eta \beta z_\eta^T) J^T = (\xi \alpha z_\xi^T + \eta \beta z_\eta^T) J \\ dz &= z_\xi d\xi + z_\eta d\eta \end{aligned}$$

i tenim que

$$\begin{aligned} dH = Hz^T dz &= (\alpha \xi z_\xi^T + \beta \eta z_\eta^T) J (z_\xi d\xi + z_\eta d\eta) \\ &= \xi \alpha z_\xi^T J z_\xi d\xi + \xi \alpha z_\xi^T J z_\eta d\eta + \eta \beta z_\eta^T J z_\xi d\xi + \eta \beta z_\eta^T J z_\eta d\eta \\ &= (\alpha \xi z_\xi^T J z_\xi + \eta \beta z_\eta^T J z_\xi) d\xi + (\alpha \xi z_\xi^T J z_\eta + \eta \beta z_\eta^T J z_\eta) d\eta \\ &= \eta \beta z_\eta^T J z_\xi d\xi + \alpha \xi z_\xi^T J z_\eta d\eta = (\alpha \xi d\eta - \beta \eta d\xi) z_\xi^T J z_\eta \end{aligned}$$

ja que $z_\xi^T J z_\xi = 0$ i $z_\eta^T J z_\eta = 0$, a més , $z_\eta^T J z_\xi = -z_\xi^T J z_\eta$

Considerant $z_\xi^T J z_\eta = \triangle$ obtenim

$$H_\xi = -\beta \eta \triangle, \quad H_\eta = \alpha \xi \triangle$$

$$\alpha \xi H_\xi + \beta \eta H_\eta = 0 \tag{3.10}$$

on H és una sèrie de potències en ξ, η. Observant (3.10) veurem que H és una sèrie de potències amb només factors de la forma $\omega = \xi \eta$.
Suposem que hem demostrat que els termes d'ordre $\leq$ s en H són polinomis només amb coeficients en $\xi \eta$.

Com que

$$H = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k + \cdots = \lambda_1 \xi \eta + \cdots$$

aleshores és cert per $s = 2$.
Sigui $\gamma \xi^p \eta^q$ $(p + q = s + 1)$ el terme d'ordre $s + 1$. Com que $\alpha(\xi, \eta) = \lambda_1 + \cdots$ i $\beta(\xi, \eta) = -\lambda_1 + \cdots$, utilitzant (3.10), tenim la identitat

$$\lambda_1(\eta H_\eta - \xi H_\xi) = (\alpha - \lambda_1)\xi H_\xi + (\beta + \lambda_1)\eta H_\eta$$

on els factors $\alpha - \lambda_1$ i $\beta + \lambda_1$ són sèries de potències en $\xi\eta$ sense terme constant. Utilitzant la hipòtesi, els termes de la dreta $\leq s + 2$ formen un polinomi només amb coeficients de $\xi\eta$, mentre que els coeficients de l'esquerra de $\xi^p\eta^q$ són $\lambda_1(q - p)\gamma$. Aleshores $\gamma = 0$ quan $p \neq q$ i l'afirmació és certa per $s + 1$ en lloc de per s.

Ara que H només depèn de $\xi\eta$, tenim que

$$H_\xi = \eta H_w \qquad H_\eta = \xi H_w$$

on $\omega = \xi\eta$ i l'equació (3.10) es converteix en

$$(\alpha + \beta) w H_w = 0$$

Com que la sèrie $wH_w = \lambda_1 w + \cdots$ no és identicament 0, tenim que

$$\alpha(\xi, \eta) + \beta(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \alpha(\xi, \eta) = -\beta(\xi, \eta) \tag{3.11}$$

Tornant al cas general, per veure que existeixen solucions periòdiques, considerem

$$x_\xi \xi \alpha + x_\eta \eta \beta = f(x)$$

i suposant que la nostra solució satisfà $\alpha(\xi, \eta) + \beta(\xi, \eta) = 0$. Considerant (3.7) i (3.11), obtenim

$$\dot{\omega} = \dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta} = (\alpha + \beta)\xi\eta = 0$$

on ω, α, β són independents de t. Resolent (3.6) tenim

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\alpha t}, \;\; \eta(t) = \eta_0 e^{\beta t} \tag{3.12}$$

- Suposem que la sèrie $f(x)$ només té coeficients reals i que λ_1 és purament imaginari, aleshores els valors inicials ξ_0, η_0 de $\xi(t)$ i $\eta(t)$ quan $t = 0$ s'escullen de manera que $\overline{\xi_0} = \rho_1 \eta_0$ per $|\xi_0|$ suficientment petit. Pel nostre cas, tenim que $\alpha = \alpha(\xi, \eta) = \alpha(\xi_0, \eta_0)$ i $\beta = \beta(\xi, \eta) = \beta(\xi_0, \eta_0)$ són complexes conjugats, per tant, per (3.11) són purament imaginaris. Conseqüentment, observant (3.12) tenim $\overline{\xi} = \rho_1 \eta$ per tot t real mentre $|\xi| = |\xi_0|$, aleshores la solució $x(\xi, \eta)$ és real.

  Així que, (3.12) dóna una família de solucions periòdiques reals del sistema $\dot{x} = f(x)$ que depèn del paràmetre complex ξ_0.Donat que el costat dret del sistema d'equacions diferencials és independent de t, cada corba de solució es transforma en si mateixa si t es canvia per $t + c$, per qualsevol c arbitrari, aleshores és suficient escollir $\xi_0 = \rho \geq 0$. El valor del període és $\tau(\rho) = \frac{2\pi}{|\alpha|}$ on $\alpha = \lambda_1 + \cdots$ tq $\tau(0) = \frac{2\pi}{|\lambda_1|}$.

  Observant (3.12), la sèrie de potències que hem obtingut es pot escriure com una sèrie de Fourier en múltiples angles de $|\alpha|t$.

- Si $f(x)$ té coeficients reals i λ_1 és real tal que $\lambda_2 = -\lambda_1$, aleshores podem escollir els valors inicials ξ_0, η_0 reals amb $|\xi_0|, |\eta_0|$ suficientment petits. En aquest cas $\alpha = \alpha(\xi, \eta) = \alpha(\xi_0, \eta_0)$ i $\beta = \beta(\xi, \eta) = \beta(\xi_0, \eta_0) = -\alpha$ són reals, i per (3.12) tenim que ξ, η són reals per a tot t real. Així que per $|t|$ suficientment petit, la sèrie $x(\xi, \eta)$

és convergent i real.
En el pla (ξ, η) les solucions de (3.12) defineixen una família d'hipèrboles equilàteras que depenen del paràmetre real $\xi_0\eta_0$, més exactament, si tenim en compte els signes de ξ_0 i η_0, tenim 4 famílies d'hipèrboles. En conclusió, tenim 4 famílies uniparàmetriques de corbes de solució real del sistema $\dot{x} = f(x)$.
Si $\alpha > 0$ i $\beta = -\alpha < 0$, llavors

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha t} & \longrightarrow \infty & si & t \to +\infty \\ e^{\beta t} & \longrightarrow \infty & si & t \to -\infty \end{array}$$

Per tant, segons (3.12) per $\xi_0\eta_0 \neq 0$, ξ, η es manté pròxim a l'origen per un interval finit de temps. Mentre que l'origen es mou al llarg del eix η si $\xi_0 = 0, \eta_0 \neq 0, t \to \infty$ o en l'eix de ξ si $\xi_0 \neq 0, \eta_0 = 0, t \to -\infty$.
Els dos possibles signes per η_0 o ξ_0 dóna 4 solucions de $x(t)$ que s'aproxima asimptòticament a la solució d'equilibri si $t \to \infty$ o $t \to -\infty$ respectivament.

Amb $e^{\alpha t} = q$, $x_k(t)$ $(k = 1 \div m)$ es pot expressar com una sèrie de Laurent en la variable q i té període purament imaginari $\frac{2\pi i}{\alpha}$ en t.

Ara demostrarem la convergència de les sèries de potències utilitzant el "mètode dels majorants". Suposem que tenim les solucions de

$$y_\xi \xi\alpha + y_\eta \eta\beta - \mathfrak{L}y = g(y) \tag{3.13}$$

i imposem que satisfaga la relació

$$\alpha(\xi, \eta) + \beta(\xi, \eta) = 0$$

que és certa sempre si considerem que el sistema és Hamiltonià.
Escrivim la component k-èsima $(k = 1, \cdots, m)$ de l'equació (3.13) com

$$(y_k)_\xi \xi\alpha + (y_k)_\eta \eta\beta - \lambda_k y_k = g_k(y) \tag{3.14}$$

i cal que calculem les $m + 2$ sèries, igualant els coeficients de $\xi^p\eta^q$ en (3.14).
Sigui $h = h(\xi, \eta)$ una sèrie de potències en ξ i η, escriurem

$$h = h(\xi, \eta) = \sum \{h\}_{pq}\xi^p\eta^q$$

$$|\overline{h}| = |\overline{h(\xi, \eta)}| = \sum |\{h\}_{pq}|\xi^p\eta^q$$

En particular

$$\begin{aligned} y_k(\xi, \eta) &= \sum \{y_k\}_{pq}\xi^p\eta^q \\ (y_k)_\xi \xi &= \sum p\{y_k\}_{pq}\xi^p\eta^q \\ (y_k)_\eta \eta &= \sum q\{y_k\}_{pq}\xi^p\eta^q \\ \alpha &= \lambda_1 + \sum_{r \geq 1} \{\alpha\}_{rr}\xi^r\eta^r \end{aligned} \tag{3.15}$$

Tenint en compte que $\alpha = -\beta$, i substituint les expressions de (3.16) en (3.14), obtenim

$$((y_k)_\xi \xi - (y_k)_\eta \eta))\alpha - \lambda_k y_k = g_k(y)$$

subtituint tenim

$$\left(\sum p\{y_k\}_{pq}\xi^p\eta^q - \sum q\{y_k\}_{pq}\xi^p\eta^q\right)\left(\lambda_1 + \sum_{r\geq 1}\{\alpha\}_{rr}\xi^r\eta^r\right) - \lambda_k y_k = g_k(y)$$

i operant una mica

$$\begin{aligned}\lambda_1 \sum (p-q)\{y_k\}_{pq}\xi^p\eta^q \quad &+ \quad \left(\sum (p-q)\{y_k\}_{pq}\xi^p\eta^q\right)\left(\sum_{r\geq 1}\{\alpha\}_{rr}\xi^r\eta^r\right) - \lambda_k \sum \{y_k\}_{pq}\xi^p\eta^q = \\ &= \quad \sum \{g_k(y)\}_{pq}\xi^p\eta^q\end{aligned}$$

i igualant els coeficients de $\xi^p\eta^q$, resulta

$$(\lambda_1(p-q) - \lambda_k)\{y_k\}_{pq} + \sum_{r=1}^{\min(p,q)} (p-q)\{y_k\}_{p-r,q-r}\{\alpha\}_{rr} = \{g_k(y)\}_{pq} \tag{3.16}$$

Observem que considerem el sumatori fins el $\min(p,q)$ perquè no s'anul·lin els coeficients. Ara dividirem per $\lambda_1(p-q) - \lambda_k$ quan sigui possible, així que considerem dos casos:

1. Si $\lambda_1(p-q) - \lambda_k \neq 0$
   Sigui $c_1 > 0$ una constant, tal que
   $$\left|\frac{1}{\lambda_1(p-q)-\lambda_k}\right| < c_1, \quad \left|\frac{p-q}{\lambda_1(p-q)-\lambda_k}\right| < c_1,$$
   alehores, considerant (3.16) podem escriure
   $$|\{y_k\}_{pq}| \leq c_1 \left|\{g_k(y)\}_{pq}\right| + c_1 \sum_{r=1}^{\min(p,q)} \left|\{y_k\}_{p-r,q-r}\{\alpha\}_{rr}\right| \tag{3.17}$$
   obtinguda dividint per $\lambda_1(p-q) - \lambda_k$ i acotant.

2. Si $\lambda_1(p-q) - \lambda_k = 0$
   En aquesta situació, recordant que $\lambda_2 = -\lambda_1$, hem de considerar els dos casos següents:
   $$\begin{aligned}\lambda_1(p-q) - \lambda_1 = 0 \Rightarrow k = 1, p-q = 1,\\ \lambda_1(p-q) + \lambda_1 = 0 \Rightarrow k = 2, q-p = 1,\end{aligned}$$
   En ambdos casos, utilitzant l'equació (3.16), obtenim
   - Si $k = 1$ i $p = q+1$, aleshores
     $$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{q}(q+1-q)\{y_1\}_{q+1-r,q-r}\{\alpha\}_{rr} \quad &= \quad \{g_1(y)\}_{q+1,q} \Rightarrow\\ \sum_{r=1}^{q}\{y_1\}_{q+1-r,q-r}\{\alpha\}_{rr} \quad &= \quad \{g_1(y)\}_{q+1,q}\end{aligned}$$
     és a dir,
     $$\{y_1\}_{q,q-1}\{\alpha\}_{11} + \{y_1\}_{q-1,q-2}\{\alpha\}_{22} + \cdots + \{y_1\}_{10}\{\alpha\}_{qq} = \{g_1(y)\}_{q+1,q}$$
     que té per solució
     $$\{y_k\}_{pq} = 0 \quad si \quad p+q > 1, \quad \{y_1\}_{10} = 1, \quad \{\alpha\}_{qq} = \{g_1(y)\}_{q+1,q}$$

- Si $k=2$ i $q=p+1$, aleshores

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{p}(p-p-1)\{y_2\}_{p-r,p+1-r}\{\alpha\}_{rr} &= \{g_2(y)\}_{p,p+1} \Rightarrow \\ -\sum_{r=1}^{p}\{y_2\}_{p-r,p+1-r}\{\alpha\}_{rr} &= \{g_2(y)\}_{p,p+1} \end{aligned}$$

és a dir,

$$-\{y_2\}_{p-1,p}\{\alpha\}_{11}-\{y_2\}_{p-2,p-1}\{\alpha\}_{22}-\cdots-\{y_2\}_{01}\{\alpha\}_{pp}=\{g_2(y)\}_{p,p+1},$$

que té per solució

$$\{y_k\}_{pq}=0 \quad si \quad p+q>1, \quad \{y_2\}_{01}=1, \quad |\{\alpha\}_{pp}|=\{g_2(y)\}_{p,p+1}$$

Aleshores tenim

$$\begin{aligned} |\{\alpha\}_{qq}| &= |\{g_1(y)\}_{q+1,q}| \\ |\{\alpha\}_{pp}| &= |\{g_2(y)\}_{p,p+1}| \end{aligned} \tag{3.18}$$

Definim

$$\begin{aligned} y_1^* &= y_1-\xi \\ y_2^* &= y_2-\eta \\ y_k^* &= y_k \quad k=1,\cdots,m \\ \alpha^* &= \alpha-\lambda_1 \end{aligned}$$

Multiplicant (3.17) per $\xi^p\eta^q$ i sumant respecte k, p i q obtenim

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{p,q}|\{y_k\}_{pq}|\xi^p\eta^q\right) &\leq c_1\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{p,q}|\{g_k(y)\}_{pq}|\xi^p\eta^q\right)+ \\ &+ c_1\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{p,q}\sum_{r=1}^{min(p,q)}|\{y_k\}_{p-r,q-r}||\{\alpha\}_{rr}|\xi^p\eta^q\right) \\ &= c_1\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{p,q}|\{g_k(y)\}_{pq}|\xi^p\eta^q\right)+ \\ &+ c_1\sum_{k=1}^{m}\left(\left(\sum_{p,q}|\{y_k\}_{pq}|\xi^p\eta^q\right)\left(\sum_{r\geq 1}|\{\alpha\}_{rr}|\xi^p\eta^q\right)\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

que és certa per tot k, p i q, excepte pels casos on $k=1$, $p=q+1$ i $k=2$, $q=p+1$. D'aquesta manera obtenim

$$\sum_{k=3}^{m}|\overline{y_k^*}|\prec c_1\left(\sum_{k=3}^{m}|\overline{g_k(y)}|+|\overline{\alpha^*}|\sum_{k=3}^{m}|\overline{y_k^*}|\right) \tag{3.20}$$

A l'anterior expressió cal afegir els termes corresponents a $k=1,2$. Si multipliquem (3.18) per $\xi^p\eta^q$, i sumem respecte p i q, i utilitzem (3.20) obtenim

$$(\xi+\eta)\mid\overline{\alpha^*}\mid+\sum_{k=1}^{m}\mid\overline{y_k^*}\mid\prec c_1\left(\sum_{k=1}^{m}\mid\overline{g_k(y)}\mid+\mid\overline{\alpha^*}\mid\sum_{k=1}^{m}\mid\overline{y_k^*}\mid\right) \tag{3.21}$$

que no té cap terme derivat.
Ara volem trobar una estimació de $\mid \overline{g_k(y)} \mid$. Considerem $c_2, \cdots, c_8$ constants positives. Les m funcions $f_k(x)$ $(k = 1 \div m)$ suposarem que són regulars per valors pròxims a $x = 0$, aleshores les funcions $g_k(y)$ definides a partir d'aquestes, són regulars per $y = 0$. Si $g_k(y)$ és regular per $\mid y_l \mid \leq c_2$ $(l = 1 \div m)$ i si prenem valors absoluts, observem que és $\leq c_3$, mitjançant l'estimació de Cauchy trobem la relació

$$g_k(y) \prec c_3 \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{y_l}{c_2}\right)^{-1}$$

amb $y_1, \cdots, y_m$ com variables independents.
Considerem $s = y_1 + \cdots + y_m$ i tenim

$$\prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{y_l}{c_2}\right)^{-1} \prec \left(1 - \frac{s}{c_2}\right)^{-m} \prec \frac{c_4}{1 - c_5 s}$$

i com que $g_k(y)$ comença amb termes quadràtics, tenim que

$$g_k(y) \prec \frac{c_6 s^2}{1 - c_5 s} \qquad (k = 1 \div m) \tag{3.22}$$

D'altra banda, sigui

$$\sum_{k=1}^{m} \mid \overline{y_k^*} \mid = S \tag{3.23}$$

naturalment es té que

$$\mid \overline{s} \mid \prec \xi + \eta + S$$

i utilitzant (3.21),(3.22) i (3.23) tenim que

$$(\xi + \eta) \mid \overline{\alpha^*} \mid + S \prec c_1 \left(\frac{c_6(\xi + \eta + S)^2}{1 - c_5(\xi + \eta + S)} + \mid \overline{\alpha^*} \mid S \right) \tag{3.24}$$

Observem que és suficient provar la convergència de S i $\mid \overline{\alpha^*} \mid$ per valors pròxims de $\xi = 0, \eta = 0$, i com tots els coeficients són positius o igual a 0, és suficient considerar el cas $\xi = \eta$.
Com que S comença amb termes quadràtics de ξ, η, l'expressió

$$2 \mid \overline{\alpha^*} \mid + \xi^{-1} S = U$$

és una sèrie de potències en ξ amb coeficients no negatius i sense terme constant, mentre que (3.24) implica que

$$U \prec c_7 \left(\frac{\xi(1 + U)^2}{1 - 2c_5\xi(1 + U)} + U^2 \right) \tag{3.25}$$

ja que $\xi = \eta$

$$2\xi|\overline{\alpha^*}| + S \prec c_1 \left(\frac{c_6(2\xi + S)^2}{1 - c_5(2\xi + S)} + |\overline{\alpha^*}|S \right)$$

dividint per ξ

$$\begin{aligned}
2|\overline{\alpha^*}| + \xi^{-1}S &\prec \xi^{-1}c_1\left(\frac{c_6(2\xi+S)^2}{1-c_5(2\xi+S)} + |\overline{\alpha^*}|S\right) \Rightarrow \\
U &\prec c_7\left(\frac{c_6(2\xi+S)^2}{1-c_5(2\xi+S)} + |\overline{\alpha^*}|S\right) \Rightarrow \\
U &\prec c_7\left(\frac{\xi(1+U)^2}{1-2c_5\xi(1+U)} + U^2\right)
\end{aligned}$$

ja que

$$\begin{aligned}
|\overline{\alpha^*}|S &\prec U^2 = (2|\overline{\alpha^*}| + \xi^{-1}S)^2 \\
(2\xi+S)^2 &\prec \xi(1+U)^2 = \xi(1+2|\overline{\alpha^*}| + \xi^{-1}S)^2 \\
1-c_5(2\xi+S) &\succ 1-2c_5\xi(1+U) = 1-2c_5\xi(1+2|\overline{\alpha_*}| + \xi^{-1}S)
\end{aligned}$$

Per

$$\xi + U + \xi U = V \qquad \text{tal que} \qquad 2\xi U + 2\xi U^2 + U^2 \prec V^2$$

tenim que

$$V \prec \xi + U + V^2 \prec \xi + V^2 + c_7\left(\frac{\xi+V^2}{1-2c_5V} + V^2\right)$$

$$V \prec c\frac{2\xi+V^2}{4-cV}, c = c_8 \tag{3.26}$$

i és suficient provar que V convergeix per valors petits i positius de ξ.
En lloc de (3.26), considerem l'equació

$$W = c\frac{2\xi+W^2}{4-cW} \tag{3.27}$$

on W és una sèrie de potències desconeguda de la forma

$$W = W(\xi) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \xi^l$$

Si el costat dret de (3.27) s'expandeix com a sèrie de potències de W i inserim la sèrie $W(\xi)$, la comparació dels coeficients ens porta a determinar-los de manera recursiva i única, i trobem els γ_l, amb les fórmules recursives, a més, observem que en (3.26), la sèrie W majoritza V, és a dir, volem resoldre

$$W = c\frac{2\xi+W^2}{4-cW} = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \xi^l$$

D'altra banda, per (3.27) tenim

$$cW^2 - 2W + c\xi = 0 \ , \qquad (1-cW)^2 = 1 - c^2\xi$$

tal que

$$2cW \prec (1-cW)^{-2} - 1 = \frac{c^2\xi}{1-c^2\xi}$$

que prova la convergencia de $W(\xi)$ per $|\ \xi\ | < c^{-2}$, i com W majoritza V, aleshores V és convergent. $\square$

4 El problema restringit de 3 cossos

El problema restringit de tres cossos estudia el moviment d'una partícula en el camp d'atracció gravitatòria de dos cossos que es mouen seguint una trajectòria kepleriana al voltant del seu centre de masses.
El problema es redueix en dues dimensions si la partícula i la seva velocitat es troben inicialment en el pla de les trajectòries dels dos cossos.
El problema restringit és una aproximació del problema de 3 cossos general quan un d'ells (partícula) té una massa negligible en comparació als altres dos cossos, i per tant no té influència sobre el moviment dels altres dos. El problema es basa en l'estudi del moviment de la partícula sota l'acció dels altres dos.
Aquest problema en la seva forma plana queda molt més simplificat amb dos graus de llibertat, en canvi el problema general en té nou. Tot i que aquest problema és menys complex, és un bon model per alguns sistemes, com en el cas de Sol-Terra-Lluna.

4.1 Equacions del moviment en un sistema inercial

Siguin m_1, m_2, m_3 les masses dels 3 cossos. Considerem que m_1 i m_2 giren al voltant del centre de masses mitjançant òrbites circulars influenciats per la força de la gravitació (aquests dos cossos se solen anomenar primaris), i el tercer cos m_3, que es mou en el pla que defineixen els primaris. Suposarem que m_3 és la massa menyspreable i quan convingui $m_1 \gg m_2$. El problema restringit de 3 cossos consisteix en descriure el moviment de m_3 sota aquestes condicions.
Sigui l la distància que hi ha entre els primaris tal que $l = a + b$, on a és la distància de m_2 al centre de masses i b és la distància de m_1 al centre de masses. Sigui ω la velocitat angular amb què es mouen els cossos, aleshores

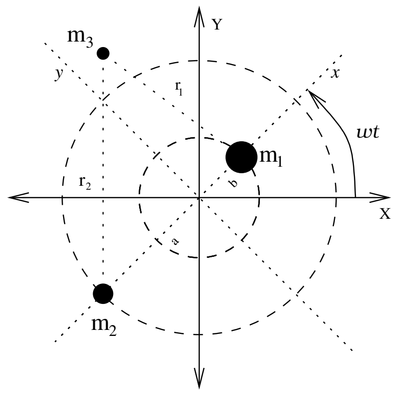

Figura 1: Sistema inercial

$$G\frac{m_1 m_2}{l^2} = m_1 a\omega^2 = m_2 b\omega^2$$

i per tant

$$\left.\begin{array}{rcl} Gm_1 & = & l^2 b\omega^2 \\ Gm_2 & = & l^2 a\omega^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad G(m_1 + m_2) = l^2\omega^2(a + b) \Rightarrow \quad G(m_1 + m_2) = l^3\omega^2$$

Podem observar també que

$$a = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \qquad b = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$

per definició del centre de masses.

Les equacions del moviment de m_3 en el sistema inercial (sideral) que observem en la figura 1, considerant (X, Y, Z) les coordenades de m_3 vénen donades per

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial X}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial Z}$$

on F és la força potencial en negatiu, aleshores

$$F = G\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2}\right)$$

on $r_1 = R_1 = ((X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + (Z - Z_1)^2)^{\frac{1}{2}}$ i $r_2 = R_2 = ((X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 + (Z - Z_2)^2)^{\frac{1}{2}}$ amb (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) coordenades de m_1 i m_2 respectivament. Derivant F tenim que les equacions del moviment són

$$\begin{aligned}
\ddot{X} &= -G\left(\frac{m_1(X - X_1)}{R_1^3} + \frac{m_2(X - X_2)}{R_2^3}\right) \\
\ddot{Y} &= -G\left(\frac{m_1(Y - Y_1)}{R_1^3} + \frac{m_2(Y - Y_2)}{R_2^3}\right) \\
\ddot{Z} &= -G\left(\frac{m_1(Z - Z_1)}{R_1^3} + \frac{m_2(Z - Z_2)}{R_2^3}\right)
\end{aligned}$$

4.2 Equacions del moviment en un sistema sinòdic

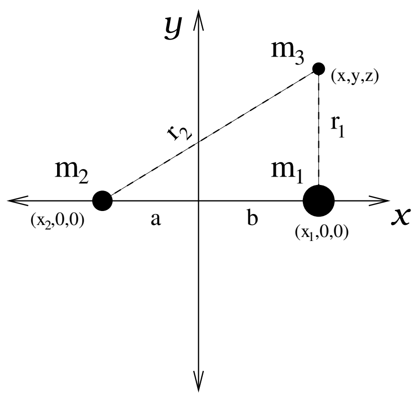

Figura 2: Sistema sinòdic

Observem que la funció de la força, F, depèn explícitament del temps degut al moviment dels primaris, en conseqüència, el seu Hamiltonià també. Volem trobar les equacions del moviment però de manera que siguin adimensionals. Considerant un nou sistema de referència, en aquest cas un sistema sinòdic, tal com es mostra a la figura 2, on m_1 i m_2 es troben en repòs. Siguin $(x_1, 0, 0)$, $(x_2, 0, 0)$ i (x, y, z) les coordenades de m_1, m_2 i m_3 respectivament, aleshores

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -G\left(\frac{m_1(x - x_1)}{r_1^3} + \frac{m_2(x - x_2)}{r_2^3}\right) \\
\ddot{y} &= -G\left(\frac{m_1 y}{r_1^3} + \frac{m_2 y}{r_2^3}\right) \\
\ddot{z} &= -G\left(\frac{m_1 z}{r_1^3} + \frac{m_2 z}{r_2^3}\right)
\end{aligned}$$

on $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}$ i $r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2}$ i en aquest nou sistema de coordenades tenim

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= -Gm_1\frac{x_1 - x}{r_1^3} - Gm_2\frac{x_2 - x}{r_2^3} \\
\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= -Gm_1\frac{y}{r_1^3} - Gm_2\frac{y}{r_2^3} \\
\ddot{z} &= -Gm_1\frac{z}{r_1^3} - Gm_2\frac{z}{r_2^3}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Podem simplificar més les equacions triant adequadament les unitats:

- Prenem la unitat de massa de forma que $m_1 + m_2 = 1$.
- Prenem la unitat de longitud de manera que $l = 1$.
- Prenem la unitat de temps de forma que $G = 1$.

Considerem $\mu = m_2$, amb $0 \leq \mu \leq 1$ i la situem a l'esquerra de l'origen de coordenades. Aleshores tenim que l'altra massa valdrà $m_1 = 1 - \mu$. Ja que l'origen de masses es troba al centre de masses, $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$, tindrem que $x_2 = -\mu$, $x_1 = 1 - \mu$. A causa del seu moviment circular uniforme tenim

$$\begin{aligned}\frac{Gm_1m_2}{l^2} &= m_2|x_2|\omega^2 = m_1|x_1|\omega^2 \Rightarrow \\ \frac{G(m_1+m_2)}{l^2} &= (|x_1| + |x_2|)\omega^2 = l\omega^2\end{aligned}$$

on $G(m_1+m_2) = \omega^2 l^3$ (3ª llei de Kepler), aleshores per com hem escollit la resta d'unitats tenim que $\omega = 1$.
Sigui U el potencial

$$U = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

amb

$$r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2}$$

Prenent l'equació (4.1) i considerant $m_1 + m_2 = 1, r = 1, G = 1, w = 1, m_1 = 1 - \mu$ i $m_2 = \mu$ tenim

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -(1-\mu)\frac{x_1 - x}{r_1^3} - \mu\frac{x_2 - x}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -(1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3} \\ \ddot{z} &= -(1-\mu)\frac{z}{r_1^3} - \mu\frac{z}{r_2^3}\end{aligned}$$

i finalment observem que

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}\end{aligned}$$

Si definim una funció potencial modificada

$$\Omega(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + U + \frac{1}{2}\mu(1-\mu)$$

les equacions del moviment es transformen en

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}\end{aligned}$$

4.3 Formulació Hamiltoniana

En coordenades adequades les equacions del problema restringit es poden escriure en forma Hamiltoniana. Definim

$$p_x = \dot{x} - y, \quad p_y = \dot{y} + x, \quad p_z = \dot{z}$$

Amb aquestes coordenades, i tenint en compte les equacions del moviment, podem escriure

$$\begin{aligned}
\frac{dp_x}{dt} &= \ddot{x} - \dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p_y - x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\Omega(x,y,z) + \frac{1}{2}(p_y - x)^2\right) \\
\frac{dp_y}{dt} &= \ddot{y} + \dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} - p_x - y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\Omega(x,y,z) + \frac{1}{2}(p_x + y)^2\right) \\
\frac{dp_z}{dt} &= \ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\Omega(x,y,z) + \frac{1}{2}p_z^2\right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

per tant, prenem com a funció Hamiltoniana

$$\begin{aligned}
H(x,y,x,p_x,p_y,p_z) &= -\Omega(x,y,z) + \frac{1}{2}(p_y - x)^2 + \frac{1}{2}(p_x + y)^2 + \frac{1}{2}p_z^2 \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\mu(1-\mu) + \\
&+ \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + y p_x - x p_y \\
&= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + y p_x - x p_y - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

amb $r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}$ i $r_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2}$, aleshores, les equacions del moviment són

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\
\dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y} \\
\dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z}, \quad \dot{p_z} = -\frac{\partial H}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

4.4 Solucions d'equilibri del problema restringit

Per a calcular els punts d'equilibri de les equacions del problema restringit, hem de resoldre el sistema

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{p_x} = \dot{p_y} = \dot{p_z} = 0$$

és a dir,

$$\begin{aligned}
p_x + y &= 0 \\
p_y - x &= 0 \\
p_z &= 0 \\
p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^3} &= 0 \\
-p_x - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} &= 0 \\
-\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} &= 0
\end{aligned}$$

Observant la última equació de totes, tenim que

$$-\frac{(1-\mu)z}{r_1^3}-\frac{\mu z}{r_2^3}=-z\left(\frac{(1-\mu)}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right)=0$$

obtenim que $z=0$, ja que el terme en parèntesis és estrictament positiu. La força resultant que actua sobre la partícula situada en qualsevol dels punts d'equilibri ha de ser zero, tenim la força gravitatòria en direcció cap als primaris i la força centrífuga perpendicular a l'eix de rotació z. Conseqüentment els punts d'equilibri els tenim sobre el pla x, y. Utilitzant la resta d'equacions tenim

$$\begin{aligned} x-\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^3} &= 0 \\ y-\frac{(1-\mu)y}{r_1^3}-\frac{\mu y}{r_2^3}=y\left(1-\frac{(1-\mu)}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

i hem d'analitzar per separat el cas $y=0$ i el cas $y\neq 0$

- Suposem que $y=0$, aleshores

  $$r_1=\sqrt{(x-\mu)^2}=|x-\mu| \quad i \quad r_2=\sqrt{(x-\mu+1)^2}=|x-\mu+1|$$

  llavors tenim que

  $$x-\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{|x-\mu|^3}-\frac{\mu(x-\mu+1)}{|x-\mu+1|^3}$$

  i hem de considerar diferents casos

  1. Si $x<\mu$ tenim que $x-\mu<0$ i $x-\mu+1<0$, i podem escriure

     $$x+\frac{(1-\mu)}{(x-\mu)^2}+\frac{\mu}{(x-\mu+1)^2}=0$$

     Per trobar el punt d'equilibri hem de resoldre aquesta equació, operant una mica obtenim un polinomi de grau cinc

     $$\begin{gathered} x^5-x^4(-4\mu+2)+x^3(6\mu^2-6\mu+1)+x^2(-4\mu^3+6\mu^2-2\mu+1) \\ +x(\mu^4-2\mu^3+\mu^2-4\mu+2)+3\mu^2-3\mu+1=0 \end{gathered}$$

  2. Si $\mu<x<\mu-1$ aleshores $x-\mu>0$ i $x-\mu+1<0$, i obtenim

     $$x+\frac{(1-\mu)}{(x-\mu)^2}-\frac{\mu}{(x-\mu+1)^2}=0$$

     anàlogament obtenim el polinomi

     $$\begin{gathered} x^5+x^4(-4\mu+2)+x^3(6\mu^2-6\mu+1)+x^2(-4\mu^3+6\mu^2-4\mu+1) \\ +x(\mu^4-2\mu^3+5\mu^2-4\mu+2)-2\mu^3+3\mu^2-3\mu+1=0 \end{gathered}$$

  3. Si $x>\mu-1$ i per tant $x-\mu>0$ i $x-\mu+1>0$, i tenim

     $$x-\frac{(1-\mu)}{(x-\mu)^2}-\frac{\mu}{(x-\mu+1)^2}=0$$

     i finalment obtenim el polinomi

     $$\begin{gathered} x^5+x^4(-4\mu+2)+x^3(6\mu^2-6\mu+1)+x^2(-4\mu^3+6\mu^2-2\mu-1) \\ +x(\mu^4-2\mu^3+\mu^2+4\mu-2)-3\mu^2+3\mu-1=0 \end{gathered}$$

Els polinomis de cinquè grau que trobem es coneixen com a quíntiques d'Euler. Donant un valor al paràmetre μ i resolent els polinomis, obtenim 3 punts d'equilibri L_1, L_2 i L_3, anomenats punts colineals. Denotarem L_1 al punt que està situat entre les masses i L_2 i L_3 als punts que trobem en el primer cas i en l'últim respectivament.

- Si $y \neq 0$, ara hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^3} \\ 1 &= \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \end{aligned}$$

Si restem de la primera equació la segona multiplicada per x obtenim

$$0 = \frac{\mu(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(\mu-1)}{r_2^3}$$

i operant tenim que $r_1 = r_2$. Si ho substituïm a la segona equació, a més obtenim que $r_1 = r_2 = 1$. I trobem dos punts nous d'equilibri, que formen un triangle equilàter amb els primaris, aquests punts s'anomenen punts de Lagrange o triangulars i obtenim les coordenades $L_4 = (\mu - \frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0)$ i $L_5 = (\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Si donem un valor a μ, els punts d'equilibri es distribueixen de la següent manera:

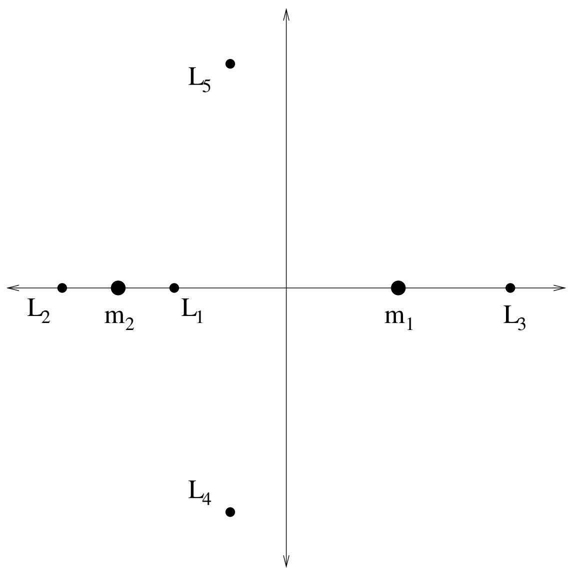

Figura 3: Localització dels punts d'equilibri

4.5 Càlcul de la diferencial de les equacions del moviment als punts d'equilibri

Per estudiar l'estabilitat dels 5 punts d'equilibri considerem

$$\begin{aligned} p_x + y &= \dot{x} \\ p_y - x &= \dot{y} \\ p_z &= \dot{z} \\ p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^3} &= \dot{p_x} \\ -p_x - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} &= \dot{p_y} \\ -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} &= \dot{p_z} \end{aligned}$$

Considerem el canvi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \xi = p_x + y \\ \dot{y} &= \eta = p_y - x \\ \dot{z} &= \zeta = p_z \end{aligned}$$

i derivant

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{p_x} + \dot{y} \\ \dot{\eta} &= \dot{p_y} - \dot{x} \\ \dot{\zeta} &= \dot{p_z} \end{aligned}$$

finalment, substituint podem escriure el camp vectorial del problema restringit com el sistema de primer ordre

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \xi = f_1 \\ \dot{y} &= \eta = f_2 \\ \dot{z} &= \zeta = f_3 \\ \dot{\xi} &= 2\eta + x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-\mu+1) = f_4 \\ \dot{\eta} &= -2\xi + y\left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = f_5 \\ \dot{\zeta} &= -z\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) = f_6 \end{aligned}$$

Seguidament, calculem la diferencial del camp i obtenim

$$Df = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 & 2 & 0 \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & -2 & 0 & 0 \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

on

$$\begin{aligned}
f_{41} &= 1 - r_1^{-5}(1-\mu)(-2(x-\mu)^2 + y^2 + z^2) - r_2^{-5}\mu(-2(x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2) \\
f_{51} &= 3y((x-\mu)r_1^{-5}(1-\mu) + (x-\mu+1)r_2^{-5}\mu) \\
f_{61} &= 3z((x-\mu)r_1^{-5}(1-\mu) + (x-\mu+1)r_2^{-5}\mu) \\
f_{42} &= f_{51} \\
f_{52} &= 1 - r_1^{-5}(1-\mu)((x-\mu)^2 + y^2 + z^2) - r_2^{-5}\mu((x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2) \\
f_{62} &= 3yz(r_1^{-5}(1-\mu) + r_2^{-5}\mu) \\
f_{43} &= f_{61} \\
f_{53} &= f_{62} \\
f_{63} &= -r_1^{-5}(1-\mu)((x-\mu)^2 + y^2 + z^2) - r_2^{-5}\mu((x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2)
\end{aligned}$$

si tenim en compte que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((x-\mu)((x-\mu)^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) = (r_1^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x-\mu)^2(r_1^2)^{-\frac{5}{2}} = r_1^{-5}(-2(x-\mu)^2+y^2+z^2)$$

4.5.1 Càlcul de la diferencial als punts triangulars

Començarem estudiant l'estabilitat dels punts triangulars, així que calculem el valor de la diferencial per $L_4 = \left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ i $L_5 = \left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
Recordem que en aquest cas tenim $r_1 = r_2 = 1$, aleshores

$$\begin{aligned}
(x-\mu) = \left(\mu - \frac{1}{2} - \mu\right) &= -\frac{1}{2} \\
(x-\mu+1) = -\frac{1}{2} + 1 &= \frac{1}{2} \\
(x-\mu)^2 = \left(\mu - \frac{1}{2} - \mu\right)^2 &= \frac{1}{4} \\
y^2 &= \frac{3}{4} \\
(x-\mu+1)^2 = \left(\mu - \frac{1}{2} - \mu + 1\right)^2 &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

i calculant tenim que

$$\begin{aligned}
f_{41} &= 1 - (1-\mu)\left(-\frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) - \mu\left(-2\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \\
f_{51} &= 3\frac{-\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}(1-\mu) + \frac{1}{2}\mu\right) = \frac{-3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4} = a(\mu) \\
f_{61} &= 0 \\
f_{52} &= 1 - (1-\mu)(-\frac{5}{4}) - \mu(-\frac{5}{4}) = \frac{9}{4} \\
f_{62} &= 0 \\
f_{63} &= -(1-\mu)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) - \mu\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = -1
\end{aligned}$$

és a dir,

$$Df(L_4) = Df(L_5) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & a(\mu) & 0 & 0 & 2 & 0 \\ a(\mu) & \frac{9}{4} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A continuació, per calcular els valors propis de la diferencial la descomponem en dues parts, per una banda considerem les files i columnes de les variables z i ζ, aleshores la seva matriu associada és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtenim que el seu polinomi característic és $\lambda^2 + 1$, aleshores els seus valors propis corresponents són $\lambda = \pm i$.
D'altra banda considerem una matriu associada a les variables x, y, ξ, η obtenint

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & a(\mu) & 0 & 2 \\ a(\mu) & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{array}\right)$$

que escriurem com

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 2J \end{pmatrix}$$

Ara, considerem $v = (u, w)^T$ un vector propi de la matriu amb valor propi λ, aleshores

$$\begin{aligned} w &= \lambda u \\ Au + 2Jw &= \lambda w \end{aligned}$$

substituint tenim que

$$Au + 2J\lambda u = \lambda^2 u \Rightarrow (Au + 2J\lambda - \lambda^2 I)u = 0$$

per tant

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda^2 & a(\mu) + 2\lambda \\ a(\mu) - 2\lambda & \frac{9}{4} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

obtenint l'equació

$$0 = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{16} - a(\mu)^2 = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27 - 27(1-2\mu)^2}{16} = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$$

i resolem l'equació

$$\nu^2 + \nu + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0$$

on hem de trobar les arrels en funció del valor del discriminant $\Delta = 1 - 27\mu(1-\mu)$

- Si $\Delta = 0$,
  Aleshores trobem una arrel doble, $\nu = -\frac{1}{2}$, i per tant $\lambda = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$ seran dues arrels dobles. Per tant podem veure que en aquest cas la diferencial $Df(L_{4,5})$ no diagonalitza.

- Si $\Delta < 0$,
  Les dues arrels que trobem són $\nu = \frac{-1\pm\sqrt{|\Delta|}i}{2}$, que ens donen quatre arrels de la forma $\lambda = \pm\alpha \pm i\beta$.

- Si $\Delta > 0$,
  Les dues arrels que obtenim són $\nu = \frac{-1\pm\Delta}{2}$, observem que totes dues són negatives, aleshores podem escriure $\nu_1 = -w_1^2$,$\nu_2 = -w_2^2$, i obtenim $\lambda_{1,2} = \pm iw_1$, $\lambda_{3,4} = \pm iw_2$ amb $w_1^2 + w_2^2 = 1$.

4.5.2 Càlcul de la diferencial als punts colineals

A continuació hem d'avaluar els valors propis de la diferencial als punts d'equilibri colineals. Recordem que aquests punts estan sobre l'eix x i que $y = z = 0$.
Fem el càlcul pel punt L_1, recordem que aquest punt es troba entre les dues masses, llavors la seva equació d'Euler és

$$x + \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} - \frac{\mu}{(x-\mu+1)^2} = 0 \tag{4.5}$$

amb $r_1 = |x-\mu| = \mu - x$ i $r_2 = |x-\mu+1| = x-\mu+1$. Pel fet de que $y = z = 0$, en la diferencial obtenim que $f_{51} = f_{61} = f_{62} = 0$,

$$\begin{aligned}
f_{41} &= 1 + \frac{2(x-\mu)^2(1-\mu)}{(\mu-x)^5} + \frac{2\mu(x-\mu+1)^2}{(x\mu+1)^5} = 1 + \frac{2(1-\mu)}{(\mu-x)^3} + \frac{2\mu}{(x-\mu+1)^3}\\
f_{52} &= 1 - \frac{(1-\mu)(x-\mu)^2}{(\mu-x)^5} - \frac{\mu(x-\mu+1)^2}{(x-\mu+1)^5} = 1 - \frac{(1-\mu)}{(\mu-x)^3} - \frac{\mu}{(x-\mu+1)^3}\\
f_{63} &= -\frac{(1-\mu)(x-\mu)^2}{(\mu-x)^5} - \frac{\mu(x-\mu+1)^2}{(x-\mu+1)^5} = -\frac{(1-\mu)}{(\mu-x)^3} - \frac{\mu}{(x-\mu+1)^3}
\end{aligned}$$

Aquests termes els escriurem com

$$f_{41} = 1 + 2b, \quad f_{52} = 1 - b, \quad f_{63} = -b$$

Observem que $b > 0$. Tal com hem fet amb els punts triangulars descomponem la diferencial en dues parts. La part associada a z i ζ pren la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

de la qual obtenim que el seu polinomi característic és $\lambda^2 + b = 0$, amb valors propis $\lambda = \pm\sqrt{b}i$.
D'altra banda, per les variables (x, y, η, ξ) obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1+2b & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-b & -2 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ N & 2J \end{pmatrix}$$

Calculant el determinant de la matriu

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1+2b & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1-b & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

obtenim que el seu polinomi característic és de la forma $\lambda^4 + \lambda^2(2-b) + (1+2b)(1-b)$, i resolem l'equació

$$\nu^2 + \nu(2-b) + (1+2b)(1-b) = 0$$

obtenint com arrels

$$\nu_1 = \frac{-2+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-8b+9b^2}$$
$$\nu_2 = \frac{-2+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-8b+9b^2}$$

és a dir, finalment tenim quatre valors propis

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\nu_1} = \pm\sqrt{\frac{-2+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-8b+9b^2}}$$

que són valors propis reals i

$$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\nu_2} = \pm\sqrt{\frac{-2+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-8b+9b^2}}$$

que són dos valors propis imaginaris.
Pels altres dos punts els càlculs són els mateixos.

4.6 Estabilitat dels punts d'equilibri

En aquesta secció passem a estudiar l'estabilitat dels punts d'equilibri que hem trobat i l'existència d'òrbites periòdiques.

Començant pels punts colineals, hem trobat que els valors propis associats són de la forma

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-2+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-8b+9b^2}}$$
$$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-2+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-8b+9b^2}}$$
$$\lambda_{5,6} = \pm\sqrt{b}i$$

dels quals, λ_1 i λ_2 són reals i la resta purament imaginaris. Si denotem $\lambda_{1,2} = \pm\rho$,$\lambda_{3,4} = \pm i\alpha$ i $\lambda_{5,6} = \pm i\beta$.

Llavors, tenim una varietat tangent inestable unidimensional associada al valor propi real positiu i una varietat estable associada al valor propi real negatiu. En canvi pels quatre valors propis purament imaginaris tenim associada una varietat centre. Per a poder aplicar el teorema de Lyapunov, observem que s'ha de complir que $\beta \neq k\alpha$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
Observem que $\beta > 1$ i $\alpha > 0$. A priori també tenim que $\beta \leq k\alpha$. Com que la condició es compleix, podem aplicar el teorema de Lyapunov, obtenint així dues famílies d'òrbites periòdiques.

Com a conclusió tenim que els punts colineals són inestables. Tot i que les solucions periòdiques són inestables, són importants per la seva aplicació al disseny de missions espacials.

Centrant-nos ara en els punts triangulars, observem que les arrels de la diferencial només depenen del valor de μ, i tal com hem vist es distingeixen 3 casos segons el signe del discriminant.
Si considerem $\Delta = 0$ i resolem $1 - 27\mu(1-\mu) = 0$ obtenim $\mu_R = 0.03852\cdots$, que és conegut com a paràmetre de masses de Routh. En funció d'aquest paràmetre farem un estudi de 3 regions. Llavors tenim les equivalències següents

- Si $\Delta = 0$, estem en el cas on $\mu = \mu_R$.
  En aquest primer cas, tenim que els valors propis trobats són $\pm i$ i $\pm\frac{i}{\sqrt{2}}$, aquest últim és una arrel doble. Podem concloure que les solucions són inestables i en aquest cas no es coneix l'existència d'òrbites periòdiques.

- Si $\Delta < 0$ ens trobem en el cas $\mu_R < \mu < 1 - \mu_R$.
  En aquesta regió hem obtingut que els valors propis són de la forma

$$\nu_1 = \frac{-1 + \sqrt{|\Delta|}i}{2} = \frac{1}{2}(-1 + i\delta)$$

$$\nu_2 = \frac{-1 - \sqrt{|\Delta|}i}{2} = \frac{1}{2}(-1 - i\delta)$$

  amb $\delta = \sqrt{\Delta} = \sqrt{27\mu(1-\mu) - 1}$, aleshores els valors propis són de la forma

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1 + i\delta} &&= \alpha_1 + i\beta_1 \\
\lambda_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1 + i\delta} &&= \alpha_2 + i\beta_2 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1 - i\delta} &&= \alpha_3 + i\beta_3 \\
\lambda_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1 - i\delta} &&= \alpha_4 + i\beta_4
\end{aligned}$$

  Si considerem

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_3 = -\alpha_4 \\
\beta &= \beta_1 = -\beta_2 = -\beta_3 = \beta_4
\end{aligned}$$

  on

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sqrt{\sqrt{27\mu(1-\mu)} - 1}}{2} \\
\beta &= \frac{\sqrt{\sqrt{27\mu(1-\mu)} + 1}}{2}
\end{aligned}$$

  Per tant, com la part real dels valors propis és positiva, aquestes solucions seran inestables i no trobem l'existència d'òrbites periòdiques.

- Si $\Delta > 0$ és equivalent dir que estem en la regió $0 < \mu < \mu_R$.
  En aquest cas, tal i com hem vist, obtenim que totes dues arrels del polinomi característic són negatives, aleshores

$$\lambda_{1,2} = \pm iw_1 \quad \lambda_{3,4} = \pm iw_2$$

són quatre valors propis purament imaginaris, juntament amb el trobat inicialment $\pm i$. Si apliquem el Teorema de Lyapunov, ja que $\frac{iw_2}{iw_1} \notin \mathbb{Z}$ i $\frac{i}{iw_1} \notin \mathbb{Z}$, aleshores existeix una família de solucions periòdiques amb període $\frac{2\pi}{w_1}$. Anàlogament podem fer el mateix per w_2 i obtenim que existeix una família de solucions periòdiques de període $\frac{2\pi}{w_2}$. Aleshores podem concloure que existeixen dues famílies d'òrbites periòdiques, una de període llarg (associada a w_2) i l'altre de període curt (associada a w_1), el seu període serà aproximadament igual si $\mu = \mu_R$. Aquestes solucions són estables.

Aleshores podem concloure que els punts d'equilibri triangulars són estables per valors de μ menors que μ_R, i inestables linealment per $\mu \geq \mu_R$. Podem veure el comportament dels valors propis dels punts triangulars en la figura 4

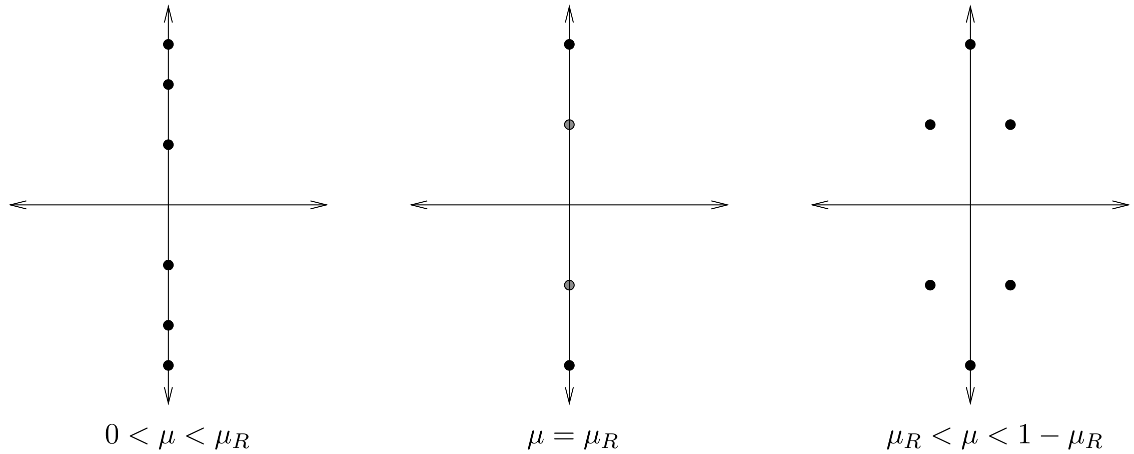

Figura 4: Comportament dels valors propis de $DF(L_{4,5})$

5 Conclusions

L'objectiu d'aquest treball era estudiar una manera de trobar solucions periòdiques en sistemes no lineals pròximes al sistema lineal, aquest problema queda resolt estudiant el Teorema de Lyapunov, que hem treballat amb profunditat amb diverses maneres de demostrar-lo.

A més, en la segona part d'aquest treball volíem adquirir coneixements sobre la mecànica celeste, estudiant el problema restringit dels 3 cossos, en el qual hem pogut aplicar la primera part del treball per a demostrar l'existència d'òrbites periòdiques pròximes als punts L_4 i L_5 si $\mu < \mu_R$ i als punts L_1, L_2 i L_3 per qualsevol valor de μ.
És a dir, que es pot observar com estudis matemàtics es poden aplicar a altres ciències.

Finalment dir que part dels coneixements que hem fet servir en aquest treball han sigut obtinguts gràcies a les assignatures d'Equacions diferencials i Àlgebra lineal, d'altra banda pel tractament de sèries de potències que es fa en aquest treball s'han vist present els cursos d'Anàlisi complexa i Anàlisi matemàtica, que hem pogut realitzar en la Facultat. Finalment també hem obtingut coneixements nous, tant en l'estudi del Teorema com en tot l'estudi de mecànica celeste.

Referències

[1] Dieter S.Schmidt : *Hopf's Bifurcation Theorem and the Center Therem of Liapunov with Resonance Cases*, Journal of mathematical analysis and applications, 63,354-370(1978).

[2] C.L.Siegel;J.K.Moser: *Lectures on Celestial Mechanics*,reprint of the 1971 edition.

[3] V.Szebehely : *Theory of Orbits, The Restricted Problem of Three Bodies*, Yale University, 1967.

[4] G.Gómez : Apunts mecànica celeste.

[5] Prasenjit, Sengupta; Puneet Singla: *An analysis of stability in the restricted three-body problem*, Texas AM University,December 2002.