



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

## GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

# Propietats i dimensió de Hausdorff de conjunts de Julia polinomials.

---

Autor: Àngel Ros López

Director: Dr. Núria Fagella Rabionet

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2024

## Agraïments

A la meva família, en especial a les dues Mars i al Harbhinder, sense ells haver arribat fins aquí hauria sigut impossible.

Als meus amics, en especial, a l'Alejandro, l'Eric, el Cristofer, el Sergi i la Marina, que m'han donat suport incondicional al llarg de tota la carrera.

A la Núria, per fer-me aprovar models amb els seus vídeos, i perquè sense la seva passió i coneixement aquest treball no hauria estat possible.

## Abstract

The objective of this final degree project is to understand some properties of polynomial Julia sets, as well as to understand the notion of Hausdorff dimension, which is highly related to fractal geometry. Specifically, we will use the theoretical mark of the iterated function systems to give an asymptotic approximation of the dimension of Cantor-like Julia sets. We will also work on the Multibrot set, demonstrating the fundamental dichotomy and giving results for its principal component.

## Resum

L'objectiu d'aquest treball de final de grau és entendre algunes propietats dels conjunts de Julia polinomials així com la noció de dimensió de Hausdorff, molt associada a la geometria fractal. En concret, aprofitarem el marc teòric dels IFS per a donar una aproximació asimptòtica de la dimensió de Hausdorff dels conjunts de Julia que siguin de Cantor. Treballarem també amb el conjunt de Multibrot, demostrant la dicotomia fonamental i donant resultats sobre la seva component principal.

# Índex

|          |                                                                |           |
|----------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducció</b>                                             | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Preliminars</b>                                             | <b>5</b>  |
| 2.1      | L'espai de conjunts compactes . . . . .                        | 5         |
| 2.2      | El teorema del punt fix de Banach . . . . .                    | 6         |
| <b>3</b> | <b>Mesura i dimensió de Hausdorff</b>                          | <b>7</b>  |
| 3.1      | Mesures i mesura de Hausdorff . . . . .                        | 7         |
| 3.2      | Dimensió i dimensió de Hausdorff . . . . .                     | 9         |
| <b>4</b> | <b>Sistemes dinàmics i iteració de polinomis</b>               | <b>14</b> |
| 4.1      | Sistemes dinàmics . . . . .                                    | 14        |
| 4.2      | Conjunts de Julia i Fatou . . . . .                            | 17        |
| 4.2.1    | Exemples de conjunts de Julia . . . . .                        | 22        |
| 4.3      | Conjunt de Multibrot: la família $f_c(z) = z^d + c$ . . . . .  | 24        |
| 4.3.1    | Preliminars . . . . .                                          | 24        |
| 4.3.2    | Dicotomia fonamental . . . . .                                 | 25        |
| 4.3.3    | Components Hiperboliques . . . . .                             | 28        |
| <b>5</b> | <b>IFS</b>                                                     | <b>31</b> |
| <b>6</b> | <b>Càlcul de la dimensió de Hausdorff de conjunts de Julia</b> | <b>36</b> |
| <b>7</b> | <b>Codi generador d'imatges</b>                                | <b>38</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                            | <b>41</b> |

# Capítol 1

## Introducció

Un dels principals objectius de les matemàtiques ha sigut el de caracteritzar les formes dels objectes trobats a la naturalesa. Quan les eines encara no ho permetien, s'usaven els polígons simples per a representar les formes geomètriques observades a la naturalesa. Vam haver d'esperar fins al segle XIX, on Weierstrass, que buscava una corba contínua a tot arreu i que no es pogués derivar a cap punt, va obtenir el que avui dia considerem com el primer fractal matemàtic, anomenat la Corba de Weierstrass.

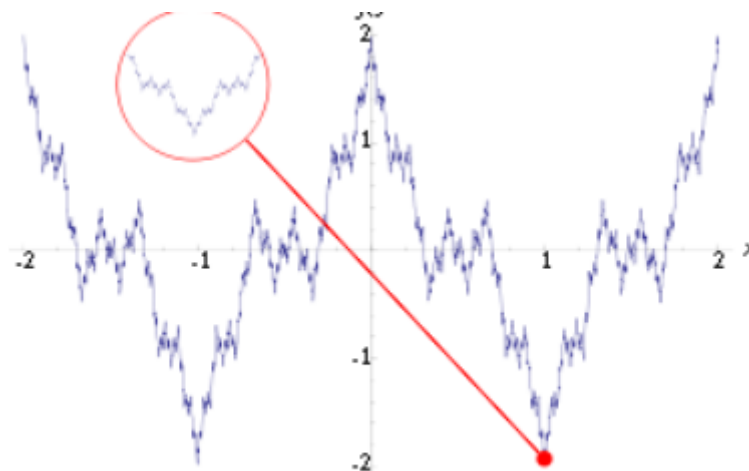


Figura 1.1: Corba de Weierstrass

Uns anys després que Weierstrass, Cantor, mentre treballava en la definició axiomàtica de la teoria de conjunts, va construir el que avui es coneixen com a conjunts de Cantor que són la base d'una família de fractals. No va ser fins als treballs de Mandelbrot que l'estudi dels fractals van començar a guanyar popularitat entre els científics. Va ser Mandelbrot qui va posar nom a aquests tipus d'estructures i va escollir la paraula fractal, paraula que ve de l'arrel llatina fractus que significa trencat amb el sufix -al que significa estructura. Mandelbrot afirmava que la naturalesa dels objectes naturals, com les costes o els núvols, era contínuament trencada en contraposició, a l'estudi continu i suau que s'havia fet fins aquell moment.

En aquest treball estudiarem una de les principals novetats que van introduir els fractals, la noció de què un conjunt pugui tenir dimensió no entera. Usarem els resultats que

F. Hausdorff va generalitzar sobre les mesures exteriors de Caratheodory, per tal de definir la noció de mesura i dimensió en conjunts fractals mitjançant la noció de  $\delta$ -recobriments. En particular definirem la  $s$ -mesura de Hausdorff d'un conjunt  $F$  de la següent manera

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ és un } \delta\text{-recobriments de } F \right\},$$

i caracteritzarem la dimensió de Hausdorff com el valor  $s$  per al qual la funció de mesura salta d'infinít a 0.

Enunciarem també resultats donats per A. Besicovitch sobre la mesura i dimensió de Hausdorff. Usarem aquests resultats per calcular la dimensió fractal del conjunt ternari de Cantor.

Estudiarem també la teoria de sistemes dinàmics al pla complex, principalment el resultat següent donat per G. Koenigs, que ens permeten linealitzar les conques d'atracció dels punts fixos.

**Teorema 1.0.1** (Linearització dels punts fixos atractors). *Suposem que  $f$  té un punt fix atractor  $z_0$ , amb multiplicador  $\lambda$  satisfent  $0 < |\lambda| < 1$ . Llavors, existeix una funció conforme  $\zeta = \phi(z)$  que envia un entorn obert de  $z_0$  a un entorn obert del 0 i que conjuga  $f(z)$  amb la funció lineal  $g(\zeta) = \lambda\zeta$ . La funció de conjugació és única, mòdul multiplicació per una constant, i ve donada per  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n}{\lambda^n}$ .*

Així com els treballs de P. Fatou i G. Julia, que van donar resultats sobre el comportament asimptòtic dels iterats dels punts del pla sota funcions complexes. Aquests resultats van donar peu al que avui coneixem com a conjunts de Julia i Fatou, uns conjunts que moltes vegades presenten una estructura fractal i que quan  $f$  és un polinomi es defineixen de la següent manera

**Definició 1.0.2** (Conjunt (ple) de Julia). Donat un polinomi  $f$ , anomenen conjunt ple de Julia al complementari de la conca d'infinít. Formalment,

$$K(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \not\rightarrow \infty \right\}.$$

La frontera de  $K(f)$  s'anomena conjunt de Julia, és a dir,  $\partial K(f) = J(f)$ .

Així mateix, el conjunt de Fatou, o conjunt estable, es defineix com

$$F(f) = \mathbb{C} / J(f) = A(\infty) \cup K(f)^\circ.$$

On  $K(f)^\circ$  denota l'interior del conjunt  $K(f)$ .

Per a estudiar aquests conjunts usarem els resultats de P. Montel sobre famílies normals. Aquests resultats ens permeten caracteritzar els conjunts de Julia i Fatou en termes de famílies normals de la següent manera

**Proposició 1.0.3.** *Sigui  $f$  un polinomi, aleshores*

$$J(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{la família } f^k \text{ no és normal a } z \right\}. \quad (1.0.1)$$

*En conseqüència,  $F(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{la família } f^k \text{ és normal a } z \right\}$ .*

Permetent així aplicar els resultats sobre famílies normals a aquests conjunts.

Aprofitarem el marc teòric dels IFS, que ens relaciona el conjunt de Julia d'una funció  $f$ , amb el conjunt atractor del sistema de funcions iterades donades per les branques de la inversa de  $f$ . Així podrem usar una reformulació de la fórmula següent  $\sum_i r_i^s = 1$ , donada per P.A.P Moran, per a donar una aproximació sobre la dimensió de Hausdorff de conjunts de Julia polinomials que siguin totalment disconnexos.

Introduïrem el conjunt de Multibrot, que és una generalització del conjunt de Mandelbrot, i demostrarem la dicotomia fonamental. També demostrarem diversos resultats sobre la component hiperbòlica principal.

## Capítol 2

# Preliminars

### 2.1 L'espai de conjunts compactes

L'objectiu principal d'aquesta secció és definir el conjunt de conjunts de compactes d'un espai mètric i dotar aquest conjunt d'una distància que rep el nom de distància de Hausdorff. Al llarg d'aquesta secció  $A, B, D$  seran conjunts de  $\mathbb{R}^n$ , a més,  $D$  serà un conjunt tancat. Les tres següents definicions estan extretes de [6, Cap.1 i 9].

**Definició 2.1.1** ( $\delta$ -Entorn i diàmetre d'un conjunt). Donat  $\delta > 0$  definim el  $\delta$ -entorn de  $A$  com

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \delta \text{ per algun } a \in A\}.$$

Definim el diàmetre de  $A$  com

$$|A| = \sup \{|x - y| : x, y \in A\}.$$

**Definició 2.1.2** (Distància de Hausdorff). Siguin  $A, B$  compactes. Definim la distància de Hausdorff entre  $A$  i  $B$  com

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf \{\delta : A \subset B_\delta \text{ i } B \subset A_\delta\}.$$

A continuació provarem que en efecte és una distància.

**Proposició 2.1.3.**  $d_{\mathcal{H}}$  és una distància.

1.  $d_{\mathcal{H}}(A, B) \geq 0$  amb igualtat si i només si  $A = B$

*Demostració.* La primera propietat és una conseqüència de la definició de  $\delta$ -entorn. Si  $A = B$  llavors,  $B \subset A_\delta$  i  $A \subset B_\delta$  per a tot  $\delta > 0$ . Per tant,  $d_{\mathcal{H}}(A, B) = 0$ . Si  $d_{\mathcal{H}}(A, B) = 0$  llavors,  $A \subset B_\delta$  per a tot  $\delta > 0$  que implica  $A \subset B$ , l'altra inclusió s'obté de la mateixa manera.  $\square$

2.  $d_{\mathcal{H}}(A, B) = d_{\mathcal{H}}(B, A)$ .

*Demostració.* És conseqüència immediata de la definició simètrica de la distància.  $\square$

3.  $d_{\mathcal{H}}(A, B) \leq d_{\mathcal{H}}(A, C) + d_{\mathcal{H}}(C, B)$

*Demostració.* Suposem que  $d_{\mathcal{H}}(A, C) = a$  i  $d_{\mathcal{H}}(C, B) = b$ . Llavors per cada  $\delta_a > a$  i cada  $\delta_b > b$  se satisfà

$$A \subset C_{\delta_a}, \quad C \subset A_{\delta_a}, \quad C \subset B_{\delta_b}, \quad B \subset C_{\delta_b}.$$

Per tant,

$$A \subset C_{\delta_a} \subset B_{\delta_a + \delta_b} \text{ i } B \subset C_{\delta_b} \subset A_{\delta_b + \delta_a}.$$

En conseqüència,  $d_{\mathcal{H}}(A, B) \leq \delta_a + \delta_b$  per a tot  $\delta_a, \delta_b$  amb  $\delta_a > a$  i  $\delta_b > b$ , llavors  $d_{\mathcal{H}}(A, B) \leq a + b = d_{\mathcal{H}}(A, C) + d_{\mathcal{H}}(C, B)$  provant el resultat.  $\square$

Si definim

$$\mathcal{C} = \{U \subset \mathbb{R}^n : U \text{ és un compacte no buit}\}, \quad (2.1.1)$$

llavors, si dotem  $\mathcal{C}$  amb la distància  $d_{\mathcal{H}}$  la dupla  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{H}})$  forma un espai mètric. Amb unes comprovacions extres veuríem que és complet. Una demostració de la completesa es pot consultar a [9, Sec.3.3].

## 2.2 El teorema del punt fix de Banach

A l'apartat anterior hem vist que  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{H}})$  és un espai mètric complet. Introduïrem ara el Teorema del punt fix de Banach, una poderosa eina que ens permet garantir l'existència i unicitat de punts fixos d'un sistema dinàmic en un espai mètric complet sota certes suposicions de contracció.

**Definició 2.2.1.** Sigui  $D \in \mathbb{R}^n$  tancat. Anomenem a una funció  $S : D \rightarrow D$  una contracció a  $D$ , si existeix  $0 < r < 1$  tal que

$$|S(x) - S(y)| \leq r|x - y|$$

$\forall x, y \in D$ . Clarament tota contracció és contínua. Si es compleix la igualtat direm que  $D$  i  $S(D)$  són conjunts similars geomètricament.

**Teorema 2.2.2** (T. del Punt fix de Banach [1]). *Sigui  $T : X \rightarrow X$  una contracció definida a l'espai mètric no buit  $(X, d)$ . Llavors  $T$  té un únic punt fix  $x^*$  a  $X$ . A més, si definim la successió  $x_n = T(x_{n-1})$  llavors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ , per a tot  $x_0 \in X$ .*

Finalment, recordem el significat de convergència uniforme per a una successió de funcions. Aquest concepte s'emprarà en seccions posteriors en l'àmbit de famílies normals.

**Definició 2.2.3** (Convergència uniforme). Siguin  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  espais mètrics. Diem que la família de funcions  $\{f_n : X \rightarrow Y\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergeix uniformement a la funció  $f$  si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0, \text{ es compleix } d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon, \quad \forall x \in X.$$

## Capítol 3

# Mesura i dimensió de Hausdorff

Per a realitzar aquest capítol hem pres com a fonts [6, Sec.2-3].

### 3.1 Mesures i mesura de Hausdorff

L'objectiu d'aquest apartat és definir i entendre el concepte de mesura per així poder introduir la noció de dimensió de Hausdorff, així com els diferents resultats que ens ajudaran a entendre la naturalesa dels fractals.

**Definició 3.1.1** (Mesura). Direm que  $\mu$  és una mesura a  $\mathbb{R}^n$  si per a tot subconjunt mesurable  $U \subset \mathbb{R}^n$  es satisfà  $\mu(U) \geq 0$ , on el valor de  $\mu(U)$  pot ser infinit, i  $\mu$  compleix les següents condicions

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\mu(A) \leq \mu(B)$  si  $A \subset B$ ;
3. si  $A_1, A_2, \dots$ , és una seqüència numerable de conjunts, llavors

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

amb igualtat si els  $A_i$  són conjunts Borelians disjunts.

**Definició 3.1.2** ( $\delta$ -recobriments). Un  $\delta$ -recobriments d'un conjunt  $F \subset \mathbb{R}^n$  és una família numerable  $\{U_i\}$  de conjunts amb  $|U_i| \leq \delta$  tal que  $F \subset \bigcup_i U_i$ .

És immediat de la definició que si  $\{U_i\}$  és un  $\delta_1$ -recobriments, per a tot  $\delta_2 \geq \delta_1$ , llavors  $\{U_i\}$  és també un  $\delta_2$ -recobriments.

La idea general per definir una mesura d'un conjunt  $F$  és la següent. Recobrir  $F$  per conjunts cada cop més petits i sumar els diàmetres d'aquests conjunts, o altres magnituds associades, elevats a una potència adient. És d'esperar que com més fi sigui el recobriments escollit més ens aproparem al verdader valor de la mesura de  $F$ . Amb aquesta finalitat, per a  $s \geq 0$ , introduïm la funció

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ és un } \delta\text{-recobriments de } F \right\},$$

on  $|U_i|$  indica el diàmetre de  $U_i$ , i clarament és una funció positiva. Com la classe de recobriments permissibles disminueix amb  $\delta$  el valor de l'ínfim augmenta quan  $\delta \rightarrow 0$ , per tant, aquest límit ha d'existir (pot ser  $\infty$ ), i té sentit definir el concepte següent.

**Definició 3.1.3** (Mesura de Hausdorff). Donat  $s \geq 0$ , i un conjunt  $F \subset \mathbb{R}^n$  definim la seva mesura  $s$ -dimensional de Hausdorff com

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F),$$

on el valor de  $\mathcal{H}^s(F)$  pot ser infinit.

Observem, que la mesura  $s$ -dimensional de Hausdorff no és més que una generalització de les mesures exteriors  $s$ -dimensionals, amb  $s \in \mathbb{Z}$ , introduïdes per Caratheodory a [3]. El seu nom és degut al fet que va ser Hausdorff qui va plantejar, a [8], que les definicions de Caratheodory eren vàlides per a tot  $s \in \mathbb{R}_+$ .

Demostrem que, en efecte,  $\mathcal{H}^s$  és una mesura. (Tècnicament, és una mesura exterior, és a dir, una mesura definida, no només per als Borelians, sinó per a tots els subconjunts de  $\mathbb{R}^n$ ).

**Proposició 3.1.4.**  $\mathcal{H}_\delta^s$  és una mesura, i s'anomena la mesura  $s$ -dimensional de Hausdorff.

*Demostració.* 1.  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ .

Tot conjunt  $U_i$  és un recobriment del buit, per tant,  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) \leq |U_i|^s \rightarrow 0$  si  $|U_i| \rightarrow 0$ .

2.  $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$  si  $A \subset B$ .

Si  $A \subset B$  tot  $\delta$ -recobriment de  $B$ . també ho és de  $A$  i, per tant, l'ínfim dels recobriments de  $A$  ha de ser menor a l'ínfim dels recobriments de  $B$ .

3.  $\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_i)$  amb igualtat si són disjunts.

Per cada  $A_i$  escollim un recobriment  $\{U_{ij}\}_{j \in I_i}$ , recordant que  $I_i$  ha de ser numerable. Llavors,  $\cup_{i=1}^\infty A_i \subset \cup_{i=1}^\infty \cup_{j \in I_i} U_{ij}$  per tant, és un recobriment i  $\mathcal{H}_\delta^s(\cup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \sum_{j \in I_i} |U_{ij}|^s$ . Prenent l'ínfim sobre tots els recobriments,  $\sum_{j \in I_i} |U_{ij}|^s = \mathcal{H}^s(A_i)$  d'on s'obté el resultat. Si  $A, B$  són disjunts, sigui  $d = d(A, B)$  llavors, per a tot  $\delta < \frac{d}{2}$ , si  $\{A_i\}, \{B_i\}$  són  $\delta$ -recobriments de  $A$  i  $B$  respectivament, se satisfà  $A_i \cap_{i,j} B_j = \emptyset$ . En conseqüència,  $\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) = \inf \{\sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}_\delta^s(A_i)\} + \inf \{\sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}_\delta^s(B_i)\}$  fent  $\delta \rightarrow 0$  obtenim el resultat. □

Les mesures Hausdorff són una generalització dels conceptes de llargada, àrea, volum, etc. Es pot demostrar que per a subconjunts de  $\mathbb{R}^n$ , la mesura  $n$ -dimensional de Hausdorff és equivalent, mòdul multiplicació per una constant, a la mesura de Lebesgue. És interessant veure com es comporta la mesura de diferents conjunts sota certes transformacions. La següent proposició estudia el comportament de la mesura sota les anomenades funcions de Hölder.

**Proposició 3.1.5.** Siguin  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funció tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha (x, y \in F)$$

per a constants  $\alpha > 0$  i  $c > 0$ . Llavors, per cada  $s$  es compleix

$$\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$$

*Demostració.* Sigui  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -recobriments de  $F$ , com  $|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$  aleshores  $\{f(F \cap U_i)\}$  és un  $c\delta^\alpha$ -recobriments de  $f(F)$ . En conseqüència, se satisfà

$$\sum_i |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |U_i|^s \text{ i } \mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

i fent  $\delta \rightarrow 0$  obtenim el resultat.  $\square$

En particular, i com és d'esperar,  $\mathcal{H}^s(F)$  és invariant per translacions, girs i rotacions del conjunt  $F$ . Si  $f$  és una semblança geomètrica de raó  $c$ , la mesura satisfà,  $\mathcal{H}^s(F) = c^s \mathcal{H}^s(f(F))$ .

Donats  $s_1 \geq s_2$  i  $\delta < 1$ , es compleix  $\delta^{s_1} \leq \delta^{s_2}$ . Llavors per a tot conjunt  $F \subset \mathbb{R}^n$  i  $\delta < 1$ , la funció  $\mathcal{H}_\delta^s$  no és creixent respecte  $s$  i, per tant,  $\mathcal{H}^s$  tampoc ho és. Més concretament, si  $t > s$  aleshores

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

i prenent l'ínfim sobre tots els  $\delta$ -recobriments tenim que

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Fent  $\delta \rightarrow 0$  veiem que si  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$  aleshores  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  si  $t > s$ .

Observem llavors que la gràfica de  $\mathcal{H}^s(F)$  respecte de  $s$  té un valor crític on  $\mathcal{H}^s(F)$  salta d'infinit a 0 (vegeu Figura 3.1). Veurem a la secció següent que aquest valor crític serà el que ens definirà la dimensió de Hausdorff de  $F$ .

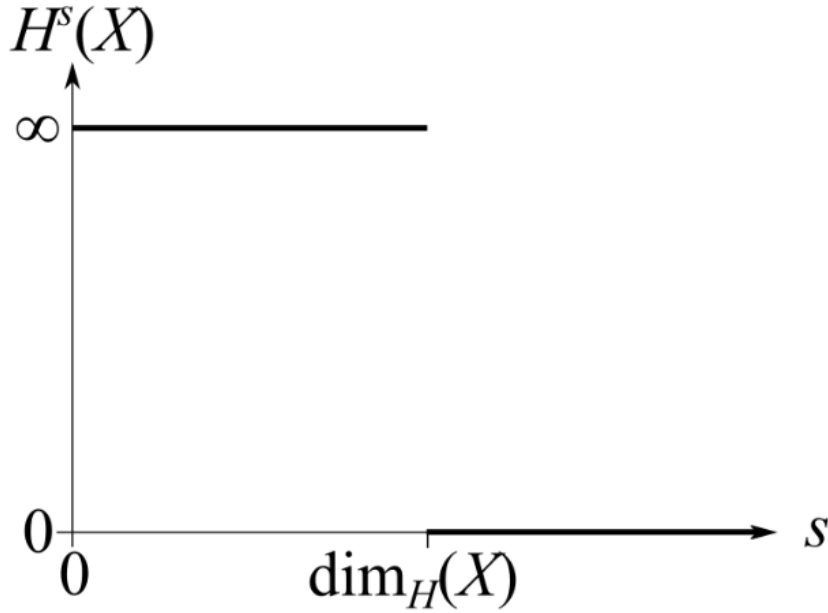


Figura 3.1: Gràfica de  $\mathcal{H}^s(F)$  respecte  $s$

## 3.2 Dimensió i dimensió de Hausdorff

El concepte de dimensió cobra molta importància a la geometria fractal. Intuïtivament, la dimensió d'un conjunt ens indica quant "espai" ocupa el conjunt en l'entorn dels seus

punts. Començarem introduint la definició de dimensió Box-counting, molt comú a les aplicacions pràctiques.

Sigui  $N_\delta(F)$  el menor nombre de caixes de costat  $\delta$  necessàries per recobrir un conjunt mesurable  $F$ , amb mesura Lebesgue  $c$ . Llavors,  $c \approx N_\delta(F)\delta^s$  on  $s$  és la dimensió (topològica) de l'espai ambient, i reflexa com creix  $N_\delta(F)$  a mesura que  $\delta \rightarrow 0$ . Això ens indica que  $s \approx \frac{-\log N_\delta(F)}{\log \delta}$ , la qual cosa motiva la nostra definició posterior.

Comencem definint les quantitats

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Si els límits inferiors i superiors coincideixen llavors existeix el límit i podem definir el que s'anomena dimensió Box-counting d'un conjunt  $F$ .

**Definició 3.2.1** (Dimensió Box-counting).

$$\dim_B F = s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

La definició anterior admet les següents definicions, igualment vàlides, per a  $N_\delta(F)$ .

1. El menor nombre de conjunts de diàmetre  $\delta$  que recobren  $F$ .
2. El menor nombre de boles tancades de diàmetre  $\delta$  que recobren  $F$ .
3. El menor nombre de cubs d'una graella de costat  $\delta$  que intersequen  $F$ .
4. El nombre més gran de boles disjunctes de radi  $\delta$  amb centres a  $F$ .

Per a veure demostracions d'algunes equivalències de les diferents definicions consultar [6, pàg. 30 - 32]. Depenent de les particularitats de cada conjunt usarem una definició per calcular la seva dimensió Box-counting o una altra. La dimensió Box-counting és la més utilitzada a l'hora de donar estimacions de la dimensió d'un conjunt en aplicacions pràctiques. N'hi ha prou amb tenir una imatge prou detallada del conjunt del qual volem estimar la dimensió, després superposem una graella, amb costats cada cop més petits, amb la imatge i contem els quadrats de la graella que intersequin el conjunt.

Introduïm ara un concepte de dimensió més elaborat que, com hem vist a la secció anterior, sorgeix de manera natural a les mesures  $s$ -dimensionals de Hausdorff.

**Definició 3.2.2** (Dimensió de Hausdorff). Donat un conjunt  $F \subset \mathbb{R}^n$ , definim la seva dimensió de Hausdorff com

$$\dim_H(F) = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

La següent proposició ens relaciona la dimensió de Hausdorff i la dimensió Box-counting introduïda anteriorment.

**Proposició 3.2.3.** Per a tot conjunt  $F \subset \mathbb{R}^n$  no buit i acotat es té que

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

*Demostració.* Podem suposar que  $F$  té mesura Hausdorff major a 1, en cas contrari, redimensionem  $F$  fins que ho compleixi i anomenem  $F$  al conjunt redimensionat. Com la dimensió és invariant per transformacions d'escala els dos conjunts anteriors tenen la mateixa dimensió. Llavors, es compleix que  $1 < \mathcal{H}^s(F)$  per algun  $s \geq 0$ . Per tant, per a  $\delta$  prou petit es compleix que

$$1 < \mathcal{H}^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s,$$

on  $N_\delta(F)$  és el menor nombre de conjunts de diàmetre  $\delta$  que cobreixen  $F$ . Prenent logaritmes i aïllant  $s$  obtenim,  $s \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$  que demostra el resultat.  $\square$

La proposició 3.1.5 ens permet relacionar la mesura d'un conjunt amb la mesura de la seva imatge per una funció de Hölder, en particular, per la definició de dimensió Hausdorff la relació entre les mesures es transforma en una relació sobre les dimensions.

**Proposició 3.2.4.** *Siguin  $F \subset \mathbb{R}^n$  i  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$  per constants  $c, \alpha > 0$ . Llavors,*

$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F.$$

*Demostració.* Si  $s > \dim_H(F)$  llavors, per la proposició 3.1.5,  $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F) = 0$ , que implica que  $\dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$  per a tot  $s > \dim_H F$ .  $\square$

**Corol·lari 3.2.5.** *Si  $f$  és bi-Lipschitz aleshores*

$$\dim_H f(F) = \dim_H F.$$

*Demostració.* Si  $f$  és bi-Lipschitz aplicant la proposició anterior amb  $a = 1$  a  $f$  obtenim  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$ . Al ser  $f^{-1}$  Lipschitz, repetint l'argument anterior obtenim l'altra desigualtat.  $\square$

Per tant, la dimensió de Hausdorff és invariant per transformacions bi-Lipschitz.

La següent proposició ens serà útil en seccions posteriors, ja que ens dona una cota inferior per a la mesura de Hausdorff i, per tant, també una cota inferior per a la dimensió de Hausdorff. Abans, però, necessitem introduir el concepte de funció de distribució de massa, que és un concepte molt lligat al de mesura que ja havíem introduït anteriorment a 3.1.1.

**Definició 3.2.6** (Funció distribució de massa). Una distribució de massa a  $F \subset \mathbb{R}^n$  és una mesura  $\mu$  amb suport contingut a  $F$  tal que

$$0 < \mu(F) < \infty.$$

**Proposició 3.2.7** (Principi de la distribució de massa [6, pàg. 67-68]). *Sigui  $\mu$  una distribució de massa a  $F$ , suposem que per algun  $s > 0$  existeixen  $c > 0$  i  $\epsilon > 0$  tal que  $\mu(U) \leq c|U|^s$  per a tot conjunt  $U \subset F$  amb  $|U| \leq \epsilon$ . Aleshores  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ .*

*Demostració.* Sigui  $\{U_i\}$  un recobriment de  $F$ ,  $F \subset \bigcup_i U_i$ , com  $\mu$  és una distribució de massa amb suport a  $F$ ,  $0 < \mu(F) < \infty$  i  $0 < \mu(F) \leq \mu(\bigcup_i U_i) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$ . Prenent l'ínfim sobre tots els recobriments,  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$  per a  $\epsilon \geq \delta > 0$  si fem tendir  $\delta$  a 0, obtenim  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c} > 0$ . Recordem que  $\mu(F), c > 0$ , per tant,  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$  i  $s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$ .  $\square$

La proposició anterior ens dona una eina que aplicarem en exemples a seccions posteriors per a donar una cota inferior a la mesura de Hausdorff que ens donarà una cota inferior de la dimensió de Hausdorff.

Amb les eines introduïdes en aquesta secció ja podem començar a calcular la dimensió de Hausdorff d'alguns conjunts fractals senzills. Introduïrem el conjunt ternari de Cantor i la corba de Koch, i calcularem la dimensió del primer.

El conjunt ternari de Cantor es construeix, mitjançant un procés iteratiu (vegeu Figura 3.2), de la següent manera. Comencem amb l'interval  $[0, 1]$ , que anomenarem  $K_0$ , llavors obtenim  $K_1$  esborrant el segment corresponent al terç central de  $K_0$ . Llavors,  $K_1$  són dos intervals disjunts, i per a cada un d'aquests intervals procedim com a  $K_0$  i els hi esborrem el segment que correspongui al seu terç central. Repetint aquest procediment obtenim conjunts  $K_0 \dots K_n \dots$  on cada  $K_j$  està format per  $2^j$  intervals de llargada  $3^{-j}$ . Definirem el conjunt ternari de Cantor com el límit al qual tendeixen aquesta successió de conjunts. Clarament, és no buit, ja que tot punt que sigui un extrem d'un interval de  $K_j$ , per algun  $j$ , pertany a  $K_{j'}$  si  $j' \geq j$ . Òbviament, és un conjunt compacte, ja que és un límit d'intervals compactes encaixats.

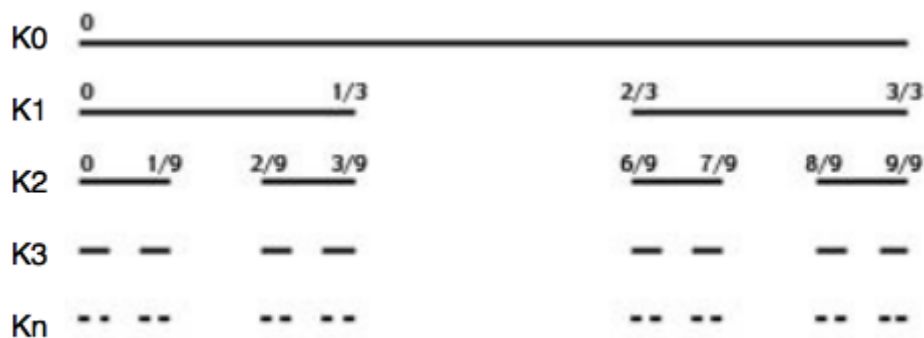


Figura 3.2: Passos de la construcció del conjunt ternari de Cantor.

De manera similar, la corba de Koch també s'obté com el límit d'un procés iteratiu. Comencem considerant l'interval  $[0, 1]$  a l'espai ambient  $\mathbb{R}^2$ , llavors procedim com a la Figura 3.3.

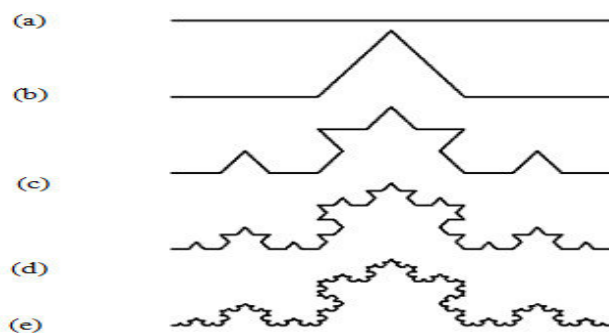


Figura 3.3: Passos de la construcció de la corba de Koch.

Llavors, el conjunt límit d'aquesta construcció és la corba de Koch.

**Exemple 3.2.8** (Dimensió de Hausdorff del conjunt ternari de Cantor). Denotarem el conjunt ternari de Cantor per  $F$ . Podem prendre com a recobriment de  $K_j$  els  $2^j$  intervals de diàmetre  $3^{-j}$  que formen  $K_j$ . Llavors per la definició de mesura de Hausdorff es compleix  $\mathcal{H}_{3^{-j}}^s(F) \leq 2^j 3^{-js}$  per a tot  $j$ . El valor de  $2^j 3^{-js}$  es finit, i diferent de 0, si i només si  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ , i en aquest cas  $\mathcal{H}_{3^{-j}}^s(F) \leq 2^j 2^{-j} = 1$  obtenint així una cota superior per a la mesura i, per tant, també per a la dimensió de Hausdorff. Procedim ara al càlcul del límit inferior, sigui  $\{U_i\}$  qualsevol recobriment del conjunt ternari de Cantor, podem assumir que els  $\{U_i\}$  són intervals i podem escollir  $j \in \mathbb{N}$  tal que

$$3^{-j-1} \leq |U_i| < 3^{-j}. \quad (3.2.1)$$

Llavors, com els intervals que formen  $K_j$  estan separats per una distància de  $3^{-j}$ , cada  $U_i$  pot intersecar com a molt un interval de  $K_j$ . Si  $j' \geq j$ , llavors,  $U_i$  interseca com a molt  $2^{j'-j} = 2^j 3^{-sj'} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$  intervals de  $K_{j'}$ , on hem emprat 3.2.1 per donar la desigualtat. Si escollim  $j'$  tal que  $3^{-j'-1} \leq |U_i|$  per a tot  $U_i$ , llavors com el recobriment  $\{U_i\}$  interseca tots els  $2^{j'}$  intervals de llargada  $3^{-j'}$ , comptant intervals obtenim la desigualtat  $2^{j'} \leq \sum_i 2^{j'} 3^s |U_i|^s$  que es redueix a

$$\sum_i |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}.$$

Per tant, per a tot recobriment  $\{U_i\}$  la mesura  $s$ -dimensional de Hausdorff de  $F$  és positiva quan  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Ajuntant les dues cotes obtingudes per la mesura obtenim que la dimensió de Hausdorff del conjunt ternari de Cantor és  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

## Capítol 4

# Sistemes dinàmics i iteració de polinomis

### 4.1 Sistemes dinàmics

En aquesta secció estudiem els sistemes dinàmics donats pels iterats de  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , on  $f$  és una funció holomorfa i en alguns casos, per simplicitat, un polinomi. Abans de començar amb els sistemes dinàmics donem una definició que ens serà útil a l'hora de simplificar l'estudi del comportament d'un sistema dinàmic. Usarem la notació  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Hem pres com a fonts [4, Cap.II] i [5, Def.2.17] per a la definició 4.1.9.

**Definició 4.1.1** (Mapes conjugats). Dos mapes racionals  $f, g$  són topològicament (respectivament analíticament) conjugats, si existeix un homeomorfisme (respectivament un bi-holomorfisme)  $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tal que  $\phi \circ f = g \circ \phi$ .

Podem imaginar  $\phi$  com un canvi de coordenades a  $\hat{\mathbb{C}}$ . Els únics bi-holomorfismes de  $\hat{\mathbb{C}}$  són les transformacions de Möbius  $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$  i els únics bi-holomorfismes de  $\mathbb{C}$  són les transformacions afins  $z \rightarrow az + b$ . Els zeros i els pols de les funcions racionals depenen de l'elecció de les coordenades, en canvi, els punts fixos i crítics no.

Comencem amb els sistemes dinàmics. Sigui  $z \in \mathbb{C}$  un punt del pla complex. Estudiarem el comportament del conjunt dels seus iterats  $\{f^k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , i ens referirem a aquest conjunt com l'òrbita de  $z$  (per  $f$ ).

El cas més senzill d'òrbita es dona quan  $f^n(z) = f^{n+j}(z)$  per algun  $n \in \mathbb{N}$  i per a tot  $j \in \mathbb{N}$ . Denotant  $f^n(z) = z_0$ , és clar que  $z_0$  compleix  $f(z_0) = z_0$  i direm que  $z_0$  és un punt fix de  $f$ . Comencem amb els sistemes dinàmics donant una classificació dels punts fixos en termes de la seva derivada, aquesta classificació ens descriurà el comportament local dels punts propers a aquest punt fix.

Sigui  $z_0$  un punt fix d'una funció analítica  $f$ , és a dir,  $f(z_0) = z_0$ . Anomenarem a  $\lambda = f'(z_0)$  el multiplicador de  $f$  a  $z_0$ . Direm que  $z_0$  és

1. Atractor si  $|\lambda| < 1$ . (Si  $\lambda = 0$  direm que és superatractor);
2. Repulsor si  $|\lambda| > 1$ ;
3. Neutral racional si  $|\lambda| = 1$  i  $\lambda^n = 1$  per algun enter  $n$ ;

4. Neutral irracional si  $|\lambda| = 1$  i  $\lambda^n \neq 1$  per cap enter  $n$ .

Veiem que, en efecte, aquests noms reflecteixen la dinàmica dels iterats dels punts propers a  $z_0$ . Sigui  $z_0$  un punt fix atractor, llavors, si  $|\lambda| < \rho < 1$ , es compleix  $|f'(z_0)| = \lambda < \rho < 1$  i existeix un entorn obert  $U$  de  $z_0$  tal que  $\forall z \in U$  se satisfà  $|f'(z)| < \rho < 1$ . Llavors, per  $r$  prou petit, podem agafar un disc obert de radi  $r$  centrat a  $z_0$ , que denotarem per  $D(z_0, r)$ , tal que  $D(z_0, r) \subset U$ . Llavors, si  $z \in D(z_0, r)$ , es compleix  $|f(z) - f(z_0)| < \rho|z - z_0|$ . Per tant,  $f(z) \in D(z_0, r)$ . Repetint recursivament aquest argument, i aplicant que  $z_0$  és un punt fix, l'equació anterior es transforma en  $|f^n(z) - z_0| < \rho^n|z - z_0|$  que tendeix a 0 quan  $n \rightarrow \infty$ . Per tant, el nom d'atractor està justificat donat que  $z_0$  atreu els iterats dels seus punts propers.

Per als punts fixos repulsors, com  $z_0$  també és un punt fix de  $f^{-1}$  la seva derivada satisfà

$$|(f^{-1})'(z_0)| = \left| \frac{1}{f'(f^{-1}(z_0))} \right| = \left| \frac{1}{\lambda} \right| < \rho < 1, \quad (4.1.1)$$

llavors  $z_0$  és un punt fix atractor de  $f^{-1}$ . Com hem vist abans, existeix un entorn obert de  $z_0$  on tots els punts d'aquest entorn convergeixen a  $z_0$  sota  $f^{-1}$ . Per tant, tots aquests punts s'allunyen de  $z_0$  per  $f$  i té sentit dir que  $z_0$  és un punt repulsor. El comportament dels punts a un entorn d'un punt fix neutral és més difícil d'estudiar i referim al lector a [4, Sec.II.5-II.6].

Tornem ara a l'estudi dels punts fixos atractors. Ja hem vist que els punts a un entorn obert del punt fix van a parar al punt fix. Definim a continuació la conca d'atracció del punt fix  $z_0$ , i demostrem que es tracta d'un conjunt obert i no buit.

**Definició 4.1.2.** Si  $z_0$  és un punt fix atractor, anomenem conca d'atracció de  $z_0$  a,

$$A(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \rightarrow z_0 \right\}.$$

Anomenarem conca immediata d'atracció de  $z_0$ , a la component connexa de  $A(z_0)$  que conté  $z_0$  i la denotem per  $A^*(z_0)$ .

**Lema 4.1.3.**  $A(z_0)$  és un conjunt obert no buit.

*Demostració.* Hem vist anteriorment que si  $z_0$  és atractor, existeix un entorn obert  $U$  tal que tot punt de  $U$  té òrbita que convergeix a  $z_0$ . Si  $f(z) \rightarrow z_0$  llavors existeix un  $k_0$  tal que  $f^k(z) \in U$  per a tot  $k > k_0$ . Aleshores,  $A(z_0) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-i}(U)$  és obert per ser unió numerable d'antiimatges per una funció analítica d'un conjunt obert.  $\square$

Introduïm ara un teorema que ens ajudarà a demostrar la següent proposició.

**Teorema 4.1.4** (Radi d'escapament). *Donat un polinomi  $f = a_n x^n + \dots + a_0$  existeix  $r > 0$  tal que, si  $|z| \geq r$  aleshores  $|f(z)| \geq 2|z|$ . Per tant, si  $|f^m(z)| \geq r$  per algun  $m$ , aleshores  $f^k(z) \rightarrow \infty$  quan  $k \rightarrow \infty$ .*

*Demostració.* Prenent  $r$  prou gran tenim que  $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|$  i  $(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|) \leq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$ , llavors si  $|z| \geq r$  es compleix

$$|f(z)| \geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|) \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \quad (4.1.2)$$

i aplicant-ho repetidament  $|f^{n+k}(z)| \geq 2^k |f^n(z)| \rightarrow \infty$  quan  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Proposició 4.1.5.** *Si sigui  $f$  un polinomi, amb grau  $n > 1$ . Aleshores es compleixen les següents propietats,*

1.  $\infty$  és un punt fix superatractor,
2. La conca d'atracció d'infinít compleix que  $A(\infty) = A^*(\infty)$  i, per tant, és connexa.

*Demostració.* 1. Per 4.1.4 sabem que tot polinomi té un radi d'escapament diguem-li  $r$ . En conseqüència, tots els punts propers a infinit, podem agafar com a entorn obert d'infinít  $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ , tenen òrbites que van a infinit. Per veure que és superatractor, conjuguem  $f$  amb la transformació de Möbius  $h(z) = \frac{1}{z}$  que mou  $\infty$  a 0. Llavors  $Q$  és un mapa analíticament conjugat a  $f$  amb  $Q(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ . Calculant la seva derivada per la regla de la cadena obtenim:  $Q'(z) = \frac{1}{f^2(\frac{1}{z})} f'(\frac{1}{z}) \frac{1}{z^2}$ . El numerador d'aquesta expressió té grau  $2n$ , el denominador  $n + 1$  per tant, si  $2n > n + 1 \iff n > 1$  la derivada ha de complir  $Q'(0) = 0$ . Demostrant així que el 0 és un punt fix superatractor de  $Q$ , i en conseqüència, per al mapa conjugat  $f$ ,  $\infty$  és un punt fix superatractor.

2. Suposem  $A(\infty) \neq A^*(\infty)$ , llavors  $A(\infty)$  no pot ser connex i, per tant, existeix una component connexa  $U \subset A(\infty)$  i  $U \not\subset A^*(\infty)$ . Llavors existeix un  $z \in U$  que ha de complir  $f(z) = \infty$  que és impossible perquè els polinomis no tenen pols.

□

Estudiarem ara el que definirem com a punts crítics d'una funció  $f$ . Els punts crítics són punts especials, des del punt de vista dinàmic, ja que són els únics punts pels quals  $f$  no és un homeomorfisme local. És a dir, per a tot entorn  $U$  d'un punt crític  $z_0$ , no existeix cap branca de la inversa de  $f$  que estigui ben definida. O sigui,  $f : U \rightarrow f(U)$  té grau estrictament superior a 1. En seccions posteriors treballarem amb  $f_c(z) = z^d + c$  i en aquest cas  $f_c : U \rightarrow f_c(U)$  amb grau  $d$ .

**Definició 4.1.6** (Punt crític). Direm que  $c \in \mathbb{C}$  és un punt crític de la funció  $f$  si se satisfà,  $f'(c) = 0$ .

**Definició 4.1.7** (Conjunt postcrític). Anomenarem conjunt postcrític de  $f$  a

$$C^+(f) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ f'(c)=0}}^{\infty} f^i(c).$$

El següent teorema originalment enunciat per G. Koenigs, ens és de gran utilitat a l'hora d'estudiar la dinàmica local dels punts fixos atractors d'una funció  $f$ . En particular, ens diu que a un entorn obert del punt fix atractor la dinàmica de  $f$  i la de la seva aproximació lineal són iguals, mòdul canvi de coordenades per una funció holomorfa i bijectiva, és a dir, per una funció conforme.

**Teorema 4.1.8** (Linearització dels punts fixos atractors). *Suposem que  $f$  té un punt fix atractor  $z_0$ , amb multiplicador  $\lambda$  satisfent  $0 < |\lambda| < 1$ . Llavors, existeix una funció conforme  $\zeta = \phi(z)$  que envia un entorn obert de  $z_0$  a un entorn obert del 0 i que conjuga  $f(z)$  amb la funció lineal  $g(\zeta) = \lambda\zeta$ . La funció de conjugació és única, mòdul multiplicació per una constant, i ve donada per  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n}{\lambda^n}$ .*

Obtenim així la conjugació,  $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$  que també ens determina una equació funcional. Aquesta equació ens permet estendre analíticament  $\phi$  a tota la conca d'atracció  $A(z_0)$ . En canvi, si intentem estendre  $\phi^{-1}$  trobarem que podem fer-ho als punts on podem definir  $f^{-1}$ , és a dir fins a trobar un punt crític de  $f$ .

L'existència d'una conjugació per als punts fixos repulsors de  $f$  és conseqüència immediata de l'existència d'una conjugació al cas atractor. És suficient prendre la funció inversa  $f^{-1}$ , com hem demostrat a (4.1.1) el punt fix repulsor  $z_0$  de  $f$  s'haurà transformat en un punt fix atractor de  $f^{-1}$ , i qualsevol mapa que conjugui  $f^{-1}(z)$  a  $\zeta\lambda$  també conjugua  $f(z)$  a  $\lambda\zeta$ . Abans de passar a la següent secció introduïrem el que entendrem com a sistema dinàmic caòtic. Generalment, associem el caos a la poca predictibilitat d'un sistema dinàmic, és a dir, a priori, el comportament dels iterats d'un punt no ens dona informació sobre el comportament dels iterats dels punts veïns. Donem una definició del que entendrem com a comportament caòtic d'un sistema dinàmic a un espai  $X$ .

**Definició 4.1.9** (Sistema caòtic). Un sistema dinàmic  $F$  sobre un espai  $X$  és caòtic si compleix les següents propietats

1. Els punts periòdics de  $F$  són densos.
2. Existeix un punt amb òrbita densa.

## 4.2 Conjunts de Julia i Fatou

En aquest apartat estudiarem propietats generals dels conjunts de Julia i Fatou d'un polinomi  $f$ . Hem pres com a fonts [5, Teo. 2.22], [6, Cap.14] i [11].

Comencem donant la seva definició.

**Definició 4.2.1** (Conjunt (ple) de Julia). Donat un polinomi  $f$ , anomenen conjunt ple de Julia al complementari de la conca d'infinít. Formalment,

$$K(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \not\rightarrow \infty \right\}.$$

La frontera de  $K(f)$  s'anomena conjunt de Julia, és a dir,  $\partial K(f) = J(f)$ .

Així mateix, el conjunt de Fatou, o conjunt estable, es defineix com

$$F(f) = \mathbb{C}/J(f) = A(\infty) \cup K(f)^\circ.$$

On  $K(f)^\circ$  denota l'interior del conjunt  $K(f)$ . El nom de conjunt estable ve motivat per la caracterització del conjunt de Julia que donarem a la proposició 4.2.7.

Les definicions escollides per als conjunts de Julia i Fatou ens divideixen el pla complex en dues regions: la dels punts amb òrbita acotada i la dels punts amb òrbita que tendeix a infinit. Més formalment:

$$\mathbb{C} = (K(f))^\circ \cup J(f) \cup A(\infty). \quad (4.2.1)$$

**Proposició 4.2.2.** Donat un polinomi  $f$ , els conjunts  $K(f)$  i  $J(f)$  són compactes no buits. A més  $J(f)$  té interior buit.

*Demostració.* Pel teorema 4.1.4  $K(f)$  és acotat i, per tant, també ho és la seva frontera. A més, pel lemma 4.1.3 totes les conques d'atracció són obertes. Per tant,  $K(f) = \mathbb{C}/A(\infty)$  és tancat.

Com ja havíem vist  $K(f)$  és acotat i tenim que  $K(f)$  és compacte. Ara veurem que són no buits. L'equació  $f(z) - z = 0$  té com a mínim una solució, diguem  $z_0$ , que clarament pertany a  $K(f)$ . Si ara prenem  $z_1 \in A(\infty)$  i unim  $z_0$  amb  $z_1$  per una corba aquesta talla algun punt de la frontera i, per tant,  $J(f)$  és no buit.  $\square$

La següent proposició ens garanteix que, tant el conjunt de Julia com el de Fatou són totalment invariants per  $f$ .

**Proposició 4.2.3.**  $J = f(J) = f^{-1}(J)$ , és a dir el conjunt de Julia és positiva i negativament invariant per  $f$ . El conjunt de Fatou també és positiva i negativament invariant.

*Demostració.* Prenem  $z \in J(f)$ , llavors  $f^k(z) \not\rightarrow \infty$ . Per estar a la frontera existeix una successió  $z_n \rightarrow z$  amb  $f^k(z_n) \rightarrow \infty$  quan  $k \rightarrow \infty \forall n$ . Així  $f^k(f(z)) \not\rightarrow \infty$  i  $f^k(f(z_n)) \rightarrow \infty$ . Per la continuïtat de  $f$  podem escollir els punts  $f(z), f(z_n)$  tan a prop com sigui necessari per tant  $f(z) \in J$  que dona  $f(J) \subset J$ , aplicant  $f^{-1}$ ,  $J \subset f^{-1}(f(J)) \subset f^{-1}(J)$ . Aplicant el mateix raonament a  $f^{-1}$ , obtenim  $J = f(f^{-1}(J)) \subset J$  que dona el resultat. Com el conjunt de Fatou és el complementari del conjunt de Julia, la invariància d'un conjunt implica la de l'altre.  $\square$

El teorema 4.1.4 demostra que  $f^k(z) \rightarrow \infty$  si i només si  $(f^p)^k \rightarrow \infty$  per tant  $K(f^p) = K(f)$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$ . És a dir,  $f$  i  $f^p$  tenen els mateixos conjunts de Julia.

El següent teorema, que no demostrarem, ens diu que les antiimatges de qualsevol punt de  $J(z)$  són denses a  $J(f)$ . Llavors, agafant un punt qualsevol a  $J(f)$  i dibuixant les seves antiimatges successivament obtenim un algorisme per a dibuixar el conjunt de Julia.

**Teorema 4.2.4.** Si  $z_0 \in J(f)$  llavors, el conjunt

$$\{z : f^n(z_0) = z \text{ per algun } n \geq 0\} \quad (4.2.2)$$

és dens a tot  $J(f)$ .

A continuació, donarem una definició alternativa dels conjunts de Julia i Fatou en termes de famílies normals.

**Definició 4.2.5.** Sigui  $U \in \mathbb{C}$  obert,  $\{g_k : U \rightarrow \mathbb{C}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  una família de funcions holomorfes. Diem que la família  $\{g_k\}$  és normal en  $U$  si cada successió de funcions escollides de  $\{g_k\}$  té una parcial que convergeix uniformement sobre els compactes de  $U$  a una funció analítica.

De manera similar direm que  $\{g_k\}$  és normal a  $z \in \mathbb{C}$  si existeix un entorn obert  $U$  de  $z$  amb  $\{g_k\}$  normal a  $U$ . Donarem una versió del teorema de Montel basada en la que podem trobar a [4, pàg. 321].

**Teorema 4.2.6** (Teorema de Montel). *Sigui  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una família de funcions holomorfes a un domini obert  $U$ . Si  $\bigcup_{k \geq 0} g_k(U) \subset \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ , aleshores  $\{g_k\}$  és normal.*

El teorema de Montel ens dona una nova manera de caracteritzar els conjunts de Julia polinomials.

**Proposició 4.2.7.** *Sigui  $f$  un polinomi, aleshores*

$$J(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{la família } f^k \text{ no és normal a } z \right\}. \quad (4.2.3)$$

*En conseqüència,  $F(f) = \{ z \in \mathbb{C} : \text{la família } f^k \text{ és normal a } z \}$ .*

*Demostració.* Si  $z \in J$  llavors per a qualsevol entorn obert  $V$  de  $z$  hi ha punts  $w$  tal que  $f^k(w) \rightarrow \infty$  mentre que  $f^k(z) \not\rightarrow \infty$ . Per tant, cap parcial de  $f^k$  pot ser uniformement convergent a  $V$  i  $\{f^k\}$  no és normal a  $z$ . Si  $z \notin J$  llavors, o  $z \in \text{int}(K)$ , o bé  $z \in A(\infty)$ . En el primer cas prenent  $z \in V \subset \text{int}(K)$  tenim  $f^k(w) \in K$ ,  $\forall w \in V \forall k$  i pel teorema de Montel, com només visitem punts a un compacte, la família  $\{f^k\}$  és normal en  $V$ .

Si  $z \in A(\infty)$  existeix  $k$  tal que  $f^k(z) > r$ , on  $r$  és el radi d'escapament. Com  $f^k$  és contínua  $f^k(w) > r$  per a tot  $w$  a un entorn obert compacte de  $z$  llavors, pel teorema 4.1.4  $f^k(w) \rightarrow \infty$  i  $\{f^k\}$  convergeix sobre compactes, per tant, és normal a  $z$ .  $\square$

La caracterització del conjunt de Julia en termes de famílies normals ens permet estudiar els conjunts de Julia de famílies de funcions molt més complexes que la polinomial. Com per exemple la família de funcions racionals o la família de funcions meromorfs (quocient de funcions holomorfs).

A nivell qualitatiu, el següent lema ens demostra el comportament "caòtic" de qualsevol entorn obert d'un punt de  $J(f)$  sota els iterats de  $f$ . Dit d'una altra manera, les successives imatges de qualsevol entorn obert d'un punt del conjunt de Julia omplen tot el pla, excepte com a molt un punt.

**Lema 4.2.8** (Propietat d'explosió). *Sigui  $f$  un polinomi de grau major o igual a 2,  $w \in J(f)$  i  $U$  qualsevol entorn obert de  $w$ . Llavors per cada  $j = 1, 2, \dots$  el conjunt  $W = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$  és tot  $\mathbb{C}$  excepte com a molt un punt  $v$ . A més  $v \notin J(f)$  i només depèn del polinomi  $f$  escollit.*

*Demostració.* Si  $W$  omet 2 o més punts de  $\mathbb{C}$  aleshores  $\{f^k|_U\}$  és normal pel teorema de Montel, que és impossible, ja que  $w \in J(f) \cap U$ . Suposem  $v \notin W$  i  $f(z) = v$ . Per la construcció de  $W$  es clar que  $f(W) \subset W$ , per tant,  $z = v$  ja que  $C \setminus W$  com a molt té un punt. L'única solució de  $f(z) - v = 0$  és  $v$  i podem escriure  $f(z) - v = c(z - v)^n$ , per tant,  $v$  ve senceraament determinat per  $f$ . Aleshores, com per hipòtesi  $\text{grau}(f) = n \geq 2$ ,  $v$  és un punt fix amb multiplicador igual a 0, és a dir superatractor i  $v \in F(f)$ .  $\square$

El punt  $v$  donat pel lema 4.2.8 s'anomena el punt excepcional de  $f$ .

**Corol·lari 4.2.9.** *a) Per a tot  $z \in \mathbb{C}$  amb com a molt una excepció, si  $U$  és un obert que interseca  $J(f)$  aleshores  $f^{-k}(z)$  interseca  $U$  per infinits valors de  $k$ . b)  $J(f)$  és la clausura de  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$  per a tot  $z \in J(f)$*

*Demostració.* a) Si  $z$  no és el punt excepcional  $z \in W = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$ . Això implica que  $z \in f^i(U)$  per infinits valors de  $i$  i per aquests valors es compleix  $f^{-i}(z) \cup U \neq \emptyset$ . b) Si  $z \in J(f)$  com el conjunt de Julia és invariant per  $f$ ,  $f^{-k}(z) \in J(f)$  i  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset J(f)$  per tant la seva clausura també està al tancat  $J(f)$ . Per a la inclusió contrària, si  $z \in J(f)$  i  $U$  és qualsevol obert intersecant  $J(f)$  llavors per a)  $f^{-k}(z)$  interseca  $U$  per algun valor de  $k$  i, per tant,  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(z)$  i  $J(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(z)}$ .  $\square$

**Proposició 4.2.10.**  *$J(f)$  és un conjunt perfecte, és a dir, és tancat i sense punts aïllats, i per tant és no numerable.*

*Demostració.* Si  $v \in J(f)$ , per demostrar que  $J(f)$  no té punts aïllats demostrarem que per a tot entorn obert  $U$  de  $v$ ,  $U$  conté altres punts de  $J(f)$ .

Distingirem entre 3 casos:

1. Si  $v$  no és un punt fix ni periòdic de  $f$ , pel corol·lari 4.2.9 i la invariància de  $J(f)$  per  $f^{-1}$ , es té que  $f^{-k}(v) \in U$  i  $f^{-k}(v) \in J(f)$  per algun  $k \geq 1$  i com  $v$  no és punt fix  $f^{-k}(v) \neq v$ .
2. Si  $f(v) = v$ , si  $f(z) - v = 0$  només té aquesta solució, estem al cas de lema 4.2.8, per tant,  $v \notin J(f)$ . Aleshores suposem que existeix  $w \neq v$  solució de l'equació anterior. Pel corol·lari 4.2.9)  $U$  conté un punt  $u = f^{-k}(w) = f^{-k-1}(v)$  per algun  $k \geq 1$ . Per la invariància de  $J(f)$  aquest punt  $u$  està al conjunt de Julia i  $u \neq v$  ja que  $f^k(v) = v \neq w = f^k(u)$ .
3. Si  $f^p(v) = v$  per algun  $p > 1$ , com  $J(f) = J(f^p)$  i aplicant 2) a  $f^p$  obtenim que  $U$  conté punts de  $J(f^p) = J(f)$  diferents de  $v$ .  
Hem vist que  $J(f)$  no té punts aïllats, com ja sabíem és tancat i, per tant, és un conjunt perfecte.  $\square$

El següent teorema ens posa de manifest la relació entre els punts periòdics repulsors i el conjunt de Julia, per a veure la seva demostració consultar [6, Teo.14.10].

**Teorema 4.2.11.** *Per a tot polinomi  $f$ ,  $J(f)$  és la clausura dels punts periòdics repulsors de  $f$ .*

El següent lema ens caracteritza els conjunts de Julia com la frontera de qualsevol conca d'atracció. És rellevant notar que, tot i en els casos en els quals el domini d'atracció estigui compost per diverses components connexes, la frontera de qualsevol d'aquestes components continuarà sent tot el conjunt de Julia.

**Lema 4.2.12.** *Si  $w$  és un punt fix atractor de  $f$  llavors,  $\partial A(w) = J(f)$  on  $w$  pot ser infinit.*

*Demostració.* Si  $z \in J(f)$  llavors  $f^k(z) \in J(f)$  per a tot  $k$  i no pot convergir a un punt fix atractor, ja que, en aquest cas la família  $\{f^k\}$  seria normal a  $z$ . Per tant,  $z \notin A(w)$ . Com la família  $\{f^k\}$  no és normal a  $z$  per a tot entorn obert  $U$  de  $z$ ,  $f^k(U)$  conté algun punt de  $A(w)$  per  $k$  prou gran i aleshores  $z \in \partial A(w)$ .

Per a la inclusió contrària, si  $z \in \partial A(w)$  i  $z \notin J(f)$ , llavors existeix un entorn obert  $U$  de  $z$  on  $\{f^k\}$  és normal, o sigui que té una subseqüència convergent. Com  $z$  està a la frontera de  $A(w)$  la intersecció dels oberts  $U \cap A(w)$  és no buida i oberta, en aquest conjunt la subseqüència ha de convergir a  $w$ .

Una funció analítica constant en un obert no buit ha de ser constant a tot el seu domini, això implica que la subseqüència convergent convergeix a  $w$  a tot  $U$  per tant  $f^k(u) \rightarrow w$ ,  $\forall u \in U$  i  $U \subset A(w)$  que entra en contradicció amb  $z \in \partial A(w)$ .  $\square$

El següent teorema tret de [5], que és una reformulació de [14] ens permet classificar tots els possibles comportaments de les components connexes del conjunt de Fatou.

**Teorema 4.2.13** (Classificació de les components connexes de Fatou). *Sigui  $U$  una component connexa del conjunt de Fatou d'un polinomi  $f$  de grau  $d \geq 2$ . Llavors*

1. *O bé  $U$  és periòdica, és a dir,  $f^p(U) = U$  per algun  $p$ . O bé és preperiòdica.*
2. *Si  $U$  és periòdica, de període  $p$ , definim la seva òrbita  $\mathcal{U}$  com*

$$\mathcal{U} = U \cup f(U) \cup \dots \cup f^{p-1}(U). \quad (4.2.4)$$

*Llavors només es compleix una de les següents afirmacions.*

- (a) *Existeix un punt periòdic atractor, o superatractor,  $z_0 \in \text{int}(U)$  i  $\mathcal{U}$  forma part de la conca immediata d'atracció de l'òrbita de  $z_0$ .*
- (b) *Existeix un punt periòdic parabòlic  $z_0$  en la frontera de  $U$  i  $\mathcal{U}$  forma part la conca parabòlica immediata d'atracció de l'òrbita de  $z_0$ .*
- (c) *Existeix un punt periòdic neutral irracional  $z_0$  a l'interior de  $U$  i  $\mathcal{U}$  forma part d'un cicle de discs de Siegel en el que totes les òrbites giren amb angle irracional respecte a l'òrbita de  $z_0$ .*

Per tant, aquest teorema ens assegura que l'interior de  $K(f)$  només pot estar format per conques atractores o parabòliques, discs de Siegel, o bé antiimatges de les anteriors 4.2.13 1). Estudiarem ara la importància de les òrbites dels punts crítics a l'hora de determinar els possibles comportaments de les components de Fatou. Els següents tres teoremes han estat extrets de [4, Sec.III.2 i V.1].

**Teorema 4.2.14.** *Sigui  $z_0$  un punt periòdic atractor, llavors  $A^*(z_0)$  conté com a mínim un punt crític.*

*Demostració.* Suposem que  $z_0$  és un punt fix atractor amb  $0 < \lambda = |f'(z_0)| < 1$ . Sigui  $U_0 = D_{z_0}(\epsilon)$  un disc invariant per  $f$ , on definim una branca analítica de  $f^{-1}$  complint  $f^{-1}(z_0) = z_0$ . Llavors, la branca de  $f^{-1}$  envia  $U_0$  a  $A^*(z_0)$  de manera injectiva. En conseqüència,  $U_1 = f^{-1}(U_0)$  és simplement connexa, i  $U_0 \subset U_1$ . Continuant amb aquest procediment, construïm  $U_i \subset f^{-1}(U_i) = U_{i+1}$  i estenent analíticament  $f^{-1}$  a  $U_{i+1}$ . Si aquest procés no acaba obtenim una successió  $f^{-n} : U_0 \rightarrow U_n$  de funcions analítiques a  $U_0$  que omet  $J$ , per tant, és normal a  $U_0$ . Això és impossible, ja que  $z_0$  és un punt fix repulsor per  $f^{-1}$ . Llavors, hi ha un  $U_n$  pel qual no podem estendre  $f^{-1}$ , això implica que hi ha un punt crític  $p \in A^*(z_0)$  amb  $f(p) \in U_n$ .

Si  $z_0$  és periòdic amb període  $n > 1$  i  $|(f^n)'(z_0)| < 1$  el mateix argument que abans ens diu que  $A^*(z_0)$  conté un punt crític de  $f^n$ . Com  $(f^n)'(z) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(z))$ ,  $A^*(z_0)$  també conté un punt crític de  $f$ .  $\square$

Els següents dos resultats, que no demostrarem, acaben de cobrir tots els casos possibles de tipus de components connexes del conjunt de Fatou.

**Teorema 4.2.15.** *Si  $z_0$  és un punt periòdic neutral racional, llavors cada conca immediata d'atracció, associada al cicle format pels iterats de  $z_0$ , conté un punt crític.*

**Teorema 4.2.16.** *Sigui  $U$  un disc de Siegel, llavors la frontera de  $U$  està continguda a la clausura del conjunt postcrític de  $f$ .*

El teorema anterior per a la família  $f_c(z) = z^d + c$  implica que si existeix un disc de Siegel, llavors l'òrbita del 0 s'acumula densament a la frontera del disc de Siegel.

Aquests tres resultats, junt amb el criteri de classificació de les components connexes, ens permeten estudiar l'estructura del conjunt de Julia de  $f(z) = z^d + c$  en funció del comportament de les òrbites dels seus punts crítics. Si l'òrbita de 0, l'únic punt crític de  $f$ , no és acotada o és preperiòdica, llavors aquesta òrbita no és atreta per cap cicle atractor o parabòlic, ni s'acumula sobre la frontera de cap disc de Siegel. Per tant, no poden existir components de Fatou connexes, d'on s'obté que  $K(f) = J(f)$ . Una altra conseqüència és que  $J(f)$  només pot tenir un cicle atractor, superatractor o parabòlic, és a dir, no repulsor. Ja que, si n'haguessin 2 tots dos haurien d'atraure l'òrbita del 0.

Encara podem dir més sobre el conjunt de Julia estudiant només les òrbites dels seus punts crítics.

**Teorema 4.2.17.** *Sigui  $f$  un polinomi, suposem que les òrbites dels punts crítics són acotades i cap punt crític finit és periòdic. Llavors,  $J$  és una dendrita és a dir,  $J$  és compacte, arconnex, localment connex, no dens i no separa el pla complex.*

*Demostració.* Si l'òrbita de 0, l'únic punt crític de  $f$ , és preperiòdica, llavors aquesta òrbita no és atreta per cap cicle atractor o parabòlic, ni s'acumula sobre la frontera de cap disc de Siegel. Per tant, pel teorema de classificació de les components connexes de Fatou no poden existir components de Fatou connexes, i es compleix  $K(f) = J(f)$ .

□

### 4.2.1 Exemples de conjunts de Julia

En aquesta secció donarem exemples de conjunts de Julia que es poden calcular explícitament. Aquests són casos molt concrets, ja que en general calcular de manera exacta el conjunt de Julia és impossible.

#### Conjunt de Julia de $z^d$

L'exemple més senzill de conjunt de Julia polinomial apareix per  $c = 0$  en aquest cas,  $f(z) = z^d$ . Estudiant el mòdul d'un punt inicial i els seus iterats observem:

1. Si  $|z| > 1$  llavors  $|f^n(z)| = |z|^n \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ .
2. Si  $|z| < 1$  llavors  $|f^n(z)| = |z|^n \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$ .
3. Si  $|z| = 1$  llavors  $|f^n(z)| = |z|^n = 1$  per a tot  $n$ .

Per tant,  $K(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  i, en conseqüència,  $J(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

Estudiarem ara el comportament caòtic, segons la definició 4.1.9, de les òrbites al conjunt de Julia. Els apartats 1) i 3) següents han estat extrets de [5, pàg. 47].

1. Òrbites periòdiques.  
Si  $f^n(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\theta}$  llavors,

$$d^n 2\pi i\theta = 2\pi i\theta + 2k\pi i \iff \theta = \frac{k}{d^n - 1}, \quad 0 \leq k < d^n - 1. \quad (4.2.5)$$

Ja que els angles obtinguts quan  $k \geq d^n - 1$  o  $k < 0$  són equivalents, mòdul  $2\pi$ , als obtinguts quan  $0 \leq k < d^n - 1$ . Entre les solucions tenim  $\phi(d^n)$  arrels primitives, que es corresponen a òrbites de període exactament  $n$ .

Comprovem ara que són denses; per a tot obert connex  $U$  de  $J(f)$ , existeix  $n$  tal que,  $4\pi \frac{1}{d^n-1} < |U|$ . Per tant, per algun  $k$  es compleix  $e^{2\pi i \frac{k}{d^n-1}} \in U$  i les òrbites periòdiques són denses a  $J(f)$ .

## 2. Òrbites preperiòdiques.

Considerem els punts de la forma  $e^{2\pi i \frac{p}{q}}$  amb  $(p, q) = 1$ . Aquests punts seran preperiòdics quan,

$$f^n(e^{2\pi i \frac{p}{q}}) = f^{n+k} \iff \frac{pd^n}{q} = \frac{pd^{n+k}}{q} + j \text{ per } 0 \leq j < k \iff d^{n+k} \equiv d^n \pmod{q}. \quad (4.2.6)$$

Pel Teorema Petit de Fermat generalitzat, l'equació anterior té solució quan  $(q, d) = 1$ , amb  $k = \phi(q)$ . Si  $(q, d) \neq 1$  o bé, existeix  $n_0$  tal que  $d^n \equiv 0 \pmod{q}$  si  $n > n_0$  llavors, prenent  $n > 0$  i  $k$  qualsevol tenim la solució. Fixem-nos que encara podem dir més, ja que hem demostrat  $f^n(e^{2\pi i \frac{p}{q}}) = f^{n+k}$  per a tot  $k$ , en particular si  $k = 1$  veiem que anem a parar a l'únic punt fix de  $f$  a  $J(f)$  que és 1.

O bé existeix  $n$  tal que  $\{d^{n+i}\}_{i=1, \dots}$  és un subconjunt finit cíclic del grup  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  i per ser cíclic existeix la solució.

Hem demostrat que els punts de  $\mathbb{S}^1$  amb angle múltiple racional de  $2\pi$  són o fixos o periòdics o preperiòdics. Com els racionals són un subconjunt dens dels reals, el subconjunt  $\left\{e^{2\pi i \frac{p}{q}}\right\}_{(p,q)=1}$  és dens a  $\mathbb{S}^1 = J(f)$ . En particular, el subconjunt  $\left\{e^{2\pi i \frac{p}{q}}\right\}_{(p,q)=1, \frac{p}{q} \neq \frac{k}{d^n-1}}$  també és dens a  $J(f)$ . Demostrant així que les òrbites estrictament preperiòdiques són denses a  $J(f)$ .

## 3. Múltiples irracionals de $2\pi$ .

Segui  $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  llavors l'equació (4.2.6) esdevé l'equació  $\alpha \equiv \frac{1}{d^{n+k}-d^n} \pmod{1}$  que no té solució, ja que un costat sempre és racional i l'altre sempre és irracional. Per tant, l'òrbita d'un punt múltiple irracional de  $2\pi$  no és ni fixa, ni periòdica, ni preperiòdica.

Donarem una demostració esquemàtica de l'existència d'una òrbita densa. Identifiquem l'interval  $[0, 1)$  amb  $\mathbb{S}^1$  via la funció  $\phi(\theta) = e^{2\pi i \theta}$ ,  $\phi : [0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Si ara pensem en l'expressió en base  $d$  de cada punt de l'interval  $[0, 1)$  és fàcil demostrar que l'acció de multiplicar un nombre per  $d$  es correspon a un corriments de totes les xifres un dígit cap a l'esquerra. Considerem el nombre que en base  $d$  conté totes les successions ordenades amb llargària arbitrària de nombres entre 0 i  $d-1$ . Tal nombre és irracional, ja que qualsevol irracional en una base ho és en totes i l'acció del corriments sobre les seves xifres descriu una trajectòria densa a  $[0, 1)$ .

Per tant, queda justificat que  $f$  té un comportament caòtic a  $J(f)$ .

## Conjunt de Julia de $z^2 - 2$

En aquest cas,  $f_{-2}(z) = z^2 - 2$ . Demostrarem que  $f_{-2}$  i  $f_0$  són conjugats. Amb tal propòsit, definim la transformació  $h(z) = z + \frac{1}{z}$  restringida a  $C/\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . Llavors, si denotem  $z = x + yi$ , es compleix,  $h(z) = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i(y - \frac{y}{x^2+y^2})$  i com el domini no conté l'origen se satisfan les equacions de Cauchy-Riemann i  $h$  és holomorfa. Per veure que és injectiva, si

$$h(z_1) = h(z_2) \iff z_2 z_1^2 + z_2 = z_1 z_2^2 + z_1 \iff \dots \iff z_1 z_2 = -1$$

L'última igualtat mai es satisfà donat que  $|z_1|, |z_2| > 1$  per tant,  $h$  és injectiva. Per veure que és exhaustiva, fixem-nos que, si  $z \in \mathbb{S}^1$ , llavors  $h(z) = 2\cos(\theta)$  i  $h(\mathbb{S}^1) = [-2, 2]$ . Com  $h$  és contínua ha d'enviar exteriors a exteriors, és a dir,  $h(C/\overline{D}) = \mathbb{C}/[-2, 2]$ . Plantejant l'equació  $f_{-2}(z) = w \in \mathbb{C}/[-2, 2]$  llavors l'exhaustivitat és conseqüència directa de l'existència de solucions de les equacions de segon grau. Hem vist que  $h$  és holomorfa i estableix una bijecció  $(C/\overline{D}) \rightarrow \mathbb{C}/[-2, 2]$ .

Com es satisfà,  $h(f_0(z)) = f_{-2}(h(z))$ , obtenim  $h$  és una conjugació entre les dues funcions als conjunts mencionats anteriorment. Per tant, la dinàmica entre els conjunts de Julia és equivalent via conjugació i es compleix  $K(f_{-2}) = J(f_{-2}) = [-2, 2]$ .

### 4.3 Conjunt de Multibrot: la família $f_c(z) = z^d + c$

En aquesta secció deixarem d'estudiar les òrbites dels punts del pla complex per un polinomi  $f$ , i ens centrarem a estudiar el pla de paràmetres  $c \in \mathbb{C}$  per als quals la família unicrítica  $f(z) = z^d + c$ , amb  $d \geq 2$ , satisfaci certes condicions. En concret, estudiarem el que es coneix com a conjunt de Multibrot.

**Definició 4.3.1** (Conjunt de Multibrot). Definim el conjunt de Multibrot com el conjunt dels  $c \in \mathbb{C}$  per als quals el conjunt ple de Julia de  $f_c$  és connex, formalment

$$\mathcal{M}_d = \{c \in \mathbb{C} : K(f) \text{ és connex}\}. \quad (4.3.1)$$

Dedicarem els següents teoremes a demostrar el que es coneix com la dicotomia fonamental, que ens diu que topològicament el conjunt ple de Julia només té dues possibilitats.

**Teorema 4.3.2** (Dicotomia fonamental). 1. O bé el conjunt ple de Julia és connex, o bé

2. el conjunt de Julia és un conjunt de Cantor.

Donarem una caracterització de cada cas en termes de l'òrbita del 0, l'únic punt crític de  $z^d + c$ .

#### 4.3.1 Preliminars

Dediquem aquesta subsecció de preliminars a introduir una definició i un teorema sobre camins al pla complex, que després usarem a la demostració de la dicotomia fonamental.

**Definició 4.3.3.** Sigui  $D \subset \mathbb{C}$ . Anomenem camí a la funció contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ . Si a més  $\gamma$  compleix  $\gamma(a) = \gamma(b)$  direm que  $\gamma$  és un camí tancat.

**Teorema 4.3.4** (Path-lifting). Sigui  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  un camí al pla complex. Llavors existeix un camí  $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfà  $e^{\hat{\gamma}(t)} = \gamma(t)$  per a tot  $t \in [a, b]$ . Diem que  $\hat{\gamma}(t)$  és un logaritme de  $\gamma(t)$ .

Com  $\hat{\gamma} \subset \mathbb{C}$  podem escriure  $\hat{\gamma}(t) = \varphi(t)i + \ln(|\gamma(t)|)$ . Per tant,  $\varphi(t)$  és una branca continua de l'argument de  $\gamma$ . Llavors podem definir una branca contínua de l'arrel  $d$ -èsima de  $\gamma(t)$

$$\phi_0(t) = |\gamma(t)|^{\frac{1}{d}} e^{i \frac{\varphi(t)}{d}}. \quad (4.3.2)$$

Clarament les altres branques satisfan,

$$\phi_1(t) = \phi_0(t)e^{\frac{2\pi i}{d}}, \dots, \phi_{d-1}(t) = \phi_{d-2}(t)e^{\frac{2\pi i}{d}} \quad (4.3.3)$$

i són girs de  $\frac{2\pi}{d}$  radians respecte al 0 de la branca anterior. En particular, també són contínues.

Pel teorema Path-Lifting 4.3.4, podem definir el nombre de voltes que dona un camí tancat  $\gamma$  a un punt  $c \in \mathbb{C}$  com

$$\text{wind}(\gamma, c) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi},$$

on  $\varphi$  és una branca continua de l'argument del camí  $\gamma - c$ .

### 4.3.2 Dicotomia fonamental

Amb els resultats preliminars ja podem començar a treballar la demostració de la dicotomia fonamental. Sigui  $C$  una corba tancada al pla complex, denotem al llarg d'aquesta subsecció com  $\text{int}(C)$ , a la component connexa acotada de  $\mathbb{C} \setminus C$ , i com  $\text{ext}(C)$  a la component connexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus C$ .

**Proposició 4.3.5.** *Sigui  $C$  un camí tancat al pla complex, i  $f(z) = z^d + c$  per  $c, d$  fixats. Llavors si suposem que  $c \notin C$  tenim dues alternatives.*

a) *O bé  $c \in \text{int}(C)$  i  $f^{-1}(C)$  és un camí tancat. A més  $f$  envia  $\text{int}(f^{-1}(C))$  a  $\text{int}(C)$  i l'exterior a l'exterior. A més  $f : \bigcup_j C_j \rightarrow C$  amb grau  $d$ .*

b) *O bé  $c \notin \text{int}(C)$  aleshores,  $f_j^{-1}(C) = C_j$ ,  $j = 0, \dots, d-1$  són  $d$  camins tancats disjunts i amb interiors disjunts. A més  $f : \text{int}(C_j) \rightarrow \text{int}(C)$  és una bijecció que envia  $\bigcup_i \text{ext}(C_i)$  a  $\text{ext}(C)$ .*

*Demostració.* Sigui  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$  una parametrització de  $C$ . Siguin  $\phi_0, \dots, \phi_d$  les branques de  $\gamma^{\frac{1}{d}}(t)$  definides a (4.3.3). Considerem el punt  $\gamma(0) = w \in C$ . Procedim de la següent manera, anem recorrent  $\gamma(t)$  calculant les antiimatges per una de les branques de la inversa, suposem la branca  $k$ -èsima. Llavors, si  $z_0$  és l'antiimatge de  $w$  per la branca  $k$ -èsima, quan ja quasi hem donat la volta sencera, és a dir quan ens apropem a  $\gamma(1) = w$ , les antiimatges s'han d'apropar a una arrel  $d$ -èsima de  $w - c$ .

a) Suposem que  $0 \in \text{int}(C)$ , llavors, rescatant la notació de (4.3.3), els arguments dels punts de  $\gamma(t) = C$  compleixen  $\varphi_{\min} - \varphi_{\max} = 2\pi$ . Per tant, l'equació

$$\phi_j(z_1) = \phi_k(z_2) \iff |z_1| = |z_2| \quad \text{i} \quad \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{2\pi} = k \in \mathbb{Z} \quad (4.3.4)$$

té solució no trivial a  $C$  amb  $k = 1, -1$ , podem suposar  $k = 1$ .

Per tant ens apropem a  $z_0 e^{\frac{2\pi i}{d}}$  i les antiimatges s'uneixen per formar un sol camí tancat (vegeu Figura 4.1a), que ha de contenir el 0, perquè són girs respecte al 0 les unes de les altres. Com  $f$  és una funció continua que envia exclusivament els punts del camí tancat  $\bigcup_{i=1}^d \phi_i(C)$  al camí tancat  $C$ , també ha d'enviar els punts de l'interior i l'exterior de  $\bigcup_{i=1}^d \phi_i(C)$  als punts de l'interior i l'exterior de  $C$  respectivament.

Clarament  $f(\phi_j(C_j)) = C$ , per tant,  $f$  envia  $\bigcup_j C_j$  a  $C$  amb grau  $d$ .

b) Suposem que  $0 \notin \text{int}(C)$ . Llavors per a una branca continua de l'argument de  $C$ , els arguments  $\varphi$  de qualssevol punts de  $z_1, z_2 \in C$  compleixen,  $0 < \varphi_{\min} \leq \varphi(z_1) < \varphi(z_2) \leq \varphi_{\max} < 2\pi$  ja que  $\text{wind}(\gamma, 0) = 0$  i, per tant, l'equació 4.3.4 no té cap solució no trivial a

$C$ . Per tant, ens hem d'apropar a  $z_0$  i les corbes  $C_1, \dots, C_d$  són contínues i tancades amb  $C_i \cap_{i \neq j} C_j = \emptyset$ . Com totes són girs respecte al 0 les unes de les altres els interiors han de ser disjunts (vegeu Figura 4.1c).

Pel mateix argument que a), ara amb  $d$  camí tancats disjunts, es demostra que  $f$  envia l'interior de cada camí tancat a l'interior de  $C$  i l'exterior de tots els camins tancats a l'exterior de  $C$ .

□

**Observació 4.3.6.** Quan  $c \in C$ , com ara  $0 \in C_j, j = 1, \dots, n$ , tenim que  $\varphi_j(C)$  són  $d$  camins tancats que es toquen només a l'origen (vegeu Figura 4.1b).

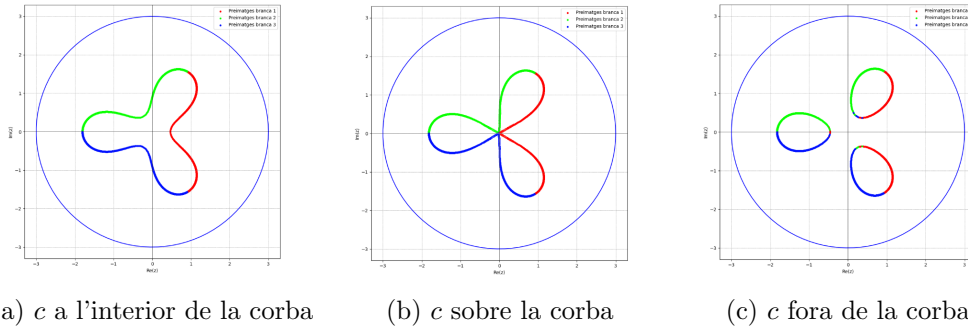


Figura 4.1: Antiimatge per  $f_c(z) = z^3 + c$  d'una corba tancada per als 3 possibles casos de  $c$ .

Una vegada demostrat el teorema anterior ja podem passar a provar la dicotomia fonamental, que també pot expressar-se de la següent manera.

**Teorema 4.3.7** (Dicotomia fonamental).

$$\mathcal{M}_d = \{c \in \mathbb{C} : K(f) \text{ és connex}\} = \left\{c \in \mathbb{C} : f^k(0) \not\rightarrow \infty\right\}.$$

*Demostració.* a) Suposem que  $\{f^k(0)\}_{k=1}^\infty$  és acotat. Sigui  $C$  un cercle a  $\mathbb{C}$  que suposem compleix aquestes tres condicions

1.  $\{f_{d_c}^k(0)\}_{k=1}^\infty \subset \text{int}(C)$ ;
2. si  $z \notin C \cup \text{int}(C)$  aleshores  $z \in A(\infty)$ ;
3.  $f(C) \subset \text{ext}(C)$ , per tant  $f^{-1}(C) \subset \text{int}(C)$ .

Pel teorema 4.1.4 sabem que tot polinomi té un radi d'escapament, per tant, les condicions 2) i 3) són factibles i tal cercle existeix. Demostrarem llavors que la seqüència de camins tancats  $\{f^{-k}(C)\}_{k=0}^\infty$  s'aproxima cada cop més al conjunt de Julia.

Donat que  $0 \in \text{int}(C)$  per la proposició 4.3.5 a),  $f^{-1}(C)$  és un camí tancat, que a conseqüència de 3) viu a l'interior de  $C$ . Aleshores,  $c \in \text{int}(f^{-1}(C))$ , altrament  $f^2(0) = f(c)$  estaria a l'exterior de  $C$ .

Aplicant, un altre cop, la proposició 4.3.5 a) al camí tancat  $f^{-1}(C)$ , ja que té  $c$  al seu

interior, obtenim un altre camí tancat  $f^{-2}(C)$  amb  $c$  al seu interior i que ha d'estar contingut a l'interior de  $f^{-1}(C)$ . Si continuem aplicant la proposició 4.3.5 a) obtenim que  $\{f^{-k}(C)\}$  és una seqüència de camins tancats cadascun a l'interior del seu predecessor, vegeu figura 4.2a. Definim el conjunt  $K = \cap_{k=1}^{\infty} (f^{-k}(C) \cup \text{int}((f^{-k}(C))))$ , que és tancat per ser intersecció numerable de tancats, llavors, si  $z \in K$ ,  $f(z)^k$  no surt de  $C$  per cap  $k$ . De manera contrària si  $z \notin K$  llavors existeix un  $k$  tal que  $f^k(z)$  és a l'exterior de  $C$  i, per tant, l'òrbita d'aquest punt va a infinit.

Clarament,  $K$  és el conjunt ple de Julia, que és intersecció d'una seqüència decreixent de conjunts no buits, tancats, encaixats i connexos. Per tant,  $K$  és connex i la seva frontera,  $J(f)$  també ho és.

b) Si, en canvi,  $\{f^k(0)\}_{k=1}^{\infty}$  no és acotat. Definim un  $C$  complint 2) i 3) i amb cap dels iterats  $\{f^k(0)\}$  sobre  $C$ . Sigui  $p$  el menor enter tal que  $f^p$  es fora de  $C$ . Com a l'apartat a) construïm una seqüència de camins tancats cada un contingut en l'interior del seu predecessor, podem repetir aquest argument fins a arribar al camí tancat  $f^{1-p}(C)$ , ja que  $c = f(0)$  es fora d'aquest camí tancat. Per tant, hem d'aplicar la part b) de la proposició 4.3.5 i  $f^{-p}(C)$  està format per  $d$  camins tancats disjunts a l'interior de  $f^{1-p}(C)$ . El conjunt de Julia ha de viure dins d'aquests camins tancats, ja que els punts exteriors s'iteren a infinit, i cada camí tancat ha de tenir al seu interior parts del conjunt de Julia, ja que  $J(f) \subset C$  i  $J(f)$  és invariant per cada branca de  $f^{-1}$ . Per tant,  $J(f)$  no és connex i aplicant de manera repetida la proposició 4.3.5 b) veiem que  $J(f)$  viu dins d'una seqüència infinita de  $d$  camins tancats disjunts dins d'altres camins tancats i, per tant,  $J(f)$  té infinites components connexes, vegeu Figura 4.2b. Demostrant que el diàmetre d'aquestes components connexes tendeix a zero obtenim el resultat.  $\square$

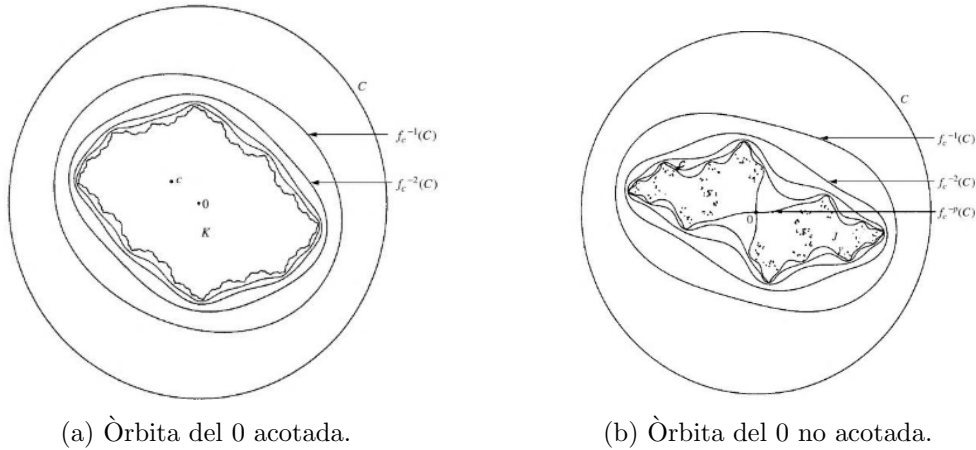


Figura 4.2: Successives antiimatges, per  $f_c(z) = z^2 + c$ , d'una corba tancada per als 2 possibles comportaments de l'òrbita del 0.

El següent teorema és una adaptació per al conjunt de Multibrot del teorema donat a [4, Sec.VIII.1.2] per als conjunts de Mandelbrot.

**Teorema 4.3.8.** *El conjunt de Multibrot és un subconjunt tancat i simplement connex del disc  $|c| \leq 2^{\frac{1}{d-1}}$ . En concret,  $\mathcal{M}_d$  està format pels valors de  $c$  tal que  $f_c^n(0) \leq 2^{\frac{1}{d-1}}$  per a tot  $n \geq 1$ .*

*Demostració.* Suposem que  $|c| > 2^{\frac{1}{d-1}}$  pel criteri donat al teorema 4.3.7 és suficient veure que per aquests valors de  $c$  l'òrbita del 0 no és acotada. Comencem construint la successió

d'iterats de 0,  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = c$ ,  $z_2 = z^d + c$ , llavors el mòdul de  $z_2$  satisfà

$$|z_2| = |z^d + c| = |c||c|^{d-1} + 1| \geq |c|(|c|^{d-1} - 1).$$

Si definim  $\lambda = |c|^{d-1} - 2$  llavors, com  $|c| > 2^{\frac{1}{d-1}}$  aleshores  $\lambda > 0$  i, si ho substituïm a l'equació anterior obtenim

$$|z_2| \geq |c|(1 + \lambda) = |z_1|(1 + \lambda). \quad (4.3.5)$$

Repetint inductivament aquest raonament obtenim  $|z_n| \geq |z_1|(1 + \lambda)^{n-1} \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Per tant,  $|c| \leq 2^{\frac{1}{d-1}}$  quan  $c \in \mathcal{M}_d$ . Passem ara a demostrar l'última afirmació del teorema. Suposem que existeix un  $\lambda > 0$  tal que  $|f_c^n(0)| = 2^{\frac{1}{d-1}} + \lambda > 2^{\frac{1}{d-1}}$  per algun  $n$ . Ara podem suposar que  $|c| \leq 2^{\frac{1}{d-1}}$  ja que, en cas contrari, l'òrbita del 0 tendeix a infinit i  $c \notin \mathcal{M}_d$ . Llavors,

$$f_c^{n+1}(0) \geq (2^{\frac{1}{d-1}} + \lambda)^d - 2^{\frac{1}{d-1}} \geq 2^{\frac{1}{d-1}}(2^d - 2) + 2d\lambda$$

com  $d \geq 2$  es compleix  $2^d - 2 \geq 2^{d-1}$  i aplicant-ho a la desigualtat anterior obtenim  $f_c^{n+1}(0) \geq 2 + 2d\lambda$ . Procedint inductivament obtenim  $f_c^{n+k}(0) \geq 2 + (2d)^k\lambda$  i aquesta expressió tendeix a infinit quan  $k \rightarrow \infty$  en conseqüència, pel criteri donat al teorema 4.3.7  $c \notin \mathcal{M}_d$ . Per veure que  $\mathcal{M}_d$  és un conjunt tancat demostrarem que el seu complementari és obert. Suposem que  $c \notin \mathcal{M}_d$  llavors  $f_c^n(0) > 2$  per algun  $n$ . Per la continuïtat de  $f_c^n(0)$ , respecte del paràmetre  $c$ , existeix un entorn obert  $U$  de  $c$  on  $f_z^n(0) > 2$  per a tot  $z \in U$  per tant, el complementari de  $\mathcal{M}_d$  és obert i  $\mathcal{M}_d$  és tancat. Pel principi del mòdul màxim,  $\mathcal{C}/\mathcal{M}_d$  no té components connexes acotades, per tant,  $\mathcal{C}/\mathcal{M}_d$  és connex, i el seu complementari  $\mathcal{M}_d$  és simplement connex.  $\square$

**Observació 4.3.9.** Com  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{d-1}} = 1$ , llavors  $\mathcal{M}_\infty \subset \mathbb{D}_0(1)$ , on  $\mathbb{D}(0, 1)$  és el disc tancat de radi 1 centrat al 0.

### 4.3.3 Components Hiperbòliques

Observem que si  $f_c$  té una òrbita periòdica atractora, llavors la conca d'atracció d'aquesta òrbita captura el punt crític i, per tant, l'òrbita del punt crític és acotada. Obtenim llavors que els valors de  $c$  per als quals  $f_c$  té una òrbita periòdica atractora pertanyen al conjunt de Multibrot. En aquest context definim el conjunt

$$\mathcal{H} = \{c \in \mathbb{C} : f_c \text{ té un cicle atractor}\},$$

i anomenarem components hiperbòliques a les components connexes de  $\mathcal{H}$ . Donarem una proposició, que no demostrarem, que posa en relleu la importància d'aquestes components i les diferencia les unes de les altres. Per veure una demostració esquemàtica de la següent proposició consultar [5, pàg. 72].

**Proposició 4.3.10.** *Cada una de les components connexes de  $\mathcal{H}$  posseeix un invariant: el període del cicle atractor.*

Ara estudiarem el conjunt de conjunts de Julia amb un punt fix atractor diferent de  $\infty$ , és a dir la component hiperbòlica de període 1. Pel teorema anterior sabem que la component hiperbòlica de període 1 serà una de les components connexes de  $\mathcal{M}_d$ , demostrarem que ni més ni menys es tracta de la component principal  $\mathcal{M}_d$ . A tal component

la denotarem per  $\Omega_{0,d} \in \mathcal{M}_d$ . Per aquest apartat recuperem la dependència en  $c$  de  $f$ , és a dir, usarem la notació  $f_c(z) = z^d + c$ . Els paràmetres  $c$  per als quals  $f_c$  té un punt fix atractor són els valors de  $c$  que satisfan les equacions següents:

$$z^d + c = z$$

$$|f'_c(z)| = d|z|^{d-1} < 1$$

A conseqüència del teorema 4.2.14, només un d'aquests punts fixos pot ser atractor. Comprovem que, en efecte, siguin atractors

$$d|z^d| < 1$$

Obtenint una desigualtat sobre una funció holomorfa, aplicant el principi del mòdul màxim, obtenim que la regió desitjada ve delimitada per la corba solució de:

$$d|z|^{d-1} = 1 \iff z = \frac{1}{d^{\frac{1}{d-1}}} e^{2\pi i t} \text{ per a } t \in [0, 1)$$

Imposant  $c = z - z^d$  obtenim:

$$c_d(t) = \frac{1}{d^{\frac{1}{d-1}}} e^{2\pi i t} - \frac{1}{d^{\frac{d}{d-1}}} e^{2\pi i d t}$$

En conseqüència, la regió de valors de  $c$  per als quals  $f_c$  té un punt fix atractor es correspon a l'interior del que es coneix amb el nom de cardioide generalitzada.

Les cardioides generalitzades són les corbes que s'obtenen mitjançant la trajectòria d'un punt sobre una circumferència de radi  $\frac{1}{d}$  que roda sense lliscament de forma tangent sobre l'exterior d'una segona circumferència fixa de radi 1, veure figures 4.3a, 4.3b i 4.3c.

**Observació 4.3.11.** Observem que  $\lim_{d \rightarrow \infty} c_d(t) = e^{2\pi i t}$  i, per tant, a mesura que  $d$  creix, la forma de la component principal s'apropa cada vegada més a ser un cercle de radi 1. Pel teorema 4.3.8,  $\mathcal{M}_d$  és connex, a l'observació 4.3.9 hem demostrat que  $\mathcal{M}_\infty \subset \mathbb{D}(0, 1)$ , per tant, podem afirmar que  $\mathcal{M}_\infty = \mathbb{D}(0, 1)$ .

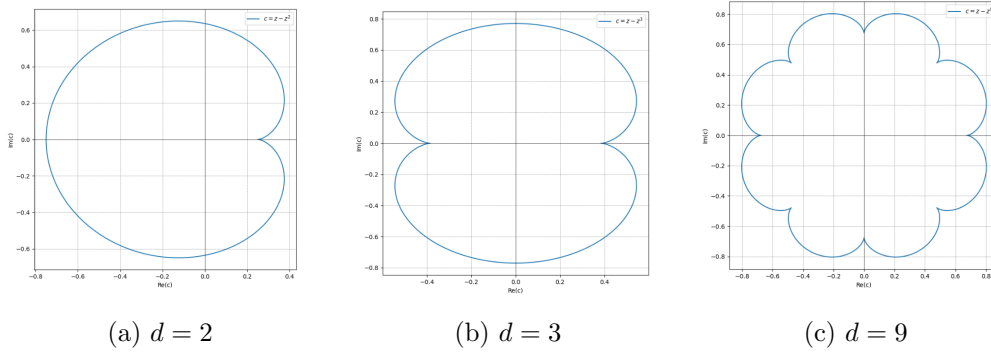


Figura 4.3: Cardioides generalitzades per diferents valors de  $d$ .

Per als  $c \in \Omega_{0,d}$ ,  $f_c(z) = z^d + c$  té un únic punt fix atractor  $z_0$  i es compleix,  $\mathbb{C} = A(z_0) \cup J(f_c) \cup A(\infty)$ . El mateix raonament que a la demostració de 4.1.5 2) demostra que  $A(z_0) = A^*(z_0)$  i, per tant,  $A(z_0)$  és un conjunt connex.

És raonable esperar que per a valors de  $c$  prou propers a 0,  $J(f_c)$  sigui similar topològicament a  $J(f_0) = \mathbb{S}^1$ , és a dir similar a una corba tancada simple. Veurem que, en efecte, aquest és el cas quan  $c \in \Omega_{0,d}$ .

**Proposició 4.3.12.** *Per a tots els valors de  $c \in \Omega_{0,d}$ ,  $J(f_c)$  és una corba de Jordan.*

Una demostració detallada es pot trobar a [2, pàg. 233-237].

# Capítol 5

## IFS

En aquest apartat estudiarem un tipus especials de sistemes dinàmics al pla complex coneguts amb el nom sistemes de funcions iterades (IFS). Hem pres com a fonts, [7] i [6, Sec.9].

**Definició 5.0.1.** Anomenarem sistema de funcions iterades (IFS) a un conjunt de funcions  $\{S_1, \dots, S_m\}$ ,  $m \geq 2$  amb  $S_i : D \rightarrow D$ . On  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Abans de donar el resultat, rescatem la notació de la secció 2.1. Recordem que el conjunt  $\mathcal{C} = \{U \subset \mathbb{R}^n : U \text{ és un compacte no buit}\}$  dotat amb la distància de Hausdorff constitueix un espai mètric complet. Definim també la transformació, també anomenada funció collage,  $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  com

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E). \quad (5.0.1)$$

Ens serà útil veure quins conjunts romanen invariants després d'iterar un nombre determinat, finit o infinit, de vegades el conjunt original sota l'IFS.

**Definició 5.0.2.** Un conjunt  $F \subset \mathbb{R}^n$  no buit és el conjunt invariant atractor de l'IFS  $\{S_1, \dots, S_m\}$  si

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) = S(F). \quad (5.0.2)$$

És a dir,  $F$  està compost de la imatge d'ell mateix sota els  $S_i$ .

Veurem ara que els IFS contractius sempre tenen un conjunt invariant que, a més, és un atractor global.

**Teorema 5.0.3.** *Sigui  $\{S_1, \dots, S_m\}$  un IFS en un conjunt tancat  $A \subset \mathbb{R}^n$  complint*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq r_i |x - y| \text{ amb } r_i < 1, \forall i = 1, \dots, m, \quad x, y \in A \quad (5.0.3)$$

*Aleshores l'IFS té un únic atractor global. És a dir, existeix un conjunt compacte no buit  $F$  tal que  $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ . A més  $F$  compleix,*

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n(E) \quad (5.0.4)$$

*per a qualsevol  $E \in \mathcal{C}$ .*

*Demostració.* Siguin  $B, C \subset \mathcal{C}$  llavors

$$d_{\mathcal{H}}(S(C), S(B)) = d_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(C), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d_{\mathcal{H}}(S_i(C), S_i(B)), \quad (5.0.5)$$

ja que si el  $\delta$ -entorn  $(S_i(A))_{\delta}$  conté  $S_i(B)$  per a tot  $i$ , aleshores  $(\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_{\delta}$  conté  $\bigcup_{i=1}^m S_i(B)$ , i viceversa. Llavors, per (5.0.3)

$$d_{\mathcal{H}}(S(C), S(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} r_i\right) d_{\mathcal{H}}(C, B) \quad (5.0.6)$$

Donat que per a tot  $i = 1, \dots, m$  se satisfà  $r_i < 1$ , la funció  $S$  és una contracció. Per tant,  $S$  és contractiu en  $\mathcal{C}$  que és un espai mètric complet. Aleshores, pel teorema del punt Fix de Banach 2.2.2,  $S$  té un únic punt fix. Això és, existeix un únic  $F \in \mathcal{C}$  tal que  $S(F) = F$ . El teorema de Banach també ens diu que per a tot conjunt inicial  $E \subset \mathcal{C}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E) = F$  concloent la demostració.  $\square$

Un dels avantatges dels IFS contractius és que gràcies al teorema de Moran [12], la dimensió de l'atractor es pot estimar en funció de les contraccions que el defineixen. El cas més senzill és quan les  $S_i$  són semblances, és a dir quan  $|S_i(x) - S_i(y)| = r_i|x - y|$ . En aquest cas, el conjunt atractor està format per infinites còpies, infinitament petites, del conjunt original. Amb aquesta idea en ment, Mandelbrot va donar la següent definició informal: Direm que un fractal és autosimilar si és invariant sota similituds geomètriques ordinàries [10, pàg. 19]. Autors posteriors van refinar la idea d'autosimilaritat i van donar la següent definició.

**Definició 5.0.4** (Conjunt autosimilar). Un espai topològic compacte  $X$  és autosimilar si existeix un conjunt finit  $I \subset \mathbb{N}$  i un conjunt d'homeomorfismes  $\{f_i : i \in I\}$  per als quals

$$X = \bigcup_{i \in I} f_i(X)$$

Exemples de conjunts autosimilars són el conjunt ternari de Cantor, que ja hem vist la seva estructura a (3.2.8), la corba de Koch ...

Introduïrem ara el resultat principal, la fórmula de Moran, àmpliament utilitzada per a calcular la dimensió del conjunt atractor d'un IFS. Abans cal introduir una noció i un resultat que ens ajudaran a demostrar aquesta fórmula.

**Definició 5.0.5.** Direm que  $\{S_1, \dots, S_m\}$  satisfan la condició del conjunt obert si existeix un obert no buit acotat  $V$  tal que  $\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V$  amb aquesta unió disjunta.

Fixem-nos que si les imatges de  $S_1(V), \dots, S_m(V)$  són disjunes i estan incloses a  $V$  se satisfà la condició del conjunt obert.

**Lema 5.0.6.** Siguin  $\{U_i\}$  una col·lecció d'oberts disjunts de  $\mathbb{R}^n$  tal que, cada  $\{U_i\}$  conté una bola de radi  $a_1 r$  i està contingut en una bola de radi  $a_2 r$ . Llavors, qualsevol bola  $B$  de radi  $r$  interseca com a molt  $(1 + 2a_2)^{-n} a_1^{-n}$  de les clausures  $\overline{U_i}$

*Demostració.* Suposem que  $\overline{U_i}$  interseca  $B$ , llavors  $\overline{U_i}$  està contingut en una bola de radi  $(1 + 2a_2)r$  concèntrica a  $B$ . Suposem que  $q$  dels  $\overline{U_i}$  tenen intersecció no buida amb  $B$ , sumant els volums obtenim la següent desigualtat  $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$ .  $\square$

**Teorema 5.0.7** (Teorema de Moran [6, Teo.9.3]). *Siguin  $\{S_1, \dots, S_m\}$  semblances contractives, amb factors de contracció  $r_1, \dots, r_m < 1$ , que satisfan la condició del conjunt obert. Si  $F$  és el seu conjunt atractor llavors  $\dim_H F = \dim_B F = s$ , on  $s$  és la solució de*

$$\sum_{i=1}^m r_i^s = 1. \quad (5.0.7)$$

Per aquest valor de  $s$  es compleix,  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

*Demostració.* Demostrem primer que tal valor de  $s$  és únic. Com els  $r_i$  són tots menors a 1, la funció  $g(s) = \sum_{i=1}^m r_i^s$ , per a  $s \geq 0$  és monòtona decreixent amb  $g(0) = m > 1$  i  $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$ . Per tant, pel teorema de Bolzano existeix un únic valor de  $s$  tal que  $g(s) - 1 = 0$ .

Sigui  $s$  definit com a (5.0.7), definim  $I_k$  com el conjunt de totes les seqüències de  $k$  termes amb  $(i_1, \dots, i_k)$  amb  $1 \leq i_j \leq m$ . Per cada conjunt  $D \subset A$  i  $(i_1, \dots, i_k) \in I_k$  denotem  $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$ .

Usant 5.0.2 repetidament obtenim

$$F = \bigcup_{I_k} F_{i_1, \dots, i_k}$$

Donat que  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$  és una semblança de raó  $r_{i_1} \dots r_{i_k}$ ,

$$\sum_{I_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = \sum_{I_k} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s |F|^s = \left( \sum_{i_1=1}^m r_{i_1}^s \right) \dots \left( \sum_{i_k=1}^m r_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s. \quad (5.0.8)$$

Llavors, per cada  $\delta > 0$ , podem escollir  $k$  tal que  $|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_i r_i)^k |F| \leq \delta$  per tant,  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$  i  $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$  obtenint així el límit superior  $\dim_H F \leq s$ .

Per al límit inferior, sigui  $I$  el conjunt de totes les seqüències infinites

$$I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\},$$

i sigui

$$I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, \dots) \in I\}$$

el conjunt de seqüències infinites amb termes inicials  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ .

Definim una funció de distribució de massa  $\mu$  a  $I$  tal que  $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s$  usant 5.0.7 obtenim

$$\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s = (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s \sum_{j=1}^m r_j^s = \sum_{j=1}^m (r_{i_1} \dots r_{i_k} r_j)^s = \sum_{j=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, j})$$

Per tant,  $\mu$  és una mesura que compleix  $\mu(I) = \sum_{i=1}^m (r_i)^s = 1$ , obtenint així que  $\mu$  és una distribució de massa. Podem transferir  $\mu$  a una distribució de massa  $\hat{\mu}$  a  $F$  definint,  $\hat{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$  per  $A \subset F$ . Llavors, la  $\hat{\mu}$  massa d'un conjunt és la  $\mu$  massa de les seqüències que el conformen. Recordem que  $(x_{i_1, i_2, \dots}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  i, per tant, per cada  $(i_1, \dots, i_k, \dots) \in I$ ,  $x_{i_1, \dots, i_k, \dots} \in F$ , aleshores  $\mu(I) = \hat{\mu}(F) = 1$ .

Ara demostrarem que  $\hat{\mu}$  compleix les condicions del principi de distribució de massa 3.2.7. Sigui  $V$  un obert complint la condició del conjunt obert 5.0.5. Com  $\bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V}) = S(\bar{V}) \subset \bar{V}$  és una seqüència decreixent de conjunts, per tant, per 5.0.3  $S^k(\bar{V})$  convergeix a  $F$ . En particular,  $F \subset \bar{V}$  i  $F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bar{V}_{i_1, \dots, i_K}$  per cada seqüència finita  $(i_1, \dots, i_k)$ .

Sigui  $B$  qualsevol bola de radi  $r < 1$ , farem una estimació de  $\hat{\mu}(B)$  considerant els conjunts  $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$  amb diàmetres comparables al de  $B$  i amb clausures que intersequin  $F \cap B$ . Per fer-ho, tallem cada seqüència  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  després del primer terme  $i_k$  per al qual es satisfaci

$$\left( \min_{1 \leq i \leq m} r_i \right) r \leq r_{i_1} r_{i_2}, \dots, r_{i_k} \leq r \quad (5.0.9)$$

i denotem per  $Q$  el conjunt finit d'aquestes seqüències. Llavors per a tota seqüència infinita hi ha un únic valor  $k$  pel qual  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ . Com els  $V_1, \dots, V_m \subset V$  són disjunts, repetint aquest argument recursivament, els  $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$ , també ho són. A més  $F \subset \bigcup_Q F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ .

Escollim ara  $a_1, a_2$  tal que  $V$  contingui una bola de radi  $a_1$ , i estigui contingut en una bola de radi  $a_2$ . Llavors, per a tot  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ , el conjunt  $V_{i_1, \dots, i_k}$  conté una bola de radi  $r_{i_1} \dots r_{i_k}$  i, per tant, conté una de radi  $(\min_i r_i) a_1 r$ , i està contingut en una bola de radi  $r_{i_1} \dots r_{i_k}$  i, per tant, està contingut en una bola de radi  $a_2 r$ . Si anomenem  $Q_1$  al conjunt de seqüències de  $Q$  tal que  $B$  interseca  $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$  llavors, pel lemma 5.0.6, hi ha com a molt  $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i r_i)^{-n}$  seqüències a  $Q_1$ .

Llavors,

$$\hat{\mu}(B) = \hat{\mu}(F \cap B) = \mu \{ (i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \} \leq \mu \left\{ \bigcup_{Q_1} I_{j_1, \dots, j_k} \right\}$$

ja que, si  $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} \bar{V}_{j_1, \dots, j_k}$ , llavors existeix  $k$  tal que  $x_{i_1, \dots, i_k} \in Q_1$ . Llavors, usant 5.0.9. obtenim

$$\hat{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{Q_1} (r_{i_1}, \dots, r_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q.$$

Com tot conjunt  $U$  està contingut en una bola de radi  $|U|$ , tenim que  $\hat{\mu}(U) \leq |U|^s q$ , i pel principi de distribució de massa  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{q} > 0$  obtenint així el resultat  $\dim_H F \geq s$  per la dimensió de Hausdorff.

Passem a provar la igualtat de la Box dimension, donat  $r < 1$  i  $Q$  definit com abans llavors, aplicant inductivament 5.0.7, obtenim  $\sum_Q (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s = 1$ , per tant, per 5.0.6  $Q$  conté com a molt  $(\min_i r_i)^{-s} r^{-s}$  seqüències. Per cada  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ , tenim  $|\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}| = r_{i_1} \dots r_{i_k} |\bar{V}| \leq r |\bar{V}|$ , així els  $\{\bar{V}_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$  són un recobriment de  $F$  de com a màxim  $(\min_i r_i)^{-s} r^{-s}$  conjunts de diàmetre  $r |\bar{V}|$ . Aquest recobriment es correspon al donat per la definició equivalent 3.2.1 1), per tant,  $\dim_B F \leq s$ . Aplicant 3.2.3 obtenim  $s = \dim_H F \leq \dim_B F \leq \dim_B F = s$ , que demostra el resultat.  $\square$

El teorema anterior ens dona una eina per calcular la dimensió dels conjunts atractors dels IFS definits per semblances. Per exemple, la corba de Koch és l'atractor d'un IFS format per 4 semblances de raó  $\frac{1}{3}$  per tant  $s = \frac{\log 4}{\log 3}$ , que és la solució de  $\sum_{i=1}^4 (\frac{1}{3})^s = 1$ . Pel mateix raonament, si un conjunt és l'atractor d'un IFS compost per  $d$  semblances de raó  $r = 1/k$ , llavors  $s = \frac{\log(d)}{\log(k)}$ .

Estudiarem ara els casos on l'IFS està format per contraccions que no necessàriament són semblances. Les següents proposicions ens donen cotes superiors i inferiors per a la dimensió quan les contraccions no estan compostes per semblances.

**Proposició 5.0.8.** *Si  $F$  és l'atractor de l'IFS donat per les contraccions  $S_1, \dots, S_m$  al subconjunt tancat  $A \subset \mathbb{R}^n$  tal que,*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq r_i |x - y|, x, y \in A \quad \text{amb} \quad 0 < r_i < 1.$$

Aleshores  $\dim_H F \leq s$ , on  $s$  és la solució de  $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$ .

*Demostració.* La prova és igual a l'anterior modificant la igualtat de (5.0.8) per la desigualtat  $|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq r_{i_1} \dots r_{i_k} |F|$ .  $\square$

Donar una cota per al límit inferior és més complicat hi haurem de fer servir el principi de distribució de massa.

**Proposició 5.0.9.** *Amb la mateixa notació que la proposició anterior, si se satisfà*

$$b_i |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)|, \quad x, y \in A \quad \text{amb} \quad 0 < b_i < 1,$$

*i l'atractor  $F$  compleix,  $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$  amb aquesta unió disjunta llavors,  $F$  és totalment disconnex i  $\dim_H F \geq s$  que és la solució de  $\sum_{i=1}^m b_i^s = 1$ .*

*Demostració.* Sigui  $d > 0$  la mínima distància entre qualsevol parell de punts de les components compactes  $S_1(F), \dots, S_m(F)$ , això és  $d = \min_{i \neq j} \{|x - y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F)\}$ . Fent ús de la notació anterior definim una mesura  $\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1}, \dots, b_{i_k})^s$ . Pel mateix raonament

$$\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) = \sum_{i=1}^m (b_{i_1}, \dots, b_{i_k} b_i)^s = \sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_{i_1, \dots, i_k, i}\right).$$

Per tant,  $\mu$  és una distribució de massa i  $\mu(F) = 1$ . Si  $x \in F$  existeix una única seqüència infinita  $(i_1, \dots)$  tal que  $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$  per a tot  $k$ , ja que com els  $S_i(F)$  són disjunts i  $F_{i_1, \dots, i_k} \subset F$  els  $S_i(F_{i_1, \dots, i_k})$  també seran disjunts.

Per a  $0 < r < d$ , sigui  $k$  el menor enter tal que  $b_{i_1}, \dots, b_{i_k} \leq r < b_{i_1}, \dots, b_{i_{k-1}} d$ . Per tant, els conjunts  $F_{i_1, \dots, i_k}$  i  $F_{i'_1, \dots, i'_k}$  són disjunts i estan separats, com a mínim, per una distància  $b_{i_1}, \dots, b_{i_k} d > r$ . Aplicant-ho inductivament obtenim que  $F$  és totalment disconnex. Per tant, per  $x \in F$ ,  $F \cap B(x, r) \subset F_{i_1, \dots, i_k}$  i prenent mesures,

$$\mu(F \cap B(x, r)) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s.$$

Com per a tot subconjunt  $U \subset F$  existeix  $x \in F$  tal que  $U \subset B(x, r)$  amb  $r = |U|$ , obtenim  $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$ . Pel principi de distribució de massa  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  i  $\dim_H F \geq s$ .  $\square$

Moltes vegades el repulsor d'un sistema dinàmic  $f$  coincideix amb l'atractor d'un IFS relacionat, normalment el donat per les diferents branques de  $f^{-1}$ . Exemple d'això és el sistema dinàmic donat pels iterats de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  amb  $f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|)$ . Aleshores l'IFS donat per les contraccions  $S_1(x) = \frac{1}{3}x$ ,  $S_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x$  satisfà

$$f(S_1(x)) = f(S_2(x)) = x \text{ per } 0 \leq x \leq 1$$

i, per tant, són les dues branques de la inversa de  $f$ . Pel teorema (5.0.3) existeix un únic atractor compacte  $F \subset [0, 1]$  que satisfà

$$F = S_1(F) \cup S_2(F) \tag{5.0.10}$$

i és el resultat de  $F = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k([0, 1])$ .

Clarament, l'atractor és el conjunt ternari de Cantor i per (5.0.7)  $\dim_H F = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Per (5.0.3)  $f(F) = F$ . Si  $x \notin F$  aleshores existeix  $k$  tal que  $x \notin S^k([0, 1])$  per tant  $f^k(x) \notin [0, 1]$  i per a tots aquests punts els seus iterats tendeixen a  $-\infty$ . Per tant,  $F$  és el repulsor del sistema dinàmic donat per  $f$ .

## Capítol 6

# Càlcul de la dimensió de Hausdorff de conjunts de Julia

En aquesta secció donarem una aproximació asimptòtica de la dimensió dels conjunts de Júlia que siguin de Cantor. El resultat és una reformulació del donat a [6, Teo.14.15].

**Teorema 6.0.1.** *Suposem*

$$|c| > |cd|^{\frac{1}{d}} + \frac{1}{d^{\frac{d}{d-1}}}. \quad (6.0.1)$$

*Llavors  $J(f)$  és totalment disconnex, i és l'atractor de l'IFS format per les contraccions donades per les  $d$  branques de  $f^{-1}(z)$ . Quan  $|c|$  és prou gran,  $\dim_B J(f) = \dim_H J(f) \simeq \frac{d \log(d)}{(d-1) \log(d^{\frac{d}{d-1}} |c|)}$ .*

*Demostració.* Sigui  $f(z) = z^d + c$ , denotem cada una de les  $d$  branques de la seva inversa com  $f_0, \dots, f_{d-1}$ . Definim

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq |dc|^{\frac{1}{d}} \right\},$$

llavors, si  $f(z) \in D$  per la desigualtat triangular

$$|z^d| \leq |z^d + c| + |c| = |f_d(z)| + |c| \leq |cd|^{\frac{1}{d}} + |c|. \quad (6.0.2)$$

Per (6.0.1) tenim que  $|cd|^{\frac{1}{d}} + |c| \leq |2c| \leq |cd|$  donant que  $|z| \leq |cd|^{\frac{1}{d}}$   $f_j^{-1}(D) \subset D$ , per a tot  $j = 1, \dots, d$ .

Per (6.0.1) tenim que  $c \notin D$  i per la proposició 4.3.5 b), com la frontera de  $D$  es un camí tancat,  $f_j^{-1}(\partial D) = \text{són } d \text{ camins tancats disjunts}$ . Per tant,  $f_d^{-1}(D)$  està format per  $d$  regions disjunts  $D_1, \dots, D_d$ , tals que  $f : D_j \rightarrow D$  és bijectiva.

Podem definir llavors les funcions  $S_1, \dots, S_d$ ,  $S_i : D \rightarrow D_i$  com les  $d$  branques de la inversa de  $f$  a  $D$ , és a dir,  $S_i(f(z)) = z$ ,  $f(S_i(w)) = w$  per a tot  $i = 1, \dots, d$ .

Derivant la igualtat anterior obtenim,

$$S'_i(w) = \frac{1}{f'(S_i(w))} \iff |S'_i(w)| = \frac{1}{d|w - c|^{\frac{d-1}{d}}} \quad (6.0.3)$$

per a  $i = 1, \dots, d$ , com  $D$  és tancat i convex

$$\frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \max_{z_1 \in D} |S'_i(z_1)|.$$

El màxim a  $D$  s'assoleix quan  $|z - c|$  és mínim, o sigui,  $\min_{z \in D} |z - c| = |c| - |cd|^{\frac{1}{d}}$ . Per tant, per (6.0.1)

$$\lambda = \max_{z \in D} |S'_i(z)| = \frac{1}{d}(|c| - |cd|^{\frac{1}{d}})^{-\frac{d-1}{d}} < \frac{1}{d} \left( \frac{1}{d^{\frac{d}{d-1}}} \right)^{-\frac{d}{d-1}} = 1$$

i les  $S_i$  són contraccions a  $D$ .

Per al límit inferior, siguin  $z'_1 = S_i(z_1)$ ,  $z'_2 = S_i(z_2)$ . Aleshores

$$|f(z'_1) - f(z'_2)| \leq \max_{z \in D} |f'(z)| |z'_1 - z'_2| \iff |z_1 - z_2| \leq \max_{(|z| \leq |cd|^{\frac{1}{d}} + |c|)^{\frac{1}{d}}} dz^{d-1} |S_i(z_1) - S_i(z_2)|.$$

On hem usat la desigualtat (6.0.2) per calcular la regió del màxim. El màxim s'assoleix quan el mòdul és màxim, per tant,

$$\frac{1}{d(|cd|^{\frac{1}{d}} + |c|)^{\frac{d-1}{d}}} \leq \frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|}.$$

Com les  $S_i$  són contraccions, pel teorema 5.0.3 hi ha un únic atractor compacte no buit  $F \subset D$  que satisfà  $\cup_{i=1}^d S_i(F) = F$ . El diàmetre de cada component satisfà,  $|S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}(D)| \leq \lambda^n |D| \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$  en conseqüència, el conjunt atractor és totalment disconnex. Per veure que  $F$  és el conjunt de Julia, notem que, com  $D$  ha de contenir, com a mínim, un punt  $z \in J(f)$  (per exemple, un punt fix repulsor de  $f$ ), pel teorema 4.2.11 tenim  $J(f) = \overline{(\cup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z))} \subset D$ , ja que  $f^{-k}(D) \subset D$ . Aplicant els resultats de la secció 4.2, obtenim que  $J(f)$  és un subconjunt de  $D$  compacte i no buit, que satisfà,  $J(f) = f^{-1}(J(f)) = S_1(J(f)) \cup \dots \cup S_d(J(f))$ . Per tant,  $J(F) = F$  per la unicitat de l'atractor d'un IFS. Aplicant la proposició (5.0.7) obtenim que els límits superiors i inferior són les solucions de  $d(\frac{1}{d}(|c| \pm |cd|^{\frac{1}{d}})^{-\frac{d-1}{d}})^s = 1$ , que són

$$s = \frac{d \log(d)}{(d-1) \log(d^{\frac{d}{d-1}} |c| \pm |cd|^{\frac{1}{d}})},$$

donant l'aproximació asimptòtica enunciada. □

## Capítol 7

# Codi generador d'imatges

La Figura 1.1 està extreta de <https://es-academic.com/dic.nsf/eswiki/508425>.

La Figura 3.1 està extreta de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Graph\\_of\\_Hausdorff\\_measure\\_vs\\_its\\_exponent.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Graph_of_Hausdorff_measure_vs_its_exponent.svg).

La Figura 3.2 està extreta de <http://mathfoundations.lti.cs.cmu.edu/class8/Cantor.html>.

La Figura 3.3 està extreta de [13].

Les figures 4.2 estan extretes de [6].

Codi que genera les Figures 4.2 i 4.3. Per a la correcta compilació s'ha de canviar la tipografia de “ a la usada en Phyton.

Listing 7.1: Codi per generar les imatges de les corbes antiimatge.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve
import matplotlib.cm as cm

def f(z, d, c):
    return z**d + c

def parametrizacio_el_lipse(a, b, t):
    return a * np.cos(t) + 1j * b * np.sin(t)

def trobar_preimages(a, b, d, c, num_punts=1000, tol=1e-8):
    valors_t = np.linspace(0, 2 * np.pi, num_punts)
    punts_el_lipse = parametrizacio_el_lipse(a, b, valors_t)

    preimages = [[] for _ in range(d)]

    for punt in punts_el_lipse:
        def equacio(z):
            z = complex(z[0], z[1])
            return [f(z, d, c).real - punt.real, f(z, d, c).imag - punt.imag]

        # Generar conjectures inicials
```

```

conjectures = [punt**(1/d) * np.exp(2j * np.pi * k / d) for k in range(d)]
solucions = []

for k, conjectura in enumerate(conjectures):
    conjectura_real_imag = [conjectura.real, conjectura.imag]
    sol = fsolve(equacio, conjectura_real_imag, xtol=tol)
    sol_complexa = complex(sol[0], sol[1])
    if all(np.abs(sol_complexa - np.array(solucions)) > tol):
        solucions.append(sol_complexa)
        preimages[k].append(sol_complexa)

return [np.array(branch) for branch in preimages]

# Par metres de l'el lipse
a = 3 # Semieix major
b = 3 # Semieix menor

# Par metres de la funci
d = 3
c = 0.5 + 0.2j

preimages = trobar_preimages(a, b, d, c)

# Tra ar els resultats
t = np.linspace(0, 2 * np.pi, 1000)
el_lipse = parametrizacio_el_lipse(a, b, t)

plt.figure(figsize=(10, 10))
plt.plot(el_lipse.real, el_lipse.imag, label="El lipse", color="blue")

# Generar una llista de colors din mica
colors = cm.viridis(np.linspace(0, 1, d))

for i, branch in enumerate(preimages):
    plt.scatter(branch.real, branch.imag, color=colors[i], s=10, label=f"Preim {i}")

plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.legend()
plt.title(f"Preim tges de l'el lipse sota  $f(z) = z^d + (c_{\text{real}} + j c_{\text{imag}})$ ")
plt.xlabel("Re(z)")
plt.ylabel("Im(z)")
plt.show()

```

Listing 7.2: Codi per generar les imatges de les cardioides generalitzades.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

```

```

# Grau del polinomi
d = 9

theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, 1000)
z = (1 / d)**(1 / (d - 1)) * np.exp(1j * theta)
c = z - z**d

# Graficar
plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(c.real, c.imag, label=f'Corba per a d={d}')
plt.xlabel('Re(c)')
plt.ylabel('Im(c)')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.legend()
plt.show()

```

# Bibliografia

- [1] Stefan Banach. “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”. A: *Fundamenta mathematicae* 3.1 (1922), pàg. 133 - 181.
- [2] Alan F Beardon. *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*. Vol. 132. Springer Science & Business Media, 2000.
- [3] Constantin Caratheodory. “Vorlesungen uber reelle Funktionen”. A: *BG Teubner* (1918).
- [4] L. Carleson i T.W. Gamelin. *Complex Dynamics*. Universitext (Berlin. Print). Springer-Verlag, 1993. ISBN: 9780387979427. URL: <https://books.google.es/books?id=74wZAQAIAAJ>.
- [5] Núria Fagella i Xavier Jarque. *Iteración compleja y fractales*. 2007.
- [6] Kenneth Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2007.
- [7] M Fernández-Martínez, Juan Luis García Guirao i Juan Antonio Vera López. “Fractal dimension for IFS-attractors revisited”. A: *Qualitative theory of dynamical systems* 17.3 (2018), pàg. 709 - 722.
- [8] Felix Hausdorff. *Grundzüge der mengenlehre*. Vol. 7. von Veit, 1914.
- [9] Jeff Henrikson. “Completeness and total boundedness of the Hausdorff metric”. A: *MIT Undergraduate Journal of Mathematics* 1.69-80 (1999), pàg. 10.
- [10] Benoit B Mandelbrot i Benoit B Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Vol. 1. WH freeman New York, 1982.
- [11] John Milnor. *Dynamics in one complex variable.(AM-160):(AM-160)-*. Vol. 160. Princeton University Press, 2011.
- [12] Pat AP Moran. “Additive functions of intervals and Hausdorff measure”. A: *Classics On Fractals*. CRC Press, 2019, pàg. 240 - 257.
- [13] Kosala Purnomo et al. “The construction of the Koch curve (n,c) using L-system”. A: vol. 2202. Des. de 2019, pàg. 020108. DOI: 10.1063/1.5141721.
- [14] Dennis Sullivan. “Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains”. A: *Annals of mathematics* 122.2 (1985), pàg. 401 - 418.