UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Varietats sense accions de S^1 no trivials

Autor: Josep Esquirol Esteve

Director: Dr. Ignasi Mundet
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 26 de juny de 2018

Abstract

The goal of this work is to prove a non existence theorem of non-trivial S^1 actions on a certain kind of smooth manifolds. More specifically, let T be the n-dimensional torus and M a smooth conected, closed (i.e. compact and without bondary) and orientable manifold of dimension n such that $\chi(T\#M) \neq 0$. Then there are no non-trivial S^1 actions on $T\#M$.
Before proving this statement, some smooth manifold and Lie group theory will be developed: the proof of the Sard and the Poincaré-Hopf theorems stand out in this part.

Resum

L'objectiu d'aquest treball és provar un teorema de no existència d'accions no trivials de S^1 en un cert tipus varietats diferenciables. Més específicament, suposem que T és el torus n-dimensional i M una varietat diferenciable connexa, tancada (compacta i sense vora) i orientable de dimensió n de manera que $\chi(T\#M) \neq 0$. Aleshores no existeix cap acció diferenciable no trivial de S^1 en $T\#M$.
Prèviament a la prova del teorema cal passar per un desenvolupament de la teoria de varietats diferenciables i accions de grups de Lie, demostrant, com a resultats més destacats, els teoremes de Sard i de Poincaré-Hopf.

2010 Mathematics Subject Classification. 57S15, 58D19

Índex

1 Introducció

Aquest treball té un objectiu concret, que és provar l'afirmació següent.

Teorema. *Sigui T^n el torus n-dimensional i M una varietat diferenciable connexa i tancada (compacta i sense vora), orientable i de dimensió n. Suposem també que $\chi(T^n \# M) \neq 0$. Aleshores no existeix cap acció diferenciable no trivial de S^1 en $T^n \# M$.*

Denotem per $T^n \# M$ la suma connexa de T^n i M, vegi's secció 2.4.

Fem una aproximació heurística a aquestes hipòtesis. El tor és una varietat compacta amb molta simetria respecte S^1, al ser producte de cercles. Concretament podem agafar una acció de S^1 a S^1 per cada factor de $T^n = S^1 \times ... \times S^1$ i això ens determinarà una acció de S^1 a T^n. La idea és que si sumem el tor amb una altra varietat de manera que l'estructura quedi "modificada", concretament, que la característica d'Euler passi a ser diferent de zero (recordem que $\chi(T^n) = 0$ per tot n), aleshores ja no existiran accions de S^1 a la nova varietat excepte la trivial.

Agafada la idea, existeixen exemples que compleixin les hipòtesis? Si n és senar no perquè $\chi(X) = 0$ per qualsevol varietat tancada i orientable X de dimensió n. Això és conseqüència de la *dualitat de Poincaré*. Aquesta implica que:

$$b_k(X) = b_{n-k}(X)$$

per tot $0 \leq k \leq n$, on $b_k(X)$ és el k-èssim nombre de Betti associat a X. Usant també que $b_k(X) = 0$ per $k > n$, és immediat que $\chi(X) = 0$ si n és senar.
Per tant, el teorema només ens pot dir alguna cosa quan n és parell. En aquest cas, com que $\chi(T^n \# M) = \chi(T^n) + \chi(M) - \chi(S^n) = \chi(M) - 2$, el que demanem de fet és que $\chi(M) \neq -2$. Un exemple senzill l'obtenim fent que M també sigui un tor, aleshores

$$\chi(T^{2n} \# T^{2n}) = -2 \neq 0.$$

El teorema ens diu, doncs, que no existeix cap acció diferenciable de S^1 a $T^{2n} \# T^{2n}$ que no sigui la trivial.

Abans d'atacar el nostre teorema necessitarem alguns desenvolupaments previs. Les primeres seccions del treball, els preliminars, estan dedicats això: demostrarem el teorema de Sard i el de Poincaré-Hopf, així com alguns resultats fonamentals de teoria de varietats diferenciables i d'accions de grups de Lie. Utilitzarem tot això a l'últim capítol, on demostrarem l'afirmació de l'inici.

2 Preliminars

2.1 Varietat diferenciables, orientacions i grups de Lie

2.1.1 Varietats diferenciables

Comencem per donar les definicions dels objectes elementals amb els quals treballarem, les varietats diferenciables. Utilitzarem una definició no intrínseca: suposarem les nostres varietats ja immerses en $\mathbb{R}^k$. És la mateixa definició que la utilitzada per Milnor a [6].

Definició 2.1. Siguin $U \subset \mathbb{R}^k$ i $V \subset \mathbb{R}^l$ oberts. Direm que una aplicació $f : U \longrightarrow V$ és *diferenciable* si totes les derivades parcials de f (de qualsevol grau) existeixen i són contínues.
Més en general, si $X \subset \mathbb{R}^k$ i $Y \subset \mathbb{R}^l$ són subconjunts arbitraris, una aplicació $f : X \longrightarrow Y$ és *diferenciable* si per qualsevol $x \in X$ existeix un obert $U \subset \mathbb{R}^k$ que conté x i una aplicació diferenciable $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^l$ que coincideix amb f a tot $U \cap X$.

Observació 2.2. La identitat en qualsevol subconjunt de $\mathbb{R}^k$ és diferenciable, i la composició d'aplicacions diferenciables és diferenciable.

Definició 2.3. Una aplicació $f : X \longrightarrow Y$ és un *difeomorfisme* si és un homeomorfisme entre X i Y i tant f com f^{-1} són diferenciables. Si existeix tal aplicació, direm que X i Y són *difeomorfs*.

Definició 2.4. Un subconjunt $M \subset \mathbb{R}^k$ és una *varietat diferenciable de dimensió* n si per qualsevol $x \in M$ existeix un entorn $W \cap M$ de x difeomorf a un obert U de $\mathbb{R}^n$, on W és un obert de $\mathbb{R}^k$.
Anomenarem *parametrització* qualsevol difeomorfisme $g : U \longrightarrow W \cap M$ de la forma anterior.

Definim ara l'espai tangent i el diferencial df_x d'una aplicació diferenciable entre varietats diferenciables. Comencem en el cas particular d'una aplicació entre oberts.

Definició 2.5. Per un obert $U \subset \mathbb{R}^k$ i un punt $x \in U$, definim l'*espai tangent* com $T_xU = \mathbb{R}^k$. Aleshores, si $f : U \longrightarrow V$ és una aplicació diferenciable, on V és un obert de $\mathbb{R}^k$, definim el *diferencial de f en x* com l'aplicació $df_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ donada per $df_x(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$.

Observació 2.6. df_x és una aplicació lineal.

Generalitzem ara la definició del diferencial per aplicacions entre varietats diferenciables qualssevol. Comencem amb l'espai tangent.

Definició 2.7. Sigui $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietat diferenciable de dimensió m i $x \in M$. Triem una parametrització $g : U \longrightarrow M$ tal que $g(u) = x$, $u \in U$. Si pensem g com una aplicació de U a R^k, tenim definit el diferencial $dg_u : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Definim $T_xM = dg_u(\mathbb{R}^m)$.

Observació 2.8. La definició és independent de l'elecció de la parametrització i T_xM és un espai vectorial de dimensió m.

Definim ara el diferencial en el cas general de dues varietats qualssevol. Siguin $M \subset \mathbb{R}^k$ i $N \subset \mathbb{R}^l$ dues varietats diferenciables, $f : M \longrightarrow N$ una aplicació diferenciable i $x \in M$ un punt tal que $f(x) = y$. Com que f és diferenciable, existeix un entorn obert W de x i una aplicació $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^l$ que coincideix amb f a $W \cap M$. Definim $df_x : T_xM \longrightarrow T_yN$ com $df_x(v) = dF_x(v)$.

Observació 2.9. Un cop més, la definició és independent de la parametrització que triem. Es pot comprovar que la imatge cau al tangent i que df_x és una aplicació lineal.

Observacions 2.10.

1. *Regla de la cadena*: si $f : M \longrightarrow N$ i $f : N \longrightarrow P$ són aplicacions diferenciables entre varietats diferenciables i $x \in U$ un punt tal que $f(x) = y$, aleshores $d(f \circ g)_x = dg_y \circ df_x$
2. Si $I : M \longrightarrow M$ és la identitat i $x \in M$, aleshores $I_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ també és la identitat.

Definició 2.11. Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m, i sigui $0 \leq k \leq m$. Una *subvarietat diferenciable de M de dimensió k* és un subconjunt $N \subset M$ tal que per tot $x \in N$ existeix un entorn obert $V \subset M$ difeomorf a un obert U de R^m mitjançant un difeomorfisme $g : U \longrightarrow V$ (posem $g(0) = x$) de manera que $g^{-1}(V \cap N)$ sigui la intersecció d'un subespai lineal de R^m de dimensió k amb U.

Exemple 2.12. Un exemple de varietat diferenciable és el tor, que té un paper especial en aquest treball:

$$T^n = \{(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}; x_i^2 + y_i^2 = 1 \text{ per } 1 \leq i \leq n\}.$$

Observació 2.13. Com hem dit, agafem una definició de varietat diferenciable com a subvarietat de R^k. Això ens facilitarà el tractament de certs objectes durant el treball, com per exemple els camps vectorials tangents. Però estaria bé veure que la nostra definició és equivalent a la definició abstracta de varietat diferenciable, que ens serà útil en alguns moments i que és la utilitzada en moltes de les referències que donarem.

Definició 2.14. Un *espai localment euclidià de dimensió n* és un espai topològic Hausdorff M tal que cada punt $x \in M$ té un entorn V homeomorf a un obert U de $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi : V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ és l'homeomorfisme, anomenem (V, φ) un *sistema de coordenades*. Un conjunt de sistemes de coordenades de manera que $\bigcup V_i = M$ és un *atles*.

Una *estructura diferenciable* $\mathcal{F}$ en un espai localment euclidià M és un atles $\{(V_i, \varphi_i); i \in I\}$ que satisfà:

1. $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ és diferenciable per qualssevol $i, j \in I$.
2. La col·lecció $\mathcal{F}$ és maximal respecte la segona propietat (no es poden afegir més sistemes de coordenades que la satisfacin).

Una *varietat diferenciable (abstracta) de dimensió* n és un parell $(M, \mathcal{F})$ on M és un espai localment euclidià de dimensió n satisfent el segon axioma de numerabilitat i $\mathcal{F}$ és una estructura diferenciable en M.

Previ a relacionar les dues definicions, introduïm breument el concepte de particions de la unitat.

Definició 2.15. Sigui M una varietat diferenciable. Diem que una família $\{f_\alpha\}$ de funcions contínues $f_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$ és una *partició de la unitat* si:

1. Per qualsevol α, $f_\alpha \geq 0$ i $sup(f_\alpha) = \overline{\{x \in M | f(x) > 0\}}$ (el *suport* de f_α) està contingut en un obert V_α de manera que $\{V_\alpha, \varphi_\alpha\}$ formen un atles de M.
2. El recobriment $\{V_\alpha\}$ és localment finit (és a dir, per tot $x \in M$ existeix W entorn de x tal que $W \cap V_\alpha \neq \emptyset$ en un nombre finit d'índexos α).
3. $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ per tot $x \in M$ (per les propietats anteriors ja tenim que la suma és finita).

Diem que aquesta partició de la unitat està *subordinada* al conjunt d'oberts $\{V_\alpha\}$.

Teorema 2.16. *Sigui M una varietat diferenciable abstracta i $\{V_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atles de M. Aleshores existeix una partició de la unitat en M subordinada a $\{V_\alpha\}$.*

Per una prova d'aquest teorema, consulteu [2], capítol 3.

Proposició 2.17. *Podem passar d'una varietat diferenciable definida com ho hem fet a una d'abstracta i viceversa de forma bijectiva (mòdul difeomorfisme).*

Demostració. Construïm primer una varietat diferenciable abstracta a partir d'una varietat immersa en $\mathbb{R}^k$. Sigui $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietat diferenciable de dimensió n. Definim

$$\mathcal{D} = \{(U, \psi);\ \text{on } U \subset \mathbb{R}^n \text{ és un obert i } \psi : U \longrightarrow \psi(U) \subset M \text{ és un difeomorfisme}\}.$$

Aleshores

$$\mathcal{F} = \{(\psi(U), \psi^{-1}); (U, \psi) \in \mathcal{D}\}$$

és una estructura diferenciable a M (veient M com a espai topològic).

Suposem ara que M és una varietat diferenciable abstracta. Farem només el cas en que M sigui compacte, que és el que necessitem en aquest treball (tot i que és cert en general). Aleshores existeix un conjunt finit de sistemes de coordenades $\{(V, \varphi); 1 \leq i \leq l\}$ tal que

$$M = V_1 \cup ... \cup V_l.$$

Sigui $f_1, .., f_l$ una partició de la unitat subordinada a $\{V_i\}_{1 \leq i \leq l}$. Definim una aplicació:

$$\begin{aligned} \Phi : M &\longrightarrow \mathbb{R}^{nl} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{l(n-1)} \\ x &\longmapsto (f_1(x)\varphi_1(x), ..., f_l(x)\varphi_l(x), f_1(x), ..., f_l(x)) \end{aligned}$$

(cada $f_i(x)\varphi_i(x)$ té n coordenades). Entenem que les funcions φ_i són zero fora dels oberts on estan definides (les f_i fan que $f_i\varphi_i$ s'acosti a zero quan x s'apropi a la frontera de V_i, per tant $f_i\varphi_i$ és contínua a tot M). Aleshores $\Phi(M) \subset \mathbb{R}^{l(n+1)}$ és una subvarietat diferenciable.

Mòdul difeomorfisme, les dues construccions són la una la inversa de l'altra. □

2.1.2 Valors regulars

Distingim ara entre valors i punts crítics i regulars, i enunciem i demostrem els teoremes de Sard i Brown, que ens diuen que el conjunt de valors crítics d'una aplicació diferenciable és "petit".

Definició 2.18. Sigui $f : M \longrightarrow N$ una aplicació diferenciable entre varietats diferenciables de dimensió m i n, respectivament. Sigui C el conjunt de punts $x \in M$ tals que l'aplicació $df_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ té rang menor que n (és a dir, no és exhaustiva). Anomenem C el conjunt dels *punts crítics*, $f(C)$ el conjunt dels *valors crítics*, i $N \setminus f(C)$ el conjunt dels *valors regulars*.

Teorema 2.19 (del valor regular)**.** *Si $f : M \longrightarrow N$ és una aplicació diferenciable entre varietats de dimensió $m \geq n$ i $y \in N$ és un valor regular, aleshores $f^{-1}(y) \subset M$ és una varietat diferenciable de dimensió $m - n$.*

Demostració. Sigui $x \in f^{-1}(y)$. Com que y és un valor regular, la funció $df_x : T_xM \longrightarrow T_yN$ serà exhaustiva, i per tant $\ker df_x$ serà un espai vectorial de dimensió $m - n$.
Suposem que $M \subset \mathbb{R}^k$. Agafem una aplicació lineal $L : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ que no sigui singular al subespai vectorial $\ker df_x \subset T_xM \subset \mathbb{R}^k$. Definim ara una aplicació

$$F : M \longrightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$$
$$F(z) = (f(z), L(z)).$$

Tenim que $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$, i per tant dF_x és no singular. Això ens diu, pel teorema de la funció inversa, que F és un difeomorfisme entre un entorn U de x i un entorn V de $(y, L(x))$. Observem que $f^{-1}(y)$ correspon a l'hiperplà $y \times \mathbb{R}^{m-n}$ a través de F. De fet, F és un difeomorfisme entre $f^{-1}(y) \cap U$ i $(y \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$. Tenim doncs que $f^{-1}(y)$ és una varietat diferenciable de dimensió $m - n$. □

Observació 2.20. Sota les condicions del teorema anterior, tenim també que $\ker df_x = T_xf^{-1}(y) \subset T_xM$, i per tant df_x és un isomorfisme entre $T_xf^{-1}(y)$ i T_yN.

Teorema 2.21 (de Sard)**.** *Sigui $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ una aplicació diferenciable, on U és un obert de $\mathbb{R}^n$. Aleshores el conjunt dels valors crítics $f(C) \subset \mathbb{R}^p$ té mesura de Lebesgue zero.*

Observem que es presenten casos notablement diferents si $n < p$, $n = p$ o $n > p$. De fet, els casos $n \leq q$ es poden provar de forma més fàcil que la que veurem (especialment en el cas $n < p$), però la nostra prova servirà per tots els casos.

Provarem el teorema per inducció sobre n. El cas $n = 0$ és clar: si $n = p = 0$ l'aplicació va d'un punt a un punt i no hi ha punts crítics, i si $n = 0 < p$, aleshores la imatge de f és un punt i té mesura zero a $\mathbb{R}^p$.

Suposem ara que $n > 0$ i que el teorema és cert per valors més petits que n. Començarem partint el conjunt C de punts crítics en una quantitat finita de parts, i aleshores veurem que la imatge de cadascuna d'elles té mesura zero.
Recordem que el conjunt C són els punts x de U tals que df_x té rang menor que p. Definim C_1 com els que a més a més satisfan $df_x = 0$. I en general, C_i són els punts $x \in U$ tals que totes les derivades parcials d'ordre $\leq i$ de f en x són zero. D'aquesta manera tindrem

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset ...$$

Dividim la prova en tres parts:

1. $f(C \setminus C_1)$ té mesura zero.
2. $f(C_i \setminus C_{i+1})$ té mesura zero per tot $i \geq 1$.
3. $f(C_k)$ té mesura zero a partir de cert k.

Clarament provant aquests tres fets tindrem que $f(C)$ té mesura zero i per tant haurem provat el teorema. Vegem-los:

Lema 1. *$f(C \setminus C_1)$ té mesura zero.*

Demostració. Per cada $\overline{x} \in C \setminus C_1$ trobarem un entorn $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(V \cap C)$ té mesura zero. Com que podem recobrir $C \setminus C_1$ per una quantitat numerable d'aquest oberts ($\mathbb{R}^n$ satisfà el segon axioma de numerabilitat), i la unió numerable de conjunts de mesura zero té mesura zero, ja tindrem el lema provat.
Com que $\overline{x} \notin C_1$, alguna parcial de f, per exemple $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, no serà zero a $\overline{x}$. Definim una aplicació $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com

$$h(x) = (f_1(x), x_2, ..., x_n).$$

Clarament $df_{\overline{x}}$ serà no singular i per tant, pel teorema de la funció inversa, h és un difeomorfisme entre un entorn V de $\overline{x}$ i un obert $V' \subset \mathbb{R}^n$. Podem considerar ara la composició $g = f \circ h^{-1} : V' \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Com que h^{-1} és un difeomorfisme amb la imatge V, els valors crítics de g seran els mateixos que els de $f|_V$. És a dir, si C' són els punts crítics de g, $g(C')$ són els seus valors crítics i tindrem que $f(V \cap C) = g(C')$. Així que si veiem que $g(C')$ té mesura zero, ja tindrem el que volíem.
Observem que, per com hem definit h, $g = f \circ h^{-1}$ deixa la primera coordenada invariant. Per tant per cada $t \in \mathbb{R}$ tenim una aplicació

$$g^t : (t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \longrightarrow t \times \mathbb{R}^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$$

que és l'aplicació g restringida a $x_1 = t$. Observem que la matriu dg té la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

i per tant un punt $(t,z) \in (t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ és un punt crític de g si i només si z ho és de g^t. Però per hipòtesi d'inducció el conjunt d'aquests z té mesura zero. És a dir, el conjunt $g(C^t) \subset t \times \mathbb{R}^{p-1}$ de valors crítics té mesura zero mirat en $\mathbb{R}^{p-1}$, per tot t.
Tant C' com C^t (per tot t) són tancats, per tant $g(C')$ i $g(C^t)$ són Borel, i les funcions indicador $\chi_{g(C')}$ i $\chi_{g(C^t)}$ són mesurables. Aleshores, utilitzant el teorema de Tonelli, i si m és la funció mesura de Lebesgue:

$$m(g(C')) = \int_{\mathbb{R}^p} \chi_{g(C')} = \int_t \int_{\mathbb{R}^{p-1}} \chi_{g(C^t)} = \int_t 0 = 0$$

com volíem. Hem demostrat el primer lema. $\square$

Lema 2. *$f(C_k \setminus C_{k+1})$ té mesura zero per tot $k \geq 1$.*

Demostració. L'argument utilitzat és similar. Per cada $\overline{x} \in C_k \setminus C_{k+1}$ existeix una derivada parcial d'ordre $k+1$ que no s'anul·la al punt $\overline{x}$. Suposem (sense pèrdua de generalitat) que aquesta derivada parcial fa intervenir ∂x_1. Aleshores tindrem una derivada parcial k-èssima, diem-li ρ, que satisfà $\rho(\overline{x}) = 0$ (ja que $\overline{x} \in C_k$), però $\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(\overline{x}) \neq 0$.
Definim l'aplicació:

$$h(x) = (\rho(x), x_2, ..., x_n)$$

que, igual que a la demostració del lema 1, és un difeomorfisme entre un entorn V de $\overline{x}$ i un obert $V' \subset \mathbb{R}^n$. A més a més, h envia $C_k \cap V$ a l'hiperplà $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Definim $g = f \circ h^{-1} : V' \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Com en la demostració anterior, els valors crítics de $f|_V$ i $g|_{V'}$ coincideixen, per tant és suficient veure que els segons tenen mesura zero.
Considerem la restricció de g:

$$\overline{g} : (0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Per hipòtesi d'inducció, el conjunt de valors crítics de $\overline{g}$ té mesura zero. Però evidentment tot valor regular de $\overline{g}$ també ho serà de g. Per tant $\overline{g}h(C_k \cap V) = f(C_k \cap V)$ té mesura zero.
Com que podem recobrir $C_k \setminus C_{k-1}$ per una quantitat numerable d'oberts com el V, tenim que $f(C_k \setminus C_{k-1})$ té mesura zero, com volíem. $\square$

Lema 3. *$f(C_k)$ té mesura zero a partir de cert k.*

Demostració. Sigui $I^n \subset U$ un cub de dimensió n amb costat de llargada δ (triem δ arbitràriament). Si k és suficientment gran, provarem que $f(C_k \cap I^n)$ té mesura zero, i com que podem recobrir C_k per una quantitat numerable de cubs, haurem provat que $f(C_k)$ té mesura zero.
Sigui $x \in C_k$. Com que I^n és compacte, utilitzant el teorema de Taylor i sabent que les derivades parcials d'ordre $\leq k$ són zero, tenim:

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h)$$

on

$$\|R(x,h)\| \leq c\|h\|^{k+1}$$

per $x, x+h \in I^n$, i on c és una constat que depèn únicament de f i de I^n. Ara subdividim el cub I^n en r^n cubets de costat δ/r. Sigui I_1 un d'aquests cubets que conté algun punt $x \in C_k$. Aleshores qualsevol altre punt de I_1 es pot escriure com $x+h$, amb

$$\|h\| \leq \sqrt{n}(\delta/r).$$

Ara si $x+h \in I_1$, aleshores

$$\|f(x+h) - f(x)\| = \|R(x,h)\| \leq c(\sqrt{n}(\delta/r))^{k+1} = b/r^{k+1}$$

on b és una constant. Això ens diu que $f(I_1)$ està contingut en un cub centrat a $f(x)$ i de costat $2b/r^{k+1}$. Per tant $f(C_k \cap I^n)$ està contingut en la unió de r^n cubs amb volum total

$$V \leq r^n(b/r^{k+1})^p = b^p r^{n-(k+1)p}.$$

Si $k+1 > n/p$, aleshores V tendeix a zero quan $r \to \infty$, i per tant $f(C_k \cap I^n)$ té mesura zero. $\square$

Una de les conseqüències del teorema de Sard és que, com que un conjunt de mesura zero no pot contenir cap obert, $\mathbb{R}^p \setminus f(C)$ és dens a $\mathbb{R}^p$.
En el cas més general d'una aplicació diferenciable $f : M \longrightarrow N$ entre varietats de dimensió m i n, com que podem recobrir M amb una quantitat numerable de conjunts difeomorfs a oberts de $\mathbb{R}^m$ i aplicar Sard, tenim el següent corol·lari que utilitzarem més endavant:

Corol·lari 2.22. *(Brown) Si $f : M \longrightarrow N$ és una aplicació diferenciable, el conjunt de valors regulars de f és dens a N.*

2.1.3 Varietats diferenciables amb vora

Podem ampliar una mica la definició de varietat diferenciable afegint les varietats diferenciables amb vora. Sigui $H^m = \{(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^n | x_m \geq 0\}$.

Definició 2.23. Un subconjunt $X \subset \mathbb{R}^k$ és un a *varietat diferenciable amb vora de dimensió* m si cada $x \in X$ té un entorn $U \cap C$ difeomorf a un obert de H^m. La *vora* ∂X de X són els punts que corresponen a punts de ∂H^m sota el difeomorfisme.

Durant la resta del treball, quan parlem de *varietat diferenciable* ens referirem a una varietat diferenciable sense vora; quan en tingui, ho especificarem.

Observació 2.24. ∂X és una varietat diferenciable de dimensió $m-1$, i $X \setminus \partial X$ és una varietat diferenciable de dimensió m.

Els espais tangents es defineixen igual que anteriorment, de manera que la dimensió de $T_x M$ és sempre m, encara que x sigui de la vora.

Proposició 2.25. *Sigui M una varietat diferenciable sense vora i $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació diferenciable amb el 0 com a valor regular. Aleshores $\{x \in M | g(x) \geq 0\}$ és una varietat diferenciable amb vora, i la vora coincideix amb $g^{-1}(0)$.*

Demostració. La demostració és molt similar a la del teorema 2.19, només cal afegir la distinció entre els punts de $\{x \in M | g(x) \geq 0\}$ que es corresponen a punts a l'interior de H^m i els que ho fan amb els de la vora ∂H^m. $\square$

Podem versionar el teorema 2.19 per un cas una mica més general, el de les varietats amb vora:

Proposició 2.26. *Sigui $f : X \longrightarrow N$ una aplicació diferenciable entre una varietat amb vora de dimensió m i una varietat de dimensió n, $m > n$. Suposem que $y \in N$ és un valor regular tant per f com per la restricció $f|_{\partial X}$. Aleshores $f^{-1}(y) \subset X$ és una varietat diferenciable amb vora de dimensió $m - n$. A més a més, la vora $\partial(f^{-1}(y))$ és exactament $f^{-1}(y) \cap \partial X$.*

Demostració. El que volem veure és una propietat local, i per tant podem considerar el cas concret on $f : H^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, i $y \in \mathbb{R}^n$ és un valor regular. Suposem que $\overline{x} \in f^{-1}(y)$. Si $\overline{x}$ és un punt interior (no forma part de la vora), aleshores com hem vist anteriorment $f^{-1}(y)$ és una varietat diferenciable en un entorn de $\overline{x}$.

L'altra possibilitat és que $\overline{x}$ sigui un punt de la vora. Triem aleshores un aplicació diferenciable $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on U és un entorn de $\overline{x}$ a $\mathbb{R}^m$ de manera que coincideixi amb f a $U \cap H^m$. A més a més demanem que U (si cal substituint-lo per un entorn més petit) no contingui cap punt crític de g (pel corol·lari 2.22, ho podem fer). Aleshores $g^{-1}(y)$ és una varietat diferenciable de dimensió $m - n$.

Considerem ara la projecció $\pi : g^{-1}(y) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida com

$$\pi(x_1, ..., x_m) = x_m.$$

Volem veure que 0 és un valor regular de π. Hem vist que $T_x g^{-1}(y) = \ker dg_x$, i $\ker dg_x = \ker df_x$. Suposem que 0 no fos un valor regular de π. Això vol dir que existeix $a \in g^{-1}(y) \cap \partial H^m$ amb $d\pi_a : T_a g^{-1}(y) \longrightarrow \mathbb{R}$ no exhaustiu. Aleshores $\ker d\pi_a = T_a g^{-1}(y) = \ker dg_a$. Sabem però (per com és l'aplicació π) que $\ker d_a\pi \subset \mathbb{R}^{m-1} \times 0 = \partial H^m$. Per tant si 0 no és un valor regular de π, tenim que $\ker d_a g \subset \partial H^m$.

Teníem per hipòtesi que $y \in \mathbb{R}^n$ és un valor regular de $f|_{\partial H^m}$ i per tant de $g|_{\partial H^m} = \overline{g}$, i això implica que per qualsevol $a \in g^{-1}(y) \cap \partial H^m$, $\dim(d\overline{g}_a) = m - n - 1$ (ja que $d\overline{g}_a$ és exhaustiva). I com que $\ker g_a \subset \partial H^m$, tenim $\ker g_a = \ker \overline{g}_a$, que és una contradicció, ja que el mínim al que pot arribar $\dim(\ker g_a)$ és $m - n$ (i per tant no pot assolir $m - n - 1$).

Hem vist doncs que 0 és un valor regular de π. Per tant, per la proposició anterior, $\{x \in H^m | \pi(x) \geq 0\} = U \cap f^{-1}(y)$ és una varietat diferenciable, amb vora $\pi^{-1}(0)$. $\square$

2.1.4 Orientacions i grau d'una aplicació diferenciable

Intentem agafar una mica d'intuició del que serà el grau d'una aplicació a través del següent exemple.

Considerem les aplicacions diferenciables $f : S^1 \longrightarrow S^1$. Sabem que podem associar a cada classe d'homotopia d'aquestes funcions un enter $\pi_1(f)$ que compta les "voltes" que fa la imatge de S^1 al S^1 d'arribada (a més a més, podem formar un grup amb la operació concatenació, però això ara no ens interessa).

Mirem d'interpretar aquest enter associat d'una forma un xic diferent. Donada una aplicació f d'aquest tipus, si pensem la imatge com una goma elàstica i deixem que es recol·loqui (estem fent una equivalència homotòpica), acabarem amb una funció $\overline{f}$ que farà exactament les voltes que feia f però a velocitat constant, totes en el mateix sentit. Aleshores, si agafem un valor qualsevol $y \in S^1$, tindrem $|\pi_1(f)| = \#\overline{f}^{-1}(y)$. Inclús podríem fer coincidir el signe si sabem mirar "en quina direcció" va un punt $x \in \overline{f}^{-1}(y)$, i fem que sumi +1 o -1 depenent de la direcció.

Encara més, si agafem la funció original f, i estem comptant $\#f^{-1}(y)$ amb direccions, de fet ja tindrem directament $\pi_1(f) = \#f^{-1}(y)$, ja que si $f(S^1)$ es mou "supèrfluament" per la S^1 d'arribada passant diversos cops per un mateix punt y en els dos sentits, la nostra suma no ho tindrà en compte perquè els +1 i -1 s'anul·laran entre ells.

Volem generalitzar aquesta suma, el *grau* de f, per aplicacions entre varietats diferenciables de la mateixa dimensió. Però, tal i com acabem de veure, necessitem primer poder orientar les nostres varietats.

Definició 2.27. Una *orientació* d'un espai vectorial de dimensió finita és una classe d'equivalència de bases ordenades de manera que dues bases ordenades $\{e_1, ..., e_n\}$ i $\{e'_1, ..., e'_n\}$ determinen la mateixa orientació si, escrivint

$$e'_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_j$$

tenim que $det(a_{ij}) > 0$, i determinen l'orientació oposada si $det(a_{ij}) < 0$.

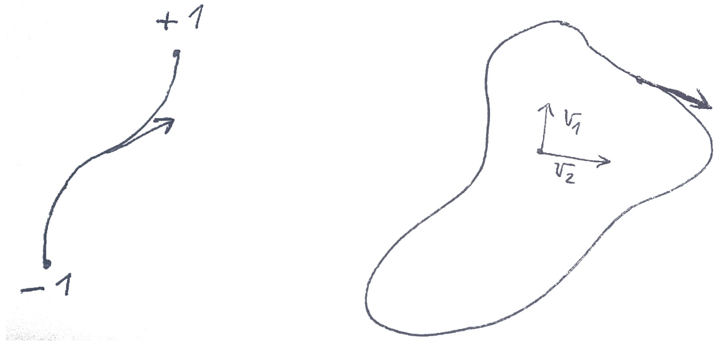
D'aquesta manera cada espai vectorial té exactament dues orientacions. En el cas d'un espai vectorial de dimensió zero, definim l'orientació com el símbol 1 o -1. A $\mathbb{R}^n$ anomenem *orientació estàndard* la donada per la base $\{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)\}$.

Definició 2.28. Una *varietat diferenciable orientada* consisteix en una varietat diferenciable M (suposem $\dim M = n$) juntament amb una tria d'orientació per cada espai tangent T_xM de manera que les orientacions triades per cada espai tangent concordin de la forma següent: per cada punt $x \in M$ ha d'existir un entorn obert $U \subset M$ i un difeomorfisme $g : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ que *preservi la orientació*, és a dir, que per cada $x \in U$ l'isomorfisme dg_x porti l'orientació de T_xM a l'orientació estàndard de $\mathbb{R}^n$ (porti qualsevol base orientada a una base orientada).

Si M és una varietat diferenciable amb vora, hi ha diversos tipus de vectors tangents a l'espai T_xM, on $x \in \partial M$.

1. Tenim els vectors tangents a ∂X com a varietat, és a dir, $T_x(\partial M) \subset T_xM$, que hem vist que formen un espai vectorial de dimensió $m-1$.
2. Els vectors fora de $T_x(\partial M)$ que apunten cap a "fora" (respecte la varietat M).
3. Els vectors fora de $T_x(\partial M)$ que apunten cap a "dins".

Observació 2.29. Una orientació d'una varietat diferenciable amb vora M determina una orientació de la varietat ∂M de la següent manera.
Per un $x \in M$, triem una base $(v_1, ..., v_n)$ orientada positivament segons l'orientació de T_xM de manera que els $(v_2, ..., v_n)$ siguin tangents a ∂M (siguin del primer tipus) i v_1 sigui del tipus 2 (apunti "enfora"). Aleshores $(v_2, ..., v_n)$ determina l'orientació correcta de ∂M.
Si M té dimensió 1, a cada punt de la frontera li assignem l'orientació -1 o +1 depenent de si un vector positivament orientat apunta endins o enfora.



Tenim ara les eines necessàries per definir el grau d'una aplicació diferenciable entre varietats diferenciables orientades.

Definició 2.30. Siguin M i N dues varietats diferenciables de grau n i $f : M \longrightarrow N$ una aplicació diferenciable. Suposem que M és compacta i que N és connexa.
Per un punt $x \in M$ regular de f, definim $\operatorname{sign} df_x$ igual a +1 o -1 segons si df_x preserva o inverteix l'orientació. Aleshores agafem un valor regular $y \in N$ qualsevol i definim:

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} df_x.$$

Perquè el grau estigui ben definit cal veure és independent del valor regular y que agafem. A més a més, alhora, provarem el següent teorema:

Teorema 2.31. *Si f i g són aplicacions diferenciables diferencialment homòtopes, aleshores* $\deg(f) = \deg(g)$.

Com que encara no sabem si el grau està ben definit (no depèn del valor regular triat), escrivim $\deg(f;y)$.
Separem la demostració en dos lemes. Suposem primer que M és la vora d'una varietat diferenciable orientada i compacta X, i que M està orientada com a vora de X.

Lema 2.32. *Si $f : M \longrightarrow N$ es pot estendre a una aplicació diferenciable $F : X \longrightarrow M$, aleshores $\deg(f;y) = 0$ per tot valor regular y.*

Demostració. Suposem que $y \in M$ és un valor regular de F (i per tant de $f = F|_M$). Per 2.26, $F^{-1}(y)$ és un varietat de dimensió 1, compacta (tancada dins de X compacta), i per tant és unió finita d'arcs i cercles (vegeu [6], apèndix), amb només els punt de la frontera dels arcs sobre $M = \partial X$. Sigui $A \subset F^{-1}(y)$ un dels arcs, i $\partial A = a \cup b$, $a, b \in \partial X$. Volem veure que

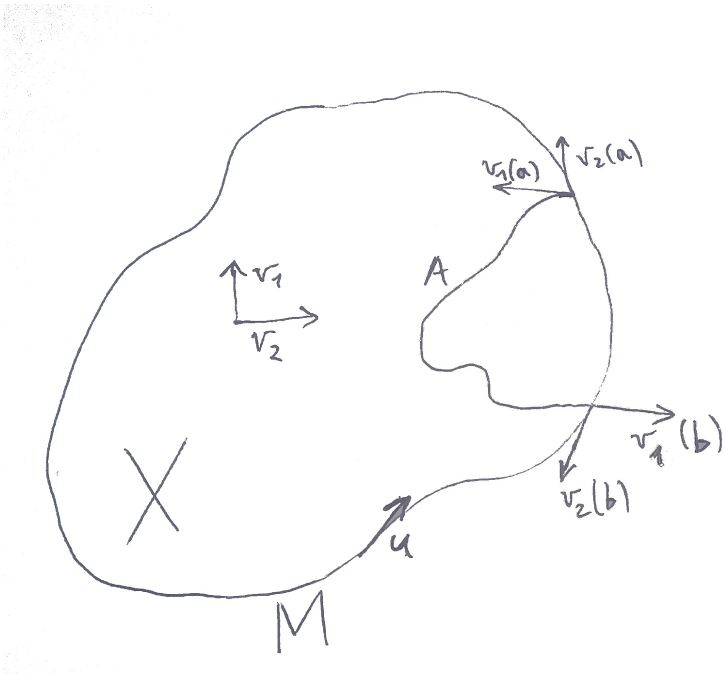
$$\operatorname{sign} df_a + \operatorname{sign} df_b = 0$$

de manera que $\deg(f;y) = 0$ (els dos punts frontera de cada arc s'anul·len entre ells a la suma).

Tenim X i N orientats, i això ens determina una orientació de A de la manera següent: per un $x \in A$, sigui $(v_1, ..., v_{n+1})$ una base positivament orientada de T_xX amb v_1 tangent a A. Aleshores v_1 determina l'orientació adequada de T_xA si i només si dF_x envia $(v_2, ..., v_{n+1})$ a una base positivament orientada de T_yN. Sigui $v_1(x)$ el vector unitari que orienta positivament T_xA per qualsevol $x \in A$. Clarament $v_1(x)$ és una funció diferenciable i apunta "enfora" a una punta de la corba (per exemple, al punt a) i "endins" a l'altre (al b). Aleshores

$$\operatorname{sign} df_a = +1 \quad \operatorname{sign} df_b = -1$$

i per tant la suma és zero.



Observem al dibuix que efectivament a un extrem de A, $v_2(a)$ té la mateixa direcció que u (orientació de M com a subvarietat de X) mentre que a l'altre extrem $v_2(b)$ té la contrària.

Hem vist doncs que $\deg(f;y) = 0$.

Ara agafem un valor regular y_0 de f que no sigui valor regular de F. La funció $\deg(f;y)$ és localment constant si es mou entre valors regulars, i pel corol·lari 2.22 tenim un entorn U de y de valors regulars de f. Podem agafar un y en aquest entorn que sigui valor regular de F (també pel corol·lari del teorema de Sard), de manera que tindrem

$$\deg(f;y_0) = \deg(f;y) = 0$$

i amb això tenim demostrat el primer lema. $\square$

Lema 2.33. *Suposem que f i g són aplicacions diferenciablement homòtopes. Aleshores* $\deg(f;y) = \deg(g;y)$ *per qualsevol valor regular comú y.*

Demostració. Tenim doncs una homotopia $F : [0,1] \times M \longrightarrow N$ diferenciable amb $F(0,x) = f(x)$ i $F(1,x) = g(x)$.
La varietat $[0,1] \times M$ es pot orientar, de manera que la frontera estarà formada per $1 \times M$ (que tindrà, per exemple, la orientació correcta) i $0 \times M$ (que llavors tindrà la oposada). Aleshores el grau de $F|_{\partial([0,1]\times M)}$ a un punt regular y serà

$$\deg(g;y) - \deg(f;y)$$

que, pel primer lema, és zero. Per tant tenim la igualtat que buscàvem en aquest segon lema. $\square$

Falta veure que el grau és independent del valor regular que triem, i amb això i aquest últim lema ja sabrem que el grau està ben definit i tindrem el teorema que hem anunciat.

Suposem que y i z són valors regulars de $f : M \longrightarrow N$. Utilitzarem el següent lema:

Lema 2.34. *(Lema d'homogeneització) Si y i z són punts interiors d'una varietat diferenciable connexa N, aleshores existeix un difeomorfisme $h : N \longrightarrow N$ diferenciablement isòtop a la identitat tal que $h(y) = z$ (diem que dos difeomorfismes són isòtops si són homòtops i qualsevol aplicació intermitja de l'homotopia també és un difeomorfisme).*

Per una prova, consultar el capítol 4 de [6].
Triem doncs un difeomorfisme $h : N \longrightarrow N$ isòtop a la identitat i amb $h(y) = z$. Aleshores h preserva la orientació, ja que la matriu del diferencial d'un punt varia de forma contínua i no pot ser singular en cap punt intermig de l'homotopia, per tant es manté el signe del determinant. També

$$\deg(f;y) = \deg(h \circ f; h(y))$$

Però f és diferenciablement homòtopa a $h \circ f$, i per tant

$$\deg(h \circ f; z) = \deg(f;z)$$

pel segon lema. Per tant $\deg(f;y) = \deg(f;z)$, com volíem veure.

2.1.5 Grups de Lie i accions de grups

Introduïm ara les accions de grup en varietats diferenciables, i uns grups particulars, els grups de Lie, que són grups i varietats diferenciables alhora. A les accions de grups de Lie els hi demanarem que l'estructura diferenciable del grup s'adeqüi a la de la varietat diferenciable sobre la que actua.

Definició 2.35. Un *grup de Lie* és una varietat diferenciable G que té estructura de grup compatible amb l'estructura diferenciable, és a dir, que les aplicacions

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

són diferenciables.

Exemples 2.36. $GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), O(n), SO(n)$ vistes com a subvarietats de $\mathbb{R}^{n^2}$ són grups de Lie.
També, si ens mirem el cercle dins dels complexos, $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, obtenim un grup de Lie amb el producte complex, i el podem identificar amb $SO(2)$.

Definició 2.37. Una acció d'un grup H sobre una varietat diferenciable M és una aplicació

$$\begin{aligned} \varphi : H \times M &\longrightarrow M \\ \varphi(h,x) &\longmapsto hx \end{aligned}$$

que satisfà les condicions:

1. $ex = x$ per tot $x \in M$, on e és la identitat en H.
2. $(gh)x = g(hx)$ per tot $g, h \in H$, $x \in M$.

Definició 2.38. Una acció diferenciable d'un grup de Lie G sobre una varietat diferenciable M és una acció del grup G sobre M que a més a més és diferenciable. Direm que M és una G-varietat.
Si no diem el contrari, quan parlem d'una acció d'un grup de Lie en una varietat diferenciable suposarem que és una acció diferenciable.

Exemples 2.39.
1. S^1 actua sobre T^n mitjançant la rotació que vulguem en cada S^1 factor de T^n.
2. S^1 actua sobre S^2 per rotació.

2.2 Accions de S^1

Ja hem introduït la majoria dels objectes amb els que treballarem. L'objectiu d'aquesta secció és provar un dels fets que utilitzarem més endavant, a la demostració del teorema central del treball.

Ens situem en el cas d'una acció de S^1 (com a grup de Lie) en una varietat diferenciable qualsevol M. Sabem que el difeomorfisme corresponent al punt $1 \in S^1$ és la identitat a M. Si variem el punt de S^1, ja no: de fet, podem calcular la derivada al punt 1, i això ens donarà un vector tangent a cada $x \in M$, és a dir, un camp vectorial tangent a M. Veurem que qualsevol acció de S^1 està unívocament determinada per aquest camp vectorial.

Sigui $\varphi : S^1 \times M \longrightarrow M$ una acció (diferenciable) de S^1 sobre una varietat diferenciable M. Observem que $\forall x \in M$ tenim una aplicació diferenciable:

$$\begin{aligned} \varphi_x : S^1 &\longrightarrow M \\ \varphi_x(s) &\longmapsto \varphi(s, x). \end{aligned}$$

Com que $\varphi_x(1) = x$, podem escriure el diferencial en el punt 1:

$$d(\varphi_x)_1 : T_1S^1 \longrightarrow T_xM.$$

Si pensem S^1 dins de $\mathbb{C}$ com a l'exemple 2.36, tenim que $T_1S^1 = i\mathbb{R}$. Podem definir doncs un camp vectorial tangent ν sobre M de la manera següent:

$$\nu(x) = d(\varphi_x)_1(i).$$

Observem que ν és diferenciable. Volem veure que aquest camp vectorial ens determina de forma unívoca l'acció φ que teníem inicialment. Utilitzarem el teorema d'existència i unicitat de solucions d'equacions diferencials ordinàries, que tot seguit recordem:

Teorema. *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert, i $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una una funció Lipschitz, és a dir, tal que $\exists L > 0$ que satisfà $\|X(x) - X(y)\| \leq L\|x - y\|$ $\forall x, y \in U$. Aleshores $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ tal que existeix una única funció*

$$\phi_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$$

que satisfà

1. $\phi_x(0) = x$.
2. $d(\phi_x)_t(1) = X(\phi_x(t))$ *per tot* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Per una prova, consulteu per exemple [11].

Volem adaptar aquest teorema a varietats diferenciables. Sigui $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietat diferenciable de dimensió n, $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tal que $X(x) \in T_xM$ per tot $x \in M$ un camp vectorial tangent diferenciable (i per tant Lipschitz) i $x_0 \in M$ un punt qualsevol. Agafem $g : V \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^k$ una parametrització d'un entorn $g(V)$ de x_0, amb $V \subset \mathbb{R}^n$ obert, i posem $y_0 = g^{-1}(x_0)$. Aleshores podem definir un camp vectorial $Y : V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ de la manera següent: $Y(y) = dg^{-1}{}_{g(y)}(X(g(y)))$ per tot $y \in V$. Aplicant el teorema anterior a aquest nou camp vectorial, obtenim un interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$ i una funció $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow V$ que satisfà:

1. $\psi(0) = y_0$.
2. $d\psi_t(1) = Y(\psi(t))$ per tot $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Podem definir ara $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ com $\phi(t) = g(\psi(t))$, que satisfarà:

1. $\phi(0) = g(\psi(0)) = g(y_0) = x_0$
2. $$\begin{aligned} d\phi_t(1) &= d(g \circ \psi)_t(1) \\ &= dg_{\psi(t)}(d\psi_t(1)) \\ &= dg_{\psi(t)}(Y(\psi(t))) \\ &= dg_{\psi(t)}(dg^{-1}{}_{g(\psi(t))}(X(g(\psi(t))))) \\ &= dg_{\psi(t)}(dg^{-1}{}_{\phi(t)}(X(\phi(t))) \\ &= d(g \circ g^{-1})_{\phi(t)}(X(\phi(t)) \\ &= X(\phi(t)) \end{aligned}$$

i a més a més serà única (ja que ψ ho és).
D'aquesta manera obtenim l'existència i unicitat local de solucions de l'equació diferencial donada per un camp vectorial en una varietat diferenciable.

Anem al nostre cas.
Recordem que tenim el camp vectorial $\nu(x) = d(\varphi_x)_1(i)$ i volem demostrar que podem recuperar l'acció φ inicial. Agafant $x \in M$ podem definir la funció $\overline{\varphi_x}$, de la manera següent:

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi_x}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow M \\ &\overline{\varphi_x}(t) = \varphi_x(e^{2it}) = \varphi_x(E(t)) \end{aligned}$$

Que satisfà:

1. $\overline{\varphi_x}(0) = \varphi_x(e^0) = \varphi_x(1) = x$
2. $d(\overline{\varphi_x})_t(1) = d(\varphi_x \circ E)_t(1) = d(\varphi_x)_{E(t)}(dE_t(1)) = d(\varphi_x)_{E(t)}(ie^{it}) = d(\varphi_{\overline{\varphi_x}(t)})_1(i)$ $= \nu(\overline{\varphi_x}(t))$ per tot $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

És a dir, si tenim el camp vectorial tangent ν i imposem les condicions 1 i 2, tenim una solució global per qualsevol $x \in M$. A més a més aquesta funció és clarament 2π periòdica, per tant a partir de cada funció $\overline{\varphi_x}$ podem recuperar φ_x fent $\varphi_x(s) = \overline{\varphi_x}(Arg(s))$ per qualsevol $s \in S^1$. És a dir, podem recuperar l'acció φ. Per tant, si ν ens determina unívocament $\overline{\varphi_x}$, llavors ja tenim que v ens determina unívocament φ, com volem. Hem de veure doncs l'unicitat de les $\overline{\varphi_x}$ com a solucions globals.

Sigui $x \in M$. Suposem que existeix una altra funció h_x que satisfà les dues condicions anteriors, i amb $h_x(t) \neq \overline{\varphi_x}(t)$ per algun $t \in \mathbb{R}$. Suposem que n'hi ha algun de positiu, $t \geq 0$ (si també n'hi ha de negatius, es repeteix el raonament anàlogament). Definim $t_0 = \inf\{t \geq 0; \overline{\varphi_x}(t) \neq h(t)\}$. Tindrem $\overline{\varphi_x}(t_0) = h_x(t_0)$ per continuïtat. Ara utilitzant la unicitat de solucions locals en varietats diferenciables, tenim que caldria que $\overline{\varphi_x}(t_0 + t') = h_x(t_0 + t')$ per tot $t' \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ per algun $\varepsilon > 0$, però això contradiu la definició de t_0. Per tant les $\overline{\varphi_x}$ són úniques. Hem demostrat doncs el resultat que teníem com a objectiu en aquesta secció:

Teorema 2.40. *Una acció de S^1 en una varietat diferenciable M està determinada unívocament per un camp vectorial tangent a M.*

2.3 Conjunt de punts fixos d'una acció d'un grup de Lie

Aquesta secció també té com a objectiu demostrar un fet fàcil d'enunciar. Si tenim una acció d'un grup de Lie G sobre M, podem considerar el conjunt de punts de M invariants per G, és a dir, invariants per qualsevol difeomorfisme $g \in G$.

El que demostrarem és que, afegint la hipòtesi de que G sigui compacte, *el conjunt de punts fixos serà unió de subvarietats de M (disjuntes).*

Per fer-ho, ens cal una breu incursió en alguns temes de la geometria diferencial, concretament de mètriques Riemannianes. Un cop demostrat que en podem posar una d'invariant respecte G a la nostra varietat M, introduirem l'aplicació exponencial, de la qual obtindrem el difeomorfisme que necessitem (una carta local) per demostrar que el conjunt de punts fixos és efectivament unió de varietats diferenciables.

2.3.1 Mètriques G-invariants

Definició 2.41. Una *mètrica Riemanniana* en una varietat diferenciable M consisteix en una aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ per cada punt $x \in M$ que és un producte escalar (és a dir, una aplicació simètrica, bilineal i definida positiva), i que varia diferenciablement amb el punt x de la manera següent: si $f : U \longrightarrow M$, $U \subset \mathbb{R}^n$, és una parametrització d'un entorn de x, aleshores l'aplicació $\langle df_y(e_i), df_y(e_j) \rangle_{f(y)}$, amb $y \in U$, és diferenciable per qualssevol $1 \leq i, j \leq n$, on els e_i són els vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^n$.

Notació. *Sigui M una G-varietat, i sigui φ l'acció corresponent. Fixant $g \in G$, tenim l'aplicació $\varphi_g : M \longrightarrow M$. Ara si $u \in T_xM$, escriurem $gu = d\varphi_g(u) \in T_{gx}M$.*

Definició 2.42. Sigui M una G-varietat. Diem que una mètrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és *G-invariant* si $\langle gu, gv \rangle_{gx} = \langle u, v \rangle_x$, per qualssevol $x \in M, u, v \in T_xM, g \in G$.

Volem veure que, a qualsevol G-varietat M, hi podem construir una mètrica Riemanniana G-invariant. Observem en primer lloc que si $M \subset \mathbb{R}^k$ és una varietat diferenciable, la restricció de la mètrica Riemanniana de estàndard a $\mathbb{R}^k$ a M ens dóna una mètrica Riemanniana a M.

Ara volem construir una mètrica G-invariant a partir d'una mètrica qualsevol (ja hem vist que sempre n'existeix alguna). La idea és agafar la "mitjana" en cada òrbita, de manera que la nova mètrica no varïi al moure's dins de l'òrbita (és a dir, a l'aplicar G). Com que G serà, en la majoria dels casos, de cardinal infinit, necessitarem una mesura per poder integrar. El teorema de Haar ens assegura l'existència d'una mesura amb les propietats adequades en qualsevol grup de Lie G (bàsicament, invariància respecte les operacions del grup).

Sigui G un grup de Lie. Definim les aplicacions $R_g, L_g : G \longrightarrow G$ producte per la dreta i per l'esquerra (per un element $g \in G$) de la manera següent:

$$R_g(h) = hg \qquad\qquad L_g(h) = gh$$

per qualsevol $h \in G$. I definim també l'aplicació inversió:

$$Inv(h) = h^{-1}$$

per qualsevol $h \in G$.

Definició 2.43. Sigui G un grup topològic, i denotem per $\mathcal{C}(G)$ el conjunt de funcions contínues $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$. Una funció lineal $I : \mathcal{C}(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ és una **mesura de Haar** si satisfà:

1. $I(1) = 1$.
2. I és invariant per l'esquerra, i.e. $I(f \circ L_g) = I(f)$ per qualsevol $f \in \mathcal{C}(G)$ i $g \in G$.
3. I és invariant per la dreta, i.e. $I(f \circ R_g) = I(f)$ per qualsevol $f \in \mathcal{C}(G)$ i $g \in G$.
4. $I(f \circ Inv) = I(f)$ per qualsevol $f \in \mathcal{C}(G)$.
5. Si $f(g) \geq 0$ per tot $g \in G$ i $f \neq 0$, aleshores $I(f) > 0$.

Observem que, en nostre cas, on el grup de Lie serà S^1, la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}$ indueix (normalitzant perquè la integral de tot l'espai dóni 1) la mesura de Haar. Però per seguir treballant amb un grup de Lie compacte G qualsevol, enunciem el següent teorema:

Teorema 2.44. *Per tot grup de Lie compacte G existeix una única mesura de Haar.*

Es pot trobar una demostració d'aquest teorema a [8], capítol 2.

Notació. *Escriurem*

$$I(f) = \int_G f dg.$$

Ara ja tenim les eines necessàries per trobar una mètrica G-invariant. Enunciem el teorema:

Teorema 2.45. *Sigui M una G-varietat. Aleshores existeix una mètrica Riemanniana G-invariant en M.*

Demostració. Sigui $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ una mètrica Riemanniana qualsevol a M. En definim una de nova $\phi_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ de la següent manera:

$$\phi(u,v)_x = \int_G \langle gu, gv\rangle_x dg.$$

Efectivament és una aplicació simètrica (ja que $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ ho és), definida positiva (per la propietat 5 de la mesura de Haar) i bilineal (ja que $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ és bilineal i la mesura de Haar és lineal). Cal veure que $\phi(u,v)_x$ varia diferenciablement amb x.
Sigui $x \in M$ i $h : U \longrightarrow M$ una parametrització d'un entorn de x, i siguin $1 \leq i,j \leq n$. Volem veure que

$$\phi(dh_y(e_i), dh_y(e_j))_{h(y)} = \int_G \langle gdh_y(e_i), gdh_y(e_j)\rangle_{h(y)} dg$$

és una funció diferenciable respecte $y \in U$. Definim $F(g,y) = \langle gdh_y(e_i), gdh_y(e_j)\rangle_{h(y)}$, que sabem que és una funció diferenciable respecte y. Comprovarem que existeix la parcial respecte y_1.
Com que F és diferenciable, tenim que per tot $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{F(g, y+se_i) - F(g,y)}{s} - \frac{\partial F(g,y)}{\partial y_1} \right| < \varepsilon$$

per tot $0 < |s| < \delta$ i per tot $g \in G$, i per tant

$$\left| \int_G \frac{F(g, y+se_i) - F(g,y)}{s} dg - \int_G \frac{\partial F(g,y)}{\partial y_1} dg \right| < \varepsilon$$

aleshores,

$$\left| \frac{\phi(dh_{y+se_1}(e_i), dh_{y+se_1}(e_j))_{h(y+se_1)} - \phi(dh_y(e_i), dh_y(e_j))_{h(y)}}{s} - \int_G \frac{\partial F(g,y)}{\partial y_1} dg \right| < \varepsilon.$$

com que això es compleix per qualsevol $\varepsilon > 0$, tenim que el límit

$$\lim_{s\to 0} \frac{\phi(dh_{y+se_1}(e_i), dh_{y+se_1}(e_j))_{h(y+se_1)} - \phi(dh_y(e_i), dh_y(e_j))_{h(y)}}{s}$$

existeix i a més a més coincideix amb

$$\int_G \frac{\partial F(g,y)}{\partial y_1} dg.$$

Podem usar aquest raonament inductivament per qualsevol parcial, per tant $\phi(dh_y(e_i), dh_y(e_j))_{h(y)}$ és una funció diferenciable i $\phi(u,v)_x$ és una mètrica Riemanniana.
Finalment, comprovem que també és G-invariant. Sigui $h \in G$:

$$\phi(hu, hv)_{hx} = \int_G \langle ghu, ghv\rangle_{ghx} dg = \int_G \langle gu, gv\rangle_{gx} dg = \phi(u,v)_x$$

tal com volíem. □

2.3.2 L'aplicació exponencial

Sigui M una varietat diferenciable. Denotem per $\mathcal{X}(M)$ el conjunt de camps vectorials tangents diferenciables a M, que formen un $\mathbb{R}$-espai vectorial (amb les operacions naturals), i per $\mathcal{F}(M)$ l'anell de les funcions diferenciables de M a $\mathbb{R}$. Escrivim també $X_p = X(p)$.

Denotarem:

$$(fX)_p = f(p) \cdot X_p \in \mathcal{X}(M)$$

i

$$X(f)(p) = X_p(f) \in \mathcal{F}(M)$$

per tot $X \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$, i $p \in M$.

Definició 2.46. Una *connexió* a M és una aplicació bilineal

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

que satisfà:

1. $\nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y$
2. $\nabla_X(fY) = X(f) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$

per qualssevol $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$.

Observació 2.47. Podem pensar una mètrica Riemanniana com una aplicació bilineal, simètrica i definida positiva

$$g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

que satisfà també

$$g(fX, Y) = f \cdot g(X, Y) = g(X, fY)$$

per qualssevol $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$.

Definició 2.48. Diem que una connexió ∇ és compatible amb una mètrica de Riemann g si, denotant $\nabla_X f = X(f)$, tenim

$$\nabla_X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

per qualssevol $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Teorema 2.49. *Sigui M una varietat diferenciable amb una mètrica de Riemann g. Aleshores existeix una única connexió ∇ que satisfà les dues condicions següents:*

1. *∇ és compatible amb g.*

2. ∇ és simètrica*: per tot sistema de coordenades (U, f), tenim*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

per tot i, j.

Aquesta connexió s'anomena la connexió de Levi-Civita *associada a la mètrica g.*

Definició 2.50. Sigui M una varietat diferenciable amb una mètrica Riemanniana g, i ∇ la connexió de Levi-Civita. Aleshores una corba diferenciable regular (amb derivada que mai s'anul·la) $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ és una *geodèsica* si satisfà:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0.$$

Fixades unes coordenades locals, la identitat anterior es tradueix en un sistema d'equacions diferencials de segon ordre de la forma

$$x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x_i' x_j' = 0,$$

on les funcions Γ_{ij}^k (anomenades *símbols de Christoffel*) estan definides per

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Aleshores aplicant el teorema fonamental d'equacions diferencials, obtenim la següent proposició:

Proposició 2.51. *Sigui $p \in M$. Aleshores per qualsevol $v \in T_pM$ i per ε suficientment petit, existeix una única geodèsica $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$. Escrivim $\gamma(t, p, v) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$.*

Ens interessarà poder controlar l'interval de definició de les geodèsiques, i ho podem fer fàcilment:

Proposició 2.52. *Si tenim $p \in M$ i triem $v \in T_pM$ tenim una geodèsica $\gamma(t, p, v)$ definida a $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Si canviem v per av, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, la nova geodèsica estarà definida en l'interval $(-\delta/a, \delta/a)$ i a més a més serà exactament:*

$$\gamma(t, p, av) = \gamma(at, p, v)$$

Demostració. Sigui $h : (-\delta/a, \delta/a) \longrightarrow M$ la corba definida per $h(t) = \gamma(at, p, v)$. Aleshores ja tenim que $h(0) = q$ i que $h'(0) = av$. Falta veure que h és una geodèsica. Efectivament

$$\nabla_{h'(t)} h'(t) = a^2 \nabla_{\gamma'(at,p,v)} \gamma'(at, p, v) = 0$$

Per tant, per unicitat, $h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av)$. □

Aquest fet ens permet variar l'interval de definició de la geodèsica que passa per un punt en una direcció particular a canvi de variar només el mòdul del vector velocitat que demanem que tingui en aquell punt. Així, si fixem $p \in M$, per cada direcció $v \in T_pM$ podem trobar una constant $a > 0$ i una geodèsica $\gamma(t, p, w)$: $(-2, 2) \longrightarrow M$ de manera que w és múltiple (amb constant positiva) de v.

Per tant, fixat p, podem triar $\varepsilon > 0$ de manera que si $|w| < \varepsilon$, $w \in T_pM$, aleshores tinguem definit $\gamma(1, p, w) : (-2, 2) \longrightarrow M$.

Definició 2.53. Per un $p \in M$, definim l'*aplicació exponencial* com

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$$

$$\exp_p = \gamma(1, p, v)$$

on $B_\varepsilon(0) \subset T_pM$.

Observem que $\exp_p(0) = p$. De la diferenciabilitat de les solucions d'equacions diferencials respecte condicions inicials (resultat de teoria d'equacions diferencials) obtenim que $\exp_p$ és diferenciable.

Proposició 2.54. *Per tot $p \in M$, existeix ε tal que $\exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ és un difeomorfisme entre $B_\varepsilon(0)$ i un entorn obert de p.*

Demostració. Calculem el diferencial de $\exp_p$ al punt 0.

$$d(\exp_q)_0(v) = \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1, p, tv)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, p, v))\Big|_{t=0} = v$$

És a dir, que $d(\exp_p)_0$ és la identitat en T_pM, i per tant pel teorema de la funció inversa $\exp_q$ és un difeomorfisme en un entorn del 0 (a un entorn de p). $\square$

Suposem ara que tenim un grup de Lie G compacte i una G-varietat M. Com hem vist a la secció anterior, podem construir una mètrica Riemanniana G-invariant a M. Sigui $M^G \subset M$ el conjunt de punts invariants per G i $p \in M^G$. G actua sobre M, però també sobre T_pM, ja que si $v \in T_pM$, $gv \in T_pM$ per tot $g \in G$ ja que $gp = p$.
Com que hem definit les geodèsiques i l'aplicació exponencial canònicament en base a la mètrica Riemanniana, l'aplicació exponencial és equivariant. Per tant el conjunt de punts fixos $U \cap M^G$ es correspon als punts fixos de $B_\varepsilon(0)$, posem $B_\varepsilon(0)^G$. Com que cada $g \in G$ és una aplicació lineal de $B_\varepsilon(0)$ a ell mateix, el conjunt de punts fixos per cada g és un subespai vectorial de T_pM intersecat amb $B_\varepsilon(0)$, i $B_\varepsilon(0)^G$ és intersecció de tots aquests i per tant també tenim $B_\varepsilon(0)^G = L \cap B_\varepsilon(0)$, on L és un subespai vectorial de T_pM. Aleshores l'aplicació $\exp_p$ restringida a $B_\varepsilon(0)^G$ ens dóna un difeomorfisme entre aquest conjunt (que el podem pensar com un obert de R^k, on k és la dimensió del subespai vectorial L) i un entorn de p dins de M^G. Hem obtingut doncs una parametrització d'un entorn de p a M^G.

Com que k pot dependre del punt fix x que triem, no obtenim que M^G sigui una subvarietat de M però sí unió de subvarietats disjuntes (que poden tenir dimensions diferents). Hem assolit doncs l'objectiu d'aquesta secció.

2.4 Suma connexa de varietats diferenciables

Volem donar una definició precisa de la suma connexa de dues varietats diferenciables orientables i compactes. Utilitzarem la donada per Kervaire i Milnor a [5]. Considerarem les nostres varietats en el sentit abstracte per fer aquesta definició. Siguin M_1 i M_2 dues varietats diferenciables de dimensió n orientades i compactes, D^n el disc unitat (tancat). Triem embeddings (és a dir, aplicacions que són difeomorfismes amb la imatge):

$$i_1 : D^n \longrightarrow M_1 \qquad\qquad i_2 : D^n \longrightarrow M_2$$

de manera que i_1 preservi l'orientació i i_2 l'inverteixi. Aleshores definim $M_1 \# M_2$ com la suma disjunta

$$(M_1 \setminus i_1(0)) \sqcup (M_2 \setminus i_2(0))$$

identificant $i_1(tu) \sim i_2((1-t)u)$ per tot vector unitari $u \in S^{n-1}$ i tot $0 < t < 1$. I triem la orientació $M_1 \# M_2$ de manera que sigui compatible amb les de M_1 i M_2 (ho podem fer ja que $i_1(tu) \longrightarrow i_2((1-t)u)$ preserva l'orientació).

Proposició 2.55. *La suma connexa està ben definida i és associativa i commutativa mòdul difeomorfisme. L'esfera S^n fa d'element neutre.*

La demostració d'aquesta proposició es deriva fàcilment del següent lema:

Lema 2.56. *Siguin i_1, i_2 dos embeddings de D^n a una varietat M orientable i de dimensió n que defineixen la mateixa orientació de M (és a dir, si triem una orientació de M, o tots dos embeddings respecten la orientació o tots dos l'inverteixen). Aleshores existeix un difeomorfisme F de M en si mateix que satisfà $i_2 = F \circ i_1$.*

Demostració. Utilitzarem sense demostrar el teorema 5.5 de Palais a [10]. Diu el següent:

Teorema 2.57. *Sigui M una varietat diferenciable orientada i f una aplicació d'un entorn obert d'un punt $x \in M$ a M, i suposem que df_x és no singular. Aleshores existeix un difeomorfisme de M en si mateixa, $H : M \longrightarrow M$ de manera que $H|_V = f|_V$ per algun entorn obert $V \subset M$ de x.*

Tornant a la demostració del lema, tenim un difeomorfisme

$$i_2 \circ i_1^{-1}|_{i_1(\mathring{D}^n)} : i_1(\mathring{D}^n) \longrightarrow i_2(\mathring{D}^n).$$

Per tant, aplicant el teorema obtenim un difeomorfisme $H : M \longrightarrow M$ de manera que $i_2(p) = H(i_1(p))$ per tot $p \in B^n_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Triem una funció $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= 1 && \text{si } t \leq 1 \\ \lambda(t) &= 0 && \text{si } t \geq 1 + \delta/2 \end{aligned}$$

on $\delta > 0$ el triem suficientment petit perquè i_1 i i_2 estenguin a embeddings de $\mathring{D}^n_{1+\delta}$ a M. Aleshores per $s \in [0,1)$ definim aplicacions $F^1_s, F^2_s : M \longrightarrow M$ com:

$$\begin{aligned} F^1_s(i_1(p)) &= i_1\big((1 - s\lambda(\|p\|))p\big) && \text{si } x \in i_1(\mathring{D}^n_{1+\delta}) \\ F^1_s(x) &= x && \text{si } x \notin i_1(\mathring{D}^n_{1+\delta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^2_s(i_2(p)) &= i_2\big((1 - s\lambda(\|p\|))^{-1}p\big) && \text{si } x \in i_2(\mathring{D}^n_{1+\delta}) \\ F^2_s(x) &= x && \text{si } x \notin i_2(\mathring{D}^n_{1+\delta}) \end{aligned}$$

F^1_s comprimeix $i_1(D^n_1)$ en un disc més petit conforme s creix, i omple la resta amb $i_1(\mathring{D}^n_{1+\delta}) \setminus i_1(D^n_1)$ i F^2_s fa el contrari en la imatge de l'altre disc. F^1_s i F^2_s són difeomorfismes de M en M per tot $s \in [0,1)$, i per tant

$$F^2_{1-\varepsilon} \circ H \circ F^1_{1-\varepsilon} = F$$

és també un difeomorfisme de M en ell mateix, que a més a més satisfà $i_2 = F \circ i_1$, com volíem. $\square$

2.5 Teorema de Poincaré-Hopf

L'objectiu d'aquesta secció és provar el teorema de Poincaré-Hopf. Afirma que si tenim un camp vectorial sobre una varietat M, aleshores la suma dels índexos (que ara definirem) dels zeros d'aquest camp és un invariant de la varietat, és a dir, depèn només de la varietat i no del camp que triem, i a més a més és igual a un invariant topològic, la característica d'Euler.

Apart de l'elegància i el significat profund que té relacionar un invariant purament topològic amb un objecte (els camps vectorials) més aviat analític, el teorema té aplicacions molt directes. Per exemple, és impossible definir un camp vectorial diferenciable sense zeros a una varietat diferenciable M amb $\chi(M) = 0$. En particular tenim el "hairy ball theorem", que ho aplica a l'esfera S^2 (o a qualsevol S^n amb n parell).

Organitzarem la demostració en diverses parts. Primer definirem rigorosament l'índex dels zeros dels camps vectorials, i enunciarem el teorema. Després veurem que la suma dels índexos és un invariant associant-ho al grau d'una aplicació que només depèn de la varietat, l'aplicació de Gauss. Finalment, per associar la suma a la característica d'Euler, serà suficient construir un camp vectorial concret de manera que la suma dels índexos d'aquest sigui igual a la característica d'Euler.

Definició 2.58. Sigui $U \subset \mathbb{R}^m$ un obert, i $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un camp vectorial diferenciable amb un zero $z \in U$ aïllat (únic zero en un entorn). Agafem una esfera suficientment petita perquè càpiga en aquest entorn, i llavors l'aplicació

$$\overline{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$$

va d'aquesta esfera a l'esfera unitat. Definim l'*índex* ι *de* v *al zero* z com el grau d'aquesta aplicació.

Si volem definir l'índex per camps vectorials sobre varietats diferenciables qualsevol, caldrà fer-ho per cartes, i per tant hem de veure la invariància respecte difeomorfisme d'aquesta definició.

Direm que dos camps vectorials tangents v a M i v' a N *corresponen a través de* f si
$$df_x(v(x)) = v'(f(x)).$$
Clarament si f és un difeomorfisme, aleshores amb qualsevol dels dos camps tenim unívocament determinat l'altre. Per exemple, si tenim v, llavors:
$$v' = df \circ v \circ f^{-1}.$$

Proposició 2.59. *Siguin v i v' camps vectorials en $U, U' \subset \mathbb{R}^m$, que corresponen sota un difeomorfisme $f : U \longrightarrow U'$. Aleshores l'índex de v a un zero aïllat és el mateix que el de v' a $f(z)$.*

Basarem la demostració en el següent lema:

Lema 2.60. *Qualsevol difeomorfisme $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que preservi la orientació és diferencialment isotòpic a la identitat.*

Demostració. Podem assumir, composant amb un difeomorfisme de canvi de coordenades si cal, que $f(0) = 0$. Definim una isotopia
$$F : \mathbb{R}^m \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
de la següent manera:
$$F(x,t) = f(tx)/t \text{ per } 0 < t \leq 1$$
$$F(x,0) = df_0(x).$$
Observem que efectivament $\lim_{t\to 0} f(tx)/t = df_0(x)$. Vegem que F és diferenciable.

Volem escriure
$$f = x_1 g_1(x) + ... + x_m g_m(x)$$
on $g_1, ..., g_m$ són funcions diferenciables. Vegem que ho podem fer. Com que $f(0) = 0$, tenim
$$f(x_1, ..., x_m) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, ..., tx_m)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_m) x_i dt$$
per tant podem posar $g_i(x_1, ..., x_n) = \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_m) dt$. Aleshores tindrem
$$F(x,t) = x_1 g_1(tx) + ... + x_m g_m(tx)$$
per tot t, i per tant F és diferenciable.

Hem vist doncs que f és diferenciablement isotòpic a l'aplicació lineal df_0, que és clarament isotòpica a la identitat (ja que df_0 conserva la orientació). Per tant f és isòtopa a la identitat, tal com volíem. ☐

Equipats amb el lema, demostrem la proposició anterior:

Demostració. Teníem $f : U \longrightarrow U'$ i $v' = df \circ v \circ f^{-1}$. Centrem perquè $z = f(z) = 0$, i suposem que U és convex (sempre podem substituir per un obert més petit que ho sigui).

Si f preserva l'orientació, construim exactament com a la demostració del lema anterior una família de difeomorfismes:

$$f_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

de manera que $f_0 = \mathrm{Id}$, $f_1 = f$ i $f_t(0) = 0$ per tot t. Siguin

$$v_t = df_t \circ v \circ f_t^{-1}$$

camps vectorials a $f_t(U)$ que corresponen a v per cada f_t. En una esfera centrada al zero suficientment petita, tots aquests camps estan definits i tenen zeros. Per tant l'índex de $v = v_0$ al 0 no pot variar amb t i ha de ser igual que l'índex de $v' = v_1$ al 0, com volíem veure.

En el cas de que f inverteixi l'orientació, considerem una reflexió qualsevol ρ. Aleshores

$$v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1}$$

Substituïnt a la funció que ens dóna l'índex, $\overline{v}'(x) = v'(x)/\|v'(x)\|$ a l'esfera al voltant del zero, obtenim

$$\overline{v}' = \rho \circ \overline{v} \circ \rho^{-1}$$

d'on es desprèn que el grau de $\overline{v}'$ és el mateix que el de $\overline{v}$, i per tant l'índex de v i v' al 0 coincideixen.

Un difeomorfisme que inverteixi l'orientació qualsevol el podem transformar com hem fet en el primer cas en una reflexió ρ, per tant ja tenim tots els casos possibles i hem provat la proposició. □

Ara ja podem assegurar que la següent definició és vàlida:

Definició 2.61. Sigui v un camp vectorial en una varietat M, i $z \in M$ un zero aïllat. Si $g : U \longrightarrow M$ és una parametrització d'un entorn de z a M, aleshores definim l'*índex* ι *de* v *a* z com l'índex del del camp vectorial corresponent $dg^{-1} \circ v \circ g$ al punt $g^{-1}(z) \in U$.

Un cop definit l'índex dels zeros d'un camp vectorial, ja podem enunciar el teorema principal de la secció:

Teorema 2.62 (Poincaré-Hopf)**.** *Sigui M una varietat diferenciable compacta i v un camp vectorial diferenciable a M amb zeros aïllats. Aleshores, si $\sum \iota$ és la suma dels índexos de tots els zeros,*

$$\sum \iota = \chi(M)$$

on $\chi(M)$ denota la característica d'Euler de M.

I enunciem també un corol·lari immediat utilitzant el que hem vist a la secció 2.2:

Corol·lari 2.63. *Si S^1 actua* lliurement *sobre una varietat diferenciable tancada M (és a dir, no hi ha punts fixos per cap element de S^1 excepte per $1 \in S^1$), aleshores $\chi(M) = 0$.*

2.5.1 L'aplicació de Gauss

Comencem amb el cas d'una varietat amb vora $X \in \mathbb{R}^m$ de dimensió m. L'*aplicació de Gauss*

$$g : \partial X \longrightarrow S^{m-1}$$

envia cada $x \in X$ al vector unitari normal a la varietat X que apunta enfora.

El següent lema ens relaciona el grau d'aquesta aplicació amb la suma $\sum \iota$.

Lema 2.64. *(Hopf) Sigui $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un camp vectorial diferenciable amb zeros aïllats i que apunta enfora als punts de la vora ∂X, i g l'aplicació de Gauss, aleshores*

$$\sum \iota = \deg(g).$$

En particular, $\sum \iota$ no depèn de quin v agafem, només de X.

Demostració. Al voltant de cada zero treiem una disc obert petit $B_\varepsilon(z)$ de manera que no caci cap altre zero. Obtenim una nova varietat amb vora N. Tenim la funció

$$\overline{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$$

que envia N a S^{m-1}. Pel lema 2.32, aquesta aplicació $\overline{v}$ restringida a tots els components de la vora té grau 0.

Mirant aquesta aplicació $\overline{v}$ a la vora de X, com que demanàvem que apuntés enfora, tenim que $\overline{v}|_{\partial X}$ és homòtopa a g, i per tant els graus coincideixen. L'aplicació $\overline{v}$ a la resta de la vora de N suma, per definició de l'índex d'un zero, $-\sum \iota$ (el signe negatiu apareix perquè cada B_ε té l'orientació oposada).

Així doncs, com que el grau total de $\overline{v}$ havia de ser zero, tenim:

$$deg(g) - \sum \iota = 0$$

tal com volíem. □

Abans de generalitzar per varietats arbitràries, fem alguns passos previs.

Sembla prou natural poder calcular l'índex d'un zero z a partir de les derivades de v a z. Considerem doncs un camp vectorial v en un obert $U \subset \mathbb{R}^m$ i pensem v com una aplicació de U a $\mathbb{R}^m$, de manera que tinguem $dv_z : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Definició 2.65. Un camp vectorial v és *no degenerat* al zero z si dv_x és no singular.

Observem que en aquest cas, z és un zero aïllat.

Enunciem ara dos lemes que relacionen l'índex d'un zero amb les derivades del camp en aquell punt.

Lema 2.66. *L'índex de v a un zero z no degenerat és o bé +1 o bé -1, depenent de si el determinant de dv_z és positiu o negatiu.*

Demostració. Si pensem v com un difeomorfisme d'un entorn convex U_0 del zero z a un obert de $\mathbb{R}^m$ (suposem $z = 0$), hem vist en un lema anterior que si v preserva la orientació, aleshores $v|_{U_0}$ és isòtop a la identitat sense afegir més zeros, i per tant l'índex és $+1$.

En el cas de que v inverteixi l'orientació, com també hem vist deformem v en una reflexió, que té índex -1.

Per tant, depenent de si dv_z té determinant positiu (preserva l'orientació) o negatiu (la inverteix), tindrem respectivanent $\iota = +1$ o $\iota = -1$. $\square$

Generalitzem aquest últim fet per a una varietat diferenciable qualsevol.

Suposem que tenim una varietat $M \subset \mathbb{R}^k$ i un camp vectorial w en aquesta varietat amb un zero $z \in M$. Pensant w com una aplicació de M a $\mathbb{R}^k$, tenim el diferencial $dw_z : T_zM \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Volem mirar de calcular l'índex de w en z a través d'aquest diferencial (si z és un zero aïllat). Sota aquestes condicions, tenim el següent lema:

Lema 2.67. *La imatge del diferencial dw_z està continguda a $T_zM \subset \mathbb{R}^k$, així que podem pensar $dw_z : T_zM \longrightarrow T_zM$. Aleshores si el determinant d'aquesta aplicació és diferent de zero tenim que z és un zero aïllat, i amb índex $+1$ i -1 en funció del signe.*

Demostració. Sigui $g : U \longrightarrow M$ una parametrització d'un entorn de z. Per un $u \in U$, si volem trobar una base de $T_{g(u)}M$, agafem la base canònica $\{e_1, ..., e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ i apliquem dh_u:

$$t_i = dh_u(e_i) = \partial h/\partial u_i$$

de manera que els t_i són una base de $T_{g(u)}M$. Volem aplicar $dw_{g(u)}$ al aquests vectors. Observem que

$$dw_{g(u)}(t_i) = d(w \circ g)_u(e_i) = \partial w(g(u))/\partial u_i$$

per tot $u \in U$.

Sigui v el camp vectorial a U corresponent a w, és a dir, $v = dg^{-1} \circ w \circ g$. Podem escriure $v = \sum_i v_i e_i$, amb cada $v_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicació diferenciable. Aleshores

$$w(g(u)) = dg_u(v) = \sum_i v_i dg_u(t_i) = \sum_i v_i t_i$$

i per tant continuant amb la de més amunt

$$\partial w(g(u))/\partial u_i = \partial(\sum_i v_i t_i)/\partial u_i = \sum_i (\partial v_i/\partial u_i) t_i + \sum_i v_i (\partial t_i/\partial u_i).$$

Ara si ajuntem i avaluem a la antiimatge del zero $g^{-1}(z)$, com que $v(g^{-1}(z)) = 0$ (i per tant $v_i(g^{-1}(z)) = 0$ per tot i), obtenim

$$dw_z(t_i) = \sum_i (\partial v_i / \partial u_i) t_i.$$

Per tant, efectivament dw_z és una aplicació de T_zM a T_zM, i el signe del determinant de la matriu $(\partial v_i / \partial u_i)$ (si és diferent de zero) ens dóna l'índex de z (tal i com hem vist en l'anterior lema). $\square$

Equipats amb aquests lemes pel càlcul dels índexos, procedim a associar la suma d'índexos d'un camp d'una varietat qualsevol al grau d'una aplicació de Gauss concreta. D'aquesta manera ja tindrem un dels fets més forts del teorema de Hopf-Poincaré: la invariància de la suma dels índexos, independentment del camp triat.

Sigui doncs $M \subset \mathbb{R}^k$ una varietat diferenciable compacta. Aleshores definim un nou subconjunt de $\mathbb{R}^k$

$$N_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k; \|x - y\| \leq \varepsilon \text{ per algun } y \in M\}$$

que, per ε suficientment petit, serà una varietat diferenciable amb vora de dimensió k. El que estem fent és fer M més "gruixuda", de manera que serà de la dimensió de l'espai ambient. Sota aquestes condicions:

Teorema 2.68. *Sigui v un camp vectorial a M sense zeros degenerats. Sigui g l'aplicació de Gauss*

$$g : \partial N_\varepsilon \longrightarrow S^{k-1}.$$

Aleshores, si $\sum \iota$ és la suma dels índexos dels zeros de v, tenim

$$\sum \iota = \deg(g.)$$

En particular, $\sum \iota$ no depèn del camp vectorial que triem.

Demostració. Volem explicitar aquesta aplicació de Gauss g. Definim

$$r : N_\varepsilon \longrightarrow M$$

de manera que $r(x) \in M$ sigui el punt de M més proper a x. Si ε és suficientment petit, aquesta aplicació està ben definida i és diferenciable, i $r(x) - x$ serà un vector perpendicular a l'espai tangent $T_{r(x)}M$ (sinó, $r(x)$ no seria el punt més proper).

Definim també la funció distància al quadrat

$$\varphi(x) = \|x - r(x)\|^2.$$

El gradient d'una funció $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ és l'únic camp vectorial que satisfà la identitat

$$\langle X, \operatorname{grad} \lambda \rangle = X(\lambda)$$

(on el producte escalar és l'habitual a l'espai ambient $\mathbb{R}^k$) per tot camp vectorial X a N_ε. En coordenades i en la mètrica que estem es tradueix en

$$\operatorname{grad} \lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)_i .$$

Calculem el gradient de φ i obtenim

$$\operatorname{grad} \varphi = 2(x - r(x)).$$

Observem que $\partial N_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon^2)$. Com que el gradient ens donarà un vector normal a $\varphi^{-1}(\varepsilon^2)$ en aquests punts, tenim, per tot $x \in \partial N_\varepsilon$:

$$g(x) = \operatorname{grad} \varphi / \|\operatorname{grad} \varphi\| = (x - r(x))/\varepsilon$$

així que tenim una expressió de l'aplicació de Gauss g.

Ara volem estendre v a un camp vectorial w a N_ε que tingui els mateixos zeros que v, i aleshores utilitzant el lema de Hopf a N_ε haurem acabat.

Definim w de la següent manera:

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)).$$

Això és efectivament una extensió del camp v, ja que pels punts $x \in M$, $r(x) = x$. Necessitem també que w apunti enfora als punts de la vora. Ho podem veure comprovant que $\langle w(x), g(x) \rangle > 0$ (producte escalar habitual) per tot $x \in \partial N_\varepsilon$.

$$\langle w(x), g(x) \rangle = \langle (x - r(x)) + v(r(x)), x - r(x) \rangle / \varepsilon = \|x - r(x)\|^2 / \varepsilon = \varepsilon > 0$$

ja que $v(x)$ i $x - r(x)$ són ortogonals, i $\|x - r(x)\| = \varepsilon$ pels punts de la vora de N_ε. Observem també que w s'anul·la només als zeros de v (ja que a M el primer sumand és zero, i a fora de M els dos vectors són ortogonals i el primer és diferent de zero).

Tenim que v i w tenen els mateixos zeros; falta veure que tenen els mateixos índexos en aquests zeros. Com que hem vist que els índexos depenen dels diferencials dels camps, si comprovem que són el mateix en tindrem prou. Sigui $z \in M$ un zero de v (i per tant de w):

$$\begin{aligned} dw_z(u) &= dv_z(u) & \qquad & \forall h \in T_z M \\ dw_z(u) &= h & & \forall h \in T_z M^\perp \end{aligned}$$

per tant el determinant de dw_z és el mateix que el de dv_z. Per tant, pels lemes anteriors, la suma d'índexos de v és la mateixa que la de de w, i pel lema de Hopf (ja que w no té zeros degenerats), aquesta suma és igual al grau de g. $\square$

L'únic detall que ens falta polir per tenir completa la primera part del teorema és el de deixar de suposar que els zeros són no degenerats. En aquesta secció ho hem suposat malgrat que en l'enunciat del teorema de Poincaré-Hopf no ho demanàvem. Però aquesta petita ampliació es pot provar fàcilment.

Suposem primer un camp vectorial v en un obert $U \subset \mathbb{R}^m$ amb un zero aïllat z. Definim una funció

$$\lambda : U \longrightarrow [0,1]$$

de manera que valgui 1 en un entorn N_1 de z i zero fora d'un entorn una mica més gran N (demanem que z sigui l'únic zero de v a N). Aleshores definim el camp vectorial

$$\overline{v}(x) = v(x) - \lambda(x)y$$

on $y \in \mathbb{R}^m$ és un valor regular suficienment petit de v (ara concretarem). Volem veure que $\overline{v}$ no té zeros degenerats a N. A N_1, $\overline{v}(x) = 0$ implica $v(x) = y$, però llavors $d\overline{v}_x = dv_x$ és no singular ja que y és un valor regular. Per altra banda, si agafem y suficientment petit $\overline{v}$ no tindrà cap zero a $N \setminus N_1$. Per tant, $\overline{v}$ no té zeros degenerats a N, és igual a v fora de N, i a més per lema de Hopf la suma dels índexos dels zeros de v a N es poden evaluar com el grau de l'aplicació de Gauss:

$$\overline{v} : \partial N \longrightarrow S^{m-1}.$$

Però $\overline{v}$ val el mateix que v a ∂N, i podem computar la suma d'índexos de v a N de la mateixa manera. Per tant la suma d'índexos dels dos camps a N és el mateix.

Finalment, si tenim M una varietat diferenciable compacta amb zeros aïllats, aplicant aquest argument localment a cada zero degenerat obtenim un altre camp vectorial sense zeros degenerats però amb la mateixa suma d'índexos $\sum \iota$.

2.5.2 Incís en teoria de Morse

L'objectiu d'aquesta secció és construir sobre una varietat M qualsevol un camp vectorial tangent de manera que la suma dels índexos d'aquest sigui igual a la característica d'Euler de M. Amb això haurem completat la demostració del teorema de Poincaré-Hopf.

Per fer-ho, farem una petita incursió en teoria de Morse. Consisteix, breument, en l'estudi de les varietats M considerant funcions $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables i sense punts crítics degenerats. Veurem alguns resultats que ens permeten estudiar la topologia d'una varietat a partir d'analitzar funcions d'aquest tipus, i tot seguit podrem construir un camp vectorial amb les característiques que necessitem a partir del gradient d'una d'aquestes funcions.

Notació. *Sigui $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Definim*

$$M_a = f^{-1}((-\infty, a]).$$

Si a és un valor regular, per la proposició 2.18 M_a és una varietat diferenciable amb vora.

Lema 2.69. *Sigui M una varietat diferenciable compacta i $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Siguin $a < b$ tals que $[a, b]$ no conté cap valor crític de f. Aleshores M_a és difeomorf a M_b. Encara més, M_a és un retracte de deformació M_b, de manera que la inclusió*

$$M_a \longrightarrow M_b$$

indueix un isomorfisme en homologia.

Demostració. La idea és contraure M_b cap a M_a per les trajectòries dels hiperplans $f = \text{ctant}$.

Triem una mètrica Riemanniana a M, aleshores podem definir el gradient de f per la mateixa identitat que abans. Definim una funció $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ així:

$$\rho(x) = \frac{1}{\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle} \text{ si } x \in f^{-1}([a,b]).$$

I l'estenem a tot M de manera que sigui 0 fora d'un entorn compacte de $f^{-1}([a,b])$. Observem que $\rho(x) > 0$ per tot $x \in f^{-1}([a,b])$, ja que f no té punts crítics en $f^{-1}([a,b])$ i per tant sempre hi ha alguna parcial que no s'anul·la.
Ara definim un camp vectorial X com:

$$X_x = \rho(x)(\operatorname{grad} f)_x$$

per tot $x \in M$. És un camp diferenciable i per tant de forma semblant a com hem treballat a la secció 2.2 (utilitzant el teorema fonamental d'equacions diferencials ordinàries), aquest camp ens genera una acció de $\mathbb{R}$ a M. Tenim doncs un grup de difeomorfismes

$$\varphi_t : M \longrightarrow M.$$

Volem veure que el flux corresponent a moure t ens porta M_a a M_b i al revés. Per un $x \in M$, considerem l'aplicació $t \mapsto f(\varphi_t(x))$. Si $\varphi_t(x) \in f^{-1}([a,b])$, aleshores

$$\frac{df(\varphi_t(x))}{dt} = \langle \frac{d\varphi_t(x)}{dt}, \operatorname{grad} f\rangle = \langle X, \operatorname{grad} f\rangle = +1$$

per com hem definit X. Per tant $t \mapsto f(\varphi_t(x))$ és lineal amb derivada 1 si $\varphi_t(x) \in f^{-1}([a,b])$. És a dir, si $c \in [a,b]$, per tot x tal que $x \in f^{-1}(c)$, $f(\varphi_t(x)) = c + t$. Per tant el difeomorfisme $\varphi_{b-a} : M \longrightarrow M$ envia M_a difeomòrficament a M_b, com volíem.

Per veure que M_b és un retracte de deformació, definim la homotopia

$$R(x,t) : M_b \times [0,1] \longrightarrow M_b$$
$$R(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } f(x) \le a \\ \varphi_{t(a-f(x))}(x) & \text{si } a \le f(x) \le b \end{cases}$$

observem que $R(x,0)$ és la identitat en M_b i $R(x,1)$ és una retracció de M_b a M_a. Per tant M_a és un retracte de deformació de M_b, com volíem veure. □

Definició 2.70. Sigui $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable i $z \in M$ un punt crític. Direm que z és *no degenerat* si la matriu Hessiana de f a z, $\operatorname{Hess}(f,z) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(z)\right)_{i,j}$, és no singular (fet que no depèn de les coordenades que triem). En aquest cas definim l'*índex de f en x* com la dimensió del màxim subespai que pel qual la Hessiana és definida negativa.

Definició 2.71. Anomenem *funció de Morse* una tota funció diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que no tingui punts crítics degenerats.

Utilitzarem sense demostrar el següent lema. Per una demostració veure [7], §2.

Lema 2.72. *(de Morse) Sigui $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable i $z \in M$ un punt crític no degenerat. Aleshores existeix una sistema de coordenades $y_1, ..., y_m$ en un entorn U de z de manera que $z = (0, ..., 0)$ en aquestes coordenades i*

$$f(x) = f(z) - y_1^2 - y_2^2 - ... - y_k^2 + y_{k+1}^2 + ... + y_m^2$$

per qualsevol $x \in M$, on k és l'índex de f en z.

Lema 2.73. *Sigui $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable, M compacte i $z \in M$ un punt crític no degenerat amb índex k. Suposem que $f(z) = c$ i $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ només conté aquest punt crític per algun $\varepsilon > 0$. Aleshores, $M_{c+\varepsilon}$ té el mateix tipus d'homotopia que $M_{c-\varepsilon}$ amb una k-cel·la enganxada (identificant la frontera de la k-cel·la difeomòrficament a un subconjunt $M_{c-\varepsilon}$).*

Demostració. Pel lema 2.72, podem triar un sistema de coordenades $u_1, ...u_m$ en un entorn U de z de manera que

$$f = c - u_1^2 - ... - u_k^2 + u_{k+1}^2 + ... + u_m^2$$

a tot U, i $u_1(z) = ... = u_m(z) = 0$.
Ara empetitim si cal ε de manera que la imatge de l'embedding

$$(u_1, ..., u_m) : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

contingui la bola tancada $B_{2\varepsilon}(0) \subset \mathbb{R}^m$.
Definim $K = \{x \in U; u_1^2 + ... + u_k^2 \leq \varepsilon, u_{k+1} = ... = u_m = 0\} \subset U$. Observem que K és difeomorf a una k-cel·la. A més $K \cap M_{c-\varepsilon} = \partial K$, per tant K està "enganxat" a $M_{c-\varepsilon}$ adequadament. Si provem que $M_{c-\varepsilon} \cup K$ és un retracte de deformació de $M_{c+\varepsilon}$, haurem acabat.

L'objectiu ara és definir una nova funció F semblant a f però tal que $F < f$ en un entorn del punt crític z. Aleshores $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ contindrà $M_{c-\varepsilon}$ més una regió H contenint a z. Provarem primer que $M_{c+\varepsilon}$ és homotòpicament equivalent a $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$, i després que aquesta segona regió és homotòpicament equivalent a $M_{c-\varepsilon} \cup K$.

Definim una funció

$$\mu : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

que li demanem que sigui diferenciable i que satisaci:

$$\begin{aligned} &\mu(0) > \varepsilon && \\ &\mu(r) = 0 && \text{per tot } r \geq 2\varepsilon \\ &-1 < \mu'(r) \leq 0 && \text{per tot } r \end{aligned}$$

és a dir, $\mu(0) > \varepsilon$ i després μ és decreixent (però sense arribar a pendent -1) fins que a partir de 2ε és zero. Clarament μ "té temps" d'arribar a zero, ja que si $\mu(0)$ és proper a ε i la pendent s'acosta a -1, llavors $\mu(\varepsilon)$ s'apropará a 0 (i això és molt abans d'arribar a $\mu(2\varepsilon)$).

Aleshores definim F de manera que valgui el mateix que f fora de U, i

$$F = f - \mu(u_1^2 + ... + u_k^2 + 2u_{k+1}^2 + ... + 2u_m^2)$$

dins de U. Observem que a la frontera de U, $F = f$, com volem, per tant F està ben definida i és diferenciable. Ens serà pràctic per simplificar notació definir dues funcions:

$$\xi, \eta : U \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\begin{aligned}\xi &= u_1^2 + ... + u_k^2 \\ \eta &= u_{k+1}^2 + ... + u_m^2.\end{aligned}$$

D'aquesta manera tenim

$$\begin{aligned}f &= c - \xi + \eta \\ F &= c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta).\end{aligned}$$

Afirmació 1. $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = f^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M_{c+\varepsilon}$.

Demostració. Com que $F \leq f$ a tot M, ja tenim la inclusió $F^{-1}([-\infty, c+\varepsilon]) \subset f^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$.

Fora de U, $F = f$, per tant si $x \notin U$, $x \in F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$ si i només si $x \in f^{-1}(-\infty, c+\varepsilon])$. De fet això és cert per tots els x tals que $\xi + 2\eta \geq 2\varepsilon$.
Si $x \in U$ i $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$, aleshores

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon$$

i per tant $x \in F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$. Hem comprovat que si $x \in f^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$, aleshores $x \in F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$, per tant hem acabat. □

Afirmació 2. *Els punts crítics de F són els mateixos que els de f.*

Demostració. Fora de U les funcions coincideixen. Dins de U, mirem les parcials de F respecte les coordenades $u_1, ..., u_m$:

$$\begin{aligned}&\text{Si } 1 \leq i \leq k, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = -2x_i - 2x_i\mu' = 2x_i(-1-\mu') < 0 \text{ excepte quan } x_i = 0. \\ &\text{Si } k < i \leq m, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i - 4x_i\mu' = 2x_i(1-2\mu') > 0 \text{ excepte quan } x_i = 0.\end{aligned}$$

per tant F tindrà únicament el punt crític z en el conjunt U (igual que f). □

Afirmació 3. *$F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ és un retracte de deformació de $M_{c+\varepsilon}$.*

Demostració. Utilitzant l'afirmació 1 i que $F \leq f$, tenim que

$$F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \subset f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]).$$

Aleshores $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ conté com a màxim un punt crític, z. Però

$$F(z) = c - \xi(z) - \eta(z) - \mu(\xi(z) + 2\eta(z)) = c - \mu(0) < c - \varepsilon.$$

Per tant z no està a $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, i aquest conjunt no té cap punt crític. Utilitzant el lema anterior i l'afirmació 1, tenim que $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ és un retracte de deformació de $M_{c+\varepsilon}$. □

Definirem H com l'adherència de $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) \setminus M_{c-\varepsilon}$, de manera que $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) = M_{c-\varepsilon} \cup H$.

Afirmació 4. *$M_{c-\varepsilon} \cup K$ és un retracte de deformació de $M_{c-\varepsilon} \cup H$.*

Demostració. Observem que si provem aquesta última afirmació, juntament amb la tercera tindrem que $M_{c-\varepsilon} \cup K$ és un retracte de deformació de $M_{c+\varepsilon}$, que és el que necessitàvem per acabar la demostració del lema.

Recordem que $K = \{x \in M; \xi(x) \leq \varepsilon, \eta(x) = 0\} \subset U$. Perquè l'afirmació 4 tingui sentit, cal que $K \subset H$. Si $x \in K$, només variaran les primeres k coordenades per canviar a z, i com que $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$, tenim

$$F(x) \leq F(z) < c - \varepsilon$$

i a més $f(x) \geq c - \varepsilon$, per tant $x \in H$.

Construïm la retracció $R(x,t) : M_{c-\varepsilon} \cup H \longrightarrow M_{c-\varepsilon} \cup H$. Fora de U, $R(\cdot, t)$ és la identitat per tot t. Dins de U, haurem de distingir tres conjunts diferents.

<u>Cas 1</u>: $\xi(x) \leq \varepsilon$. Aleshores definim

$$R(u_1, ..., u_m, t) = (u_1, ..., u_m k, tu_{k+1}, ..., tu_m).$$

D'aquesta manera $R(\cdot, 1)$ és la identitat i $R(\cdot, 0)$ envia tota aquesta regió a K. Cal també veure que la imatge per qualsevol t està continguda a $M_{c-\varepsilon} \cup H = F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$. Però havíem vist que $\frac{\partial F}{\partial \eta} > 0$, i per com hem definit R tenim $\eta(R(x,t)) \leq \eta(x)$, per tant $F(R(x,t)) \leq F(x)$ i llavors $R(x,t) \in F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$.

<u>Cas 2</u>: $\varepsilon \leq \xi(x) \leq \eta(x) + \varepsilon$. Aleshores definim

$$R(u_1, ..., u_m, t) = (u_1, ..., u_m k, s_t u_{k+1}, ..., s_t u_m)$$

i definim $s_t \in [0,1]$ com

$$s_t = t + (1-t)\sqrt{((\xi - \varepsilon)/\eta)}.$$

D'aquesta manera, $R(\cdot, 1)$ torna a ser la identitat ($s_1 = 0$), i $R(\cdot, 1)$ envia tota la regió a $f^{-1}(\{c - e\})$. Efectivament, si $R(x, 0) = x'$, tenim

$$f(x') = c - \xi(x') + \eta(x') = c - \xi(x) + \frac{\xi(x) - \varepsilon}{\eta(x)}\eta(x) = c - \xi(x) + \xi(x) - \varepsilon = c - \varepsilon.$$

La funció està ben definida ja que $\eta \geq \xi - \varepsilon$ en aquesta regió, per tant no tindrem problemes quan el denominador η es faci petit. A més a més observem que en la regió frontera entre les que hem definit, $\xi = \varepsilon$, les dues definicions de R coincideixen.

Cas 3: $\eta(x)+\varepsilon \leq \xi(x)$, és a dir, $x \in M_{c-\varepsilon}$. Aquí definim $R(x,t)$ com la identitat per tot t. Observem que a la regió fronterera amb el cas anterior, $\xi = \eta + \varepsilon$, les dues definicions coincideixen.

Amb això hem provat l'afirmació 4, que diu que $M_{c-\varepsilon} \cup K$ és un retracte de deformació de $M_{c-\varepsilon} \cup H$, i ajuntant amb l'afirmació 3, tenim el lema demostrat. □

□

Amb aquests dos lemes tenim les eines per computar la característica d'Euler d'una varietat diferenciable on hi tinguem una funció $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ a partir dels índexos dels seus punts crítics.

Teorema 2.74. *Sigui M una varietat diferenciable compacta i $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de Morse. Demanem també que dos punts crítics qualssevol tals que $z_1 \neq z_2$ satisfacin $f(z_1) \neq f(z_2)$. Aleshores*

$$\chi(M) = \sum_{z \in Z} (-1)^{\textit{índex}(z)}$$

on $Z \subset M$ és el conjunt de punts crítics de f.

Demostració. Demostrarem el següent:

$$\chi(M_a) = \sum_{z \in Z, f(z) < a} (-1)^{\text{índex}(z)}$$

per tot $a \in \mathbb{R}$ valor regular. Z és un conjunt finit: si no ho fos, com que M és compacte, tindríem un punt d'acumulació de punts crítics i llavors seria degenerat. Podem doncs demostrar la identitat per inducció sobre el nombre de valors crítics menors que a.

Suposem que només hi ha un valor crític per sota de a, diguem-li c. Tenim doncs un punt crític z amb $f(z) = c$, i suposem que té índex k. Agafem ε de manera que puguem aplicar el lema 2.73 a $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Si denotem per $\simeq$ l'equivalència homotòpica, pel lema 2.69 tenim $M_a \simeq M_{c+\varepsilon}$ i $M_{c-\varepsilon} \simeq M_d$ per qualsevol $d < c - \varepsilon$, i com que podem fer d tant petit com vulguem (més petit que el mínim de f), tenim $M_{c-\varepsilon} \simeq \emptyset$. Tot junt tenim

$$M_a \simeq M_{c+\varepsilon} \simeq \mathbb{D}^k$$

on $\mathbb{D}^k$ és el disc tancat de dimensió k. Per tant

$$\chi(M_a) = \chi(\mathbb{D}^k) = 1.$$

Per altra banda, com que M és compacta f assoleix un mínim absolut, aquest serà un punt crític (per ser mínim). Serà el primer que apareixerà, per tant és c. Per ser un mínim local la matriu Hessiana tindrà tots els valors positius. Això implica que

la matriu és semidefinida positiva. Ho podem provar així: la suma de semidefinides positives ho segueix sent i una matriu amb tot zeros excepte un valor més gran que zero és semidefinida positiva (i podem posar la nostra matriu com a suma de matrius d'aquests tipus).
Aleshores el màxim subespai definit negatiu serà de dimensió zero, i per tant l'índex de z és zero. Hem provat

$$(-1)^{\text{índex}(z)} = (-1)^0 = 1 = \chi(M_a)$$

com volíem veure.

Suposem ara que es compleix

$$\chi(M_a) = \sum_{z \in Z, f(z) < a} (-1)^{\text{índex}(z)}$$

per un cert $a \in \mathbb{R}$ valor regular i volem veure que també es compleix per $b > a$ un altre valor regular tal que M_b conté exactament un punt crític nou respecte M_a. Recordem que la característica d'Euler de M_b la definim com la suma alternada dels rangs del grups d'homologia singular $H_p(M_b)$, i mirarem de calcular-la a partir de la suma alternada dels rangs de $H_p(M_a)$.
Sigui $z \in f^{-1}((a, b))$ l'únic punt crític d'aquest conjunt, i posem que té grau k. Pel lema 2.73, M_b és homotòpicament equivalent a M_a adjuntant-hi una k-cel·la, per tant pel teorema d'escisió tenim que

$$H_p(M_b, M_a) = H_p(\mathbb{D}^k, \partial\mathbb{D}^k).$$

A més a més, tenim la successió exacta llarga d'homologia relativa (utilitzant directament la igualtat que acabem de veure):

$$... \to H_{p+1}(\mathbb{D}^k, \partial\mathbb{D}^k) \to H_p(M_a) \to H_p(M_b) \to H_p(\mathbb{D}^k, \partial\mathbb{D}^k) \to H_{p-1}(M_a) \to ...$$

Com a resultat immediat de considerar la successió d'homologia relativa de $(\mathbb{D}^k, \partial\mathbb{D}^k)$, tenim que

$$H_p(\mathbb{D}^k, \partial\mathbb{D}^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } p = k \\ 0 \text{ si } p \neq k \end{cases}$$

Com que la seqüència anterior és exacta, la suma alternada dels rangs serà zero (és una suma finita). En aquesta suma alternada hi tindrem les sumes alternades dels $H_p(M_a)$ i els $H_p(M_b)$, més concretament obtindrem

$$\chi(M_a) - \chi(M_b) + (-1)^k = 0$$

on el $(-1)^k$ prové del rang de $H_k(\mathbb{D}^k, \partial\mathbb{D}^k)$, i el signe depèn de la posició de la seqüència en la que estigui. Així, utilitzant l'hipòtesi d'inducció tenim

$$\chi(M_b) = \chi(M_a) + (-1)^{\text{índex}(z)} = \sum_{z \in Z, f(z) < b} (-1)^{\text{índex}(z)}$$

i amb això acaba la demostració del teorema. □

Necessitem un últim resultat de teoria de Morse:

Teorema 2.75. *Sempre existeixen funcions f satisfent les condicions del teorema anterior.*

Per una prova, consulteu [7], §6. La idea de la demostració és utilitzar el teorema de Sard per veure que si $M \subset \mathbb{R}^k$, el conjunt de punts $p \in \mathbb{R}^k$ tals que la funció

$$\begin{aligned} f_p : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x-p\|^2 \end{aligned}$$

és de Morse té complementari de mesura zero.

Utilitzant aquest fet, ja podem construir un camp vectorial amb suma d'índexos dels zero igual a la característica d'Euler.

Proposició 2.76. *Sigui M una varietat diferenciable compacta i f satisfent les condicions de l'enunciat del teorema anterior. Aleshores el camp vectorial* $\operatorname{grad} f$ *compleix que la suma dels índexos del seus zeros satisfà $\sum \iota = \chi(M)$.*

Demostració. Observem que $\operatorname{grad} f = 0$ si i només si totes les derivades s'anul·len, és a dir, si z és un punt crític de f. Sigui k l'índex de f a z. Això vol dir que la màxima dimensió d'un subespai que sigui definit negatiu a través de $d(\operatorname{grad} f)_z$ és k, i aleshores el determinant de $d(\operatorname{grad} f)_z$ és $(-1)^k$. Per tant:

$$\chi(M) = \sum_{z \in Z} (-1)^{\text{índex}(z)} = \sum \iota$$

on els ι són els índexos dels zeros del camp $\operatorname{grad} f$. □

Ja tenim el camp vectorial que necessitàvem per acabar la demostració del teorema de Poincaré-Hopf.

3 Enunciat i demostració

Ja hem desenvolupat en les seccions anteriors els resultats que necessitem per la demostració del teorema central d'aquest treball.

Teorema 3.1. *Sigui $T = T^n$ el torus n-dimensional i M una varietat diferenciable compacta i orientable de dimensió n qualsevol. Suposem també que $\chi(T\#M) \neq 0$. Aleshores no existeix cap acció diferenciable no trivial de S^1 en $T\#M$.*

Demostració. Denotem $X = T\#M$. Definim una aplicació

$$f : X \longrightarrow T$$

que col·lapsa tot M en un punt i deixa T invariant. Més rigorosament, pensant la suma com l'hem definit a la secció 2.4, és a dir, $(T \setminus i_1(0)) \sqcup (M \setminus i_2(0))$ amb les identificacions corresponents, llavors:

$$\begin{aligned} f(x) &= x && \text{si } x \in T \\ f(x) &= i_1(0) && \text{si } x \notin T \end{aligned}$$

d'aquesta manera la imatge de f està continguda a T, com volem. Si agafem un punt $y \in T$ que no sigui on M col·lapsa, llavors $f^{-1}(y)$ conté exactament un punt on f és la identitat. Per tant y és un valor regular i

$$\deg(f) = 1.$$

Ara suposem que tenim una acció diferenciable

$$\alpha : S^1 \times X \longrightarrow X.$$

L'objectiu és acabar veient que aquesta acció és necessàriament la trivial. De moment observem que el conjunt X^{S^1} de punts fixos per aquesta aplicació no pot ser buit.
Efectivament, si X^{S^1} fos buit, aleshores pel que hem vist a la secció 2.2 α ens determinaria un camp vectorial sense zeros, el que implicaria, per Poincaré-Hopf, que $\chi(X) = 0$, però hem suposat que $\chi(X)$ era diferent de zero. Per tant el conjunt de punts fixos de α no és buit, tenim doncs

$$X^{S^1} \neq \emptyset.$$

Provem ara una afirmació que ens portarà més feina:

Afirmació 1. *Podem construir una funció $g : X \longrightarrow T$ i una acció β de S^1 a T de manera que f sigui homòtopa a g i g sigui equivariant, és a dir, que satisfaci*

$$g(\alpha(\theta, x)) = \beta(\theta, g(x))$$

per tot $x \in X$, $\theta \in S^1$.

Per a demostrar l'afirmació 1 usarem una construcció que és un anàleg diferenciable de l'aplicació d'Albanese de la geometria algebraica.

Tot i que la nostra funció f pren valors a $T = \overbrace{S^1 \times ... \times S^1}^{n}$, la pensarem primer com una aplicació a S^1, composant amb la projecció a cada factor de T.

Observem en primer lloc que podem identificar S^1 amb $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, amb l'aplicació bijectiva $[t] \mapsto e^{2\pi i t}$ per tot $[t] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, i l'estructura diferenciable de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'agafem de manera que correspongui amb la de S^1. Suposem ara que tenim una corba diferenciable

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

volem definir $\gamma'(0) \in \mathbb{R}$. Per fer-ho considerem primer un aixecament $\widetilde{\gamma}$ de γ, és a dir una funció diferenciable $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ de manera que el diagrama següent commuta:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ (-\varepsilon, \varepsilon) \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

És clar que $\widetilde{\gamma}$ existeix: si $\gamma(0) = [t] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, podem triar $\widetilde{\gamma}(0) = t$ i estendre ($\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ és un difeomorfisme localment, per tant existeix π^{-1} per entorns petits). $\widetilde{\gamma}$ no és única (per exemple, podem triar un altre representant de $[t] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Però si $\widetilde{\gamma}_1$ i $\widetilde{\gamma}_2$ són dos aixecaments de γ, tenim que

$$\widetilde{\gamma}_1(t) - \widetilde{\gamma}_2(t) \in \mathbb{Z}$$

per tot $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, i com que aquesta diferència és contínua (suma de funcions contínues), necessàriament

$$\widetilde{\gamma}_1(t) - \widetilde{\gamma}_2(t) = k \in \mathbb{Z}$$

per tot t. Per tant les derivades són iguals i en particular:

$$\widetilde{\gamma}_1'(0) = \widetilde{\gamma}_2'(0)$$

de manera que podem definir $\gamma'(0) = \widetilde{\gamma}'(0) \in \mathbb{R}$ ja que sabem que no depèn de l'aixecament que triem.

Sigui ara $x \in X$, i $v \in T_x X$. Podem agafar una corba $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ i $\gamma'(0) = v$. Evidentment aquesta corba no és única, però volem veure que $(f \circ \gamma)'(0)$ només depèn de v (i no de la γ). Tenim doncs

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ (-\varepsilon, \varepsilon) \arrow[urr, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & X \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

on ara $\widetilde{\gamma}$ és un aixecament de $(f \circ \gamma)$. Volem veure que $\widetilde{\gamma}'(0)$ depèn només de f i v (i no de γ). Com que π és un difeomorfisme per entorns petits, tenim

$$d(f \circ \gamma)_0 = d(\pi \circ \widetilde{\gamma})_0$$

aleshores

$$df_x \circ d\gamma_0 = d\pi_{\widetilde{\gamma}(0)} \circ d\widetilde{\gamma}_0.$$

Com que $d\pi$ és isomorfisme

$$d\pi^{-1}_{f(x)} \circ df_x \circ d\gamma_0 = d\widetilde{\gamma}_0$$

i llavors

$$(f \circ \gamma)'(0) = \widetilde{\gamma}'(0) = (d\pi^{-1}_{f(x)} \circ df_x \circ d\gamma_0)(1) = (d\pi^{-1}_{f(x)} \circ df_x)(v)$$

per tant $v \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$ no depèn de γ i és una aplicació lineal. Escriurem

$$\sigma_f(v) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Recordem que teníem una acció α de S^1 sobre M. Aleshores per tot $\theta \in S^1$ tenim un difeomorfisme

$$\begin{aligned} \alpha_\theta : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \theta x \end{aligned}$$

i el seu diferencial

$$d\alpha_\theta : T_x X \longrightarrow T_{\alpha_\theta(x)} X.$$

Definim doncs una funció $\tau_f : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$ com:

$$\tau_f(v) = \int_{\theta \in S^1} \sigma_f(d\alpha_\theta(v)) d\theta$$

(Integral respecte la mesura de Lebesgue). La idea és que estem fent la mitjana de les imatges per σ_f del recorregut de v pels tangents dels punts de l'òrbita de x. És immediat que $\tau_f(v) = \tau_f(d\alpha_\theta(v))$ per tot $\theta \in S^1$ (la integral recorrerà els mateixos valors).

Procedim ja a definir g. Fixem primer un $x_0 \in X$ qualsevol. Sigui $x \in X$. Com que X és connex, podem agafar $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ diferenciable tal que $\gamma(0) = x_0$ i $\gamma(1) = x$. Aleshores definim $g : X \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com

$$g(x) = \left[\int_0^1 \tau_f(\gamma'(t)) dt \right] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

volem veure que $g(x)$ no depèn del camí γ que triem (així g estarà ben definida).

Estudiem la integral. Desenvolupant i aplicant Fubini:

$$\int_0^1 \tau_f(\gamma'(t)) dt = \int_0^1 \int_{\theta \in S^1} \sigma_f((\alpha_\theta \circ \gamma)'(t)) d\theta dt = \int_{\theta \in S^1} \int_0^1 \sigma_f((\alpha_\theta \circ \gamma)'(t)) dt d\theta.$$

Fixem-nos en l'integrand de dins. Volem veure que

$$\int_0^1 \sigma_f((\alpha_\theta \circ \gamma)'(t)) dt$$

només depèn de l'inici i el final del camí γ. Com que α_θ és un difeomorfisme, podem simplificar comprovant que

$$\int_0^1 \sigma_f(\gamma'(t))dt$$

només depèn de $\gamma(0)$ i $\gamma(1)$.
Per calcular $\sigma_f(\gamma'(t))$, per cada t la corba $\gamma(t+\cdot) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow X$ satisfà

1. $\gamma(t+0) = \gamma(t)$
2. $\gamma'(t+0) = \gamma'(t)$

i per tant podem escriure $\sigma_f(\gamma'(t)) = (f \circ \gamma)'(0)$. Ara per calcular $(f \circ \gamma)'(0)$, podem trobar $\widetilde{\gamma}$ tal que

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "f \circ \gamma"'] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

com anteriorment, fixant una imatge i estenent. Aleshores

$$\int_0^1 \sigma_f(\gamma'(t))dt = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)dt = \int_0^1 \widetilde{\gamma}'(t)dt = \widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0).$$

Com que $\gamma(0)$ i $\gamma(1)$ estan fixats, també ho estan $[\widetilde{\gamma}(0)]$ i $[\widetilde{\gamma}(1)]$, i per tant

$$[\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)]$$

només depèn de x. Però si triem aixecaments diferents, per alguna constant entera k:

$$\widetilde{\gamma}_1(1) - \widetilde{\gamma}_1(0) = \widetilde{\gamma}_2(1) - \widetilde{\gamma}_2(0) + k.$$

Si ens tornem a mirar $g(x)$:

$$g(x) = \left[\int_{\theta \in S^1} \int_0^1 \sigma_f((\alpha_\theta \circ \gamma)'(t))dtd\theta \right]$$

podem substituir

$$g(x) = \left[\int_{\theta \in S^1} \int_0^1 (\widetilde{\alpha_\theta \circ f} \circ \gamma(1) - \widetilde{\alpha_\theta \circ f} \circ \gamma(0) + k)dtd\theta \right]$$

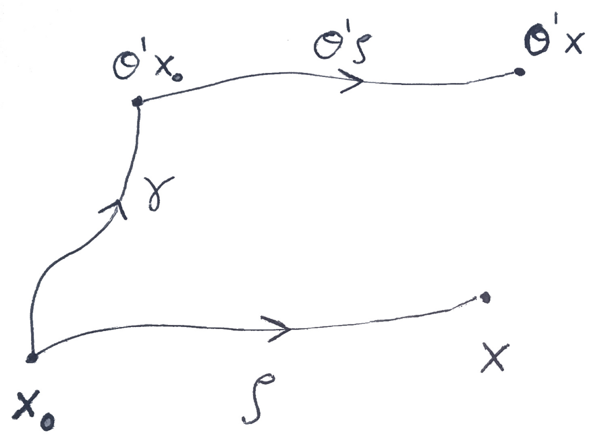
on la k no varia perquè a l'aplicar α_θ al principi i al final de la corba l'estem variant de forma contínua, però com que només pot pendre valors a $\mathbb{Z}$ per força ha de ser constant. Observem que la k surt fora de la integral i com que estem a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no afecta. Per tant hem comprovat que el valor de $g(x)$ tampoc depèn de l'aixecament que triem. Hem vist que $g(x)$ només depèn de x, com volíem.

Ara volem veure que podem trobar una acció β de S^1 a $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de manera que g sigui equivariant. Comparem la imatge d'un punt $x \in X$ amb la d'un punt de la seva òrbita $\theta' x$, amb $\theta' \in S^1$. Considerem dos camins ζ, γ satisfent:

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= x_0 & \zeta(1) &= x \\ \gamma(0) &= x_0 & \gamma(1) &= \theta' x_0. \end{aligned}$$

Observem que llavors tenim una altra corba $\theta'\zeta$ que satisfà:

$$(\alpha_{\theta'} \circ \zeta)(0) = \theta' x_0 \qquad\qquad (\alpha_{\theta'} \circ \zeta)(1) = \theta' x$$



Denotem per $\gamma_1 * \gamma_2$ la concatenació de dues corbes. Aleshores $\gamma * (\alpha_{\theta'} \circ \zeta)$ és una corba que va de x_0 a $\theta' x$. Per tant:

$$\begin{aligned} g(\theta' x) &= \left[\int_{\theta \in S^1} \int_0^1 \sigma_f\big((\alpha_\theta \circ (\gamma * (\alpha_{\theta'} \circ \zeta)))'(t)\big) dt d\theta\right] \\ &= \left[\int_{\theta \in S^1} \int_0^1 \sigma_f\big((\alpha_\theta \circ \gamma)'(t)\big) dt d\theta\right] + \left[\int_{\theta \in S^1} \int_0^1 \sigma_f\big((\alpha_\theta \circ (\alpha_{\theta'} \circ \zeta))'(t)\big) dt d\theta\right]. \end{aligned}$$

Observem que la primera part no depèn de x, només de θ' (i de x_0), i la segona és $g(x)$, ja que $\alpha_\theta \circ \alpha_{\theta'}$ és el mateix que posar α_θ si θ recorre tot S^1. Per tant podem escriure:

$$g(\theta' x) = g(x) + c_{\theta'}$$

Definim doncs l'acció $\beta : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com $\beta(\theta, y) = y + c_\theta$ (podem trobar c_θ fent $g(\theta x) - g(x)$ per qualsevol $x \in X$). Efectivament β és acció:

$$\beta(\theta_1\theta_2, y) = (g(\theta_1\theta_2 x) - g(x)) + y = (g(\theta_1\theta_2 x) - g(\theta_2 x) + (g\theta_2 x) - g(x)) + y = \\ c_{\theta_1} + c_{\theta_2} + y = \beta(\theta_1, \beta(\theta_2, y))$$

i per com l'hem trobada g és equivariant respecte α i β, com volíem veure.

Ens falta veure que f i g són homòtopes. Definim una funció $\overline{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com

$$\overline{f}(x) = f(x) - f(x_0)$$

clarament f i $\overline{f}$ són homòtopes, ja que mirat a S^1 una és igual a l'altra composant amb una rotació (i l'homotopia consistiria en anar reduint l'angle de rotació fins a zero). Observem també que si $x \in X$ i γ és una corba de x_0 a x, aleshores operant com abans

$$\left[\int_0^1 \sigma_f(\gamma'(t)) dt\right] = f(x) - f(x_0) = \overline{f}(x) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

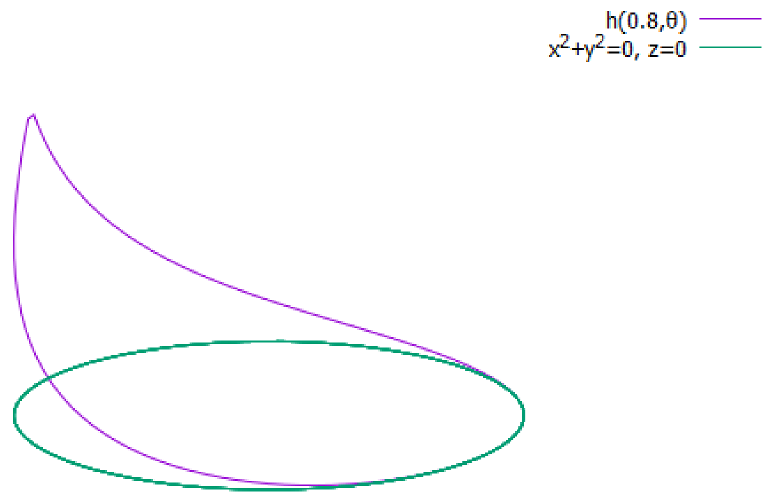
Per tant la idea pot ser definir una funció $h(s,\theta) : [0,1] \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ de manera que

$$g_s(x) = \left[\int_{\theta \in S^1} h(s,\theta) \int_0^1 \sigma_f((\alpha_\theta \circ \gamma)'(t)) dt d\theta \right]$$

sigui una homotopia entre g i $\overline{f}$. Caldrà que $h(0,\theta) = 1$ per tot $\theta \in S^1$ de manera que $g_0 = g$, i per altra banda quan s s'acosti a 1 haurà de donar més pes als valors propers a $1 \in S^1$. Així doncs, pensant θ com a angle i agafant-lo a $[-\pi, +\pi)$, definim:

$$h(s,\theta) = \frac{1}{1-s} \left(\frac{\pi - |\theta|}{\pi} \right)^{\frac{s}{1-s}}$$

per tot $s \in [0,1)$.



Observem que h satisfà les condicions que demanàvem, ja que

$$\lim_{s \to 1} h(s,0) = +\infty \qquad \text{si } \theta = 0$$

$$\lim_{s \to 1} h(s,\theta) = 0 \qquad \text{uniformement per } \theta \in K \text{ compacte tal que } 0 \notin K$$

i a més,

$$\int_{\theta \in S^1} h(s,\theta) = 2\pi$$

per tot $s \in [0,1)$. Definim per tant:

$$g_s(x) = \left[\int_{\theta \in S^1} h(s,\theta) \int_0^1 \sigma_f((\alpha_\theta \circ \gamma)'(t)) dt d\theta \right] \qquad \text{si } s \in [0,1)$$

$$g_1(x) = \overline{f}(x)$$

Comprovem que això és efectivament una homotopia entre g i $\overline{f}$. Per veure que $g(x)$ i $\overline{}(x)$ són propers mirem ara $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com S^1 dins de $\mathbb{C}$ així tenim ben definida la distància entre dos punts. Ara θ són complexos i no angles, de manera que el 0 d'abans és l'1 d'ara (tenim $\lim_{s\to 1} h(s,1) = +\infty$, etc.). Definim

$$r(x,\theta) = \int_0^1 \sigma_f((\alpha_\theta \circ \gamma)'(t))dt.$$

Aleshores tenim

$$g_s(x) = \left[\int_{\theta\in S^1} h(s,\theta)r(x,\theta)d\theta\right]$$

i també

$$[r(x,0)] = \overline{f}(x).$$

Fixem un $x \in X$. Volem veure que per tot $\varepsilon > 0$ existeix $s_0 < 1$ tal que

$$s \geq s_0 \text{ implica } \|g_s(x) - \overline{f}(x)\| < \varepsilon.$$

Recordem que $\|\cdot\|$ és la distància a S^1. La funció $r(x,\theta)$ és uniformement contínua respecte θ (contínua en un compacte) si triem el mateixa corba fins a x, sinó potser hem de treure un enter. Per tant existeix $\eta > 0$ tal que

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \eta \text{ implica } |r(x,\theta_1) - r(x,\theta_2) - k| < \varepsilon'/6\pi.$$

Ara desenvolupem $g_s(x)$:

$$\begin{aligned} g_s(x) &= \left[\int_{\theta\in S^1} h(s,\theta)r(x,\theta)d\theta\right] \\ &= \left[\int_{\|1-\theta\|\leq\eta} h(s,\theta)r(x,\theta)d\theta\right] + \left[\int_{\|1-\theta\|>\eta} h(s,\theta)r(x,\theta)d\theta\right]. \end{aligned}$$

Al segon sumand $h(s,\theta)$ tendeix a zero uniformement quan $s \to 0$, i després de triar una corba d'aixecament $r(x,\theta)$ té màxim, per tant podem triar s_1 tal que per $s > s_1$, la distància del punt d'aquesta integral (mirat a S^1 després de passar per $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) amb el punt $1 \in S^1$ sigui menor que $\varepsilon/3$.
Desenvolupem el primer sumand:

$$\begin{aligned} &= \left[\int_{\|1-\theta\|\leq\eta} h(s,\theta)r(x,\theta)d\theta\right] \\ &= \left[\int_{\|1-\theta\|\leq\eta} h(s,\theta)r(x,1)d\theta\right] + \left[\int_{\|1-\theta\|\leq\eta} h(s,\theta)(r(x,\theta) - r(x,1))d\theta\right] \end{aligned}$$

Un cop més, podem acotar el segon sumand (acotar la distància a S^1). Com que la integral total de $h(s,\theta)$ és 2π i $r(x,\theta) - r(x,1)$ ho podem posar com una constant entera (que sortirà fora i no intervindrà) més quelcom de mòdul més petit en valor absolut que $\varepsilon'/6\pi$, obtenim que podem acotar la integral per $2\pi\cdot\varepsilon'/6\pi = \varepsilon'/3$. Triem aleshores el ε' d'abans suficientment petit com perquè $[\varepsilon'/3]$ mirat a S^1 estigui a distància $\varepsilon/3$ de $1 \in S^1$.

Només queda veure que el primer sumand

$$\left[\int_{\|1-\theta\|\leq\eta} h(s,\theta) r(x,1) d\theta\right] = \left[r(x,1) \int_{\|1-\theta\|\leq\eta} h(s,\theta) d\theta\right]$$

és suficientment proper a $\overline{f}(x)$. Podem fer $|2\pi - \int_{\|1-\theta\|\leq\eta} h(s,\theta)d\theta|$ arbitràriament petit fent $s \to 1$, ja que la integral de $h(s,\theta)$ al complementari tendeix a zero i la total és sempre 2π. I a més $[r(x,1)] = \overline{f}(x)$. Per tant podem triar $s_2 < 1$ de manera que $s > s_2$ impliqui que la distància entre $[\int_{\|1-\theta\|\leq\eta} h(s,\theta) r(x,1) d\theta]$ i $\overline{f}(x)$ sigui menor que $\varepsilon/3$.

Ajuntant el que hem fet fins ara i fent $s_0 = \max(s_1, s_2)$, obtenim que per tot $s > s_0$:

$$\|g_s(x) - \overline{f}(x)\| < \varepsilon.$$

Per tant efectivament g_s és una homotopia entre g i $\overline{f}$.

Només ens queda tornar a passar al cas de funcions a T per acabar la demostració de l'afirmació 1. Recordem que tenim una funció $f : X \longrightarrow T$ i una acció $\alpha : S^1 \times X \longrightarrow T$. Podem obtenir funcions i accions $f_1, ..., f_n : X \longrightarrow S^1$, $\alpha_1, ..., \alpha_n : S^1 \times X \longrightarrow S^1$ mirant-nos les anteriors en cada coordenada. Apliquem el que hem vist, i obtenim funcions $g_1, ..., g_n$ i accions $\beta_1, ..., \beta_n$. I ara amb aquestes podem obtenir $g = (g_1, ..., g_n)$ i $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$. És immediat que g és homòtopa a f i que és S^1-invariant. Això acaba la prova de l'afirmació 1.

Ara utilitzem la informació que tenim sobre α per estudiar β, més exactament tenim el següent:

Afirmació 2. *L'acció β és necessàriament la trivial.*

Havíem vist que X^{S^1} no era buit. Sigui doncs $z \in X$ un punt fix per α. Aleshores:

$$\beta(\theta, g(z)) = g(\alpha(\theta, z)) = g(z)$$

per tot $\theta \in S^1$. Per tant $g(z)$ és un punt fix de β. Tenim per tant un punt fix $z_k \in S^1$ per cada acció β_k. Però si una acció de S^1 en S^1 té un punt fix, aleshores és la trivial. Efectivament, si β_k no és la trivial, aleshores en algun punt z' de S^1 el camp vectorial definit com a la secció 2.2 serà no nul. Però la corba del flux d'aquest camp ha de tornar a z', des de la banda oposada de la que ha sortit de z'. Per tant ha de fer la volta a S^1, però això no pot ser perquè hi ha un punt fix. Hem vist doncs que totes les β_k han de ser les trivials, i per tant també l'acció β.

Combinant les dues afirmacions anteriors, obtenim

$$g(\alpha(\theta, x)) = \beta(\theta, g(x)) = g(x)$$

per tot $x \in X$, $\theta \in S^1$. Per tant, $g^{-1}(y)$ és un subconjunt S^1-invariant de X. De fet, és unió d'òrbites. Si a més y és un valor regular, aleshores $g^{-1}(y)$ és una subvarietat diferenciable de X de dimensió zero, és a dir, un conjunt de punts aïllats. Com que X és compacta, $g^{-1}(y)$ és finit, i com que són punts aïllats, cadascun d'ells és S^1-invariant (si un anés a un altre a través de α, hi hauria d'haver una corba entre ells amb tots els punts formant part de l'òrbita, però són aïllats). En definitiva, hem obtingut:

$$g^{-1}(y) \subset X^{S^1}$$

per tot valor regular $y \in T$.

Per altra banda, com que f i g són homòtopes i $\deg f = 1$, tenim $\deg g = 1$. Aleshores si $y \in T$ és un valor regular, necessàriament $g^{-1}(y)$ és no buit, ja que sinó tindríem $\deg g = 0$, que és una contradicció. Per tant $g(X^{S^1})$ conté tots els valors regulars de g, que són densos a T pel corol·lari 2.22. Recordem que, com hem vist a la secció 2.3, X^{S^1} és una subvarietat de X. Escrivim

$$\overline{g} : X^{S^1} \longrightarrow T$$

on $\overline{g}$ és l'aplicació g restringida a X^{S^1}. $\overline{g}$ és una aplicació diferenciable entre varietats diferenciables, i la imatge conté els valors regulars de $g : X \longrightarrow T$, per tant té mesura total a T. Observem que cal que $\dim X^{S^1} = \dim T$. Si no fos així, tot punt de la imatge de $\overline{g}$ seria un valor crític, i llavors $\overline{g}(X^{S^1})$ tindria mesura zero a T, que és una contradicció. Així doncs, tenim

$$\dim X^{S^1} = n = \dim X,$$

i com que X^{S^1} és una subvarietat de X, obtenim que $X^{S^1} = X$, com volíem veure. Això vol dir que l'acció α és la trivial.

Amb això acabem la demostració del teorema. $\square$

Referències

[1] Bredon, Glen E. *Introduction to compact transformation groups.* Londres: Academic Press, 1972.

[2] Brickell, F. i Clark. *Differentiable manifolds.* Londres: Van Nostrand Reinhold, 1970.

[3] Do Carmo, Manfredo Perdigao. *Riemannian Geometry.* Boston: Birkhäuser, cop. 1992.

[4] Kawakubo, Katsuo. *The theory of transformation groups.* Oxford: Oxford University Press, 1991.

[5] Kervaire, Michel A.; Milnor, John W. *Groups of Homotopy Spheres: I.* Annals of Mathematics. Second Series, Vol. 77, No. 3 (May, 1963), pp. 504-537. Princeton, N.J.: Princeton University.

[6] Milnor, John W. *Topology from the differentiable viewpoint.* Edició revisada. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1997.

[7] Milnor, John W. *Morse theory : based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells.* Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1963.

[8] Nachbin, Leopoldo. *The Haar integral.* Princeton: Van Nostrand, cop. 1965.

[9] Palais, Richard S. *Extending diffeomorphisms.* Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 11, No. 2 (Apr., 1960), pp. 274-277. American Mathematical Society.

[10] Palais, Richard S. *Natural Operations on Differential Forms.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 92, No. 1 (Jul., 1959), pp. 125-141. American Mathematical Society.

[11] Soyomayor, Jorge. *Liçoes de equaçoes diferenciais ordinárias.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNP, cop. 1979.

[12] Warner, Frank W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Graduate text in mathematics; 94. New York: Springer, cop. 1983.