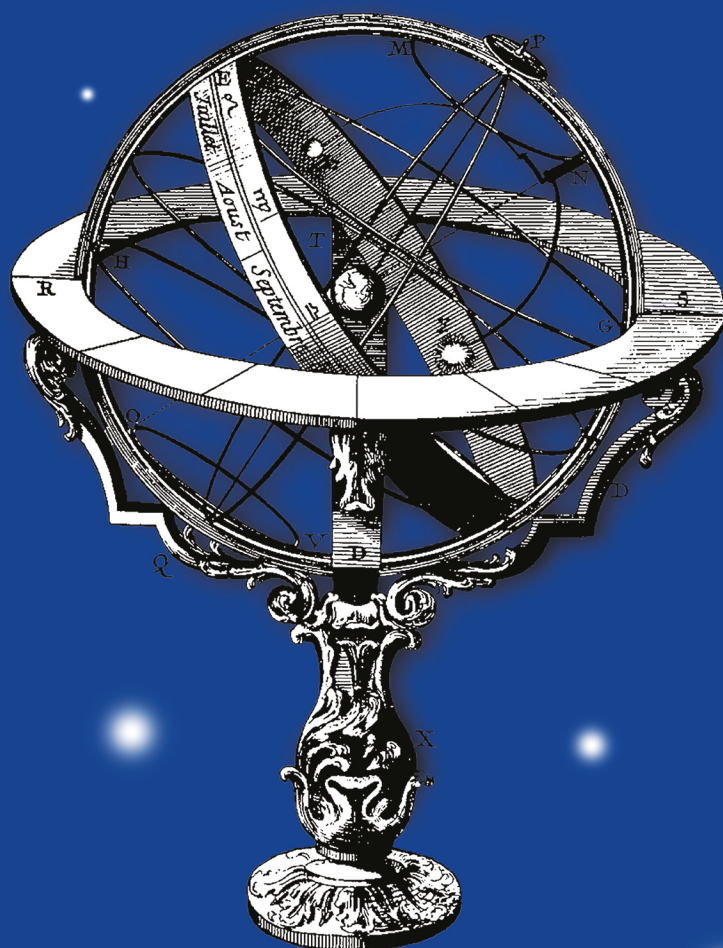


Astronomía esférica y mecánica celeste

Juan José de Orús Navarro
M.^a Asunción Català Poch
Jorge Núñez de Murga



ASTRONOMÍA ESFÉRICA Y MECÁNICA CELESTE

ASTRONOMÍA ESFÉRICA Y MECÁNICA CELESTE

Juan José de Orús Navarro
M.^a Asunción Català Poch
Jorge Núñez de Murga

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



© Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2007
Adolf Florensa, s/n; 08028 Barcelona; tel. 934 035 530; fax 934 035 531;
comercial.edicions@ub.edu; www.publicacions.ub.edu

ISBN: 978-84-1050-268-0

Este documento está sujeto a la licencia de Reconocimiento-
NoComercial-SinObraDerivada de Creative Commons, cuyo texto está
disponible en: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.



ÍNDICE

Prólogo

CAPÍTULO 1. LA ESFERA CELESTE

1.1	Movimiento diurno de la esfera celeste	13
1.2	Coordenadas horizontales y horarias	15
1.2.1	<i>Coordenadas horizontales</i>	15
1.2.2	<i>Coordenadas horarias</i>	16
1.2.3	<i>Paso de coordenadas horizontales a horarias y viceversa</i>	18
1.3	Movimiento ánuo del Sol.....	19
1.3.1	<i>Generalidades</i>	19
1.3.2	<i>Eclíptica media y verdadera</i>	21
1.4	Coordenadas ecuatoriales y eclípticas	23
1.4.1	<i>Coordenadas ecuatoriales</i>	23
1.4.2	<i>Coordenadas eclípticas</i>	24
1.4.3	<i>Paso de coordenadas ecuatoriales a eclípticas y viceversa</i>	25
1.4.4	<i>Variación de las coordenadas del Sol en su movimiento ánuo</i>	26
1.5	Tiempos sidéreos medio y aparente.....	27
1.6	Movimiento diurno del Sol.....	29
1.6.1	<i>Generalidades</i>	29
1.6.2	<i>Duración del día según la época del año</i>	29
1.6.3	<i>Refracción astronómica</i>	31
1.6.4	<i>Crepúsculos</i>	32
1.6.5	<i>Semidiámetro aparente</i>	32
1.6.6	<i>Movimiento diurno desde distintas latitudes</i>	33
1.7	Tiempos solares verdadero y medio	36
1.7.1	<i>Tiempo civil y longitud geográfica</i>	38
1.7.2	<i>Tiempo universal</i>	39
1.7.3	<i>Ecuación de tiempo</i>	39
1.8	Problemas del movimiento diurno	41
1.8.1	<i>Paso por un vertical de acimut a</i>	41
1.8.2	<i>Paso por un almucantar de altura h</i>	46
1.9	Refracción astronómica	49
1.9.1	<i>Primera aproximación</i>	49
1.9.2	<i>Fórmula de Laplace</i>	52
1.9.3	<i>Refracción en las proximidades del horizonte</i>	52
1.9.4	<i>Corrección de refracción en coordenadas horizontales y horarias</i>	53

CAPÍTULO 2. LA TIERRA

2.1	Elipsoide terrestre	55
2.1.1	<i>Posición sobre la superficie de la Tierra</i>	58
2.1.2	<i>Corrección de coordenadas por altitud</i>	62
2.2	Paralaje diurna	63
2.2.1	<i>Coordenadas horizontales</i>	63
2.2.2	<i>Coordenadas horarias</i>	65
2.3	Potencial terrestre	69

2.3.1	<i>Expresión del campo gravitacional terrestre bajo la forma de un desarrollo en polinomios de Legendre</i>	69
2.3.2	<i>Simplificaciones</i>	72
2.3.3	<i>Aceleración j de la gravitación</i>	74
2.4	Potencial de la gravedad	75
2.4.1	<i>Corrección por altitud</i>	81
2.5	Rotación libre	81
2.5.1	<i>Movimiento respecto al sistema inercial</i>	82
2.5.2	<i>Movimiento respecto al sistema no inercial</i>	82
2.5.3	<i>Variación de la longitud y de la latitud instantáneas de un lugar</i>	86
2.6	Rotación forzada	89
2.6.1	<i>Ángulos de Euler</i>	94
2.7	Precesión y Nutación	95
2.7.1	<i>Movimientos de los planos fundamentales a los que se refieren las coordenadas de los astros</i>	95
2.7.2	<i>Precesión y nutación solares</i>	97
2.7.3	<i>Precesión y nutación lunares</i>	99
2.7.4	<i>Precesión y nutación luni-solares</i>	101
2.7.5	<i>Precesión y nutación planetarias</i>	101
2.7.6	<i>Precesión y nutación generales</i>	101
2.7.7	<i>Correcciones</i>	101
2.8	Posiciones medias y verdaderas	102
2.8.1	<i>Variación de los polos celestes</i>	103
2.8.2	<i>Corrección de precesión y nutación de las coordenadas ecuatoriales</i>	106
2.8.3	<i>Ecuación de equinoccios</i>	111
2.9	Variaciones de la velocidad de rotación de la Tierra	112
2.9.1	<i>Distintos tipos de variaciones</i>	112

CAPÍTULO 3. PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

3.1	Conservación del momento lineal	115
3.2	Ecuación del movimiento relativo	117
3.3	Integral de las áreas. Segunda ley de Kepler	118
3.4	Ecuación de la órbita relativa. Primera y tercera leyes de Kepler	119
3.4.1	<i>Forma de Newton de la tercera ley de Kepler</i>	122
3.4.2	<i>Constantes de integración</i>	123
3.4.3	<i>Hodógrafa del movimiento</i>	124
3.5	Integral de la energía	125
3.5.1	<i>Velocidades cósmicas. Satélites geoestacionarios</i>	127
3.6	Movimiento elíptico	129
3.6.1	<i>Ecuación de Kepler</i>	131
3.6.2	<i>Métodos de resolución de la ecuación de Kepler</i>	132
3.7	Desarrollos en serie	134
3.7.1	<i>Desarrollo en serie de la anomalía excéntrica</i>	134
3.7.2	<i>Desarrollo en serie del radio vector</i>	135
3.7.3	<i>Desarrollo en serie de la anomalía verdadera</i>	135
3.7.4	<i>Desarrollo en serie de las coordenadas reducidas</i>	136
3.8	Movimiento hiperbólico	137
3.9	Movimiento parabólico	139
3.10	Movimiento casi-parabólico	142
3.11	Elementos de una órbita	144
3.11.1	<i>Ángulos de Euler</i>	144

3.11.2 Los restantes elementos	145
3.11.3 Constantes vectoriales $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$	146
3.11.4 Determinación de los elementos orbitales a partir de r y v	148
3.12 Cálculo de efemérides.....	149

CAPÍTULO 4. TRASLACIÓN DE LA TIERRA

4.1 Órbita aparente del Sol	153
4.1.1 Elementos de la órbita aparente.....	154
4.1.2 Movimiento geocéntrico del Sol	156
4.2 Aberración de la luz.....	157
4.2.1 Aberración ánuia	159
4.2.2 Corrección de aberración ánuia a las coordenadas ecuatoriales.....	164
4.2.3 Aberración diurna	165
4.3 Paralaje ánuia.....	166
4.3.1 Corrección de paralaje ánuia a las coordenadas ecuatoriales.....	170
4.3.2 Efecto combinado de la aberración y la paralaje ánuas.....	170
4.4 Movimiento propio de las estrellas.....	171
4.5 Posiciones aparentes.....	173
4.6 Años y Estaciones.....	174
4.6.1 Calendarios juliano y gregoriano	175
4.6.2 Las fechas en Astronomía	176
4.6.3 Estaciones	177
4.7 Ecuación del centro y reducción al ecuador	179
4.7.1 Ecuación del centro	179
4.7.2 Reducción al ecuador	180
4.8 Ecuación de tiempo.....	182
4.9 Sol medio	184
4.9.1 Relaciones de conversión entre los tiempos sidéreo y medio.....	185
4.9.2 Distintas clases de tiempo. Resumen	186
4.10 Tiempo Universal y Tiempo de Efemérides.....	188
4.10.1 Tiempo atómico internacional	190
4.10.2 Tiempo dinámico terrestre. Tiempo dinámico baricéntrico.	190
Relación entre las distintas escalas de tiempo.....	193

CAPÍTULO 5. LOS PLANETAS

5.1 El Sistema Solar	195
5.2 Movimiento heliocéntrico	196
5.2.1 Evolución de los elementos orbitales	200
5.2.2 Elementos ecuatoriales	201
5.3 Movimiento geocéntrico de los planetas	201
5.3.1 Introducción.....	201
5.3.2 Configuraciones geocéntricas	202
5.3.3 Movimiento geocéntrico circular.....	204
5.4 Efemérides para observaciones físicas	210
5.4.1 Planetas	210
5.4.2 Sol	212
5.4.3 Aspecto geocéntrico de la iluminación de un planeta por el Sol.....	214
5.5 Brillos y magnitudes.....	217
Tabla I	220

Tabla II	221
Tabla III	227
Tabla IV	228
Tabla V	229

CAPÍTULO 6. DETERMINACIÓN DE ÓRBITAS

6.1	Introducción	232
6.2	Método de Laplace	233
	6.2.1 Corrección de aberración	237
	6.2.2 Corrección de los elementos. Método de Leuschner	238
6.3	Método de Gauss	241
	6.3.1 Determinación de las áreas triangulares	241
	6.3.2 Fórmulas aproximadas de Encke	245
	6.3.3 Cálculo de la p_i el y de las posiciones heliocéntricas	247
	6.3.4 Corrección de aberración y de los parámetros c_1/c_2 , c_3/c_2	248
	6.3.5 Cálculo de los elementos de una órbita por dos posiciones heliocéntricas	249
	6.3.6 Resumen de fórmulas y proceso de cálculo	256
6.4	Método de Olbers	257
	6.4.1 Teorema de Lambert para el movimiento elíptico	257
	6.4.2 Fórmula de Euler	260
	6.4.3 Movimiento de cometas	260
	6.4.4 Cálculo de los elementos orbitales	263

CAPÍTULO 7. PROBLEMA DE LOS N-CUERPOS

7.1	Ecuaciones del movimiento	265
7.2	La diez integrales clásicas	267
7.3	Teorema del virial	269
7.4	Coordenadas relativas	270
	7.4.1 Aplicación al Sistema Solar	272
7.5	Problema de los tres cuerpos	274
	7.5.1 Caso en que $r_{12} \ll r_{13}$ y $r_{12} \ll r_{23}$	275
	7.5.2 El problema restringido circular	277
	7.5.3 Criterio de Tisserand	281
	7.5.4 Superficies de velocidad relativa nula	283
	7.5.5 Puntos dobles de las superficies $V = 0$	288
	7.5.6 La estabilidad de los puntos de Lagrange	292

CAPÍTULO 8. TEORÍA DE PERTURBACIONES

8.1	Movimiento de dos cuerpos perturbado	297
8.2	Ecuaciones de Gauss	300
8.3	Variación de los elementos en un periodo	304
8.4	Perturbaciones debidas al potencial terrestre	305
	8.4.1 Perturbaciones debidas al potencial terrestre en el caso particular de un potencial terrestre central	308
8.5	Perturbaciones debidas a la resistencia de la atmósfera	310
8.6	Perturbaciones debidas a la presión de radiación	319
	8.6.1 Ecuación de sombra	320
	8.6.2 Cálculo de las perturbaciones debidas a $\tilde{f}$	322
8.7	Perturbaciones debidas a la acción de otro astro lejano	325
8.8	Perturbaciones debidas a la acción de varios astros	331

8.8.1 Perturbaciones especiales. Método de Encke	333
8.8.2 Método de variación de las constantes de Lagrange	336
8.8.3 Aplicación al movimiento planetario.....	338
8.8.4 Solución de las ecuaciones planetarias de Lagrange.....	344

CAPÍTULO 9. MOVIMIENTO DE LA LUNA

9.1 Rotación de la Luna. Leyes de Cassini	349
9.1.1 Libraciones físicas	350
9.1.2 Libraciones ópticas.....	360
9.1.3 Libración diurna.....	362
9.2 Fases de la Luna.....	364
9.3 Movimiento orbital de la Luna	368
9.3.1 El sistema Tierra-Luna	369
9.3.2 Desarrollo de la fuerza perturbatriz.....	370
9.3.3 Desarrollo de la función perturbatriz.....	375
9.3.4 Perturbaciones independientes de la excentricidad de la órbita lunar	376
9.3.5 Perturbaciones que dependen de la excentricidad de la órbita lunar.....	385
9.3.6 Desigualdades que dependen de una perturbación ortogonal al plano orbital de la Luna	393
9.3.7 Desigualdades de la latitud celeste de la Luna	398

CAPÍTULO 10. ECLIPSES, OCULTACIONES Y PASOS

10.1 Eclipses de Sol. Predicción para la Tierra en general.....	401
10.1.1 Ecuaciones fundamentales de la teoría de eclipses.....	404
10.1.2 Distancia al eje del cono de sombra.....	408
10.1.3 Radios de los cono de sombra y penumbra	412
10.1.4 Circunstancias de un eclipse para un lugar determinado.....	414
10.1.5 Mapa del eclipse	421
10.2 Eclipses de Luna	423
10.2.1 Posibilidad de los eclipses de Luna.....	424
10.2.2 Cálculo de las circunstancias de un eclipse de Luna	427
10.2.3 Efecto de la atmósfera terrestre	431
10.3 Ocultaciones de estrellas por la Luna	432
10.3.1 Predicción de ocultaciones para un lugar determinado	432
10.3.2 Epocas y ángulos de posición de la inmersión y la emersión para un lugar determinado	434
10.3.3 Reducción de observaciones	437
10.3.4 Curvas límites	442
10.3.5 Ocultaciones rasantes.....	447
10.3.6 Observaciones de ocultaciones rasantes	451
10.3.7 Reducción de observaciones rasantes	453
10.4 Pasos de Mercurio y Venus por delante del Sol	454

Bibliografía	457
--------------------	-----

Índice alfabético	459
-------------------------	-----

PRÓLOGO

Nota sobre la nueva definición de planeta

Cuando este libro estaba ya en fase de impresión se produjo una importante modificación en la definición del concepto de planeta por parte de la Unión Astronómica Internacional (UAI). En la XXVI Asamblea General celebrada en Praga en agosto de 2006 la UAI ha adoptado las siguientes resoluciones:

Los planetas y el resto de los cuerpos a excepción de los satélites dentro del Sistema Solar se definen en tres categorías diferentes de la siguiente manera:

1. Un planeta es un cuerpo celeste que (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) tiene suficiente masa para que su gravedad supere las fuerzas asociadas a un sólido rígido de manera que asuma una forma (casi) esférica en equilibrio hidrostático, y (c) que sea el objeto gravitatoriamente dominante en el entorno de su órbita. Los ocho planetas son: Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

2. Un "planeta enano" es un objeto celeste que (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) tiene suficiente masa para que su gravedad supere las fuerzas asociadas a un sólido rígido de manera que asuma una forma (casi) esférica en equilibrio hidrostático, (c) que no sea el objeto gravitatoriamente dominante en el entorno de su órbita, y (d) que no sea un satélite. Plutón es un planeta enano según la definición anteriormente dada y se reconoce como el prototipo de una nueva categoría de objetos Trans-Neptunianos.

3. Todos los otros objetos orbitando el Sol deberían ser llamados colectivamente como "Pequeños Cuerpos del Sistema Solar". Esta categoría incluye actualmente la mayoría de los asteroides del Sistema Solar, la mayoría de los objetos Trans-Neptunianos (TNOs), cometas y otros cuerpos pequeños.

Aunque la UAI no ha dado la lista de los considerados como planetas enanos (a excepción de Plutón), a esta lista se añadirán, probablemente, Ceres (el mayor asteroide) y Eris (objeto trasneptuniano mayor que Plutón descubierto en 2003) así como otros objetos que se reclasifiquen o se descubran en el futuro.

Aunque las resoluciones citadas afectan ligeramente al contenido del capítulo 5 del presente libro, dado que las definiciones citadas han levantado cierta controversia y podrían modificarse en el futuro, hemos preferido mantener el contenido de dicho capítulo utilizando las definiciones antiguas e incluir en este prólogo dichos cambios.

Presentación

La presente obra está dirigida tanto a estudiantes universitarios que necesiten un texto para sus estudios, básicos o avanzados, de Astronomía como a profesores universitarios o investigadores que necesiten un texto de las presentes características para su docencia o investigación. El libro es el resultado de una dilatada experiencia docente de sus autores en la enseñanza de la Astronomía en la Universidad de Barcelona en un principio en la Facultad de Ciencias (secciones de Matemáticas y Física) y posteriormente en la Facultad de Física. El origen del libro son las asignaturas de Astronomía General y Astronomía Esférica (cada una de carácter

anual) por lo que la mayor parte de su contenido se puede encuadrar en la División I (Astronomía Fundamental) de la UAI.

Con respecto a la faceta de texto docente, el hecho de tratarse de un libro mayoritariamente de Astronomía Fundamental hace que pueda utilizarse como texto para el desarrollo de cursos tanto básicos como avanzados de Astronomía tanto en las licenciaturas de Física como de Matemáticas o de Ingeniería Topográfica y Geodésica. Por otro lado parte de su contenido puede utilizarse como base para alumnos que cursen la especialidad de Astrofísica que sin duda necesitan sólidos conocimientos de Astronomía fundamental. Igualmente, el investigador en Astronomía o Astrofísica encontrará en el presente libro una obra rigurosa de consulta. A lo largo de toda la obra, los autores hemos intentado dar a todas las formulaciones el rigor matemático necesario así como incluir los pasos intermedios necesarios para una fácil comprensión de las mismas por parte del lector.

El presente libro viene a cubrir un hueco en la literatura docente en Español dado que aunque existen magníficos tratados sobre Astronomía Fundamental en Inglés como, por ejemplo, los de Green, Murray, Smart, Woolard and Clemence, etc. e incluso en Español como el Curso de Astronomía de Abad, Docobo y Elipe, ninguno de ellos coincide en su contenido con el presente texto en el que se incluyen numerosos temas no desarrollados en ninguno de los anteriores. El lector encontrará, igualmente, que determinados temas como, por ejemplo, las estrellas dobles, tratadas magníficamente en el libro de Abad, Docobo y Elipe no se han incluido. Ello es debido a que el presente libro no es un tratado exhaustivo sobre Astronomía Fundamental y se ha preferido desarrollar todos aquellos temas que, desde el punto de vista docente, pueden formar un curso básico y otro avanzado de Astronomía.

Con respecto al contenido del libro, el lector encontrará en los cuatro primeros capítulos un curso básico de Astronomía General que incluye la Esfera Celeste (coordenadas, movimientos diurno y ánuo y tiempo), la descripción de la Tierra (elipsoide, paralaje diurna, potencial, rotación, precesión, nutación y posiciones medias y verdaderas), el problema de los dos cuerpos (órbitas, ecuación de Kepler, movimiento elíptico, parabólico e hiperbólico y cálculo de efemérides) y la traslación de la Tierra (órbita de la Tierra, aberración, paralaje ánuo, posiciones aparentes, años y estaciones y escalas de tiempo).

Los capítulos a partir del quinto describen un curso avanzado de Astronomía Esférica con elementos de Mecánica Celeste. Los capítulos incluyen los planetas (descripción, movimientos heliocéntrico y geocéntrico y las efemérides para las observaciones físicas), la determinación de órbitas (Métodos de Laplace, Gauss y Olbers), el problema de los N-cuerpos (integrales clásicas, teorema del virial, el problema de los tres cuerpos y puntos de Lagrange), la teoría de perturbaciones con aplicación tanto a los planetas como a los satélites artificiales (Ecuaciones de Gauss, perturbaciones debidas al potencial, resistencia atmosférica, presión de radiación y acción de otros astros), el movimiento de la Luna (libraciones ópticas y físicas, fases y movimiento orbital) y un capítulo sobre eclipses, ocultaciones y pasos (cálculo de circunstancias y mapas de los eclipses de Sol, cálculo de eclipses de Luna, ocultaciones de estrellas por la Luna y pasos de Mercurio y Venus por delante del Sol).

Finalmente, los autores queremos expresar nuestra gratitud a la Universidad de Barcelona por la edición de la presente obra tanto en su faceta de libro como su acceso informático a través de Internet.

Barcelona, Octubre de 2006

Capítulo 1

LA ESFERA CELESTE

1.1 Movimiento diurno de la esfera celeste

La *esfera celeste* es una esfera imaginaria de radio arbitrario y centro en el observador, sobre la cual se proyectan las estrellas para estudiar sus posiciones relativas.

Movimiento diurno es el movimiento aparente de rotación de la esfera celeste, de levante a poniente, debido al movimiento real de rotación de la Tierra de poniente a levante. De él, por tanto, participan todos los cuerpos celestes.

Eje del mundo es el diámetro alrededor del cual parece girar la esfera celeste. Su localización varía con el tiempo.

Polos celestes son los puntos de intersección del eje del mundo con la esfera celeste. Son, por tanto, los únicos puntos del cielo que no participan del movimiento diurno. De éstos el que vemos desde Barcelona (por hallarse sobre nuestro horizonte) es el *polo norte*, P , y el diametralmente opuesto es el *polo sur*, P' (Fig.1.1).

Vertical de un lugar es el diámetro de la esfera celeste dado por la dirección de la plomada. Su punto de intersección con la esfera celeste situado en el hemisferio visible para el observador se denomina *cenit*. El situado en el hemisferio invisible se denomina *nadir* (Z y Z' en Fig. 1.1).

Horizonte astronómico o verdadero es el plano diametral ortogonal a la vertical. La intersección de dicho plano con la esfera celeste es un círculo máximo denominado también *horizonte*. EL horizonte astronómico divide a la esfera celeste en dos *hemisferios*, situados por encima y por debajo del mismo, que se denominan *visible* e *invisible* respectivamente (Fig. 1.1)

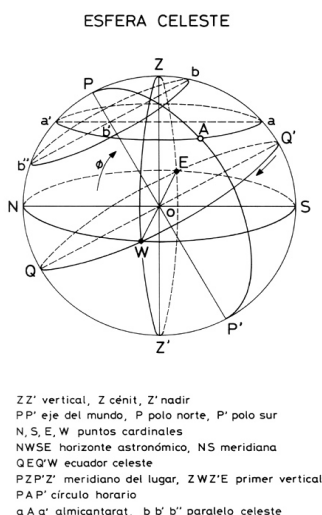


FIG 1.1

Horizonte sensible o aparente es el círculo menor que se obtiene al situarnos a una cierta altitud sobre el nivel del mar y trazar un cono con vértice en el observador y generatrices tangentes a la superficie de la Tierra. El ángulo formado por una generatriz del cono y el horizonte verdadero se denomina *depresión del horizonte*. Si llamamos α a dicho ángulo, R al radio medio de la Tierra y h a la altitud sobre el nivel del mar, se verifica (Fig. 2.1):

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+h} \quad \text{y como} \quad 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$\text{tenemos} \quad 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{R+h} \approx \frac{h}{R}$$

$$\text{de donde: } \alpha \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

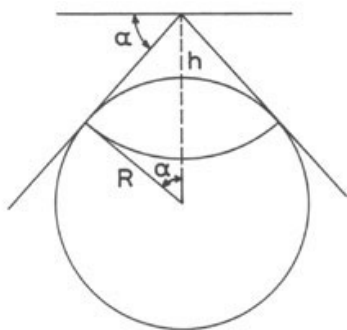


FIG 2.1

Ecuador celeste es el plano diametral ortogonal al eje del mundo o, también, el círculo máximo determinado por la intersección de dicho plano con la esfera celeste (Fig.1.1).

Plano meridiano es el plano diametral determinado por el eje del mundo y la vertical. Su intersección con la esfera celeste es el *meridiano del lugar* (Fig.1.1).

Meridiana es el diámetro determinado por la intersección del plano meridiano con el horizonte verdadero. Sus intersecciones con la esfera celeste constituyen los *puntos cardinales norte y sur* (N y S en la Fig.1.1).

Latitud del lugar es el ángulo formado por la meridiana y el eje del mundo (ϕ en la Fig.1.1). Su complementario ($90^\circ - \phi$) se denomina *colatitud*.

Perpendicular es el diámetro determinado por la intersección del ecuador celeste con el horizonte verdadero. Sus intersecciones con la esfera celeste constituyen los *puntos cardinales este y oeste* (E y W en la Fig.1.1).

Primer vertical es el plano diametral determinado por la vertical y la perpendicular. También se denomina así el círculo máximo determinado por la intersección de dicho plano con la esfera celeste.

Línea del medio cielo es el diámetro determinado por la intersección del ecuador celeste con el plano meridiano. Su punto de intersección con la esfera celeste situado en el hemisferio visible se denomina *medio cielo* (Q en la Fig.1.1)

Verticales son los planos que pasan por la vertical. Los círculos máximos intersección de dichos planos con la esfera celeste reciben también el nombre de verticales. Son verticales tanto el plano meridiano como el primer vertical.

Almucantarates son los círculos menores de la esfera celeste paralelos al horizonte.

Planos horarios son los planos diametrales que pasan por el eje del mundo. Los círculos máximos determinados por su intersección con la esfera celeste se denominan *círculos horarios*.

Paralelos celestes son los círculos menores de la esfera celeste paralelos al ecuador.

1.2 Coordenadas horizontales y horarias

En cualquier sistema de coordenadas la localización de un punto de la esfera celeste viene dada por las componentes de su vector de posición expresadas en cartesianas (coordenadas rectilíneas) o bien en esféricas (coordenadas esféricas). En el primer caso las componentes no son independientes, dado que sólo existen dos grados de libertad al ser el radio de la esfera celeste arbitrario, pero constante una vez fijado.

1.2.1 Coordenadas horizontales

La vertical, la meridiana y la perpendicular de un lugar determinan un triedro trirectángulo con vértice en el observador. Tomaremos este triedro como sistema de referencia de coordenadas cartesianas y elegiremos los ejes de la siguiente forma: x en la dirección de la meridiana, sentido creciente hacia el sur; y en la dirección de la perpendicular, sentido creciente hacia el oeste; z en la dirección de la vertical, sentido creciente hacia el cenit. El triedro estará orientado en sentido retrógrado.

Las componentes del vector de posición de un astro A en dicha base constituirán las *coordenadas rectilíneas horizontales* del mismo $A(x,y,z)$.

Por otra parte, por cada punto de la esfera celeste, distinto del cenit y del nadir, pasan un único vertical y un único almucantarat que nos permiten definir las *coordenadas esféricas horizontales* (Fig. 3.1).

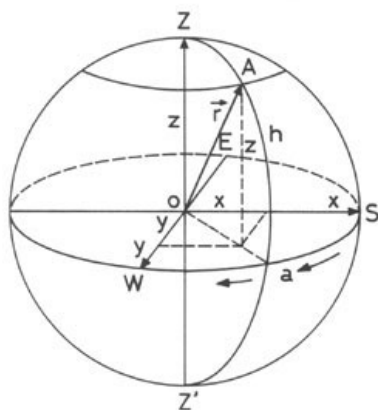


FIG 3.1

Acimut, ángulo diedro que forman el vertical que pasa por el astro con el plano meridiano. Se mide sobre el horizonte, desde el Sur, en sentido retrógrado, de 0° a 360° . Si lo designamos por a tenemos:

$$0^\circ \leq a \leq 360^\circ$$

Altura, distancia esférica del horizonte al astro. Se mide en grados desde el horizonte; es positiva si el astro se halla en el hemisferio visible y negativa si en el invisible. Designándola por h tenemos:

$$-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$$

Distancia r es el módulo del vector de posición $\vec{r}$; es decir, el radio de la esfera celeste.

Distancia cenital es el arco complementario de la altura; esto es, la distancia esférica del cenit al astro. Designándola por z tendremos:

$$z = 90^\circ - h \quad 0^\circ \leq z \leq 180^\circ$$

Las relaciones entre las coordenadas horizontales rectilíneas y esféricas vienen dadas por (Fig.3.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x = r \cos h \cos a \\ y = r \cos h \sin a \\ z = r \sin h \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$a = \arctan(y/x)$$

$$h = \arcsen(z/r)$$

1.2.2 Coordenadas horarias

El eje del mundo, la línea del medio cielo y la perpendicular determinan un triedro trirectángulo con vértice en el observador. Tomaremos este triedro como sistema de referencia de coordenadas cartesianas, eligiendo los ejes de la siguiente forma: x' en la dirección de la línea del medio cielo, en sentido creciente hacia el medio cielo; y' en la dirección de la perpendicular, en sentido creciente hacia el oeste; z' en la dirección del eje del mundo, en sentido creciente hacia el polo celeste norte. El triedro estará orientado en sentido retrógrado.

Las componentes del vector de posición de un astro A en dicha base constituirán las *coordenadas rectilíneas horarias* del mismo $A(x', y', z')$.

Por otra parte, por cada punto de la esfera celeste, distinto de los polos, pasan un único paralelo celeste y un único círculo horario que definen las *coordenadas esféricas horarias* (Fig. 4.1).

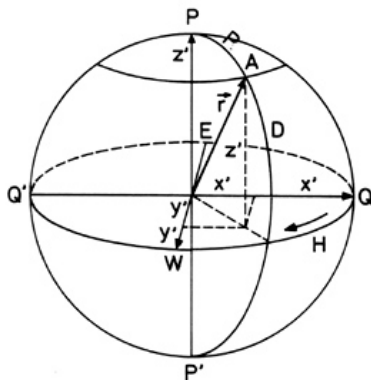


FIG 4.1

Ángulo horario, ángulo diedro que forman el plano horario que pasa por el astro con el plano meridiano del lugar. Se mide sobre el ecuador desde el medio cielo, en sentido retrógrado, de 0h a 24 h.

Si lo designamos por H , tenemos:

$$0^h \leq H \leq 24^h$$

Declinación, distancia esférica del ecuador al astro. Se mide en grados desde el ecuador; es positiva si el astro se halla en el hemisferio celeste norte y negativa si en el sur. Si la designamos por D , tendremos:

$$-90^\circ \leq D \leq 90^\circ$$

Distancia polar es la distancia esférica del polo al astro; es decir, es el complemento de la declinación,

Si la designamos por p , tendremos:

$$0^\circ \leq p \leq 180^\circ$$

Las relaciones entre las coordenadas horarias rectilíneas y esféricas son (Fig. 4.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x' = r \cos D \cos H \\ y' = r \cos D \sen H \\ z' = r \sen D \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$H = \arctan(y' / x')$$

$$D = \arcsen(z' / r)$$

1.2.3 Paso de coordenadas horizontales a horarias y viceversa

Los triedros de referencia de los sistemas de coordenadas horizontales y horarias tienen el eje y común y ambos están orientados en sentido retrógrado, por lo que podrá efectuarse el cambio de un sistema al otro por un simple giro alrededor del eje $y \equiv y'$ (Fig.5.1), de ángulo $90^\circ - \phi$ en valor absoluto (ϕ latitud del lugar).

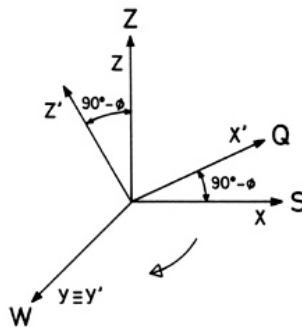


FIG 5.1

Recordemos que las matrices que definen un giro de ángulo i son:

$$\text{alrededor del eje } x: R_1(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \text{sen } i \\ 0 & -\text{sen } i & \cos i \end{pmatrix}$$

$$\text{alrededor del eje } y: R_2(i) = \begin{pmatrix} \cos i & 0 & -\text{sen } i \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } i & 0 & \cos i \end{pmatrix}$$

$$\text{alrededor del eje } z: R_3(i) = \begin{pmatrix} \cos i & \text{sen } i & 0 \\ -\text{sen } i & \cos i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son ortogonales; por tanto, sus inversas coinciden con sus traspuestas:

$$R_h^{-1} = R_h^T \quad (h = 1, 2, 3)$$

y además

$$R_h^T(i) = R_h(-i)$$

Lo que hemos de hacer es pues un cambio de base expresado por donde $R_2(i)$ tiene las propiedades indicadas.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_2(i) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Para pasar de coordenadas horizontales a horarias tomaremos $i = \phi - 90^\circ$, ya que el ángulo está contado en sentido contrario al de la orientación del triedro. Por tanto, siendo:

$$R_2(\phi' - 90^\circ) = R_2^T(90^\circ - \phi) \quad (2.1)$$

y recordando el valor de las componentes de $\vec{r}$ en las bases horizontal y horaria, según (1.1).

$$\begin{bmatrix} r \cos D \cos H \\ r \cos D \sin H \\ r \sin D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos h \cos a \\ r \cos h \sin a \\ r \sin h \end{bmatrix}$$

y operando:

$$\left. \begin{aligned} \cos D \cos H &= \sin \phi \cos h \cos a + \cos \phi \sin h \\ \cos D \sin H &= \cos h \sin a \\ \sin D &= -\cos \phi \cos h \cos a + \sin \phi \sin h \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Para pasar de coordenadas horarias a horizontales, aplicando la matriz inversa de R_2 en (1.1).

$$R_2^{-1}(\phi - 90^\circ) = R_2^T(\phi - 90^\circ) = R_2(90^\circ - \phi)$$

y por tanto:

$$\begin{bmatrix} r \cos h \cos a \\ r \cos h \sin a \\ r \sin h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos D \cos H \\ r \cos D \sin H \\ r \sin D \end{bmatrix}$$

y operando:

$$\left. \begin{aligned} \cos h \cos a &= \sin \phi \cos D \cos H - \cos \phi \sin D \\ \cos h \sin a &= \cos D \sin H \\ \sin h &= \cos \phi \cos D \cos H + \sin \phi \sin D \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Las fórmulas (3.1) y (4.1) de cambio de base también pueden obtenerse por aplicación de la trigonometría esférica al triángulo de posición polo-cenit-astro.

1.3 Movimiento ánuo del Sol

1.3.1 Generalidades

El movimiento aparente del Sol es el resultado de dos movimientos aparentes: el movimiento diurno, retrógrado, debido al movimiento de rotación de la Tierra, y el movimiento ánuo, directo, debido al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol y 365 veces más lento que el anterior. El Sol participa del primero como todo objeto

celeste; el segundo es un movimiento propio (es decir, que no experimentan los demás astros) sobre la esfera celeste.

La trayectoria aparente del Sol sobre la esfera celeste es la *eclíptica*. Dado que el Sol describe, aparentemente, una elipse con la Tierra en uno de sus focos, la eclíptica es un círculo máximo cuyo correspondiente plano diametral se denomina *plano de la eclíptica*.

Oblicuidad de la eclíptica es el ángulo que forman el plano de la eclíptica y el plano del ecuador (Fig.6.1). Se representa por ε y su valor actual es $\varepsilon = 23^\circ 26'$. La oblicuidad de la eclíptica no es constante, sino que disminuye a razón de $0''47$ por año.

Eje de la eclíptica es el diámetro perpendicular al plano de la eclíptica. Sus extremos constituyen los *polos de la eclíptica* y se denominan norte y sur según su proximidad a los polos celestes norte y sur respectivamente (P_e y P'_e en la Fig. 6.1).

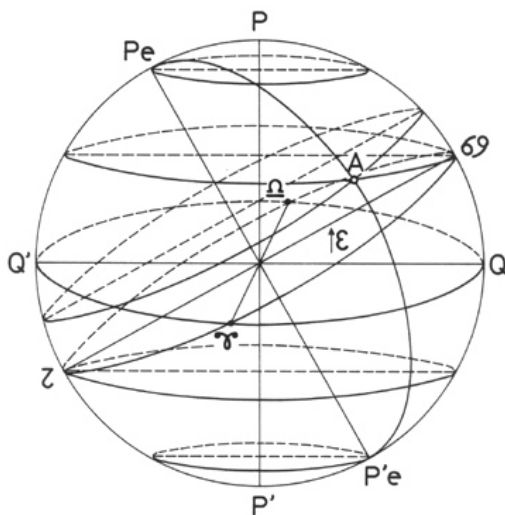


FIG 6.1

Línea de los equinoccios es el diámetro determinado por la intersección del plano del ecuador y el plano de la eclíptica ($\Upsilon\Omega$ en la Fig. 6.1).

Equinoccios son los extremos de la línea de los equinoccios. Se denomina *punto Aries, punto vernal o equinoccio de primavera* y se representa por Υ , el punto en el cual el Sol pasa del hemisferio celeste sur al hemisferio celeste norte. El punto diametralmente opuesto se denomina *punto Libra, punto autumnal o equinoccio de otoño* y se representa por Ω .

Línea de los solsticios es el diámetro de la eclíptica perpendicular a la línea de los equinoccios ($\Upsilon\Omega$ en la Fig. 6.1).

Solsticios son los extremos de la línea de los solsticios. Se denomina *punto Cáncer o solsticio de verano*, y se representa por $\♋$, el solsticio situado en el hemisferio celeste norte; se denomina *punto Capricornio o solsticio de invierno*, y se representa por $\♏$, el situado en el hemisferio sur.

Trópicos de Cáncer y de Capricornio son los paralelos celestes que pasan por los puntos Cáncer y Capricornio, respectivamente.

Círculos polares Ártico o norte y Antártico o sur son los paralelos celestes que pasan por los polos de la eclíptica, norte y sur, respectivamente.

Coluros de los equinoccios y de los solsticios son los meridianos celestes que pasan por los puntos equinociales y solsticiales, respectivamente.

Máximos de longitud son los círculos máximos (o sus correspondientes planos diametrales) que pasan por los polos de la eclíptica ($P_e A P_e'$ en la Fig. 6.1).

Menores de latitud son los círculos menores paralelos a la eclíptica.

Zodiaco es la zona de la esfera celeste, de 17° de amplitud, limitada por dos menores de latitud a $8,5^\circ$ a ambos lados de la eclíptica. Sobre el zodiaco se observan los planetas de nuestro sistema solar y las *constelaciones zodiacales*. Los antiguos dividían el zodiaco en doce regiones de 30° de amplitud, medidos sobre la eclíptica a partir del punto Aries y en sentido directo, correspondiendo a cada región o *signo del zodiaco* una constelación zodiacal. Partiendo del punto Aries y recorriendo el zodiaco en sentido directo, dichos signos son:

Aries	γ	Leo	δ	Sagitario	π
Tauro	τ	Virgo	ν	Capricornio	$\u264b$
Géminis	Π	Libra	$\u2197$	Acuario	$\u2199$
Cáncer	$\u2640$	Escorpio	μ	Piscis	$\u2653$

Hace unos 2.000 años los signos del zodiaco se correspondían con las constelaciones homónimas. Pero, debido a que el punto Aries retrograda sobre la eclíptica a razón de $50'',29$ por año (fenómeno conocido como precesión de los equinoccios), en la actualidad no se da esta correspondencia y las constelaciones ocupan el signo del zodiaco siguiente, en sentido directo, al que les correspondía.

1.3.2 Eclíptica media y verdadera

En realidad, el Sol no describe un círculo máximo de la esfera celeste sino que se desplaza según una línea sinuosa cuyo valor medio constituye la eclíptica definida en el apartado anterior. Dos son las causas principales de dicho comportamiento: En primer lugar, no es la Tierra la que describe una elipse con el Sol en uno de sus focos sino, con mucha aproximación, el centro de gravedad G del sistema Tierra-Luna, alrededor del cual giran a su vez la Tierra y la Luna. Si M es la masa de la Tierra, T , y m la de la Luna, L ; D y d las distancias del centro de gravedad G a la Tierra y a la Luna, respectivamente y Δ la distancia Tierra-Luna, siendo $M = 81 m$ y debiéndose de verificar (Fig. 7.1).

$$\begin{aligned} M \cdot D &= m \cdot d \\ D + d &= \Delta \end{aligned}$$

se tiene

$$D = \frac{\Delta}{82} \quad d = \frac{81}{82} \Delta$$

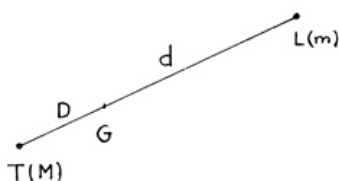


FIG 7.1

Como que $\Delta \approx 380.000$ km, resulta $D = 4.700$ km, distancia que es menor que el radio medio de la Tierra (6.400 km), es decir: el centro de gravedad del sistema se encuentra dentro de la Tierra. Por otra parte, si i es el ángulo que forma el plano del sistema Tierra-Luna con el plano de la eclíptica, E , mientras que el centro de gravedad del sistema describe la eclíptica, la Tierra y la Luna oscilarán a uno y otro lado de la misma, lo cual dará lugar a un *efecto paraláctico* que variará periódicamente, con una amplitud del orden de $0'',6$.

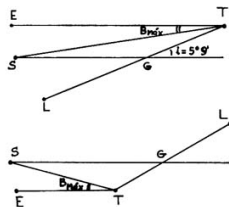


FIG 8.1

En efecto, siendo la distancia Tierra-Sol de unos 150.000.000 km e $i = 5^\circ 9'$, podemos evaluar la separación máxima, $B_{\text{Máx}}$. (Fig.8.1) que constituye la amplitud de la oscilación, sustituyendo el seno por el arco:

$$\text{sen } B_{\text{Máx}} = \frac{D \text{ sen } i}{a} \quad B_{\text{max}} \approx \frac{D \cdot i}{a} = 0'',6$$

El periodo de oscilación es el del sistema Tierra-Luna: 27,5 días.

En segundo lugar, los planetas, en especial Júpiter por su gran masa y Venus por su proximidad, originan perturbaciones sobre el movimiento de la Tierra. Las variaciones a que dan lugar son también periódicas, dependiendo el periodo del planeta de que se trate. Al perturbar el movimiento de la Tierra producen desviaciones del Sol respecto a la eclíptica media, cuyo máximo es también, en valor absoluto, del orden de $0'',6$.

En definitiva, dicha desviación es la resultante de varios movimientos periódicos, de tal forma que, cuando se suman las amplitudes máximas de estos movimientos, tal desviación puede llegar a ser de $1'',2$ en valor absoluto. Como que dicha variación es muy pequeña, en muchos problemas podemos considerar que el Sol describe un círculo máximo, sin incurrir en grandes errores.

1.4 Coordenadas ecuatoriales y eclípticas

En los sistemas de coordenadas ecuatoriales (o uranográficas) y eclípticas los triédros de referencia están orientados en sentido directo y son solidarios a la esfera celeste.

1.4.1 Coordenadas ecuatoriales

En el sistema de coordenadas ecuatoriales se define el triédro de referencia tomando como eje x la dirección de la línea de los equinoccios, en sentido positivo hacia el punto Aries, el eje y situado sobre el ecuador, a 90° del anterior, en sentido directo y el eje z en la dirección del eje del mundo y en sentido positivo hacia el polo celeste norte.

Las componentes del vector de posición de un astro E en dicha base constituyen las *coordenadas ecuatoriales rectilíneas* del mismo E (x, y, z).

Un punto de la esfera celeste, distinto de los polos, también queda completamente determinado por un único meridiano y un único paralelo celestes, que permiten definir las *coordenadas ecuatoriales esféricas* (Fig.9.1)

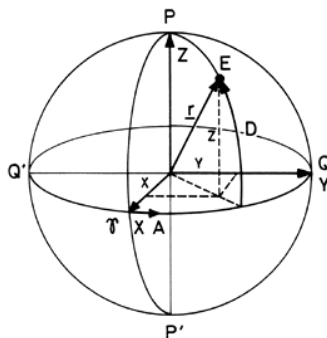


FIG 9.1

Ascensión recta, A , es el ángulo diedro que forman el plano meridiano que pasa por el astro y el coluro de los equinoccios. Se mide en tiempo, sobre el ecuador, desde el punto Aries hasta el pie del meridiano que pasa por el astro, en sentido directo de 0 h a 24 h:

$$0^h \leq A \leq 24^h$$

Declinación, D , es la distancia esférica desde el ecuador hasta el paralelo que pasa por el astro. Se mide en grados desde el ecuador, de 0° a 90° ; es positiva si el astro se encuentra en el hemisferio celeste norte y negativa si en el sur:

$$-90^\circ \leq D \leq 90^\circ$$

Distancia, r , es el módulo del vector de posición.

Distancia polar, p , es la distancia esférica del polo celeste norte al astro:

$$0^\circ \leq p \leq 180^\circ$$

Las relaciones entre las coordenadas ecuatoriales rectilíneas y esféricas vienen dadas por (Fig. 9.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x = r \cos D \cos A \\ y = r \cos D \sin A \\ z = r \sin D \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A = \arctan(y/x)$$

$$D = \arcsen(z/r)$$

1.4.2 Coordenadas eclípticas

En el sistema de coordenadas eclípticas definiremos el triedro de referencia tomando el eje x' idéntico al anterior x , el eje y' en la dirección de la línea de los solsticios, sentido positivo hacia el punto de Cáncer, y el eje z' en la dirección del eje de la eclíptica, en sentido positivo hacia el polo eclíptico norte.

Las componentes del vector de posición del astro E en dicha base constituyen las *coordenadas eclípticas rectilíneas* $E(x', y', z')$.

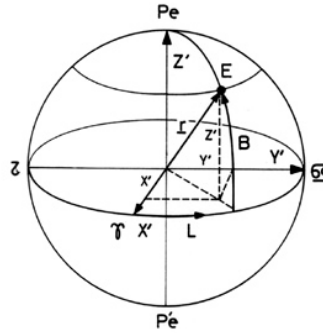


FIG 10.1

Por cada punto de la esfera celeste, distinto de los polos eclípticos, pasan un único máximo de longitud y un único menor de latitud que nos permiten definir las *coordenadas eclípticas esféricas* (Fig.10.1).

Longitud celeste, L , es el ángulo diedro que forman el máximo de longitud que pasa por el astro y el máximo de longitud que pasa por el punto Aries, contado a partir del punto Aries, sobre la eclíptica, en sentido directo, de 0° a 360° :

$$0^\circ \leq L \leq 360^\circ$$

Latitud celeste, B , es la distancia esférica desde la eclíptica hasta el menor de latitud que pasa por el astro. Se mide en grados y es positiva si el astro se encuentra en el hemisferio norte y negativa si en el sur:

$$-90^\circ \leq B \leq 90^\circ$$

Distancia, r , es el radio de la esfera celeste.

Las relaciones entre las coordenadas eclípticas rectilíneas y esféricas son (Fig.10.1):

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x' = r \cos B \cos L \\ y' = r \cos B \sin L \\ z' = r \sin B \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$L = \arctan(y' / x')$$

$$B = \arcsen(z' / r)$$

1.4.3 Paso de coordenadas ecuatoriales a eclípticas y viceversa

Los triedros de referencia de los sistemas de coordenadas ecuatoriales y eclípticas tienen común el eje x , y ambos están orientados en sentido directo, por lo que podrá efectuarse el cambio de un sistema al otro por una simple rotación R_1 alrededor del eje x de ángulo ε o $-\varepsilon$ (Fig. 11.1).

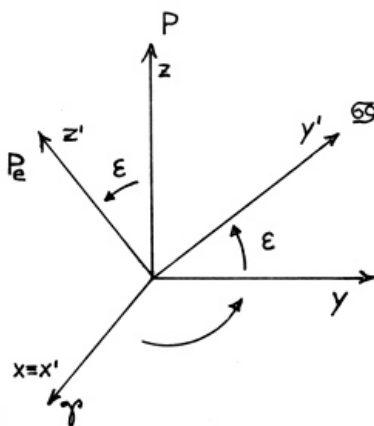


FIG 11.1

Si queremos pasar de coordenadas ecuatoriales a eclípticas, procediendo de manera análoga a como hicimos en la sección 1.2.3, tendremos:

$$\begin{bmatrix} r \cos B \cos L \\ r \cos B \sin L \\ r \sin B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos D \cos A \\ r \cos D \sin A \\ r \sin D \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos L &= \cos D \cos A \\ \cos B \sin L &= \cos \varepsilon \cos D \sin A + \sin \varepsilon \sin D \\ \sin B &= -\sin \varepsilon \cos D \sin A + \cos \varepsilon \sin D \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

El cambio inverso será:

$$\begin{bmatrix} r \cos D \cos A \\ r \cos D \sin A \\ r \sin D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos B \cos L \\ r \cos B \sin L \\ r \sin B \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} \cos D \cos A &= \cos B \cos L \\ \cos D \sin A &= \cos \varepsilon \cos B \sin L - \sin \varepsilon \sin B \\ \sin D &= \sin \varepsilon \cos B \sin L + \cos \varepsilon \sin B \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Estas fórmulas (5.1) y (6.1) también pueden obtenerse aplicando el grupo de Bessel al triángulo polo del ecuador-polo de la eclíptica-astro.

1.4.4 Variación de las coordenadas del Sol en su movimiento ánuo

De acuerdo con la ley de las áreas de Kepler, aunque la longitud aparente del Sol sea siempre creciente, su variación no es uniforme. Si consideramos que el Sol, S, describe la eclíptica, B es nula; las demás coordenadas varían según la tabla adjunta obtenida al resolver el triángulo $\gamma S_1 S$ donde $\widehat{\gamma S}$ = longitud, $\widehat{\gamma S_1}$ = ascensión recta y $\widehat{S_1 S}$ = declinación (Fig. 12.1).

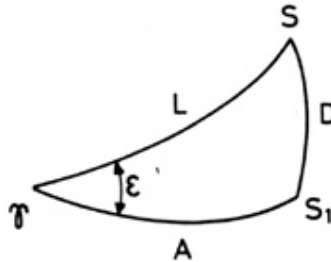


FIG 12.1

TABLA I

Situación del Sol	L	A	D
γ	0°	0^h	0°
♈	90°	6^h	$+\varepsilon$
♉	180°	12^h	0°
♊	270°	18^h	$-\varepsilon$
γ	360°	24^h	0°

Se observa que A es siempre creciente y D toma sus valores máximo y mínimo en los puntos Cáncer y Capricornio, respectivamente.

En un día las variaciones de A y de D son pequeñas, suponiendo el movimiento uniforme, por lo que en muchas aplicaciones, a lo largo de un día, tanto la ascensión recta como la declinación pueden considerarse constantes e iguales a su valor medio en dicho día.

$$\Delta A \approx \frac{360^\circ}{365^\circ} \approx 1^\circ \text{ dia}^{-1} = 4^m \text{ dia}^{-1}$$

$$\Delta D \approx \frac{23^\circ 26'}{\frac{365}{4}} \approx 15' \text{ dia}^{-1}$$

Del mismo triángulo $\gamma S_1 S$ (Fig.12.1) determinado por la posición del Sol, S , el punto Aries, γ , y la intersección del meridiano celeste que pasa por el centro del Sol con el ecuador, S_1 , deducimos también las relaciones:

$$\begin{aligned} \tan A &= \cos \varepsilon \tan L \\ \sin D &= \sin \varepsilon \sin L \end{aligned}$$

1.5 Tiempos sidéreos medio y aparente

Como ya se ha comentado en apartadas anteriores, el punto Aries no es un punto fijo en la esfera celeste sino que, debido a la *precesión de los equinoccios*, retrograda sobre la eclíptica a razón de $50'',29$ por año. Por lo tanto, por definición, retrograda también sobre el ecuador unos $3s$ por año:

$$50'',29 \cos \varepsilon \frac{24^h}{360^\circ} \approx 3^s \text{ año}^{-1}$$

Además, debido al fenómeno de la *nutación*, el punto Aries oscila alrededor de la posición media dada por la precesión con una semiamplitud de $17''$ sobre la eclíptica (ls sobre el ecuador) con un periodo de 18,6 años.

El punto Aries que se obtiene al considerar sólo el fenómeno de la precesión es el *punto Aries medio*; si además tenemos en cuenta el de la nutación obtenemos el *punto Aries verdadero*. Según consideremos uno u otro obtendremos, respectivamente, la ascensión recta media verdadera de un astro.

En primera aproximación la ascensión recta verdadera de una estrella ecuatorial será:

$$A = A_o + at + b \operatorname{sen}(wt)$$

Con A_o la ascensión recta para $t = 0$, $a = 3^s \text{ año}^{-1}$, $b=1^s$, $w = (2\pi/18.6) \text{ año}^{-1}$ (t en años).

Día sideral es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos de un punto fijo de la esfera celeste por un mismo meridiano. Coincide, por tanto, con el periodo de rotación de la Tierra.

Día sidéreo es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del punto Aries por un mismo meridiano. Si consideramos el punto Aries medio, obtendremos el *día sidéreo medio*; si consideramos el verdadero, obtendremos el *día sidéreo aparente*.

Como que el punto Aries medio retrograda 3^s año^{-1} sobre el ecuador, el día sideral será $3^s/365=0^s,01$ más largo que el día sidéreo.

Tiempo sidéreo medio, θ_m , es el ángulo horario del punto Aries medio.

Tiempo sidéreo aparente, θ_v , es el ángulo horario del punto Aries verdadero.

Ambos son locales. Sólo el primero es uniforme con mucha aproximación y es el que miden los relojes de tiempo sidéreo.

Ecuación de equinoccios es la diferencia entre el tiempo sidéreo aparente y el sidéreo medio:

$$N = \theta_v - \theta_m \quad |N| \leq 1^s$$

(el término "ecuación" procede de la palabra árabe que significa "diferencia"). Se designa por N por coincidir con la nutación en ascensión recta, según veremos en el próximo capítulo, y soluciona el paso de un tiempo sidéreo al otro mediante una simple suma algebraica. El concepto de tiempo sidéreo permite relacionar los sistemas de coordenadas solidarios al observador con los solidarios a la esfera celeste. En efecto, siendo la declinación una coordenada común a los sistemas de coordenadas horarias y ecuatoriales, para las otras dos, ángulo horario H y ascensión recta A de un astro E

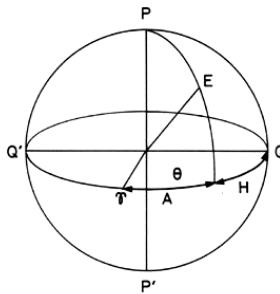


FIG 13.1

(Fig.13.1), observando los sentidos en que se miden los ángulos, se tiene la relación fundamental: que se verifica tanto para los valores medios θ_m y A_m como para los verdaderos θ_v y A_v .

$$\theta = A + H \quad (7.1)$$

1.6 Movimiento diurno del Sol

1.6.1 Generalidades

Decimos que un astro está en su *orto* cuando atraviesa el horizonte, pasando del hemisferio invisible al visible. Decimos que un astro está en su *ocaso* cuando atraviesa el horizonte, pasando del hemisferio visible al invisible. El orto y el ocaso son simétricos con respecto al plano meridiano, por lo que sus acimutes serán opuestos.

Culminación es el paso de un astro por el meridiano del lugar. Si el paso ocurre a altura máxima la culminación se denomina *superior* y si a mínima *inferior*.

En el caso del Sol la culminación superior marca el *mediodía* y la inferior la *medianoche*. El intervalo de tiempo que transcurre desde el orto del Sol hasta su culminación superior recibe el nombre de *mañana* y al que transcurre entre el mediodía y el ocaso le llamamos *tarde*.

Arco semidiurno, H , es el ángulo horario del ocaso. Su opuesto es el ángulo horario del orto. Si el arco semidiurno es H , $2H$ será la duración del día de luz (desde el orto al ocaso del Sol), de ahí el nombre.

Muchas veces en lugar de considerar el acimut del orto o del ocaso, se considera la *amplitud*, que se define como la distancia angular del orto (o del ocaso) al punto E (u W) contada negativamente cuando el orto está entre el E y el S , y positivamente cuando el orto está entre el E y el N ; negativamente cuando el ocaso está entre el W y el S , y positivamente cuando el ocaso está entre el W y el N . La amplitud del orto se denomina *amplitud ortiva* y la del ocaso, *occidua*, siendo ambas iguales.

1.6.2 Duración del día según la época del año

En el día del equinoccio de primavera (o del equinoccio de otoño), el Sol está en el punto Aries (o en el punto Libra) y su declinación es nula. Este día, siguiendo el movimiento diurno, el Sol saldrá exactamente por el este y se pondrá exactamente por el oeste, describiendo el ecuador. Permanece 12 horas por encima y 12 horas por debajo del horizonte, es decir, la duración del día de luz, es la misma que la duración de la noche (12 horas) de ahí el nombre de "*equinoccio*" (Fig.14.1).

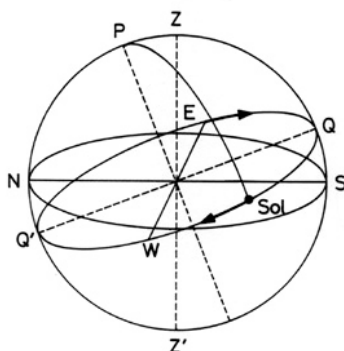


FIG 14.1

En días posteriores a su paso por el punto Aries, la declinación del Sol va aumentando debido al movimiento ánuo directo sobre la eclíptica. Entonces, siguiendo el movimiento diurno, el Sol saldrá y se pondrá cada vez más hacia el punto norte, aumentando la amplitud y el arco semidiurno.

Cuando, en su movimiento ánuo, el Sol llega al punto Cáncer (solsticio de verano) alcanza su máxima declinación (Fig.15.1). En este instante, tanto la amplitud como el arco semidiurno son máximos. Es el día del año con más horas de luz y el Sol, en su movimiento diurno, describe el trópico de Cáncer. Desde el punto Cáncer al punto Libra se invierte el proceso anterior: la declinación del Sol disminuye, saliendo y poniéndose cada día menos hacia el norte, hasta llegar a salir otra vez por el este y ponerse por el oeste (equinoccio de otoño).

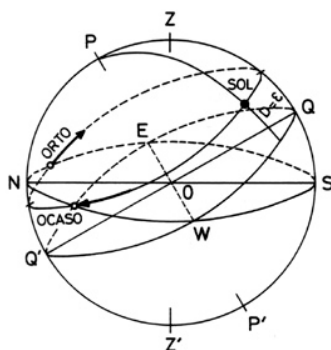


FIG 15.1

Cuando el Sol, en su movimiento ánuo, se encuentra entre el punto Libra y el punto Capricornio, la declinación es negativa y aumenta su valor absoluto. El Sol sale y se pone cada vez más hacia el sur, disminuye la amplitud y el arco semidiurno. En el solsticio de invierno la declinación del Sol es mínima, así como la amplitud y el arco semidiurno. Es por tanto, el día con menos horas de luz. El Sol describe el trópico de Capricornio en su movimiento diurno (Fig.16.1). Desde el punto Capricornio hasta el punto Aries se invierte el proceso anterior. La declinación del Sol aumenta, saliendo y poniéndose cada día menos hacia el sur hasta llegar a hacerlo nuevamente por el este y el oeste (equinoccio de primavera). Resumimos lo dicho en la tabla II.

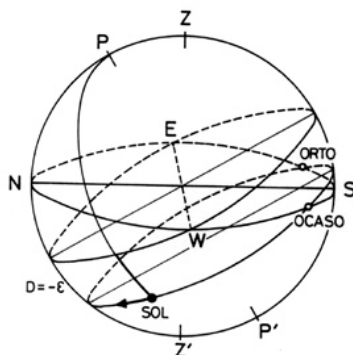


FIG 16.1

Según lo que acabamos de exponer, la duración del día de luz en el solsticio de verano debería ser la misma que la de la noche del día del solsticio de invierno y en los equinoccios el día de luz debería durar igual que la noche. Sin embargo, no es así, debido a la *refracción* causada por la atmósfera sobre la imagen del Sol, la cual implica una variación entre las coordenadas *verdaderas* del Sol y las que observamos o *aparentes* como veremos en el capítulo siguiente.

TABLA II

Punto	Estación	Recorrido ánuo	D	Amplitud (180°-a)	Arco semidiurno
☿	Equinoccio primavera	De ☿ a ♈	0° crece	0° crece	12 ^h crece
♈	Solsticio verano	De ♈ a ♊	+ε dismin.	Máxima dismin.	Máximo Dismin.
♊	Equinoccio otoño	De ♊ a ♋	0° dismin.	0° dismin.	12 ^h dismin.
♋	Solsticio invierno	De ♋ a ☿	-ε crece	Mínima crece	Mínimo crece

1.6.3 Refracción astronómica

Debido al fenómeno de la *refracción* la atmósfera influye sobre las posiciones de los astros. En esta sección se procederá a una primera introducción al tema, que se ampliará en secciones posteriores.

Consideremos la Tierra plana. Las superficies de igual densidad serán planos paralelos al suelo y coincidirán con las superficies de igual índice de refracción (tanto la densidad como el índice de refracción disminuyen con la altitud). Según la ley de Snell, cuando un rayo luminoso pasa de un medio a otro de mayor índice de refracción el rayo se acerca a la normal. Entonces, teniendo en cuenta que en la atmósfera la variación del índice de refracción con la altura es una función continua, tendremos que la trayectoria de un rayo de luz procedente de un astro *E* será una curva plana, con su concavidad dirigida hacia el suelo, cuya asíntota nos determina la dirección del astro. La tangente a la curva en el observador *O* nos determinará la dirección aparente *E'* del astro (Fig. 17.1).

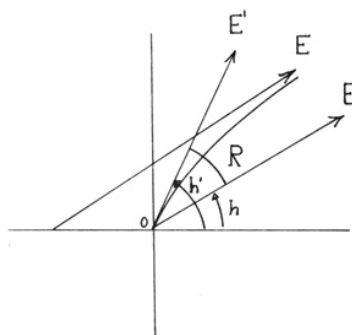


FIG 17.1

La diferencia:

$$R = h' - h$$

donde h' es la altura aparente y h la altura verdadera, se denomina *refracción astronómica*.

También puede expresarse en función de las distancias cenitales verdadera z y aparente z' :

$$R = z - z'$$

Así pues, a consecuencia de la refracción aumenta la altura aparente de los astros y disminuye su distancia cenital; sin embargo, no varían sus acimutes. Para $z=0^\circ$, $R=0$ y para $z=90^\circ$, R es máxima. Para el Sol en las Efemérides Astronómicas se toma el valor $34'$ para la R máxima.

1.6.4 Crepúsculos

La difusión por la atmósfera de los rayos luminosos del Sol da lugar a que veamos luz solar cuando el Sol no ha salido todavía, *aurora* o *crepúsculo matutino*, y sigamos viéndola cuando el Sol ya se ha puesto, *crepúsculo vespertino*. Dicha difusión alarga pues el día de luz.

Distinguiremos tres clases de crepúsculos:

Crepúsculo civil, tiempo que media desde la puesta del Sol hasta que la altura de su centro es de -6° . Al finalizar el mismo empiezan a ser visibles las estrellas de primera magnitud.

Crepúsculo náutico, tiempo que media desde que la altura del centro del Sol es de -6° hasta que es de -12° . Al finalizar el mismo empiezan a ser visibles las estrellas de segunda magnitud.

Crepúsculo astronómico, tiempo que media desde que la altura del centro del Sol es de -12° hasta que es de -18° . Al finalizar el mismo empiezan a ser visibles las estrellas de sexta magnitud (las visibles a simple vista).

Estas mismas definiciones nos pueden servir, invirtiéndolas, para los crepúsculos matutinos.

1.6.5 Semidiámetro aparente

Dado que el Sol es un objeto celeste extenso, podemos definir su *diámetro aparente*, s , como el ángulo bajo el cual se ve desde la Tierra el radio del Sol (Fig. 18.1).

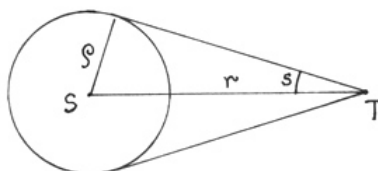


FIG 18.1

Sean:

T el centro de la Tierra, S el centro del Sol, ρ el radio del Sol, r la distancia entre los centros del Sol y de la Tierra.

De la Fig.18.1 se desprende:

$$\text{sen } s = \frac{\rho}{r}$$

Y por ser s muy pequeño:

$$s \approx \frac{\rho}{r}$$

Como que la Tierra describe una elipse con el Sol en uno de sus focos, r y, en consecuencia, s variarán en el transcurso del año; pero, como que la excentricidad de dicha elipse es muy pequeña, con mucha aproximación, s puede considerarse constante. Se suele tomar $s = 16'$.

Se dice que el Sol sale (o se pone) cuando su borde superior aparece (o desaparece) por el horizonte. Recordando que el valor de la refracción en el horizonte es de $R = 34'$, resulta que la distancia cenital del centro del Sol, tanto en los ortos como en los ocasos aparentes del mismo, será de:

$$z = 90^\circ + R + s = 90^\circ + 34' + 16' = 90^\circ 50'$$

y por tanto su altura de (Fig. 19.1):

$$h = -50^\circ$$

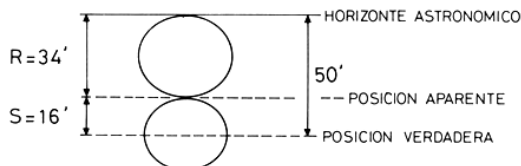


FIG 19.1

Tanto la refracción como el semidiámetro solar alargan la duración del día de luz. En consecuencia, la duración del día de luz del solsticio de verano es mayor que la de la noche del día del solsticio de invierno.

1.6.6 Movimiento diurno desde distintas latitudes

Hasta ahora hemos considerado la latitud fija. Veamos que ocurre desde distintas latitudes.

Observador en el ecuador ($\phi = 0^\circ$): El eje del mundo y la meridiana coinciden, así como los polos celestes y los correspondientes puntos cardinales Norte y Sur. El Sol sale y se pone según una trayectoria perpendicular al horizonte todos los días del año (de ahí la menor duración del crepúsculo en zonas de baja latitud). El día de luz tiene siempre la misma duración que la noche, despreciando la refracción y el semidiámetro. El día del equinoccio, el Sol recorre el primer vertical. El día del solsticio de verano la amplitud vale ε y el día del solsticio de invierno vale $-\varepsilon$ (Fig. 20.1).

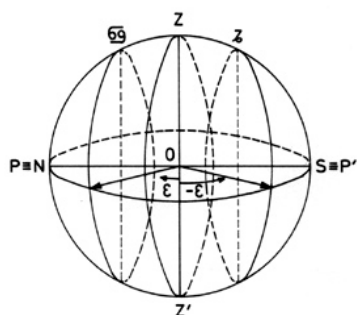


FIG 20.1

Observador en el polo ($\phi = 90^\circ$): La vertical coincide con el eje del mundo y el horizonte coincide con el ecuador. Así pues, no están definidos ni el plano meridiano ni la perpendicular; es decir, en el polo no están definidos los puntos cardinales. El Sol en su movimiento diurno describe almucantaratas (que coinciden con los paralelos celestes) y su altura es igual a su declinación. En su movimiento diurno, el día de luz dura desde que el Sol se encuentra en el punto Aries hasta que se encuentra en el punto Libra (despreciando la refracción y el semidiámetro). En los equinoccios el Sol describe el horizonte. El día del solsticio de verano, alcanza la altura máxima ε (oblicuidad de la eclíptica) y el día del solsticio de invierno alcanza la altura mínima $-\varepsilon$ (Fig. 21.1).

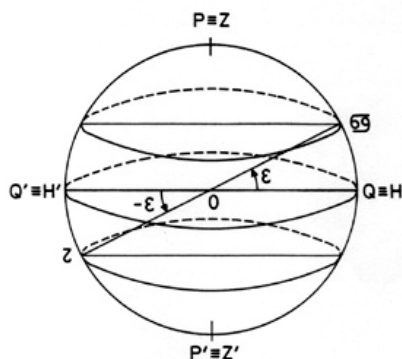


FIG 21.1

Observador en el trópico ($\phi = \varepsilon$): En el trópico de Cáncer el Sol pasará por el cenit sólo el día del solsticio de verano. En el trópico de Capricornio pasará por el cenit el día del solsticio de invierno.

Observador en la zona tórrida ($|\phi| < \varepsilon$): El Sol pasará por el cenit dos veces al año. En primavera y verano, si $0 < \phi < \varepsilon$ y en otoño e invierno, si $-\varepsilon < \phi < 0$.

Observador en un círculo polar ($|\phi| = 90^\circ - \varepsilon$): En el círculo polar ártico el Sol no llega a salir, pero roza el horizonte, en el solsticio de invierno. En el solsticio de verano el Sol describe un paralelo celeste tangente al horizonte; así pues, a media noche el Sol se encontrará en el horizonte (Sol de media noche). Efectivamente, en el día del solsticio de verano, la declinación del Sol vale ε , y su distancia polar $90^\circ - \varepsilon$, que es la

latitud del círculo polar ártico. En el círculo polar antártico dicho fenómeno ocurre en el solsticio de invierno (Fig.22.1).

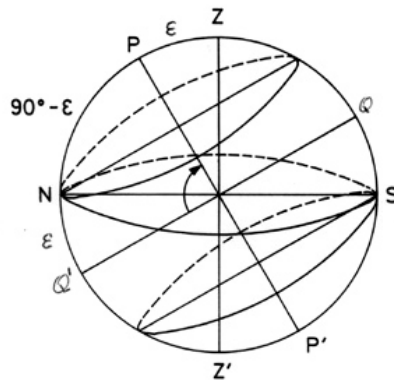


FIG 22.1

Hay que señalar que existen lugares de la Tierra en los cuales, al menos una noche al año, no habrá noche cerrada. Para ello bastará con que la depresión del Sol en la culminación inferior sea menor de 18° (crepúsculo astronómico). El caso más favorable será el de altura máxima (solsticio de verano en el hemisferio norte) y así, para $D=\varepsilon$, será (Fig.23.1):

$$\begin{aligned}\phi + 18^\circ + \varepsilon &= 90^\circ \\ \phi &= 90^\circ - 18^\circ - \varepsilon \approx 48^\circ,5\end{aligned}$$

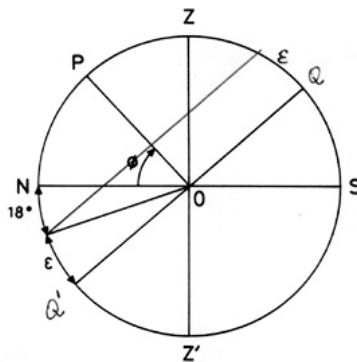


FIG 23.1

Es decir, para $\phi \geq 48^\circ,5$, como es el caso de París, por ejemplo, no habrá noche cerrada el día del solsticio de verano.

1.7 Tiempos solares verdadero y medio

Día solar verdadero es el intervalo de tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del centro del Sol por el meridiano del lugar.

Tiempo solar verdadero es el ángulo horario del centro del Sol. Ahora bien, hemos visto anteriormente que, debido a la ley de las áreas, el Sol no recorre la eclíptica con velocidad angular constante. La falta de uniformidad en la longitud se refleja en la variación de su ascensión recta, tampoco uniforme, lo cual implica que los días solares verdaderos no tengan igual duración. Por consiguiente, el día solar verdadero no constituye una buena unidad de tiempo.

Para evitar este inconveniente y poder utilizar las observaciones del Sol para la medida del tiempo, se define un *Sol ficticio* como un sol imaginario (una dirección) que describe la eclíptica con velocidad angular constante en un tiempo igual al que tarda el Sol verdadero en recorrerla. Coincide con el Sol verdadero en el perigeo y, por tanto, también en el apogeo, según la ley de las áreas.

Se llama *ecuación del centro* a la corrección que hay que aplicar a la longitud L del sol ficticio para obtener la longitud $\odot$ del Sol verdadero:

$$C = \odot - L \quad (8.1)$$

Si P es la duración del año, la velocidad angular con que el sol ficticio describe la eclíptica, o *movimiento medio*, será:

$$n = \frac{2\pi}{P} = \frac{360^\circ}{365^d,24} = 0^\circ,98 \text{ día}^{-1}$$

No obstante, el sol ficticio tampoco nos sirve para definir la unidad de tiempo: hemos de componer dos velocidades angulares, la del sol ficticio sobre la eclíptica y la de la esfera celeste alrededor del eje del mundo; las dos son constantes, pero su composición no lo es al estar referida a ejes distintos. Ello hace que el ángulo horario del sol ficticio no crezca proporcionalmente al tiempo, lo cual nos lleva a introducir un *Sol medio*, sol ideal que recorre el ecuador, en sentido directo, con velocidad angular constante e igual al movimiento medio, coincidiendo con el sol ficticio en el punto Aries (y por tanto también en el punto Libra). Por definición el sol medio gira alrededor del eje del mundo, por lo cual el ángulo horario del sol medio crece proporcionalmente al tiempo. Abatiendo el sol ficticio sobre el ecuador, obtenemos el sol medio (Fig. 24.1).

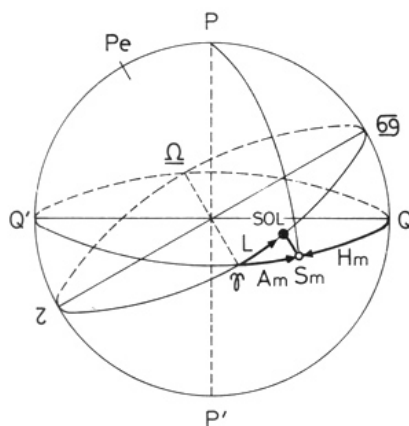


FIG 24.1

$$L = A_m \quad (9.1)$$

Llamamos *reducción al ecuador* a la corrección que hay que aplicar a la longitud $\odot$ del Sol verdadero para obtener su ascensión recta A_v :

$$Q = A_v - \odot \quad (10.1)$$

Día solar medio es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del sol medio por el meridiano del lugar.

Tiempo solar medio es el ángulo horario del sol medio. A pesar de todas las consideraciones anteriores, el día solar medio no se toma actualmente como unidad de tiempo, por razones que veremos más adelante.

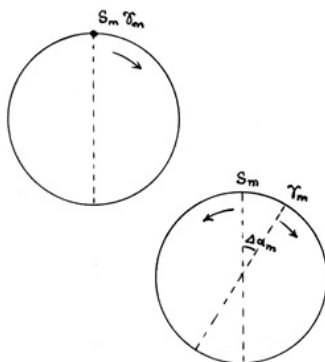


FIG 25.1

Es fácil establecer la relación que existe entre el día solar medio y el día sidéreo medio. Consideremos que un día determinado el sol medio y el punto Aries culminan al mismo tiempo. En este instante son las O^h tanto de tiempo sidéreo medio como de tiempo solar medio. Ambos puntos avanzan debido al movimiento diurno; pero, debido

al movimiento propio del Sol en sentido directo, éste se retrasa respecto al punto Aries, de modo que el día siguiente llegará al meridiano después que dicho punto, de tal forma que cuando el sol medio se encuentre sobre el meridiano, el punto Aries habrá recorrido ya el arco $S_m \mathcal{V}_m$. El día solar medio se compone pues de un día sidéreo más una fracción de día equivalente al arco $S_m \mathcal{V}_m$ (Fig.25.1), incremento de una ascensión recta del sol medio en un día solar medio, es decir:

$$1^{d.sol.m} = 1^{d.sid.m} + \Delta\alpha_m$$

Como que el año tiene 365,2422 días solares medios, el adelanto diario de Aries sobre el Sol será

$$\alpha_m = \frac{24h}{365,2422} = 3^m 56^s t.s.m$$

Dicho de otro modo: el punto Aries sale cada día solar medio 3m 56s t.s.m. antes que el día anterior; de ahí la antigua denominación de "aceleración de las fijas" (las estrellas) con que se designaba el $\Delta\alpha_m$.

1.7.1 Tiempo civil y longitud geográfica

Llamamos *tiempo civil* al ángulo horario del sol medio aumentado en 12 horas.

$$t_c = H_m + 12^h \quad (11.1)$$

Empezamos a contar el tiempo civil doce horas antes de que el sol medio pase por el meridiano superior del lugar. Será mediodía medio a las doce horas de tiempo civil.

Longitud geográfica de un lugar es el ángulo diedro que forma el meridiano del lugar con el meridiano de Greenwich. Se mide en horas para usos astronómicos y en grados para usos geográficos, habiéndose tomado negativa desde el meridiano de Greenwich hacia el este y positiva hacia el oeste, hasta el año 1982 en que la Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional que tuvo lugar en Patras (Grecia) recomendó que "todas las efemérides nacionales y otras publicaciones astronómicas adoptasen tan pronto como fuera posible el convenio según el cual la longitud terrestre fuera contada *positivamente hacia el este*". Así pues, desde entonces, se toma positiva desde el meridiano de Greenwich hacia el este y negativa hacia el oeste. También se suele indicar con las iniciales de dichos puntos cardinales. Por ejemplo:

$$1 \text{ Observatorio Fabra} = 0^h 8^m 30^s,2 = 0^h 8^m 30^s,2 E$$

Para hallar la relación existente entre la longitud de un lugar y el tiempo civil en él, supongamos dos lugares cualesquiera A y B y proyectemos sus planos meridianos sobre el ecuador terrestre (Fig. 26.1). Sean l_A y l_B las longitudes de A y B , respectivamente, S_m la dirección del sol medio, H_A y H_B los tiempos solares medios en A y B .

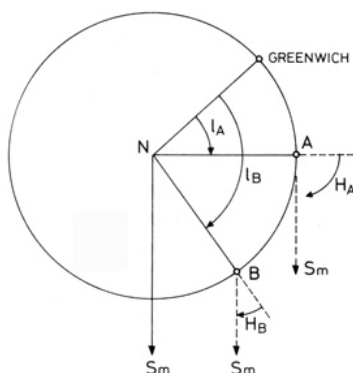


FIG 26.1

Se verifica:

$$l_A + H_A + 12^h = l_B + H_B + 12^h$$

es decir,

$$1 + t_c = Cte.$$

1.7.2 Tiempo Universal

Por definición, llamamos *tiempo universal*, *T.U.*, a dicha constante para todo el globo, en un instante dado:

$$T.U. = t_c + 1 \quad (12.1)$$

Evidentemente, el T.U. es el tiempo civil en el meridiano de Greenwich.

Hora legal es la que resulta de la división del globo terrestre en 24 *husos horarios*. La hora legal de un lugar es el T.U. más un número entero de horas correspondiente al huso en que se encuentra dicho lugar respecto al de Greenwich. Dichas horas se tomarán positivas desde Greenwich hacia levante y negativas hacia poniente.

Hora oficial es la hora del huso rectificada según las conveniencias de cada país. España pertenece al huso de Greenwich y su tiempo oficial lleva una hora de adelanto al T.U. en invierno y dos horas en verano. Es el tiempo por el que se rige la vida civil de un país.

1.7.3 Ecuación de tiempo

Recibe el nombre de *ecuación de tiempo* la diferencia entre el ángulo horario del Sol verdadero y el ángulo horario del sol medio:

$$E = H_v - H_m \quad (13.1)$$

También se puede definir en función de las ascensiones rectas, teniendo en cuenta la relación (7.1) entre el tiempo sidéreo, la ascensión recta y el ángulo horario aplicada a cada uno de los soles:

$$E = H_v - H_m = \theta_m - H_m - (\theta_v - H_v) = A_m - A_v$$

y por tanto, según (8.1), (9.1) y (10.1), sustituyendo, también:

$$E = A_m - A_v = L - \odot + \odot - A_v = -(C + Q) \quad (14.1)$$

es decir: la ecuación de tiempo cambiada de signo es el resultado de sumar la ecuación del centro y la reducción al ecuador.

La ecuación de tiempo viene tabulada en los Anuarios Astronómicos, día por día, y, como se verá más adelante, es

$$|E| \leq 16^m 24^s \text{ t.s.m.}$$

A partir de la ecuación de tiempo podemos hallar la diferencia entre la duración del día solar medio y la del día solar verdadero. En efecto, dado que, según (13.1):

$$\Delta E = \Delta H_v - \Delta H_m$$

para un día solar medio:

$$\Delta H_v = \Delta E + 24^h$$

donde

$$|\Delta E| \leq 30^s$$

según veremos más adelante. Luego, la máxima diferencia que puede haber entre un día solar medio y un día solar verdadero es de unos 30s.

Estudiemos ahora la influencia de la ecuación de tiempo en la duración de la mañana y de la tarde. Transcurre la *mañana* desde el orto del Sol verdadero hasta el paso del sol medio por el meridiano del lugar (mediodía medio). Transcurre la *tarde* desde el mediodía medio hasta el ocaso del Sol verdadero.

Recordemos que el arco semidiurno de un astro es el ángulo horario de su ocaso. Si el Sol verdadero y el Sol medio coincidiesen, dada la simetría del movimiento diurno con respecto al plano meridiano, las duraciones de la mañana y de la tarde serían iguales al arco semidiurno. Pero, según (13.1):

$$H_m = H_v - E$$

y cuando el Sol verdadero pasa por el meridiano, $H_v = 0$, falta E para que sea mediodía medio:

$$H_m = -E$$

Por tanto, si H es el arco semidiurno del Sol verdadero, tendremos:

$$\text{Duración de la mañana: } D_m = H + E$$

Duración de la tarde: $D_t = H - E$

Además, restando ordenadamente: el día que la ecuación de tiempo es máxima la mañana dura $32^m 48^s$ más que la tarde.

$$D_m - D_t = 2E$$

y, por tanto:

$$|D_m - D_t| \leq 32^m 48^s \text{ t.s.m}$$

A medida que transcurre el otoño, H disminuye y, por tanto, D_t también disminuye. A partir de primeros de diciembre, la tarde va alargando a pesar de que el Sol todavía no ha alcanzado su declinación mínima (momento en el cual el arco semidiurno es mínimo). Ello es debido a que a partir del 3 de noviembre la ecuación de tiempo va disminuyendo y, al principio, la disminución del arco semidiurno es mayor que la disminución de E , pero a partir de primeros de diciembre sucede lo contrario y la tarde se alarga. De idéntica manera se explica que al empezar el invierno, siga acortando la mañana: el aumento del arco semidiurno es menor que la disminución de la ecuación de tiempo.

1.8 Problemas del movimiento diurno

1.8.1 Paso por un vertical de acimut a

Datos	ϕ, D, a
Incógnitas	H, h

Para determinar H consideraremos las fórmulas de paso de horarias a horizontales (Fig. 27.1):

$$\begin{aligned}\cos h \cos a &= \cos D \cos H \sin \phi - \sin D \cos \phi \\ \cos h \sin a &= \cos D \sin H\end{aligned}$$

que divididas ordenadamente dan:

$$\cot a \sin H = \sin \phi \cos H - \cos \phi \tan D$$

Podemos resolver esta ecuación transformándola en una algebraica de segundo grado en $\sin H$ o $\cos H$, o bien mediante la introducción de un ángulo auxiliar M , haciendo:

$$\begin{aligned}m \cos M &= \sin \phi \\ m \sin M &= \cos \phi\end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$m \cos(H + M) = \cos \phi \tan D$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} \cos(H + M) &= \cot \phi \tan D \cos M \\ \cot M &= \sen \phi \tan a \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

fórmulas que permiten resolver el problema. Obtenemos así dos determinaciones no simétricas (según corte el vertical hacia poniente o hacia levante), a partir de las cuales podemos calcular el tiempo sidéreo de paso recordando (7.1).

Para determinar h procederemos análogamente a partir de la fórmula de paso de horizontales a horarias:

$$\sen D = -\cos h \cos a \cos \phi + \sen h \sen \phi$$

Introduciendo el ángulo auxiliar N mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned} n \cos N &= \sen \phi \\ n \sen N &= \cos \phi \cos a \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \sen(h - N) &= \operatorname{cosec} \phi \sen D \cos N \\ \tan N &= \cot \phi \cos a \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

resultando, también, dos determinaciones.

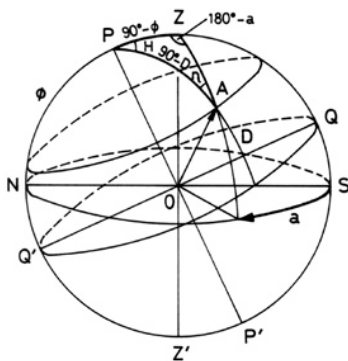


FIG 27.1

Para conocer la correspondencia entre las determinaciones de H y las de h , usaremos la relación:

$$\cos h \sen a = \cos D \sen H$$

Discusión: El problema no tiene siempre solución. Si en el triángulo esférico polo-cenit-astro de la Fig. 27.1. aplicamos la analogía de senos, siendo η el *ángulo paraláctico* tendremos:

$$\frac{\sen \eta}{\cos \phi} = \frac{\sen a}{\cos D}$$

es decir:

$$\frac{\cos \phi \sin a}{\cos D} \leq 1$$

desigualdad que sólo se verificará si el problema tiene solución. Para comprender esto hemos de tener en cuenta que si el astro culmina al sur del cenit, el paralelo que describe corta a todos los verticales (en los dos hemisferios, visible e invisible); pero, si culmina al norte del cenit, su paralelo sólo cortará a los verticales de acimutes comprendidos entre unos valores mínimo y máximo, correspondientes a los verticales tangentes al paralelo del astro (Fig. 28.1). Si a_m es el acimut mínimo y a_M el acimut máximo, el problema tendrá solución si el acimut dado, a , verifica la acotación:

$$a_m \leq a \leq 360^\circ - a_m = a_M$$

por simetría con respecto al plano meridiano.

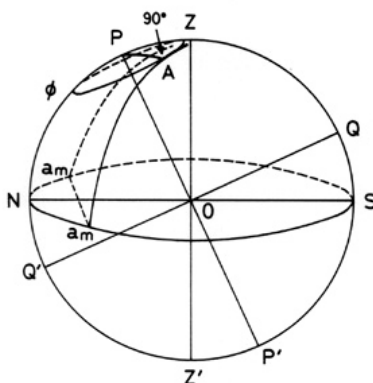


FIG 28.1

Casos particulares

a) *Máxima digresión*: Decimos que un astro presenta máxima digresión occidental (oriental) cuando pasa por el vertical de acimut mínimo (máximo). Por lo tanto, sólo pueden presentar máxima digresión los astros que culminan al norte del cenit.

Cuando tiene lugar la máxima digresión es recto el ángulo paraláctico y aplicando al triángulo polo-cenit-astro las fórmulas de los triángulos rectángulos deducimos (Fig. 27.1):

$$\left. \begin{aligned} \cos H &= \tan \phi \cot D \\ \sin a &= \sec \phi \cos D \\ \sin h &= \sin \phi \cos ec D \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

relaciones que nos dan el ángulo horario a , H , el acimut, y la altura, h , correspondientes a la máxima digresión. También podremos conocer el tiempo sidéreo local en esta posición a partir de H y de A .

Si la máxima digresión ocurre cerca del meridiano, H es pequeño y queda mal determinado por el coseno. Es conveniente, entonces, efectuar la transformación:

$$\tan^2 H/2 = \frac{2 \sin^2 H/2}{2 \cos^2 H/2} = \frac{1 - \cos H}{1 + \cos H} = \frac{\sin(D - \phi)}{\sin(D + \phi)}$$

por lo que

$$\tan H/2 = \pm \sqrt{\frac{\sin(D - \phi)}{\sin(D + \phi)}}$$

Con la determinación positiva obtenemos el horario de la máxima digresión occidental y con la negativa el de la oriental.

Por otra parte, si una estrella presenta máxima digresión (culmina al norte del cenit), se verifica:

$$p \equiv 90^\circ - D < 90^\circ - \phi$$

Pero sabemos que las estrellas circumpolares, perpétuamente visibles, cumplen que $p \equiv 90^\circ - D < \phi$. Por tanto, si $\phi < 45^\circ$ (caso de Barcelona) todas las estrellas circumpolares presentan máxima digresión. Si $\phi > 45^\circ$ sucede al revés; ambos conjuntos coinciden si $\phi = 45^\circ$ (como ocurre, aproximadamente en París).

b) *Paso por el meridiano*: En este caso $H=0^h$ y $a=0^\circ$ ó 180° , según que el astro culmine al sur o al norte del cenit, respectivamente. En cuanto a las alturas se tiene (Figs. 29.1):

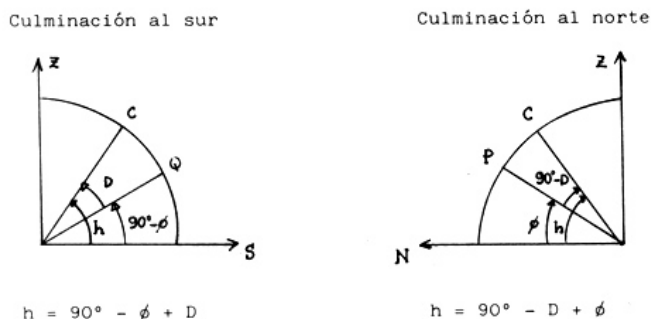
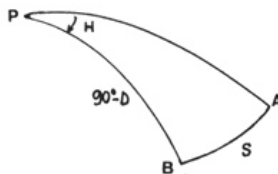


FIG 29.1

Los pasos por el meridiano se observan con el *círculo meridiano*, anteojo que sólo puede moverse alrededor de un eje que coincide con la perpendicular. El tiempo sidéreo local del paso nos proporciona la ascensión recta del astro y la altura la declinación.

c) *Paso del Sol por el meridiano*: Consideremos ahora un caso ligeramente distinto del anterior, dado que el Sol presenta diámetro aparente. Por este motivo, se mide el paso del borde del Sol por el meridiano y se reduce posteriormente al paso de su centro.

**FIG 30.1**

Para efectuar dicha reducción se considera el triángulo PBA como esférico (Fig.30.1); en él, P es el polo celeste, A el centro del Sol y B el punto de tangencia del círculo PB . Se verifica:

$$\text{sen } s = \cos D \text{ sen } H \quad (18.1)$$

con s , semidiámetro aparente del Sol, aproximadamente igual a $16'$. Sustituyendo en (18.1) los senos por los arcos, resulta:

$$H \approx s \cdot \sec D$$

Si θ_0 es el tiempo sidéreo de paso del centro del Sol por el meridiano y θ es el tiempo sidéreo de paso del borde del Sol por el meridiano, del H hallado por las fórmulas anteriores, se desprende:

$$\theta_0 = \theta \pm H$$

con el signo más o menos según consideremos el paso del borde anterior o posterior. Esta reducción se aplicará siempre que el astro considerado presente diámetro aparente (caso de la Luna y de los planetas).

Dado que la declinación del Sol es variable, no presenta la máxima altura cuando pasa por el meridiano. Se demuestra que el ángulo horario de su culminación viene dado por:

$$H = (\tan \phi - \tan D) \frac{dD}{dH}$$

En nuestra latitudes $\phi > D$ y, por lo tanto, $\tan \phi - \tan D > 0$. Cuando $dD/dH > 0$ (invierno y primavera) la culminación se verifica después del paso por el meridiano y cuando $dD/dH < 0$ (verano y otoño) la culminación se verifica después de dicho paso.

d) *Paso por el primer vertical*: En este caso consideramos el paso por el vertical de acimut 90° . Del triángulo polo-cenit-astro, rectángulo en Z , obtenemos (Fig. 31.1):

$$\left. \begin{aligned} \cos H &= \cot \phi \tan D \\ \text{sen } h &= \text{cosec } \phi \text{ sen } D \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

fórmulas que nos proporcionan dos determinaciones opuestas para el ángulo horario, pero una única determinación de la altura en los pasos oriental y occidental.

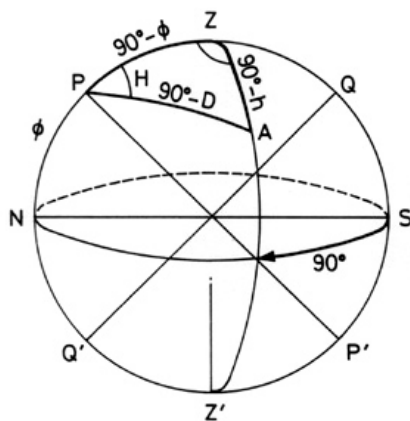


FIG 31.1

En el caso de que H sea pequeño, podemos transformar la fórmula (19.1) como hemos hecho en a) y obtener una mejor aproximación de su valor:

$$\tan \frac{H}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(\phi - D)}{\sin(\phi + D)}}$$

Conocida la declinación del astro, los pasos por el primer vertical permiten hallar la latitud, ϕ , mediante la fórmula (19.1) (método de Struve).

1.8.2 Paso por un almucantarat de altura h

El problema tendrá solución bajo las siguientes condiciones según que el astro culmine al sur o al norte del cenit (Fig. 32.1):

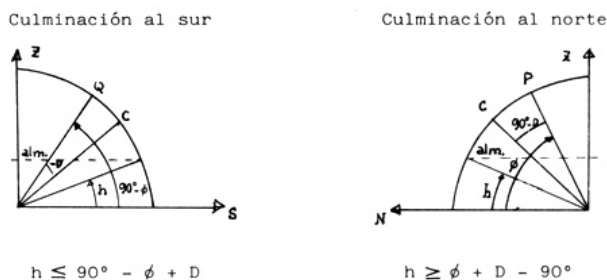


FIG 32.1

Datos	ϕ, D, h o z
Incógnitas	H, a

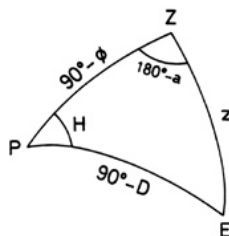


FIG 33.1

Aplicando la fórmula de Borda:

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}$$

$$(2p = a + b + c)$$

al triángulo polo-cenit-astro (Fig. 33.1), tendremos:

$$\tan \frac{H}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin \frac{z+D-\phi}{2} \sin \frac{z-D+\phi}{2}}{\cos \frac{z-D-\phi}{2} \cos \frac{z+D+\phi}{2}}}$$

$$\cot \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cos \frac{z+D+\phi}{2} \sin \frac{z-D+\phi}{2}}{\cos \frac{z-D-\phi}{2} \sin \frac{z+D-\phi}{2}}}$$

donde las dos determinaciones, positiva y negativa, se corresponden e indican que el paso es occidental u oriental, respectivamente.

Casos particulares

a) *Paso por el horizonte*: En este caso se suelen considerar como incógnitas el arco semidiurno, H , y la amplitud, a' (recordar (1.6.1). Para un astro de declinación fija las amplitudes ortiva y occidua son iguales. El triángulo polo-cenit-astro es rectilátero y permite resolver el problema (Fig. 34.1):

$$\left. \begin{aligned} \sin a' &= \sec \phi \sin D \\ \cos H &= -\tan \phi \tan D \end{aligned} \right\}$$

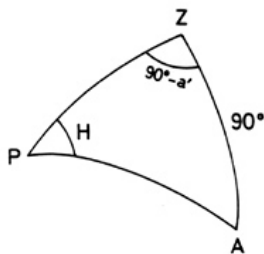


FIG 34.1

Procediendo como en casos anteriores, si H es pequeño:

$$\tan \frac{H}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cos(\phi - D)}{\cos(\phi + D)}}$$

Si el problema tiene solución, la raíz nunca es imaginaria. En efecto, si el astro no es circumpolar, $90^\circ - D > \phi$ por lo que $\cos(\phi + D) > 0$. Y como:

$$90^\circ > \phi > 0^\circ$$

$$0^\circ < D < 90^\circ$$

restando ordenadamente, resulta:

$$90^\circ > \phi - D > -90^\circ$$

y, por tanto,

$$\cos(\phi - D) > 0$$

Además, como que $90^\circ - D > \phi$, tomando cosenos y recordando que el coseno es una función decreciente:

$$\sin a' = \frac{\sin D}{\cos \phi} < 1$$

a' sólo posee una determinación (la menor de 90°) y H posee dos, según se considere el orto o el ocaso (negativa o positiva respectivamente).

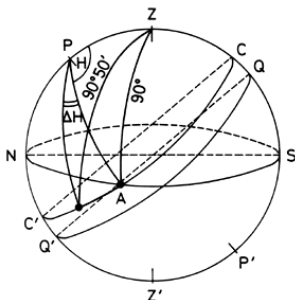


FIG 35.1

b) *Orto y ocaso del Sol*: Para el caso del Sol (como para el caso de la Luna) es necesario considerar una corrección ΔH al arco semidiurno H , debido a que cuando el Sol está en su orto o en su ocaso la altura de su centro es de $-50'$ (Fig. 35.1) (recordar 1.6.5). Para obtenerla diferenciaremos la fórmula de conversión de coordenadas horarias a horizontales,

$$\sin h = \sin \phi \sin D + \cos \phi \cos D \cos H$$

con lo cual obtendremos:

$$\cos h dh = -\cos \phi \cos D \sin H dH$$

Considerando la dh como un incremento, teniendo en cuenta que $\cos h \approx 1$ y que $50' = 200''$, resulta:

$$\Delta H = \frac{200''}{\cos \phi \cos D \sin H}$$

habiéndose obtenido H mediante la fórmula hallada en el apartado anterior, Dicha corrección siempre es aditiva, dado que su signo ya viene dado por $\sin H$.

1.9 Refracción astronómica

1.9.1 Primera aproximación

La luz se propaga en línea recta en el vacío o en los medios transparentes homogéneos. Como que la atmósfera terrestre no es homogénea, al propagarse en ella, la luz experimenta una desviación. La dirección según la cual observamos los astros forma con la dirección en la que deberíamos observarlos, si no existiera el fenómeno de la refracción, un ángulo llamado *refracción astronómica* (ver 1.6.3).

Podemos dar una teoría de la refracción, suficiente en la mayoría de las aplicaciones, suponiendo:

1°) que la densidad del aire decrece con la altitud y no depende más que de la altitud.

2°) que las superficies de igual densidad, también superficies de igual índice de refracción, son planos horizontales. Se desprecia la curvatura de la Tierra.

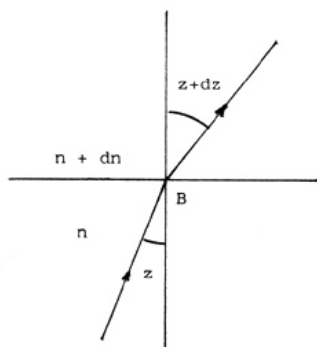


FIG 36.1

Para simplificar el razonamiento sustituyamos esta atmósfera, cuyo índice de refracción decrece de manera continua, por una atmósfera formada por capas homogéneas muy delgadas, separadas por superficies refringentes planas y horizontales. La capa índice n tiene encima una capa de índice $n+dn$ (siendo dn negativo) y el rayo luminoso que procede del suelo y va a parar al punto B de la superficie de separación, formando un ángulo de incidencia z , se refracta con un ángulo de refracción $z+dz$ (Fig. 36.1). Apliquemos la *ley de Descartes*:

$$n \operatorname{sen} z = (n + dn) \operatorname{sen}(z + dz)$$

La cantidad $n \operatorname{sen} z$ se mantiene constante a lo largo del rayo luminoso y esta propiedad se conserva si se aumenta indefinidamente el número de capas. Admitiremos que dicha constancia se mantiene aun con una variación continua del índice de refracción.

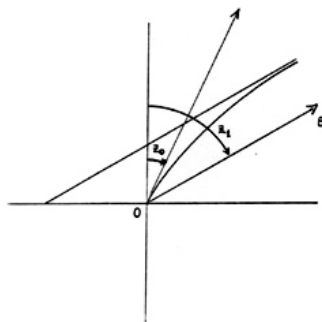


FIG 37.1

Cuando nos separamos del suelo siguiendo el rayo luminoso, n decrece y por consiguiente z aumenta: el rayo vuelve su concavidad hacia el suelo (Fig. 37.1). Supongamos que parte de un punto O en el cual el índice de refracción es n_o y que forma con la vertical en O un ángulo z_o . El rayo se mantiene siempre en el plano vertical que contiene su tangente en O : No hay refracción en acimut. Sigamos al rayo luminoso hasta su salida de la atmósfera refringente, es decir, hasta donde la curvatura se hace

despreciable y el índice de refracción del medio es la unidad. La tangente al rayo luminoso, que se confunde con su asíntota, forma entonces un ángulo z_l con la vertical en el punto O (Fig. 37.1). Se llama *refracción astronómica* la diferencia:

$$R = z_l - z_0$$

Supongamos ahora que el rayo proviene de un astro E cuya distancia cenital verdadera es z_l . El observador situado en O ve este astro en la dirección de donde le llega la luz, es decir en la dirección de la tangente en O al rayo luminoso, siendo z_o la distancia cenital observada: la refracción astronómica acerca los astros al cenit. Puesto que el producto $n \sin z$ es constante, tenemos:

$$l \sin z_l = n_0 \sin z_0$$

de donde:

$$\sin(z_0 + R) = n_0 \sin z_0 \quad (19.1)$$

R es lo suficientemente pequeño como para que, en primera aproximación, se pueda confundir su seno por el arco expresado en radianes y reemplazar su coseno por la unidad. La ecuación (19.1) es entonces:

$$\sin z_0 + R \cos z_0 = n_0 \sin z_0$$

y haciendo

$$n_0 - 1 = \alpha_0$$

también:

$$R = \alpha_0 \tan z_0 \quad (20.1)$$

fórmula aproximada para $z_0 \leq 60^\circ$.

En condiciones normales de temperatura y presión (0°C , 76 cm de mercurio), el índice de refracción del aire es $n_0 = 1,00029255$ para una longitud de onda de $0",575$, para la cual en general las lentes son acromáticas. Se tiene pues, en tales condiciones:

$$\alpha_0 = 0,00029255 = 60",343$$

valor de la *refracción normal* para $z_0 = 45^\circ$.

A la temperatura t y a la presión P , se tiene, admitiendo la *Ley de Gladstone*:

$$[\alpha_0]_{t,P} = [\alpha_0]_{0^\circ,76} \frac{P}{76} \cdot \frac{273^\circ}{t + 273^\circ}$$

En estas condiciones, para un lugar de observación a la temperatura t (en grados centígrados) y la presión P (en centímetros de mercurio), la refracción valdrá, según (20.1):

$$R = 60'', 343 \frac{P}{76} \cdot \frac{273^\circ}{t + 273^\circ} \tan z_0 \quad (21.1)$$

1.9.2 Fórmula de Laplace

La fórmula (21.1), válida con buena aproximación cerca del cenit, no puede utilizarse para astros que se hallen cerca del horizonte. Entonces no pueden despreciarse la curvatura de la Tierra ni la de las superficies de igual índice de refracción, ya que el rayo luminoso recorre una distancia mucho mayor por la atmósfera refrigente.

Se demuestra que el invariante de la refracción adopta ahora la forma $nrsen z = cte.$, donde r es la distancia al centro de la Tierra, y que la refracción viene dada por la *fórmula de Laplace*:

$$R = \alpha_0 (1 - \beta_0) \tan z_0 - \alpha_0 \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \tan^3 z_0 \quad (22.1)$$

con $\beta_0 = l_0/r_0$, donde l_0 es la latitud que tendría una atmósfera homogénea cuyo peso específico fuera el del aire en O y que ejerciera en O la misma presión que la atmósfera real y r_0 es el radio del observador. Calculando los valores de los coeficientes de $\tan z_0$ y $\tan^3 z_0$ de la fórmula (22.1), en condiciones normales se obtiene para R :

$$R_{0^\circ, 76cm} = 60'', 27 \tan z_0 - 0'', 0669 \tan^3 z_0$$

fórmula válida hasta alrededor de los 80° de distancia cenital.

1.9.3 Refracción en las proximidades del horizonte

Con una buena aproximación, la fórmula de Laplace nos da la refracción astronómica para valores no muy grandes de la distancia cenital, sin hacer ninguna hipótesis sobre la ley de distribución de las densidades en la atmósfera. Si se diera a priori una tal ley, se podría prolongar la fórmula de Laplace y obtener un desarrollo alternado según las potencias impares de $\tan z_0$ (que dejaría de ser convergente en el horizonte) de la forma:

$$\begin{aligned} R = & \alpha_0 (1 - \beta_0) \tan z_0 - \alpha_0 \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \tan^3 z_0 + \\ & + 3\alpha_0 \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2} \right)^2 \tan^5 z_0 - 3.5\alpha_0 \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2} \right)^3 \tan^7 z_0 + \dots \end{aligned} \quad (23.1)$$

La refracción normal vendría dada entonces por la fórmula:

$$R = 60'', 27 \tan z_0 - 0'', 0669 \tan^3 z_0 + 0'', 000222 \tan^5 z_0 - 0'', 00000123 \tan^7 z_0 + \dots$$

Los dos primeros términos de (23.1) nos dan la fórmula de Laplace (22.1) válida para la astronomía meridiana, pues las medidas precisas de las distancias cenitales no se realizan más allá de los 60°.

Hay fórmulas finitas que permiten establecer la refracción cerca del horizonte. Por ejemplo:

$$R = \alpha_0 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin z_0 \cdot \Psi\left(\frac{\cos z_0}{\sqrt{2a}}\right)$$

donde

$$a = \beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}$$

y Ψ representa la función

$$\Psi(x) = e^{x^2} \int_x^\infty e^{-x^2} dx$$

Si en ella tomamos $\alpha_0 = 60",343$ y $a = 0,0011078$ obtenemos, en condiciones normales:

$$R_{0^\circ,76cm} = 2563",5 \sin z_0 \cdot \Psi(21,244 \cos z_0)$$

siendo en el mismo horizonte:

$$R_H = 37'52"$$

La ley empírica, puesta en evidencia con ocasión de la fórmula de Laplace, según la cual la refracción astronómica es prácticamente independiente de la ley de densidad de la atmósfera se verifica de una manera muy satisfactoria hasta la distancia cenital de 85°. Es solamente a partir de observaciones realizadas de 2° ó 3° del horizonte cuando se podrá esperar deducir la ley de densidad. Pero, entonces, las refracciones anormales que se manifiestan con tanta frecuencia a la salida y puesta del Sol, que deforman el disco de un modo tan aparente, restarán mucha precisión a las mediciones.

En el Anuario de San Fernando se da para la refracción la fórmula:

$$R = R_0(1 + A\alpha)(1 + B\beta)$$

donde el factor $R' = R_0(1 + A\alpha)$ se denomina *refracción corregida de temperatura* y donde R_0 es la *refracción normal* calculada para una latitud de 45°, una altitud de cero metros, una temperatura de cero grados centígrados, una presión de 1 tor (a 0°C) y una presión de vapor de agua de 6 mm de mercurio. R_0 está tabulada en función de la distancia cenital. Los parámetros A , B , α , β , también tabulados, son tales que: A es función de la temperatura, B es función de la presión, α es función de la distancia cenital z_0 si $45^\circ \leq z_0 \leq 81^\circ$ y además de la temperatura si $z_0 \geq 81^\circ$ (si $z_0 < 45^\circ$ se toma $\alpha = 1$), b es función de R' si $z_0 > 60^\circ$ (si $z_0 < 60^\circ$ se toma $\beta = 1$).

1.9.4 Corrección de refracción en coordenadas horizontales y horarias

En coordenadas horizontales la refracción sólo modifica la altura, no el acimut. Si el índice o designa las coordenadas observadas y el 1 las corregidas tenemos:

$$a_1 = a_0$$

$$z_1 = z_0 + R$$

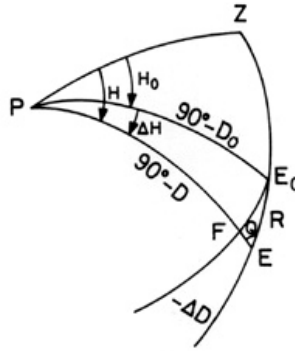


FIG 38.1

Esta situación cambia al considerar un sistema de coordenadas horarias. Sean E la posición real de un astro y E_0 la posición aparente debida a la refracción. E y E_0 se encuentran sobre un mismo vertical y la diferencia de sus alturas constituye la refracción astronómica R (Fig.38.1). Si trazamos por E_0 un paralelo celeste, y llamamos F a su intersección con el horario que pasa por E , obtenemos dos triángulos no esféricos (un paralelo no es, en general, un círculo máximo). No obstante, al ser R pequeño, podemos considerar PFE_0 como un triángulo esférico y FEE_0 como un triángulo plano, con lo que si llamamos:

$$\Delta H = H - H_0$$

$$\Delta D = D - D_0$$

obtenemos (Fig.38.1):

$$\widehat{FE_0} = \cos D_0 \sin \Delta H$$

y como ΔD y ΔH son pequeños:

$$\widehat{FE_0} = \cos(D_0) \Delta H$$

y también:

$$\widehat{FE_0} = R \sin Q$$

$$-\Delta D = R \cos Q$$

siendo Q el ángulo paraláctico. En definitiva, pues:

$$\Delta H = +R \sec D \sin Q$$

$$\Delta D = -R \cos Q$$

Capítulo 2

LA TIERRA

2.1 Elipsoide terrestre

Debido a las irregularidades que presenta la superficie física de la Tierra, se hace necesario asimilarla a una cierta superficie más o menos ideal que reproduzca ciertas magnitudes físicas; es lo que corrientemente denominamos un "modelo".

A. – *Modelo geométrico*

Desde un punto de vista geométrico, la Tierra puede considerarse, en primera aproximación, como una esfera de radio 6.371 km y, en segunda aproximación, como un elipsoide de revolución. La esfera y el elipsoide son equivalentes, tanto en área como en volumen, y el radio de la esfera, llamado *radio medio de la Tierra*, es la media aritmética de los tres semiejes del elipsoide (aproximada al km).

Los elementos del elipsoide de revolución que fue adoptado como "elipsoide internacional" por la Asamblea General de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (U.G.G.I.), celebrada en Madrid en 1924, son:

$$\text{radio ecuatorial: } a = 6.378,388 \text{ km}$$

$$\text{achataamiento: } f = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{297}$$

de los que se deduce:

$$\text{radio polar: } c = 6.356,912 \text{ km}$$

Como consecuencia de los resultados obtenidos mediante la observación de satélites artificiales, en la Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional (U.A.I.), celebrada en Hamburgo en 1964, se recomendó trabajar con los siguientes elementos:

$$a = 6.378,160 \text{ km}$$

$$f = \frac{1}{298,25}$$

Ultimamente, en la Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional que se celebró en Grenoble en 1976, se adoptó un nuevo sistema de constantes astronómicas, designado por IAU (1976), que entró en vigor el 1 de enero de 1984. En él se toma:

$$a = 6.378,140 \text{ km}$$

$$f = \frac{1}{298,257}$$

B.- Modelo dinámico

El potencial creado por la Tierra no es de revolución. Ello se intenta explicar considerando que la Tierra, desde un punto de vista dinámico, se aproxima mediante un elipsoide de tres ejes cuyos elementos son:

$$a = 6.378,2 \text{ km}$$

$$f = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{298,3}$$

$$f_e = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{30.000}$$

donde f y f_e son el *achatamiento polar* y el *achatamiento ecuatorial*, respectivamente.

Desde 1958, por observación de las anomalías orbitales del satélite artificial Vanguard 1958 β_2 , se sabe que, en cuanto se refiere a la distribución de masas, la Tierra tiene *forma de pera*. En la figura 1.2 la comparamos con el elipsoide.

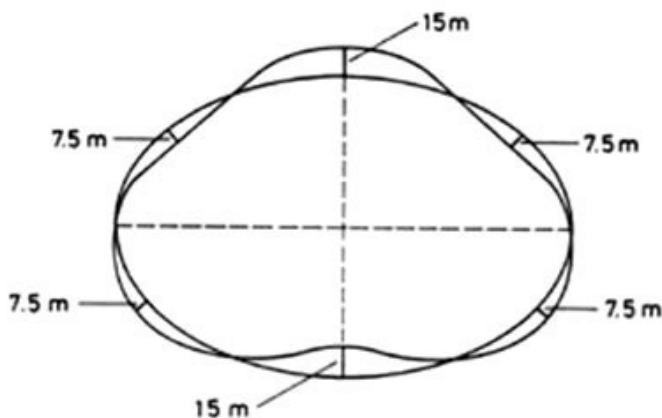


FIG 1.2

El elipsoide de revolución es una sencilla figura geométrica de referencia, pero que se aparta algo de la forma real de la Tierra. Por eso se define el *geoide relativo a un punto* como la superficie ortogonal en cada punto a la dirección de la gravedad. Difiere en ± 100 m del elipsoide de referencia. La figura teórica que se obtiene es una superficie que, coincidiendo con la superficie media de los mares (hecha abstracción de mareas y corrientes), se prolonga hipotéticamente por debajo de los continentes. Para ajustar el geoide real al teórico se ha de efectuar una compensación de masas.

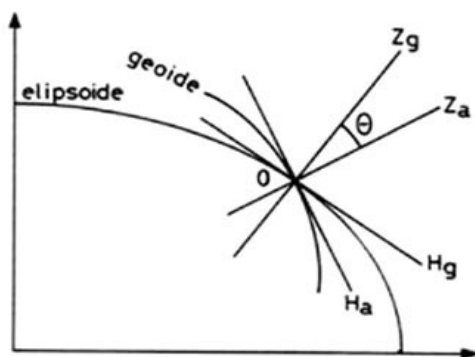


FIG 2.2

Consideremos el elipsoide como figura de referencia y un observador O situado sobre dicho elipsoide. Para este observador O , llamaremos (Fig. 2.2):

Vertical geodésica, Z_g , a la dirección normal al elipsoide en O .

Horizonte geodésico, H_g , al plano tangente al elipsoide en O .

Vertical astronómica, Z_a , a la dirección normal al geoide que pasa por O (la dirección de la plomada).

Horizonte astronómico, H_a , al plano tangente al geoide en O .

Desviación de la vertical, θ , al ángulo que forman las verticales geodésica y astronómica. Su valor varía desde fracciones de segundo a un minuto de arco, lo que provoca errores de medida desde decenas de metros a 2 km.

La Tierra gira alrededor de un eje de rotación instantánea, o eje del mundo, que no coincide ni con el eje de figura del elipsoide ni con el tercer eje del elipsoide central de inercia. Sean (Fig. 3.2): O el centro del elipsoide, T el centro de gravedad de la Tierra, i el eje instantáneo de rotación, e el eje de figura del elipsoide y e' el tercer eje del elipsoide central de inercia. Se definen los siguientes elementos:

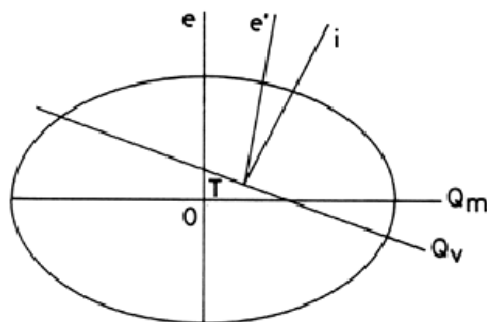


FIG 3.2

Ecuador instantáneo, Q_v , plano que pasa por el centro de gravedad de la Tierra y es ortogonal al eje instantáneo.

Ecuador medio, Q_m , plano que pasa por el centro del elipsoide y es ortogonal al eje de figura.

Latitud astronómica, ángulo que forma la vertical astronómica con el ecuador instantáneo.

Latitud geodésica, ángulo que forma la vertical geodésica con el ecuador medio.

En lo que sigue se considerará que el centro del elipsoide coincide con el centro de gravedad de la Tierra ($O=T$) y que el eje de figura coincide con el tercer eje del elipsoide central de inercia ($e=e'$). Esto equivale a despreciar los desplazamientos de T y de e' , debido a movimientos de masas interiores, y a considerar un eje y un ecuador medios que contienen los tres ejes del elipsoide central de inercia.

2.1.1 Posición sobre la superficie de la Tierra

Entre los diversos autores, no hay un criterio unánime para definir las coordenadas geográficas. Unos consideran como geográficas las astronómicas medias mientras que otros toman como geográficas las geodésicas. Así lo haremos nosotros, llamando *coordenadas geográficas* a las geodésicas, considerando los meridianos y los paralelos sobre un elipsoide de revolución cuyos ejes mayores estén situados en el ecuador medio y cuyo eje menor sea el eje polar medio. La *longitud geográfica* ya ha sido definida en el apartado 1.7.1.

Para fijar la posición de un lugar O situado sobre la superficie de la Tierra, es necesario conocer sus coordenadas rectangulares o polares con respecto a la elipse sección del elipsoide por el meridiano del lugar. Representemos, pues, la sección meridiana del elipsoide terrestre junto con su circunferencia principal (Fig. 4.2).

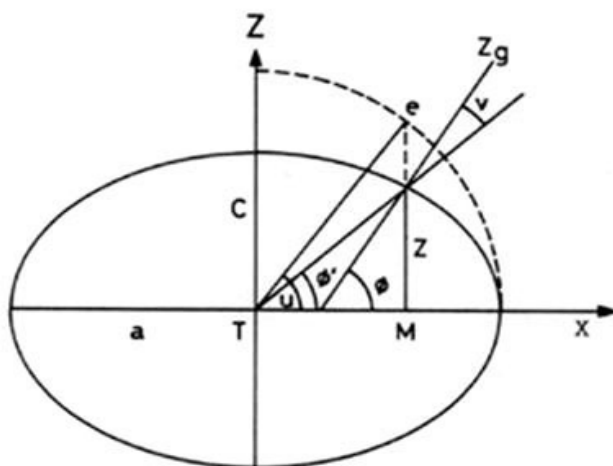


FIG 4.2

Sean T el centro de la Tierra, a el radio ecuatorial y c el radio polar. Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en T y ejes X sobre a y Z sobre c . Sea, además, O un punto cualquiera del elipsoide. Si trazamos la vertical geodésica Z_g (ortogonal al elipsoide) en O , ϕ representará la *latitud geográfica*. Asimismo, ϕ' ,

ángulo del vector de posición de O con el eje X , se denomina *latitud geocéntrica* de O . La diferencia:

$$v = \phi - \phi'$$

se llama *ángulo de la vertical* y, como se demostrará, es siempre $v < 12'$.

Sea Q la intersección de la ordenada por O con el círculo principal. El ángulo u que forma TQ con el eje X se denomina *latitud reducida*.

Se trata de hallar las coordenadas cartesianas (x, z) y las coordenadas polares (a, ρ, ϕ') del punto O , siendo $a\rho$ el radio vector TO del punto O medido en unidades del semieje mayor ($\rho \leq 1$), y, posteriormente, relacionarlas con ϕ .

Recordando que la elipse y su circunferencia principal son afines, según una afinidad ortogonal de eje el mayor de la elipse y razón c/a , podemos escribir:

$$\frac{z}{\overline{MQ}} = \frac{c}{a}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\overline{MQ} = \overline{TQ} \sin u$$

obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \\ z &= c \sin u \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Como, además:

$$\left. \begin{aligned} x &= a\rho \cos \phi' \\ z &= a\rho \sin \phi' \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

de (1.2) y (2.2), dividiendo ordenadamente z entre x e identificando los coeficientes:

$$\tan \phi' = c / a \tan u \quad (3.2)$$

Por otra parte, recordando la pendiente de la normal a una curva, según (1.2), por definición de latitud geográfica:

$$\tan \phi = -\frac{dx}{dz} = -\frac{-a \sin u}{c \cos u} \frac{du}{du} = a / c \tan u \quad (4.2)$$

Comparando con la anterior igualdad (3.2), obtenemos ϕ' en función de ϕ :

$$\tan \phi' = c^2 / a^2 \tan \phi = (1 - f)^2 \tan \phi = (1 - e^2) \tan \phi \quad (5.2)$$

según se sigue de las definiciones de achatamiento, f , y de excentricidad, e .

Si hacemos:

$$\left. \begin{aligned} x &= aC(\phi) \cos \phi \\ z &= aS(\phi) \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

donde $C(\phi)$ y $S(\phi)$ son ciertas funciones de ϕ y calculamos dichas funciones a partir de (1.2) y (6.2), tendremos:

$$C(\phi) = \frac{\cos u}{\cos \phi} = \frac{(1 + \tan^2 u)^{-\frac{1}{2}}}{\cos \phi}$$

y, según (4.2):

$$C(\phi) = \frac{(1 + (1-f)^2 \tan^2 \phi)^{-\frac{1}{2}}}{\cos \phi} = \frac{1}{(\cos^2 \phi + (1-f)^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

y operando:

$$C(\phi) = \frac{1}{(1 - (2f - f^2) \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (7.2)$$

Efectuando los cocientes z/x en (1.2) y (6.2) e identificando, se deduce:

$$c / a \tan u = \frac{S(\phi)}{C(\phi)} \tan \phi$$

y, según (4.2):

$$S(\phi) = (c/a)^2 C(\phi) = (1-f)^2 C(\phi) \quad (8.2)$$

es decir, $S(\phi)$ y $C(\phi)$ son proporcionales. Las fórmulas (6.2), (7.2) y (8.2) permiten hallar las coordenadas cartesianas de $O(x,z)$ en función de ϕ .

Para hallar el radio vector de O en función de ϕ , sumemos los cuadrados de x y z en (2.2) y (6.2) e identifiquémoslos:

$$\rho^2 = C^2 \cos^2 \phi + S^2 \sin^2 \phi$$

y, teniendo en cuenta (8.2):

$$\rho^2 = C^2 (\cos^2 \phi + (1-f)^4 \sin^2 \phi)$$

de donde, finalmente:

$$\rho = C (\cos^2 \phi + (1-f)^4 \sin^2 \phi)^{1/2} \quad (9.2)$$

Para hallar el ángulo de la vertical en función de O escribiremos:

$$\tan v = \tan(\phi - \phi') = \frac{\tan \phi - \tan \phi'}{1 + \tan \phi \tan \phi'}$$

y según (5.2):

$$\tan v = \frac{\tan \phi - (1 - e^2) \tan \phi}{1 + (1 - e^2) \tan^2 \phi} = \frac{e^2 \sin \phi \cos \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi}$$

y teniendo en cuenta que $2 \sin \phi \cos \phi = \sin 2\phi$ y que $\sin^2 \phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi)$, será:

$$\tan v = \frac{1/2 e^2 \sin 2\phi}{1 - e^2/2(1 - \cos 2\phi)} = \frac{e^2 \sin 2\phi}{2 - e^2 + e^2 \cos 2\phi}$$

y haciendo

$$m = \frac{e^2}{2 - e^2}$$

queda finalmente:

$$\tan v = \frac{m \sin 2\phi}{1 + m \cos 2\phi} \quad (10.2)$$

Para hallar el valor máximo de v expresaremos su tangente en función del ángulo auxiliar u ; por (4.2) y (3.2) tendremos:

$$\tan v = \frac{\tan \phi - \tan \phi'}{1 + \tan \phi \tan \phi'} = \frac{(a/c - c/a) \tan u}{1 + \tan^2 u} = \frac{1}{2}(a/c - c/a) \sin 2u$$

v será máximo cuando lo sea $\sin 2u$, es decir, cuando $u = \pi/4$. En tales circunstancias $\tan u = 1$, y (3.2) y (4.2) se reducen a:

$$\tan \phi'_M = c/a \quad (11.2)$$

$$\tan \phi_M = a/c \quad (12.2)$$

de donde:

$$\tan \phi'_M \tan \phi_M = 1$$

lo que implica

$$\phi'_M + \phi_M = \frac{\pi}{2}$$

Recordando que $c/a = 1 - f$ y sustituyendo f por su valor en (11.2) y en (12.2), resulta:

$$\phi_M = 45^\circ 5' 48''$$

$$\phi'_M = 44^\circ 54' 12''$$

y finalmente:

$$v = \phi_M - \phi'_M = 11' 36''$$

2.1.2 Corrección de coordenadas por altitud

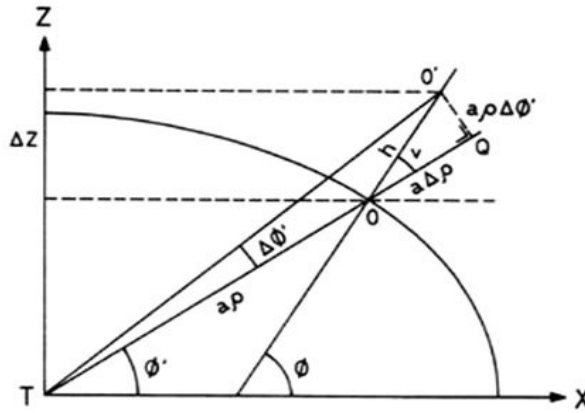


FIG 5.2

Si el observador se encuentra sobre un punto O' situado a una altitud h sobre el elipsoide de referencia, veamos cuáles serán las correcciones Δx , Δz , $\Delta \rho$, $\Delta \phi'$ que aplicadas a las coordenadas de O nos darán las coordenadas de O' (Fig. 5.2). Sea T el centro de la Tierra y TQ la proyección de TO' sobre TO . Tendremos:

$$\overline{OQ} = a\rho + \Delta(a\rho) - a\rho = a\Delta\rho$$

y también

$$\overline{OQ} = h \cos v$$

de donde

$$\Delta\rho = \frac{h}{a} \cos v$$

Si sustituimos la tangente de $\Delta\phi'$ por el arco ($v < 12'$, por lo que es una aproximación razonable), resulta:

$$a(\rho + \Delta\rho)\Delta\phi' = h \sin v$$

y despreciando términos de segundo orden:

$$a\rho\Delta\phi' = h \sin v$$

Si definimos la *altitud reducida* $H=h/a$, obtenemos las correcciones en coordenadas polares:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\rho &= H \cos v \\ \Delta\phi' &= \frac{H}{\rho} \sin v \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

En coordenadas cartesianas la corrección será:

$$\begin{aligned} \Delta x &= h \cos \phi = aH \cos \phi \\ \Delta z &= h \sin \phi = aH \sin \phi \end{aligned}$$

y según (6.2) tendremos:

$$\left. \begin{aligned} x + \Delta x &= a(C(\phi) + H) \cos \phi \\ z + \Delta z &= a(S(\phi) + H) \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

2.2 Paralaje diurna

Las distancias a que se encuentran los astros del sistema planetario de la Tierra no pueden considerarse como infinitas respecto a las dimensiones de ésta, y, por ello, las visuales dirigidas a un mismo astro desde lugares distintos de la Tierra no pueden considerarse paralelas. De ahí se deduce la necesidad de reducir todas las observaciones a un mismo punto con objeto de hacerlas comparables. Este punto es el centro de la Tierra. A las coordenadas así obtenidas se las llama *geocéntricas*, mientras que las relativas a cada observador se denominan *topocéntricas*. La corrección que hay que aplicar para pasar de coordenadas topocéntricas a geocéntricas recibe el nombre de *corrección de paralaje diurna*.

2.2.1 Coordenadas horizontales

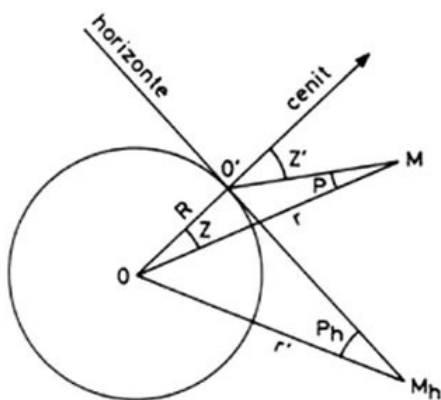


FIG 6.2

En primera aproximación, para comprender el fenómeno, consideremos la Tierra esférica de radio medio R y estudiemos la corrección de paralaje diurna en coordenadas horizontales. Sea O el centro de la Tierra, O' el observador y M y M_h el astro cuando se encuentra en una posición cualquiera y cuando se encuentra sobre el horizonte de O' respectivamente (Fig. 6.2). El plano de la figura es el plano que pasa por O , O' y M ; es decir, el vertical que pasa por M . Dicho plano contiene el cenit del lugar de observación y por consiguiente la paralaje afectará únicamente la altura y no el acimut. Sea r la distancia de M al centro de la Tierra (supuesta constante en el transcurso del día); z la distancia cenital geocéntrica de M y z' la distancia cenital topocéntrica. Sean, además, p la *paralaje en altura* o ángulo bajo el cual se ve desde M el radio de O' y p_h la *paralaje horizontal* o ángulo bajo el cual se ve desde M_h el mismo radio. En el triángulo $OO'M$ se verifica:

$$p = z' - z = h - h' \quad (15.2)$$

y en el $OO'M_h$

$$\text{sen } p_h = \frac{R}{r} \quad (16.2)$$

o aproximando por el ángulo:

$$rp_h = R$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $OO'M$, tenemos:

$$\frac{R}{\text{sen } p} = \frac{r}{\text{sen } z'}$$

es decir,

$$\text{sen } p = \frac{R}{r} \text{sen } z'$$

y por (16.2):

$$\text{sen } p = \text{sen } p_h \text{sen } z' \quad (17.2)$$

Si exceptuamos los satélites artificiales y la Luna, dada la pequeñez de p y p_h , en (17.2) podemos sustituir los senos por los arcos:

$$p = p_h \text{sen } z'$$

y por (15.2):

$$\left. \begin{aligned} z &= z' - p_h \text{sen } z' \\ a &= a' \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

igualdades que constituyen la corrección de paralaje diurna en coordenadas horizontales.

2.2.2 Coordenadas horarias

Consideremos ahora la Tierra como un elipsoide de revolución y estudiemos la corrección de paralaje diurna en coordenadas horarias.

Se llama *paralaje horizontal ecuatorial* p_0 de un astro M el ángulo bajo el cual el radio ecuatorial de la Tierra.

Se verifica:

$$\sin p_0 \approx p_0 = \frac{a}{r}$$

(recordemos que $a = 6.378,140$ km).

En el caso del Sol, se designa por Π_0 su paralaje horizontal ecuatorial cuando se encuentra a una unidad astronómica de distancia ($1 \text{ u.a.} \approx 149,6 \cdot 10^6$ km). Si se toma como unidad de longitud dicha distancia media, Π_0 en segundos valdrá:

$$\Pi_0 = \frac{6738,140}{149,6 \cdot 10^6} \cdot 206265'' = 8'',79$$

Si medimos Π_0 en radianes y las distancias en u.a., el radio del observador será, evidentemente $\Pi_0 \rho$. Para la deducción de la corrección representamos la traza del elipsoide terrestre por el plano meridiano que pasa por el observador O' , y trasladamos su sistema local de coordenadas horarias X',Y',Z' , al centro de la Tierra, conservando fijo el plano $X'Y'$. Tendremos el sistema X,Y,Z , donde XZ define el mismo plano que $X'Z'$ (Fig. 7.2). Sean (r,H,D) las coordenadas horarias geocéntricas de un astro M y (r',H',D') las coordenadas horarias topocéntricas del mismo. ϕ' y ρ se obtienen de ϕ , λ , h , supuestas conocidas.

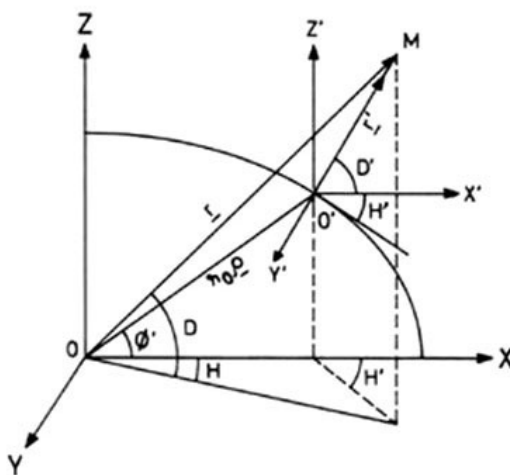


FIG 7.2

Es evidente que

$$\vec{r} = \vec{r}' + \Pi_0 \vec{\rho} \quad (19.2)$$

donde ρ está contenido en el plano meridiano de O' . Expresando (19.2) por sus componentes obtenemos las relaciones

$$\left. \begin{aligned} r \cos D \cos H &= r' \cos D' \cos H' + \Pi_0 \rho \cos \phi' \\ r \cos D \sin H &= r' \cos D' \sin H' \\ r \sin D &= r' \sin D' + \Pi_0 \rho \sin \phi' \end{aligned} \right\} \quad (20.2)$$

que constituye un sistema de tres ecuaciones que nos permite determinar las tres incógnitas r , H , D . Si el astro M se encuentra muy alejado ($\Pi_0 \vec{\rho} \ll \vec{r}$), pueden simplificarse los cálculos mediante el empleo de fórmulas diferenciales.

Consideremos el anterior sistema de coordenadas X, Y, Z , de centro O , y un sistema de coordenadas X'', Y'', Z'' (Fig. 8.2) con centro en el astro M definido de la siguiente forma:

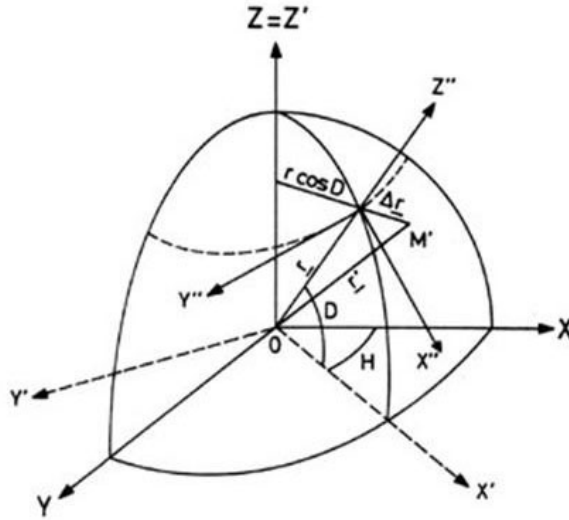


FIG 8.2

Eje X'' tangente al meridiano de M creciente en el sentido de las declinaciones decrecientes; eje Y'' tangente al paralelo de M creciente en el sentido de los horarios crecientes; eje Z'' en la dirección y sentido creciente del radio vector $\vec{r}$, estando los dos triedros orientados en sentido retrógrado. Podemos pasar de una base a otra mediante un número finito de rotaciones.

Si definimos:

$$\begin{aligned} \Delta r &= r' - r, & \Delta H &= H' - H \\ \Delta D &= D' - D, \end{aligned} \quad (21.2)$$

siendo las magnitudes con tilde las topocéntricas y las otras las geocéntricas, según (19.2):

$$\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = -\Pi_0 \vec{\rho}$$

y según (20.2):

$$\Delta \vec{r} = -\Pi_0 \vec{\rho} \begin{bmatrix} \cos \phi' \\ 0 \\ \sin \phi' \end{bmatrix}_{XYZ}$$

Si consideramos a $\Delta \vec{r}$ como un vector libre, lo podemos situar con origen en el astro M y hallar sus coordenadas con respecto a la base $X'' Y'' Z''$ que obtendremos en función de las correcciones (21.2). Representando las dos expresiones de $\Delta \vec{r}$ en esta misma base $X'' Y'' Z''$ e identificando obtendremos un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas serán las correcciones (21.2).

Para ello descompongamos $\Delta \vec{r}$ según sus componentes diferenciales en $X'' Y'' Z''$

$$\Delta \vec{r} = \begin{bmatrix} -r\Delta D \\ r \cos D \Delta H \\ \Delta r \end{bmatrix}_{X''Y''Z''}$$

(la primera componente es negativa al considerarla en el sentido de las declinaciones decrecientes). Pasemos las componentes de $\Delta \vec{r}$ según XYZ a las componentes según $X''Y''Z''$, para lo cual se precisan dos giros: uno de amplitud H alrededor de Z que transforma $X Y Z$ en $X'Y'Z'$, y otro de amplitud $90^\circ - D$ alrededor del eje Y' que transforma $X'Y'Z'$ en $X''Y''Z''$.

El primero tiene lugar alrededor del tercer eje, en sentido positivo, luego se consigue aplicando $R_3(H)$; el segundo alrededor del segundo eje y también en sentido positivo, es decir, se consigue aplicando la matriz $R_2(90^\circ - D)$. Luego, tendremos:

$$\begin{bmatrix} -r\Delta D \\ r \cos D \Delta H \\ \Delta r \end{bmatrix}_{X''Y''Z''} = R_2(90^\circ - D) R_3(H) \begin{bmatrix} -\Pi_0 \rho \cos \phi' \\ 0 \\ -\Pi_0 \rho \sin \phi' \end{bmatrix}_{XYZ}$$

$$\begin{bmatrix} \sin D & 0 & -\cos D \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos D & 0 & \sin D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos H & \sin H & 0 \\ -\sin H & \cos H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Pi_0 \rho \cos \phi' \\ 0 \\ -\Pi_0 \rho \sin \phi' \end{bmatrix}_{XYZ}$$

y operando e identificando:

$$\left. \begin{aligned} -r\Delta D &= -\Pi_0 \rho (\cos \phi' \sin D \cos H - \sin \phi' \cos D) \\ r \cos D \Delta H &= \Pi_0 \rho \cos \phi' \sin H \\ \Delta r &= -\Pi_0 \rho (\cos \phi' \cos D \cos H + \sin \phi' \sin D) \end{aligned} \right\} \quad (22.2)$$

En Astronomía de posición sólo se consideran las dos primeras igualdades. Teniendo en cuenta que $\theta=A+H$, por lo que $\Delta H = -\Delta A$, y que Π_0 viene expresado en segundos de arco, tenemos:

$$\begin{aligned}\Delta D &= \frac{\Pi_0 \rho (\cos \phi' \sin D \cos H - \sin \phi' \cos D)}{r} \\ \Delta A &= -\frac{1}{15} \frac{\Pi_0 \rho \cos \phi' \sin H \sec D}{r}\end{aligned}\quad (23.2)$$

donde r se mide en unidades astronómicas y ΔA vendrá expresado en segundos de tiempo. Dichas igualdades también se escriben:

$$\begin{aligned}\Delta D &= -\frac{P_D}{r} \\ \Delta A &= -\frac{P_A}{r}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}P_D &= -\Pi_0 \rho (\cos \phi' \sin D \cos H - \sin \phi' \cos D) \\ P_A &= \frac{\Pi_0 \rho \cos \phi' \sec D \sin H}{15}\end{aligned}$$

denominándose P_D *factor paraláctico en declinación* y P_A *factor paraláctico en ascensión recta*.

Por definición de ΔA y ΔD es:

$$\left. \begin{aligned}A &= A' + \frac{P_A}{r} \\ D &= D' + \frac{P_D}{r}\end{aligned} \right\} \quad (24.2)$$

Los factores $\cos \phi$ y $\sin \phi$ se pueden obtener de los Anuarios para distintas latitudes en función de S , C y ϕ (ver, por ejemplo, "Efemérides Astronómicas", Instituto y Observatorio de Marina, San Fernando (Cádiz)). Para hallar r se parte observaciones simultáneas de M desde dos puntos distintos de la Tierra. En un mismo instante será:

$$\begin{aligned}A &= A'_1 + \frac{P_{A'_1}}{r} = A'_2 + \frac{P_{A'_2}}{r} \\ D &= D'_1 + \frac{P_{D'_1}}{r} = D'_2 + \frac{P_{D'_2}}{r}\end{aligned}$$

debiéndose obtener la misma r a partir de las ascensiones rectas y declinaciones. En el cálculo de los factores paralácticos es indiferente tomar coordenadas topocéntricas o geocéntricas.

2.3 Potencial terrestre

2.3.1 Expresión del campo gravitacional terrestre bajo la forma de un desarrollo en polinomios de Legendre

Sea P un punto de la superficie de la Tierra o exterior a ella, sometido a la atracción de la partícula de masa dm situada en el interior de la Tierra. Sea O , centro de gravedad de la Tierra (la cual suponemos de forma cualquiera y de masa M) el origen de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares X, Y, Z ; $\vec{d}$ el vector de posición de dm y $\vec{r}$ el vector de posición de P , con respecto a O ; sea además $\vec{r}'$ el vector con origen en el elemento de masa dm y extremo en el punto P y ψ el ángulo

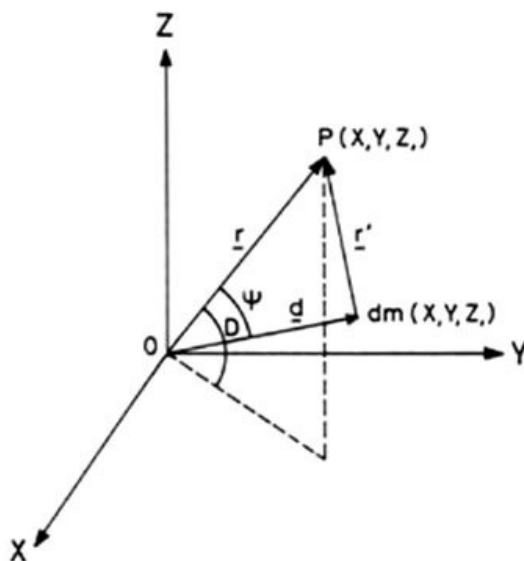


FIG 9.2

que forman los vectores $\vec{r}$ y $\vec{d}$ (Fig. 9.2). El potencial en el punto P debido a dicha masa es:

$$dV = G \frac{dm}{r'} \quad (25.2)$$

donde G es la constante de la gravitación universal y

$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \psi = r^2(1 - 2h \cos \psi + h^2)$$

con

$$h = \frac{d}{r} < 1$$

Se tiene, sustituyendo en (25.2):

$$dV = G \frac{dm}{r} (1 - 2h \cos \psi + h^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (26.2)$$

La expresión entre paréntesis puede ser desarrollada en serie convergente de polinomios en ψ , llamados *polinomios de Legendre* [1].

$$(1 - 2h \cos \psi + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos \psi)$$

polinomios cuya expresión general es:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (x = \cos \psi)$$

siendo los primeros:

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4 = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

El potencial V debido a la masa total M de la Tierra será, pues:

$$V = \frac{G}{r} \int_M \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{r} \right)^n P_n(\cos \psi) \right] dm \quad (27.2)$$

Integraremos el segundo miembro de (27.2), para lo cual procederemos término a término:

$$V_0 = \frac{G}{r} \int_M dm = \frac{MG}{r}$$

$$V_1 = \frac{G}{r} \int_M \frac{d}{r} \cos \psi dm = \frac{G}{r} \int_M d \cos \psi dm =$$

$$= \frac{G}{r^2} \int_M \vec{d} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cos \psi dm = \frac{G}{r^2} \int_M (xl + yp + zn) dm$$

siendo (l, p, n) las componentes del vector $\frac{\vec{r}}{r}$ y (x, y, z) las del vector $\vec{d}$.

Pero, si el origen del sistema de referencia está situado en el centro de masas de la Tierra, es:

$$\int_M x \, dm = \int_M y \, dm = \int_M z \, dm = 0$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_2 &= \frac{G}{2r^3} \int_M d^2 (3 \cos^2 \psi - 1) dm \end{aligned} \quad (28.2)$$

Para obtener esta nueva integral, teniendo en cuenta que $l^2 + p^2 + n^2 = 1$, hagamos:

$$\begin{aligned} d^2 (3 \cos^2 \psi - 1) &= 3(xl + yp + zn)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= 3x^2(1 - p^2 - n^2) + 3y^2(1 - l^2 - n^2) + \\ &\quad + 3z^2(1 - l^2 - p^2) - x^2 - y^2 - z^2 + 6lpxy + 6lnxz + 6pnyz \end{aligned}$$

Sustituyendo en (28.2) tendremos:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{G}{2r^3} \left\{ \int_M (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dm + \right. \\ &\quad + \int_M \left[-3l^2(y^2 + z^2) - 3p^2(x^2 + z^2) - 3n^2(x^2 + y^2) \right] dm \\ &\quad + \int_M 6(lpxy + nlxz + pnyz) dm \left. \right\} \\ &= \frac{G}{2r^3} \left\{ A + B + C - 3(A l^2 + B p^2 + C n^2) + 6(Hlp + Gnl + Fpn) \right\} \end{aligned}$$

habiéndose tenido en cuenta, para integrar, las relaciones que nos dan los momentos de inercia con relación a los ejes coordenados:

$$A = \int_M (y^2 + z^2) dm \quad B = \int_M (x^2 + z^2) dm \quad C = \int_M (x^2 + y^2) dm$$

y los momentos centrífugos con relación a los planos coordenados:

$$F = \int_M yz \, dm \quad G = \int_M xz \, dm \quad H = \int_M xy \, dm$$

siendo el tensor de inercia:

$$I = \begin{pmatrix} A & -H & -G \\ -H & B & -F \\ -G & -F & C \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en (27.2) tendremos:

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots$$

es decir, teniendo en cuenta que la traza del tensor de inercia es:

$$\bar{I} = A + B + C$$

y que

$$I \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)^2 = Al^2 + Bp^2 + Cn^2 - 2Hlp - 2Gnl - 2Fpn$$

resultará

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3} \bar{I} - \frac{3G}{2r^3} I \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)^2 + \dots$$

o también:

$$V = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} \left(\frac{3}{r^2} I \cdot r^2 - \bar{I} \right) \quad (29.2)$$

2.3.2 Simplificaciones

Si la Tierra presentase una distribución esférica de masas, sería:

$$A = B = C \quad F = G = H = 0$$

y entonces:

$$\frac{3}{r^2} I \cdot \vec{r}^2 - \bar{I} = 0$$

y por tanto

$$V = \frac{GM}{r}$$

Si como caso particular tomamos como ejes coordenados X, Y, Z los principales de inercia de la Tierra con respecto a su centro de gravedad, los momentos centrífugos F, G, H son nulos y sólo quedan los momentos principales A, B, C . Si además suponemos que la distribución de masas de la Tierra es de revolución alrededor del tercer eje principal de inercia (eje Z), los momentos principales de inercia serán iguales ($A=B$) y entonces I adoptará la forma

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

con lo que

$$I\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)^2 = A(l^2 + p^2) + Cn^2$$

y el potencial será:

$$\begin{aligned} V &= \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} [3A(l^2 + p^2) + 3Cn^2 - 2A - C] = \\ &= \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} [3A(l^2 + p^2 + n^2) + 3Cn^2 - 3An^2 - 2A - C] \end{aligned}$$

y recordando que $l^2 + p^2 + n^2 = 1$:

$$V = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} (C - A)(3n^2 - 1) \quad (30.2)$$

Para astros suficientemente alejados podemos suponer que el ecuador terrestre es el plano determinado por los dos ejes principales iguales X, Y . Entonces, el ángulo formado por la recta que une el centro de masas O con el punto $P(X, Y, Z)$ y el ecuador es la declinación D de P , siendo

$$\text{sen } D = \frac{Z}{r} = n$$

Haciendo además

$$GM = \mu \quad \frac{3}{2} \frac{C - A}{Ma^2} = J$$

donde a representa el radio ecuatorial de la Tierra, y sustituyendo en (30.2), tenemos:

$$V = \frac{\mu}{r} \left[1 - \frac{J}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \text{sen}^2 D - 1) \right] \quad (31.2)$$

Si hubiésemos considerado más términos de la serie (27.2), hubiésemos obtenido

$$V = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_2^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_n(\text{sen } D) \right] \quad (32.2)$$

donde P_n son los polinomios de Legendre y J_n son los *armónicos o momentos de orden* n de la Tierra.

Comparando la fórmula (31.2) y la (32.2) escrita para $n=2$, deducimos que $J_2 = 2/3J$, es decir:

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2}$$

J_2 recibe el nombre de *factor de la forma dinámica de la Tierra* y es una de las constantes primarias de la Astronomía y Geodesia. Su valor actual (sistema de constantes IAU (1976)) es:

$$J_2 = 0,00108263$$

Los armónicos J_3 y J_4 son negativos y del orden de $-2 \cdot 10^{-6}$. El primer armónico que denota la “forma de pera” de la Tierra es el J_3 , lo cual es debido a que P_3 es impar en $\sin D$ y, por tanto, en D . Dicha forma implica que el plano ecuatorial no sea de simetría del potencial.

2.3.3 Aceleración j de la gravitación

De la expresión (31.2) podemos deducir las componentes de la aceleración total J :

$$j_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2} \left[1 - J \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \sin^2 D - 1) \right] \quad (33.2)$$

$$j_p = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\mu}{r^2} J \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin 2D$$

Si la Tierra presentase una distribución esférica de densidades sería $J = 0$ y

$$j_r = \frac{\mu}{r^2} \quad j_p = 0$$

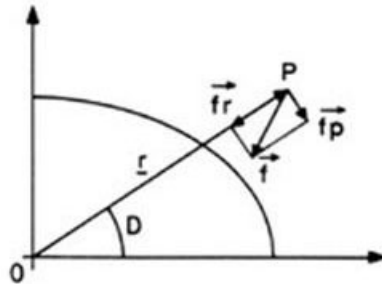


FIG 10.2

Pero, J es distinto de cero, y en un punto simétrico, con declinación $-D$, la aceleración radial j_r es la misma y la aceleración perpendicular j_p varía de signo pues en ella figura el $\sin 2D$. En cambio, si la declinación es complementaria la componente perpendicular es la misma:

$$\sin 2(90^\circ - D) = \sin (180^\circ - 2D) = \sin 2D$$

A igualdad de distancia r , la componente perpendicular de la aceleración es máxima a los 45° . Por otra parte j_p se anula en el ecuador y en los polos.

Si tenemos en cuenta (29.2):

$$\vec{j} = -\text{grad } V = \left[\frac{GM}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{G}{r^5} (I \cdot \vec{r}^2 - \bar{I}) \right] + \frac{3G}{r^5} I \cdot \vec{r} \quad (34.2)$$

El primer término es central. El tensor I aplicado al vector $\vec{r}$ de componentes (X,Y,Z) es:

$$I \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} AX - HY - GZ \\ -HX + BY - FZ \\ -GX - FY + CZ \end{bmatrix}$$

2.4 Potencial de la gravedad

Si un punto P está situado sobre la superficie de la Tierra, además de experimentar una *aceleración* debida a su *atracción* experimenta una *aceleración* debida a su *rotación*. Gravedad $\vec{g}$ es la resultante de la aceleración de la gravitación $\vec{j}$ y de la aceleración centrífuga $\vec{j}_c$.

$$\vec{g} = \vec{j} + \vec{j}_c$$

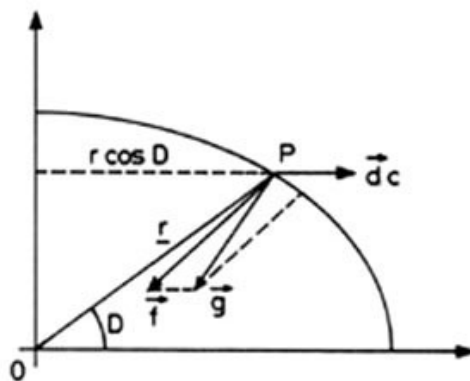


FIG 11.2

[1] si desarrollamos por la fórmula del binomio de Newton $(1 - (2h \cos \psi - h^2))^{-\frac{1}{2}}$ los coeficientes de h^n son los polinomios $P_n(\cos \psi)$.

En la Fig. 11.2 $\vec{r} = a\vec{\rho}$, $D = \phi'$ (latitud geocéntrica). El radio de giro es $r \cos D$ y, por tanto, si llamamos ω a la velocidad angular de la Tierra, la aceleración centrífuga vale

$$j_c = \omega^2 r \cos D$$

y deriva de un potencial centrífugo

$$V' = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 D \quad (35.2)$$

El potencial de la gravedad será la suma de los potenciales gravitatorio terrestre y centrífugo:

$$W = V + V' \quad (36.2)$$

Llamando q al cociente entre la aceleración centrífuga y la atracción en el ecuador, suponiendo la Tierra esférica de radio ecuatorial a

$$q = \frac{\omega^2 a}{\frac{\mu}{a^2}} = \frac{\omega^2 a^2}{\mu}$$

se tiene, sustituyendo (31.2) y (35.2) en (36.2), teniendo en cuenta este valor de q :

$$W = \frac{\mu}{r} \left[1 - \frac{J}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \sin^2 D - 1) + \frac{q}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cos^2 D \right] \quad (37.2)$$

El geoide es una superficie equipotencial de la gravedad, es decir que ω se mantiene constante sobre la superficie del geoide. En consecuencia, si igualamos la expresión (37.2) a una constante, tendremos en forma aproximada (pues hemos escrito para el potencial V sólo los términos hasta 2º orden), la ecuación del geoide ($W = \text{Cte.}$). Pero, esta ecuación es difícil de manejar, por lo que se aproxima al geoide por el elipsoide. Dado que el elipsoide difiere del geoide en ± 100 m, supondremos que coinciden, es decir, consideraremos la superficie del elipsoide como una superficie equipotencial de la gravedad. En particular, el potencial será el mismo en el ecuador que en el polo.

En el ecuador,

$$r = a, \quad D = 0$$

$$W_a = \frac{\mu}{a} \left[1 + \frac{J}{3} + \frac{q}{2} \right]$$

en el polo,

$$r = c, \quad D = 90^\circ$$

$$W_c = \frac{\mu}{c} \left[1 - \frac{2}{3} J \left(\frac{a}{c} \right)^2 \right]$$

e igualando ambas expresiones:

$$1 + \frac{J}{3} + \frac{q}{2} = \frac{a}{c} \left[1 - \frac{2}{3} J \left(\frac{a}{c} \right)^2 \right] \quad (38.2)$$

y recordando que el achatamiento es

$$f = 1 - \frac{c}{a}$$

se tiene

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{1-f} \approx 1+f \quad (\text{despreciando términos a partir de } f^2)$$

y sustituyendo en (38.2):

$$1 + \frac{J}{3} + \frac{q}{2} \approx (1+f) \left[1 - \frac{2}{3} J (1+f)^2 \right]$$

operando y despreciando términos a partir de f^2 :

$$1 + \frac{J}{3} + \frac{q}{2} \approx (1+f) \left[1 - \frac{2}{3} J (1+2f) \right] \approx 1+f - \frac{2}{3} J (1+3f)$$

y, como según la observación, J y f son del mismo orden:

$$1 + \frac{J}{3} + \frac{q}{2} = 1 + f - \frac{2}{3} J$$

de donde

$$J = f - \frac{q}{2} \quad (39.2)$$

fórmula que nos dice que J puede conocerse a partir de f mediante triangulaciones geodésicas.

Por ser W el potencial de la gravedad se verifica:

$$\vec{g} = -\text{grad } W$$

siendo $\vec{g}$ ortogonal al elipsoide en cada punto, por lo que su componente en la dirección del radio vector será

$$g \cos \nu = -\frac{\partial W}{\partial r} \quad (40.2)$$

donde v es el ángulo de la vertical (radio vector normal) cuyo desarrollo en función de la latitud geodésica es

$$v = \phi - \phi' = m \sin 2\phi - \frac{m^2}{2} \sin 4\phi + \dots$$

donde

$$m = f(1 + \frac{f}{2}) \approx f$$

luego,

$$v \approx f \sin 2\phi$$

y desarrollando en serie cos v :

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2} + \dots = 1 - \frac{1}{2} f^2 \sin^2 2\phi + \dots = 1 + O(f^2)$$

y

$$\frac{1}{\cos v} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} f^2 \sin^2 2\phi + \dots} = 1 + O(f^2)$$

Por consiguiente, según (40.2):

$$g = -\frac{\partial W}{\partial r} \frac{1}{\cos v} - \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2} \left[1 - J \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \sin^2 D - 1) - q \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cos^2 D \right] \quad (41.2)$$

Tengamos en cuenta que r y D no son independientes sobre el elipsoide y veamos como varía g con la declinación. Para ello, vamos a hallar una relación entre r y D . A partir de la ecuación cartesiana de la elipse

$$\frac{r^2 \cos^2 D}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 D}{c^2} = 1$$

operando y considerando errores en f^2 :

$$\frac{r^2}{a^2} \left[(1 - \sin^2 D) + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 D \right] \approx \frac{r^2}{a^2} \left[(1 - \sin^2 D) + (1 + 2f) \sin^2 D \right] = \frac{r^2}{a^2} (1 + 2f \sin^2 D) = 1$$

Por tanto

$$\frac{r}{a} = (1 + 2f \sin^2 D)^{-1/2} \approx 1 - f \sin^2 D$$

$$\frac{a}{r} = (1 + 2f \sin^2 D)^{1/2} \approx 1 + f \sin^2 D$$

y sustituyendo en (41.2) obtenemos:

$$g = \frac{\mu}{r^2} \left[1 - J \left(1 + f \sin^2 D \right)^2 (3 \sin^2 D - 1) - q \left(1 - f \sin^2 D \right)^3 \cos^2 D \right] = \\ = \frac{\mu}{r^2} \left[1 - J \left(1 + 2f \sin^2 D \right) (3 \sin^2 D - 1) - q \left(1 - 3f \sin^2 D \right) \cos^2 D \right]$$

que puede escribirse en la forma

$$g = g_a (1 + k \sin^2 D) + O(f^2) \quad (42.2)$$

En esta expresión (42.2) debemos determinar el valor de k , para lo cual tenemos en cuenta que en el polo $D = 90^\circ$, $\sin D = 1$ y

$$g_c = g_a (1 + k) \quad (43.2)$$

por consiguiente:

$$k = \frac{g_c}{g_a} - 1 \quad (44.2)$$

Conoceremos, pues, k cuando calculemos el valor de la gravedad en el ecuador y en el polo.

El valor de la gravedad en el ecuador es:

$$g_a = \frac{\mu}{a^2} (1 + J - q)$$

y sustituyendo J por su valor (39.2), tendremos:

$$g_a = \frac{\mu}{a^2} \left(1 + f - \frac{3q}{2} \right)$$

expresión llamada *fórmula de Jeffreys*. Observemos que si la Tierra no girase, $q = 0$, y no fuese achatada, $f = 0$, sería

$$g_a = \frac{\mu}{a^2}$$

Procediendo, análogamente que en la deducción de la fórmula de Jeffreys, podemos deducir, a partir de (41.2) el valor de la gravedad en el polo

$$r = c, \quad D = 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
 g_c &= \frac{\mu}{c^2} [1 - 2J(1 + 2f)] = \frac{\mu}{c^2} \left[1 - 2 \left(f - \frac{q}{2} \right) (1 + 2f) \right] \approx \frac{\mu}{c^2} \left[1 - 2 \left(f - \frac{q}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{\mu}{a^2} \frac{a^2}{c^2} (1 - 2f + q) \approx \frac{\mu}{a^2} (1 + 2f)(1 - 2f + q) \approx \frac{\mu}{a^2} (1 + q)
 \end{aligned}$$

y sustituyendo g_a y g_c en (44.2) y operando:

$$k = \frac{\frac{\mu}{a^2} (1 + q)}{\frac{\mu}{a^2} \left(1 + f - \frac{3q}{2} \right)} - 1 \approx (1 + q) \left(1 - f + \frac{3}{2} q \right) - 1 \approx \frac{5}{2} q - f$$

y llevando a (42.2) el valor de k , finalmente:

$$g = g_a \left[1 + \left(\frac{5}{2} q - f \right) \sin^2 D \right] \quad (45.2)$$

expresión llamada *fórmula de Clairaud*, gracias a la cual podemos conocer f utilizando únicamente mediciones gravimétricas. Es decir, midiendo la gravedad con un péndulo en distintos puntos de la Tierra podremos determinar su forma.

En la práctica la fórmula de Clairaud suele darse en función de la latitud geográfica ϕ

$$g = g_a \left[1 + \left(\frac{5}{2} q - f \right) \sin^2 \phi \right]$$

Veamos el error que cometemos con esta aproximación. Recordemos que

$$\phi' = \phi - m \sin 2\phi + \dots \approx \phi - f \sin 2\phi + \dots$$

Luego:

$$\sin \phi' = \sin (\phi - f \sin 2\phi) = \sin \phi \cos (f \sin 2\phi) - \cos \phi \sin (f \sin 2\phi)$$

y desarrollando en serie:

$$\sin \phi' = \sin \phi \left(1 - \frac{f^2}{2} \sin^2 2\phi + \dots \right) - \cos \phi (f \sin 2\phi - \dots)$$

y como que $D = \phi'$

$$\sin D = \sin \phi - f \cos \phi \sin 2\phi + O(f^2)$$

Elevando al cuadrado y considerando errores en f^2 como hasta ahora:

$$\sin^2 D = \sin^2 \phi - 2f \sin \phi \cos \phi \sin 2\phi = \sin^2 \phi - f \sin^2 2\phi$$

si introducimos $\sin^2 D$ en (45.2), vendrá multiplicado por un término lineal en f y por tanto, el término $-f \sin^2 2\phi$ será del orden de f^2 y lo podremos despreciar. Vemos pues que al sustituir $\sin^2 D$ por $\sin^2 \phi$ cometemos un error del orden de f^2 que es el error en que nos movemos.

Si no despreciásemos dichos términos obtendríamos:

$$g = 978,0318(1 + 0,0053024 \sin^2 \phi - 0,0000059 \sin^2 2\phi) \quad (46.2)$$

(según acuerdo de la Asamblea General de la Unión Internacional de Geodesia celebrada en Moscú el año 1971).

2.4.1 Corrección por altitud

La expresión (46.2) ha de corregirse de varios factores, entre los cuales el más importante es la altitud del observador. Suponiendo que la Tierra no gira ($q=0$) y que es una esfera de radio r (no es achatada) se tiene, según (41.2):

$$g = \frac{\mu}{r^2}$$

y diferenciando:

$$dg = -\frac{2\mu}{r^3} dr = -\frac{2g}{r} dr$$

por lo tanto a la gravedad que hemos obtenido se le tiene que restar la corrección debida a la altitud. Si llamamos h a la altitud expresada en metros, el término correctivo vale $-0,0003090 h \text{ cm/seg}^2$.

2.5 Rotación libre

Consideremos la Tierra como un sólido rígido e introduzcamos dos sistemas de referencia directos: uno inercial X,Y,Z y otro solidario a la Tierra x,y,z ambos con origen en el centro de gravedad de la misma. Interesa estudiar, en los dos sistemas, la rotación de la Tierra libre de fuerzas exteriores.

Sean:

$\vec{E}$	el momento cinético de la Tierra respecto al sistema inercial,
$\vec{\Omega}$	la velocidad angular de la Tierra respecto al sistema inercial,
$\vec{H}$	el momento cinético de la Tierra respecto al sistema móvil,
$\vec{\omega}$	la velocidad angular de la Tierra respecto al sistema móvil,
I	el tensor de inercia de la Tierra,
$\vec{N}$	el momento de las fuerzas exteriores.

En la rotación libre de un cuerpo se considera que, sobre el mismo, no actúan fuerzas exteriores al sistema, por lo que

$$\vec{N} = \vec{0}$$

2.5.1 Movimiento respecto al sistema inercial

En el sistema inercial se verifica

$$\vec{\Xi} = I \cdot \vec{\Omega}$$

derivando esta expresión respecto al tiempo, teniendo en cuenta que al considerar la Tierra como un sólido rígido es $I = \text{cte.}$, tenemos:

$$\dot{\vec{\Xi}} = I \cdot \dot{\vec{\Omega}} \quad (47.2)$$

pero en un sistema inercial (y sólo en un sistema inercial)

$$\dot{\vec{\Xi}} = \vec{N}$$

por tanto, en la rotación libre, $\dot{\vec{\Xi}} = \vec{0}$. Es decir, *el momento cinético se mantiene constante* con respecto al tiempo. Además, según la expresión (47.2)

$$I \cdot \dot{\vec{\Omega}} = \vec{0} \quad (48.2)$$

que constituye un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas (las componentes de $\dot{\vec{\Omega}}$), cuya matriz de los coeficientes es I . Como que el determinante de I no es nulo, la única solución del sistema (48.2) es la trivial:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$$

por lo que $\vec{\Omega}$ *también es constante*. En conclusión, la velocidad angular de la Tierra se mantiene constante y su eje de rotación permanece fijo en el espacio.

2.5.2 Movimiento respecto al sistema no inercial

Sabemos que la relación entre las variaciones respecto al tiempo de un vector genérico $\vec{G}$ en los ejes inerciales y en los ejes móviles es:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \wedge \vec{G}$$

por lo que en particular se verificará:

$$\frac{d\vec{\Xi}}{dt} = \frac{dH}{dt} + \vec{\omega} \wedge H$$

Pero,

$$\dot{\vec{\Xi}} = \vec{N} \quad y \quad \vec{H} = I \cdot \vec{\omega}$$

y por tanto:

$$I \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge I \vec{\omega} = \vec{0}$$

que es la ecuación diferencial de la rotación libre llamada *ecuación de Euler*.

Sabemos que si suponemos coincidentes los ejes x,y,z con los ejes principales de inercia de la Tierra y, además, suponemos que la distribución de masas presenta simetría de revolución alrededor del eje z (hipótesis muy próxima a la realidad), el tensor de inercia adopta la forma diagonal

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Si designamos por p,q,r las componentes de $\vec{\omega}$ en el sistema móvil, la ecuación de Euler se escribe:

$$\begin{pmatrix} A\dot{p} \\ A\dot{q} \\ C\dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Ap \\ Aq \\ Cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O también:

$$\begin{pmatrix} A\dot{p} \\ A\dot{q} \\ C\dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (C-A)qr \\ -(C-A)pr \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que equivale al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left. \begin{aligned} A\dot{p} + (C-A)qr &= 0 \\ A\dot{q} - (C-A)pr &= 0 \\ C\dot{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49.2)$$

De la última ecuación se deduce directamente que la componente r de $\vec{\omega}$ según el eje z es invariable.

Si r es constante, también lo será $\mu = \frac{C-A}{A}r$ y sustituyendo en (49.2) tendremos

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} + \mu q &= 0 \\ \dot{q} - \mu p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50.2)$$

Derivando la primera de las ecuaciones (50.2), obtenemos:

$$\ddot{p} + \mu \dot{q} = 0$$

pero, según la segunda

$$\dot{q} = \mu p$$

por lo que

$$\ddot{p} + \mu^2 p = 0$$

cuya solución es

$$p = C_1 e^{i\mu t} + C_2 e^{-i\mu t}$$

Pero, por el teorema de Euler:

$$p = a \cos(\mu t + b) \quad (a \text{ y } b \text{ ctes.})$$

y tomando convenientemente el origen de tiempos:

$$p = a \cos(\mu t)$$

Sustituyendo en la segunda de las ecuaciones (50.2):

$$\dot{q} = \mu a \cos \mu t$$

cuya solución es:

$$q = a \operatorname{sen} \mu t$$

En definitiva, la solución del sistema (49.2) es:

$$\left. \begin{aligned} p &= a \cos \mu t \\ q &= a \operatorname{sen} \mu t \\ r &= \text{constante} \end{aligned} \right\}$$

por lo que

$$\omega = |\vec{\omega}| = p^2 + q^2 + r^2 = cte$$

es decir, $\vec{\omega}$ es de módulo constante.

Por otra parte, que la componente r según z de $\vec{\omega}$ sea constante significa que el extremo de $\vec{\omega}$ se mueve siempre sobre un plano ortogonal al eje z . Además, el extremo de la proyección sobre el plano x,y de $\vec{\omega}$, de coordenadas p,q describe una circunferencia de radio a , parametrizada en z , con una velocidad angular μ . Se deduce, por tanto, que $\vec{\omega}$ describe con velocidad angular μ , un cono de revolución alrededor del eje z (tercer eje central de inercia o eje de figura) de semiapertura θ constante puesto que como se puede observar en la figura 12.2

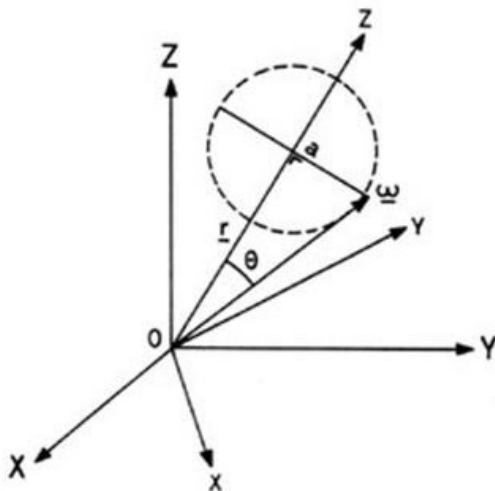


FIG 12.2

$$\tan \theta = \frac{a}{r}$$

En suma, el eje instantáneo de rotación describe un cono de revolución alrededor del eje de figura con un periodo

$$P = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{A}{C-A} \frac{2\pi}{r}$$

Experimentalmente se ha comprobado que θ es del orden de dos décimas de segundo de arco, lo que implica que $\sqrt{p^2 + q^2} \ll r$ y, por tanto, que $r \approx \omega$, es decir:

$$P \approx \frac{A}{C-A} \frac{2\pi}{\omega}$$

y dado que

$$\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ día sidereo}}$$

(realmente es un día sideral pero la diferencia es despreciable) y del valor teórico

$$\frac{A}{C - A} = 305$$

se deduce

$$P = 305 \text{ días sidéreos}$$

Dicho periodo teórico, llamado *periodo euleriano* difiere del real observado por *Chandler* que es de 430 días sidéreos. *Newcomb* explicó dicha discrepancia suponiendo que la Tierra no era rígida, por lo que los momentos centrífugos no son nulos (I no es diagonal). En el cálculo utilizó los módulos de elasticidad (de Young y de Poisson) obtenidos mediante el estudio de la propagación de las ondas sísmicas. Además, existe otro movimiento periódico, de periodo un año y semiamplitud de una décima de segundo de arco, debido a causas meteorológicas. Como que los dos periodos no son conmensurables, ello motiva que, para un observador terrestre, el polo instantáneo P_i se desplace dentro de un cuadrado de lado $0''6$ (unos 20 metros), centrado en el polo medio P_m (extremo del tercer eje del elipsoide central de inercia o eje de figura), siguiendo una trayectoria irregular abierta llamada *polodia* (Fig. 13.2).

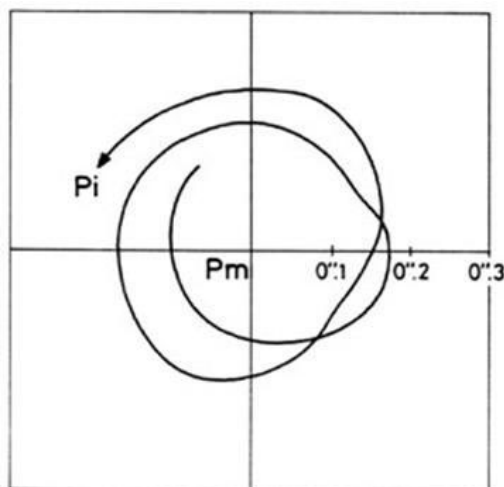


FIG 13.2

2.5.3 Variación de la longitud y de la latitud instantáneas de un lugar

Debido al desplazamiento del polo instantáneo variarán las coordenadas instantáneas λ, ϕ de todos los puntos de la Tierra.

El eje instantáneo de rotación de la Tierra no se mantiene fijo y, por tanto, el ecuador instantáneo, plano normal a aquél, también variará con el tiempo. Al medir el ángulo formado por la vertical con el ecuador medio y con el ecuador instantáneo, se obtiene, respectivamente, la latitud astronómica media ϕ_m y la latitud astronómica instantánea ϕ .

Interesa conocer las correcciones $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$ que deberán aplicarse a las coordenadas medias ϕ_m, λ_m , que pueden considerarse constantes, para obtener las instantáneas:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_m + \Delta\phi \\ \lambda &= \lambda_m + \Delta\lambda \end{aligned} \right\}$$

Se trata ahora de expresar $\Delta\phi$ y $\Delta\lambda$ en función de la posición del polo instantáneo P_i , sobre la superficie terrestre. Para ello consideraremos dos sistemas de coordenadas cartesianas rectangulares, ambos de orientación inversa, x, y, z y x', y', z' , definidos de la siguiente forma: El eje z dirigido hacia el polo medio; los ejes x e y sobre el ecuador medio, de tal modo que el plano zx sea el plano meridiano de Greenwich; el eje z' dirigido hacia el polo instantáneo; el eje x' tomado en la intersección con el ecuador instantáneo del plano determinado por el eje x y el polo instantáneo; el eje y' ortogonal a los anteriores (Fig. 14.2).

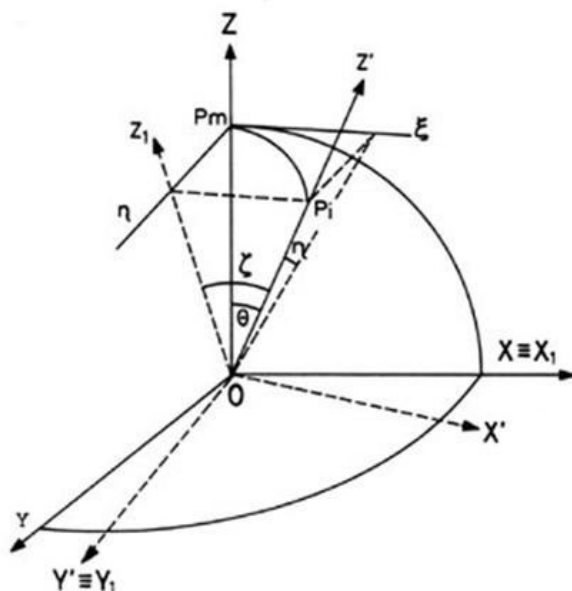


FIG 14.2

Las coordenadas esféricas de un punto genérico M situado sobre la superficie terrestre serán (r, ϕ_m, λ_m) en el primer sistema y (r', ϕ, λ) en el segundo.

Sabemos que el ángulo θ formado por el eje z y el z' es muy pequeño, por lo que podemos considerar que el polo instantáneo se encuentra en el plano tangente a la Tierra trazado por el polo medio. Si en dicho plano tangente introducimos unos ejes de coordenadas ξ, η , paralelos, respectivamente, a los ejes x e y , podremos identificar las coordenadas (ξ, η) del polo instantáneo en este nuevo sistema con los ángulos que subtienden desde el centro de la Tierra O .

Para pasar del triedro x, y, z al x', y', z' es preciso realizar una rotación de ángulo $-\eta$ alrededor del eje x (con lo que el eje z pasa a ser z_1 y el eje y , y_1), seguida de una rota-

ción de ángulo ξ alrededor del eje y_l (con lo cual z_l pasa a coincidir con el eje de rotación instantánea y el eje x_{l1} pasa a ocupar la posición x'), es decir:

$$\vec{r}' = R_2(\xi) R_1(-\eta) \vec{r}$$

que matricialmente, teniendo en cuenta que la pequeña magnitud de ξ y η permite sustituir el seno por el arco y el coseno por la unidad, se expresa:

$$\vec{r}' \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\xi \\ 0 & 1 & 0 \\ \xi & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\eta \\ 0 & \eta & 1 \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & -\xi\eta & -\xi \\ 0 & 1 & -\eta \\ \xi & \eta & 1 \end{pmatrix} \vec{r} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\xi \\ 0 & 1 & -\eta \\ \xi & \eta & 1 \end{pmatrix} \vec{r}$$

al ser ξ y η infinitésimos de segundo orden. Además, podemos escribir:

$$\vec{r}' \simeq I \cdot \vec{r} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & -\eta \\ \xi & \eta & 0 \end{pmatrix} \vec{r} = \vec{r} + \begin{pmatrix} -\xi z \\ -\eta z \\ \xi x + \eta y \end{pmatrix}$$

siendo I la matriz unitaria y $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ por lo que

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \begin{pmatrix} -\xi z \\ -\eta z \\ \xi x + \eta y \end{pmatrix}$$

Recordemos ahora las fórmulas de la paralaje diurna en coordenadas horarias (2.2.2)

$$\begin{pmatrix} -r\Delta D \\ r \cos D \Delta H \\ \Delta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin D \cos H & \sin D \sin H & -\cos D \\ -\sin H & \cos H & 0 \\ \cos D \cos H & \cos D \sin H & \sin D \end{pmatrix} \Delta \vec{r}$$

Como que los sistemas de coordenadas que hemos definido son de orientación inversa, al igual que el de coordenadas horarias, podemos aplicar dichas fórmulas directamente haciendo en ellas

$$D = \phi \quad H = \lambda$$

con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} -r\Delta\phi &= -\sin\phi \cos\lambda \cdot \xi z - \sin\phi \sin\lambda \cdot \eta z - \cos\phi \cdot (\xi x + \eta y) \\ r \cos\phi \Delta\lambda &= \sin\lambda \cdot \xi z - \cos\lambda \cdot \eta z \\ \Delta r &= -\cos\phi \cos\lambda \cdot \xi z - \cos\phi \sin\lambda \cdot \eta z + \sin\phi \cdot (\xi x + \eta y) \end{aligned}$$

relaciones de las que sólo nos interesan las dos primeras.

Teniendo en cuenta que

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x = r \cos \phi \cos \lambda \\ y = r \cos \phi \sin \lambda \\ z = r \sin \phi \end{pmatrix}$$

podemos escribir dichas relaciones de la forma:

$$\begin{aligned} -r\Delta\phi &= r \left[\xi \left(-\sin^2 \phi \cos \lambda - \cos^2 \phi \cos \lambda \right) + \eta \left(-\sin^2 \phi \sin \lambda - \cos^2 \phi \sin \lambda \right) \right] = r \left(-\xi \cos \lambda - \eta \sin \lambda \right) \\ r \cos \phi \Delta\lambda &= r \left(\xi \sin \lambda \sin \phi - \eta \cos \lambda \sin \phi \right) = r \sin \phi \left(\xi \sin \lambda - \eta \cos \lambda \right) \end{aligned}$$

y, en definitiva:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi &= \xi \cos \lambda + \eta \sin \lambda \\ \Delta\lambda &= (\xi \sin \lambda - \eta \cos \lambda) \tan \phi \end{aligned} \right\}$$

En particular, de la segunda fórmula se deduce que la longitud instantánea de Greenwich no es nula, aunque sí muy pequeña, lo que nos autoriza a tomar $\sin \lambda \approx 0$, $\cos \lambda \approx 1$, y como $\phi_G \approx 53^\circ$, se tendrá:

$$\Delta\lambda = -\eta \tan \phi_G = -\eta \tan 53^\circ$$

de lo cual es una cota superior

$$|\Delta\lambda| \ll 0",3 \tan 53^\circ \frac{1^s}{15''} = 0^s,027 < 0^s,03$$

2.6 Rotación forzada

Hemos visto en el apartado anterior que tomando como origen el centro de gravedad de la Tierra, podemos considerar dos sistemas de referencia: uno de ejes móviles con la Tierra x,y,z , y otro X,Y,Z , fijo en el espacio. Según el teorema del momento cinético, designando, como antes, por $\vec{N}$ el momento cinético de las fuerzas exteriores en el sistema móvil, se tiene ahora

$$\dot{\vec{H}} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{N} \quad (51.2)$$

donde supondremos que $\vec{N}$ no es nulo y que, en particular, es debido a la interacción gravitatoria con un astro, que consideraremos puntual, de masa m' y radio vector $\vec{R}$.

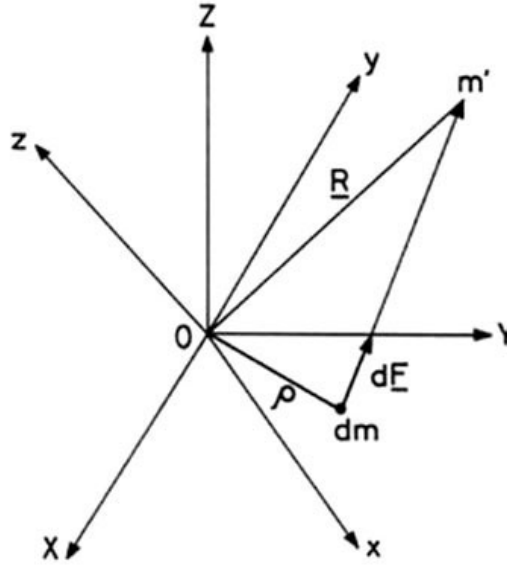


FIG 15.2

Sobre cada elemento de masa dm de la Tierra de vector de posición $\vec{p}$ y distancia p al astro, actúa una fuerza

$$d\vec{F} = \frac{Gm'}{p^3} \vec{p} dm$$

Así pues, sobre la Tierra actúa un sistema de fuerzas que sabemos que siempre puede reducirse a una resultante general y a un momento resultante. La resultante será:

$$\vec{F} = \int_M d\vec{F} = \int_M \frac{Gm'}{p^3} \vec{p} dm = -m'G \int_M \text{grad} \frac{1}{p} dm = -m' \text{grad} V \quad (V \text{ potencial terrestre})$$

y el momento resultante

$$\vec{N} = \vec{R} \wedge \vec{F}$$

es decir

$$\vec{N} = -m' \vec{R} \wedge \text{grad} V \quad (52.2)$$

Sustituyendo en (52.2) la expresión (34.2) que obtuvimos para el gradiente del potencial terrestre

$$-\text{grad} V = \left[\frac{\mu}{R^3} - \frac{3}{2} \frac{G}{R^5} \left(\frac{5}{R^2} I \cdot \vec{R}^2 - \bar{I} \right) \right] \vec{R} + \frac{3G}{R^5} I \cdot \vec{r}$$

y teniendo en cuenta que $\vec{R} \wedge \vec{R} = \vec{0}$, obtenemos para el momento de las fuerzas exteriores en el sistema móvil:

$$\vec{N} = \frac{3Gm'}{R^5} \vec{R} \wedge I \cdot \vec{R}$$

Sustituyendo en (51.2)

$$\dot{\vec{H}} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \frac{3Gm'}{R^5} \vec{R} \wedge I \cdot \vec{R}$$

pero $\vec{H} = I\vec{\omega}$; y, si suponemos la Tierra rígida, I es constante, por lo que $\dot{\vec{H}} = I\dot{\vec{\omega}}$, es decir:

$$I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge I\vec{\omega} = \frac{3Gm'}{R^5} \vec{R} \wedge I \cdot \vec{R}$$

ecuación diferencial que recibe el nombre de *ecuación de Euler generalizada*. Para resolverla procederemos análogamente al apartado anterior. Consideraremos que los ejes x, y, z son los ejes principales de inercia de la Tierra y que la distribución de masas de ésta presenta simetría de revolución alrededor del eje z . Con esto reducimos el tensor I a su forma diagonal con los dos primeros elementos de la diagonal principal iguales

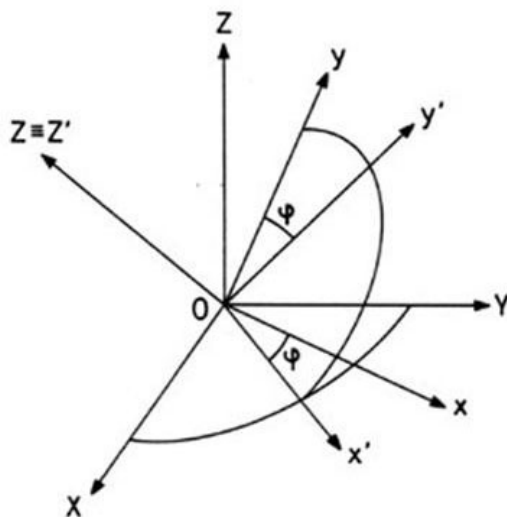


FIG 16.2

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Si las componentes de $\vec{R}$ en x,y,z son $\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y las de $\vec{\omega}$ son $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, la ecuación generalizada de Euler adopta la forma:

$$\left. \begin{aligned} A\dot{p} + (C-A)qr &= \frac{3Gm'}{R^5}(C-A)yz \\ A\dot{q} - (C-A)pr &= -\frac{3Gm'}{R^5}(C-A)xz \\ C\dot{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53.2)$$

Como en la rotación libre, también ahora es constante la componente r de la velocidad de rotación $\vec{\omega}$.

Realicemos ahora un cambio de la base x,y,z a la base x',y',z' definida de la siguiente forma:

x' determinado por la intersección de los planos XY y xy ; $z'=z$; y' ortogonal a los anteriores en sentido directo. Para ello efectuaremos un giro de ángulo $-\varphi$ alrededor del eje $z=z'$

$$\Phi = R_3(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que si

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}_{x'y'z'} \quad \text{y} \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{x'y'z'}$$

se verifica, por ejemplo, que

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = R_3(+\varphi) \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} p &= p' \cos \varphi + q' \sin \varphi \\ q &= -p' \sin \varphi + q' \cos \varphi \\ r &= r' \end{aligned} \right\}$$

y derivando:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \dot{p}' \cos \varphi + \dot{q}' \sin \varphi + \dot{\varphi} (-p' \sin \varphi + q' \cos \varphi) \\ \dot{q} &= -\dot{p}' \sin \varphi + \dot{q}' \cos \varphi + \dot{\varphi} (-p' \cos \varphi - q' \sin \varphi) \\ \dot{r} &= \dot{r}' \end{aligned} \right\}$$

o sea:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \dot{p}' \cos \varphi + \dot{q}' \sin \varphi + q \omega \\ \dot{q} &= -\dot{p}' \sin \varphi + \dot{q}' \cos \varphi - p \omega \\ \dot{r} &= \dot{r}' \end{aligned} \right\}$$

dado que como ya se ha visto en el apartado anterior, el eje instantáneo de rotación es muy próximo al eje z y, por lo tanto, $r \approx \omega$ resultando $\omega \approx \dot{\varphi}$

Sustituyendo en las dos primeras ecuaciones de (53.2) las expresiones anteriores, resulta:

$$\left. \begin{aligned} A(\dot{p}' \cos \varphi + \dot{q}' \sin \varphi) + C(-p' \sin \varphi + q' \cos \varphi) \omega &= \frac{3Gm'}{R^5} (C-A) (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) z' \\ A(-\dot{p}' \sin \varphi + \dot{q}' \cos \varphi) - C(-p' \cos \varphi + q' \sin \varphi) \omega &= -\frac{3Gm'}{R^5} (C-A) (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) z' \end{aligned} \right\} (1.0)$$

sistema que es equivalente a:

$$\left. \begin{aligned} A\dot{p}' + Cq' \omega &= \frac{3Gm'}{R^5} (C-A) y' z' \\ A\dot{q}' - Cp' \omega &= -\frac{3Gm'}{R^5} (C-A) x' z' \end{aligned} \right\} (55.2)$$

que resulta de multiplicar primero la primera ecuación de (54.2) por $\cos \varphi$ y la segunda por $\sin \varphi$ y restar de la primera la segunda y después multiplicar la primera por $\sin \varphi$ y la segunda por $\cos \varphi$ y sumar.

Experimentalmente se demuestra que p y q varían muy lentamente, por lo que también variarán muy lentamente p' y q' , y en una primera aproximación, podremos considerar nulas sus variaciones $p' \approx 0$, $q' \approx 0$, obteniendo

$$\left. \begin{aligned} p' &= Kx' z' \\ q' &= Ky' z' \end{aligned} \right\} (56.2)$$

que constituye la solución buscada y donde

$$K = \frac{3Gm'}{R^5 \omega} \zeta$$

con $\zeta = \frac{C-A}{A}$, constante que recibe el nombre de *achatación dinámica de la Tierra*.

2.6.1 Ángulos de Euler

La posición del triedro móvil x,y,z con respecto al inercial X,Y,Z suele darse mediante los ángulos de Euler. De entre las diversas convenciones existentes la más común en Astronomía es la indicada en la Fig. 17.2, donde:

ψ = ángulo de precesión

θ = ángulo de nutación

φ = ángulo de rotación propia

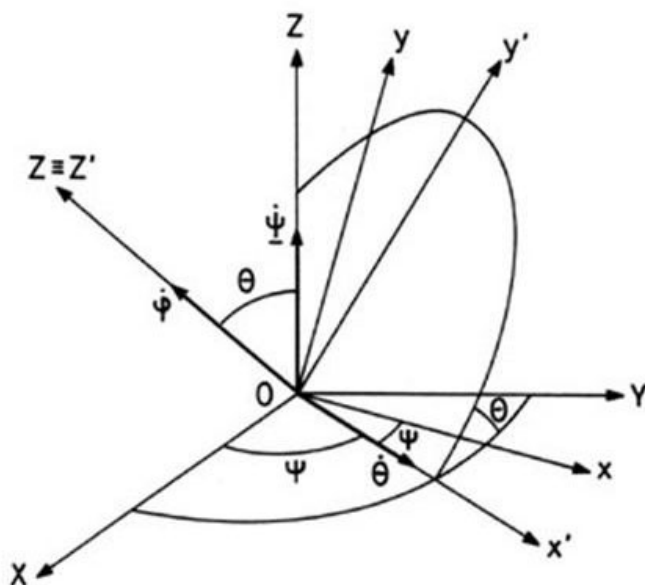


FIG 17.2

Si el único movimiento fuese el de rotación de la Tierra alrededor del eje z , variaría sólo φ , $\dot{\varphi} = \omega$ sería su velocidad angular y ψ y θ se mantendrían constantes. Pero, supongamos que varían los tres ángulos: ω será la rotación instantánea del triedro

x,y,z (ligado a la Tierra) cuyas componentes en dicho triedro móvil son $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, las cuales

expresaremos en función de los ángulos ψ , θ y φ . ω será la suma de las rotaciones debidas a cada ángulo: $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$. Proyectaremos $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$ sobre los ejes x, y, z y sumaremos las proyecciones:

$$\omega = \begin{pmatrix} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (57.2)$$

como que $\dot{\psi} \ll \dot{\varphi}$ y $\dot{\theta} \ll \dot{\varphi}$, la última componente queda reducida a

$$r \simeq \dot{\varphi} = \omega$$

Nos interesa obtener $\omega' = \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$ en la referencia x', y', z' . Para ello proyectaremos

$\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$ sobre estos ejes y sumaremos. Obtendremos:

$$\omega' = \begin{pmatrix} p' = \dot{\theta} \\ q' = \dot{\psi} \sin \theta \\ r' = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo estos valores en (56.2) queda finalmente el sistema

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= Kx'z \\ \dot{\psi} \sin \theta &= Ky'z \end{aligned} \right\} \quad (58.2)$$

2.7 Precesión y Nutación

2.7.1 Movimientos de los planos fundamentales a los que se refieren las coordenadas de los astros

La acción perturbatriz del Sol, la Luna y los planetas sobre la Tierra da lugar a que, en el transcurso del tiempo, cambien de posición en el espacio los planos fundamentales, eclíptica y ecuador, definidos por los movimientos de traslación y rotación de la Tierra con respecto a un sistema de referencia fijo.

Para definir las posiciones de la eclíptica E y el ecuador Q en una cierta época, suelen referirse éstos a un plano de referencia $x_o y_o$ y una dirección origen en él (que puede ser, por ejemplo, la eclíptica y el punto Aries en una época determinada) dando la *longitud del nodo* ψ y la *inclinación* K de E respecto a $x_o y_o$, y la *longitud del nodo* $-\omega$ y la *inclinación* $-\varepsilon$ de Q con respecto a E (Fig. 18.2).

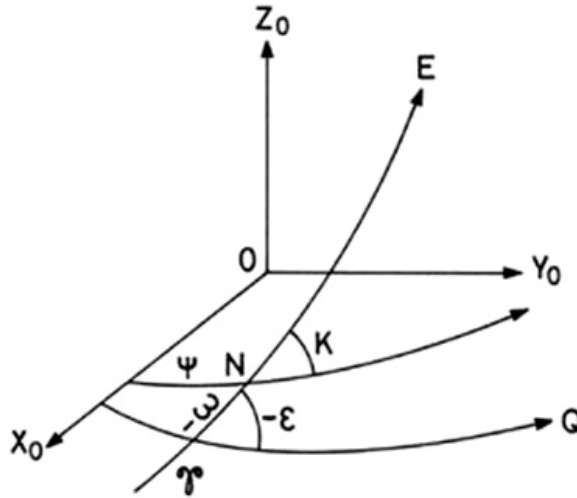


FIG 18.2

La teoría del movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol suministra ψ y K por las relaciones

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } K \text{ sen } \psi &= p = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + P \\ \text{sen } K \cos \psi &= q = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots + Q \end{aligned} \right\}$$

cuyos segundos miembros constan de una parte de variación secular, en potencias crecientes de t , y de otra parte periódica P y Q .

Asimismo, la teoría del movimiento de rotación de la Tierra suministra directamente $\omega - \psi$ y ε en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \omega - \psi &= h = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots + P_1 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t + \varepsilon_2 t^2 + \dots + Q_1 \end{aligned} \right\}$$

cuyos segundos miembros constan también de una parte secular y una parte periódica P_1 y Q_1 .

Tomando como plano de referencia $x_0 y_0$ el de la eclíptica E_0 en la época en que se empieza a contar el tiempo, y despreciando los términos periódicos P y Q , dada su pequeñez, las relaciones anteriores toman la forma:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } K \text{ sen } \psi &= p = p_1 t + p_2 t^2 + \dots \\ \text{sen } K \cos \psi &= q = q_1 t + q_2 t^2 + \dots \\ \omega - \psi &= h = h_1 t + h_2 t^2 + \dots + P_1 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t + \dots + Q_1 \end{aligned} \right\} \quad (59.2)$$

ya que, en efecto, ello equivale a hacer $K=0$, $\text{sen } K=0$ y para $t=0$, despreciando P y Q , queda $p_0=0$, $q_0=0$, siendo además, para $t=0$, $\omega=\psi$ y por tanto, también, $h_0=0$.

Consideremos dos sistemas de coordenadas cartesianas rectangulares con, origen común en el centro de gravedad de la Tierra: X,Y,Z tal que el plano fundamental X,Y sea el plano de la eclíptica y Z en la dirección del polo de la eclíptica; x',y',z' tal que x',y' sea el plano del ecuador, con x' hacia el punto Aries (Fig. 19.2), los dos orientados en sentido directo. Las coordenadas ecuatoriales del Sol son:

$$\left. \begin{aligned} x' &= R \cos L \\ y' &= R \cos \varepsilon \sin L \\ z' &= R \sin \varepsilon \sin L \end{aligned} \right\} \quad (60.2)$$

Sustituyéndolas en las relaciones (58.2) del apartado 2.6.1 teniendo en cuenta que ahora $\theta = -\varepsilon$, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= -KR^2 \sin \varepsilon \sin L \cos L \\ \dot{\psi} \sin \varepsilon &= -KR^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 L \end{aligned} \right\} \quad (61.2)$$

Como que ε varía muy lentamente podemos considerarla constante ($=\varepsilon_0$) en los segundos miembros de (61.2) y con $L=nt$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\chi \sin \varepsilon_0 \sin 2nt \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\chi \cos \varepsilon_0 (1 - \cos 2nt) \end{aligned} \right\}$$

donde

$$\chi = \frac{KR^2}{2} = \frac{3Gm\zeta}{2R^3} \quad (m=\text{masa del Sol})$$

Al integrar tendremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\chi}{2n} \sin \varepsilon_0 \cos 2nt + c \\ \psi &= -\chi t \cos \varepsilon_0 + \frac{\chi}{2n} \cos \varepsilon_0 \sin 2nt + c_1 \end{aligned}$$

Con $c_1 = \psi_0$.

Observemos que ε , oblicuidad de la eclíptica, varía periódicamente con un periodo de medio año ($T=365,25/2$, ya que $2n=2\pi/T$)

El término $\frac{\chi}{2n} \sin \varepsilon_0 \cos 2nt$ recibe el nombre de *nutación en oblicuidad*.

En ψ aparece un término lineal en t que es la *precesión en longitud* y uno periódico que es la *nutación en longitud*. Esto implica que, con el tiempo, el punto Aries va retrogradando sobre la eclíptica, ya que el coeficiente del término secular es negativo, y que al mismo tiempo que retrograda, va oscilando alrededor del *Aries medio* que es el obtenido teniendo en cuenta sólo la precesión en longitud.

Naturalmente las hipótesis admitidas de que la distancia R del Sol a la Tierra permanece constante, como también que la longitud L del Sol varía uniformemente con el tiempo, están muy lejos de la realidad, y ello hace que la nutación debida a la atracción solar no quede perfectamente expresada por los términos $\frac{\chi}{2n} \sin \varepsilon_0 \cos 2nt$ y $\frac{\chi}{2n} \cos \varepsilon_0 \sin 2nt$. A estos términos es preciso agregarles otros, también de carácter periódico, en que intervendrá la posición del Sol respecto al apogeo; términos que, aunque de menor importancia que los citados, no son completamente despreciables.

2.7.3 Precesión y nutación lunares

La Luna sigue una órbita media con una inclinación I respecto a la eclíptica que oscila entre 5° y $5^\circ 18'$, es decir, en media $I=5^\circ 9'$. Se denomina *línea de los nodos* a la intersección del plano de la órbita lunar con el plano de la eclíptica. Al punto N por el cual la Luna pasa del hemisferio celeste sur al hemisferio celeste norte se le llama *nodo ascendente* y al punto diametralmente opuesto *nodo descendente*.

En primera aproximación, la órbita de la Luna es una elipse con una excentricidad del orden de $1/20$. Supongamos que es una circunferencia de radio R_1 igual a la distancia media de la Tierra a la Luna, recorrida con velocidad media constante n_1 :

$$R_1 = 0,38 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$n_1 = \frac{2}{27,3} \text{ días}^{-1}$$

Procederemos análogamente al apartado anterior, tomando como plano x, y el del ecuador (que llamaremos x', y') y como plano x'', y'' el de la órbita lunar (que llamaremos x_1', y_1') con x_1' dirigido hacia la intersección de la órbita lunar con el ecuador, γ_1 . Si R_1 es el radio vector de la Luna, L , los ángulos de Euler serán (Fig. 20.2):

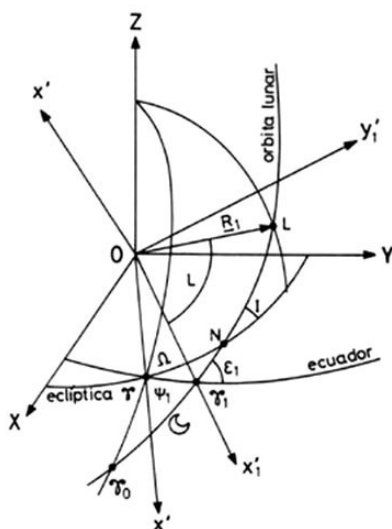


FIG 20.2

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_1 && \text{medido sobre el ecuador} \\ \theta &= -\varepsilon_1 \\ \varphi &= L_1 = \widehat{\gamma_1 L} && \text{medido sobre la órbita lunar}\end{aligned}$$

La longitud media de la Luna crece proporcionalmente al tiempo, siendo $L_1 = n_1 t$ si empezamos a contar el tiempo cuando la Luna pasa por γ_1 .

Estamos pues en una situación completamente paralela a la del apartado anterior, por lo que sustituyendo en las mismas fórmulas (58.2) obtendremos:

$$\left. \begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= -\chi_1 \sin \varepsilon_{01} \sin 2n_1 t \\ \dot{\psi}_1 &= -\chi_1 \cos \varepsilon_{01} (1 - \cos 2n_1 t)\end{aligned} \right\} \quad (62.2)$$

con

$$\chi_1 = \frac{3G_1 m_1 \zeta}{2R_1^3}$$

siendo la razón entre χ_1 y χ

$$\frac{\chi_1}{\chi} = \frac{m_1}{m} \left(\frac{R}{R_1} \right)^3 = 2,17$$

Integrando (62.2) obtendremos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_{01} + \frac{\chi_1}{2n_1} \sin \varepsilon_{01} \cos 2n_1 t \\ \psi_1 &= \psi_{01} - \chi_1 \cos \varepsilon_{01} \cdot t + \frac{\chi_1}{2n_1} \cos \varepsilon_{01} \sin 2n_1 t\end{aligned}$$

fórmulas que suelen darse en función de Ω y ζ siendo (Fig. 20.2)

$$\begin{aligned}\Omega &= \widehat{\gamma N} = \text{longitud del nodo lunar} & \Omega &= \Omega_0 - \frac{2\pi}{18,60} t & (\text{t en años}) \\ \zeta &= \widehat{\gamma_1 L} = \text{longitud de la Luna sobre su órbita} & &= \frac{2\pi}{27,3} t & (\text{t en días})\end{aligned}$$

El nodo ascendente retrograda a lo largo de la eclíptica dando una vuelta completa en 18,6 años, fenómeno que recibe el nombre de *retrogradación de la línea de los nodos* de la órbita lunar y es debido a las perturbaciones gravitatorias que ejerce la Tierra sobre la Luna.

Al poner $L_1 = n_1 t$ en función de Ω y ζ se obtiene en ε_1 una suma de términos periódicos ($\cos \Omega$, $\cos 2\Omega$, $\cos 2\zeta$) que constituyen la *nutación lunar en oblicuidad*. En ψ_1 se obtiene un término secular en t , la *precesión lunar en longitud* y una suma de términos periódicos ($\sin \Omega$, $\sin 2\zeta$, $\sin 2\Omega$), la *nutación lunar en longitud*.

2.7.4 Precesión y nutación luni-solares

Como su nombre indica, son debidas a la acción gravitatoria combinada del Sol y la Luna. Se obtienen sumando término a término (precesión con precesión, nutación con nutación) las precesiones y nutaciones solar y lunar:

$$\begin{aligned}\psi_{LS} &= \psi + \psi_1 && \text{precesión y nutación luni-solar en longitud.} \\ \varepsilon_{LS} &= \varepsilon + \varepsilon_1 && \text{nutación luni-solar en oblicuidad.}\end{aligned}$$

obteniéndose:

$$\begin{aligned}\psi_{LS} &= \psi_0 - 50'',39t + \dots - 17'',23 \sin \Omega - 1'',27 \sin 2L + 0'',21 \sin 2\Omega - 0'',21 \sin 2\zeta + \dots \\ \varepsilon_{LS} &= \varepsilon_0 + 9'',21 \cos \Omega + 0'',55 \cos 2L - 0'',09 \cos 2\Omega + 0'',09 \cos 2\zeta + \dots\end{aligned}$$

donde t viene dado en años de 365,25 días.

Al factor $50'',39$ se le llama *constante de la precesión luni-solar* y al factor $9'',21$ *constante de la nutación* (no se especifica que sea luni-solar dado que es el término nutacional en oblicuidad más importante de todos los que seguirán).

2.7.5 Precesión y nutación planetarias

Los planetas, en especial Júpiter (por su masa) y Venus (por su proximidad), producen un avance del punto Aries de $0'',11$ por año, *precesión planetaria en longitud*. Además, aparece una precesión planetaria en oblicuidad de $-0'',47 t + \dots$ que corresponde, realmente, al primer término del desarrollo en serie de una nutación de periodo muy largo (40.000 años). También aparecen términos nutacionales en Γ y Γ' (longitudes de los perigeos solar y lunar, respectivamente). Como era de esperar, los efectos son mucho menores que los debidos al Sol y la Luna.

2.7.6 Precesión y nutación generales

Son debidas a la composición de todos los efectos anteriormente estudiados:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 - 50'',29 t + \dots + (\text{términos nutacionales}) \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 - 0'',46815 t - 0'',00000059 t^2 + \dots + (\text{términos nutacionales})\end{aligned}$$

Al término secular en longitud $-50'',29$ se le llama *constante de la precesión general*. Implica que el punto Aries retrograda sobre la eclíptica a razón de $50'',29$ por año, recorriéndola, por tanto, aproximadamente, en unos 26.000 años.

2.7.7 Correcciones

Existe una corrección relativista de la precesión en longitud de $+0'',02$ por año, que se considera englobada en la luni-solar.

Por otra parte, el suponer constantes ε y ε_1 en los segundos miembros de las ecuaciones diferenciales, se ha introducido un error que provoca que las constantes de

precesión y nutación no sean realmente constantes. Teniendo en cuenta este hecho, tales "constantes" valen para la época J 2.000,0:

$$\begin{array}{rclclcl} \text{constante de la precesión general} & = & 50'',291 & + & 0'',00022 \, t \\ \text{constante de la nutación} & = & 9'',206 & + & 0'',000009 \, t \end{array}$$

(t en años de 365,25 días).

2.8 Posiciones medias y verdaderas

Debido a la precesión, en longitud y en oblicuidad, la eclíptica se desplaza girando y variando el ángulo que forma con un plano fijo. Considerando únicamente estos movimientos precesionales, obtenemos la *eclíptica media*: plano definido por el centro del Sol, el centro de gravedad del sistema Tierra-Luna y la velocidad de este centro de gravedad.

Si corregimos de nutación la eclíptica media, obtenemos la *eclíptica verdadera*: plano determinado por el centro del Sol, el centro de la Tierra y la velocidad de la Tierra.

También el ecuador experimenta variaciones debidas a la precesión y nutación lunisolares. En cada instante cabe considerar un *ecuador verdadero*, que pasa por el centro de gravedad de la Tierra y es ortogonal al eje instantáneo de rotación en dicho instante. Este plano se obtiene corrigiendo de precesión y nutación.

Si sólo corregimos de precesión obtenemos un *ecuador medio*.

La intersección del ecuador medio y la eclíptica media es la *línea de los equinoccios media* y el nodo ascensional de la eclíptica es el punto *Aries medio* o *equinoccio medio*.

En cambio, si consideramos el ecuador verdadero y la eclíptica verdadera, obtenemos el *Aries verdadero* o *equinoccio verdadero*.

Se suelen considerar como elementos de referencia medios los relativos al principio de un *año astronómico*. El año astronómico, como veremos más adelante, empieza cuando la longitud media del Sol, corregida de aberración, es igual a 280° . Se indica en la forma 1950,0 o 2.000,0.

El ángulo que forma el ecuador medio con la eclíptica media en una fecha es la *oblicuidad media* en dicha fecha. La oblicuidad media de la eclíptica, contada en años de 365,25 días a partir de la época J 2.000,0 vale:

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21'',448 - 0'',46815 \, t - 0'',00000059 \, t^2 + 0'',00000000181 \, t^3$$

(para la época actual t es negativo)

La *oblicuidad verdadera* en una fecha es el ángulo que forma la eclíptica verdadera con el ecuador verdadero en dicha fecha.

Si referimos la posición de un astro a la eclíptica y al equinoccio medios tenemos las *coordenadas celestes medias* del astro. De análoga forma se definen las *coordenadas celestes verdaderas*. Así, las *coordenadas ecuatoriales medias* son las referidas al ecuador medio y las *ecuatoriales verdaderas* las referidas al ecuador verdadero.

2.8.1 Variación de los polos celestes

A consecuencia de los movimientos de precesión y de nutación el polo celeste se desplaza. Despreciemos la pequeña variación secular de la oblicuidad de la eclíptica, es decir, consideremos que las eclípticas verdadera y media coinciden. Debido a la precesión, el punto Aries medio, γ_m retrograda a lo largo de la eclíptica, por lo que, al ser la línea de los equinoccios media siempre perpendicular al plano que determinan el centro de la esfera celeste, el polo de la eclíptica P_e y el polo celeste medio P_m , el eje del mundo describirá un cono de revolución alrededor del eje de la eclíptica, de semiapertura igual a la oblicuidad de la eclíptica, en sentido retrógrado y con una periodicidad de unos 26.000 años.

Debido a la nutación, el punto Aries verdadero oscila a uno y otro lado del Aries medio y además, la oblicuidad de la eclíptica varía periódicamente. En consecuencia, el polo verdadero describe una pequeña elipse alrededor del polo medio; si nos limitamos a su parte principal, los semiejes de dicha elipse son la constante de la nutación $9''{,}21$ y $6''{,}84$.

Resumiendo: el eje del ecuador medio describe un cono de revolución alrededor del eje de la eclíptica y el eje verdadero un cono elíptico alrededor del eje medio (o lo que es lo mismo, el polo del ecuador medio describe un círculo menor alrededor del polo de la eclíptica y el polo verdadero una elipse alrededor del polo medio).

Estudiemos con detalle estos desplazamientos. En la Fig. 21.2 tenemos:

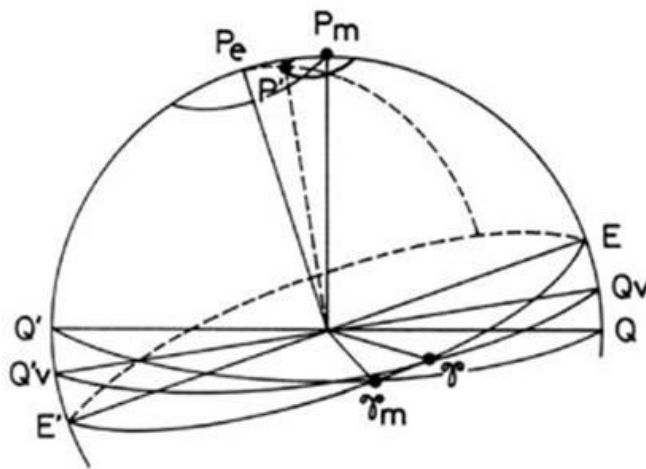


FIG 21.2

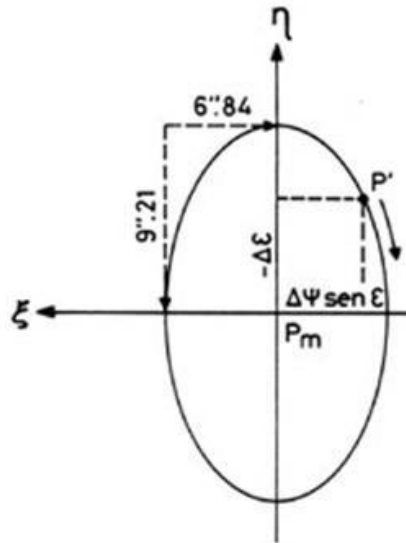


FIG 22.2

EE' eclíptica media de una época

QQ' ecuador medio de una época

Q_vQ_v' ecuador verdadero de una época

P_e polo de la eclíptica media

P_m polo del ecuador verdadero

γ_m Aries medio

γ Aries verdadero (aunque no lo hemos definido exactamente así, consideraremos la intersección de la eclíptica media con el ecuador verdadero dada la poca variación de la primera).

Consideremos las coordenadas eclípticas de los polos ecuatoriales medio y verdadero:

$$\text{Polo medio} \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \end{array} \right. \quad (63.2)$$

$$\text{Polo verdadero} \quad \left\{ \begin{array}{l} L' = \frac{\pi}{2} + \widehat{\gamma_m \gamma} = \frac{\pi}{2} + \Delta\psi \\ B' = \frac{\pi}{2} - \varepsilon' = \frac{\pi}{2} - (\varepsilon + \Delta\varepsilon) \end{array} \right. \quad (64.2)$$

donde $\Delta\psi$ es la nutación en longitud, ε' la oblicuidad verdadera y $\Delta\varepsilon$ la nutación en oblicuidad.

Estudiemos la variación del polo verdadero en el plano tangente a la esfera celeste por el polo medio y en el sistema de referencia (ξ, η) de la Fig. 22.2 El ángulo diedro formado por los máximos de longitud del polo medio y del polo verdadero es $L'-L$. Debemos reducirlo al círculo menor multiplicando para ello por $\cos B$. De (63.2) y (64.2) obtenemos:

$$(L'-L)\cos B = (L'-L)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = (L'-L)\sin \varepsilon = \Delta\psi \sin \varepsilon$$

Como que en latitud trabajamos sobre un círculo máximo, no es necesario hacer ninguna reducción, y por tanto:

$$B' - B = -\Delta\varepsilon$$

Por consiguiente, las coordenadas (ξ, η) del polo verdadero P' en el sistema considerado serán:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Delta\psi \sin \varepsilon \\ \eta &= -\Delta\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (65.2)$$

Sabemos que los términos principales de los efectos nutacionales causados por la Luna, son:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -17'', 23 \sin \Omega + \dots \\ \Delta\varepsilon &= 9'', 21 \cos \Omega + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo en (65.2) y refiriendo ε a J 2.000,0 se tiene:

$$\begin{aligned} \xi &= -17'', 23 \sin \varepsilon \sin \Omega = -6'', 84 \sin \Omega \\ \eta &= 9'', 21 \cos \Omega \end{aligned}$$

ecuaciones paramétricas de una elipse de semiejes $6'', 84$ y $9'', 21$. El eje mayor es el que tiene la dirección del máximo de longitud. El periodo con que se realiza este movimiento es de $18 \frac{2}{3}$ años.

Si tenemos en cuenta que el Aries medio se mueve a lo largo de la eclíptica de modo que en un año retrograda de $50'', 29$, en el mismo intervalo de tiempo el polo medio se desplazará a lo largo del círculo menor correspondiente de

$$50'', 29 \sin \varepsilon \approx 20'', 0$$

Y así, mientras que en un año el polo medio se ha desplazado $20'', 0$ sobre el eje ξ el polo verdadero habrá descrito sólo una pequeña parte de la elipse, aproximadamente $1/18$.

De acuerdo con lo que acabamos de decir, la estrella polar no será siempre la misma. Todas las estrellas que tengan una latitud de alrededor de 67° serán, alguna vez, polares en el transcurso de unos 26.000 años. Actualmente la estrella polar es la α de la Osa Menor y su distancia al polo es de alrededor de 1° . Esta distancia va disminuyendo en la actualidad y alcanzará su valor mínimo en el año 2.105. Dentro de 12.000 años la estrella polar será α Lirae (Vega), estrella de primera magnitud. Hace 6.000 años era γ Draco, de tercera magnitud, que era la que usaban como polar los astrónomos chinos.

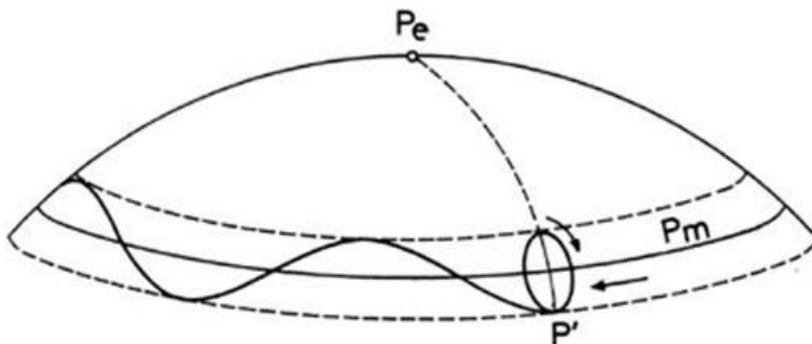


FIG 23.2

2.8.2 Corrección de precesión y nutación de las coordenadas ecuatoriales

Los catálogos nos dan la posición de los astros referida, usualmente, a la base media (ecuador y equinoccio medios) del 1950,0 o del 2000,0. Si interesa conocer la posición media de la fecha es necesario corregirla de precesión y, si lo que interesa obtener es la posición verdadera (referida al ecuador y equinoccio verdaderos) deberemos corregir además de nutación.

Para deducir la corrección consideraremos, al igual que en el apartado anterior, que las eclípticas verdadera y media coinciden y son fijas (realmente la eclíptica media varía muy lentamente, con términos en t^2); por tanto, las latitudes de las estrellas se mantendrán invariables y sólo deberán corregirse de precesión y nutación las longitudes:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= B' - B = 0 \\ \Delta L &= L' - L = p\tau + \Delta\psi \end{aligned} \right\} \quad (66.2)$$

donde las coordenadas B' y L' son las verdaderas finales y las B y L las medias iniciales.

El término $\Delta\psi$ es debido a la nutación y el término $p\tau$ a la precesión, siendo p la constante de la precesión general en longitud:

$$p = 50'',2910 + 0'',000222 t$$

y τ , medido en años, la fracción de año transcurrida desde el comienzo del año astronómico en cuestión. El término precesional es aditivo, pues al retrogradar Aries, aumenta la longitud de los astros. Además, debido únicamente a la nutación, varía la oblicuidad de la eclíptica en $\Delta\epsilon$.

Para hallar

$$\Delta A = A' - A$$

$$\Delta D = D' - D$$

partiremos de las ecuaciones (6.1) que nos dan el cambio de coordenadas eclípticas a ecuatoriales:

$$\left. \begin{aligned} \cos D \cos A &= \cos B \cos L \\ \cos D \sin A &= \cos \varepsilon \cos B \sin L - \sin \varepsilon \sin B \\ \sin D &= \sin \varepsilon \cos B \sin L + \cos \varepsilon \sin B \end{aligned} \right\}$$

Diferenciando la tercera:

$$\cos D dD = (\cos \varepsilon \cos B \sin L - \sin \varepsilon \sin B) d\varepsilon + (\sin \varepsilon \cos B \cos L) dL$$

y teniendo en cuenta las otras dos:

$$\cos D dD = \cos D \sin A d\varepsilon + \sin \varepsilon \cos D \cos A dL$$

y dividiendo ambos miembros por $\cos D$, expresando las diferenciales por incrementos:

$$\Delta D = \sin A \Delta \varepsilon + \sin \varepsilon \cos A \Delta L \quad (67.2)$$

Diferenciando ahora la primera:

$$-\sin D \cos A dD - \cos D \sin A dA = -\cos B \sin L dL$$

sustituyendo dD por (67.2) y operando:

$$\cos D \sin A dA = -\sin D \sin A \cos A d\varepsilon - \sin \varepsilon \sin D \cos^2 A dL + \cos B \sin L dL$$

Teniendo en cuenta la relación $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ y la ecuación del cambio de coordenadas inverso:

$$\cos B \sin L = \cos \varepsilon \cos D \sin A + \sin \varepsilon \sin D$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos D \sin A dA &= -\sin D \sin A \cos A d\varepsilon - \sin \varepsilon \sin D dL + \\ &+ \sin \varepsilon \sin D \sin^2 A dL + \cos \varepsilon \cos D \sin A dL + \\ &+ \sin \varepsilon \sin D dL \end{aligned}$$

simplificando y haciendo igual que antes $d=\Delta$

$$\Delta A = (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \tan D \sin A) \Delta L - \tan D \cos A \Delta \varepsilon \quad (68.2)$$

Teniendo en cuenta (66.2) e introduciendo para simplificar la *precesión general en ascensión recta*

$$m = p \sin \varepsilon = 46",1244 + 0",000279t$$

y la *precesión general en declinación*

$$n = p \sin \varepsilon = 20'',0431 - 0'',000085t$$

(67.2) y (68.2) pueden escribirse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A &= \left(\frac{m}{n} + \sin A \tan D \right) (n\tau + \Delta\psi \sin \varepsilon) - \cos A \tan D \Delta\varepsilon \\ \Delta D &= \cos A (n\tau + \Delta\psi \sin \varepsilon) + \sin A \Delta\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (69.2)$$

Introduzcamos ahora los llamados *números de Bessel o besselianos* que son generales para toda la esfera celeste y vienen dados en los Anuarios día por día:

$$\left. \begin{aligned} A &= n\tau + \Delta\psi \sin \varepsilon \\ B &= -\Delta\varepsilon \end{aligned} \right\}$$

y las *constantes estelares*, dependientes de la estrella de que se trate

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{m}{n} + \sin A \tan D \\ b &= \cos A \tan D \\ a' &= \cos A \\ b' &= -\sin A \end{aligned} \right\}$$

con lo que las fórmulas (69.2) pueden escribirse en la forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (70.2)$$

Estas ecuaciones (70.2) nos permiten calcular las coordenadas verdaderas (A',D') para una fecha dada, cuando se conocen las coordenadas medias (A,D) para el principio del año.

Si quisiéramos obtener las coordenadas medias de la fecha no consideraríamos los términos nutacionales:

$$\Delta\psi = \Delta\varepsilon = 0$$

obteniendo:

$$\begin{aligned} \Delta A &= (m + n \sin A \tan D) \tau \\ \Delta D &= n \tau \cos A \end{aligned} \quad (71.2)$$

fórmulas que nos darían las posiciones medias de la fecha a partir de las posiciones medias de principio de año.

Esta transformación se efectúa en dos fases: recordemos que el catálogo de estrellas nos da las coordenadas medias del comienzo de un año astronómico. Primero se obtienen las coordenadas del principio del año astronómico en curso, o sea se hace la llamada *reducción al año*, y luego, a partir de las coordenadas reducidas al año, se obtienen las coordenadas de la fecha o *reducción al día* (τ es en este caso la *fracción de año* transcurrida desde el principio del año astronómico).

Para obtener las posiciones verdaderas de la fecha, se hallan las posiciones medias al principio del año astronómico en curso (igual que en el caso anterior), reduciéndose posteriormente al día, considerando ahora los términos nutacionales, mediante las fórmulas (70.2).

Las fórmulas (71.2) nos sirven también para hallar las coordenadas medias al principio de un año conocidas las coordenadas medias al principio de un año anterior siendo ahora τ el número de años transcurridos (m y n están dados en los Anuarios y se toman para el año de partida). Ahora bien, esto solamente es correcto si el intervalo de tiempo τ es pequeño (poco menos de 5 años).

En la obtención de las posiciones medias en una época T , conocidas las posiciones medias en una época T_0 (reducción por precesión) suele emplearse otro método: sean

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ las componentes del vector de posición $\vec{r}$ de un astro S en el sistema de

coordenadas ecuatoriales medias en la época T_0 , (X_0, Y_0, Z_0) , estando el eje X_0 dirigido hacia el punto Aries medio, el eje Z_0 hacia el polo celeste medio P_0 y el eje Y_0 formando triedro directo con los anteriores.

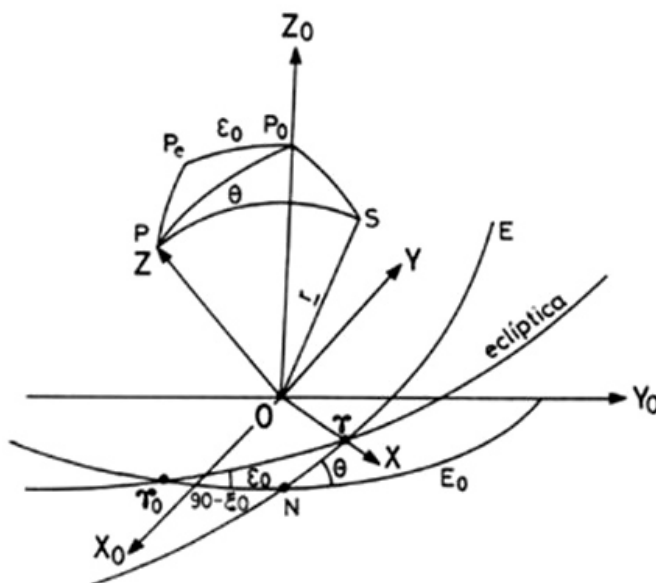


FIG 24.2

Consideremos, por otra parte, el sistema de coordenadas ecuatoriales medias en la época T , (X,Y,Z) con el mismo origen, y sean $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ las componentes del vector de posición del astro S en dicho sistema. El paso del sistema X_0, Y_0, Z_0 al X, Y, Z se realiza mediante tres rotaciones, en función de los elementos precesionales ξ_0, θ, z siendo $90^\circ - \xi_0$ la ascensión recta del nodo ascendente N del ecuador E de la época T sobre el ecuador E_0 en la época T_0 calculada desde el equinoccio de T_0 , θ la inclinación del ecuador en la época T sobre el ecuador en la época T_0 y $90^\circ + z$ la ascensión recta del nodo contada desde el equinoccio de T . De modo que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

donde la *matriz de precesión* P es

$$P = R_3(-90^\circ - z) R_1(\theta) R_3(90^\circ - \xi_0)$$

cuyos elementos son:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \cos \xi_0 \cos \theta \cos z - \sin \xi_0 \sin z \\ P_{12} &= -\sin \xi_0 \cos \theta \cos z - \cos \xi_0 \sin z \\ P_{13} &= -\sin \theta \cos z \\ P_{21} &= \cos \xi_0 \cos \theta \sin z + \sin \xi_0 \cos z \\ P_{22} &= -\sin \xi_0 \cos \theta \sin z + \cos \xi_0 \cos z \\ P_{23} &= -\sin \theta \sin z \\ P_{31} &= \cos \xi_0 \sin \theta \\ P_{32} &= -\sin \xi_0 \sin \theta \\ P_{33} &= \cos \theta \end{aligned} \tag{72.2}$$

estando los parámetros ξ_0 , θ y z definidos por:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (2306'', 22 + 1'', 369T_0)T + 0'', 302T^2 + 0'', 018T^3 \\ \theta &= (2004'', 311 - 0'', 853T_0)T - 0'', 426T^2 - 0'', 042T^3 \\ z &= \xi_0 + 0'', 729T^2 \end{aligned} \tag{73.2}$$

Para su cálculo se han tenido en cuenta las constantes astronómicas del sistema IAU(1976) y están referidos a la época J 2000,0. T_0 es la fracción de siglo del catálogo inicial y T es la fracción de siglo transcurrida desde el año a que está referido el catálogo. En el caso particular de tomar como época inicial el año J 2000,0 (lo que sucederá al utilizar el catálogo fundamental FK5), deberán usarse las expresiones que

resulten de hacer $T_0 = 0$ en las (73.2) donde T será el número de siglos julianos de 36525 días que separan la fecha en cuestión del año J 2000,0 cuya fecha juliana correspondiente es 2451545,0 y que equivale a 2000 enero 1,5.

Los valores numéricos de los elementos de la matriz de precesión han sido calculados, para pasar de $T_0 = B\ 1950,0$ a $T = J\ 2000,0$, entre otros autores por J.H. Lieske (1979), obteniendo:

$$\begin{bmatrix} +0,9999257079523629 & -0,0111789381377700 & -0,0048590038153592 \\ +0,0111798381264276 & +0,9999375133499888 & -0,0000271625947142 \\ +0,0048590038414544 & -0,0000271579262585 & +0,9999881946023742 \end{bmatrix}$$

En enero de 1998 la Unión Astronómica Internacional (IAU) adoptó el nuevo sistema de referencia ICRS (Internacional Celestial Reference System). Como consecuencia de ello, actualmente los elementos de esta matriz de precesión están siendo revisados por varios autores.

2.8.3 Ecuación de equinoccios

Según vimos en el primer capítulo (1.5), la ecuación de equinoccios es:

$$N = \theta_v - \theta_m$$

Es decir, proyectando sobre el ecuador (Fig. 25.2) vemos que representa la nutación en ascensión recta, puesto que, la ascensión recta del Aries medio es cero, mientras que la del Aries verdadero es N .

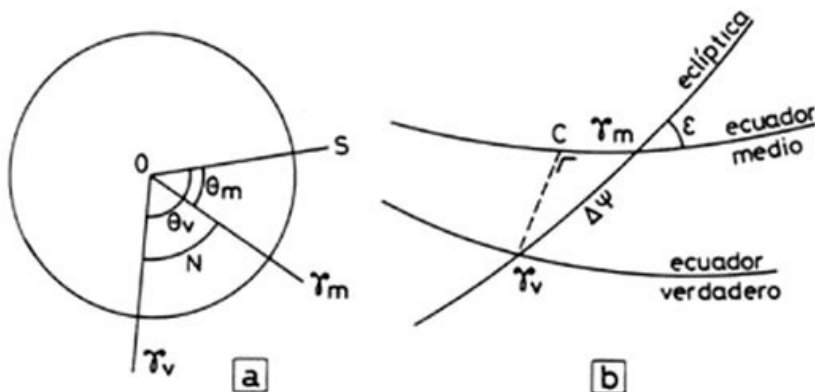


FIG 25.2

Si consideramos como plano el triángulo $\gamma_v \gamma_m C$ de la Fig. 25.2 b) teniendo en cuenta que $\Delta\psi$ es muy pequeño:

$$N = \Delta\psi \cos \varepsilon$$

y tomando en $\Delta\psi$ el término de mayor contribución:

$$N = -17'',23 \cos \varepsilon \sin \Omega \approx -15'',9 \sin \Omega$$

que implica que la parte principal de la ecuación de equinoccios oscila con una periodicidad de 18,6 años y una amplitud de algo más de $1''$.

2.9 Variaciones de la velocidad de rotación de la Tierra

A lo largo de todo este capítulo hemos supuesto que la velocidad angular ω de rotación de la Tierra era constante. Ello es válido en primera aproximación pues, si bien ω varía con el tiempo, la magnitud de la variación es muy pequeña. Para apreciar esta variación han sido precisos los relojes de cuarzo y los atómicos.

En un sistema inercial se verifica que:

$$\dot{\vec{C}} = \vec{M}$$

donde $\vec{C} = I \cdot \vec{\omega}$ es el momento cinético y $\vec{M}$ el momento de las fuerzas exteriores. Si se supone que la distribución de masas de la Tierra presenta simetría esférica, es

$$I = A U$$

siendo U el tensor unidad y A el momento de inercia respecto cualquier diámetro, obteniéndose:

$$\vec{C} = AU \cdot \vec{\omega} = A\vec{\omega}$$

y

$$\dot{\vec{C}} = \frac{d}{dt}(A\vec{\omega}) = \vec{M}$$

Si además consideramos que $\vec{M}$ y $\vec{\omega}$ tienen la misma dirección, la anterior ecuación podrá escribirse:

$$\frac{d}{dt}(A\omega) = M \quad (74.2)$$

expresión que nos permitirá analizar las causas de la variación de la velocidad angular de la Tierra.

2.9.1 Distintos tipos de variaciones

Las causas de la variación de la velocidad angular de la Tierra pueden ser regulares, irregulares y periódicas. Analizaremos cada una de ellas.

a) *Regulares*: Debido a las mareas provocadas por el Sol y la Luna, la superficie del mar adopta la forma de un elipsoide de revolución de eje mayor dirigido hacia el astro en cuestión. El consiguiente rozamiento causado por las aguas genera una fuerza,

en mares poco profundos, que origina un momento que tiende a oponerse a la rotación de la Tierra. Si consideramos que la eclíptica, la órbita lunar y el ecuador coinciden, dicho momento (que llamaremos K) será de la misma dirección y de sentido opuesto a pudiéndose aplicar, por tanto, (74.2):

$$\frac{d}{dt}(A\omega) = -K$$

Si suponemos que K es constante y que la Tierra es rígida ($A=\text{cte.}$) obtenemos:

$$A\dot{\omega} = -K$$

e integrando:

$$\omega = \omega_0 - \frac{K}{A}t$$

es decir: ω disminuye proporcionalmente al tiempo. O lo que es lo mismo, el día solar medio aumenta su duración en el transcurso del tiempo. Dicho aumento es del orden de $0^s,00164$ por siglo.

b) *Irregulares*: también puede variar debido a cambios bruscos e imprevisibles en la distribución de masas del interior de la Tierra que provoquen una variación de A . Efectivamente, en ausencia de momentos exteriores (74.2) nos queda:

$$\frac{d}{dt}(A\omega) = 0$$

es decir:

$$A\omega = \text{cte.} \quad (75.2)$$

por lo que una variación de A se traducirá en una variación de ω , en el sentido de mantener invariante el producto anterior. Por ejemplo, en 1955 la rotación de la Tierra se retrasó repentinamente en 41^s .

c) *Periódicas*: Son debidas a variaciones periódicas de origen estacional del momento de inercia de la Tierra que, también según (74.2) causan una variación periódica de ω . Desde noviembre hasta junio la velocidad angular de la Tierra aumenta respecto a la media, por lo que los relojes se retrasan. Dicho retraso es máximo a últimos de mayo y alcanza $0^s,042$. El resto del año el efecto es inverso, adelantando, a últimos de septiembre, $0^s,023$.

De lo dicho se desprende que el movimiento de rotación de la Tierra no es uniforme, por lo que día solar medio y, por tanto, el tiempo universal, no es constante. La búsqueda de una unidad astronómica de tiempo que sea constante lleva, como veremos en el capítulo 4, a sucesivas correcciones (T.U.1, T.U.2) al tiempo universal (T.U.O) y a la definición de tiempo de efemérides (T.E.), sustituido en 1984 por el tiempo dinámico terrestre (T.D.T.)

Capítulo 3

PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

Recibe el nombre de problema de los dos cuerpos la descripción del movimiento de un sistema de dos masas puntuales que se mueven de acuerdo con su atracción gravitatoria mutua.

3.1 Conservación del momento lineal

Sea O un punto fijo del espacio del movimiento: m_1 y m_2 las masas de los dos puntos materiales móviles. Si $m_1 > m_2$, llamaremos *primario* al punto de masa m_1 y *secundario* al punto de masa m_2 . Sean por otra parte $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ sus posiciones respecto a O y $\vec{r}$ el vector, de módulo r , de posición de m_2 respecto a m_1 . Se verifica:

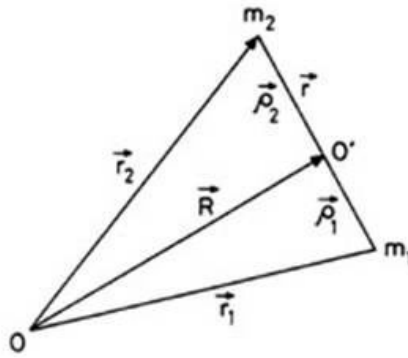


FIG 1.3

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.3)$$

De acuerdo con la ley de la gravitación, las partículas se atraen mutuamente, según la recta que las une, con una fuerza de módulo

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.3)$$

donde G es la constante de la gravitación ($G=6,67 \cdot 10^{-8}$ c.g.s.).

Según el principio de acción y reacción el primario atrae al secundario con una fuerza cuya expresión vectorial es:

$$\vec{F}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (3.3)$$

y el secundario atrae al primario con una fuerza:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (4.3)$$

y como suponemos que sobre los puntos de masas m_1 y m_2 no actúan otras fuerzas que las de atracción mutua, podemos escribir sus ecuaciones de movimiento en la forma:

$$\left. \begin{aligned} m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \\ m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Si $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de gravedad O' del sistema de las dos masas, se verifica:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \quad (6.3)$$

con $M = m_1 + m_2$.

Si sumamos miembro a miembro las ecuaciones (5.3), obtenemos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

y de (6.3):

$$M \ddot{\vec{R}} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \quad (7.3)$$

y derivando dos veces:

$$M \ddot{\vec{R}} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2$$

de donde

$$\ddot{\vec{R}} = 0$$

e integrando:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} &= \vec{a} \\ \vec{R} &= \vec{a}t + \vec{b} \end{aligned} \quad (8.3)$$

donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores constantes determinados por las condiciones iniciales del problema.

La relación (8.3) nos da el *principio de conservación del momento lineal*: “el centro de masas se mueve en una línea recta con una velocidad uniforme”.

3.2 Ecuación del movimiento relativo

Derivando dos veces la expresión (1.3):

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$$

y sustituyendo (5.3):

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r}$$

o sea:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (9.3)$$

habiendo hecho para simplificar $\mu = G(m_1 + m_2)$

La ecuación (9.3) es la *ecuación del movimiento relativo* del secundario con respecto al primario. Es equivalente a tres ecuaciones escalares diferenciales de segundo orden, que requieren seis constantes de integración para su solución completa. Establecer e interpretar estas constantes constituye el núcleo del problema de los dos cuerpos. El movimiento definido por (9.3) se llama *kepleriano* por verificar las leyes de Kepler que se deducen de su integración.

La expresión (9.3) es un caso particular de la ecuación del problema de la *fuerza central* el cual consiste en describir el movimiento de una partícula de masa m que es atraída hacia un punto fijo O (centro) por una fuerza de módulo

$$F = m f(r)$$

que es proporcional a la masa y depende de la distancia r entre la partícula y O . La función f se llama *ley de atracción*. Se supone que es una función continua entre 0 e ∞ , es decir para $0 < r < \infty$.

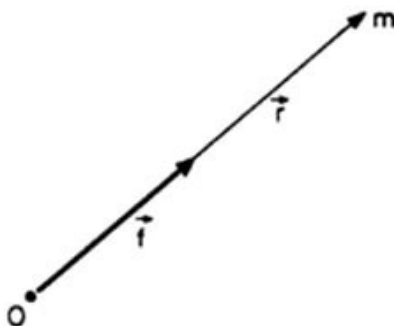


FIG 2.3

Si indicamos la posición de la masa m por un vector $\vec{r}$ dirigido de O a m , de acuerdo con la ley de Newton, el movimiento de la partícula está regido por la ecuación

$$m\ddot{\vec{r}} = -mf(r)r^{-1} \quad (10.3)$$

En el caso de fuerza newtoniana que es el que nos afecta, es

$$f(r) = \mu r^{-2}$$

y la ecuación (10.3) se reduce a la (9.3)

3.3 Integral de las áreas. Segunda ley de Kepler

Halleemos una integral primera de (9.3) que llamaremos *integral de las áreas*, buscando una combinación integrable: Si designamos por $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ la velocidad relativa del secundario, según (9.3):

$$\dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (11.3)$$

y si calculamos

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{v}}$$

y tenemos en cuenta (11.3):

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{v}} = \vec{0} + \vec{r} \wedge \left(-\frac{\mu}{r^3}\right) \vec{r} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \wedge \vec{r} = \vec{0}$$

es decir:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$$

e integrando

$$(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{c} \quad (12.3)$$

relación que constituye la *integral de las áreas*. La constante vectorial de integración $\vec{c}$ es la *constante de las áreas* que equivale a tres constantes escalares.

Veamos su significado: recordemos que el área elemental del triángulo de lados $\vec{r}$, $\vec{r} + d\vec{r}$, $d\vec{r}$, puede expresarse en la forma

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge d\vec{r}$$

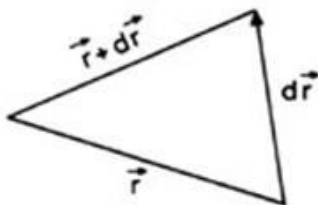


FIG 3.3

y definimos como *velocidad areolar* la derivada con respecto al tiempo del área barrida por el radio vector:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{c}$$

lo que nos dice que la constante de las áreas es el doble de la velocidad areolar:

$$\vec{c} = 2\dot{\vec{A}} \quad (13.3)$$

Integrando (13.3) se obtiene:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{c}t + \vec{K} \quad (14.3)$$

que constituye la *segunda ley de Kepler o ley de las áreas*: "Las áreas barridas por el radio vector en tiempos iguales son iguales".

3.4 Ecuación de la órbita relativa. Primera y tercera leyes

De la integral de las áreas (12.3), multiplicando ambos miembros escalarmente por $\vec{r}$, deducimos:

$$(\vec{r} \wedge \vec{v})\vec{r} = \vec{c} \cdot \vec{r} = 0$$

que nos dice que el vector $\vec{r}$ se mantiene perpendicular al vector constante $\vec{c}$ y se mueve en el plano ortogonal a $\vec{c}$ por el primario; luego, deducimos que "el secundario describe una órbita plana alrededor del primario." Veamos cuál es la ecuación de dicha órbita, pero antes hallemos otra integral primera y, por consiguiente, otra constante de integración.

Calculemos $\frac{d}{dt}(\vec{v} \wedge \vec{c})$ teniendo en cuenta (9.3) y (12.3) y utilizando además las relaciones

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \quad \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{r} \cdot \vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v}$$

Tendremos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{v} \wedge \vec{c}) &= \dot{\vec{v}} \wedge \vec{c} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{v}) = -\frac{\mu}{r^3} [(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{v}] = \\ &= -\frac{\mu}{r^3} (r\dot{\vec{r}} - r^2\vec{v}) = \mu \frac{r\vec{v} - \dot{\vec{r}}\vec{r}}{r^2} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)\end{aligned}$$

e integrando se obtiene:

$$\vec{v} \wedge \vec{c} = \mu \left(\frac{1}{r} \vec{r} + \vec{e} \right) \quad (15.3)$$

siendo (15.3) la integral buscada y $\mu\vec{e}$ la constante vectorial de integración. Parece, a primera vista, que $\vec{e}$ va a englobar las tres constantes de integración que nos hacen falta para resolver el problema; pero, sus componentes no son independientes de las de $\vec{c}$ como luego veremos. La integral (15.3) recibe el nombre de integral de Laplace.

Si ahora calculamos c^2 teniendo en cuenta (12.3) y (15.3), tendremos:

$$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{c} = \vec{r} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{c}) = \mu \vec{r} \cdot \left(\frac{1}{r} \vec{r} + \vec{e} \right) = \mu (\vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{e})$$

y haciendo

$$\frac{c^2}{\mu} = p \quad (16.3)$$

obtenemos finalmente:

$$p = r + \vec{r} \cdot \vec{e} \quad (17.3)$$

que es la *ecuación de la órbita relativa* del secundario alrededor del primario. Expresada en componentes y racionalizada, constituye la ecuación de una cuádrica de revolución alrededor del eje dado por $\vec{e}$. La intersección de dicha cuádrica con el plano en el que se mueve el secundario, perpendicular al vector constante $\vec{c}$ nos dará la trayectoria que describe el secundario, que será, en consecuencia, una cónica. Efectivamente, $\vec{e}$ se encuentra en el plano orbital, ya que al multiplicar escalarmente los dos miembros de la integral de Laplace por $\vec{c}$ resulta

$$\vec{c} \cdot \vec{e} = 0 \quad (18.3)$$

Para expresar la ecuación (17.3) escalarmente, tomemos coordenadas polares de eje polar $\vec{e}$, polo en el primario y argumento el ángulo V , que llamaremos *anomalía verdadera*, que forman los vectores $\vec{e}$ y $\vec{r}$.

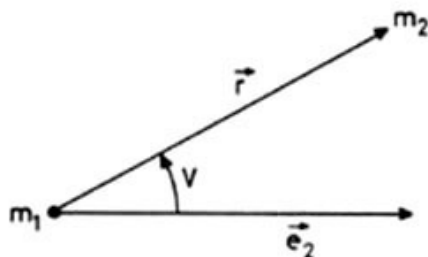


FIG 4.3

Tendremos:

$$p = r + r \cos V$$

y despejando r :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V} \quad (19.3)$$

que es la ecuación polar focal de una cónica de *parámetro* p y *excentricidad* e . El primario ocupa uno de los focos de la cónica y el vector $\vec{e}$ tiene la dirección del radio vector del vértice principal más próximo al primario, punto que recibe el nombre de *periastro*. Podemos pues enunciar la *primera ley de Kepler*: "en su movimiento relativo el secundario describe una cónica en uno de cuyos focos se encuentra el primario".

La naturaleza de la cónica (19.3) depende del valor de su excentricidad e : Si $e < 1$, es una elipse; si $e = 1$, es una parábola; si $e > 1$, es una hipérbola.

Para los casos de elipse e hipérbola, si llamamos a y b a los semiejes, el valor del parámetro es $p = b^2/a$. En efecto, si $V = 0^\circ$ es, para la elipse:

$$\begin{aligned} r &= a - c = \frac{p}{1 + e} \\ p &= (1 + e)(a - c) = \left(1 + \frac{c}{a}\right)(a - c) = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

y para la hipérbola:

$$\begin{aligned} r &= c - a = \frac{p}{1 + e} \\ p &= (c - a)(1 + e) = (c - a)\left(1 + \frac{c}{a}\right) = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

y análogamente, si $V = 180^\circ$ es, para la elipse:

$$\begin{aligned} r &= a + c = \frac{p}{1 - e} \\ p &= (a + c)(1 - e) = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

y para la hipérbola, como veremos en el estudio del movimiento hiperbólico, no tiene sentido considerar $V=180^\circ$.

También podemos escribir el parámetro p en la forma:

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{en el caso de la elipse}$$

y

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{en el caso de la hipérbola}$$

Si la cónica es una elipse, el semieje a recibe el nombre de *distancia media*, pues, en efecto, es la media aritmética de las distancias máxima y mínima al secundario.

Por la segunda ley de Kepler, el movimiento elíptico será periódico, de *periodo* P , con un *movimiento medio*

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad \text{rad/unidad de tiempo} \quad (20.3)$$

Tomando módulos en (13.3):

$$c = 2\dot{A} = 2\frac{\pi ab}{P} = nab$$

y según (16.3):

$$\mu = \frac{c^2}{p} = \frac{n^2 a^2 b^2}{p} = n^2 a^3 = \frac{4\pi^2}{P^2} a^3 \quad (21.3)$$

3.4.1 Forma de Newton de la tercera ley de Kepler

Hagamos aplicación de la fórmula (21.3) para calcular los periodos de revolución de dos masas m_2 y m'_2 que describen órbitas elípticas de semiejes a y a' alrededor de un primario común m_1 . Llamando P y P' a los periodos respectivos, tendremos:

$$P^2 = 4\pi^2 \left(\frac{a^3}{\mu} \right) \quad (22.3)$$

Donde

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

y

$$P'^2 = 4\pi^2 \left(\frac{a'^3}{\mu'} \right) \quad (23.3)$$

con

$$\mu' = G(m_1 + m'_2)$$

Dividiendo miembro a miembro (22.3) y (23.3), obtenemos:

$$\left(\frac{P}{P'}\right)^2 = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \frac{\mu}{\mu'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \frac{m_1 + m_2'}{m_1 + m_2} \quad (24.3)$$

que nos dice que "para todas las elipses cuyo valor de μ sea el mismo ($m_2' = m_2$), los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de los semiejes". La *tercera ley de Kepler* sin tener en cuenta el valor de μ se escribiría

$$\left(\frac{P}{P'}\right)^2 = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \quad (25.3)$$

La única diferencia entre las ecuaciones (24.3) y (25.3) es el factor

$$k = \frac{m_1 + m_2'}{m_1 + m_2}$$

Dividiendo en él numerador y denominador por m_1 obtenemos:

$$k = \frac{1 + \frac{m_2'}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

Suponiendo, por ejemplo, que el primario es el Sol y los cuerpos m_2 y m_2' son Mercurio y Júpiter, respectivamente, tendremos:

$$\frac{m_2'}{m_1} = \frac{1}{1047,3} \quad \text{y} \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{6200000}$$

resultando ser $k \approx 1$.

La tercera ley de Kepler (25.3) es sólo una aproximación de la verdadera ley que relaciona los periodos con los semiejes (24.3).

3.4.2 Constantes de integración

Consideremos las constantes de integración $\vec{c}$ y $\vec{e}$, cada una de las cuales equivale a tres constantes escalares. Como ya hemos indicado, estas constantes no son independientes ya que $\vec{c}$ y $\vec{e}$ son dos vectores perpendiculares (ver 18.3). Se tienen, pues, cinco constantes independientes, que corresponden a las cinco condiciones que en el espacio determinan una cónica con un foco prefijado. Recordemos que para resolver completamente el problema necesitamos seis constantes arbitrarias. La sexta aparecerá cuando expresemos $\vec{r}$ y $\vec{v}$ en función del tiempo; puede tomarse como constante la *época de paso por el periastro*, T .

En función de dicha constante T , y contando las áreas a partir del periastro, de la ley de las áreas (14.3) se deduce, para $t = T$:

$$\vec{O} = \frac{1}{2} \vec{c}T + \vec{K}$$

de donde

$$\vec{K} = -\frac{1}{2} \vec{c}T$$

y por tanto,

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{c}(t - T) \quad (26.3)$$

relación que fija la *posición del secundario sobre su órbita*.

3.4.3 Hodógrafa del movimiento

Recordemos que recibe el nombre de hodógrafa el lugar geométrico de los extremos de los vectores velocidad de un móvil, trazados, en cada instante, desde un punto dado, exterior a la trayectoria, llamado polo.

Para hallarla en nuestro caso, multipliquemos vectorialmente (15.3) por $\vec{c}$. Obtendremos:

$$\mu \vec{c} \wedge \left(\frac{1}{r} \vec{r} + \vec{e} \right) = \vec{c} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{c}) \vec{v} - (\vec{c} \cdot \vec{v}) \vec{c} = c^2 \vec{v}$$

y despejando $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{\mu}{c^2} \vec{c} \wedge \left(\frac{1}{r} \vec{r} + \vec{e} \right)$$

y recordando que $p = c^2 / \mu$

$$\vec{v} = \frac{1}{p} \vec{c} \wedge \frac{1}{r} \vec{r} + \frac{1}{p} \vec{c} \wedge \vec{e} \quad (27.3)$$

relación que nos dice que podemos descomponer $\vec{v}$ en suma de dos vectores no ortogonales:

$$\frac{1}{p} \vec{c} \wedge \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{de módulo constante } c/p \text{ y dirección normal a } \vec{r}.$$

$$\frac{1}{p} \vec{c} \wedge \vec{e} \quad \text{de módulo constante } ce/p \text{ y dirección la del eje menor, a } 90^\circ \text{ de } \vec{e} \text{ en el sentido del movimiento.}$$

Componiendo ambos vectores se obtiene una circunferencia como hodógrafa del movimiento. Su radio es c/p y su centro C es el extremo del radio vector cuyo módulo es ce/p , normal por el foco a $\vec{e}$. De la figura 5.3 deducimos las componentes radial y perpendicular de la velocidad en función de la anomalía verdadera.

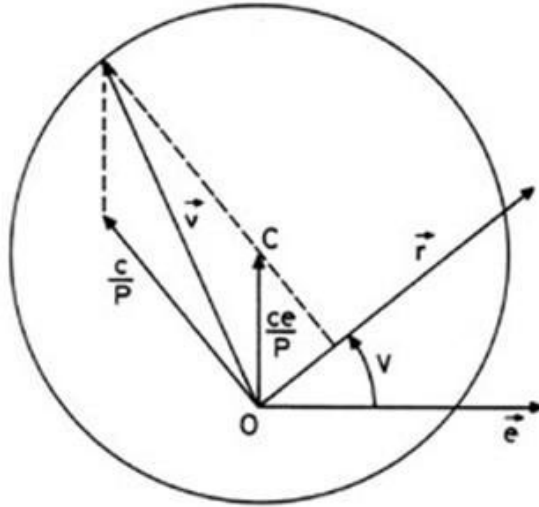


FIG 5.3

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{c}{p} e \sin V \\ v_p &= \frac{c}{p} (1 + e \cos V) \end{aligned} \right\} \quad (28.3)$$

3.5 Integral de la energía

Multiplicando escalarmente por $\vec{v}$ ambos miembros de (9.3) se obtiene:

$$\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{v} \cdot \vec{r}) = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = -\frac{\mu}{r^3} r \dot{r} = -\frac{\mu}{r^2} \dot{r} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$$

y como por otra parte,

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}$$

resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$$

e integrando:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{\mu}{r} + h \quad (29.3)$$

relación que constituye la *integral de la energía* y que nos indica que el módulo de la velocidad del secundario sólo depende de su distancia al primario, pues μ y h se mantienen constantes durante el movimiento. La constante escalar h de integración se denomina *constante de la energía*. Su interpretación física se halla haciendo tender r a infinito, con lo que v es v_∞ y

$$h = \frac{1}{2}v_\infty^2$$

Es decir: h es la mitad del cuadrado de la velocidad en el infinito.

Evidentemente h ha de ser función de las constantes de integración $\vec{c}$ y $\vec{e}$. Podemos explicitar dicha dependencia multiplicando escalarmente por sí misma la ecuación (27.3)

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \left[\frac{1}{p} \vec{c} \wedge \left(\frac{1}{r} \vec{r} + \vec{e} \right) \right]^2 = \frac{1}{p^2} c^2 \left(\frac{1}{r} \vec{r} + \vec{e} \right)^2 = \frac{c^2}{p^2} \left(1 + e^2 + 2 \frac{1}{r} \vec{r} \cdot \vec{e} \right)$$

y teniendo en cuenta las igualdades (16.3) y (17.3)

$$v^2 = \frac{\mu}{p} \left(1 + e^2 + 2 \frac{1}{r} (p - r) \right) = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right)$$

Si identificamos con (29.3) se deduce:

$$h = \frac{1}{2} \mu \frac{e^2 - 1}{p}$$

o en función de c y e :

$$h = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} (e^2 - 1) \quad (30.3)$$

Ahora bien, $\frac{\mu^2}{2c^2} > 0$, y según que la órbita sea elíptica ($e < 1$), parabólica ($e = 1$) o hiperbólica ($e > 1$), será $h < 0$, $h = 0$ o $h > 0$, respectivamente y, por tanto, según (29.3) la velocidad en el infinito será imaginaria, nula o real, respectivamente.

Además, en el caso de la elipse y la hipérbola el parámetro p es b^2/a , por lo tanto:

$$h = \frac{1}{2} \frac{\mu a}{b^2} (e^2 - 1)$$

donde $b^2 = a^2(1 - e^2)$ para la elipse y $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ para la hipérbola. Sustituyendo dichas expresiones en la integral de la energía (29.3) y operando podemos obtener, en cada caso, el módulo de la velocidad a la distancia r :

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (31.3)$$

para la elipse, y

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) \quad (32.3)$$

para la hipérbola.

En el caso parabólico tendríamos ($a = \infty$):

$$v^2 = \mu \frac{2}{r}$$

La velocidad correspondiente a una órbita circular de radio r es:

$$v_c^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu}{r}$$

es decir:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

que recibe el nombre de *velocidad circular*.

Si la órbita es parabólica, la velocidad a la distancia r vale:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (33.3)$$

valor que recibe el nombre de *velocidad de escape* a dicha distancia.

Comparando ambas velocidades, observamos que

$$v_e = \sqrt{2}v_c \quad (34.3)$$

que nos dice que cuando para una órbita circular de radio r , la velocidad sea $\sqrt{2}v_c$, la velocidad tomará el valor de la velocidad de escape y la trayectoria pasará a ser parabólica.

3.5.1 Velocidades cósmicas. Satélites geoestacionarios

La mínima velocidad que se debe imprimir a un cuerpo para que entre en órbita circular alrededor de la Tierra, despreciando el rozamiento del aire, se denomina

velocidad de satelización o *primera velocidad cósmica*. Su valor se halla sustituyendo en la expresión de v_c el radio R y la μ de la Tierra:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu_T}{R}} = 7,9 \text{ km/s}$$

Llamamos *velocidad de escape* o *segunda velocidad cósmica* a la mínima velocidad que se debe imprimir a un cuerpo para que abandone la Tierra. La mínima velocidad se obtendrá si el cuerpo "llega al infinito" con velocidad nula, por lo que su valor se podrá hallar sustituyendo la μ y el radio de la Tierra en la expresión de la velocidad parabólica:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\mu_T}{R}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Por último se denomina *tercera velocidad cósmica* a la mínima velocidad que se debe imprimir a un cuerpo para que, partiendo de la Tierra, abandone el Sistema Solar. Dicha velocidad se calcula igual que la anterior, pero considerando la μ del Sol y tomando como r la distancia de la Tierra al Sol, D :

$$v_3 = \sqrt{\frac{2\mu_S}{D}} = 42 \text{ km/s}$$

Si el cuerpo se lanza en la dirección del movimiento de la Tierra en torno al Sol (unos 29,7 km/s, supuesta la órbita de la Tierra circular), dicha velocidad se reduce a 12,3 km/s.

A menudo interesa, especialmente para telecomunicaciones, que un satélite artificial se mantenga ubicado sobre la vertical de un cierto lugar. Ello equivale a decir que la velocidad angular del satélite (supuesto en órbita circular) sea la misma que la de la Tierra (ω).

$$v_c = \omega r$$

elevando dicha expresión al cuadrado:

$$v_c^2 = \omega^2 r^2$$

es decir:

$$\frac{\mu}{r} = \omega^2 r^2$$

Según la tercera ley de Kepler:

$$\omega^2 r^3 = \mu$$

por lo que

$$r = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\omega^2}} = 42.200 \text{ km}$$

donde ω es la duración de un día sidéreo en tiempo solar medio (86.164 segundos de t.s.m.). Si h es la altura del satélite sobre la superficie de la Tierra y R es el radio de la Tierra es

$$h = r - R = 42.200 - 6.000 \text{ km} = 35.800 \text{ km}$$

Los satélites situados a dicha altura se denominan *sincrónicos o geoestacionarios*.

3.6 Movimiento elíptico

El estudio del movimiento elíptico de un astro se simplifica notablemente introduciendo los ángulos o *anomalías* que definimos a continuación:

Anomalía verdadera : Es el ángulo $V = \widehat{POQ}$ formado por el radio vector del astro Q y la dirección del periastro P (la teníamos ya definida).

Anomalía excéntrica: Es el ángulo $E = \widehat{PCQ'}$ formado por la dirección del periastro y el radio CQ' , siendo C el centro de la elipse y Q' la intersección con el círculo principal de la elipse, de la normal por el astro Q al eje mayor de la elipse.

Anomalía media: Es el ángulo M descrito con vértice en el foco O , en sentido antihorario y a partir de la dirección del periastro, por un astro ficticio que gira con velocidad angular igual al movimiento medio $n = 2\pi/P$ (P =periodo del movimiento). Si empezamos a contar el tiempo en el instante de paso del astro por el periastro, la anomalía media valdrá nt . En general será:

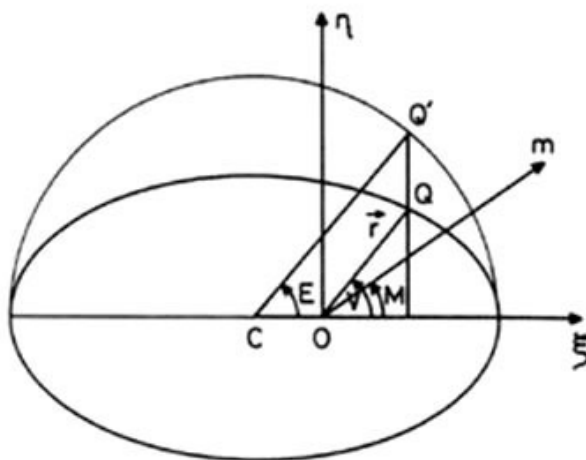


FIG 6.3

$$M = n(t - T) \quad (35.3)$$

donde T es la época de paso por el periastro.

Es cómodo expresar las coordenadas polares de un astro en función de la anomalía excéntrica; para ello, tomemos un sistema de ejes cartesianos ξ, η con origen en el foco O , y sean (ξ, η) las coordenadas del secundario Q en dicho sistema. Se verifica:

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos V = CQ_1 - CO = a \cos E - ae = a(\cos E - e) \\ \eta &= r \sin V = b \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E\end{aligned}$$

(Obteniendo esta segunda ecuación teniendo en cuenta la razón de afinidad de la elipse y la circunferencia).

En resumen, pues:

$$\left. \begin{aligned}\xi &= r \cos V = a(\cos E - e) \\ \eta &= r \sin V = a\sqrt{1-e^2} \sin E\end{aligned} \right\} \quad (36.3)$$

y tomando como unidad a , en el mismo sistema de ejes

$$\left. \begin{aligned}x &= \frac{\xi}{a} = \frac{r}{a} \cos V = \cos E - e \\ Y &= \frac{\eta}{a} = \frac{r}{a} \sin V = \sqrt{1-e^2} \sin E\end{aligned} \right\} \quad (37.3)$$

que son las llamadas *coordenadas reducidas* del secundario.

De las relaciones (36.3) elevando al cuadrado y sumando ordenadamente, tenemos:

$$r^2 = a^2(1 - e \cos E)^2$$

y siendo $a > 0$, $e < 1$, $|\cos E| \leq 1$, extrayendo la raíz cuadrada:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (38.3)$$

fórmula que suministra el radio vector en función de la anomalía excéntrica. Si queremos relacionar las anomalías verdadera y excéntrica consideremos la primera de las fórmulas (36.3) y la (38.3):

$$\begin{aligned}r \cos V &= a(\cos E - e) \\ r &= a(1 - e \cos E)\end{aligned}$$

restando miembro a miembro:

$$r(1 - \cos V) = a(1 - e \cos E - \cos E + e)$$

o sea:

$$2r \sin^2 \frac{V}{2} = a(1+e)(1-\cos E) = 2a(1+e) \sin^2 \frac{E}{2} \quad (39.3)$$

y sumando miembro a miembro:

$$r(1+\cos V) = a(1-e\cos E + \cos E - e)$$

o sea:

$$2r \cos^2 \frac{V}{2} = a(1-e)(1+\cos E) = 2a(1-e) \cos^2 \frac{E}{2} \quad (40.3)$$

Dividiendo ordenadamente (39.3) y (40.3) y extrayendo la raíz cuadrada:

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (41.3)$$

fórmula que suministra la anomalía verdadera en función de la anomalía excéntrica.

3.6.1 Ecuación de Kepler

Relacionemos, finalmente, las anomalías media y excéntrica. Partiendo de la ley de las áreas en su forma polar

$$r^2 \frac{dV}{dt} = c \quad (42.3)$$

y recordando que $c = 2\dot{A} = nab$, se tiene:

$$2dA = nabdt = r^2 dV$$

e integrando entre O y V , valores que corresponden respectivamente a la época T de paso por el periastro ya una época t cualquiera, tenemos:

$$\int_T^t ndt = \frac{1}{ab} \int_0^V r^2 dV$$

o sea:

$$n(t-T) = \frac{1}{ab} \int_0^V r^2 dV \quad (43.3)$$

Para efectuar la integración indicada, calculemos dV diferenciando en (41.3):

$$\frac{1}{2} \frac{dV}{\cos^2 \frac{V}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{2} \frac{dE}{\cos^2 \frac{E}{2}}$$

de donde:

$$dV = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\cos^2 \frac{V}{2}}{\cos^2 \frac{E}{2}} dE$$

y teniendo en cuenta (40.3), sustituyendo y simplificando:

$$dV = \frac{a}{r} \sqrt{1-e^2} dE = \frac{b}{r} dE$$

Sustituyendo en la integral (43.3), recordando que $r=a(1-e\cos E)$, resulta:

$$M = \frac{1}{ab} \int_0^V r(r dV) = \frac{1}{ab} \int_0^E a(1-e\cos E) b dE = \int_0^E (1-e\cos E) dE$$

o sea:

$$M = E - e \sin E \quad (44.3)$$

relación buscada que recibe el nombre de *ecuación de Kepler*.

3.6.2 Métodos de resolución de la ecuación de Kepler

Observemos en primer lugar que si en (44.3) damos a M un valor comprendido entre $k\pi$ y $(k+1)\pi$, con k entero, dicha ecuación admite una única raíz entre tales límites. En efecto, si ponemos

$$F(E) = E - e \sin E - M$$

se tiene:

$$F(k\pi) = k\pi - M < 0$$

y

$$F((k+1)\pi) = (k+1)\pi - M > 0$$

Además,

$$\frac{dF(E)}{dE} = 1 - e \cos E > 0 \quad \text{siempre;}$$

luego, la función $F(E)$ es creciente en el intervalo $(k\pi, (k+1)\pi)$ y toma en sus extremos valores de signos contrarios. Luego tiene una única raíz en dicho intervalo.

Entre el gran número de métodos para resolver la ecuación de Kepler citaremos:

a) *Método gráfico* (o de Dubois). Dibujada una senoide, expresando el argumento en radianes, por P tal que $OP=M$ se traza una recta que forme con el eje de abscisas un ángulo α , tal que

$$\cot \alpha = e$$

O sea:

$$\Delta E_0 = \frac{\Delta M_0}{1 - e \cos E_0}$$

donde e está expresado en radianes. Conocido ΔE_0 con (46.3) tendremos el valor de E . Llamémosle E_1 . Podemos hallar el correspondiente valor de M_1 . Si en el orden de aproximación requerida $M_1=M$ daremos por terminado el proceso; si no, seguiremos.

Existen tablas que suministran directamente E en función de e y de M . Este valor de E es aproximado y se corrige con el proceso que acabamos de exponer.

c) *Método de Kepler*. De la ecuación de Kepler, tenemos:

$$E = M + e \sen E$$

con e y M dados. Tomando en el segundo miembro como E aproximada el valor de M , resulta:

$$E_1 = M + e \sen M$$

Tomando ahora, como E aproximada el valor E_1 obtenido:

$$E_2 = M + e \sen E_1$$

Repitiendo el proceso iterativamente, podemos obtener la anomalía excéntrica con la precisión deseada.

En general:

$$E_i = M + e \sen E_{i-1} \quad (i = 2, 3, 4, \dots)$$

d) *Método del desarrollo en serie*. Consiste en expresar E por desarrollo en serie de Mac-Laurin de potencias de e , considerando M como parámetro. Lo estudiaremos en el apartado siguiente formando parte de un contexto más general.

3.7 Desarrollos en serie

Obtendremos ahora los desarrollos en serie de las anomalías excéntrica y verdadera y del radio vector en función de la anomalía media y la excentricidad.

3.7.1 Desarrollo en serie de la anomalía excéntrica

Expresaremos E por desarrollo en serie de Mac-Laurin de potencias de e , considerando M como parámetro. Para hallar los distintos términos del mismo, derivaremos sucesivamente la ecuación de Kepler:

$$M = E - e \sen E; \quad \text{para } e=0, \quad E_0 = M$$

$$0 = \frac{dE}{de} (1 - e \cos E) - \sen E; \quad \text{para } e=0, \quad \left(\frac{dE}{de} \right)_0 = \sen M$$

$$0 = \frac{d^2 E}{de^2} (1 - e \cos E) + \left(\frac{dE}{de} \right)^2 e \sin E - 2 \frac{dE}{de} \cos E;$$

$$\text{para } e=0, \left(\frac{d^2 E}{de^2} \right) = 2 \sin M \cos M = \sin 2M, \text{ etc.}$$

y aplicando la fórmula de Mac-Laurin:

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{e^3}{8} (3 \sin 3M - \sin M) + \dots \quad (47.3)$$

3.7.2 Desarrollo en serie del radio vector

Derivando la ecuación de Kepler y recordando la expresión del radio vector $r=a(l-e \cos E)$, obtenemos:

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E = \frac{r}{a}$$

y de aquí:

$$\frac{a}{r} = \frac{dE}{dM}$$

Calcularemos $\frac{dE}{dM}$ a partir de (47.3), considerando e constante:

$$\frac{a}{r} = \frac{dE}{dM} = 1 + e \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{e^3}{8} (9 \cos 3M - \cos M) + \dots \quad (48.3)$$

de donde, desarrollando en serie por división:

$$r = a \left[1 - e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2M) + \frac{3}{8} e^3 (\cos M - \cos 3M) + \dots \right] \quad (49.3)$$

3.7.3 Desarrollo en serie de la anomalía verdadera

Teniendo en cuenta la ley de las áreas:

$$r^2 \frac{dV}{dt} = na^2 \sqrt{1-e^2}$$

y que

$$M = n(t - T) \quad \text{y} \quad dM = ndt$$

sustituyendo dt y despejando dV , se deduce:

$$dV = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1-e^2} dM$$

De (48.3) se obtiene, elevando al cuadrado y ordenando según las potencias de e :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 + 2e \cos M + \frac{e^2}{2} (5 \cos 2M + 1) + \frac{e^3}{4} (13 \cos 3M + 3 \cos M + \dots)$$

y desarrollando $\sqrt{1-e^2}$:

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \dots$$

Multiplicando estas dos series se obtiene:

$$dV = \left[1 + 2e \cos M + \frac{5}{2}e^2 \cos 2M + \frac{e^3}{4} (13 \cos 3M - \cos M) + \dots \right] dM$$

e integrando y observando que para $V=0$, $M=0$ (por lo que la constante de integración será nula), finalmente:

$$V = M + 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{e^3}{12} (13 \sin 3M - 3 \sin M) + \dots \quad (50.3)$$

3.7.4 Desarrollo en serie de las coordenadas reducidas

Hemos definido como coordenadas reducidas

$$\left. \begin{aligned} X &= \cos E - e \\ Y &= \sqrt{1-e^2} \sin E \end{aligned} \right\}$$

Recordando una vez más que $r=a(l-ecosE)$, despejando $\cos E$ y teniendo en cuenta (49.3):

$$\cos E = \frac{1-\frac{r}{a}}{e} = \cos M - \frac{e}{2} (1 - \cos 2M) + \frac{3e^2}{8} (\cos 3M - \cos M) + \dots$$

y restando e de esta última expresión:

$$X = \cos M - \frac{e}{2} (3 - \cos 2M) + \frac{3e^2}{8} (\cos 3M - \cos M) + \dots \quad (51.3)$$

Por otra parte, de la ecuación de Kepler, despejando $\sin E$ y teniendo en cuenta (47.3):

$$\sin E = \frac{E - M}{e} = \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M + \frac{e^2}{8} (3 \sin 3M - \sin M) + \dots$$

y multiplicando por el desarrollo de $\sqrt{1 - e^2}$ obtenido anteriormente:

$$Y = \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M + \frac{e^2}{8} (3 \sin 3M - 5 \sin M) + \dots \quad (52.3)$$

3.8 Movimiento hiperbólico

En el caso de que la trayectoria sea una hipérbola es $e > 1$ y de la ecuación

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V}$$

teniendo en cuenta que r debe ser positivo y $p = c^2/\mu$, se deduce que V debe variar entre

$$\pm \cos^{-1} \left(-\frac{1}{e} \right)$$

de modo que el cuerpo sólo describe una rama de hipérbola, precisamente la que dirige su concavidad hacia el foco.

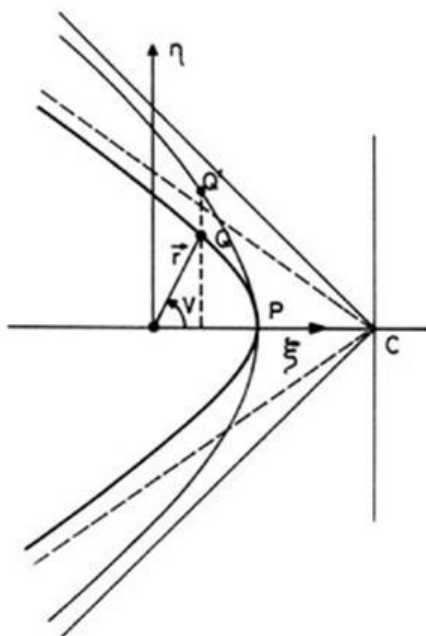


FIG 8.3

Consideremos ahora un sistema de coordenadas rectangulares ξ, η con origen en el foco O . Se verificará:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos V = a(e - ChF) \\ \eta &= r \sin V = a\sqrt{e^2 - 1}ShF \end{aligned} \right\} \quad (53.3)$$

donde F es el parámetro de la representación (hiperbólica) de la hipérbola equilátera por

$$\left. \begin{aligned} X &= -aChF \\ Y &= aShF \end{aligned} \right\} \quad (\text{origen en } C)$$

Observamos que las fórmulas (53.3) se pueden obtener, por analogía con las del movimiento elíptico, sin más que tomar $E=iF$, $\cos Fi=ChF$, $\text{isen} Fi=-ShF$, $\sqrt{1-e^2}=i\sqrt{e^2-1}$ y tener en cuenta que a es negativo.

Si elevamos al cuadrado y sumamos los dos miembros de (53.3), tendremos:

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2(e^2 + 1 - 2eChF + e^2Sh^2F) = \\ &= a^2(1 - 2eChF + e^2Ch^2F) = a^2(eChF - 1)^2 \end{aligned}$$

De donde:

$$r = a(eChF - 1)$$

Si queremos relacionar la anomalía verdadera con F , consideremos

$$\begin{aligned} r \cos V &= a(e - ChF) \\ r &= a(eChF - 1) \end{aligned}$$

restando:

$$r(1 - \cos V) = 2r \sin^2 \frac{V}{2} = a(ChF - 1)(e + 1) \quad (54.3)$$

y sumando:

$$r(1 + \cos V) = 2r \cos^2 \frac{V}{2} = a(ChF + 1)(e - 1) \quad (55.3)$$

y dividiendo (54.3) y (55.3):

$$\tan^2 \frac{V}{2} = \frac{e+1}{e-1} \frac{ChF-1}{ChF+1} = Th^2 \frac{F}{2} \frac{e+1}{e-1}$$

de donde:

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} Th \frac{F}{2} \quad (56.3)$$

Si queremos relacionar F con la anomalía media, escribiremos, de la expresión polar de la ley de las áreas:

$$r^2 dV = c dt \quad c = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V} \quad V = \arccos \frac{p - r}{er}$$

y

$$dV = \frac{p}{r \sqrt{e^2 r^2 - (p - r)^2}} dr$$

y sustituyendo

$$\frac{rp}{\sqrt{e^2 r^2 - (p - r)^2}} dr = c dt$$

o también:

$$\frac{ra(e^2 - 1)}{\sqrt{e^2 r^2 - (a(e^2 - 1) - r)^2}} dr = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)} dt$$

y desarrollando y simplificando:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = \frac{r dr}{\sqrt{(a + r)^2 - a^2 e^2}}$$

y si hacemos el cambio de variable $a + r = ae \cosh F$ la integración nos da una ecuación que corresponde a la de Kepler:

$$e \sinh F - F = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau) \quad (57.3)$$

3.9 Movimiento parabólico

En el caso de que la trayectoria sea una parábola es $e=1$ y por tanto su ecuación será

$$r = \frac{p}{1 + \cos V} \quad (58.3)$$

o también, teniendo en cuenta que en la parábola es $p=2q$ siendo q la distancia del foco al periastro y que $1 + \cos V = 2 \cos^2 \frac{V}{2}$ tenemos:

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{V}{2}} \quad (59.3)$$

Consideremos ahora un sistema de coordenadas rectangulares ξ, η con origen en el foco O (Fig. 9.3).

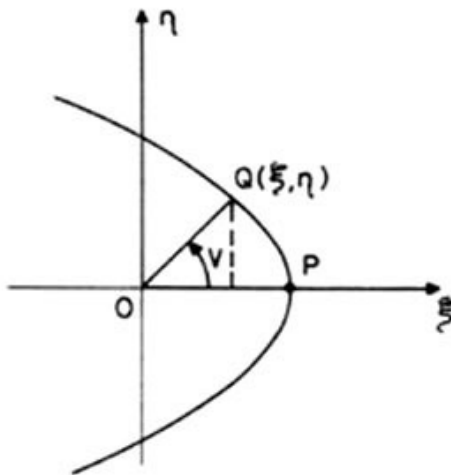


FIG 9.3

Se verificará:

$$\xi = r \cos V = \frac{q}{\cos^2 \frac{V}{2}} \left(\cos^2 \frac{V}{2} - \sin^2 \frac{V}{2} \right) = q \left(1 - \tan^2 \frac{V}{2} \right)$$

$$\eta = r \sin V = \frac{q}{\cos^2 \frac{V}{2}} 2 \sin \frac{V}{2} \cos \frac{V}{2} = 2q \tan \frac{V}{2}$$

y haciendo

$$\tan \frac{V}{2} = s$$

queda

$$\left. \begin{aligned} \xi &= q(1 - s^2) \\ \eta &= 2qs \end{aligned} \right\} \quad (60.3)$$

o, también, en polares:

$$\left. \begin{aligned} r &= q(1 + s^2) \\ V &= 2 \arctan s \end{aligned} \right\} \quad (61.3)$$

Se trata pues de determinar s , ya que una vez calculada tendremos inmediatamente las coordenadas cartesianas y polares del astro en su órbita.

Partiendo de la ley de las áreas en su forma polar y teniendo en cuenta el valor del parámetro $p = c^2/\mu$, tenemos:

$$r^2 \frac{dV}{dt} = c = \sqrt{\mu p} = \sqrt{2\mu q}$$

de donde, teniendo en cuenta la ecuación de la órbita relativa:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2\mu q}} r^2 dV = \frac{1}{\sqrt{2\mu q}} \frac{q^2}{\cos^4 \frac{V}{2}} dV$$

$$dt = \frac{q^{3/2}}{\sqrt{2\mu}} \frac{dV}{\cos^4 \frac{V}{2}}$$

e integrando entre T y t, teniendo en cuenta que para t = T (época de paso por el periastro) es V = 0:

$$\int_T^t dt = \int_0^V \frac{q^{3/2}}{\sqrt{2\mu}} \frac{dV}{\cos^4 \frac{V}{2}}$$

$$[t]_T^t = \frac{q^{3/2}}{\sqrt{2\mu}} 2 \int_0^V (1 + \tan^2 \frac{V}{2}) \frac{d \frac{V}{2}}{\cos^2 \frac{V}{2}}$$

es decir:

$$t - T = \frac{q^{3/2}}{\sqrt{2\mu}} 2 \left[\tan \frac{V}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2} \right]_0^V = \sqrt{\frac{2}{\mu}} q^{3/2} \left(\tan \frac{V}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2} \right)$$

El movimiento parabólico viene pues regido por la ecuación

$$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t - T) = \frac{1}{3} s^3 + s \quad (62.3)$$

que constituye la llamada *ecuación de Barker*. Dicha ecuación tiene siempre una única solución. Efectivamente, si

$$f(s) = \frac{1}{3} s^3 + s$$

como

$$f'(s) = s^2 + 1 > 0$$

$f(s)$ es una función monótona creciente que pasa por el origen, por lo que presenta un único punto de intersección (que es la solución) con la recta

$$f(s) = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t - T) = k \text{ (Constante en cada problema).}$$

La solución puede hallarse, por ejemplo, aplicando el algoritmo de Cardano, con lo que resulta:

$$s = \sqrt[3]{\frac{3k}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{3k}{2} - \sqrt{D}}$$

donde D es el discriminante

$$D = 1 + \frac{9k^2}{4}$$

que es positivo, lo cual indica que la ecuación de Barker tiene una raíz real y dos complejas conjugadas, como ya hemos demostrado.

La ecuación (62.3) ha sido también tabulada para diversos valores del primer miembro.

Si en (62.3) se expresan q y c en unidades astronómicas, se tiene, en días medios,

$$t - T = 27^d,403895 q^{3/2} (3s + s^3)$$

Se suele escribir

$$M(V) = 75s + 25s^3$$

y se tabula $M(V)$ (tablas de Barker). El tiempo transcurrido desde el paso por el perihelio, conocida V , se obtiene de la fórmula

$$t - T = 1^d,0961558 q^{3/2} M(V)$$

en la cual el coeficiente de $q^{3/2}$ resulta de dividir $27^d,403895$ por 25.

Para $q=1$, el tiempo necesario para que la anomalía V pase de 0° a 90° , variando entonces $M(V)$ de 0 a 100, es igual a $109^d,61$, de donde el nombre de cometa de 109 días dado por los antiguos a un cometa ficticio cuya distancia al perihelio fuera de 1 *u.a.*

3.10 Movimiento casi-parabólico

El cálculo del movimiento parabólico es más sencillo que el de los movimientos elíptico e hiperbólico.

Por otra parte, cuando la excentricidad de una órbita elíptica es próxima a la unidad, la resolución de la ecuación de Kepler necesita aproximaciones muy laboriosas. Hay un procedimiento de cálculo, que exponemos a continuación, que se aplica, con éxito, a todo movimiento sobre una órbita cuya excentricidad sea próxima a la unidad, sea por defecto o por exceso; se aplica pues a las órbitas hiperbólicas de poca excentricidad ya las órbitas elípticas de gran excentricidad. Unas y otras se reúnen bajo el nombre de *órbitas casi parabólicas*.

Si ponemos

$$\begin{aligned} q &= \frac{p}{1+e} \\ \lambda &= \frac{1-e}{1+e} \\ s &= \tan \frac{V}{2} \end{aligned} \quad (63.3)$$

tendremos, cualquiera que sea el valor de e :

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+e \cos V} = \frac{q(1+s^2)}{1+\lambda s^2} \\ c &= \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu q(1+e)} = \sqrt{\frac{2\mu q}{1+\lambda}} \end{aligned}$$

y la ley de las áreas se escribe:

$$\sqrt{\frac{2\mu q}{1+\lambda}} dt = r^2 dV = \frac{q^2(1+s^2)^2}{(1+\lambda s^2)^2} \frac{2ds}{1+s^2} = \frac{2q^2(1+s^2)ds}{(1+\lambda s^2)^2} \quad (64.3)$$

El parámetro λ es positivo en el caso de una órbita elíptica, nulo en el caso de la parábola, negativo en el caso de una órbita hiperbólica.

Integrando la ecuación (64.3) obtendremos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{2(1+\lambda)}} \frac{t-T}{q^{3/2}} &= \int_0^s \frac{(1+s^2)ds}{(1+\lambda s^2)^2} = \int_0^s ds \left[1+s^2 - 2\lambda(s^2+s^4) + 3\lambda^2(s^4+s^6) - 4\lambda^3(s^5+s^8) + \dots \right] \\ \sqrt{\frac{\mu}{2(1+\lambda)}} \frac{t-T}{q^{3/2}} &= s + \frac{s^3}{3} - 2\lambda \left(\frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} \right) + 3\lambda^2 \left(\frac{s^5}{5} + \frac{s^7}{7} \right) - \dots \end{aligned} \quad (65.3)$$

Para $\lambda=0$ hallamos la ecuación correspondiente a la parábola.

Cuando $\lambda \neq 0$, pero pequeño en valor absoluto, la ecuación (65.3) permite determinar el tiempo transcurrido desde el paso por el perihelio, dados V , q y e .

Para resolver el problema inverso, es decir hallar V dados $t-T$, q y e , basta resolver (65.3) con relación a s . Para ello escribiremos, introduciendo una nueva variable S :

$$S + \frac{S^3}{3} = s + \frac{s^3}{3} - 2\lambda \left(\frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} \right) + \dots \quad (66.3)$$

y la ecuación (65.3) será ahora:

$$M(S) = \frac{\sqrt{\mu}}{q^{3/2} \sqrt{2(1+\lambda)}} (t - T)$$

que se puede resolver a partir de las tablas para el movimiento parabólico.

Invirtiendo (66.3) se tiene:

$$s = S + a\lambda + b\lambda^2 + c\lambda^3 + \dots \quad (67.3)$$

donde los coeficientes a , b , c son funciones de S que pueden hallarse tabulados. Hallados éstos, de (67.3) se obtiene s , y de dicho valor:

$$\begin{aligned} V &= 2 \arctan s \\ r &= \frac{q(1+s^2)}{1+\lambda s^2} \\ r \cos V &= \frac{q(1-s^2)}{1+\lambda s^2} \\ r \sin V &= \frac{2qs}{1+\lambda s^2} \end{aligned}$$

3.11 Elementos de una órbita

Sabemos que para determinar completamente la solución del problema de los dos cuerpos necesitamos seis constantes de integración y, además, un dato: la masa del secundario que nos permite conocer μ . Por tanto, para definir la posición de un astro en una cierta época, en general, es necesario conocer siete cantidades denominadas *elementos de la órbita*, si bien en algunos casos particulares son suficientes seis elementos (caso de los satélites artificiales y de los pequeños planetas, en que su masa es despreciable frente a la del primario), o, aún, cinco elementos (caso de los cometas de órbita parabólica, en que además, $e=1$). Dichos elementos orbitales no tienen porque coincidir con las constantes de integración originales c , e , T , puesto que pueden sustituirse por un mismo número de expresiones independientes entre sí que involucren a dichas constantes.

3.11.1 Angulos de Euler

La posición de la órbita con respecto a un triedro fundamental de referencia X , Y , Z , queda determinada por medio de tres de dichos elementos, los ángulos de Euler Ω , i , ω (Fig.10.3). La intersección del plano de la órbita con el plano fundamental de referencia X , Y recibe el nombre de *línea de los nodos*. Hay un *nodo ascendente*, N , extremo en el que el astro pasa de la región de las Z negativas a la de las Z positivas, y otro diametralmente opuesto o nodo *descendente*.

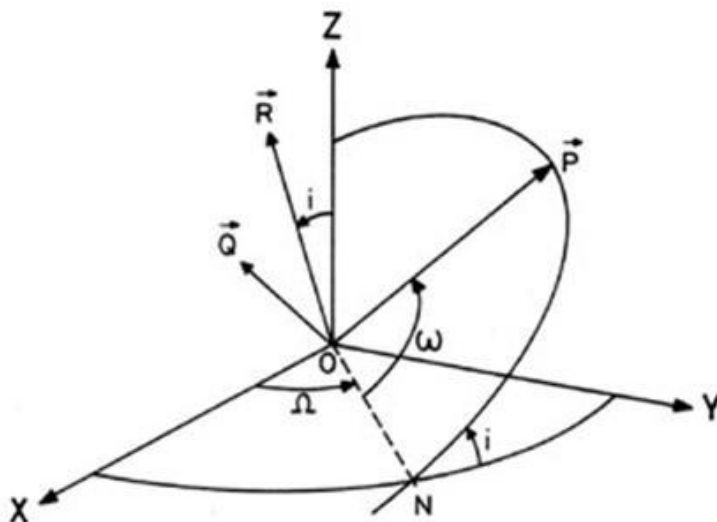


FIG 10.3

Ω es el *argumento del nodo* o ángulo formado por el eje X y la dirección del nodo ascendente.

i es la *inclinación de la órbita*, o ángulo formado por los planos de la órbita y fundamental.

Si $0^\circ \leq i < 90^\circ$ el movimiento se llama *directo*, y si $90^\circ \leq i < 180^\circ$ *retrógrado*.

ω es el *argumento del periastro* ángulo que forman la línea de los nodos y la dirección del periastro, contado en el sentido del movimiento a partir del nodo ascendente: $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$.

Cabe destacar dos casos particulares importantes:

a) Si el primario es el Sol y el secundario un planeta o un cometa, el plano fundamental es el plano de la eclíptica media y la dirección del eje X la dirección del Aries medio, Ω se denomina *longitud del nodo ascendente* y ω *argumento de latitud del perihelio*.

b) Si el primario es un planeta y el secundario un satélite, natural o artificial, del mismo, el plano fundamental es el plano del ecuador del planeta y el eje X viene definido por la intersección del plano orbital del planeta en su traslación alrededor del Sol con el plano del ecuador. En el caso de la Tierra, la dirección del eje X coincide con la dirección de Aries. Ω se denomina *ascensión recta del nodo ascendente* y ω *argumento de declinación del perigeo*.

Algunas veces se trabaja con el ángulo

$$\bar{\omega} = \Omega + \omega$$

llamado *longitud del periastro*; se cuenta primero sobre el plano fundamental (eclíptica o ecuador) y después sobre el plano de la órbita en la dirección del periastro.

3.11.2 Los restantes elementos

Los tres elementos que acabamos de estudiar determinan la orientación del plano de la órbita. Son necesarios, en general, otros dos elementos para determinar la

magnitud y forma de la órbita. Suelen ser el *semieje mayor* a y la *excentricidad* e . En algunos casos estos dos elementos se sustituyen por la *distancia del periastro*: $q = a(1 - e)$ y la *distancia del apoastro*: $q' = a(1 + e)$.

Si se trata de una órbita parabólica basta con un solo elemento, la distancia del periastro $q = p/2$.

Finalmente, para definir la posición del astro en una determinada época, aún son necesarios otros dos elementos: el *periodo de revolución*, P , o el *movimiento medio* $n = 2\pi/P$ y la *época de paso por el periastro*, T , o la *anomalía media*, M_0 , en una época t_0 .

P es necesario si no se conoce μ ; en caso contrario, la tercera ley de Kepler nos suministra fácilmente el valor de n y, por tanto, de P . Tal es el caso de un satélite artificial o de un pequeño planeta.

3.11.3 Constantes vectoriales $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$

Los tres ángulos de Euler se sustituyen frecuentemente por tres *constantes vectoriales*, $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$, tres vectores unitarios ligados a la órbita y definidos como sigue:

$\vec{R}$ perpendicular al plano de la órbita.

$\vec{P}$ en el plano de la órbita y en el sentido del periastro.

$\vec{Q}$ en el plano de la órbita y perpendicular a $\vec{P}$, de modo que: $\vec{Q} = \vec{R} \wedge \vec{P}$

Los vectores así definidos (Fig. 10.3) son ortogonales dos a dos ($\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{P} \cdot \vec{R} = \vec{Q} \cdot \vec{R} = 0$) y como además son unitarios ($P^2 = Q^2 = R^2 = 1$), de las nueve constantes escalares que originan sólo tres son independientes, como era de esperar.

Consideremos un sistema de coordenadas rectangulares cuyos ejes coincidan con las direcciones de los vectores $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$, ejes que designaremos con estos mismos nombres, y veamos cual es la matriz de cambio de base para pasar del sistema P, Q, R , al sistema X, Y, Z . Efectuaremos en primer lugar un giro de ángulo $(-\omega)$ alrededor del eje R que vendrá definido por la matriz

$$R_3(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con ello el eje P pasa a ocupar la posición de la línea de los nodos, el eje Q sigue en el plano de la órbita perpendicular a P y el eje R queda en la misma posición. A continuación efectuaremos un giro de ángulo $(-i)$ alrededor de la línea de los nodos, giro que vendrá definido por la matriz

$$R_1(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

Con ello abatimos el plano de la órbita sobre el plano fundamental X, Y . El eje P queda sobre la línea de los nodos y el Q , perpendicular a ella sobre el plano

fundamental; el eje R toma la posición del Z . Finalmente, giraremos alrededor de $Z=R$ un ángulo $(-\Omega)$, siendo la matriz correspondiente

$$R_3(-\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo cual llevamos a coincidir P con X y Q con Y .

Efectuando el producto de las tres matrices tendremos la matriz de cambio de base buscada:

$$M = R_3(-\Omega) R_1(-i) R_3(-\omega) \quad (68.3)$$

y observando, que si aplicamos esta matriz M al vector $\vec{P}$ obtenemos dicho vector en la base X,Y,Z , y análogamente aplicándola a $\vec{Q}$ y $\vec{R}$, podremos escribir:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$M = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix} \quad (69.3)$$

de donde, identificando con el resultado obtenido de (68.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega \\ \sin i \sin \omega \end{bmatrix}_{X,Y,Z} \\ \vec{Q} &= \begin{bmatrix} -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega \\ -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega \\ \sin i \cos \omega \end{bmatrix}_{X,Y,Z} \\ \vec{R} &= \begin{bmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{bmatrix}_{X,Y,Z} \end{aligned} \quad (70.3)$$

En virtud de la forma (69.3) que presenta la matriz M y las propiedades mencionadas de los vectores $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$, resulta que M es ortogonal. Además, por ser los triedros P,Q,R y X,Y,Z de igual orientación el determinante de M es $|M|=1$. Observamos también que las constantes $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ dependen únicamente de los ángulos de Euler.

Los elementos $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, a, e$ pueden ser sustituidos también por c y e . En efecto, sabemos que $p = c^2/\mu$, y en el caso de una elipse $p = b^2/a = a(1-e^2)$, por lo que:

$$a = \frac{c^2}{\mu(1-e^2)} \quad (71.3)$$

y, por otra parte, al ser unitarios los vectores $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$,

$$\vec{e} = e \vec{P} \quad \vec{c} = c \vec{R} \quad (72.3)$$

lo cual nos dice que los ángulos de Euler están relacionados con $\vec{c}$ y $\vec{e}$ y, en consecuencia, podemos determinar completamente la trayectoria del secundario con cualquiera de los sistemas de siete constantes mencionados.

3.11.4 Determinación de los elementos orbitales a partir de $\vec{r}$ y $\vec{v}$

Un importante proceso en el problema de la determinación de órbitas es el cálculo de los elementos cuando se conocen la posición y la velocidad en el mismo instante. Supongamos, en efecto, que se conocen $\vec{\mu}$, $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$ en un cierto instante t_0 . En el problema de los dos cuerpos la integral de las áreas nos da

$$\vec{c} = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0$$

pudiéndose expresar esta relación, según la segunda de (72.3), teniendo en cuenta las componentes de $\vec{R}$, en función de Ω e i (incógnitas).

Por otra parte, en el mismo problema, se obtiene

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \vec{v}_0 \wedge \vec{c} - \frac{\vec{r}_0}{r_0}$$

y teniendo en cuenta la primera de (72.3) y las componentes de $\vec{P}$ podemos expresar en función de Ω, i, ω .

Si suponemos el movimiento elíptico, tenemos

$$v_0^2 = \mu \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right)$$

de donde:

$$a = \frac{r_0 \mu}{2\mu - r_0 v_0^2}$$

De la relación

$$n^2 a^3 = \mu$$

una vez determinada a deducimos n :

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

Todavía de la expresión (38.3) que nos da el radio vector en función de a , e y E podemos deducir E_0 :

$$\cos E_0 = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r_0}{a} \right)$$

y llevando el valor de e y de E_0 a la ecuación de Kepler (44.3), obtenemos el valor de M_0 :

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0$$

que con n y t_0 nos permite determinar la época T de paso por el periastro a partir de la relación

$$M_0 = n (t_0 - T)$$

Es decir:

$$T = t_0 - \frac{M_0}{n}$$

Si el movimiento es parabólico, $\bar{c}$ se halla análogamente y la fórmula $p = c^2/\mu$ nos da, $p = 2q$.

De

$$r = q(1 + s^2)$$

obtenemos

$$s_0 = \tan \frac{V_0}{2}$$

valor que llevado a (62.3) nos dará:

$$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t_0 - T) = s_0 + \frac{1}{3} s_0^3$$

que nos permitirá hallar T .

Si el movimiento es hiperbólico se aplica

$$r = a(e \operatorname{Ch} F - 1)$$

fórmula de la cual deducimos el valor de F que se sustituye en la ecuación

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t_0 - T) = e \operatorname{Sh} F - F$$

de la que se obtiene T .

3.12 Cálculo de efemérides

El cálculo de una efemérides consiste en determinar, en función de los elementos de su órbita, la posición de un astro en un cierto instante t .

El vector de posición $\vec{r}$ de un astro, referido al sistema $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$, puede expresarse en la forma

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos V \\ r \sin V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix}$$

en el movimiento elíptico, y en la forma

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos V \\ r \sin V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(1-s^2) \\ 2qs \\ 0 \end{bmatrix}$$

en el movimiento parabólico.

Si quisiéramos considerar movimiento hiperbólico bastaría cambiar E por iF .

Referido al sistema fundamental X, Y, Z el mismo vector tiene componentes

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Aplicando la matriz M de cambio de base obtendremos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \xi + Q_x \eta \\ P_y \xi + Q_y \eta \\ P_z \xi + Q_z \eta \end{bmatrix} = \vec{P} \xi + \vec{Q} \eta \quad (73.3)$$

o también, utilizando las coordenadas reducidas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a(\vec{P}X + \vec{Q}Y) \quad (74.3)$$

X e Y se tienen tabuladas (tablas de Innes) en función de la anomalía excéntrica E y de la excentricidad e , o se pueden obtener por desarrollo en serie en función de e y de M (3.7.4).

Algunos autores utilizan las *constantes vectoriales* $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$:

$$\vec{A} = a\vec{P} \quad \vec{B} = b\vec{Q} = a\sqrt{1-e^2}\vec{Q} \quad \vec{C} = a\vec{R} \quad (75.3)$$

con lo cual obtenemos:

$$\vec{r} = X\vec{A} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} Y \vec{B}$$

o también, teniendo en cuenta (37.3):

$$\vec{r} = (\cos E - e)\vec{A} + \sin E \vec{B} \quad (76.3)$$

verificándose entre las constantes $\vec{A}$ y $\vec{B}$ las relaciones de comprobación:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = a^2 \quad \vec{B} \cdot \vec{B} = a^2(1 - e^2) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

Cuando se trata de calcular una efemérides parabólica suelen introducirse las *constantes vectoriales* $\vec{m}$, $\vec{n}$

$$\vec{m} = q\vec{P}$$

$$\vec{n} = q\vec{Q}$$

obteniéndose entonces:

$$\vec{r} = \vec{m}(1 - s^2) + 2\vec{n}s \quad (77.3)$$

En resumen, para el cálculo efectivo de una efemérides, en el caso por ejemplo de un movimiento elíptico, procederemos de la siguiente forma:

- 1.- Partiremos de los elementos orbitales, conocidos, a , e , i , Ω , ω , n , T y el tiempo t .
- 2.- Calcularemos $M = n(t - T)$ para la época t .
- 3.- Resolveremos la ecuación de Kepler $M = E - e \sin E$ que nos dará E .

$$4.- \text{Calcularemos } \vec{r} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.- Una vez calculados $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ en función de los ángulos de Euler (fórmulas (70.3)), aplicaremos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a(\cos E - e)\vec{P} + a\sqrt{1 - e^2} \sin E \vec{Q}$$

6.- Tendremos en cuenta que las componentes x, y, z del vector $\vec{r}$ están expresadas en la base X, Y, Z , de modo que si ésta es eclíptica será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos B \cos L \\ r \cos B \sin L \\ r \sin B \end{bmatrix}$$

Si la base fuera ecuatorial sería:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos D \cos A \\ r \cos D \sin A \\ r \sin D \end{bmatrix}$$

En este segundo caso los elementos ecuatoriales vendrían dados con referencia al ecuador.

Capítulo 4

TRASLACIÓN DE LA TIERRA

4.1 Órbita aparente del Sol

El movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol suele expresarse en función de los elementos de la *órbita aparente* del Sol con respecto a la Tierra. Según vimos en el capítulo anterior, prescindiendo de la acción gravitatoria de los demás astros, la Tierra describe una elipse en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Consideremos que en un instante inicial la Tierra se encuentra en el punto T (Fig. 1.4) y que en instantes sucesivos la posición sobre su órbita alrededor del Sol viene dada por los radios vectores $ST_1, ST_2, ST_3, \dots$. En tal caso, podemos determinar la órbita aparente del Sol con respecto a la Tierra, trazando por T sucesivos radios vectores $TS_1, TS_2, TS_3, \dots$, del mismo módulo y dirección, pero de sentido opuesto a los $ST_1, ST_2, ST_3, \dots$.

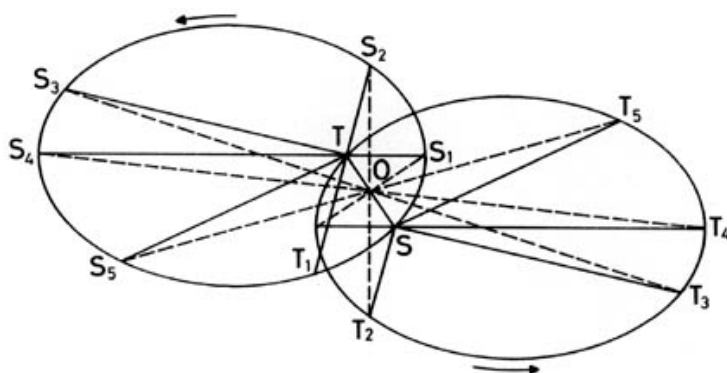


FIG. 1.4

La órbita aparente del Sol es, pues, una elipse simétrica de la de la Tierra alrededor del Sol, con respecto al punto O medio del segmento TS . En el plano de la *eclíptica*, común a ambas órbitas, cuando la Tierra se encuentra en el *perihelio* T_1 o en el *afelio* T_4 (extremos del semieje mayor de la elipse o *línea de los ápsides*), el Sol se proyecta sobre el *perigeo* S_1 o *apogeo* S_4 de su órbita aparente, respectivamente.

Asimismo, al entrar la Tierra en cada uno de los signos del zodiaco decimos que el Sol entra en el situado a 180° de cada uno de ellos (por ejemplo, el Sol entra en Aries cuando la Tierra lo hace en Libra, etc.).

Como ya indicamos en el apartado 1.3.2, en realidad quien describe una elipse alrededor del Sol no es la Tierra, sino, con mucha aproximación, el centro de gravedad del sistema Tierra-Luna. Si prescindimos del efecto paraláctico denominado *desigualdad mensual* y de las perturbaciones periódicas producidas principalmente por Venus y Júpiter, todos ellos de muy pequeña amplitud, el centro de gravedad del sistema Tierra-Luna, con una masa igual a la suma de las de ambos astros, describe alrededor del Sol

una elipse con una aproximación tal que la desviación más importante del movimiento elíptico es un avance del perihelio de $7'',7$ por siglo. En Astronomía, al hablar del movimiento elíptico de la Tierra alrededor del Sol (o de éste alrededor de la Tierra) se sobreentiende, implícitamente, que se trata del centro de gravedad del sistema Tierra-Luna y no del la Tierra propiamente hablando. Así, en una cierta fecha, la eclíptica es el plano de la elipse que en dicha fecha describe alrededor del Sol el centro de gravedad del sistema Tierra-Luna. Las anomalías media o verdadera del Sol, al describir éste su órbita aparente, se refieren al centro de gravedad del sistema Tierra-Luna como foco, etc.

4.1.1 Elementos de la órbita aparente

Consideremos los elementos de la órbita aparente del Sol relativos a sus dimensiones, forma y situación. Sea, en primer lugar, el *semieje mayor* de dicha órbita o *distancia media* de la Tierra al Sol. Su valor actual es

$$a = 149,60 \cdot 10^6 \text{ km}$$

No debe confundirse este semieje mayor con la *unidad astronómica de distancia* (u.a.). Según resolución de la Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional celebrada en Grenoble en 1976, los Astrónomos, utilizando su propio sistema de unidades (IAU, 1976), darán relaciones explícitas entre este sistema y el sistema internacional (SI) cuyas unidades fundamentales son el *metro*, el *kilogramo* y el *segundo*. En el sistema astronómico la unidad de tiempo es el *día*, igual a 86.400 segundos internacionales. El siglo juliano consta de 36.525 días. La unidad de masa es la *masa del Sol*. La unidad de longitud es la *unidad astronómica de distancia*.

La unidad astronómica de distancia se define aplicando la tercera ley de Kepler

$$n^2 a^3 = K^2 (1 + m)$$

a un planeta de masa despreciable ($m = 0$), siendo $K = 0,01720209895$ (constante gaussiana), cuyo movimiento medio sea $n=K$. El periodo de este planeta será, por tanto,

$$\frac{2\pi}{K} = 365,256898 \text{ días}$$

Sin embargo, en el citado sistema (IAU, 1976) es una unidad derivada que se obtiene multiplicando la velocidad de la luz C por el tiempo de luz τ_A para la unidad de distancia ($C = 299792458 \text{ m s}^{-1}$, $\tau_A = 499,004782 \text{ s}$). Es decir:

$$A = C \cdot \tau_A = 149,597870 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Comparando los valores de a y A , observamos que

$$a = 1,000014 A$$

La excentricidad e de la órbita aparente es

$$e = 0,016709 \quad (\text{J2.000,0})$$

Por último, la situación de la elipse en su plano viene definida por la *longitud media del perigeo* $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega} = 282^{\circ} 56' 25'',5 \quad (\text{J2.000,0})$$

Dicho avance del perigeo solar de $61'',93$ por año, con respecto al equinoccio móvil, es la suma de la precesión en longitud, de $50'',29$ por año, y del avance realmente experimentado por el perigeo, con respecto a un equinoccio fijo, de $11'',64$ por año, producido por las perturbaciones planetarias (no se tienen en cuenta los efectos relativistas).

En el movimiento elíptico, designando por M y L la anomalía y la longitud medias del Sol, respectivamente, se tiene:

$$L = \bar{\omega} + M \quad (1.4)$$

Análogamente, designando por V y $\odot$ la anomalía y la longitud verdaderas del Sol, respectivamente, se tiene:

$$\odot = \bar{\omega} + V \quad (2.4)$$

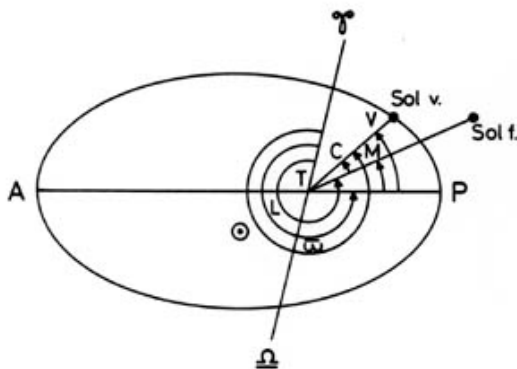


FIG. 2.4

Observando la Fig. 2.4 obtenemos:

$$C = \odot -L = V-M$$

donde C es la *ecuación del centro*.

Para obtener los argumentos relativos al centro de gravedad del sistema Tierra-Luna con respecto al Sol, basta sumar 180° a cada uno de los anteriores.

4.1.2 Movimiento geocéntrico del Sol

En este apartado consideraremos el movimiento del Sol con respecto al centro de la Tierra (no con respecto al centro de gravedad del sistema Tierra-Luna como en apartados anteriores). Teniendo en cuenta las desigualdades lunar y planetarias, designando por l y b la longitud y la latitud geocéntricas del Sol, por $\vec{R}$ su radio vector y por ε la oblicuidad de la eclíptica, las coordenadas rectangulares *ecuatoriales geocéntricas del Sol*. X, Y, Z , se obtendrán considerando el radio vector $\vec{R}$ del Sol referido, por una parte, a un sistema de coordenadas rectangulares ecuatorial x, y, z , y, por otra, a un sistema de coordenadas rectangulares eclíptico, x', y', z' , con los ejes x y x' comunes y dirigidos hacia el punto Aries.

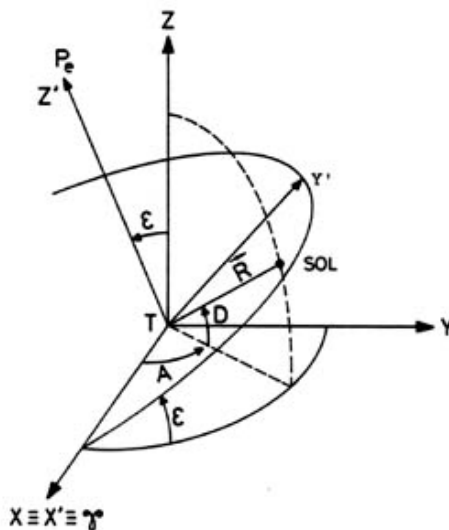


FIG. 3.4

Se verificará:

$$\vec{R}_{x,y,z} = M \cdot \vec{R}_{x',y',z'}$$

con

$$\vec{R}_{x',y',z'} = \begin{bmatrix} R \cos b \cos l \\ R \cos b \sin l \\ R \sin b \end{bmatrix}$$

y M la matriz de cambio de base para pasar del sistema x',y',z' al x,y,z que se obtendrá efectuando un giro de ángulo $-\varepsilon$ alrededor del eje O_x , por tanto:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \cos b \cos l \\ R \cos b \sin l \\ R \sin b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos b \cos l \\ R(\cos \varepsilon \cos b \sin l - \sin \varepsilon \sin b) \\ R(\sin \varepsilon \cos b \sin l + \cos \varepsilon \sin b) \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que b es muy pequeño, podemos sustituir $\cos b = 1$, $\sin b = b''/206265$ y queda:

$$\left. \begin{aligned} X &= R \cos l \\ Y &= R(\cos \varepsilon \sin l - 0,0000019b'') \\ Z &= R(\sin \varepsilon \sin l - 0,0000044b'') \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

tomando en el segundo sumando de los segundos miembros un valor medio para ε .

Siendo por otra parte:

$$\left. \begin{aligned} X &= R \cos D \cos A \\ Y &= R \cos D \sin A \\ Z &= R \sin D \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

en función de la ascensión recta A y la declinación D geocéntricas del Sol, identificando (3.4) con (4.4), prescindiendo de b'' ($|b''| < 1',2$), obtenemos, finalmente:

$$\left. \begin{aligned} \cos D \cos A &= \cos l \\ \cos D \sin A &= \cos \varepsilon \sin l \\ \sin D &= \sin \varepsilon \sin l \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

4.2 Aberración de la luz

Se entiende por *aberración de la luz* el fenómeno, debido a la finitud de la velocidad C de propagación de la luz, por el cual los astros no se ven desde la Tierra en la posición que ocupan en el instante de la observación.

Limitándonos a la interpretación clásica del fenómeno (la relativista introduce una corrección del orden de $0''001$), sean (Fig.4.4) con respecto a un sistema inercial de origen O : p la posición de un astro cuando la luz sale de él; P la posición del mismo astro cuando dicha luz llega a la Tierra T . Sean, además, $\vec{r}$ y $\vec{\rho}$ los vectores de posición del astro y de la Tierra y $\dot{\vec{r}}$ y $\dot{\vec{\rho}}$ sus respectivas velocidades, que consideraremos constantes en el *tiempo de luz* dt que la luz tarda en pasar de p a T . El fenómeno es, en realidad, el resultado de la superposición de otros dos.

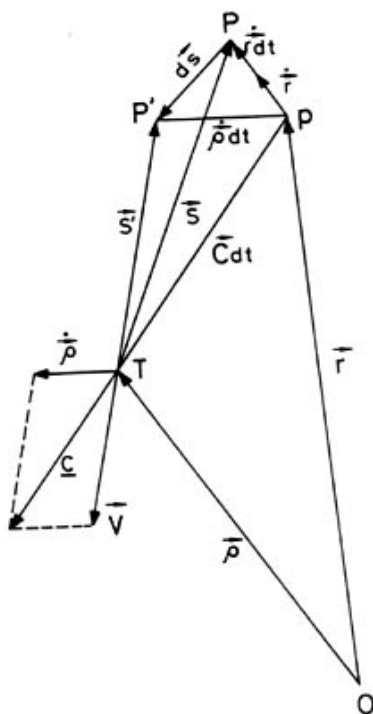


FIG. 4.4

Por una parte, mientras la luz recorre el espacio PT a una velocidad C y en un tiempo dt $\overline{PT} = Cdt$, el astro p pasa a ocupar la posición P , $\overline{pP} = \dot{\vec{r}}dt$. Por otra parte, la luz incide sobre el observador T con una velocidad relativa $C' = C - \dot{\vec{p}}$ y éste observa el astro en una posición P' tal que $\overline{pP'} = \dot{\vec{p}}dt$. Así pues, distinguiremos entre *aberración planetaria* y *aberración estelar*: *Aberración planetaria* es el desplazamiento de la posición aparente observada P' con respecto a la posición geométrica P en el instante de la observación. *Aberración estelar* es el desplazamiento de la posición aparente observada P' con respecto a la posición geométrica p en el instante en que la luz salió del astro.

La aberración planetaria puede considerarse como la resultante de dos efectos: la aberración estelar, debida a la velocidad instantánea del observador en el momento de la observación, y el desplazamiento geométrico del cuerpo celeste en el espacio debido a su movimiento durante el tiempo que ha tardado la luz en llegar al observador. La aberración planetaria no se aplica generalmente a las estrellas porque se conocen mal sus movimientos propios; en cambio, sí se aplica la aberración estelar.

Si designamos por $\vec{s}$ y $\vec{s}'$ los vectores de posición de P y P' respectivamente, según lo expuesto, la corrección $d\vec{s}$ que hay que aplicar para pasar de la posición topocéntrica verdadera $\vec{s}$ a la aparente $\vec{s}'$ vale:

$$\vec{s}' - \vec{s} = d\vec{s} = (\dot{\vec{p}} - \dot{\vec{r}})dt$$

o siendo

$$pP \ll pT \quad y \quad dt = \frac{\overline{pT}}{C} \approx \frac{\overline{PT}}{C} = \frac{s}{C}$$

también, finalmente:

$$\frac{1}{s} d\bar{s} = \frac{1}{C} (\dot{\vec{p}} - \dot{\vec{r}}) dt \quad (6.4)$$

Hemos de advertir que si queremos tratar el problema con el máximo rigor hemos de suponer que el origen O a que se refieren $\vec{r}$ y $\vec{p}$ es el centro de gravedad del sistema solar. En efecto, con respecto al sistema inercial de origen O , el vector $\dot{\vec{p}}$ velocidad del observador, es la suma de la velocidad debida a la rotación de la Tierra, de la velocidad debida al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol (incluidas las perturbaciones lunar y planetarias) y de la velocidad del Sol relativa al centro de masas del sistema solar, pero excluido el movimiento del sistema solar entre las estrellas. Sin embargo, para simplificar el cálculo supondremos $dt=ds/C$ y tomaremos como origen de coordenadas el centro del Sol, lo cual supone, por ejemplo en el caso de planetas o cometas, introducir un error de menos de $0''{,}01$.

4.2.1 Aberración ánuia

Se acostumbra, por conveniencia, a separar la aberración estelar en dos partes y tratar la parte que depende del movimiento orbital de la Tierra alrededor del centro de gravedad del sistema solar, como distinta de la parte debida a la rotación de la Tierra sobre su eje. La primera recibe el nombre de *aberración ánuia* y la segunda el de *aberración diurna*.

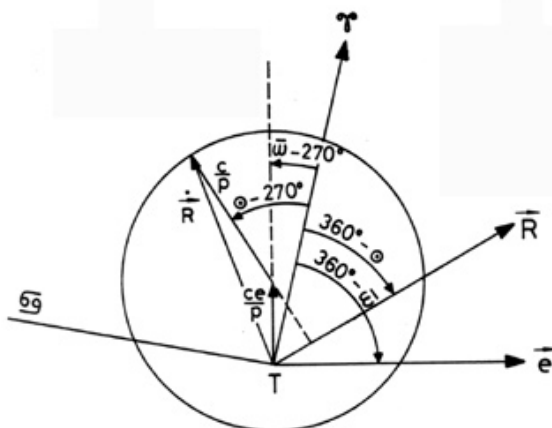


FIG. 5.4

Apliquemos ahora la fórmula (6.4) al estudio de la aberración ánuia. Para la mayoría de las estrellas es desconocido el término $\dot{\vec{r}}dt$, *aberración secular*, y por ello su efecto se engloba en las posiciones medias de los catálogos.

Según esto, expresando el movimiento de la Tierra en función del aparente del Sol alrededor de la Tierra, $\vec{\rho} = -\vec{R}$, la fórmula (6.4) se reduce a

$$\frac{1}{s} d\vec{s} = -\frac{1}{C} \dot{\vec{R}} \quad (7.4)$$

Sea la circunferencia H la hodógrafa del movimiento (Fig.5.4). Sabemos que la velocidad del Sol, $\dot{\vec{R}}$ se descompone en dos vectores, uno perpendicular al vector $\vec{e}$ (dirección del perigeo), de módulo ce/p donde c es la constante de las áreas, p el parámetro de la órbita y e la excentricidad, y otro perpendicular a $\vec{R}$, de módulo c/p , de modo que

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{p} \vec{c} \wedge \frac{\vec{R}}{R} + \frac{1}{p} \vec{c} \wedge \vec{e}$$

y proyectando sobre los ejes de coordenadas eclípticas rectilíneas (Aries, Cáncer, Polo norte de la eclíptica) cada una de las componentes de dicha velocidad, en función de las longitudes del Sol ζ y del perigeo $\bar{\omega}$, tenemos:

$$\dot{\vec{R}} = \frac{c}{p} \begin{bmatrix} \cos(\zeta - 270^\circ) + e \cos(\bar{\omega} - 270^\circ) \\ \sin(\zeta - 270^\circ) + e \sin(\bar{\omega} - 270^\circ) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{c}{p} \begin{bmatrix} -(\sin \zeta + e \sin \bar{\omega}) \\ \cos \zeta + e \cos \bar{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

y sustituyendo en (7.4) se tiene:

$$\frac{1}{s} d\vec{s} = k \begin{bmatrix} \sin \zeta + e \sin \bar{\omega} \\ -(\cos \zeta + e \cos \bar{\omega}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

habiendo introducido la *constante de aberración*

$$k = \frac{c}{Cp} = \frac{n a^2 \sqrt{1-e^2}}{Ca(1-e^2)} = \frac{n a}{C\sqrt{1-e^2}} = 20', '49552 \quad (10.4)$$

Si la estrella en cuestión tiene coordenadas esféricas eclípticas L, B, s , tendremos:

$$X = s \cos B \cos L$$

$$Y = s \cos B \sin L$$

$$Z = s \sin B$$

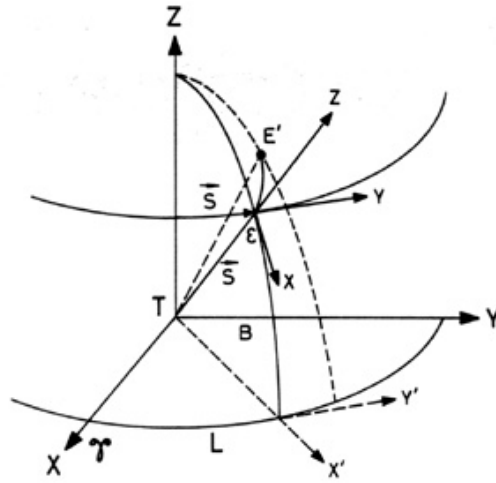


FIG. 6.4

Consideremos un sistema de ejes cartesianos con origen en la estrella considerada, de eje x tangente al máximo de longitud en el sentido de las latitudes decrecientes, eje y tangente al menor de latitud en el sentido de las longitudes crecientes y eje z el radio s . Las coordenadas diferenciales de la posición aparente $\bar{s}'$ en dicho sistema son:

$$\begin{bmatrix} -dB \\ \cos B dL \\ \frac{1}{s} ds \end{bmatrix}$$

y expresando el vector

$$\frac{1}{s} d\bar{s} = k \begin{bmatrix} \sin \zeta + \sin \bar{\omega} \\ -(\cos \zeta + e \cos \bar{\omega}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

en este sistema, tendremos:

$$\begin{bmatrix} -dB \\ \cos B dL \\ \frac{1}{s} ds \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \sin B & 0 & -\cos B \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos L & \sin L & 0 \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \zeta + e \sin \bar{\omega} \\ -(\cos \zeta + e \cos \bar{\omega}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

expresión que obtenemos efectuando un giro $R_3(L)$ alrededor de Z y otro $R_2(90^\circ - B)$ alrededor de y' (posición de Y después del primer giro).

Desarrollando (11.4) y operando, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} dB &= -k \operatorname{sen} B [\operatorname{sen} (\zeta - L) + e \operatorname{sen} (\bar{\omega} - L)] \\ dL &= -k \sec B [\cos (\zeta - L) + e \cos (\bar{\omega} - L)] \\ \frac{1}{s} ds &= k \cos B [\operatorname{sen} (\zeta - L) + e \operatorname{sen} (\bar{\omega} - L)] \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

donde las diferenciales representan las correcciones que deben efectuarse a las coordenadas verdaderas para obtener las aparentes.

Como que la longitud L y la latitud B de las estrellas son prácticamente constantes y e y $\bar{\omega}$ varían muy lentamente, los términos en la excentricidad de (12.4) se engloban en las posiciones medias de los catálogos, con lo que (12.4) adopta la forma:

$$\left. \begin{aligned} dB &= -k \operatorname{sen} B \operatorname{sen} (\zeta - L) \\ dL &= -k \sec B \cos (\zeta - L) \\ \frac{1}{s} ds &= k \cos B \operatorname{sen} (\zeta - L) \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Para interpretar geométricamente las ecuaciones (13.4), escribimos, en el mismo sistema de coordenadas con origen en la estrella que hemos considerado,

$$ds = \begin{bmatrix} x = ks \operatorname{sen} B \operatorname{sen} (\zeta - L) \\ y = -ks \cos (\zeta - L) \\ z = ks \cos B \operatorname{sen} (\zeta - L) \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad (14.4)$$

donde k , s , L y B son prácticamente constantes y sólo varía ζ con una periodicidad de un año. Ello significa que la posición aparente del astro se desplaza respecto de la posición verdadera, según una línea cerrada alabeada con una periodicidad de un año.

De (14.4) deducimos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2 s^2$$

lo que significa que E' (posición aparente) se halla sobre una esfera de centro en E (posición verdadera) y radio ks .

Además:

$$\frac{z}{x} = \cot B$$

es decir, E' se halla sobre el plano determinado por el menor que pasa por E (Fig. 7.4). Por tanto, la intersección de la esfera con dicho plano nos dará la trayectoria de E' . Es decir, la posición aparente E' de un astro describe, alrededor de la posición verdadera E , una circunferencia de radio ks contenida en el plano determinado por el menor de latitud que pasa por E , con velocidad uniforme y periodicidad de un año. Ahora bien, lo que

verá un observador terrestre será la proyección de dicha circunferencia sobre la esfera celeste.

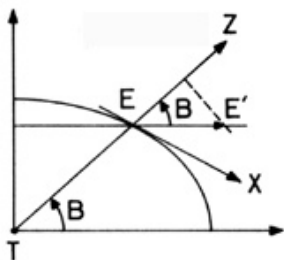


FIG. 7.4

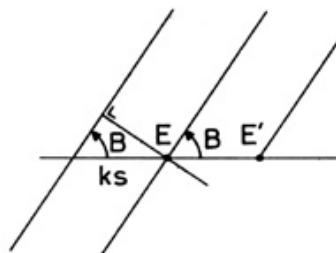


FIG. 8.4

Como que

$$\frac{EE'}{TE} = \frac{ks}{s} = k = 20'',5$$

podremos considerar dicha proyección oblicua (Fig.8.4) como una proyección ortogonal, y la proyección ortogonal de una circunferencia es una elipse cuyo semieje mayor es el radio de la circunferencia y cuyo semieje menor es la proyección de dicho radio:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{semieje mayor: } a = ks & \text{dirigido segun y} \\ \text{semieje menor: } b = ks \sin B & \text{dirigido segun x} \end{array} \right\} \quad (15.4)$$

por tanto:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} = \cos B$$

Lo que realmente observaremos serán las semiaberturas α , β que subtendrán los semiejes a , b , respectivamente, desde la Tierra:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \approx \tan \alpha = \frac{a}{s} = k \\ \beta \approx \tan \beta = \frac{b}{s} = k \sin B \end{array} \right\}$$

Las relaciones (15.4) nos indican que si la estrella se halla en el polo de la eclíptica ($B=90^\circ$), describe una circunferencia, y si se halla en la eclíptica ($B=0^\circ$), describe un segmento rectilíneo. En cualquier otro caso describe una elipse, denominada *elipse de aberración*. Este fenómeno fue descubierto por Bradley en 1725.

La teoría expuesta sirve también para estudiar la *aberración ánuua del Sol*. En efecto, como que el Sol se halla muy cerca del centro de masas del sistema solar, r es

muy pequeño y también lo es $rd\bar{t}$, por lo cual vale la fórmula (7.4) y las deducidas de ella sin más que hacer $B=0$, $L=\zeta$, $s=R$.

Luego:

$$\left. \begin{aligned} dB &= 0 \\ d\zeta &= -k[1 + e \cos(\zeta - \bar{\omega})] \\ dR &= -kR e \sin(\zeta - \bar{\omega}) \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

Sustituyendo valores numéricos en la segunda ecuación obtenemos:

$$d\zeta = \zeta - \zeta' = -k - ke \cos(\zeta - \bar{\omega}) = -20'', 50 - 0'', 34 \cos(\zeta - \bar{\omega})$$

lo cual nos indica que vemos el Sol con una longitud media, ζ' , menor que la que realmente tiene, ζ , es decir: lo vemos desplazado hacia poniente unos $20'', 50$. Además, el Sol aparente oscila alrededor de dicha posición media con una periodicidad de un año y una amplitud de $0'', 34$.

La tercera ecuación puede escribirse:

$$R' = R(1 - ke \sin(\zeta - \bar{\omega}))$$

que nos dice que la aberración en distancia es muy pequeña y oscila con una periodicidad de un año con una amplitud de $0.0000017 R$.

4.2.2 Corrección de aberración ánuia a las coordenadas ecuatoriales

Despreciando los términos en la excentricidad que, como dijimos, se engloban en las posiciones medias de los catálogos, expresando $\vec{R}$ en coordenadas ecuatoriales mediante la rotación $R_1(-\varepsilon)$ y aplicando las fórmulas diferenciales de paso de rectilíneas a esféricas, según (7.4) se tiene, evidentemente:

$$\begin{bmatrix} -dD \\ \cos D dA \\ \frac{1}{s} ds \end{bmatrix} = kR_2(90^\circ - D) R_3(A) R_1(-\varepsilon) \begin{bmatrix} \sin \zeta \\ -\cos \zeta \\ 0 \end{bmatrix}$$

y operando, considerando sólo las dos primeras componentes:

$$\left. \begin{aligned} dA &= -k \sec D [\cos A \cos \varepsilon \cos \zeta + \sin A \sin \zeta] \\ dD &= -k [(\cos D \sin \varepsilon - \sin D \sin A \cos \varepsilon) \cos \zeta + \sin D \cos A \sin \zeta] \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

Introduciendo ahora los números de Bessel y las constantes estelares:

$$\left. \begin{aligned} C &= -k \cos \varepsilon \cos \zeta \\ c &= \cos A \sec D \\ c' &= \tan \varepsilon \cos D - \sin A \sin D \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} D &= -k \sin \zeta \\ d &= \sin A \sec D \\ d' &= \cos A \sin D \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

las relaciones (17.4) pueden ponerse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} dA &= Cc + Dd \\ dD &= Cc' + Dd' \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

4.2.3 Aberración diurna

Consideremos, por último, la aplicación de la fórmula (6.4) al estudio de la *aberración diurna* de las estrellas, debida, como sabemos, a la rotación de la Tierra sobre su eje. Como consecuencia de dicha rotación, un observador situado en un punto de coordenadas (ρ, ϕ) describe durante un día sidéreo la circunferencia de su paralelo cuyo radio es $\rho \cos \phi$, con una velocidad

$$v = \frac{2\pi \rho \cos \phi}{86164} \text{ km/s}$$

Tomando $\rho = 6378$ km, resulta para dicha velocidad el valor $v = 0.465 \cos \phi$ km/s. Por efecto de este movimiento se produce un desplazamiento aparente de todos los astros hacia el punto este del horizonte, siguiendo círculos máximos que pasan todos por dicho punto.

Veamos cual es dicho desplazamiento. Excluidas ya las aberraciones secular y ánuu y pudiendo suponer ahora la Tierra esférica de radio medio ρ , en coordenadas ecuatoriales se tiene:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad \vec{\rho} = \begin{bmatrix} \rho \cos \phi \sin \theta \\ \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \sin \phi \end{bmatrix} \quad \vec{\dot{\rho}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\rho} = \omega \rho \cos \phi \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

y por tanto, sustituyendo en (6.4), introduciendo para cada observador su *constante de la aberración diurna*:

$$k' = \frac{v}{C} = \frac{\omega \rho \cos \phi}{C} = 0''.32 \cos \phi = 0''.021 \cos \phi$$

y aplicando las fórmulas diferenciales de paso de rectilíneas a esféricas, operando en forma análoga al caso de la aberración ánuu:

$$\begin{bmatrix} -dD \\ \cos D dA \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = k' R_2(90^\circ - D) R_3(A) \begin{bmatrix} -\sen \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} = k' \begin{bmatrix} -\sen D \sen(\theta - A) \\ \cos(\theta - A) \\ -\cos D \sen(\theta - A) \end{bmatrix}$$

y teniendo en cuenta que $\theta - A = H$,

$$\left. \begin{aligned} dD &= k' \sen D \cos H \\ dA &= k' \sec D \cos H \\ \frac{1}{s} ds &= -k' \cos D \sen H \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

Dada su pequeñez, la corrección de aberración diurna de una estrella sólo se aplica en observaciones de mucha precisión (en general observaciones meridianas) y en tal caso se efectúa simultáneamente con las de refracción y paralaje diurna, para reducir a verdaderas geocéntricas las posiciones aparentes observadas.

4.3 Paralaje ánuo

Debido al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, por un efecto paraláctico, las estrellas próximas parecen oscilar alrededor de sus posiciones medias en el transcurso del año. Este fenómeno, llamado *paralaje ánuo* de las estrellas, es mucho menos notable que el de la aberración ánuo, pues, dada la distancia a que se encuentran, su semiamplitud no alcanza nunca $1''$, frente a los $20'',5$ de la aberración ánuo.

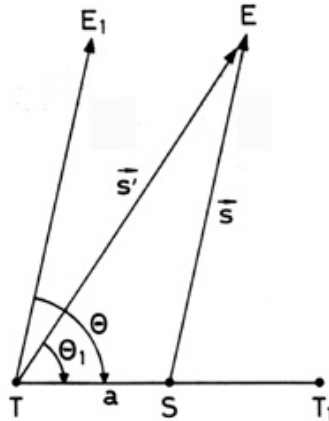


FIG. 9.4

Supongamos, para simplificar el razonamiento, que la órbita de la Tierra es circular. Sea S el Sol y a el radio orbital (Fig.9.4). Sea E la posición de una estrella a la distancia s del Sol, distancia que supondremos constante, T la posición de la Tierra en

una determinada fecha y T_I la posición de la misma seis meses después. El segmento TT_I es la base de referencia para determinar la distancia de la estrella al Sol.

Tracemos por T una paralela TE_I a SE y designemos por θ y θ_I los ángulos E_1TS y ETS . Del triángulo STE en el cual el ángulo SET es $\theta - \theta_I$, deducimos:

$$\frac{\text{sen } (\theta - \theta_I)}{a} = \frac{\text{sen } \theta_I}{s}$$

$$\text{sen } (\theta - \theta_I) = \frac{a}{s} \text{sen } \theta_I$$

Por definición, $a/s = \text{sen } \Pi$ donde Π recibe el nombre de *paralaje estelar* o *paralaje anual*. Por la forma como se ha definido, Π es siempre muy pequeño (menos de $1''$) y se puede escribir

$$\theta - \theta_I = \Pi \text{sen } \theta$$

donde $\theta - \theta_I$ y Π están medidos en las mismas unidades y θ_I se ha sustituido por θ en el segundo miembro.

Por otra parte, también en virtud de la definición, Π representa el ángulo bajo el cual se ve desde la estrella el radio de la órbita de la Tierra.

En la Fig. 9.4 SE es la dirección en la que se observa la estrella desde el Sol (dirección heliocéntrica) y TE es la dirección en que se ve desde la Tierra en la época dada (dirección geocéntrica). Si la estrella estuviera a distancia infinita se vería desde la Tierra en la dirección TE_I paralela a SE . Pues bien, vemos que la dirección geocéntrica TE está desplazada de la dirección heliocéntrica TE_I hacia la dirección TS del Sol y que este desplazamiento tiene lugar en el plano STE (Sol-Tierra-estrella).

Dicho desplazamiento angular $\theta - \theta_I$ se puede considerar como un desplazamiento lineal de vector

$$d\vec{s} = \vec{s}' - \vec{s} = \vec{R}$$

que resulta más útil para la teoría que vamos a desarrollar.

Si expresamos el movimiento de la Tierra en función del aparente del Sol, en el triángulo TSE se tiene:

$$d\vec{s} = \vec{s}' - \vec{s} = \vec{R}$$

siendo $\vec{R}$ el vector de posición geocéntrico del Sol. Por lo que hemos dicho, esta fórmula suministra la corrección de paralaje $d\vec{s}$ que hemos de aplicar para pasar de coordenadas heliocéntricas $\vec{s}$ (verdaderas) a geocéntricas $\vec{s}'$ (aparentes).

Tomemos ahora un sistema de coordenadas X, Y, Z con origen en el centro de la Tierra, eje X en la dirección de Aries, eje Y en la eclíptica, en sentido directo, eje Z en la dirección del polo de la eclíptica (Fig. 10.4). Tendremos para $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R \cos \zeta \\ R \text{sen} \zeta \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde ζ representa la longitud del Sol.

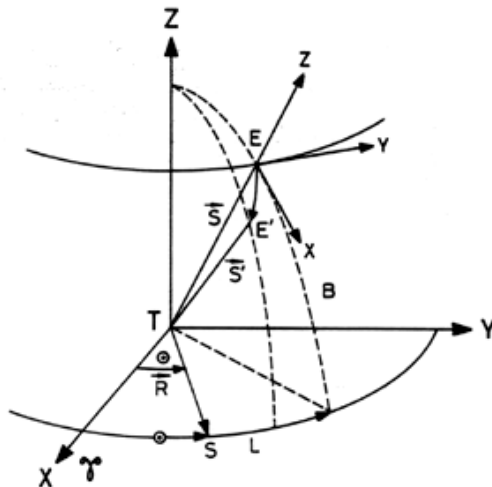


FIG. 10.4

Supongamos una estrella E cuyas coordenadas esféricas eclípticas sean L y B y sean $\vec{s}$ y $\vec{s}'$ sus posiciones heliocéntrica y geocéntrica respectivamente. Supongamos que podemos expresar la posición aparente de la estrella con respecto a la posición verdadera con el empleo de coordenadas diferenciales. Para ello tomemos con origen en la estrella (posición verdadera expresada por la dirección $\vec{s}$ desde T) unos ejes de coordenadas rectangulares de la siguiente forma: el eje x según el máximo de longitud que pasa por ella, en el sentido de las latitudes decrecientes; el eje y tangente al menor de latitud en el sentido de las longitudes crecientes, y el eje z en la dirección de $\vec{s}$. Las coordenadas de E' (posición aparente) con relación a E , serán:

$$d\vec{s} = \begin{bmatrix} -sdB \\ s \cos BdL \\ ds \end{bmatrix}$$

que podremos identificar con las del vector $\vec{R}$ expresado en el mismo sistema. Para ello verificaremos un giro de ángulo L alrededor de z , que vendrá definido por la matriz $R_3(L)$ y, a continuación un giro de ángulo $(90^\circ - B)$ alrededor del eje y y obtenido después del primer giro, definido por la matriz $R_2(90^\circ - B)$.

Tendremos, por tanto:

$$\begin{bmatrix} -sdB \\ s \cos BdL \\ ds \end{bmatrix} = R_2(90^\circ - B) R_3(L) \begin{bmatrix} R \cos \zeta \\ R \sin \zeta \\ 0 \end{bmatrix}$$

y operando y simplificando:

$$\begin{bmatrix} -s dB \\ s \cos B dL \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \sin B \cos(\zeta - L) \\ R \sin(\zeta - L) \\ R \cos B \cos(\zeta - L) \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} dB &= -\Pi \sin B \cos(\zeta - L) \\ dL &= \Pi \sec B \sin(\zeta - L) \\ \frac{1}{s} ds &= \Pi \cos B \cos(\zeta - L) \end{aligned} \right\} \quad (21.4)$$

donde $\Pi \approx \sin \Pi = \frac{R}{s}$ es la paralaje de la estrella.

Para interpretar geométicamente las ecuaciones (21.4) escribamos, en el mismo sistema de coordenadas con origen en la estrella E que hemos considerado,

$$\left. \begin{aligned} x &= -s dB = R \sin B \cos(\zeta - L) \\ y &= s \cos B dL = R \sin(\zeta - L) \\ z &= ds = R \cos B \cos(\zeta - L) \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

que son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia intersección de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

de radio R y centro en E con el plano

$$x \cos B - z \sin B = 0$$

paralelo a la eclíptica.

Luego, como suponemos R constante, debido a la paralaje ánu, la estrella parece describir en un año, alrededor de su posición verdadera y con movimiento uniforme, una circunferencia de radio R paralela a la eclíptica. Dicha circunferencia se proyecta sobre el plano xy , tangente a la esfera celeste según una elipse de semiejes $R \sin B$ y R y excentricidad $e = \cos B$, llamada *elipse de paralaje*.

Para un observador terrestre, los semiejes mayor y menor de la elipse subtendrán un ángulo α y β respectivamente, cuyo valor es:

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{a}{s} = \Pi$$

$$\beta \approx \tan \beta = \frac{b}{s} = \Pi \sin B$$

Con $\beta \leq \alpha < 1''$.

4.3.1 Corrección de paralaje ánuo a las coordenadas ecuatoriales

En coordenadas ecuatoriales se tendrá, pasando antes las eclípticas geocéntricas del Sol a ecuatoriales mediante la rotación $R_1(-\varepsilon)$ y aplicando después las fórmulas diferenciales de paso de rectilíneas a esféricas:

$$\begin{bmatrix} -sdD \\ s \cos D dA \\ ds \end{bmatrix} = R_2(90^\circ - D) R_3(A) R_1(-\varepsilon) \begin{bmatrix} R \cos \zeta \\ R \sin \zeta \\ 0 \end{bmatrix}$$

y operando e introduciendo la paralaje Π de la estrella, limitándonos a la consideración de las dos primeras componentes:

$$\left. \begin{aligned} dD &= \Pi [(\cos D \sin \varepsilon - \sin D \sin A \cos \varepsilon) \sin \zeta - \sin D \cos A \cos \zeta] \\ dA &= \Pi \sec D [\cos A \cos \varepsilon \sin \zeta - \sin A \cos \zeta] \end{aligned} \right\} \quad (23.4)$$

En las "Efemérides Astronómicas" todavía se da otra forma a las ecuaciones (23.4), expresándolas en función de las coordenadas rectangulares geocéntricas del Sol X, Y, Z , calculables mediante (3.4). La órbita aparente del Sol se supone ahora elíptica y con foco en la Tierra (y no en el centro de gravedad del sistema Tierra-Luna), y tomando como unidad la distancia media de la Tierra al Sol la paralaje de la estrella vale, exactamente, $\Pi = l/s$.

Aplicando las fórmulas de paso se tiene:

$$\begin{bmatrix} -sdD \\ s \cos D dA \\ ds \end{bmatrix} = R_2(90^\circ - D) R_3(A) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

y operando y haciendo $l/s = \Pi$ finalmente:

$$\left. \begin{aligned} dD &= \Pi (-X \sin D \cos A - Y \sin D \sin A + Z \cos D) \\ dA &= \Pi \sec D (-X \sin A + Y \cos A) \end{aligned} \right\} \quad (24.4)$$

y siendo con mucha aproximación $Z = Y \tan \varepsilon$ las fórmulas (24.4) suelen escribirse, teniendo en cuenta las relaciones (18.4):

$$\left. \begin{aligned} dA &= \Pi (cY - dX) \\ dD &= \Pi (c'Y - d'X) \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

4.3.2 Efecto combinado de la aberración y la paralaje ánuas

En los desarrollos hasta ahora efectuados, la aberración y la paralaje ánuas se encuentran expresadas por componentes en una misma base x, y, z , situada en el plano tangente a la esfera celeste en el astro y definida según coordenadas eclípticas.

Por otra parte, la aberración y la paralaje son fenómenos independientes, por lo que su composición será, simplemente, la suma de (14.4) y (22.4):

$$\left. \begin{aligned} x &= s \sin B [k \sin(\zeta - L) + \Pi \cos(\zeta - L)] \\ y &= s [-k \cos(\zeta - L) + \Pi \sin(\zeta - L)] \\ z &= s \cos B [k \sin(\zeta - L) + \Pi \cos(\zeta - L)] \end{aligned} \right\}$$

que efectuando el cambio:

$$\begin{aligned} k &= m \cos M \\ \Pi &= m \sin M \end{aligned}$$

puede expresarse:

$$\left. \begin{aligned} x &= s \sqrt{k^2 + \Pi^2} \sin B \sin(\zeta - L + M) \\ y &= -s \sqrt{k^2 + \Pi^2} \cos(\zeta - L + M) \\ z &= s \sqrt{k^2 + \Pi^2} \cos B \sin(\zeta - L + M) \end{aligned} \right\}$$

donde x, y, z , son funciones periódicas de periodicidad un año (debido a ζ) y representan las ecuaciones para métricas de una circunferencia de radio $s\sqrt{k^2 + \Pi^2}$ paralela a la eclíptica. La proyección ortogonal sobre el plano tangente nos dará la trayectoria aparente de la estrella alrededor de su posición verdadera, recorrida en un año, que será una elipse de:

$$\begin{array}{lll} \text{semieje mayor} & a = s\sqrt{k^2 + \Pi^2} & \text{dirigido según } y \\ \text{semieje menor} & b = s\sqrt{k^2 + \Pi^2} \sin B & \text{dirigido según } x \\ \text{excentricidad} & e = \cos b & \end{array}$$

y angularmente:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{k^2 + \Pi^2} \\ \beta &= \sqrt{k^2 + \Pi^2} \sin B \end{aligned}$$

4.4 Movimiento propio de las estrellas

Las estrellas se mueven con respecto al Sol, pero las grandes distancias que nos separan de ellas motivan que sus desplazamientos angulares sobre la esfera celeste sean muy pequeños; de ahí que hasta hace pocos siglos se hablase de las "estrellas fijas". La existencia de movimientos propios fue detectada por Halley en 1718.

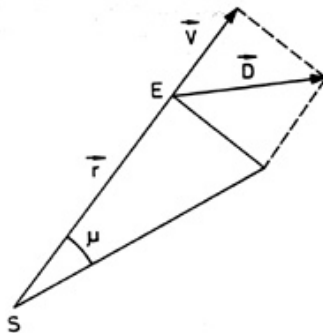


FIG. 11.4

Se denomina *movimiento propio* μ de una estrella a su desplazamiento angular heliocéntrico anual, debido a la componente perpendicular al radio vector Sol-Estrella de su velocidad relativa. Existen unas 300 estrellas que presentan movimientos propios comprendidos entre $1''$ y $5''$ por año, y unas pocas entre $5''$ y $10''$ por año (estrellas "balísticas" o "proyectil"). En media, el movimiento propio de las estrellas visibles a simple vista es del orden de $0'',1$ por año.

En la Fig.11.4 representamos por $\vec{D}$ el desplazamiento en un año, suponiendo constante la velocidad relativa $\vec{V}$ de la estrella E respecto al Sol, medido por el ángulo μ .

Podemos descomponer el movimiento propio μ de una estrella según los desplazamientos angulares anuales en ascensión recta, μ_A y en declinación, μ_D denominados, respectivamente, *movimiento propio en ascensión recta* y *movimiento propio en declinación*.

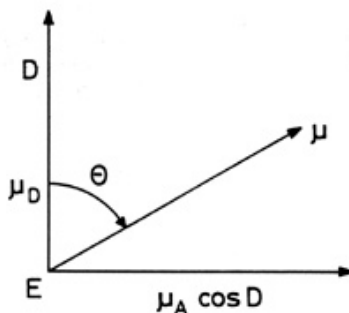


FIG. 12.4

Para ello proyectamos el movimiento propio sobre el paralelo y el meridiano celestes que pasan por la estrella E , en función del ángulo de posición θ de $\vec{\mu}$ (ángulo que forma el vector con la dirección del Norte, medido de Norte a Este). Tendremos, por tanto:

$$\begin{aligned}\mu_A \cos D &= \mu \sin \theta \\ \mu_D &= \mu \cos \theta\end{aligned}$$

Es decir:

$$\left. \begin{aligned} \mu_A &= \mu \sen \theta \sec D \\ \mu_D &= \mu \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

y las correcciones a efectuar a las coordenadas ecuatoriales debidas al movimiento propio serán:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A &= \mu_A \tau \\ \Delta D &= \mu_D \tau \end{aligned} \right\} (\tau \text{ en años}) \quad (27.4)$$

Por lo general, hasta enero de 1984, las posiciones de las estrellas se corregían simultáneamente de precesión y de movimiento propio y, a tal efecto, en los catálogos de posiciones medias figuran sendas columnas en las que se dan, para cada estrella, la *variación ánuu* en ascensión recta y en declinación, suma de los correspondientes precesión ánuu y movimiento propio:

$$\begin{aligned} V_A &= (P_A + \mu_A \cos D) \tau \\ V_D &= (P_D + \mu_D) \tau \end{aligned}$$

A partir de dicha fecha y de acuerdo con las resoluciones de la I.A.U. a las que nos hemos referido en el apartado 4.1.1, la corrección por movimiento propio se separa de la corrección por precesión.

4.5 Posiciones aparentes

Se denomina *posición aparente* de una estrella a su posición geocéntrica deducida de su *posición verdadera heliocéntrica* (que se obtiene corrigiendo de precesión y nutación la posición media dada por el catálogo), teniendo en cuenta las correcciones de aberración y paralaje ánuas y de movimiento propio si se conoce.

En el apartado 2.8 ya indicamos como se reducían las posiciones medias a verdaderas mediante la introducción de los números de Bessel y las constantes estelares. También hemos visto como se procede para corregir de aberración y paralaje ánuas las coordenadas ecuatoriales de las estrellas (4.2.2) y (4.3.1). Considerando, pues, las fórmulas (9.2) del apartado (2.8), las expresiones de los números de Bessel y de las constantes estelares que en ellas figuran, y las fórmulas (14.4), (25.4) y (27.4), la reducción de posiciones medias a posiciones aparentes se efectuará aplicando a las primeras las correcciones:

$$\left. \begin{aligned} dA &= Aa + Bb + Cc + Dd + \Pi(cY - dX) + \tau \mu_A \\ dD &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \Pi(c'Y - d'X) + \tau \mu_D \end{aligned} \right\} \quad (28.4)$$

o, también, utilizando notación matricial:

$$\begin{bmatrix} dA \\ dD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C + \Pi Y \\ D - \Pi X \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} \mu_A \\ \mu_D \end{bmatrix} \quad (29.4)$$

Para el Sol, la posición aparente del mismo, materializada por el *Sol aparente*, se obtiene aplicando a su posición verdadera la corrección de aberración ánuu. En coordenadas eclípticas ésta viene dada por las fórmulas (16.4), obteniéndose prácticamente la corrección en longitud (siempre negativa) dividiendo la constante de aberración $k=20''{,}50$ por el *radio vector geométrico*, no corregido de aberración:

$$d\zeta = -k(1 + e \cos V) \simeq -\frac{k}{R} \quad (30.4)$$

($p = a(1 - e^2) \approx 1$ u.a.). De las coordenadas eclípticas aparentes se pasa luego a las ecuatoriales aparentes, referidas al equinoccio verdadero y al ecuador de la fecha, aplicando las fórmulas de paso tomando la oblicuidad de la eclíptica de la fecha.

Para poner de acuerdo el cálculo de las posiciones aparentes de las estrellas con las Resoluciones adoptadas por la Unión Astronómica Internacional (I.A.U.) en las Asambleas Generales XVI y XVII celebradas en Grenoble y Montreal los años 1976 y 1979 respectivamente, se deberá tener en cuenta el nuevo sistema de constantes astronómicas, la época standart J 2000 correspondiente al 1,5 de enero del año 2000, las modificaciones introducidas en la teoría de la nutación 1980 y el nuevo sistema de referencia estelar FK 5. Por otra parte, la aberración estelar será calculada a partir de la velocidad de la Tierra referida al baricentro del sistema solar (apartado 4.2) y las posiciones medias no contendrán los términos E (términos en e de (12.4), apartado 4.2.1). Las reducciones a posiciones aparentes se calcularán directamente sin el paso intermedio a la posición media para el comienzo del año cuando se requiera mucha precisión. Para una mayor exactitud todavía se tendrán en cuenta los términos relativistas que intervienen en la aberración y se corregirá la posición estelar por la deflexión producida en el haz luminoso por el campo gravífico del Sol.

Si D es el ángulo entre la estrella y el Sol, visto desde la Tierra, se demuestra que la desviación del rayo luminoso viene dada por

$$\theta = 0'',00407 \left[\frac{1 + \cos D}{\sin D} + \frac{\sin 2D}{4} \right]$$

Existen numerosos trabajos donde se da cuenta, con detalle, de cómo debe hacerse dicha transformación (ver por ejemplo el Boletín nº8 del Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando). En las “Efemérides Astronómicas 2001” se dan los elementos necesarios para calcular las posiciones aparentes de las estrellas partiendo de las medias en 2001.5 mediante las fórmulas (25.4). Evidentemente la adopción del nuevo sistema de referencia ICRS (ver apartado 2.8.2) afectará al cálculo de las posiciones aparentes de las estrellas.

4.6 Años y Estaciones

Se llama año al intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por un determinado punto de su órbita. Según sea dicho punto el año recibe distintas denominaciones, variando su duración debido al movimiento relativo de tales puntos.

Año sidéreo es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por un punto fijo de la eclíptica, o tiempo necesario para que la longitud media del Sol, referida a un equinoccio fijo, aumente en 360° .

Año trópico es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto Aries medio, o tiempo necesario para que la longitud media del Sol, referida al equinoccio medio, aumente en 360° . Debido al movimiento de precesión de los equinoccios, el equinoccio medio retrograda $50'',29$ por año respecto a un equinoccio fijo y, por ello, el año trópico es más corto que el año sidéreo.

Año anomalístico es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el perigeo, o tiempo necesario para que la longitud media del Sol, referida al perigeo, aumente en 360° .

Debido al giro de la línea de los ápsides de la órbita solar, el perigeo avanza $11'',64$ por año con respecto a un equinoccio fijo y, por ello, el año anomalístico es más largo que el año sidéreo.

Sean T , S y A , las duraciones de los años trópico, sidéreo y anomalístico, respectivamente. Según las consideraciones anteriores se verificará:

$$\frac{T}{360^\circ - 50'',29} = \frac{S}{360^\circ} = \frac{A}{360^\circ + 11'',64} \quad (31.4)$$

Determinando el número de días medios que separan dos equinoccios muy alejados, Newcomb obtuvo la siguiente duración del año trópico, dada para el 1º de enero de 1900:

$$T = 365,242199 \text{ días medios}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (31.4) se obtiene:

$$A = 365,259641 \text{ días medios}$$

$$S = 365,256360 \text{ días medios}$$

Debido a la variación secular de la constante de la precesión en ascensión recta, la duración del año trópico disminuye a razón de $0,^s53$ por siglo. Los años sidéreo y anomalístico aumentan su duración a razón de $0,^s01$ y $0,^s26$ por siglo, respectivamente.

4.6.1 Calendarios juliano y gregoriano

El año trópico, al regular la sucesión de las estaciones, es la base de nuestro calendario. Desde un punto de vista histórico, el actual calendario gregoriano proviene del calendario romano de 365 días, al cual se añadía, cuando convenía, un mes adicional para compensar la diferencia entre el año civil y el año trópico. En el año 46 a. de J.C. ("año de la confusión"), Julio César, con la llamada *reforma juliana*, reajustó el calendario (existía un retraso de tres meses) e instauró el año de 365 días, al cual se añadía, cada cuatro años, un día adicional (año bisiesto).

En dicho calendario juliano el año se componía de:

$$\frac{365 \cdot 3 + 366 \cdot 1}{4} = 365,25 \text{ días medios}$$

siendo, por tanto, $0,0078$ días medios más largo que el año trópico. Su múltiplo, el siglo juliano, de 36525 días medios, es el que se utiliza en los cálculos astronómicos.

En el Concilio de Nicea (325 d. J.C.) se convino que el equinoccio de primavera debería coincidir con el 21 de marzo, como acontecía en aquel año. En 1582 habían transcurrido 1257 años desde el Concilio de Nicea; existía, por tanto, un desajuste del calendario de

$$1257 \cdot 0,0078 = 9,8 \approx 10 \text{ días medios}$$

En dicho año, el Papa Gregorio XIII efectuó la llamada *reforma gregoriana*, reajustando el calendario con la supresión de 10 días, de manera que al jueves 4 de octubre de 1582 le siguió el viernes 15 de octubre de 1582, y computando, cada 400 años, tres años bisiestos como comunes. Por tanto, en 400 años civiles hay 303 años comunes y 97 bisiestos (aquéllos cuyas dos últimas cifras dan un número divisible por cuatro, excepto los años que empiezan siglo, terminados en dos ceros, y cuyas dos primeras cifras den un número no divisible por cuatro). La duración del *año gregoriano*, nuestro *año civil*, es pues de:

$$\frac{365 \cdot 303 + 366 \cdot 97}{400} = 365,2425 \text{ días medios}$$

lo cual representa un exceso de 0,0003 días medios sobre la duración real del año trópico. Dado que la reforma del calendario tuvo lugar hace unos 400 años, dentro de unos 3000 años la acumulación de dicho exceso arrojará un desajuste de un día.

4.6.2 Las fechas en Astronomía

En determinados usos astronómicos, para facilitar el cálculo de largos intervalos de tiempo, se utiliza el llamado *periodo juliano* (de Julio Scaliger) que empezó el 1º de enero del 4713 a. de J.C. y en el cual se vienen contando los días por orden correlativo, comenzando en el uno y siguiendo sin interrupción como los números naturales. De esta manera, sabiendo las *fechas julianas* en que ocurren dos fenómenos cualesquiera, el intervalo entre los mismos se halla con una simple sustracción. El día juliano comienza a las doce horas del día civil correspondiente. El origen de la escala del periodo juliano se designa por -4712 enero 1 a 12^h de T.U. según el cómputo astronómico. En aquellas aplicaciones en que resulte incómodo el uso de la fecha juliana, se puede sustituir ésta por la denominada *fecha juliana modificada* (MJD: Modified Julian Date) que se obtiene restando 2400000,5 a la fecha juliana. Con ello no sólo se reduce el número de cifras a escribir, sino que, en la nueva-cuenta se traslada el origen de la escala a 0^h de T.U.

Aunque el periodo juliano se introdujo originariamente para medir el tiempo solar medio, se puede aplicar, en general, a cualquier otra clase de tiempo. Así, aplicado al tiempo de efemérides, se obtiene el *día juliano de efemérides*. Forman el periodo juliano 7980 años, terminando el 31 de diciembre del año 3257.

Así como el año civil, sea común o bisiesto, empieza siempre a 0^h de T.U. del 1 de enero, el *año astronómico* comienza cuando la longitud media del Sol (L) corregida de la aberración de la fecha es igual a 280°:

$$L - 20'',50 = 280^\circ$$

($k(1 + e) \approx 20'', 50$). Dicho instante se indica colocando un cero a la derecha del año, separado por una coma (p. ej. 1950,0 ; 2000,0).

En los Anuarios se indica el instante del año civil en que empieza el año astronómico. Un año astronómico puede empezar dentro del 31 de diciembre del año civil anterior, el cual, a estos efectos, se considera *día cero* de enero del año en cuestión. Esta diferencia debe tenerse en cuenta a la hora de calcular la fracción de año trópico transcurrida desde el principio del año astronómico, cuya duración es de un año trópico, en la reducción de posiciones medias a verdaderas y en la de éstas a aparentes.

Todavía se puede definir el año *ficticio de Bessel* como el intervalo de tiempo empleado por el Sol medio en aumentar su ascensión recta en 24h a partir de un punto del ecuador que alcanza cuando su ascensión recta corregida de aberración y contada desde el equinoccio medio de la época es igual a $18^h 40^m$ ($\approx 280^\circ$). Este instante origen es muy próximo al origen del año astronómico. La duración del año ficticio es $0^s,0014$ menor que la del año trópico.

Es curioso observar que Bessel no definió en realidad el comienzo del año ficticio que lleva su nombre sino el del año astronómico al que ya nos hemos referido.

4.6.3 Estaciones

Por definición, las *estaciones* comienzan exactamente en los instantes en los cuales el Sol aparente entra en los signos de Aries, Cáncer, Libra o Capricornio, o, dicho de otro modo, cuando la longitud aparente del Sol vale 0° , 90° , 180° , 270° , respectivamente. Tales instantes, debido a la sucesión de los años comunes y bisiestos, pueden tener lugar en dos fechas distintas para cada estación y son, para el hemisferio boreal:

Primavera: 20 o 21 de marzo
 Verano: 21 o 22 de junio
 Otoño: 22 o 23 de septiembre
 Invierno: 21 o 22 de diciembre

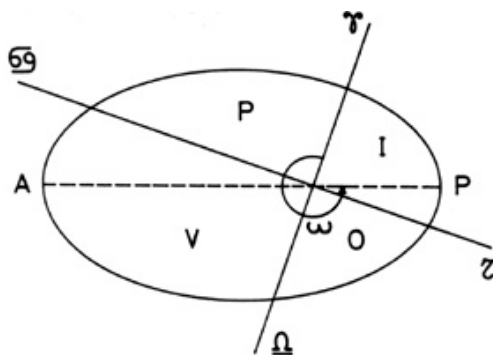


FIG. 13.4

Si despreciamos la influencia de pequeñas variaciones periódicas y seculares (aberración ánuua, desigualdad mensual, avance del perigeo solar, etc.), podemos calcular, hasta la centésima de día, la duración de cada estación limitándonos a la consideración del movimiento elíptico del Sol. Para ello se determina la porción del área de la elipse correspondiente a los valores de la anomalía verdadera al principio y al final de cada estación. Bastará entonces, según la ley de las áreas, dividir el año en partes

proporcionales a las áreas que obtengamos. Teniendo en cuenta la forma polar de la ley de las áreas:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 dV$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{V_1}^{V_1+\frac{\pi}{2}} r^2 dV = \frac{p^2}{2} \int_{V_1}^{V_1+\frac{\pi}{2}} \frac{dV}{(1+e \cos V)^2} = \frac{p^2}{2} \int_{V_1}^{V_1+\frac{\pi}{2}} (1-2e \cos V + 3e^2 \cos^2 V - \dots) dV = \\ &= \frac{p^2}{2} \left[V - 2e \sin V + 3e^2 \left(\frac{V}{2} + \frac{\sin 2V}{4} \right) - \dots \right]_{V_1}^{V_1+\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 (1-e^2)^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2} e \cos \left(V_1 + \frac{\pi}{4} \right) + 3e^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2V_1}{2} \right) - \dots \right] \end{aligned}$$

Designando por A el área de la elipse y por D la duración de una estación que se inicie con una anomalía verdadera V_1 tendremos:

$$\begin{aligned} A &= \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} \\ \frac{D}{T} &= \frac{S}{A} = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2} e \cos \left(V_1 + \frac{\pi}{4} \right) + 3e^2 (\dots) - \dots \right] \end{aligned}$$

y desarrollando en potencias de e :

$$D = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}e}{\pi} \cos \left(V_1 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{4} \frac{e^2}{\pi} \sin 2V_1 + \dots \quad \text{años trópicos}$$

Por ejemplo, al iniciarse la primavera en 1985, la anomalía verdadera era $V_1 = 77^\circ 17' 55''$ y $e = 0,01672$. Sustituyendo en la fórmula encontrada este ángulo para la primavera y $V_1 + 90^\circ$, $V_1 + 180^\circ$ y $V_1 + 270^\circ$ para el verano, otoño e invierno, respectivamente, resultan las siguientes duraciones en días medios:

Primavera: $91,31 + 1,47 - 0,01 = 92,77$ días medios

Verano: $91,31 + 2,32 + 0,01 = 93,64$ días medios

Otoño: $91,31 - 1,47 - 0,01 = 89,83$ días medios

Invierno: $91,31 - 2,32 + 0,01 = 89,00$ días medios

Dichas duraciones varían lentamente con el transcurso de los años debido al avance que experimenta el perigeo solar con respecto al equinoccio móvil (apartado 4.1.1.). Y así, partiendo, por ejemplo, del valor de la longitud media del perigeo para el año 2.000 (dada en el mismo apartado 4.1.1), se deduce fácilmente que hacia el año 1.250 el Sol pasaba por el perigeo en el solsticio de invierno y por tanto duraban igual la primavera y el verano y, asimismo, el otoño y el invierno.

4.7 Ecuación del centro y reducción al ecuador

Como ya indicamos en el apartado 1.7, al describir el Sol su órbita aparente de acuerdo con la ley de las áreas, no es uniforme la variación de su longitud. Aunque lo fuese, no lo sería la variación de su ascensión recta. Para poder utilizar las observaciones del Sol para la medida del tiempo y así llegar a definir el Sol medio, se impone estudiar con detalle tales hechos.

4.7.1 Ecuación del centro

Según vimos al principio de este capítulo, y continuando con la misma notación, en la órbita aparente del Sol se verifica (fórmulas (1.4) y (2.4)):

$$\left. \begin{aligned} L &= \bar{\omega} + M \\ \varsigma &= \bar{\omega} + V \end{aligned} \right\} \quad (32.4)$$

Llamamos *ecuación del centro* a la diferencia entre las longitudes verdadera y media del Sol:

$$C = \varsigma - L = V - M \quad (33.4)$$

y es, por tanto, la corrección que hay que aplicar a la longitud L de un *sol ficticio* para obtener la longitud ς del *sol verdadero*.

Recordando la fórmula que suministra la anomalía verdadera en función de la media (apartado 3.6) :

$$V = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots$$

la ecuación del centro puede expresarse, según (32.4), en función de la longitud media L del Sol:

$$C = 2e \sin(L - \bar{\omega}) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(L - \bar{\omega}) + \dots \quad (34.4)$$

Ceros de la ecuación del centro: Según (33.4) la ecuación del centro se anula en los extremos de la línea de los ápsides (perigeo y apogeo), puesto que en este caso M y V toman el mismo valor (0° y 180° respectivamente).

Máximos y mínimos de la ecuación del centro: De las fórmulas del movimiento elíptico se desprende inmediatamente que la ecuación del centro se mantendrá positiva entre el perigeo y el apogeo en la primera mitad de la elipse y negativa entre el apogeo y el perigeo en su segunda mitad. Pasará, por tanto, por un máximo en la primera mitad de la elipse y por un mínimo en la segunda, siendo simétricos respecto a la línea de los ápsides. Dichos valores extremos los podremos obtener suponiendo la anulación de la primera derivada de la ecuación del centro, teniendo en cuenta que $M = n(t - T)$ y la expresión de la ley, de las áreas $R^2 \dot{V} = c = nab$, es decir:

$$\dot{C} = \dot{V} - n = n \left(\frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{R^2} - 1 \right) = 0$$

Luego, en el máximo de la ecuación del centro:

$$R^2 = a^2 \sqrt{1-e^2} = ab \quad (35.4)$$

O sea que el radio vector es media geométrica entre los semiejes mayor y menor. Comparando (35.4) con la ecuación polar de la elipse:

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos V}$$

Y eliminando R entre ambas, tras sencillas operaciones se obtiene:

$$\cos V = \frac{(1-e^2)^{3/4} - 1}{e} \quad (36.4)$$

Análogamente, eliminando R entre (35.4) y la relación

$$R = a (1 - e \cos E)$$

fácilmente se obtiene:

$$\cos E = \frac{1 - (1-e^2)^{1/4}}{e} \quad (37.4)$$

Siendo, según (36.4) y (37.4) $V > \pi/2$ y $E < \pi/2$, la ecuación del centro pasa por su máximo en un punto de la órbita comprendido entre los extremos del parámetro y del eje menor. Dicho máximo puede calcularse, conocidas las correspondientes V y E por (36.4) y (37.4), buscando M por la ecuación de Kepler y efectuando la diferencia $V - M$.

Para el Sol, $e = 0,0168$, la aplicación de las fórmulas anteriores suministra los valores:

$$V = 90^\circ 43' 30'' ; E = 89^\circ 45' 20'' ; M = 88^\circ 47' 35'' ; C = 1^\circ 55' 55''$$

4.7.2 Reducción al ecuador

Llamamos *reducción al ecuador* a la corrección que hay que aplicar a la longitud ζ del Sol verdadero para obtener su ascensión recta A , es decir:

$$Q = A - \zeta \quad (38.4)$$

Dividiendo la segunda por la primera de (5.4), poniendo ζ en lugar de I , obtenemos la fórmula

$$\tan A = \cos \varepsilon \tan \zeta$$

con lo que, procediendo de manera análoga a como lo hicimos en 2.6,

$$\begin{aligned}\tan Q = \tan(A - \zeta) &= \frac{\tan A - \tan \zeta}{1 + \tan A \tan \zeta} = -\frac{(1 - \cos \varepsilon) \tan \zeta}{1 + \cos \varepsilon \tan^2 \zeta} = -\frac{(1 - \cos \varepsilon) \sin \zeta \cos \zeta}{\cos^2 \zeta + \cos \varepsilon \sin^2 \zeta} = \\ &= \frac{(1 - \cos \varepsilon) \sin 2\zeta}{(1 + \cos \varepsilon) + (1 - \cos \varepsilon) \cos 2\zeta} = -\frac{\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\zeta}{1 + \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\zeta}\end{aligned}\quad (39.4)$$

Y, dado que Q es siempre un ángulo muy pequeño, sustituyendo $\tan Q$ por Q y desarrollando el denominador en serie:

$$Q \simeq -\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\zeta \left[1 - \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\zeta + \dots \right]$$

resulta:

$$Q \simeq -\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\zeta + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4\zeta + \dots \quad (40.4)$$

desarrollo en serie que converge rápidamente puesto que $\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \simeq 0.04$

Ceros de la reducción al ecuador: Según (39.4) la reducción al ecuador se anula para $\tan \zeta = 0$ y $\tan \zeta = \infty$, es decir, cuatro veces en el transcurso de un año, para $\zeta = 0^\circ$, $\zeta = 90^\circ$, $\zeta = 180^\circ$, $\zeta = 270^\circ$, lo cual tiene lugar en los equinoccios y en los solsticios. Como Q es una función continua, ello implica la existencia de cuatro extremos (máximos o mínimos).

Máximos y mínimos de la reducción al ecuador: Para hallar los máximos y mínimos de Q con respecto a ζ , bastará hallar los de $\tan Q$ con respecto a $\tan \zeta$ al ser la tangente una función monótona creciente. Derivemos, pues, respecto a $\tan \zeta$ la ecuación (39.4) e igualemos a cero. Tendremos:

$$\frac{d(\tan Q)}{d(\tan \zeta)} = (1 - \cos \varepsilon) \frac{1 - \cos \varepsilon \tan^2 \zeta}{(1 + \cos \varepsilon \tan^2 \zeta)^2} = 0$$

y, por tanto, Q pasa por un máximo para:

$$\tan \zeta = \frac{1}{\sqrt{\cos \varepsilon}} \quad (41.4)$$

Según (39.4), para dicho máximo es

$$\tan Q = \frac{1 - \cos \varepsilon}{2\sqrt{\cos \varepsilon}} \quad (42.4)$$

Haciendo $\varepsilon = 23^\circ 27'$ en (41.4) y (42.4) se obtiene:

$$\begin{aligned}\zeta &= \pm 46^\circ 14' \pm 180^\circ \\ Q &= \pm 2^\circ 28'\end{aligned}$$

4.8 Ecuación de tiempo

De las definiciones (33.4) y (38.4) de la ecuación del centro y de la reducción al ecuador, sumando ordenadamente, se deduce:

$$C + Q = A - L$$

y, por tanto:

$$A = L + C + Q \quad (43.4)$$

Elementalmente, si pudiéramos introducir un *Sol medio* cuya ascensión recta A_m fuese igual a la longitud media L del Sol ficticio (ambas referidas al equinoccio medio de la fecha):

$$A_m = L \quad (44.4)$$

sustituyendo en (43.4) y recordando lo dicho en el apartado 1.7, el paso del tiempo medio H_m al verdadero $H (= H_v)$ se efectuaría aplicando al primero una *ecuación de tiempo*:

$$E = H - H_m = A_m - A = -(C + Q) \quad (45.4)$$

Dicha ecuación de tiempo se calcula a partir de los desarrollos en serie de C y Q (34.4) y (40.4) y viene dada día por día en los anuarios astronómicos. Limitándonos a considerar los primeros términos de C y Q y poniendo en esta última $\zeta \approx L$ para simplificar, es

$$E = -2e \sin(L - \bar{\omega}) + \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2L \quad (46.4)$$

Componiendo las gráficas que representan la ecuación del centro y la reducción al ecuador, se obtiene la gráfica de la ecuación de tiempo (Fig. 14.4).

Aproximando hasta el segundo, resumimos en el siguiente cuadro sus ceros y extremos, con indicación de las fechas en que tienen lugar (1985 a 0^h T.U.):

febrero	11	$E = -14^m 17^s$	mínimo absoluto
abril	16	$0^m 0^s$	
mayo	15	$3^m 43^s$	máximo
junio	15	$0^m 0^s$	
julio	27	$- 6^m 29^s$	mínimo
septiembre	2	$0^m 0^s$	
noviembre	4	$16^m 25^s$	máximo absoluto
diciembre	25	$0^m 0^s$	

De las relaciones ya conocidas

$$\begin{aligned} 1^{\text{dv}} &= 1^{\text{ds}} + \Delta A \\ 1^{\text{dm}} &= 1^{\text{ds}} + \Delta A_m \end{aligned}$$

restando miembro a miembro se obtiene:

$$1^{dv} = 1^{dm} + (\Delta A - \Delta A_m)$$

y siendo, según (45.4)

$$\Delta E = \Delta A_m - \Delta A$$

se tendrá, finalmente:

$$1^{dv} = 1^{dm} - \Delta E$$

es decir, un día verdadero equivale a un día medio menos el cambio diario de la ecuación de tiempo.

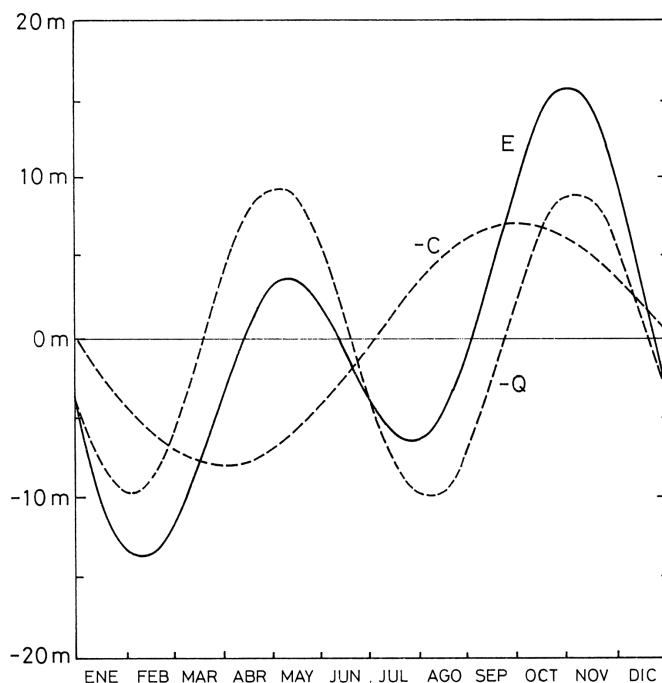


Fig. 14.4

Siendo según (46.4), en primera aproximación:

$$\Delta E \approx \left[-2e \cos(L - \bar{\omega}) + 2 \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos 2L \right] \Delta L$$

los ceros, máximos y mínimos de ΔE darán las fechas en las cuales son iguales las duraciones de los días verdadero y medio y aquellas en que los días verdaderos son de máxima o mínima duración. Así obtenemos el siguiente cuadro resumen:

febrero	11	$E = 0^s$	
marzo	28	19^s	máximo
mayo	15	0^s	
junio	20	-13^s	mínimo
julio	27	0^s	
septiembre	17	21^s	máximo absoluto
noviembre	4	0^s	
diciembre	23	-30^s	mínimo absoluto

4.9 Sol medio

Hoy en día, con mayor rigor, se procede como sigue: en primer lugar, como ya dijimos en 4.5, el tiempo solar viene dado por el movimiento geocéntrico del Sol aparente, es decir del Sol que observamos corregido de refracción, paralaje diurna y aberración diurna. Ello significa que la ascensión recta A que figura en (43.4) debe corregirse de aberración ánuia y de las variaciones periódicas que diferencian las longitudes baricéntricas y geocéntricas del Sol, a fin de obtener la ascensión recta geocéntrica A' del Sol aparente

$$A' = L + C + Q - k + \dots \quad (47.4)$$

donde k es la constante de la aberración ánuia y donde los puntos indican los términos periódicos de pequeña amplitud (desigualdad mensual, perturbaciones planetarias, término anual de la aberración ánuia, etc.). Como que según la Mecánica Celeste la *longitud media geométrica* L del Sol, referida al equinoccio medio de una cierta fecha, viene dada por una relación de la forma

$$L = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 \quad (48.4)$$

y el tiempo sidéreo medio viene dado por

$$\theta_m = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 \quad (49.4)$$

siendo el tiempo sidéreo verdadero $\theta = \theta_m + N$ con N la ecuación de equinoccios, resultará para dicho tiempo sidéreo verdadero o aparente:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + N \quad (50.4)$$

y para A' , sustituyendo (48.4) en (47.4):

$$A' = L_0 - k + L_1 t + L_2 t^2 + C + Q + \dots \quad (51.4)$$

Restando ordenadamente (50.4) y (51.4) el ángulo horario H' del Sol aparente, o *tiempo solar aparente* será:

$$H' = \theta - A' = (\theta_0 - L_0 + k) + (\theta_1 - L_1)t + (\theta_2 - L_2)t^2 - C - Q + N + \dots \quad (52.4)$$

y puede descomponerse en la suma:

$$H' = H_m + E \quad (53.4)$$

del ángulo horario H_m del *Sol medio*, o *tiempo solar medio*

$$H_m = (\theta_0 - L_0 + k) + (\theta_1 - L_1)t \quad (54.4)$$

y la *ecuación de tiempo*

$$E = -C - Q + N + \dots + (\theta_2 - L_2)t^2 \quad (55.4)$$

El Sol medio definido por (54.4) es pues un Sol ideal que recorre el ecuador, en sentido retrógrado, de modo que su ángulo horario crece uniformemente. Eligiendo convenientemente el origen y la unidad de tiempo t , en (49.4) puede hacerse:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= L_0 - k \\ \theta_1 &= L_1 + 1 \end{aligned} \right\} \quad (56.4)$$

y (54.4) tomará la forma:

$$H_m = t \quad (57.4)$$

es decir, con dicha elección el tiempo t que figura en las fórmulas anteriores será un tiempo solar medio.

Restando ordenadamente (50.4) y (54.4) la ascensión recta A del Sol medio valdrá:

$$A_m = \theta - H_m = L_0 - k + L_1t + \theta_2t^2 + N \quad (58.4)$$

es decir, el Sol medio no recorre el ecuador con movimiento uniforme. Además, prescindiendo de la ecuación de equinoccios N y considerando por tanto dicha ascensión recta referida al equinoccio medio de la fecha, ésta última no es igual a la longitud media del Sol corregida de aberración $L-k$, pues $\theta_2 \neq L_2$, en contra de lo que aproximadamente afirmaba (44.4). La diferencia, muy pequeña:

$$(A_m - N) - (L - k) = (\theta_2 - L_2)t^2$$

que figura como término secular en la ecuación de tiempo (55.4), llegará a ser de unos dos segundos dentro de mil años.

4.9.1 Relaciones de conversión entre los tiempos sidéreo y medio

Definimos en el apartado 1.5 los tiempos sidéreos aparente y medio y en el 1.7, en forma elemental, los tiempos solares verdadero y medio. Estudiamos también en el

mismo apartado la relación que existe entre un día solar medio y un día sidéreo, encontrando:

$$1^{\text{dm}} = 1^{\text{ds}} + 3^{\text{m}} 56^{\text{s}},55 \text{ t.s.}$$

o sea

$$24^{\text{hm}} = 24^{\text{hs}} + (3^{\text{m}} 56^{\text{s}},55) \text{ t.s.} \quad (59.4)$$

De aquí:

$$24^{\text{hs}} = 24^{\text{hm}} - (3^{\text{m}} 56^{\text{s}},55) \text{ t.s.}$$

y el último término de esta equivalencia se reduce a tiempo medio por la proporción que resulta de (59.4):

$$\frac{24^{\text{hm}}}{24^{\text{hm}} + 3^{\text{m}} 56^{\text{s}},55} = \frac{x}{3^{\text{m}} 56^{\text{s}},55}$$

$$x = 3^{\text{m}} 55^{\text{s}},90 \text{ t.m}$$

luego:

$$24^{\text{hs}} = 24^{\text{hm}} - (3^{\text{m}} 55^{\text{s}},90) \text{ t.m.} \quad (60.4)$$

Estudiemos ahora la conversión de intervalos de tiempo medio en intervalos de tiempo sidéreo y viceversa. Sean M y S un intervalo de tiempo expresado en tiempo medio y en tiempo sidéreo, respectivamente. Según las equivalencias que hemos establecido, las fórmulas de conversión se deducen inmediatamente de las relaciones:

$$\frac{S}{M} = \frac{24^{\text{h}} + 3^{\text{m}} 56^{\text{s}},55}{24^{\text{h}}} \quad \text{y} \quad \frac{M}{S} = \frac{24^{\text{h}} - 3^{\text{m}} 55^{\text{s}},90}{24^{\text{h}}}$$

o sea:

$$S = M \left(1 + \frac{236,55}{86400} \right) \quad \text{y} \quad M = S \left(1 - \frac{235,90}{86400} \right)$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} S &= M + 0,00274M \\ M &= S - 0,00273S \end{aligned} \right\} \quad (61.4)$$

relaciones a las cuales ordinariamente no es necesario recurrir puesto que todos los anuarios astronómicos llevan tablas de conversión de intervalos de tiempo medio en intervalos de tiempo sidéreo y viceversa.

4.9.2 Distintas clases de tiempo. Resumen.

Hasta ahora hemos ido introduciendo distintas clases de tiempo cuyas definiciones damos aquí a modo de resumen:

Tiempo sidéreo es el horario del punto Aries medio o verdadero, según el tiempo sidéreo sea el medio o el aparente. En un lugar son las 0^{h} de tiempo sidéreo medio (o aparente) cuando el punto Aries medio (o verdadero) pasa por el meridiano superior de dicho lugar.

Tiempo medio es el horario del Sol medio. En un lugar son las 0^h de tiempo medio cuando el Sol medio pasa por el meridiano superior de dicho lugar.

Tiempo civil es el horario del Sol medio aumentado en 12h. En un lugar son 0^h de tiempo civil cuando el Sol medio pasa por el meridiano inferior de dicho lugar. Se mide en intervalos de tiempo medio, comenzando el día civil 12h antes que el día medio.

Estos tiempos son locales, es decir, dependen del meridiano del lugar en el cual se encuentre el observador. No ocurre lo mismo con los que vamos a definir a continuación:

Tiempo universal T.U. es el tiempo civil del meridiano de Greenwich (introducido en 1912). Es la base de la división del Globo en sus 24 *husos horarios*. El tiempo civil de un lugar y el T.U. difieren en la longitud del lugar.

Tiempo oficial es aquel por el cual se rige cada nación (o parte de ella si es muy extensa). Suele diferir un número exacto de horas (o medias horas) del T.U.. Actualmente en España, aun perteneciendo al huso de Greenwich, llevamos una o dos horas de adelanto con respecto al T.U. según sea invierno o verano.

Para pasar del tiempo oficial al tiempo sidéreo, pasaremos primero del tiempo oficial al tiempo civil y, luego, de éste al tiempo sidéreo. Si designamos por l la longitud del lugar respecto al meridiano de Greenwich (considerada positiva si es *E* y negativa si es *W*), la diferencia entre los tiempos civiles del lugar t_c y de Greenwich t_G será igual a l y, por tanto, tendremos:

$$t_c = t_G + l$$

El paso del tiempo civil al sidéreo puede llevarse a cabo de dos maneras, eligiendo una u otra según nos den el tiempo civil o el tiempo universal, como ocurre frecuentemente.

Dado el tiempo civil se transformará en intervalo equivalente de tiempo sidéreo $\Delta\theta$, y a éste se le sumará el tiempo sidéreo a 0^h en Greenwich θ_0 y la *reducción del tiempo sidéreo en Greenwich* al meridiano local, r :

$$\theta = (\theta_0 + r) + \Delta\theta$$

viniendo dado r , evidentemente, por la proporción

$$\frac{24^h}{1} = \frac{3^m 56^s,55}{r}$$

y teniendo el mismo signo que l .

Dado el tiempo universal, se transformará en intervalo equivalente de tiempo sidéreo $\Delta\theta'$ y a éste se le sumará el tiempo sidéreo a 0^h en Greenwich θ_0 y se le sumará la longitud l :

$$\theta = \theta_0 + l + \Delta\theta'$$

Los pasos inversos no ofrecen ninguna dificultad.

4.10 Tiempo Universal y Tiempo de Efemérides

Según hemos visto en el apartado anterior, el tiempo solar medio es el ángulo horario del Sol medio, luego, sería un *tiempo uniforme* si la Tierra girase con velocidad angular constante. Como ya indicamos en el apartado 2.9, no ocurre así y, por tanto, el tiempo solar medio viene afectado por todas las variaciones del movimiento de rotación de la Tierra: es un *tiempo terrestre*, no uniforme. Evidentemente, lo dicho se aplica también al tiempo universal T.U., tiempo civil en Greenwich.

Para evitar, dentro de lo posible, la falta de uniformidad del tiempo universal, se corrige éste de las variaciones periódicas de la rotación debidas al desplazamiento del polo ya las fluctuaciones estacionales, ambas bastante bien conocidas. Reduciendo el *tiempo universal determinado por la observación*, T.U.0., al polo medio mediante la corrección de longitud Δl estudiada en el apartado 2.5 se obtiene un tiempo universal más uniforme:

$$T.U.1 = T.U.0 + \Delta l \quad (62.4)$$

el cual, a su vez, se corrige de las variaciones periódicas estacionales Δs (apartado 2.9) para dar lugar al llamado *tiempo universal casi uniforme*:

$$T.U.2 = T.U.1 + \Delta s \quad (63.4)$$

Aunque el T.U.2 se había utilizado en la transmisión de señales horarias, actualmente se reduce su uso a determinaciones de precisión en usos civiles, geodesia y navegación.

Dada la no uniformidad del tiempo universal, si tomamos éste como variable independiente en la fórmula (48.4) suministrada por la Mecánica Celeste:

$$L = L_o + L_1 t + L_2 t^2$$

la longitud media del Sol calculada mediante ella diferirá, cada vez más, de la deducida de las observaciones directas. Desde hace ya bastantes años se sabe que así ocurre, no sólo para el Sol sino también para la Luna y los planetas (precisamente fueron tales diferencias las que hicieron sospechar sobre la no uniformidad de la velocidad de rotación de la Tierra). Ante estos hechos se convino en llamar *tiempo de efemérides* T.E. al tiempo uniforme de la Mecánica, o *tiempo newtoniano*, variable independiente en las teorías gravitacionales del Sol, la Luna y los planetas. Más concretamente, tiempo de efemérides es el que figura en la fórmula de Newcomb:

$$L = 279^\circ 41' 27",54 + 129602768",13 t + 1",089 t^2 \quad (64.4)$$

que suministra la longitud media geométrica del Sol (t en centurias julianas de 36525 días), de modo que deducida ésta de la observación en una cierta época T.U.2, pueda obtenerse el correspondiente T.E. de la relación implícita (64.4). Así se obtiene la diferencia:

$$T = T.E. - T.U.2 \quad (65.4)$$

que permite reducir el tiempo universal a tiempo de efemérides y que figura tabulada en todos los anuarios astronómicos. ΔT fue nulo en el año 1903 y actualmente es del orden de $+54^s$.

Según (64.4) fue 0^h T.E. del 0^d de enero de 1900 cuando la longitud media del Sol era exactamente de $279^\circ 41' 27'',54$; dicho instante difirió sólo en unos 4^s de la época 0^h T.U. del 0^d de enero de 1900. Tomando como unidad de tiempo de efemérides la duración del año trópico en 1900,0, la relación (64.4) permite deducir, a través del coeficiente de t , la duración del *día medio de efemérides* o, mejor, de su divisor el *segundo de efemérides* (día = 86.400 segundos), que fue adoptado internacionalmente como unidad fundamental de tiempo en octubre de 1956.

Puesto que la duración del año trópico de 1900,0 (intervalo de tiempo transcurrido para que L se incremente en $360^\circ = 1296000''$) equivale según (64.4) a $\frac{1296000}{129602768,13}$ siglos Julianos, el año trópico de 1900,0 valdrá

$$\frac{1296000 \cdot 36525 \cdot 86400}{129602768,13} \text{ segundos} = 31556925,975 \text{ segundos}$$

de donde la nueva definición de segundo: es la fracción $1/31556925,975$ de la duración del año trópico en 1900,0. Este segundo de efemérides es constante por definición y no experimenta variaciones con la rotación de la Tierra, como ocurría con el segundo de tiempo medio = $1/86400$ de la duración del día solar medio.

A partir de 1960 y hasta 1984, los anuarios publicaron sus efemérides astronómicas más importantes (eclipses, posiciones del Sol, la Luna, los planetas, etc.) con argumento de tiempo de efemérides. Si se desea pasar a tiempo universal basta aplicar (65.4) con el valor tabulado de ΔT .

La introducción del tiempo de efemérides llevó consigo la consideración de nuevos conceptos, tales como el Sol medio de efemérides, tiempo sidéreo de efemérides, etc. En particular, se define el *meridiano de efemérides* como la posición que ocuparía el meridiano de Greenwich si la Tierra hubiese girado uniformemente a partir del instante en que coincidieron el tiempo de efemérides y el tiempo universal, $\Delta T=0$. Si recordamos que, según vimos en el apartado anterior, para convertir un intervalo de tiempo medio en intervalo equivalente de tiempo sidéreo basta multiplicar el primero por el factor 1,00274 (61.4), a partir de dicho instante el meridiano de efemérides habrá girado un ángulo (expresado en tiempo) igual a $1,00274$ T.E., mientras que, por la misma razón, el meridiano de Greenwich sólo habrá girado un ángulo igual a $1,00274$ T.U.2; según (65.4) ambos meridianos formarán entre sí un ángulo $1,00274 \Delta T$, encontrándose el meridiano de efemérides $1,00274 \Delta T$ al este del meridiano de Greenwich (las estrellas pasarán por el meridiano de efemérides antes que por el meridiano de Greenwich). El *tiempo sidéreo de efemérides* θ_E es el horario del punto Aries medio con respecto al meridiano de efemérides y, según lo dicho, en función del tiempo sidéreo medio Q valdrá:

$$\theta_E = \theta + 1,00274 \Delta T \quad (66.4)$$

Asimismo, se define la *longitud de efemérides* l_E de un lugar referida al meridiano de efemérides; si l es su longitud geográfica, evidentemente, se tendrá:

$$l_E = l + 1,00274 \Delta T \quad (67.4)$$

4.10.1 *Tiempo atómico internacional*

En la práctica el tiempo de efemérides es de difícil determinación y sólo se conoce con precisión al cabo de unos años de observación de los movimientos del Sol y de la Luna, principalmente. Debido a ello, mientras se llevan a cabo las reducciones, suele sustituirse por el *tiempo atómico* T.A., tiempo uniforme suministrado por los relojes atómicos, ajustados de modo que el *segundo atómico* coincida con el segundo de efemérides.

Para que los relojes atómicos materializasen el segundo de efemérides debían calibrarse, labor que realizaron, por métodos indirectos, entre otros, Markowitz y Hall en 1957, encontrando como valor de la frecuencia del cesio el número que serviría en 1967 para definir el segundo del Sistema Internacional de Unidades (SI).

En octubre de 1970 se adoptó universalmente la escala de tiempo atómico que utilizamos hoy día con el nombre de *tiempo atómico internacional*, T.A.I. Entre las determinaciones efectuadas de la diferencia T.E. -T.A.I. el valor más comunmente adoptado es

$$\text{T.E.} - \text{T.A.I.} = 32^{\text{s}},184$$

no habiéndose detectado hasta el momento variaciones notables de esta cantidad. Su valor es debido a la elección del origen de la escala del T.A.I. que se intentó que coincidiera con las 0^{h} de T.U.2 del 1 de enero de 1958 en lugar de 0^{h} de T.E., entonces muy mal determinado.

El tiempo atómico facilita también el llamado *tiempo universal coordinado* T.U.C., tiempo uniforme (función lineal del tiempo atómico) que emiten las señales horarias de modo que la diferencia entre la escala del T.U.C. y la del T.A.I. es un número exacto de segundos, y la diferencia entre el T.U.1 y el T.U.C. no puede exceder de 0,9 segundos. Debido a la no uniformidad del T.U.1 las señales horarias coordinadas del T.U.C. se ajustan cuando es preciso para que se cumpla siempre la condición indicada. En 1972 se establece que el T.U.C. difiera exactamente un número entero de segundos del T.A.I. y se implantan saltos de un segundo para que la diferencia U.T.1 - U.T.C. no exceda de un determinado valor.

4.10.2 *Tiempo dinámico terrestre. Tiempo dinámico baricéntrico*

De acuerdo con las recomendaciones de la Unión Astronómica Internacional (Grenoble, 1976), la unidad de tiempo para las Efemérides a partir de 1984 es el día de 86400 segundos, constando el siglo juliano de 36525 días (ver 4.1.1). Ello ha conducido a la adopción, a partir de tal fecha, de una nueva escala dinámica para las Efemérides geocéntricas aparentes la cual recibe el nombre de *tiempo dinámico terrestre*, T.D.T., siendo por definición

$$\text{T.D.T.} = \text{T.A.I.} + 32^{\text{s}},184$$

La unidad de esta escala coincide con un múltiplo del segundo SI (1 día = 86400 segundos). La diferencia de $32^{\text{s}},184$ entre el T.D.T. y el T.A.I. se ha establecido para evitar discontinuidades en las tablas de las Efemérides que se han publicado anteriormente a 1984 con argumento T.E. y las que se publican, a partir de 1984, con argumento T.D.T.

La U.A.I. en su Asamblea General de Buenos Aires (1991) acordó eliminar la palabra “dinámico” del T.D.T. y denominarlo *tiempo terrestre* (T.T.), que se mantiene con este nombre como argumento de las efemérides geocéntricas aparentes, escribiéndose desde entonces:

$$T.T.=T.A.I.+32^s,184$$

Para las ecuaciones del movimiento de los astros referidas al baricentro del sistema solar se emplea actualmente la escala de *tiempo dinámico baricéntrico*, T.D.B., utilizándose fundamentalmente en las teorías relativistas.

RELACION ENTRE LAS DISTINTAS ESCALAS DE TIEMPO

TAI	Tiempo Atómico Internacional.
TE	Tiempo de Efemérides.
TDI	Tiempo Dinámico Terrestre.
TT	Tiempo Terrestre
TDB	Tiempo Dinámico Baricéntrico.
UT0	
UT1	Notaciones de Tiempo Universal.
UT2	
UTC	Tiempo Universal Coordinado.
$\Delta T = TT - UT$	$= + 65^s$ para 2001
$TT - TAI$	$= + 32', 184$
$UT2 - UTC$	Obtener información.
$DUT1 = UT1 - UTC$	Obtener información-(1)
$DTA = TAI - UTC$	$=$ Número exacto de segundos (+ 32^s desde 1 de Enero de 1999, para otras fechas obtener información)
$UT1 - UTI$	$= 0^s,0220 \text{sen} 2\pi t - 0^s,0120 \text{cos} 2\pi t - 0^s,0060 \text{sen} 4\pi t + 0^s,0070 \text{cos} 4\pi t$ (t en años de Bessel).
$UT2 - UT0$	$= - \frac{(x \sin \lambda + y \cos \lambda) \tan \varphi}{15}$ en segundos de tiempo. (φ : latitud; λ : longitud del lugar positiva al E). (x, y: coordenadas del polo instantáneo de rotación de la Tierra)
TDB	aproximadamente igual a: $TT + 0^s,001658 \text{sen}(g + 0,0167 \text{sen} g)$ + términos lunares y planetarios de orden 10^{-5} s + términos diarios de orden 10^{-6} s., siendo: $g = \frac{2\pi (357^{\circ},528 + 35\,999^{\circ},050 T)}{360^{\circ}}$ T = intervalo en siglos Julianos desde la época J 2000.0.

La fecha de introducción de un nuevo segundo intercalar se anunciará con varias semanas de antelación por medio de las circulares del Servicio Horario (SH).

(1) Información al décimo de segundo en códigos insertos en las señales horarias.

Efemérides Astronómicas 2001.
Real Instituto y Observatorio de la Armada
San Fernando (Cádiz).

Capítulo 5

LOS PLANETAS

5.1 El Sistema Solar

El Sistema Solar está constituido por nuestra estrella el *Sol*, nueve *planetas* con sus correspondientes *satélites*, casi tres millares de *asteroides*, *cometas*, *meteoroides*, *polvo meteórico* y *gas interestelar*.

Los *planetas* son cuerpos esferoidales y oscuros que reciben y reflejan la luz del Sol, alrededor del cual giran describiendo órbitas elípticas. Se clasifican en *terrestres*: *Mercurio*, *Venus*, *La Tierra*, *Marte* y *Plutón*; y *jovianos*: *Júpiter*, *Saturno*, *Urano* y *Neptuno*.

Los primeros tienen dimensiones, achatamiento y densidad media comparables a los de la Tierra, estando rodeados de atmósferas transparentes que permiten observar los detalles de su superficie, excepto en el caso de Venus debido al espesor de las nubes que lo envuelven; sus periodos de rotación, excepto el de Plutón, son de uno o más días.

Los segundos, también llamados gigantes por sus dimensiones, son más achatados y de pequeña densidad media, y presentan atmósferas opacas y de gran espesor comparado con la parte sólida; los periodos de rotación son del orden de medio día, creciendo en cada planeta dicho periodo al desplazarse del ecuador hacia los polos.

En la TABLA III damos los datos físicos del Sol y de cada uno de los planetas del Sistema Solar.

Los *satélites* acompañan a los planetas describiendo órbitas elípticas alrededor de éstos. Algunos de ellos se conocen desde antiguo. Otros han sido descubiertos recientemente gracias a la exploración llevada a cabo con sondas y satélites artificiales. En la TABLA IV damos el nombre y sus principales datos astronómicos. La mayor parte de la información de los satélites pequeños es incierta, en particular los diámetros, que están sujetos a errores del 5 al 10%. La excentricidad de las órbitas de los satélites de Júpiter I, II y III es variable (se indica la media). Para los satélites que no son esféricos damos el valor del eje medio como diámetro. Probablemente existen aun satélites por descubrir. En la Tabla hemos consignado solamente los que se toman ya como definitivos a partir del estudio de los datos obtenidos de las sondas Voyager 1 y 2.

Los planetas Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno presentan *anillos* constituidos por partículas sólidas de tamaños variados. Desde los viajes de las sondas espaciales Voyager 1 y 2 sabemos de la existencia de un sistema de tres delgados anillos que rodean Júpiter extendiéndose hasta 359.000 km de la superficie del planeta. Están formados por partículas muy oscuras que les dan un brillo diez mil veces menor que el de los anillos de Saturno, lo cual unido a su poco grosor (aproximadamente 1 km) hace muy difícil la observación desde la Tierra.

El sistema de anillos de Saturno es el más espectacular. Entre los anillos existen espacios con menor densidad de materia denominados *divisiones* que los separan en segmentos denominados *anillos* E, G, F, A, B, C, D según nos acerquemos al planeta.

En la TABLA V damos una relación de los anillos de Saturno y las divisiones con la indicación de su descubridor.

Observaciones de ocultaciones de estrellas por el planeta Urano efectuadas en 1977 pusieron de manifiesto la presencia de por lo menos 10 anillos alrededor de dicho

planeta, cada uno de ellos con una anchura de pocos kilómetros y a distancia de 1 a 2 km uno del otro, anillos que son demasiado estrechos para poder ser observados directamente. El paso del Voyager 2 a través del sistema uranio permitió obtener imágenes detalladas de los mismos.

Asimismo, a partir del análisis de ocultaciones de estrellas por Neptuno se llegó a la conclusión de que este planeta posee un anillo de 10 a 15 km de anchura a una distancia aproximada de 76400 km de su centro y que se extiende más allá de tres radios del planeta.

Los *asteroides* son pequeños planetas telescópicos que describen sus órbitas elípticas principalmente entre las de Marte y Júpiter. Presentan excentricidades e inclinaciones mayores que las de los planetas y los que pasan cerca de la Tierra se utilizan para determinar la paralaje solar.

Los *cometas* se caracterizan por su *cabellera*, mostrando también, muchas veces, un *núcleo* o condensación central y dos *colas*: una iónica y otra compuesta de polvo que se va desarrollando conforme el cometa se acerca al Sol. La primera se orienta según el campo magnético solar y la segunda según la presión de radiación. Los cometas se clasifican en *periódicos* y *no periódicos* según que la cónica que describen alrededor del Sol sea una elipse o una parábola o hipérbola, respectivamente.

Los *meteoroides* son fragmentos rocosos que se ponen incandescentes al penetrar en la atmósfera terrestre, originando los *meteoros*. Si el meteorode o parte del mismo, llega a la superficie de la Tierra, se llama *meteorito* y si es de gran tamaño y al caer estalla, *bólido*.

Algunos grupos más o menos numerosos de meteoroides o *enjambres meteoricos* describen órbitas elípticas alrededor del Sol y si éstas cortan a la de la Tierra, al atravesar la atmósfera terrestre, dan lugar al fenómeno conocido vulgarmente con el nombre de *lluvia de estrellas fugaces*. El punto de la esfera celeste del cual parecen provenir los meteoroides, definido por la dirección de la velocidad relativa geocéntrica de los mismos, es el *punto radiante* del enjambre.

El *polvo meteorico*, constituido por partículas pétreas y metálicas, se distribuye concentrándose en torno al plano medio de las órbitas planetarias, es decir, en la banda del zodiaco, con densidad decreciente según nos alejamos del Sol. Al difundir la luz solar, puede observarse como *luz zodiacal* unas horas antes de salir o después de ponerse el Sol. También se manifiesta en una condensación del mismo existente en dirección opuesta al Sol, originando la llamada *luz antisolar* (“*gegenschein*”).

Por último, el *gas interplanetario* es, principalmente, una mezcla de hidrógeno, helio y electrones libres.

5.2 Movimiento heliocéntrico

En primera aproximación, cada planeta describe su órbita alrededor del Sol de acuerdo con las leyes del movimiento elíptico estudiadas en 3.6. Tomando la eclíptica como plano fundamental de referencia, con el eje X dirigido hacia el punto Aries (recordar 3.11, Fig. 10.3), los elementos que definen la posición de la órbita son ahora la *longitud del nodo ascendente* Ω , la *inclinación* i con respecto a la eclíptica y el *argumento de latitud del perihelio* ω ; este último se sustituye a veces por la *longitud del perihelio sobre la órbita* $\bar{\omega} = \Omega + \omega$.

En la TABLA VI figuran los *elementos eclípticos* de los planetas para la época J 2000.0 (es decir, calculados para el 1 de enero del año 2.000 a 0^h de T.U.). En ella, a es la distancia media al Sol en u.a., e es la excentricidad, Ω la longitud del nodo ascendente, $\bar{\omega}$

la longitud del perihelio ($\bar{\omega} = \Omega + \omega$), i la inclinación con respecto a la eclíptica, P el periodo sidéreo, L_0 la longitud media del planeta ($L_0 = \bar{\omega} + M$) y ε la oblicuidad.

Una vez obtenidas, a partir de los elementos eclípticos, las *constantes vectoriales eclípticas*, $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ o $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, las fórmulas (73.3) o (76.3) de 3.12, permiten calcular una efemérides eclíptica heliocéntrica del planeta para una época determinada.

Si, conocida la posición eclíptica heliocéntrica del planeta $\vec{r}' = M\vec{r}$, nos interesase su posición ecuatorial heliocéntrica $\vec{r}''$, bastaría efectuar, alrededor de la línea de los equinoccios y en sentido retrógrado, una rotación de ángulo igual a la oblicuidad de la eclíptica ε :

$$\vec{r}'' = R_1(-\varepsilon)\vec{r}' = R_1(-\varepsilon)M\vec{r} \quad (1.5)$$

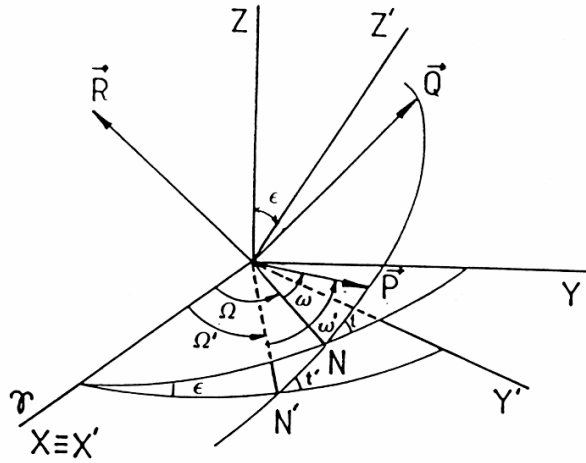


FIG. 1.5

Se consideran los *elementos ecuatoriales* (referencia X' , Y' , Z' de la Fig. 1.5) *ascensión recta del nodo ascendente* Ω' , *inclinación* i' con respecto al ecuador y *argumento de declinación del perihelio* ω' y a partir de ellos se obtienen las *constantes vectoriales ecuatoriales* $\vec{P}'$, $\vec{Q}'$, $\vec{R}'$ (recordar Fórm. 70.3).

$$\begin{aligned} \vec{P}' &= \begin{bmatrix} \cos \Omega' \cos \omega' - \sin \Omega' \cos i' \sin \omega' \\ \sin \Omega' \cos \omega' + \cos \Omega' \cos i' \sin \omega' \\ \sin i' \sin \omega' \end{bmatrix} \\ \vec{Q}' &= \begin{bmatrix} -\cos \Omega' \sin \omega' - \sin \Omega' \cos i' \cos \omega' \\ -\sin \Omega' \sin \omega' + \cos \Omega' \cos i' \cos \omega' \\ \sin i' \cos \omega' \end{bmatrix} \\ \vec{R}' &= \begin{bmatrix} \sin \Omega' \sin i' \\ -\cos \Omega' \sin i' \\ \cos i' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Las componentes de los vectores (2.5) constituyen ahora los elementos de la matriz de cambio de base:

$$M' = \begin{bmatrix} P_{x'} & Q_{x'} & R_{x'} \\ P_{y'} & Q_{y'} & R_{y'} \\ P_{z'} & Q_{z'} & R_{z'} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

que permite calcular directamente la posición ecuatorial heliocéntrica

$$\vec{r}'' = M' \vec{r} \quad (4.5)$$

sin necesidad de conocer la posición eclíptica heliocéntrica $\vec{r}'$. En la práctica el cálculo de una efemérides ecuatorial heliocéntrica se lleva a cabo pues, según (4.5), mediante una de las fórmulas

$$\vec{r}'' = \vec{P}' \xi + \vec{Q}' \eta \quad (5.5)$$

$$\vec{r}'' = \vec{A}'(\cos E - e) + \vec{B}' \sin E \quad (6.5)$$

donde en (6.5) es $\vec{A}' = a\vec{P}'$, $\vec{B}' = a\sqrt{1-e^2}\vec{Q}'$ (recordar 3.12).

Dados los elementos eclípticos Ω , i , ω pueden deducirse fácilmente los ecuatoriales ω' , i' , ω' observando que, según (1.5) y (4.5), es

$$M' = R_1(-\varepsilon)M \quad (7.5)$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} P_{x'} & Q_{x'} & R_{x'} \\ P_{y'} & Q_{y'} & R_{y'} \\ P_{z'} & Q_{z'} & R_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} R_{x'} &= R_x \\ R_{y'} &= R_y \cos \varepsilon - R_z \sin \varepsilon \\ R_{z'} &= R_y \sin \varepsilon + R_z \cos \varepsilon \\ P_{z'} &= P_y \sin \varepsilon + P_z \cos \varepsilon \\ Q_{z'} &= Q_y \sin \varepsilon + Q_z \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

y por tanto, teniendo en cuenta (2.5):

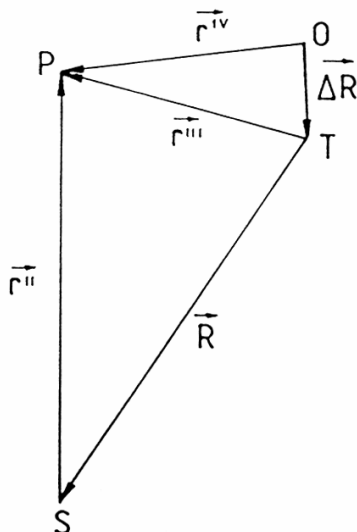


FIG. 2.5

$$\left. \begin{aligned} \sin \Omega' \sin i' &= \sin \Omega \sin i \\ \cos \Omega' \sin i' &= \cos \Omega \sin i \cos \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon \\ \cos i' &= -\cos \Omega \sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon \\ \sin i' \sin \omega' &= (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega) \sin \varepsilon + \sin i \sin \omega \cos \varepsilon \\ \sin i' \cos \omega' &= (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega) \sin \varepsilon + \sin i \cos \omega \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

La posición ecuatorial topocéntrica de un planeta se calcula mediante dos traslaciones (Fig. 2.5). En primer lugar, la posición ecuatorial geocéntrica $\vec{r}'''$ se obtiene aplicando a la heliocéntrica $\vec{r}''$, dada por (5.5) o (6.5), la traslación

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

posición ecuatorial geocéntrica del Sol, cuyas componentes X, Y, Z son las coordenadas rectangulares ecuatoriales geocéntricas del Sol que figuran día a día en los Anuarios:

$$\vec{r}''' = \vec{r}'' + \vec{R} \quad (10.5)$$

A continuación se aplica la corrección de paralaje diurna $\Delta \vec{R}$ que, en coordenadas ecuatoriales y expresando el radio ecuatorial terrestre en u.a., vale (ver 2.2.2):

$$\Delta \vec{R} = -4.26 \cdot 10^{-5} R_3(-\theta) \begin{bmatrix} \cos \phi' \\ 0 \\ \sin \phi' \end{bmatrix} = -4.26 \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} \cos \phi' \cos \theta \\ \cos \phi' \sin \theta \\ \sin \phi' \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

donde $4.26 \cdot 10^{-5} = \frac{6378.140}{149.6 \cdot 10^6}$, ϕ' es la latitud geocéntrica del observador y θ su tiempo sidéreo local. Así se obtiene la posición ecuatorial topocéntrica $\vec{r}^{IV}$ del planeta:

$$\vec{r}^{IV} = \vec{r}''' + \Delta \vec{R} = \vec{r}'' + \vec{R} + \Delta \vec{R} \quad (12.5)$$

5.2.1 Evolución de los elementos orbitales

Debido al desplazamiento secular de los planos fundamentales, tanto los elementos eclípticos Ω, i, ω como los ecuatoriales Ω', i', ω' varían lentamente con el transcurso del tiempo, siendo preciso establecer fórmulas que permitan calcularlos para una época t conocidos para una época anterior t_0 .

En cuanto se refiere a los elementos eclípticos, basta recordar (Fig. 3.5) que la eclíptica móvil E_1 se desplaza con respecto a la fija E girando alrededor de su nodo ascendente N mientras que el punto Aries γ retrograda. Sean Ω_E la longitud del nodo ascendente de la eclíptica móvil con respecto a la fija, π la variación ánuia del ángulo de la eclíptica móvil con la fija, $d\omega$ la distancia entre los nodos ascendentes N y N_1 de la órbita del planeta con respecto a las eclípticas fija y móvil, respectivamente, p la precesión general en longitud por año, Ω la longitud del nodo ascendente N de la órbita del planeta con respecto a la eclíptica fija e i la inclinación de la órbita del planeta con respecto a la eclíptica fija.

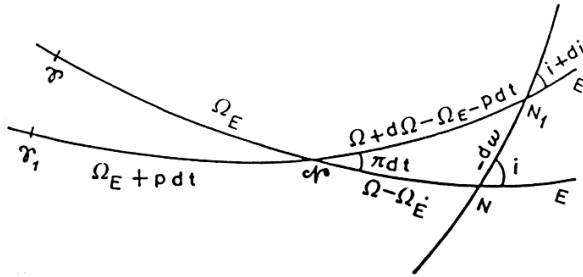


FIG. 3.5

Del triángulo esférico NNN_1 (Fig. 3.5) se deduce:

$$\begin{aligned} d\omega &= -\pi \operatorname{cosec} i \operatorname{sen}(\Omega - \Omega_E) dt \\ d\Omega - p dt &= -\cos i d\omega = \pi \cot i \operatorname{sen}(\Omega - \Omega_E) dt \\ di &= -\pi \cos(\Omega - \Omega_E) dt \end{aligned} \quad (13.5)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + [p + \pi \cot i_0 \operatorname{sen}(\Omega_0 - \Omega_E)](t - t_0) \\ i &= i_0 - \pi \cos(\Omega_0 - \Omega_E)(t - t_0) \\ \omega &= \omega_0 - \pi \operatorname{cosec} i_0 \operatorname{sen}(\Omega_0 - \Omega_E)(t - t_0) \end{aligned} \quad (14.5)$$

fórmulas de *cambio de equinoccio* que suministran los elementos eclípticos Ω , i , ω para una época t conocidos Ω_0 , i_0 , ω_0 para una época t_0 .

5.2.2 Elementos ecuatoriales

Dado que la precesión luni-solar en oblicuidad es nula, la velocidad angular instantánea del ecuador medio (comparar con la fórmula en ω' de 2.6.1) valdrá:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ p \operatorname{sen} \varepsilon \\ -p \cos \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ -m \end{bmatrix} \quad (15.5)$$

siendo m la precesión ánea en ascensión recta y n la precesión ánea en declinación; por tanto, la ascensión recta del nodo ascendente del ecuador móvil con respecto al fijo valdrá 90° .

Según esto, sustituyendo en (14.5) los elementos eclípticos por los ecuatoriales, Ω_E por 90° y p y π por m y n , respectivamente, se obtienen las fórmulas de cambio de equinoccio de los elementos ecuatoriales:

$$\begin{aligned} \Omega' &= \Omega'_0 + (m - n \cot i'_0 \cos \Omega'_0)(t - t_0) \\ i' &= i'_0 - n \operatorname{sen} \Omega'_0(t - t_0) \\ \omega' &= \omega'_0 + n \operatorname{cosec} i'_0 \cos \Omega'_0(t - t_0) \end{aligned} \quad (16.5)$$

5.3 Movimiento geocéntrico de los planetas

5.3.1 Introducción

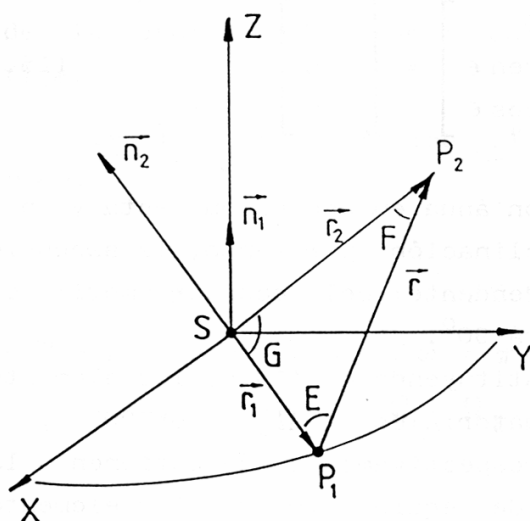


FIG. 4.5

En una base eclíptica heliocéntrica $X Y Z$ (Fig. 4.5), sean $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ los vectores de posición de la Tierra P_1 y de un planeta P_2 y $\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1$ y $\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2$ sus respectivas velocidades. La posición y el movimiento geocéntricos de dicho planeta, en una cierta época, vendrán definidos por los vectores:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \vec{v} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

donde, como que la velocidad de un planeta depende sólo de su vector de posición (27.3), r será función sólo de r_1 y r_2 .

Llamaremos $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ a los vectores de movimiento medio de P_1 y P_2 . En el triángulo $P_1 P_2 S$, el ángulo E recibe el nombre de *elongación* y F el de *ángulo de fase*.

5.3.2 Configuraciones geocéntricas

Diremos que un planeta P_2 es *inferior* o *superior* con respecto a la Tierra P_1 , según que $\vec{r}_2$ sea menor o mayor, respectivamente, que $\vec{r}_1$ (Fig. 4.5).

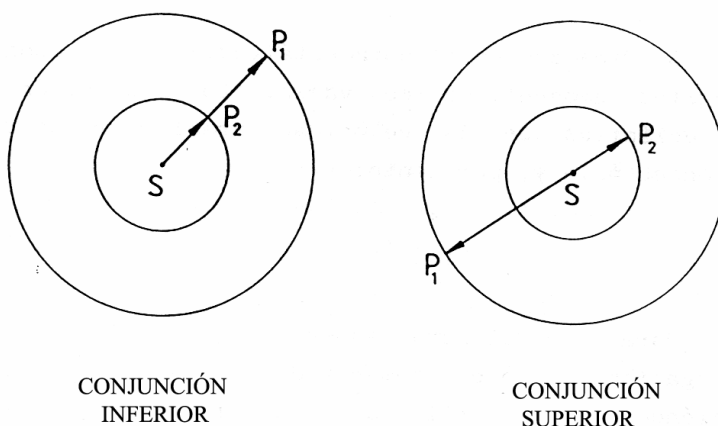


FIG. 5.5

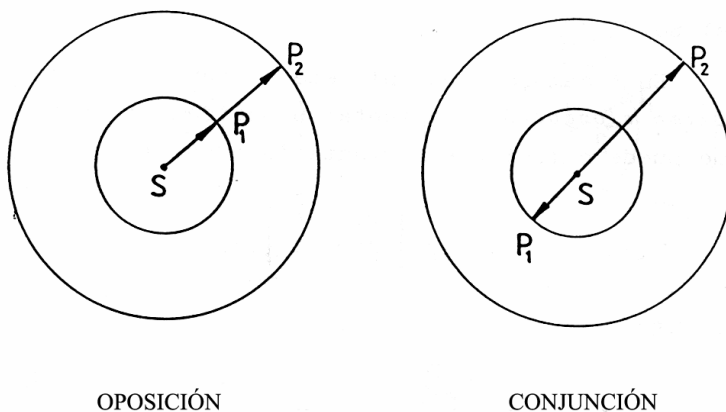


FIG. 6.5

Un planeta inferior está en *conjunción inferior* o en *conjunción superior*, según que su longitud heliocéntrica sea igual a la de la Tierra o a la de ésta más 180° (Fig. 5.5).

Un planeta superior está en *oposición* o en *conjunción* según que su longitud heliocéntrica sea igual a la de la Tierra o a la de ésta más 180° (Fig. 6.5).

Para todas estas configuraciones se verifica:

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = 0 \quad (18.5)$$

En la órbita relativa del planeta, $\vec{r}$ será mínimo o máximo, es decir P_2 pasará por el *perigeo* o *apogeo*, siendo máximos o mínimos el semidiámetro aparente y la paralaje, si:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \quad (19.5)$$

Se dice que un planeta está *estacionario* cuando su longitud geocéntrica no varía. La proyección sobre la eclíptica de la velocidad areolar relativa es entonces nula y, por tanto:

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r} \wedge \vec{v}) = 0 \quad (20.5)$$

Para un planeta superior (Fig. 7.5 (a)) la elongación E puede tomar todos los valores posibles, diciéndose en particular que el planeta está en *cuadratura* cuando $E = 90^\circ$, siendo ésta la diferencia entre las longitudes geocéntricas del planeta y del Sol.

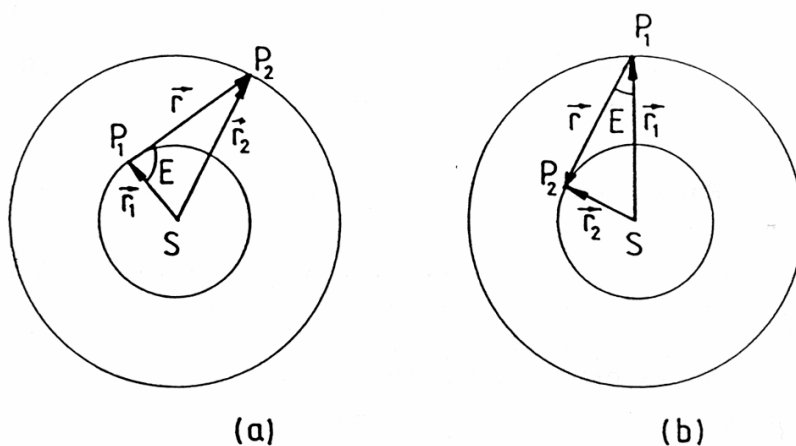


FIG. 7.5

En cambio, un planeta inferior presenta una *máxima elongación*, oriental u occidental, (Fig. 7.5 (b)) que puede calcularse mediante la condición:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{r}_1}{r_1} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right] = 0 \quad (21.5)$$

Para un planeta inferior (Fig. 8.5 (a)) el ángulo de fase F puede tomar todos los valores posibles, diciéndose en particular que tiene lugar la *dicotomía* cuando $F=90^\circ$. Un planeta superior, en cambio, presenta un *máximo ángulo de fase* (Fig.8.5 (b)) que puede calcularse mediante la condición:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right] = 0 \quad (22.5)$$

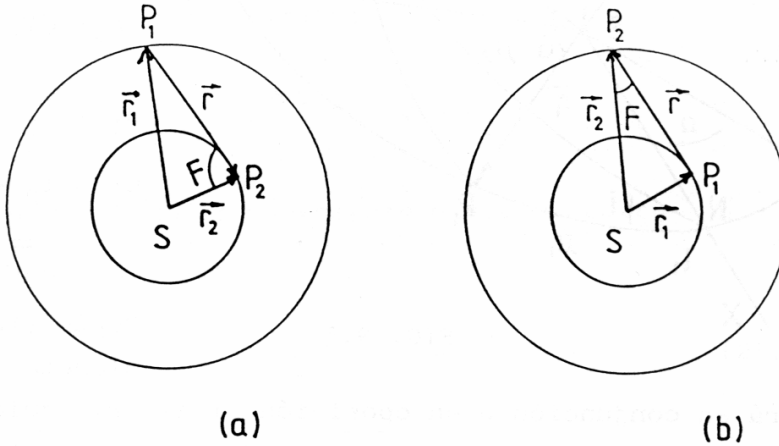


FIG. 8.5

5.3.3 Movimiento geocéntrico circular

Estudiemos ahora las configuraciones geocéntricas consideradas en 5.3.2 en la hipótesis simplificada de que los planetas describen órbitas circulares. Además de (17.5) tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{n}_1 \wedge \vec{r}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{n}_2 \wedge \vec{r}_2 \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

Sean Ω, i, ω los elementos eclípticos del planeta P_2 , V_2 su anomalía verdadera, l_1 la longitud heliocéntrica de la Tierra P_1 y $P_2 = \Omega + \omega + V_2$ la longitud del planeta P_2 sobre su órbita (Fig. 9.5). Los argumentos u_1 y u_2 de P_1 y P_2 , contados a partir del nodo ascendente N (eje X), valdrán

$$u_1 = l_1 - \Omega$$

$$u_2 = l_2 - \Omega = \omega + V_2$$

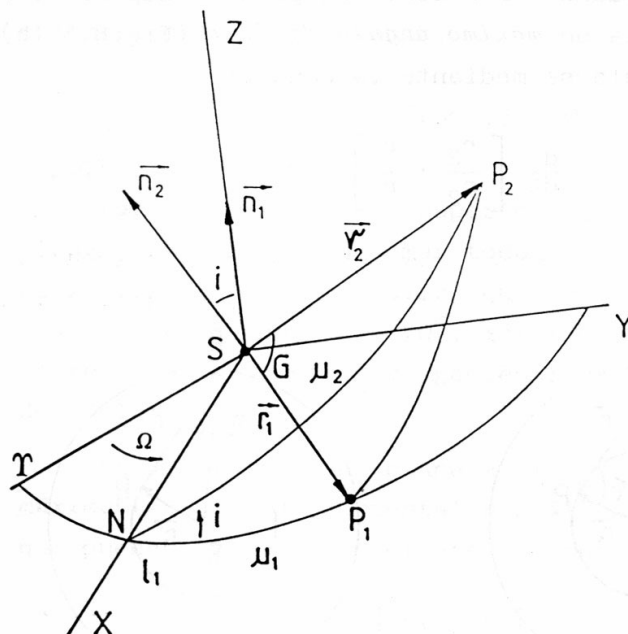


FIG. 9.5

Según (18.5) un planeta P_2 estará en conjunción o en oposición si el triángulo esférico NP_1P_2 es rectángulo en P_1 y, por tanto:

$$\cos i = \frac{\tan u_1}{\tan u_2} \quad (24.5)$$

relación también válida aunque las órbitas no sean circulares.

En particular, si además de suponer las órbitas circulares las suponemos coplanarias, es $i = 0$ y, según (24.5):

o $u_1 = u_2$ que corresponde a conjunción inferior si el planeta es inferior o a oposición si el planeta es superior,

o $u_1 = u_2 + 180^\circ$ que corresponde a conjunción superior si el planeta es inferior o a simplemente conjunción si el planeta es superior.

En dicha hipótesis, el intervalo de tiempo S transcurrido entre dos configuraciones sucesivas del mismo nombre, denominado *revolución sinódica*, vendrá dado por la condición:

$$n_1 S \pm 2\pi = n_2 S$$

e introduciendo el *movimiento medio sinódico* $n = \frac{2\pi}{S}$ se tendrá, también:

$$n = \pm(n_2 - n_1) \quad (25.5)$$

debiéndose tomar el signo más o el signo menos según que el planeta P_2 sea inferior o superior.

En la TABLA VII figuran las revoluciones sinódicas de los planetas, así como las distancias medias al Sol a y los radios r_B de sus órbitas, supuestas circulares, calculados a partir de la ley empírica de Bode

$$r_B = \frac{3 \cdot 2^n + 4}{10} u.a.$$

Dado que las excentricidades y las inclinaciones de las órbitas planetarias son realmente pequeñas, las revoluciones sinódicas dan una idea aproximada de la periodicidad con la cual, para cada planeta, se reproducen las distintas configuraciones.

Según (19.5) un planeta P_2 pasará por el perigeo o apogeo, recordando (17.5) y (23.5), si se verifica

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{n}_2 \wedge \vec{r}_2 - \vec{n}_1 \wedge \vec{r}_1) = 0$$

u operando:

$$(\vec{n}_2 - \vec{n}_1) \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = 0 \quad (26.5)$$

Es decir, si generalizamos (25.5) y definimos el *vector de movimiento medio sinódico*:

$$\vec{n} = \vec{n}_2 - \vec{n}_1 \quad (27.5)$$

en el perigeo o apogeo, la Tierra P_1 y el planeta P_2 se encuentran sobre un plano que pasa por $\vec{n}$ (Fig. 10.5).

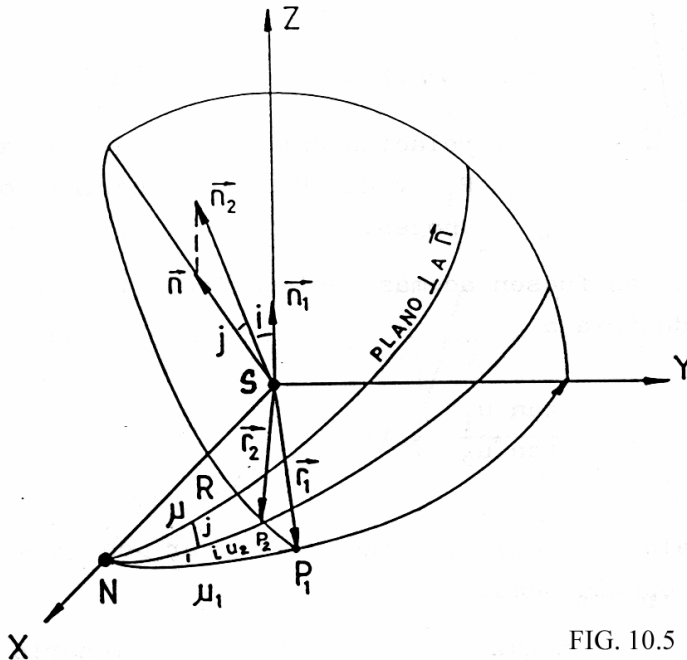


FIG. 10.5

Siendo pues rectángulos en R los triángulos NRP_1 y NRP_2 se tiene

$$\frac{\tan u}{\tan u_1} = \cos(i + j)$$

$$\frac{\tan u}{\tan u_2} = \cos j$$

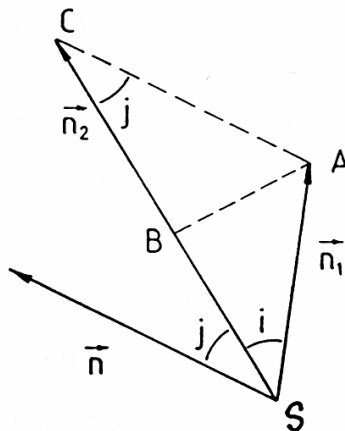


FIG. 11.5

y dado que, según se desprende de la figura 11.5 (detalle de 10.5),

$$\tan j = \frac{AB}{BC} = \frac{n_1 \sin i}{n_2 - n_1 \cos i}$$

también, finalmente, dividiendo:

$$\frac{\tan u_1}{\tan u_2} = \frac{n_2 - n_1 \cos i}{n_2 \cos i - n_1} \quad (28.5)$$

relación entre los argumentos de P_1 y de P_2 en el perigeo o apogeo.

Si las órbitas fuesen además coplanarias, $i=0$, y (28.5) se reduciría a

$$\frac{\tan u_1}{\tan u_2} = 1$$

es decir, tales fenómenos tendrían lugar en las conjunciones u oposiciones.

Hemos visto que un planeta P_2 estará estacionario si se verifica (20.5), y recordando (17.5), si

$$\vec{n}_1 \cdot [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)] = 0$$

u operando

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_2 + \vec{r}_2 - \vec{v}_1) = \vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2)$$

o también, según (23.5):

(29.5)

(1.5)

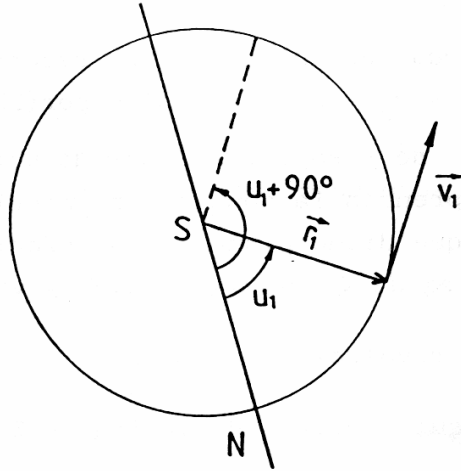


FIG. 12.5

Puesto que en la hipótesis de órbitas circulares, los argumentos de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ valen u_1+90° y u_2+90° , respectivamente (Fig. 12.5), la relación entre los argumentos de P_1 y P_2 será ahora, según (29. 5):

$$\begin{aligned} n_1^2 r_1 r_2 \cos \hat{r}_1 \hat{r}_2 + n_1 r_1 n_2 r_2 \cos \hat{v}_1 \hat{v}_2 &= \\ = n_1^2 r_1^2 + r_2^2 n_1 n_2 \cos i \end{aligned}$$

o también, dividiendo por $n_1 r_1 r_2$ y sustituyendo los valores de $\cos \hat{r}_1 \hat{r}_2$ y $\cos \hat{v}_1 \hat{v}_2$:

$$\begin{aligned} n_1 (\cos u_1 \cos u_2 + \text{sen} u_1 \text{sen} u_2 \cos i) + n_2 (\text{sen} u_1 \text{sen} u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos i) &= \\ = n_1 \frac{r_1}{r_2} + n_2 \frac{r_2}{r_1} \cos i \end{aligned} \quad (30.5)$$

Si además de circulares las órbitas son coplanarias ($i=0$) y suponemos, con mucha aproximación, que se verifica exactamente la tercera ley de Kepler:

$$n_1^2 r_1^3 = n_2^2 r_2^3 = \mu$$

de la relación (30.5) se deduce que hay *estación* para:

$$\cos(u_2 - u_1) = \frac{r_1 \sqrt{r_2} + r_2 \sqrt{r_1}}{r_1 \sqrt{r_1} + r_2 \sqrt{r_2}} \quad (31.5)$$

El tiempo que tarda el planeta en recorrer el doble del ángulo $G = u_2 - u_1$ definido por (31.5) es decir, el intervalo de tiempo transcurrido entre dos estaciones que comprendan la conjunción inferior o la oposición (según que dicho planeta sea inferior o superior), es la *duración de la retrogradación* y vale $\frac{G}{180^\circ} S$, siendo S la revolución sinódica.

Dado que en el triángulo SP_1P_2 de la Fig. 4.5 se verifica:

$$r_2^2 = r_1^2 + r^2 - 2r_1r \cos E$$

según (21.5) un planeta P_2 estará en la *máxima elongación* si

$$\frac{d}{dt} \cos E = \frac{r^2 - (r_1^2 - r_2^2)}{2r_1r^2} \dot{r} = 0$$

o sea, siendo $\dot{r} \neq 0$, si

$$r^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad (32.5)$$

Para que se cumpla la condición (32.5) el planeta debe ser inferior ($r_2 < r_1$) y, en tal caso, el triángulo SP_1P_2 de la Fig. 4.5 es rectángulo en P_2 , $F = 90^\circ$; la máxima elongación tiene lugar en la dicotomía (supuestas las órbitas circulares). Siendo ahora

$$\sin E = \frac{r_2}{r_1} \quad (33.5)$$

y, además, $G = 90^\circ - E$, obtenemos la siguiente relación entre los argumentos de P_1 y P_2 :

$$\cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 \cos i = \cos G = \sin E = \frac{r_2}{r_1} \quad (34.5)$$

Dado que en el triángulo SP_1P_2 de la Fig. 4.5 se verifica:

$$r_1^2 = r_2^2 + r^2 - 2r_2r \cos F$$

según (22.5) un planeta P_2 presentará *máximo ángulo de fase* si

$$\frac{d}{dt} \cos F = \frac{r^2 - (r_2^2 - r_1^2)}{2r_2r^2} \dot{r} = 0$$

o, siendo $\dot{r} \neq 0$, si

$$r^2 = r_2^2 - r_1^2 \quad (35.5)$$

Para que se cumpla la condición (35.5) el planeta debe ser superior ($r_2 > r_1$) y, en tal caso, el triángulo SP_1P_2 es rectángulo en P_1 , $E = 90^\circ$; el máximo ángulo de fase tiene lugar en la cuadratura (supuestas las órbitas circulares). Siendo ahora

$$\text{sen } F = \frac{r_1}{r_2} \quad (36.5)$$

y, además, $G = 90^\circ - F$, obtenemos la siguiente relación entre los argumentos de P_1 y P_2 :

$$\cos u_1 \cos u_2 + \text{sen } u_1 \text{sen } u_2 \cos i = \cos G = \text{sen } F = \frac{r_1}{r_2} \quad (37.5)$$

5.4 Efemérides para observaciones físicas

5.4.1 Planetas

Conocidos el eje y el periodo de rotación de un planeta, podemos orientarnos sobre el disco que nos proporciona su imagen telescópica mediante un sistema de *coordenadas planetográficas* análogas a las geográficas de la Tierra: *longitud planetográfica* L , contada a partir de un cierto meridiano origen O en sentido contrario al de la rotación, y *latitud planetográfica* B .

Para calcular L y B se introduce un sistema de *coordenadas planetocéntricas* ecuatoriales: *ascensión recta planetocéntrica* A , contada a partir del punto vernal V del planeta (nodo ascendente de su órbita con respecto a su ecuador) en el sentido de la rotación, y *declinación planetocéntrica* D .

Para la reducción de las observaciones se precisan las coordenadas planetográficas L_o y B_o del centro del disco geométrico del planeta (coordenadas planetográficas de la Tierra T) así como el ángulo de posición P de su polo norte. Para obtenerlos calcularemos las coordenadas planetocéntricas A_E y D_E de la Tierra.

Sean (Fig. 13.5) A_E y D_E las coordenadas planetocéntricas de la Tierra T ; a_o y d_o la ascensión recta y la declinación geocéntricas del polo norte P_Q' del planeta y ϕ la ascensión recta planetocéntrica del nodo ascendente N del ecuador Q' del planeta sobre el ecuador Q de la Tierra, que pueden considerarse constantes a lo largo del año; a y d la ascensión recta y la declinación geocéntricas del planeta, que figuran día a día en los anuarios. Resolviendo el triángulo esférico definido por las direcciones del polo norte P_Q de la Tierra, del polo norte P_Q' del planeta y de la Tierra T vista desde el planeta, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \cos D_E \text{sen}(A_E - \phi) &= \text{sen } d_o \cos d \cos(a_o - a) - \cos d_o \text{sen } d \\ \cos D_E \cos(A_E - \phi) &= \cos d \text{sen}(a_o - a) \\ \text{sen } D_E &= -\cos d_o \cos d \cos(a_o - a) - \text{sen } d_o \text{sen } d \end{aligned} \right\} \quad (38.5)$$

$$\cos D_E \text{sen } P = \cos d_o \text{sen}(a_o - a) \quad (39.5)$$

Si designamos por λ la longitud planetográfica del nodo N en la época t de las efemérides, dicho argumento viene dado por una relación de la forma

$$\lambda = \lambda_o + \omega(t - t_o) \quad (40.5)$$

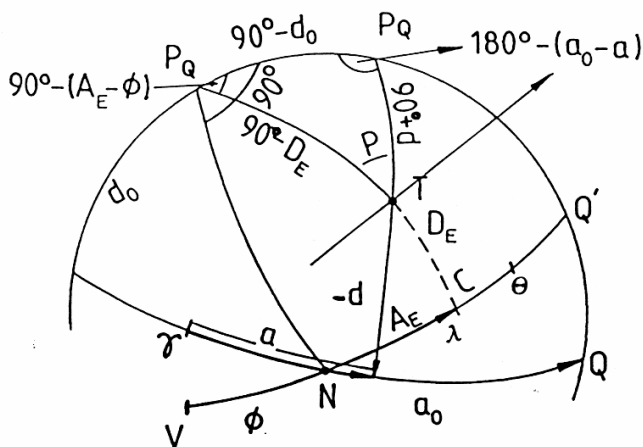


FIG. 13.5

en la cual λ_o es el valor de λ para una época $t = t_o$ y ω la velocidad angular de rotación del planeta (en caso de presentarse rotación diferencial se calculan λ y λ_o para cada sistema). Luego, si C es la intersección del meridiano central $P_Q'T$ con el ecuador Q' del planeta (Fig. 13.5), siendo

$$\widehat{VC} + \widehat{OC} = \widehat{VN} + \widehat{NO}$$

una vez calculados $A_E - \phi$ y D_E mediante (38.5) y λ mediante (40.5), obtendremos, sustituyendo:

$$A_E + \widehat{OC} = \phi + \widehat{NO}$$

$$A_E - \phi = \widehat{NO} - \widehat{OC} = \lambda - L_o$$

de donde

$$\left. \begin{aligned} L_o &= \lambda - (A_E - \phi) \\ B_o &= D_E \end{aligned} \right\} \quad (41.5)$$

que son las coordenadas planetográficas del centro del disco geométrico.

Además (39.5) suministrará el ángulo de posición P del polo norte, completando con ello el aspecto geocéntrico del disco aparente del planeta.

Conocidas L_0 , B_0 y P para la época de la observación, es ya inmediata la determinación de las coordenadas planetográficas L y B de un punto M de la superficie en función de su distancia angular ρ al centro T del disco y de su ángulo de posición θ , ambos medidos con el micrómetro (Fig. 14.5). Si s es el semidiámetro aparente del disco, en vista de la pequeñez de ρ y s , el ángulo σ que en el centro del planeta subtenden los radios de M y T (ángulo de ρ) viene dado con mucha aproximación por

$$\text{sen } \sigma = \frac{\rho}{s} \quad (42.5)$$

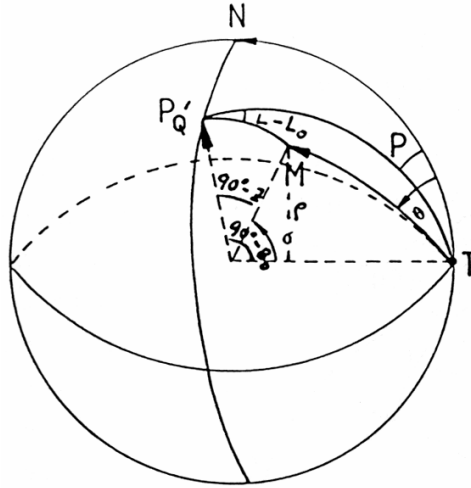


FIG. 14.5

Por tanto, conocidos σ y θ del triángulo esférico MTP_Q , se deduce:

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos(L - L_0) &= \text{sen } B_0 \text{sen } \sigma \cos(\theta - P) - \cos B_0 \cos \sigma \\ \cos B \text{sen}(L - L_0) &= \text{sen } \sigma \text{sen}(\theta - P) \\ \text{sen } B &= \cos B_0 \text{sen } \sigma \cos(\theta - P) + \text{sen } B_0 \cos \sigma \end{aligned} \right\} \quad (43.5)$$

5.4.2 Sol

Podemos aplicar la teoría desarrollada en el apartado anterior al caso del Sol, para el cual se conocen también su eje y su periodo de rotación. Análogamente a cuanto hemos hecho, se considera sobre el mismo un sistema de *coordenadas heliográficas*: *longitud heliográfica* L , contada a partir de un cierto meridiano origen O en el sentido de la rotación, y *latitud heliográfica* B .

Las coordenadas heliográficas L_0 y B_0 del centro del disco solar y el ángulo de posición P de su polo norte se obtienen en función de la longitud geocéntrica $\odot$ del Sol (que figura día a día en los anuarios) y de la longitud heliográfica λ del nodo ascendente N del ecuador solar sobre la eclíptica:

$$\lambda = \lambda_0 - \omega(t - t_0) \quad (44.5)$$

donde $\lambda_0 = 0$ para $t_0 = 1.5$ enero 1854 y $\omega = 14^\circ.184/\text{día}$.

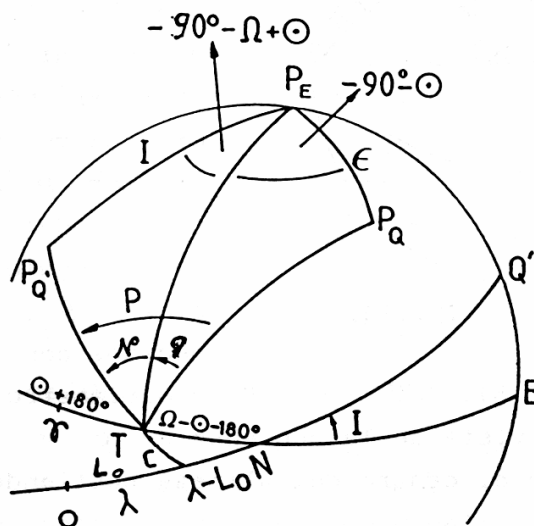


FIG. 15.5

Sean (Fig.15.5) Ω la longitud heliocéntrica del nodo ascendente N, I la inclinación del ecuador solar Q' sobre la eclíptica E , P_E el polo de la eclíptica, P_Q el polo del ecuador solar, P el polo del ecuador de la Tierra, C la intersección del meridiano central con el ecuador solar, T el centro del disco solar y ϵ la oblicuidad de la eclíptica. En el triángulo rectángulo NCT se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \tan(L_0 - \lambda) &= \tan(\odot - \Omega) \cos I \\ \sin B_0 &= \sin(\odot - \Omega) \sin I \end{aligned} \right\} \quad (45.5)$$

Además, de los triángulos rectiláteros $P_E P_Q' T$ y $P_E P_Q T$ se deducen los ángulos p y q tales que $p + q = P$:

$$\left. \begin{aligned} \tan p &= -\cos(\odot - \Omega) \tan I \\ \tan q &= -\cos \odot \tan \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (46.5)$$

Conocidos L_0 , B_0 y P para la época de la observación, se procede como en el caso de un planeta para determinar las coordenadas heliográficas L y B de una mancha solar M , de coordenadas polares ρ y θ (Fig. 14.5); como antes, se aplican las fórmulas (42.5) y (43.5), teniendo en cuenta que cambia de signo la segunda de las (43.5) por contarse las longitudes heliográficas en sentido contrario a las planetográficas.

En particular, al observar una protuberancia en el borde solar es $\rho = s$ y $\sigma = 90^\circ$, con lo cual las (43.5) se reducen a:

$$\left. \begin{aligned} \tan(L - L_0) &= \operatorname{cosec} B_0 \tan(P - \theta) \\ \sin B &= \cos B_0 \cos(P - \theta) \end{aligned} \right\} \quad (47.5)$$

5.4.3 Aspecto geocéntrico de la iluminación de un planeta por el Sol

El aspecto geocéntrico de la iluminación de un planeta por el Sol depende del ángulo que hemos llamado ángulo de fase.

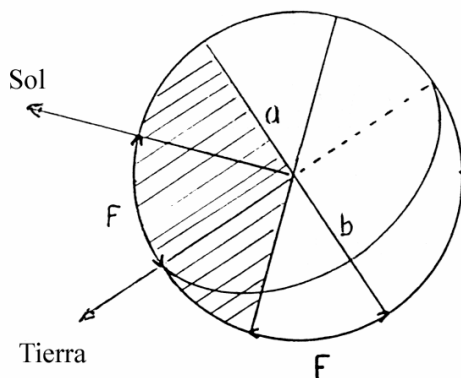


FIG. 16.5

La línea de separación entre el *limbo brillante* y el *limbo oscuro*, llamada *terminador*, se nos presenta como media elipse si despreciamos el achatamiento del planeta. El ángulo formado por los planos del terminador y el disco geométrico es el ángulo de fase F (Fig. 16.5); luego, si recordamos la razón de afinidad existente entre una elipse y su círculo principal, la relación entre las áreas del limbo brillante y del disco geométrico valdrá

$$k = \frac{\frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi ab}{2}}{\pi a^2} = \frac{1 + \frac{a}{b}}{2} = \frac{1 + \cos F}{2} = \cos^2 \frac{F}{2} \quad (48.5)$$

Dicha relación k es la *fase* del planeta y varía entre 1 y 0 mientras que el ángulo de fase lo hace entre 0° y 180° ; para $\frac{1}{2} < k < 1$ es $90^\circ > F > 0^\circ$ (se ve de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ disco iluminado) y la parte iluminada tiene forma *gibosa*; para $0 < k < \frac{1}{2}$ es $180^\circ > F > 90^\circ$ (se ve de 0 a $\frac{1}{4}$ de disco iluminado) y la parte iluminada tiene forma de *lúnula*; para $k = \frac{1}{2}$ hay *dicotomía*.

Según vimos en 5.3.2 si el planeta es superior presenta máximo ángulo de fase en cuyo caso es por (36.5):

$$\cos F = \frac{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}{r_2}$$

y por (48.5), teniendo en cuenta que al aumentar F disminuye k , obtendremos un valor de la *fase mínima* dado por:

$$k_m = \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_1^2}}{2r_2} \quad (49.5)$$

en el supuesto de órbitas circulares.

Para completar la definición de limbo brillante, además del ángulo de fase F debemos calcular también el ángulo de posición Θ del Sol, que a su vez suministra el ángulo de posición $\Theta \pm 90^\circ$ de la *línea de los cuernos* CC' (Fig. 17.5) y el ángulo de posición $\Theta + 180^\circ$ del *defecto de iluminación*. En dicho cálculo distinguiremos dos casos, según se conozcan o no el eje y el periodo de rotación del planeta.

Si se conocen el eje y el periodo de rotación del planeta, el ángulo de fase F y el de posición Θ se obtienen fácilmente calculando el ángulo de posición P del polo norte y las coordenadas planetocéntricas A_E y D_E de la Tierra y A_S y D_S del Sol; pues, en efecto, una vez calculados, en el triángulo esférico $STP_{Q'}$ (Fig. 17.5b) se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } F \cos Q &= \text{sen } D_E \cos D_S \cos(A_E - A_S) + \cos D_E \text{sen } D_S \\ \text{sen } F \text{sen } Q &= \cos D_S \text{sen}(A_E - A_S) \\ \cos F &= \cos D_E \cos D_S \cos(A_E - A_S) + \text{sen } D_E \text{sen } D_S \end{aligned} \right\} \quad (50.5)$$

$$\Theta = P + Q \quad (51.5)$$

Los primeros, P , A_E y D_E , se han deducido ya anteriormente mediante las fórmulas (38.5) y (39.5) y las segundas, A_S y D_S , se determinan introduciendo como ángulo auxiliar la longitud planetocéntrica L_S del Sol, contada a lo largo de la órbita E' del planeta a partir de su punto vernal V (Fig. 18.5). Sean: Ω e i la longitud del nodo ascendente J y la inclinación de la órbita E' del planeta con respecto a la eclíptica E , Ψ la longitud planetocéntrica de dicho nodo, l y l' las longitudes heliocéntricas del planeta sobre la eclíptica y sobre la órbita, respectivamente. Se tiene:

$$\Omega + u = l' + 180^\circ$$

$$\Psi + u = L_S$$

y, por tanto, eliminando u :

$$L_S = l' - \Omega + \Psi + 180^\circ \quad (52.5)$$

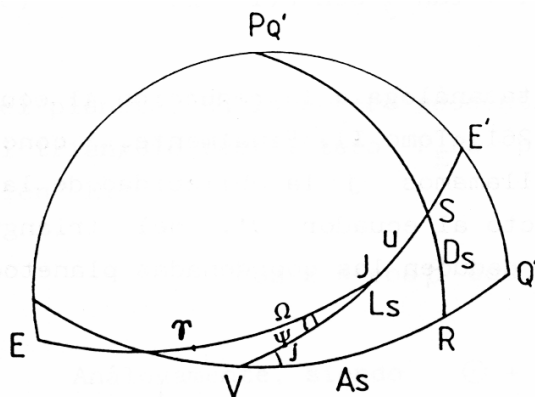


FIG. 18.5

Siendo i pequeño, l' suele calcularse en función de l (que figura en los anuarios) mediante la fórmula:

$$l' = l + \tan \frac{2i}{2} \sin 2(l - \Omega) \quad (53.5)$$

reducción a la órbita análoga a la reducción al ecuador (recordar 4.7.2). Finalmente, conocido L_s por (52.5), si llamamos j la oblicuidad de la órbita E' con respecto al ecuador Q' , del triángulo rectángulo VRS se deducen las coordenadas planetocéntricas del Sol:

$$\left. \begin{aligned} \tan A_s &= \tan L_s \cos j \\ \sin D_s &= \sin L_s \sin j \end{aligned} \right\} \quad (54.5)$$

Si no se conocen el eje y el periodo de rotación del planeta, el ángulo de fase F y el de posición Θ se calculan recurriendo a los siguientes datos que figuran en los anuarios: $\odot$ longitud geocéntrica del Sol; λ, β coordenadas eclípticas geocéntricas del planeta; l, b coordenadas eclípticas heliocéntricas del planeta; α, δ coordenadas ecuatoriales geocéntricas del Sol; a ascension recta geocéntrica del planeta. En la esfera geocéntrica de la Fig. 19.5, el triángulo rectilátero P_EPS proporciona la elongación E :

$$\cos E = \cos \beta \cos (\odot - \lambda) \quad (55.5)$$

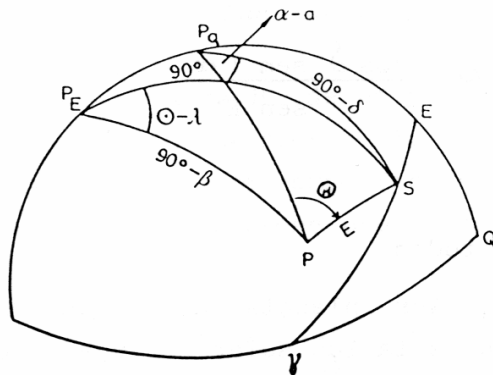


FIG. 19.5

Análogamente, siendo $\odot + 180^\circ$ la longitud heliocéntrica de la Tierra, en una esfera heliocéntrica se obtendría el ángulo G , Tierra-Sol-Planeta:

$$\cos G = -\cos b \cos (\odot - l) \quad (56.5)$$

Conocidos E y G mediante (55.5) y (56.5), el ángulo de fase vale:

$$F = 180^\circ - (E + G) \quad (57.5)$$

Por último, del triángulo P₀PS (Fig. 19.5) se deduce el ángulo de posición del Sol:

$$\operatorname{sen} \Theta = \frac{\cos \delta \operatorname{sen}(\alpha - a)}{\operatorname{sen} E} \quad (58.5)$$

5.5 Brillos y magnitudes

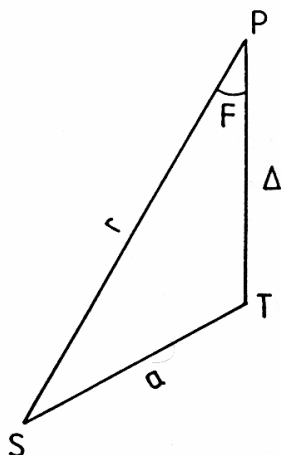


FIG. 20.5

Como sabemos, los planetas no tienen luz propia y la que nos envían es la luz solar reflejada. Cambiando algo las notaciones anteriormente utilizadas (Fig. 20.5) con el objeto de ajustarlas a las empleadas en los anuarios, veamos algunas definiciones:

Intensidad luminosa I de un planeta P, situado a una distancia r del Sol S, es la cantidad de luz que por unidad de superficie y de tiempo envía dicho planeta en una dirección de ángulo de fase F , y viene dada por la fórmula:

$$I = C \frac{f(F)}{r^2} \quad (59.5)$$

siendo C una constante característica del planeta y $f(F)$ una cierta *función de fase* tal que $f(0)=1$ y $f(\pi)=0$.

Brillo aparente B de un planeta P, situado a una distancia Δ de la Tierra T, es la cantidad de luz que por unidad de superficie y de tiempo recibimos de dicho planeta y viene dado por la fórmula:

$$B = \frac{I}{\Delta^2} = C \frac{f(F)}{r^2 \Delta^2} \quad (60.5)$$

Este brillo aparente B suele medirse por la sensación que experimenta el ojo, bajo la acción de la excitación lumínica, a través de la denominada *magnitud aparente m*. Según la ley fisiológica de Weber-Fechner, la variación de la sensación m es directamente proporcional a la variación relativa de la excitación B :

$$dm = -k \frac{dB}{B} \quad (k > 0)$$

e integrando:

$$m - m_o = k \ln \frac{B_o}{B} = k' \log \frac{B_o}{B} \quad (k' > 0) \quad (61.5)$$

(obsérvese que cuanto mayor es el brillo menor es la magnitud). Para acomodar la escala de magnitudes a la utilizada en la antigüedad, se ha convenido en que a una diferencia de magnitudes igual a 5 corresponda una razón entre los brillos igual a 100 y, por tanto, según (61.5):

$$5 = k' \log 100 = 2k'$$

Llevando a (61.5) el valor de k' se obtiene la *fórmula de Pogson*:

$$m - m_o = 2.5 \log \frac{B_o}{B} \quad (62.5)$$

Si en la anterior fórmula (62.5) sustituimos B por su valor (60.5), englobando los términos constantes, se tiene:

$$m = g + 5 \log(r\Delta) - 2.5 \log f(F) \quad (63.5)$$

siendo g la magnitud aparente que tendría el planeta para $r=\Delta=1$ y $F=0$ ($f(0)=1$). En el caso de los asteroides, dado que éstos se observan siempre en las cercanías de la oposición, suele tomarse $F = 0$ y, por tanto:

$$m = g + 5 \log(r\Delta) \quad (64.5)$$

Si el objeto celeste se comporta como un espejo esférico (así ocurre con algunos satélites artificiales), se demuestra que en dicha *reflexión especular* la intensidad luminosa no depende del ángulo de fase y , por consiguiente, también puede aplicarse la fórmula (64.5). Si se trata de un cometa se supone que su intensidad luminosa es inversamente proporcional a una potencia $2x$ de su distancia r al Sol, y por tanto:

$$m = g + 5(x \log r + \log \Delta) \quad (65.5)$$

debiendo determinarse g y x por la observación.

En primera aproximación, durante mucho tiempo se ha venido tomando como función de fase $f(F)$ la propia fase k definida por (48.5):

$$f(F) = \frac{1 + \cos F}{2} = \cos^2 \frac{F}{2} \quad (66.5)$$

que cumple las condiciones $f(0) = 1$ y $f(\pi) = 0$. Dicha aproximación constituye una interpretación muy elemental del fenómeno, pues equivale a suponer que el planeta se comporta como un espejo plano en el cual vamos descubriendo un mayor o menor porcentaje de su superficie. No obstante, en el caso de Venus, tomando circulares las órbitas de la Tierra y del planeta, la hipótesis (66.5) conduce a unas condiciones de máximo brillo aparente que concuerdan bastante bien con la observación.

En segunda aproximación, suele suponerse que el planeta es esférico y refleja la luz solar por *reflexión difusa*, en cuyo caso se demuestra que la función de fase vale:

$$f(F) = \frac{1}{\pi} [\sin F + (\pi - F) \cos F] \quad (67.5)$$

y cumple las condiciones $f(0) = 1$ y $f(\pi) = 0$.

La constante C que figura en las fórmulas (59.5) y (60.5) es ahora directamente proporcional al cuadrado del radio del planeta y a su *albedo* (véase Tabla III), razón entre la energía luminosa que el planeta difunde en todas direcciones y la que recibe del Sol. Si las órbitas se toman circulares, la hipótesis (67.5) nos lleva ahora a una ecuación trascendente en F y $\tan F$ para obtener el máximo brillo aparente.

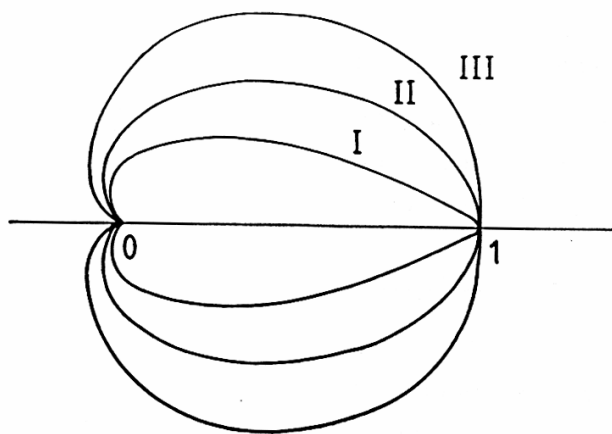


FIG. 21.5

Empíricamente, si para cada planeta se representa, en un sistema de coordenadas polares, la función $f(F)$ tomando f como radio vector y F como argumento se obtiene una curva llamada *indicatriz de difusión* del planeta (Fig. 21.5). Exceptuando la correspondiente a Venus, las indicatrices I de todos los demás planetas presentan un punto anguloso para $F = 0$; no así la de Venus, comprendida entre las curvas II definida por (67.5) y III definida por (66.5); obsérvese que en todas ellas aparece un punto de retroceso para $F = \pi$. Llevando a (63.5) la función $f(F)$ determinada experimentalmente mediante la indicatriz, desarrollando el logaritmo, se obtienen, para cada planeta, las fórmulas de Müller que figuran en los anuarios:

$$m = g + 5 \log(r\Delta) + aF + bF^2 + cF^3 \quad (68.5)$$

En el caso de planetas con anillo debe tenerse en cuenta además la influencia que ejercen éstos sobre su brillo aparente.

TABLA I. DATOS FÍSICOS DEL SOL Y DE LOS PLANETAS

Nombre	Símbolo	Radio ecuatorial (Km)	Achatamiento	Densidad (agua=1)	Masa (Tierra=1)	Periodo de rotación			Albedo
						d	h	M	
Sol		696000	0	1.4	333432	23	09		
Mercurio		2500	0	5.1	1.05	59	15		0.06
Venus		6200	0	5.3	0.81	243			0.76
La Tierra		6378	1/297	5.5	1.0		23	56	0.39
Marte		3380	1/192	4.0	0.11		24	37	0.15
Júpiter		71500	1/15	1.3	317.9		9	50	0.51
Saturno		60500	1/10	0.7	95.2		10	34	0.50
Urano		25500	1/44	1.3	14.6		17	14	0.66
Neptuno		24700	1/58	1.7	17.3		15	50	0.62
Plutón		1100	-	2.2	0.0024		6	30	0.16

TABLA II - SATÉLITES

Planeta	Satélite	Descubridor y año	Distancia al planeta (en Rp)	Periodo de revolución sidérea			Excentricidad de la órbita	Inclinación de la órbita del sat. respecto al plano del ec. planeta	Diámetro (en km)
				d.	h.	m.			
La Tierra	La Luna		60.3	27	7	43	0.05	28° 35'	3476
								18° 19'	
Marte	Fobos	Hall 1877	2.8	0	7	39	0.02	1° 8'	15
	Deimos	“ “	7.0	1	6	18		1° 46'	
Júpiter	I Io	Galileo 1610	5.9	1	18	28	0.004	2.4	3630
	II Europa	Galileo 1610	9.4	3	13	14			
	III Ganimedes	Galileo 1610	15.0	7	3	43	0.001	11.0	5262
	IV Calisto	Galileo 1610	26.4	16	16	32			
	V Almatea	Barnard 1892	2.5	0	11	57	0.002	27.3	240
	VI Himalia	Perrine 1904	161	251					
	VII Elara	Perrine 1905	165	260			0.16	38.0*	170
	VIII Pasífe	Melote 1908	330	735					
	IX Sinope	Nicholson 1914	338	758			0.21	27° 48.0*	76
	X Lisitea	Nicholson 1938	165	259	5	17			
							0.38	* 24	50
							0.28	* 145	36
							0.11	153	36

XI Carmé	Nicholson 1938	315	692			0.21	29	*	40
XII Ananke	Nicholson 1951	291	631			0.17	164	*	30
XIII Leda	Kowal 1974	156	240			0.15	147	4.0*	16
XIV Tebe	Voy. 1 1979	3.1	0	16	11	0.015	26	48.0	80
XV Adrastea	Voy. 1 1979	1.8	0	7	9	0.0	0	0	40
XVI Metis	Voy. 1 1979	1.9	0	7	4	0.0	0	0	35
S/1999 J1	Spacewatch 1999	337	759			0.28	147	8.0	7
S/1975 J1	SJFM 1975/2000	105	130			0.24	43	4.0	9
S/2000 J2	SJFM 2000	332	751			0.24	165	13.0	5
S/2000 J3	SJFM 2000	283	585			0.22	149	40.2	5
S/2000 J4	SJFM 2000	324	723			0.27	164	57.0	3
S/2000 J5	SJFM 2000	296	625			0.23	148	41.4	4
S/2000 J6	SJFM 2000	323	719			0.26	165	0.0	4
S/2000 J7	SJFM 2000	293	617			0.22	148	43.8	7
S/2000 J8	SJFM 2000	334	758			0.43	152	43.2	6
S/2000 J9	SJFM 2000	326	730			0.25	165	12.3	5
S/2000 J10	SJFM 2000	327	731			0.24	165	21.0	4
S/2000 J11	SJFM 2000	176	287			0.25	28	16.2	4

Saturno	I Mimas	Herschel 1789	3.1	0	22	37	0.02	1	31.0	400
	II Encelado	Herschel 1789	3.9	1	8	53	0.01		1.4	500
	III Tetis	Cassini 1684	4.9	1	21	18	0.00	1	52.0	1050
	IV Dione	Cassini 1684	6.3	2	17	41	0.01	0	1.2	1120
	V Rea	Cassini 1672	8.8	4	12	25	0.00		20.5	1530
	VI Titán	Huygens 1655	20.5	15	2	41	0.03	0	18.3	5150
	VII Hiperión	Bond 1848	24.8	21	6	38	0.10	0	24.0	300
	VIII Japeto	Cassini 1671	59.7	79	7	56	0.03	14	42.0	1450
	IX Febe	Pickering 1898	216.8	550	10	35	0.16	150		220
	X Jano	Dollfus 1966	2.5	0	16	33	0.01	0	8.0	200
	XI Epimeteo	Fountain 1978	2.5	0	16	41	0.01	0	20.0	140
	XII Helena	Lacques 1980	6.3	2	17	41	0.01	0	0	33
	XIII Teleso	Smith 1980	4.9	1	21	19	—	—	—	30
	XIV Calipso	Pascu 1980	4.9	1	21	19	—	—	—	26
	XV Atlas	Voy. 1 1980	2.2	0	14	26	0.00	0	18.0	28
	XVI Prometeo	Voy. 1 1980	2.3	0	14	43	0.01	0	0.0	104
	XVII Pandora	Voy. 1 1980	2.3	0	15	06	0.01	0	0	88
	XVIII Pan	Showalter 1990	2.2	0	13	48	—	—	—	20

	S/2000 S1	Gladman 2000	384	1314			0.33	173	7.0	16
	S/2000 S2	Gladman 2000	252	687			0.37	44	58.0	20
	S/2000 S3	Gladman 2000	296	869			0.27	45	49.2	32
	S/2000 S4	KG 2000	303	926			0.54	33	30.6	14
	S/2000 S5	Gladman 2000	189	449			0.33	45	51.0	15
	S/2000 S6	KG 2000	190	453			0.32	46	38.4	10
	S/2000 S7	GK 2000	334	1068			0.45	175	51.6	6
	S/2000 S8	KG 2000	260	731			0.27	153	1.0	6
	S/2000 S9	GK 2000	307	940			0.22	167	25.2	6
	S/2000 S10	KG 2000	290	460			0.47	34	44.4	8
	S/2000 S11	Holman 2000	272	783			0.48	34	1.0	26
	S/2000 S12	GK 2000	328	1038			0.12	175	50.0	6
Urano	I Ariel	Lassell 1851	7.3	2	12	29	0.01	0	18.0	1158
	II Umbriel	Lassell 1851	10.2	4	3	28	0.01	0	24.0	1172
	III Titania	Herschel 1787	16.8	8	16	56	0.02	0	6.0	1580
	IV Oberón	Herschel 1787	22.4	13	11	07	0.00	0	6.0	1524
	V Miranda	Kuiper 1948	5.2	1	9	56	0.01	4	12.0	480

	VI Cordelia	Voy. 2 1986	1.9	0	8	02	<0.001	0	6.0	26
	VII Ofelia	Voy. 2 1986	2.1	0	9	02	0.01	0	6.0	30
	VIII Bianca	Voy. 2 1986	2.3	0	10	26	<0.001	0	12.0	42
	IX Cresida	Voy. 2 1986	2.4	0	11	06	<0.001	0	0.0	62
	X Desdémona	Voy. 2 1986	2.5	0	11	22	<0.001	0	12.0	54
	XI Julieta	Voy. 2 1986	2.5	0	11	50	<0.001	0	6.0	84
	XII Porcia	Voy. 2 1986	2.6	0	12	19	<0.001	0	6.0	108
	XIII Rosalinda	Voy. 2 1986	2.7	0	13	24	<0.001	0	18.0	54
	XIV Belinda	Voy. 2 1986	2.9	0	14	58	<0.001	0	0.0	66
	XV Puck	Voy. 2 1985	3.4	0	18	17	<0.001	0	18.0	154
	XVI Calibán	Gladman 1997	283	579			0.16	140	52.8	60
	XVII Sycorax	Gladman 1997	477	1283			0.52	159	24.0	120
	XVIII Próspero	Holman 1999	642	1993			0.44	151	54.6	30
	XIX Setebos	Kavelaars 1999	683	2202			0.59	158	10.2	30
	XX Esteban	Gladman 1999	313	677			0.23	144	3.6	20
Neptuno	I Tritón	Lassell 1846	14.2	5	21	03	<0.001	157	20.4	2706
	II Nereida	Kuiper 1949	217	360	3	16	0.75	27	36.0	340

	III Návade	Voy. 2 1989	1.95	0	7	4	<0.001	4	44.4	58
	IV Talasa	Voy. 2 1989	2.02	0	7	28	<0.001	0	13.0	80
	V Despina	Voy. 2 1989	2.12	0	8	2	<0.001	0	4.2	148
	VI Galatea	Voy. 2 1989	2.50	0	10	17	<0.001	0	3.0	158
	VII Larisa	Voy. 2 1989	2.97	0	13	19	<0.001	0	12.0	190
	VIII Proteo	Voy. 2 1989	4.75	1	2	56	<0.001	0	33.0	418
Plutón	I Caronte	Christy 1978	11.7	6	9	18	<0.001	99		1200

* Valor referido al plano orbital del planeta

SJFM son las iniciales de los descubridores: Sheppard, Jewitt, Fernández, Magnier

KG las de Kavelaars y Gladman

GK las de Gladman y Kavelars

TABLA III. ANILLOS DE SATURNO

	ancho radial (Km)	Distancia al centro Rs	Observador
Anillo D (borde interior)		1.11	Guérin-Voyager
Anillo C (borde interior)		1.23	Bond
División de Maxwell	253	1.45	
Anillo B (borde interior)		1.52	Galileo
Anillo B (borde exterior)		1.95	
División de Huygens	430	1.95	Voyager
División de Cassini	4540	1.99	Cassini
Anillo A (borde interior)		2.02	
División de Encke	328	2.21	Encke
División de Keeler	31	2.26	Voyager
Anillo A		2.27	
Anillo F		2.33	Pioneer
Anillo G		2.8	Pioneer-Voyager
Anillo E (borde interior)		3	Feibel-Voyager
Anillo E (borde exterior)		8	Voyager

Nota: 1Rs = 60330Km

TABLA IV - ELEMENTOS ECLÍPTICOS DE LOS PLANETAS

Nombre	Q			Ω			i			P			L ₀			E		
	o	i	u	o	i	u	o	i	u	a	d	h	o	i	u	o	i	u
Mercurio	48	19	52	77	27	21	7	0	18		88		252	15	04	0		0
Venus	76	40	48	131	33	50	3	23	41		224	15	181	58	48	177		24
La Tierra				102	56	13				1	0	0	106	27	58	23		27
Marte	49	33	29	336	03	36	1	50	59	1	321	18	355	25	59	25		07
Júpiter	100	27	50	14	19	52	1	18	16	11	312	20	34	21	04	3		07
Saturno	113	39	58	93	03	25	2	29	20	29	154	14	50	04	30	26		45
Urano	74	00	22	173	00	18	0	46	22	84	272	18	314	03	18	97		52
Neptuno	131	47	45	48	07	26	1	46	12	163	264	15	304	20	56	29		34
Plutón	110	17	52	224	08	10	17	08	31	248	7	13	238	44	38	119		36

TABLA V - REVOLUCIONES SINÓDICAS DE LOS PLANETAS

Planetas	n	r_B	a	S
Mercurio	$-\infty$	0.4	0.4	115 ^d .88
Venus	0	0.7	0.7	583.92
La Tierra	1	1.0	1.0	-
Marte	2	1.6	1.5	779.93
Asteroides	3	2.8	-	-
Júpiter	4	5.2	5.2	398.88
Saturno	5	10.0	9.6	378.08
Urano	6	19.6	19.2	369.66
Neptuno	7	38.8	30.1	367.48
Plutón	8	77.2	39.5	366.73

Capítulo 6

DETERMINACIÓN DE ÓRBITAS

Entre los numerosos problemas que resuelve la Mecánica Celeste está el de la determinación de las órbitas que describen los cuerpos celestes, problema que consiste en establecer una serie de fórmulas que permiten hallar los elementos fundamentales o parámetros que definen la órbita. Su interés práctico para la Astronomía se basa en el hecho de que continuamente se descubren pequeños planetas y cometas cuyas órbitas se han de calcular, de que sirve para el cálculo de órbitas de meteoros y actualmente de que se aplica al cálculo de órbitas de satélites artificiales y vehículos espaciales.

Sabemos que, en primera aproximación, los cuerpos del sistema solar se mueven bajo la influencia de fuerzas gravitatorias que actúan de acuerdo con la ley de Newton, y decimos en primera aproximación porque en realidad deberíamos introducir correcciones relativistas, muy pequeñas en la mayoría de los casos, o correcciones debidas a otras causas, por ejemplo, en el caso de los cometas, a la presión de radiación solar o al descenso de su masa debido al desprendimiento de gases de su núcleo, producto de su intenso calentamiento al acercarse al Sol, razones por las cuales el movimiento de algunos cometas se desvía notablemente del predicho por una teoría basada únicamente en la ley de la gravitación universal.

Por otra parte, la forma, la estructura interna y la rotación de los cuerpos celestes influye directamente en su movimiento de traslación a lo largo de sus órbitas. En realidad, sólo si los cuerpos fueran esféricos y homogéneos o si estuvieran constituidos por capas esféricas concéntricas de distintas densidades, se podría considerar que toda su masa está concentrada en su centro y que los cuerpos se atraen entre sí como puntos materiales. Sin embargo, las distancias entre los cuerpos del sistema solar son muy grandes comparadas con sus dimensiones y por eso usualmente los consideramos como puntos materiales y en una primera aproximación se supone que se mueven únicamente bajo la atracción del Sol sin estar sujetos a la influencia de ningún otro cuerpo. Si se quiere aproximar más, es necesario tener en cuenta las perturbaciones debidas a las atracciones de los grandes planetas, sobre todo en el cálculo de órbitas cometarias.

En general, para resolver el problema de la determinación de órbitas se hallan, en primer lugar, los elementos de una *órbita preliminar* sin tener en cuenta las perturbaciones (solución del problema de los dos cuerpos). Para ello se utilizan tres o cuatro observaciones del cuerpo en estudio que cubran generalmente un intervalo de varios días o semanas. Es interesante obtener una órbita preliminar de un cometa o de un pequeño planeta, por ejemplo, cuando se han obtenido sus primeras observaciones, para poder predecir su posición para futuras observaciones. Obtenida la órbita preliminar y después de una larga serie de observaciones, se puede corregir aquélla, lo cual se lleva a cabo en la mayoría de los casos sin tener aun en cuenta las perturbaciones. Finalmente, se calcula la *órbita definitiva*, entendiendo como tal aquélla cuyos puntos coinciden, sin mucho error, con las observaciones (*O-C* muy pequeño). Para calcular la órbita definitiva es casi siempre necesario tener en cuenta las perturbaciones, sobre todo las causadas por los planetas principales.

Hallada la órbita de un cuerpo celeste no es difícil calcular sus efemérides, las cuales pueden determinarse para una serie de años a fin de prever la posibilidad de redescubrir algún pequeño planeta o algún cometa periódico, en cuyo caso es necesario tener en cuenta las perturbaciones causadas por los planetas.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento perturbado correspondientes al problema de tres o más cuerpos, a diferencia del problema de dos cuerpos, no admiten solución en forma finita. Se resuelven en forma aproximada ya sea con la ayuda de desarrollos en serie o por integración numérica. La solución en forma de desarrollos en serie, que dan una expresión analítica para las perturbaciones, ofrece una representación completa del carácter del movimiento del cuerpo durante un tiempo razonablemente largo; pero, en cambio, es de difícil aplicación a la mayoría de pequeños planetas y a casi todos los cometas. Los métodos numéricos para el cálculo de las perturbaciones son fáciles de aplicar y seguros pero tienen el inconveniente de que las perturbaciones sólo se pueden calcular para el tiempo limitado por las observaciones de que se dispone; es decir, si se precisa hallar perturbaciones para una serie de años el trabajo resulta extremadamente penoso. A pesar de ello, los métodos numéricos para el cálculo de perturbaciones constituyen una parte importante de la teoría del movimiento de los cuerpos celestes.

En esencia casi todos los métodos analíticos utilizados en el cálculo de órbitas derivan de los de Laplace (1780), Olbers (1797) y Gauss (1809), que nos proponemos estudiar aquí, teniendo en cuenta las modificaciones que han ido sufriendo en el transcurso del tiempo, subsiguientes al desarrollo de la teoría de la determinación de órbitas.

6.1 Introducción

El movimiento de un planeta o de un cometa alrededor del Sol, en primera aproximación, depende de seis constantes que pueden ser las coordenadas rectangulares del cuerpo en el tiempo t y las derivadas primeras de estas coordenadas ($\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$) o también cantidades ligadas a las precedentes como son los seis elementos que definen la órbita (Ω , ω , i , a , e , T), las constantes gaussianas A , B , C , a , b , c , o los elementos vectoriales $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$.

Tal solución da una representación satisfactoria del movimiento real del cuerpo en cuestión durante un intervalo lo suficientemente corto de tiempo para que se pueda despreciar la acción de los otros planetas.

Es fácil ver que tres observaciones verificadas en tres instantes distintos, t_1 , t_2 , t_3 , son teóricamente suficientes para encontrar los seis elementos de la órbita.

Estas tres observaciones dan seis cantidades independientes, por ejemplo las coordenadas ecuatoriales geocéntricas del cuerpo A_i , D_i ($i = 1, 2, 3$), que relacionamos con dichos seis elementos. Sean, en efecto, S el Sol, T el centro de la Tierra y P el cuerpo celeste (planeta, cometa, etc.) del cual queremos determinar su órbita (Fig. 1.6).

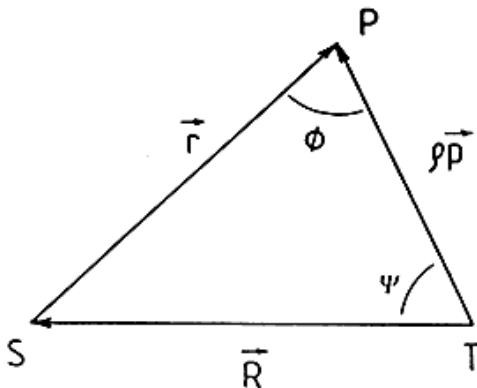


FIG.1.6

Llamemos ρ a la distancia del centro de la Tierra a dicho cuerpo celeste, $\vec{p}$ al vector unitario en la dirección de TP con origen en T , $\vec{R}$ al vector de posición geocéntrico del Sol.

$\vec{R}$ viene tabulado en los Anuarios y $\vec{p}$ se obtiene por observación, de tal manera que, si suponemos, como hemos dicho, que trabajamos en coordenadas ecuatoriales geocéntricas, es

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \cos D \cos A \\ \cos D \sin A \\ \sin D \end{bmatrix}$$

Por otra parte de la Fig. 1.6 deducimos:

$$\rho \vec{p} = \vec{r} + \vec{R} \quad (1.6)$$

fórmula en la que quedan como incógnitas ρ y $\vec{r}$.

Supongamos que efectuamos tres observaciones $\vec{p}_i$ en tres épocas distintas t_i ($i = 1, 2, 3$). Para cada época tenemos un $\vec{R}_i(x_i, y_i, z_i)$ y la ecuación (1.6) da lugar a:

$$\rho_i \vec{p}_i = \vec{r}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

que constituye un sistema de nueve ecuaciones escalares

$$\left. \begin{aligned} \rho_i \cos D_i \cos A_i &= x_i + X_i \\ \rho_i \cos D_i \sin A_i &= y_i + Y_i \\ \rho_i \sin D_i &= z_i + Z_i \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

con doce incógnitas: tres ρ_i y nueve x_i, y_i, z_i . Pero, estas últimas se expresan por los elementos de la órbita (seis) y los instantes de la observación (tres cantidades conocidas), de modo que hay tantas incógnitas independientes como ecuaciones.

Para resolver el problema es necesario, sin embargo, introducir otras relaciones. La forma de introducirlas da lugar a los distintos métodos de cálculo de órbitas.

6.2 Método de Laplace

El método de Laplace consiste en determinar por medio de las tres A_i y las tres D_i ($i = 1, 2, 3$) observadas, las coordenadas heliocéntricas $\vec{r}$ y las componentes de la velocidad $\dot{\vec{r}}$ del cuerpo en una época dada (por ejemplo, el momento de la segunda observación) y obtener después sus elementos orbitales a partir de $\vec{r}$ y $\dot{\vec{r}}$, teniendo en cuenta que se mueve bajo la acción de una fuerza conocida (atracción solar).

Supongamos realizada una observación $\vec{p}$ y derivemos dos veces la relación (1.6) con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}} &= \rho \dot{\vec{p}} + \dot{\rho} \vec{p} \\ \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}} &= \rho \ddot{\vec{p}} + 2\dot{\rho} \dot{\vec{p}} + \ddot{\rho} \vec{p}\end{aligned}$$

La Tierra y el cuerpo celeste en cuestión se mueven sujetos a la atracción gravitatoria del Sol y sus masas pueden despreciarse comparadas con la masa del Sol. Por consiguiente (Ap. 3.2):

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \ddot{\vec{R}} = -\mu \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (4.6)$$

donde $\mu = GM$ (G = constante de la gravitación universal y M = masa del Sol).

Sumando miembro a miembro las (4.6) obtenemos:

$$\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}} = -\mu \left(\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

o lo que es lo mismo:

$$\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}} = -\mu \left(\frac{\vec{\rho} - \vec{R}}{r^3} + \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = -\mu \frac{\vec{\rho}}{r^3} + \mu \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \vec{R} \quad (5.6)$$

Por otra parte, de la Fig. 1.6 obtenemos:

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi \quad (6.6)$$

donde ψ es el ángulo entre los vectores $\rho \vec{p}$ y $\vec{R}$.

Pues bien, las fórmulas básicas del método de Laplace son:

$$\left. \begin{aligned}\vec{r} + \vec{R} &= \rho \vec{p} \\ \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}} &= \dot{\rho} \vec{p} + \rho \dot{\vec{p}} \\ -\mu \frac{\vec{\rho}}{r^3} + \mu \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \vec{R} &= \rho \ddot{\vec{p}} + 2\dot{\rho} \dot{\vec{p}} + \ddot{\rho} \vec{p} \\ r^2 &= \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi\end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Las ecuaciones (7.6) representan el aspecto geométrico y gravitacional del movimiento. Contienen el valor $\vec{p}$ deducido de la observación en un instante $t = t_0$ y sus derivadas primera y segunda en este mismo instante que deberemos calcular a partir de $\vec{p}$.

Designemos con el subíndice “cero” el valor de $\vec{p}$ y sus derivadas en el instante $t = t_0$. Desarrollando en serie de Taylor el valor de $\vec{p}$, tendremos:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \dot{\vec{p}}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{p}}_0 t^2 + O(t^3) \quad (8.6)$$

y despreciando los términos con potencias en $t \geq 3$, conocida la observación $\vec{p}_i$ en el instante t_i ($i = 1, 2, 3$) pueden obtenerse $\vec{p}_0$, $\dot{\vec{p}}_0$, $\ddot{\vec{p}}_0$ mediante el sistema:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_0 + \dot{\vec{p}}_0 t_i + \frac{1}{2} \ddot{\vec{p}}_0 t_i^2 \quad (9.6)$$

Los valores que se obtienen son sólo aproximados puesto que hemos truncado la serie en los términos de segundo grado en t al necesitar sólo derivadas de hasta el segundo orden. Se podrían obtener valores más aproximados de $\dot{\vec{p}}$ y $\ddot{\vec{p}}$ tomando más términos en la serie (8.6) aunque no se necesiten derivadas de orden superior al segundo en las ecuaciones (7.6). También si se dispone de más observaciones, se pueden añadir ecuaciones y proceder a resolver el sistema por mínimos cuadrados. Pero, como que más tarde habremos de corregir de aberración, tomaremos, por comodidad, el sistema (9.6) de tres ecuaciones con tres incógnitas y lo resolveremos algebraicamente. Por otra parte, es posible escoger t_0 de modo que el error sea mínimo, pero se suele tomar t_0 de forma que sea el tiempo de la segunda observación.

Supongamos ahora que hemos encontrado $\dot{\vec{p}}$ y $\ddot{\vec{p}}$. Multipliquemos escalarmente la tercera de (7.6) primero por $\vec{p} \wedge \dot{\vec{p}}$ y después por $\vec{p} \wedge \ddot{\vec{p}}$. Obtendremos:

$$\mu \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) [\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}}] = \rho [\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}}] \quad (10.6)$$

y

$$\mu \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) [\vec{p}, \ddot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}}] = -2\dot{\rho} [\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}}] \quad (11.6)$$

Tomando la última ecuación de (7.6) y (10.6) formaremos el sistema:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi \\ \mu \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) [\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}}] &= \rho [\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}}] \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

que resuelto algebraicamente nos dará las incógnitas r y p .

Es fácil ver que la ecuación que resulta al eliminar una de las incógnitas en dicho sistema es algebraica de octavo grado en la otra. Para simplificar su resolución se suele introducir el ángulo auxiliar ϕ formado por los vectores $\overrightarrow{SP}$ y $\overrightarrow{TP}$ (Fig. 1.6) que la reduce a una de cuarto grado. En efecto, en el triángulo PST de dicha figura 1.6 tenemos:

$$\frac{R}{\sin \phi} = \frac{r}{\sin \psi} = \frac{\rho}{\sin(\phi + \psi)} \quad (13.6)$$

Escrita la segunda de (12.6) en la forma

$$\rho = A\mu \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) \quad (14.6)$$

con

$$A = - \frac{[\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{R}}]}{[\vec{p}, \dot{\vec{p}}, \ddot{\vec{p}}]} \quad (15.6)$$

y teniendo en cuenta (13.6), resulta:

$$\frac{R \sin(\phi + \psi)}{\sin \phi} = A\mu \left(\frac{1}{R^3} - \frac{\sin^3 \phi}{R^3 \sin^3 \psi} \right)$$

y desarrollando y agrupando términos:

$$R \sin \psi \cos \phi + \left(R \cos \psi - \frac{A\mu}{R^3} \right) \sin \phi = - \frac{A\mu \sin^4 \phi}{R^3 \sin^3 \psi} \quad (16.6)$$

Haciendo para simplificar

$$\begin{aligned} N \sin m &= R \sin \psi \\ N \cos m &= R \cos \psi - \frac{A\mu}{R^3} \\ M &= - \frac{N R^3}{A\mu} \sin^3 \psi \end{aligned} \quad (17.6)$$

donde el signo de N se toma de modo que M sea positivo, y sustituyendo en (16.6) se obtiene:

$$\sin^4 \phi = M \sin(\phi + m) \quad (18.6)$$

que puede proporcionar a lo sumo dos soluciones ϕ , en cuyo caso la discriminación suele hacerse tomando alguna nueva observación.

El cálculo de ϕ se efectúa por aproximaciones sucesivas a partir de un primer valor obtenido gráficamente o por medio de tablas.

La discusión de la ecuación (18.6) puede hallarse en cualquiera de los textos de Mecánica Celeste que damos en la Bibliografía.

Si sustituimos el valor de ϕ obtenido de (18.6) en (13.6) obtendremos r y ρ .

Con r la ecuación (11.6) nos dará $\dot{\rho}$.

Hallados ρ y $\dot{\rho}$ las dos primeras de (7.6) nos darán $\vec{r}$ y $\dot{\vec{r}}$ a partir de los cuales calcularemos los elementos de la órbita.

6.2.1 Corrección de aberración

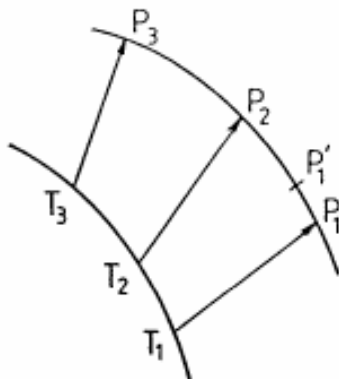


FIG. 2.6

Recordemos que debido a la finitud de la velocidad de propagación de la luz los astros no se ven desde la Tierra en la posición que ocupan en el instante de la observación (Ap. 4.2). Por tanto, obtenido un primer valor de ρ tendremos que corregir de aberración planetaria. Esta corrección afectará las coordenadas observadas y tendremos que volver a plantear el problema a partir de (7.6). En la práctica lo que se hace es corregir los tiempos de las observaciones. Sean T_i ($i = 1, 2, 3$) las posiciones del centro de la Tierra en los instantes t_i de las observaciones. El cuerpo P pasa por los puntos P_1, P_2, P_3 (Fig.2.6) no en los tiempos t_1, t_2, t_3 sino en dichos tiempos disminuidos en el tiempo τ_i en que la luz tarda en ir de P_i a T_i ($i = 1, 2, 3$). Para hacer estas correcciones a los tiempos de observación es necesario conocer las distancias $T_i P_i = \rho_i$ ($i = 1, 2, 3$). Teniendo en cuenta que conocemos un primer valor de ρ y $\dot{\rho}$, podremos escribir con suficiente aproximación

$$\rho_i = \rho + \dot{\rho} \tau_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Supongamos que C representa la velocidad de la luz. Las épocas en que el cuerpo P estaba en P_1, P_2, P_3 son:

$$t_i - \frac{\rho_i}{C} = t_i - \frac{\rho + \dot{\rho} \tau_i}{C} \approx t_i - \frac{\rho}{C} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Estas correcciones deben introducirse en el sistema (9.6) con lo cual obtendremos unos nuevos valores de $\dot{\vec{p}}$ y $\ddot{\vec{p}}$ que nos conducirán a nuevos valores de ρ y $\dot{\rho}$. Si éstos no difieren mucho de los encontrados anteriormente se podrá seguir el cálculo. Si no, deberemos realizar todavía una nueva corrección de aberración.

6.2.2 Corrección de los elementos. Método de Leuschner

Aunque efectuemos la corrección de aberración a la que nos acabamos de referir, una vez calculados los elementos orbitales a partir de los $\vec{r}$ y $\dot{\vec{r}}$ correspondientes a la época de la segunda observación y calculada una efemérides para las épocas primera y tercera, encontraremos discrepancias entre observación y cálculo para dichas épocas. Esto es debido a las aproximaciones que conlleva el método que estamos empleando. Deberemos pues, corregir los elementos de la órbita. Leuschner (1902) introdujo, basándose en trabajos realizados anteriormente por Harzer (1896), un procedimiento para hallar $\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1$ y $\vec{r}_3, \dot{\vec{r}}_3$ correspondientes a las épocas primera y tercera a partir de las $\vec{r}_2$ y $\dot{\vec{r}}_2$ de la segunda observación, y una vez hallados poder corregir $\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2$ antes de obtener los elementos orbitales, lo cual simplifica muchísimo el proceso de cálculo.

Seguiremos indicando con el índice “cero” todos los valores correspondientes a la segunda observación. Si $\vec{r}$ es el vector de posición en la época t , podemos expresarlo mediante desarrollo en serie de potencias de t en la forma:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 t^2 + \frac{1}{6} \dddot{\vec{r}}_0 t^3 + \dots \quad (19.6)$$

Definamos las cantidades σ, τ, ω por

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0}{r_0^5} = \frac{\mu}{r_0^3} \\ \tau &= \frac{\vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0}{r_0^2} = \frac{\dot{r}_0}{r_0} \\ \omega &= \frac{\dot{\vec{r}}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0}{r_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (20.6)$$

Derivándolas y utilizando la ecuación del movimiento

$$\ddot{\vec{r}}_0 = -\mu \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} \quad (21.6)$$

para eliminar $\ddot{\vec{r}}_0$ tendremos:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -\frac{3\dot{r}_0}{r_0^4} = -3\sigma\tau \\ \dot{\tau} &= \frac{(\dot{\vec{r}}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \cdot \ddot{\vec{r}}_0) - 2\dot{r}_0^2}{r_0^2} = \omega + \frac{\vec{r}_0 \cdot \ddot{\vec{r}}_0}{r_0^2} - 2\tau^2 \end{aligned}$$

y multiplicando escalarmente por $\vec{r}_0$ (21.6) y dividiendo luego por r_0^2 :

$$\frac{\vec{r}_0 \cdot \ddot{\vec{r}}_0}{r_0^2} = -\frac{\mu}{r_0^3} = -\sigma$$

con lo que $\dot{\tau}$ será:

$$\dot{\tau} = \omega - \sigma - 2\tau^2$$

Finalmente:

$$\dot{\omega} = \frac{2r_0 \left(\dot{\vec{r}}_0 \cdot \ddot{\vec{r}}_0 \right) - 2\dot{r}_0 \left(\dot{\vec{r}}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0 \right)}{r_0^3}$$

multiplicando ahora por $2\frac{\dot{r}_0}{r_0^2}$ (21.6) obtenemos:

$$2\frac{\dot{\vec{r}}_0 \cdot \ddot{\vec{r}}_0}{r_0^2} = -2\mu \frac{\vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0}{r_0^5} = -2\mu \frac{\dot{r}_0}{r_0 r_0^3} = -2\sigma\tau$$

y por otra parte el segundo término de $\dot{\omega}$ es

$$-2\frac{\dot{r}_0 \left(\dot{\vec{r}}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0 \right)}{r_0^3} = -2\frac{\dot{r}_0}{r_0} \omega = -2\tau\omega$$

con lo que:

$$\dot{\omega} = -2\tau(\sigma + \omega)$$

En resumen, pues, nos quedan las relaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= -3\sigma\tau \\ \dot{\tau} &= \omega - \sigma - 2\tau^2 \\ \dot{\omega} &= -2\tau(\sigma + \omega)\end{aligned}\tag{22.6}$$

Entonces, a partir de la ecuación (21.6) obtendremos, derivando sucesivamente y teniendo en cuenta (22.6):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}_0 &= -\frac{1}{2}\sigma\vec{r}_0 \\ \frac{1}{6}\dddot{\vec{r}}_0 &= \frac{1}{2}\sigma\tau\vec{r}_0 - \frac{1}{6}\sigma\dot{\vec{r}}_0 \\ \frac{1}{24}\ddddot{\vec{r}}_0 &= \frac{1}{24}\sigma(3\omega - 2\sigma - 15\tau^2)\vec{r}_0 + \frac{1}{4}\sigma\tau\dot{\vec{r}}_0 \\ &\dots\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (19.6) obtendremos, finalmente:

$$\vec{r} = f\vec{r}_0 + g\dot{\vec{r}}_0\tag{23.6}$$

donde:

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{1}{2} \sigma t^2 + \frac{1}{2} \sigma \tau t^3 + \dots \\ g &= t - \frac{1}{6} \sigma t^3 + \dots \end{aligned} \quad (24.6)$$

Estas series, llamadas simplemente *series f y g*, convergen rápidamente para valores pequeños de t y nos permiten hallar $\vec{r}$ conocidos los valores $\vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}_0$ correspondientes a la segunda observación.

Para mejorar los valores $\vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}_0$ podemos proceder de la siguiente forma: Con $\vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}_0$ calcularemos σ , τ , ω mediante las fórmulas (20.6). Sustituídos estos valores en (24.6) haciendo $t = t_1$ y $t = t_3$ obtendremos los pares de valores f_1 , g_1 y f_3 , g_3 , que sustituidos en (23.6) nos proporcionarán $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_3$.

Con $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_3$ obtendremos ρ_1 y ρ_3 de las fórmulas

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 + \vec{R}_1 &= \vec{\rho}_1 \\ \vec{r}_3 + \vec{R}_3 &= \vec{\rho}_3 \end{aligned}$$

y hallados los módulos de $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\rho}_3$, podremos calcular:

$$\frac{\vec{\rho}_1}{\|\rho_1\|} = \vec{p}_1 \quad y \quad \frac{\vec{\rho}_3}{\|\rho_3\|} = \vec{p}_3$$

Estos $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_3$ son calculados. Nosotros teníamos los vectores $\vec{p}_{1,3}$ proporcionados por la observación, de modo que si llamamos $\vec{p}_{1c,3c}$ a los primeros y $\vec{p}_{1o,3o}$ a los segundos, tendremos:

$$(O-C)_{1,3} = \vec{p}_{1o,3o} - \vec{p}_{1c,3c}$$

De aquí que, si llamamos, en general, $\overline{\Delta p}$ a este $O-C$ será

$$\vec{r} + \overline{\Delta r} + \vec{R} = \rho (\overline{\Delta p} + \vec{p})$$

de donde

$$\overline{\Delta r} = \rho \overline{\Delta p}$$

que podremos escribir para 1 y 3.

De esta forma tendremos unos nuevos valores de $\vec{r}$ correspondientes a la primera y tercera observaciones:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{1o} &= \vec{r}_{1c} + \overline{\Delta r}_1 \\ \vec{r}_{3o} &= \vec{r}_{3c} + \overline{\Delta r}_3 \end{aligned}$$

Por otra parte, si de

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &= f_1 \vec{r}_0 + g_1 \dot{\vec{r}}_0 \\ \vec{r}_3 &= f_3 \vec{r}_0 + g_3 \dot{\vec{r}}_0 \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

despejamos $\vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}_0$, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_0 &= \frac{g_3}{f_1 g_3 - f_3 g_1} \vec{r}_1 - \frac{g_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1} \vec{r}_3 \\ \dot{\vec{r}}_0 &= \frac{-f_3}{f_1 g_3 - f_3 g_1} \vec{r}_1 - \frac{f_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1} \vec{r}_3 \end{aligned} \right\} \quad (26.6)$$

y si en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_3$ en (26.6) escribimos $\vec{r}_1 + \overline{\Delta r}_1$ y $\vec{r}_3 + \overline{\Delta r}_3$, respectivamente, obtendremos valores más aproximados de $\vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}_0$ con los cuales volveremos a recalcular σ , τ , ω , f_1 , f_3 , g_1 , g_3 , ρ_1 , ρ_3 , $\vec{r}_1 + \overline{\Delta r}_1$ y $\vec{r}_3 + \overline{\Delta r}_3$, y con el sistema (26.6) obtendremos nuevos valores, más aproximados, $\vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}_0$.

Cuando observemos que los últimos valores hallados no difieren sensiblemente de los anteriores podemos ya proceder a calcular con ellos los elementos orbitales.

Para la obtención de los elementos orbitales a partir de $\vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}_0$ remitimos al lector al Apartado 3.11.4.

6.3 Método de Gauss

En el método de Gauss, al igual que hicimos en el de Laplace, distinguiremos dos partes. En la primera, veremos cómo pueden calcularse tres posiciones heliocéntricas del cuerpo cuya órbita tratamos de calcular a partir de tres posiciones geocéntricas. En la segunda, estudiaremos la forma de obtener los elementos orbitales a partir de dos de las tres posiciones heliocéntricas.

6.3.1 Determinación de las áreas triangulares

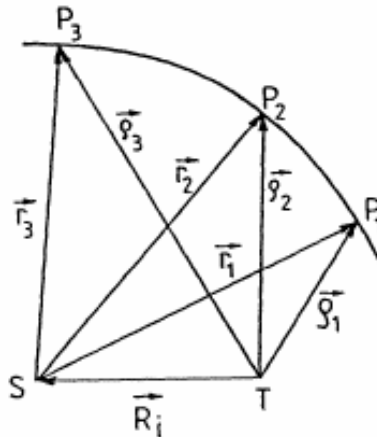


FIG. 3.6

Sean (Fig. 3.6) T el centro de la Tierra, P_i la posición del cuerpo P en cuestión en la época t_i ($i = 1, 2, 3$), S el Sol, $\vec{p}_i$ el vector unitario en la dirección TP_i que obtenemos por observación (recordemos Cap. 6.1), $\vec{R}_i$ la posición geocéntrica del Sol y $\vec{r}_i$ la posición heliocéntrica de P_i .

Puesto que suponemos que la órbita es kepleriana, los vectores $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, 3$) son coplanarios, cumpliéndose:

$$c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2 + c_3 \vec{r}_3 = 0 \quad (27.6)$$

donde c_1, c_2, c_3 son tres escalares no simultáneamente nulos.

Multiplicando vectorialmente (27.6) primero por $\vec{r}_3$ por la izquierda y después por $\vec{r}_2$ por la derecha, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} c_1 \vec{r}_3 \wedge \vec{r}_1 &= c_2 \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3 \\ c_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 &= c_3 \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3 \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

sistema que podemos escribir en la forma:

$$\frac{c_1}{\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3} = -\frac{c_2}{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_3} = \frac{c_3}{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2} \quad (29.6)$$

Si tomamos como sistema de referencia el de coordenadas P, Q, R , que hemos considerado ya otras veces (Ap. 3.11.3), con origen el Sol, resulta que los productos vectoriales que aparecen en los denominadores de (29.6) tienen, todos ellos, la dirección y sentido de un vector unitario $\vec{R}$ tomado sobre el eje R en el sentido positivo del mismo. Por otra parte, podemos expresar mediante los llamados corchetes de Gauss $[r_i, r_j]$ $i \neq j$ el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{r}_i, \vec{r}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$).

En consecuencia, podremos escribir:

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3 &= 2[r_2, r_3] \vec{R} \\ \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_3 &= 2[r_1, r_3] \vec{R} \\ \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 &= 2[r_1, r_2] \vec{R} \end{aligned} \quad (30.6)$$

y, por tanto, (29.6) se podrá expresar en la forma:

$$\frac{c_1}{[r_2, r_3]} = -\frac{c_2}{[r_1, r_3]} = \frac{c_3}{[r_1, r_2]} \quad (31.6)$$

De la Fig. 3.6 deducimos

$$\rho_i \vec{p}_i = \vec{r}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (32.6)$$

y multiplicando por c_i y sumando teniendo en cuenta (27.6), obtenemos:

$$\sum_{i=1}^3 c_i \rho_i \vec{p}_i = \sum_{i=1}^3 c_i \vec{R}_i \quad (33.6)$$

ecuación vectorial que equivale a un sistema de tres ecuaciones escalares en las componentes de $\vec{p}_i$, $\vec{R}_i$ con las incógnitas ρ_i , c_i ($i = 1, 2, 3$).

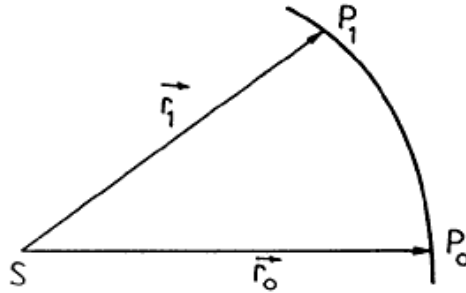


FIG.4.6

Para determinar las c_i (razones entre las áreas) supondremos la órbita referida a los dos ejes rectangulares heliocéntricos P,Q situados en su plano. Sean P_0 y P_1 las posiciones del cuerpo P en los tiempos t_0 y $t_0 + \theta$, $\mathcal{G}$ el área del triángulo P_0SP_1 y Σ el área del sector curvilíneo limitado por los radios vectores $\vec{r}_0$ y $\vec{r}_1$ y el arco de órbita $\widehat{P_0P_1}$ (Fig. 4.6)

Tendremos:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{G} &= 2[r_0, r] \vec{R} = \vec{r}_0 \wedge \vec{r} \\ 2\Sigma &= c\theta \end{aligned}$$

siendo c la constante de las áreas.

Escribiremos el desarrollo de $\mathcal{G}$ en función del tiempo θ , basándonos en el desarrollo de $\vec{r}$ en función del tiempo θ en el entorno de $\vec{r}_0$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}_0 \theta + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 \theta^2 + \frac{1}{6} \dddot{\vec{r}}_0 \theta^3 + \frac{1}{24} \overline{\ddot{\vec{r}}_0} \theta^4 + O(\theta^5) \quad (34.6)$$

Multiplicando vectorialmente por la izquierda por $\vec{r}_0$:

$$\vec{r}_0 \wedge \vec{r} = (\vec{r}_0 \wedge \dot{\vec{r}}_0) \theta + \frac{1}{2} (\vec{r}_0 \wedge \ddot{\vec{r}}_0) \theta^2 + \frac{1}{6} (\vec{r}_0 \wedge \ddot{\vec{r}}_0) \theta^3 + \frac{1}{24} (\vec{r}_0 \wedge \overline{\ddot{\vec{r}}_0}) \theta^4 + O(\theta^5) \quad (35.6)$$

cuyos coeficientes calcularemos de la siguiente forma:

Para el primero, recordaremos que, según la ley de las áreas es

$$\vec{r}_0 \wedge \dot{\vec{r}}_0 = \vec{c} \quad (36.6)$$

Para el segundo, multiplicaremos por $\vec{r}_0$ por la izquierda la ecuación del movimiento:

$$\vec{r}_0 \wedge \ddot{\vec{r}}_0 = \frac{\mu}{r_0^3} \vec{r}_0 \wedge \vec{r}_0 = 0 \quad (37.6)$$

El tercero, lo calcularemos derivando esta última expresión:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_0 \wedge \ddot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \wedge \dddot{\vec{r}}_0 &= 0 \\ \vec{r}_0 \wedge \dddot{\vec{r}}_0 &= \frac{\mu}{r_0^3} (\dot{\vec{r}}_0 \wedge \vec{r}_0) \end{aligned}$$

es decir:

$$\vec{r}_0 \wedge \dddot{\vec{r}}_0 = -\frac{\mu}{r_0^3} c \quad (38.6)$$

Y, volviendo a derivar, obtendremos el cuarto:

$$\dot{\vec{r}}_0 \wedge \ddot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \wedge \dddot{\vec{r}}_0 = \frac{3\mu c}{r_0^4} \dot{\vec{r}}_0$$

de donde:

$$\vec{r}_0 \wedge \dddot{\vec{r}}_0 = \frac{3\mu c}{r_0^4} \dot{\vec{r}}_0 - (\dot{\vec{r}}_0 \wedge \ddot{\vec{r}}_0) \quad (39.6)$$

Derivando la ecuación del movimiento y multiplicando por $\dot{\vec{r}}_0$:

$$\dot{\vec{r}}_0 \wedge \ddot{\vec{r}}_0 = -\mu \left[\frac{\dot{\vec{r}}_0 \wedge \dot{\vec{r}}_0}{r_0^3} - \frac{3\dot{\vec{r}}_0 \wedge \vec{r}_0}{r_0^4} \dot{\vec{r}}_0 \right] = -\frac{3\mu c}{r_0^4} \dot{\vec{r}}_0$$

y sustituyendo en el segundo término del segundo miembro de (39.6), obtenemos, finalmente:

$$\vec{r}_0 \wedge \ddot{\vec{r}}_0 = \frac{6\mu c}{r_0^4} \dot{\vec{r}}_0 \quad (40.6)$$

Sustituyendo (36.6), (37.6), (38.6) y (40.6) en (35.6), tendremos:

$$2\mathcal{G} = \vec{r}_0 \wedge \vec{r} = c\theta \left[1 - \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_0^3} \theta^2 + \frac{\mu}{4} \frac{1}{r_0^4} \theta^3 \dot{\vec{r}}_0 + \dots \right] \quad (41.6)$$

Aplicemos este resultado a las áreas triangulares determinadas por las tres posiciones sucesivas de P , P_1 , P_2 , P_3 , para las épocas t_1 , t_2 , t_3 . Sean $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ los respectivos vectores de posición. Hagamos, por otra parte

$$t_2 - t_1 = \theta_1 \quad t_3 - t_2 = \theta_2 \quad t_3 - t_1 = \theta_3$$

y tomemos como origen de tiempos t_2 con lo cual será $\theta_1 < 0$ y $\theta_2 > 0$. Tendremos:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 &= c \theta_1 \left[1 - \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} \theta_1^2 - \frac{\mu}{4} \frac{1}{r_2^4} \theta_1^3 \dot{\vec{r}}_2 + \dots \right] \\ \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3 &= c \theta_2 \left[1 - \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} \theta_2^2 + \frac{\mu}{4} \frac{1}{r_2^4} \theta_2^3 \dot{\vec{r}}_2 + \dots \right]\end{aligned}\quad (42.6)$$

y si ahora tomamos como origen t_1 con lo que será $\theta_3 > 0$, podremos escribir:

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_3 = c \theta_3 \left[1 - \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_1^3} \theta_3^2 + \frac{\mu}{4} \frac{1}{r_1^4} \theta_3^3 \dot{\vec{r}}_1 + \dots \right] \quad (43.6)$$

6.3.2 Fórmulas aproximadas de Encke

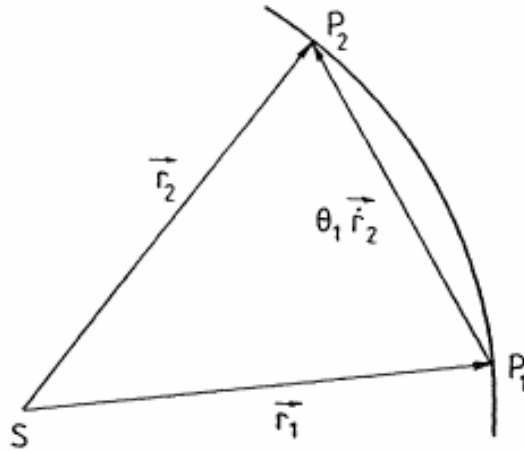


FIG 5.6

Hagamos las hipótesis simplificativas siguientes:

- 1) Supongamos que la velocidad entre P_1 y P_2 (Fig. 5.6) es $\dot{\vec{r}}_2$.
- 2) En la expresión dada por el teorema del coseno

$$r_1^2 = r_2^2 + \dot{r}_2^2 \theta_1^2 - 2\theta_1 (\dot{\vec{r}}_2 \cdot \vec{r}_2) \quad (44.6)$$

despreciemos $\dot{r}_2^2 \theta_1^2$.

- 3) Teniendo en cuenta que $\dot{\vec{r}}_2 \cdot \vec{r}_2 = r_2 \dot{r}_2$ de (44.6) obtendremos:

$$r_1^2 \approx r_2^2 \left(1 - 2 \frac{\dot{r}_2 \theta_1}{r_2} \right)$$

y elevando ambos miembros a $-3/2$, desarrollando el segundo miembro por la fórmula del binomio de Newton y tomando sólo dos términos del desarrollo:

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r_2^3} \left(1 + 3 \frac{\dot{r}_2 \theta_1}{r_2} \right) \quad (45.6)$$

4) Sustituyamos (45.6) en (43.6) haciendo, además, $r_1 = r_2$ en los términos de cuarto orden en el tiempo. Tendremos:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_3 &= c \theta_3 \left[1 - \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} \left(1 + \frac{3\dot{r}_2 \theta_1}{r_2} \right) \theta_3^2 + \frac{\mu}{4} \frac{1}{r_2^4} \theta_3^3 \dot{r}_2 + \dots \right] = \\ &= c \theta_3 \left[1 - \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} \theta_3^2 + \frac{\mu}{4} \frac{\dot{r}_2 \theta_3^2}{r_2^4} (\theta_3 - 2\theta_1) - \dots \right] \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\theta_3 - 2\theta_1 = t_3 - t_1 - 2t_2 + 2t_1 = \theta_2 - \theta_1$$

podremos escribir, finalmente:

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_3 = c \theta_3 \left[1 - \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} \theta_3^2 + \frac{\mu}{4} \frac{1}{r_2^4} \dot{r}_2 \theta_3^2 (\theta_2 - \theta_1) + \dots \right] \quad (46.6)$$

Dividiendo las (42.6) por (46.6), habida cuenta de las razones (29.6), obten-dremos:

$$\begin{aligned} -\frac{c_3}{c_2} &= \frac{\theta_1}{\theta_3} \left[1 + \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} (\theta_3^2 - \theta_1^2) - \frac{\mu}{4} \frac{1}{r_2^4} \dot{r}_2 \theta_2 (\theta_2 \theta_3 - \theta_1^2) + \dots \right] \\ -\frac{c_1}{c_2} &= \frac{\theta_2}{\theta_3} \left[1 + \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} (\theta_3^2 - \theta_2^2) + \frac{\mu}{4} \frac{1}{r_2^4} \dot{r}_2 \theta_1 (\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2) + \dots \right] \end{aligned} \quad (47.6)$$

expresiones que nos dan, a menos de un factor constante, los valores de las incógnitas c_i en función de r_2 .

Las fórmulas (47.6) son poco prácticas al contener la derivada $\dot{r}_2$. Por este motivo, se suelen despreciar los términos a partir del que contiene el factor $\dot{r}_2$, inclusive, con lo que queda:

$$\begin{aligned} -\frac{c_3}{c_2} &= \frac{\theta_1}{\theta_3} \left[1 + \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} (\theta_3^2 - \theta_1^2) \right] \\ -\frac{c_1}{c_2} &= \frac{\theta_2}{\theta_3} \left[1 + \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} (\theta_3^2 - \theta_2^2) \right] \end{aligned} \quad (48.6)$$

que son las llamadas *fórmulas aproximadas de Encke*

6.3.3 Cálculo de las ρ_i y de las posiciones heliocéntricas

Multiplicando (33.6) escalarmente por $\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_3$ obtendremos:

$$-c_2 \rho_2 (\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 = (\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_3) \cdot (c_1 \vec{R}_1 + c_2 \vec{R}_2 + c_3 \vec{R}_3)$$

dividiendo ambos miembros por $-c_2$ y sustituyendo los cocientes $-\frac{c_3}{c_2}$ y $-\frac{c_1}{c_2}$ por los valores (47.6), resulta:

$$\begin{aligned} \rho_2 (\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 = \\ = (\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_3) \cdot \left\{ \frac{\theta_2}{\theta_3} \left[1 + \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} (\theta_3^2 - \theta_2^2) \right] \vec{R}_1 - \vec{R}_2 + \frac{\theta_1}{\theta_3} \left[1 + \frac{\mu}{6} \frac{1}{r_2^3} (\theta_3^2 - \theta_1^2) \right] \vec{R}_3 \right\} \end{aligned} \quad (49.6)$$

ecuación de la forma

$$\rho_2 = A + \frac{B}{r_2^3} \quad (50.6)$$

con

$$\begin{aligned} A &= \frac{\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_3}{(\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3} \left[\frac{\theta_2}{\theta_3} \vec{R}_1 - \vec{R}_2 + \frac{\theta_1}{\theta_3} \vec{R}_3 \right] \\ B &= \frac{\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_3}{(\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3} \frac{\mu}{6} \left[(\theta_3^2 - \theta_2^2) \frac{\theta_2}{\theta_3} \vec{R}_1 + (\theta_3^2 - \theta_1^2) \frac{\theta_1}{\theta_3} \vec{R}_3 \right] \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema formado por la ecuación (50.6) y

$$r_2^2 = R_2^2 + \rho_2^2 - 2\rho_2 (\vec{p}_2 \cdot \vec{R}_2) \quad (51.6)$$

se obtienen ρ_2 y $\vec{r}_2$.

Al despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones (50.6) o (51.6) y sustituirla en la otra, se obtiene una ecuación de octavo grado análoga a la que hemos encontrado al estudiar el método de Laplace (Ap. 6.2, fórmula 18.6).

Hallados ρ_2 y r_2 , sustituyendo el valor de r_2 en (48.6) obtendremos $-c_3/c_2$ y $-c_1/c_2$.

Dividiendo (33.6) por $-c_2$, obtendremos:

$$-\frac{c_1}{c_2} \rho_1 \vec{p}_1 - \rho_2 \vec{p}_2 - \frac{c_3}{c_2} \rho_3 \vec{p}_3 = -\frac{c_1}{c_2} \vec{R}_1 - \vec{R}_2 - \frac{c_3}{c_2} \vec{R}_3 \quad (52.6)$$

ecuación vectorial que equivale a tres ecuaciones escalares de las cuales obtendremos ρ_1 y ρ_3 .

Finalmente, sustituyendo sucesivamente ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 en

$$\rho \vec{p} = \vec{r} + \vec{R}$$

obtendremos las tres posiciones heliocéntricas $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$.

6.3.4. Corrección de aberración y de los parámetros c_1/c_2 , c_3/c_2 .

La órbita que calculemos a partir de las posiciones heliocéntricas que hemos encontrado deberá ser corregida. En primer lugar, tengamos en cuenta que una vez hallado un primer valor de ρ deberemos corregir de aberración (ver 6.2.1). Corregido el tiempo de aberración y obtenidos nuevamente c_1/c_2 y c_3/c_2 , una primera corrección de dichos parámetros puede obtenerse calculando las razones

$$y_1 = \frac{(r_1, r_2)}{[r_1, r_2]} \quad y_2 = \frac{(r_2, r_3)}{[r_2, r_3]} \quad y_3 = \frac{(r_1, r_3)}{[r_1, r_3]}$$

donde (r_i, r_j) es el área del sector limitado por los radios vectores $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$ y el arco de órbita entre las posiciones P_i y P_j , y $[r_i, r_j]$ el área del triángulo SP_iP_j . En efecto,

$$-\frac{c_1}{c_2} = \frac{[r_2, r_3]}{[r_1, r_3]} = \frac{(r_2, r_3)}{(r_1, r_3)} \cdot \frac{[r_2, r_3]}{(r_2, r_3)} \cdot \frac{(r_1, r_3)}{[r_1, r_3]}$$

o sea:

$$-\frac{c_1}{c_2} = \frac{\Sigma_2 \cdot y_3}{\Sigma_3 \cdot y_2}$$

y, análogamente:

$$-\frac{c_3}{c_2} = \frac{\Sigma_1 \cdot y_3}{\Sigma_3 \cdot y_1} \quad \text{Estos cocientes nos proporcionarán, a partir de (52.6) valores más}$$

aproximados de ρ_1 y ρ_3 y en consecuencia de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_3$.

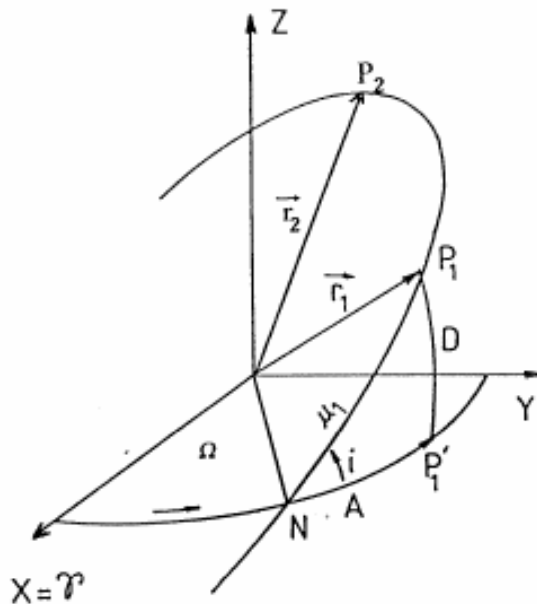


FIG. 6.6

6.3.5 Cálculo de los elementos de una órbita por dos posiciones heliocéntricas

Supongamos conocidas dos posiciones heliocéntricas P_1 y P_2 en las épocas t_1 y t_2 por sus coordenadas ecuatoriales heliocéntricas:

$$(\vec{r}_1, A_1, D_1; t_1), (\vec{r}_2, A_2, D_2; t_2).$$

Si t_2 es posterior a t_1 el movimiento será directo respecto al plano ecuatorial si $A_2 > A_1$ y retrógrado si $A_2 < A_1$. En el primer caso será $i < 90^\circ$ y en el segundo $90^\circ < i < 180^\circ$.

Del triángulo $P_1P_1'N$ de la Fig. 6.6 y su análogo para la posición P_2 , deducimos:

$$\left. \begin{aligned} \tan D_1 &= \tan i \sin(A_1 - \Omega) \\ \tan D_2 &= \tan i \sin(A_2 - \Omega) \end{aligned} \right\}$$

sistema de dos ecuaciones en las incógnitas i, Ω que nos darán estos dos elementos orbitales sin ambigüedad puesto que conocemos el cuadrante en que se halla i .

También es inmediato el cálculo de los argumentos $u_1 = \widehat{NP_1}$ y $u_2 = \widehat{NP_2}$ por cualquiera de las fórmulas

$$\begin{aligned} \sin D_1 &= \sin i \sin u_1 \\ \cos u_1 &= \cos(A_1 - \Omega) \cos D_1 \end{aligned}$$

o sus análogos

$$\begin{aligned} \sin D_2 &= \sin i \sin u_2 \\ \cos u_2 &= \cos(A_2 - \Omega) \cos D_2 \end{aligned}$$

y puesto que se verifica

$$|V_2 - V_1| = |u_2 - u_1|$$

podremos calcular la diferencia entre las anomalías verdaderas de las posiciones P_2 y P_1 .

En resumen, el problema que tratamos de resolver quedará reducido, a partir de ahora, a calcular los elementos a, e, ω, T de una órbita de la que se conocen los radios vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ correspondientes a dos épocas t_1 y t_2 y la diferencia $V_2 - V_1$ de sus anomalías verdaderas.

Supongamos que la órbita es elíptica: Sean E_1 y E_2 las anomalías excéntricas correspondientes a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Hagamos:

$$V_2 - V_1 = 2f \quad E_2 - E_1 = 2g \quad E_2 + E_1 = 2G$$

y recordemos las siguientes fórmulas del movimiento elíptico:

$$\begin{aligned} n(t - T) &= E - e \sin E \\ r &= a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos V} \end{aligned}$$

De la segunda, resulta:

$$1 + e \cos V = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E}$$

y despejando $\cos V$:

$$\cos V = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

Restando de 1 y sumando 1 a los dos miembros de esta última igualdad, resulta:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \frac{V}{2} &= 1 - \cos V = 1 - \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{1 - e \cos E} \\ 2 \cos^2 \frac{V}{2} &= 1 + \cos V = 1 + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = \frac{(1 - e)(1 + \cos E)}{1 - e \cos E} \end{aligned}$$

Cambiando $1 - e \cos E$ por r/a y extrayendo la raíz cuadrada nos queda para cada una de las posiciones P_1 y P_2 :

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1} \cos \frac{V_1}{2} &= \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{E_1}{2} \\ \sqrt{r_1} \sin \frac{V_1}{2} &= \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{E_1}{2} \\ \sqrt{r_2} \cos \frac{V_2}{2} &= \sqrt{a(1 + e)} \cos \frac{E_2}{2} \\ \sqrt{r_2} \sin \frac{V_2}{2} &= \sqrt{a(1 - e)} \sin \frac{E_2}{2} \end{aligned}$$

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1)$$

$$r_2 = a(1 - e \cos E_2)$$

$$E_1 - e \sin E_1 = \frac{k(t_1 - T)}{a^{3/2}}$$

$$E_2 - e \sin E_2 = \frac{k(t_2 - T)}{a^{3/2}}$$

$$k = \sqrt{\mu}$$

fórmulas de las que se deducen, por simples transformaciones, las igualdades

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{V_1}{2} \cos \frac{V_2}{2} + \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{V_1}{2} \sin \frac{V_2}{2} &= \\ = a(1 - e) \cos \frac{E_1}{2} \cos \frac{E_2}{2} + a(1 + e) \sin \frac{E_1}{2} \sin \frac{E_2}{2} \end{aligned}$$

es decir:

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos f = a \cos g - a e \cos G \quad (53.6)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{V_2}{2} \cos \frac{V_1}{2} - \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{V_2}{2} \sin \frac{V_1}{2} = \\ & = \sqrt{a^2 (1 - e^2)} \sin \frac{E_2}{2} \cos \frac{E_1}{2} - \sqrt{a^2 (1 - e^2)} \cos \frac{E_2}{2} \sin \frac{E_1}{2} \end{aligned}$$

o sea:

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin f = \sqrt{ap} \sin g \quad p = a(1 - e^2) \quad (54.6)$$

$$r_1 + r_2 = 2a - ae(\cos E_1 + \cos E_2)$$

o sea:

$$r_1 + r_2 = 2a - 2ae \cos G \cos g \quad (55.6)$$

$$\frac{k(t_2 - t_1)}{a^{3/2}} = E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)$$

es decir, dividiendo los dos miembros por $\sin^3 g$:

$$\frac{k(t_2 - t_1)}{a^{3/2}} = \frac{2g - 2e \cos G \sin g}{\sin^3 g} \quad (56.6)$$

Las ecuaciones (53.6), (54.6), (55.6) y (56.6) que resumimos a continuación

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r_1 r_2} \cos f &= a \cos g - ae \cos G \\ \sqrt{r_1 r_2} \sin f &= \sqrt{ap} \sin g \\ r_1 + r_2 &= 2a - 2ae \cos G \cos g \\ \frac{k(t_2 - t_1)}{a^{3/2} \sin^3 g} &= \frac{2g - 2e \cos G \sin g}{\sin^3 g} \end{aligned} \right\} \quad (57.6)$$

constituyen un sistema de cuatro ecuaciones con las incógnitas a, e, g y G . Eliminando $ae \cos G$ entre la primera y la tercera y $e \cos G$ entre la primera y la cuarta, nos queda el sistema:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r_1 r_2} \sin f &= \sqrt{ap} \sin g \\ r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g &= 2a \sin^2 g \\ \frac{k(t_2 - t_1)}{(a \sin^2 g)^{3/2}} &= \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} + \frac{2\sqrt{r_1 r_2} \cos f}{a \sin^2 g} \end{aligned} \right\} \quad (58.6)$$

e introduciendo una nueva variable η definida por cualquiera de las expresiones equivalentes

$$\eta = \frac{k\sqrt{p}(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin 2f} = \frac{k(t_2 - t_1)}{2\sqrt{a}\sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g} \quad (59.6)$$

(obtenida la segunda sustituyendo $\sin 2f = 2\sin f \cos f$ por el valor de $\sin f$ deducido de la primera de (58.6)), y eliminando $\sqrt{a} \sin g$ entre (59.6) y las dos últimas de (58.6), obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f \left(1 - 2\sin^2 \frac{g}{2}\right) &= \frac{k^2 (t_2 - t_1)^2}{2\eta^2 r_1 r_2 \cos^2 f} \\ \frac{8\eta^3 (r_1 r_2)^{3/2} \cos^3 f}{k^2 (t_2 - t_1)^2} &= \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} + \frac{8(r_1 r_2)^{3/2} \cos^3 f \eta^2}{k^2 (t_2 - t_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (60.6)$$

Finalmente, si llamamos m y l a las constantes

$$m = \frac{k^2 (t_2 - t_1)^2}{(2\sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3} \quad l = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2}$$

sustituyéndolas en las ecuaciones (60.6), dividiendo previamente la primera por $4\sqrt{r_1 r_2} \cos f$, nos queda

$$\begin{aligned} \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2} \left(1 - 2\sin^2 \frac{g}{2}\right) &= \frac{k^2 (t_2 - t_1)^2}{8\eta^2 r_1 r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos^3 f} \\ 1 + \sin^2 \frac{g}{2} &= \frac{m}{\eta^2} \end{aligned} \quad (61.6)$$

$$\frac{\eta^3}{m} = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} + \frac{\eta^2}{m} \quad (62.6)$$

Las ecuaciones (61.6) y (62.6) constituyen el *sistema de ecuaciones de Gauss*, algebraicas en cuanto a η pero no en cuanto a g , que suele escribirse:

$$\left. \begin{aligned} \eta^3 - \eta^2 &= m \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \\ \eta^2 &= \frac{m}{1 + \sin^2 \frac{g}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (63.6)$$

El sistema (63.6) se resuelve por aproximaciones sucesivas.
Llamemos

$$x = \operatorname{sen}^2 \frac{g}{2} \quad (64.6)$$

$$X = \frac{2g - \operatorname{sen} 2g}{\operatorname{sen}^3 g} \quad (65.6)$$

y hallemos:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dg} \frac{dg}{dx} \quad (66.6)$$

Deduciremos $\frac{dX}{dg}$ de (65.6), haciendo:

$$X \operatorname{sen}^3 g = 2g - \operatorname{sen} 2g$$

y derivando respecto a g los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{dX}{dg} \operatorname{sen}^3 g + 3X \operatorname{sen}^2 g \cos g = 2 - 2 \cos 2g = 4 \operatorname{sen}^2 g$$

de donde:

$$\frac{dX}{dg} = \frac{4 \operatorname{sen}^2 g - 3X \operatorname{sen}^2 g \cos g}{\operatorname{sen}^3 g} = \frac{4 - 3X \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{g}{2}\right)}{\operatorname{sen} g}$$

es decir:

$$\frac{dX}{dg} = \frac{4 - 3X(1 - 2x)}{\operatorname{sen} g} \quad (67.6)$$

Para calcular $\frac{dg}{dx}$ haremos

$$1 - \cos g = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{g}{2} = 2x$$

de donde

$$\frac{dg}{dx} = \frac{2}{\operatorname{sen} g} \quad (68.6)$$

Sustituyendo, pues, (67.6) y (68.6) en (66.6), obtendremos:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{8 - 6X(1 - 2x)}{\operatorname{sen}^2 g} \quad (69.6)$$

Todavía podemos expresar $\sin^2 g$ en función de x :

De (64.6) obtenemos:

$$2x = 1 - \cos g$$

de donde:

$$\sin^2 g = 4x(1-x)$$

y sustituyendo dicho valor en (69.6), obtenemos finalmente:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{4-3X(1-2x)}{2x-2x^2} \quad (70.6)$$

Para integrar la ecuación diferencial (70.6) procederemos por desarrollo en serie, para lo cual escribiremos:

$$X = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots \quad (71.6)$$

y derivando respecto a x :

$$\frac{dX}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots \quad (72.6)$$

Sustituyendo (71.6) y (72.6) en (70.6), tendremos:

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots = \frac{4-3(A+Bx+Cx^2+\dots)(1-2x)}{2x-2x^2} \quad (73.6)$$

Identificando coeficientes en (73.6) obtendremos:

$$A = \frac{4}{3}, \quad B = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5}, \quad C = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7}, \dots$$

y sustituyendo en (71.6):

$$X = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}x^2 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9}x^3 + \dots \right)$$

El desarrollo de X^{-1} converge más rápidamente que el de X , por cuyo motivo se utiliza

$$X^{-1} = \frac{3}{4} - \frac{9}{10}x + \frac{9}{175}x^2 + \frac{26}{875}x^3 + \dots$$

o lo que es lo mismo:

$$X^{-1} = \frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)$$

con

$$\xi = \frac{2}{35}x^2 + \frac{52}{1575}x^3 + \dots \quad (74.6)$$

función que se halla tabulada.

Con todo esto las ecuaciones de Gauss (63.6) se escribirán:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m}{\eta^2} - 1 \\ \eta^3 - \eta^2 &= \frac{m}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)} \end{aligned} \right\} \quad (75.6)$$

y eliminando x entre ellas

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{m}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}\left(\frac{m}{\eta^2} - 1 - \xi\right)}$$

o también:

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{m}{-\frac{9}{10}\frac{m}{\eta^2} + \frac{9}{10}\left(1 + \xi + \frac{5}{6}\right)}$$

y llamando

$$h = \frac{m}{1 + \xi + \frac{5}{6}}$$

será:

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{1}{-\frac{9}{10}\frac{1}{\eta^2} + \frac{9}{10}\frac{1}{h}}$$

de donde, verificando operaciones, se deduce

$$\eta^3 - \eta^2 - h\eta - \frac{1}{9}h = 0 \quad (76.6)$$

ecuación que también se halla tabulada.

El proceso de cálculo es el siguiente:

Se toma $\xi = 0$ y se calcula $h_0 = \frac{m}{1 + 0 + \frac{5}{6}}$

Se lleva h_0 a (76.6) y se calcula η .

Calculada η , la primera ecuación del sistema (75.6) nos dará x .

Con x el desarrollo (74.6) nos dará un valor de ξ con el cual calcularemos una nueva h .

Una vez obtenido η con suficiente aproximación, (64.6) nos dará g , quedando resuelto el sistema (63.6).

Conocido el valor de g (ya conocíamos r_1 , r_2 y f), de la segunda de (58.6) se deduce a y de la primera, p , y en consecuencia e , teniendo en cuenta que $p = a(1 - e^2)$.

Llevando a y g a la tercera de (57.6) deducimos G .

Recordando que

$$\left. \begin{aligned} E_2 - E_1 &= 2g \\ E_2 + E_1 &= 2G \end{aligned} \right\}$$

obtenemos E_1 y E_2

De la ecuación de Kepler, $M_1 = E_1 - e \sin E_1$, obtenemos M_1 y de M_2 aplicando

$$M_1 = n(t_1 - T)$$

obtenemos finalmente T .

6.3.6 Resumen de fórmulas y proceso de cálculo

$$1 = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{k^2(t_2 - t_1)^2}{(2\sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3}$$

$$h = \frac{m}{1 + \xi + \frac{5}{6}} \quad \text{primer valor} \quad \xi_0 = 0 \quad \rightarrow h$$

$$\eta^3 - \eta^2 - h\eta - \frac{1}{9}h = 0 \quad \rightarrow \eta$$

$$x = \frac{m}{\eta^2} - 1 \quad \rightarrow x$$

$$\xi = \frac{2}{35}x^2 + \frac{52}{1575}x^3 + \dots \quad \rightarrow \xi$$

con ξ se vuelve a h .

Cuando se tiene η con suficiente aproximación se hace:

$$x = \operatorname{sen}^2 \frac{g}{2} \rightarrow g = \frac{E_2 - E_1}{2}$$

$$r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g = 2a \operatorname{sen}^2 g \rightarrow a$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \operatorname{sen} f = \sqrt{ap} \operatorname{sen} g \rightarrow p$$

$$p = a(1 - e^2) \rightarrow e$$

$$r_1 + r_2 = 2a - 2ae \cos G \cos g \rightarrow G = \frac{E_1 + E_2}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_2 - E_1 = 2g \\ E_2 + E_1 = 2G \end{array} \right\} \rightarrow E_1 \text{ y } E_2$$

$$M = E - e \operatorname{sen} E \rightarrow M$$

$$M = n(t - T) \rightarrow T$$

6.4 Método de Olbers

En 1797 Olbers publicó un trabajo que tituló “Un ensayo sobre el método más fácil y más conveniente de calcular la órbita de un cometa”. En el transcurso del tiempo se han introducido algunos cambios en el método de Olbers que no afectan a su concepto básico, quedando plenamente justificado el título con el que lo presentó el autor.

Partiendo de tres posiciones de un cuerpo en su órbita, Olbers supone, tal como había hecho Newton, que la cuerda que une las primera y tercera posiciones queda dividida por el radio vector correspondiente a la segunda posición en dos partes que son proporcionales a los intervalos de tiempo entre las observaciones y obtiene una ecuación que liga las distancias geocéntricas de las primera y tercera observación. Otra relación entre ellas la obtiene de la Ecuación de Euler. Una vez halladas las distancias del cuerpo a la Tierra, el cálculo de los elementos orbitales no presenta ninguna dificultad.

6.4.1 Teorema de Lambert para el movimiento elíptico

Sean E_1 y E_2 las anomalías excéntricas de dos posiciones P_1 y P_2 en una órbita elíptica de modo que $E_2 > E_1$ (Fig. 7.6).

Llamemos:

y

$$2G = E_2 + E_1$$

$$2g = E_2 - E_1 > 0$$

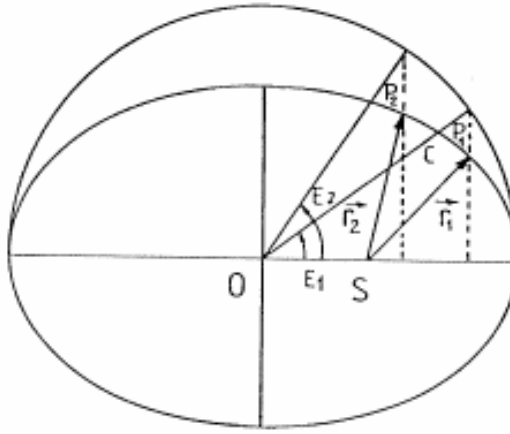


FIG.7.6

Si $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son los radios vectores heliocéntricos de P_1 y P_2 , teniendo en cuenta que

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1)$$

y

$$r_2 = a(1 - e \cos E_2)$$

se verificará:

$$r_1 + r_2 = a[2 - e(\cos E_1 + \cos E_2)] = 2a(1 - e \cos G \cos g)$$

Sea c la longitud de la cuerda que una P_1 con P_2 . Recordando que si tomamos como ejes de referencia los ejes de la elipse, las coordenadas de un punto de la misma son:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos E \\ y &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E \end{aligned} \right\} \quad (77.6)$$

obtendremos para el cuadrado de la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

$$c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

es decir, aplicando (77.6)

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \cos E_2 - a \cos E_1)^2 + a^2(1 - e^2)(\sin E_2 - \sin E_1)^2 = \\ &= a^2 \left(-2 \sin \frac{E_2 + E_1}{2} \sin \frac{E_2 - E_1}{2} \right)^2 + \\ &+ a^2(1 - e^2) \left(2 \cos \frac{E_2 + E_1}{2} \sin \frac{E_2 - E_1}{2} \right)^2 = \\ &= 4a^2 \sin^2 G \sin^2 g + 4a^2(1 - e^2) \cos^2 G \sin^2 g \end{aligned} \quad (78.6)$$

y haciendo:

$$e \cos G = \cos j \quad (79.6)$$

resulta, agrupando términos en (78.6):

$$c^2 = 4a^2 \sin^2 g (1 - \cos^2 j) = 4a^2 \sin^2 g \sin^2 j$$

y

$$c = 2a \sin g \sin j \quad (80.6)$$

También con este mismo cambio (79.6), es:

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos g \cos j) \quad (81.6)$$

Hagamos ahora:

$$\varepsilon = j + g$$

$$\delta = j - g$$

sumando y restando (81.6) y (80.6), obtenemos:

$$r_1 + r_2 + c = 2a[1 - \cos(g + j)] = 4a \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \quad (82.6)$$

$$r_1 + r_2 - c = 2a[1 - \cos(g - j)] = 4a \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (83.6)$$

Si t es el tiempo que emplea el cuerpo para pasar de la posición P_1 a la P_2 , $t = t_2 - t_1$, en virtud de la ecuación de Kepler tendremos:

$$\begin{aligned} nt &= E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1) = \\ &= \varepsilon - \delta - 2e \cos \frac{E_2 + E_1}{2} \sin \frac{E_2 - E_1}{2} = \\ &= \varepsilon - \delta - 2e \cos G \sin g = \varepsilon - \delta - 2 \cos j \sin g = \\ &= \varepsilon - \delta - 2 \cos \frac{\varepsilon + \delta}{2} \sin \frac{\varepsilon - \delta}{2} = \varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta) \end{aligned}$$

La relación

$$nt = \varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta) \quad (84.6)$$

se conoce con el nombre de *teorema de Lambert* y ha sido deducida para el movimiento elíptico.

ε y δ vienen dadas en función de $r_1 + r_2$, c y a por las fórmulas (82.6) y (83.6); pero, no están definidas unívocamente. Se demuestra (Plummer, 1960; p.51) que para un arco pequeño basta tomar el menor valor positivo que satisface las ecuaciones (82.6) y (83.6).

6.4.2 Fórmula de Euler

Si el movimiento fuera parabólico, al aplicar (81.6) con $a \rightarrow \infty$, teniendo en cuenta que el primer miembro es finito, el factor $(1 - \cos g \cos j)$ debería tender a cero, o lo que es lo mismo, el producto $\cos g \cos j$ tender a 1. Pero, si $\cos g \cos j \rightarrow 1$, como que los cosenos están comprendidos entre -1 y +1, los dos factores han de tender a 1. Luego, tanto g como j son ángulos muy pequeños y por consiguiente ε y δ también serían muy pequeños.

Entonces, en virtud de (82.6) y (83.6) tendríamos:

$$r_1 + r_2 + c = a\varepsilon^2 \quad (85.6)$$

$$r_1 + r_2 - c = a\delta^2 \quad (86.6)$$

donde $a \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\delta \rightarrow 0$.

Ahora bien, si en (84.6) reemplazamos n por $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ y desarrollamos en serie sen ε y sen δ , obtendremos:

$$\sqrt{\mu t} = a^{3/2} \left[(\varepsilon - \delta) - \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \dots - \delta + \frac{\delta^3}{3!} - \dots \right) \right] = \frac{1}{6} a^{3/2} (\varepsilon^3 - \delta^3) \quad (87.6)$$

y si tenemos en cuenta (85.6) y (86.6), podemos escribir la expresión:

$$\sqrt{\mu t} = \frac{1}{6} (r_1 + r_2 + c)^{3/2} \mp \frac{1}{6} (r_1 + r_2 - c)^{3/2} \quad (88.6)$$

que recibe el nombre de *fórmula de Euler* y en la que se toma el signo menos si $V_2 - V_1 < 180^\circ$ y el signo más si $V_2 - V_1 > 180^\circ$.

6.4.3 Movimiento de cometas

La fórmula de Euler se puede aplicar al estudio del movimiento de cometas; pero, si es $V_2 - V_1 < 180^\circ$, puede ocurrir que c no quede bien determinada. En este caso se recurre a una sencilla modificación.

Supongamos tres posiciones P_1, P_2, P_3 , del cometa en su órbita parabólica y sean V_1, V_2, V_3 las respectivas anomalías verdaderas.

Si $V_3 - V_1 < 180^\circ$ podremos escribir (88.6) en la forma

$$6T_2 = 6\sqrt{\mu} (t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + c)^{3/2} - (r_1 + r_3 - c)^{3/2} \quad (89.6)$$

donde c es ahora la longitud de la cuerda que une las posiciones P_1 y P_3 .

Despejaremos c de esta ecuación. Para ello, sacando factor común $(r_1 + r_3)^{3/2}$, tendremos:

$$\begin{aligned} 6T_2 &= (r_1 + r_3)^{3/2} \left[\left(1 + \frac{c}{r_1 + r_3} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{c}{r_1 + r_3} \right)^{3/2} \right] = \\ &= (r_1 + r_3)^{3/2} \left[3 \frac{c}{r_1 + r_3} - \frac{3}{4 \cdot 6} \left(\frac{c}{r_1 + r_3} \right)^3 - \frac{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{c}{r_1 + r_3} \right)^5 - \dots \right] \end{aligned}$$

y haciendo

$$\eta = \frac{2T_2}{(r_1 + r_3)^{3/2}} \quad (90.6)$$

resultará

$$\eta = \frac{c}{r_1 + r_3} - \frac{1}{4 \cdot 6} \left(\frac{c}{r_1 + r_3} \right)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{c}{r_1 + r_3} \right)^5 + \dots \quad (91.6)$$

A partir de (91.6) podremos hallar el desarrollo de $\frac{c}{r_1 + r_3}$ en potencias impares de η . En efecto, supongamos:

$$\frac{c}{r_1 + r_3} = \eta + a_3 \eta^3 + a_5 \eta^5 + \dots$$

y substituyamos en (90.6). Será:

$$\eta = \eta + a_3 \eta^3 + a_5 \eta^5 + \dots - \frac{1}{24} \eta^3 - \frac{1}{8} a_3 \eta^5 + \dots - \frac{1}{128} \eta^5 + \dots + \dots$$

de donde, identificando, encontramos los coeficientes $a_3, a_5, \dots$ y el desarrollo de $\frac{c}{r_1 + r_3}$

resulta ser:

$$\frac{c}{r_1 + r_3} = \eta + \frac{1}{24} \eta^3 + \frac{5}{384} \eta^5 + \dots$$

o también

$$c = (r_1 + r_3) \eta \gamma = (r_1 + r_3) f(\eta) \quad (92.6)$$

donde

$$\gamma = 1 + \frac{1}{24} \eta^2 + \frac{5}{384} \eta^4 + \dots$$

El valor de γ se halla tabulado en función de η . Algunas veces se da directamente el valor de $\gamma\eta$ en función de η . Otra posibilidad de hallar c es resolver directamente la ecuación (89.6).

Consideremos de nuevo el triángulo determinado por el Sol, la Tierra y el cometa (Fig. 1.6). La órbita se supone plana (movimiento no perturbado) y por consiguiente los vectores de posición heliocéntricos son coplanarios. Se verifica, por tanto:

$$c_1\vec{\rho}_1 + c_2\vec{\rho}_2 + c_3\vec{\rho}_3 = c_1\vec{R}_1 + c_2\vec{R}_2 + c_3\vec{R}_3$$

Dividamos por $-c_2$ y llamemos $\vec{V}$ al vector que obtengamos:

$$-\frac{c_1}{c_2}\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2 - \frac{c_3}{c_2}\vec{\rho}_3 = -\frac{c_1}{c_2}\vec{R}_1 - \vec{R}_2 - \frac{c_3}{c_2}\vec{R}_3 = \vec{V} \quad (93.6)$$

Sea $\vec{U}$ un vector coplanario con $\vec{V}$ y $\vec{\rho}_2$. Multipliquemos (93.6) escalarmente por $\vec{\rho}_2 \wedge \vec{U}$. Tendremos:

$$-\frac{c_1}{c_2}\rho_1\vec{\rho}_1(\vec{\rho}_2 \wedge \vec{U}) - \rho_2\vec{\rho}_2(\vec{\rho}_2 \wedge \vec{U}) - \frac{c_3}{c_2}\rho_3\vec{\rho}_3(\vec{\rho}_2 \wedge \vec{U}) = 0$$

es decir:

$$-\frac{c_1}{c_2}\rho_1[\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{U}] - \frac{c_3}{c_2}\rho_3[\vec{\rho}_3, \vec{\rho}_2, \vec{U}] = 0$$

de donde

$$\rho_3 = -\frac{c_1}{c_3} \frac{[\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{U}]}{[\vec{\rho}_3, \vec{\rho}_2, \vec{U}]} \rho_1$$

o también, llamando

$$M = -\frac{c_1}{c_3} \frac{[\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{U}]}{[\vec{\rho}_3, \vec{\rho}_2, \vec{U}]}$$

es

$$\rho_3 = M\rho_1 \quad (94.6)$$

Por otra parte,

$$\vec{r}_1^2 = r_1^2 = (\vec{R}_1 - \vec{\rho}_1)^2 = a_1 + b_1\rho_1 + e_1\rho_1^2 \quad (95.6)$$

$$\vec{r}_3^2 = r_3^2 = (\vec{R}_3 - \vec{\rho}_3)^2 = (\vec{R}_3 - M\rho_1\vec{\rho}_3)^2 = a_2 + b_2\rho_1 + e_2\rho_1^2 \quad (96.6)$$

y

$$\begin{aligned} c^2 &= (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)^2 = [(\vec{R}_3 - M\rho_1\vec{\rho}_3) - (\vec{R}_1 - \vec{\rho}_1)]^2 = \\ &= [(M\vec{\rho}_3 - \vec{\rho}_1)\rho_1 - (\vec{R}_3 - \vec{R}_1)]^2 = a_3 + b_3\rho_1 + e_3\rho_1^2 \end{aligned} \quad (97.6)$$

Si suponemos $\vec{U}$ conocido, es conocido M ya que, según Olbers, el factor $-\frac{c_1}{c_3}$ es igual al cociente entre el tiempo transcurrido entre la segunda y tercera observaciones y el transcurrido entre la primera y la segunda y que $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ son datos de observación y en (95.6), (96.6) y (97.6) se conocen todos los coeficientes.

Supongamos que tenemos un primer valor de $\vec{\rho}_1$ experimental. Podemos calcular $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ y c . Por otra parte, podemos calcular η de (90.6) y hallar c con la fórmula (92.6). Los dos valores de c obtenidos por uno y otro método no concuerdan demasiado, dependiendo su diferencia del valor inicial de $\vec{\rho}_1$.

Variando $\vec{\rho}_1$ podemos construir una tabla de diferencias $\Delta(\vec{\rho}_1)$ como función de $\vec{\rho}_1$. Buscaremos por interpolación cual es el valor que hace $\Delta(\vec{\rho}_1)=0$. Una vez obtenido un valor fiable de $\vec{\rho}_1$ hallaremos $\vec{\rho}_3$ y $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ con la fórmulas (94.6), (95.6) y (96.6).

6.4.4 Cálculo de los elementos orbitales

Recordemos las fórmulas del movimiento parabólico (3.9). Podemos escribir

$$r_1 = q \sec^2 \frac{V_1}{2} \quad r_3 = q \sec^2 \frac{V_3}{2}$$

donde q vendrá dado por

$$\sqrt{2\mu q} = c$$

siendo c la constante de las áreas. Por consiguiente:

$$\sqrt{2\mu q} = \frac{[\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_3]y}{t_3 - t_1}$$

siendo

$$y = \frac{(\vec{r}_1, \vec{r}_3)}{[\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_3]}$$

y

$$q = \frac{[\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_3]^2 y^2}{2\mu(t_3 - t_1)^2}$$

Si hacemos

$$\tan \frac{V}{2} = s$$

las componentes heliocéntricas ξ , η de una posición cualquiera son

$$\xi = q(1 - s^2) \qquad \eta = 2qs$$

y la ecuación que rige el movimiento parabólico

$$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t - T) = \frac{1}{3}s^3 + s$$

nos proporciona T . (Recordar una vez más las fórmulas (60.3) y (62.3)).

Capítol 7

PROBLEMA DE LOS N-CUERPOS

Conocemos con el nombre de *problema de los n-cuerpos* la descripción del movimiento de un sistema de n puntos materiales ($n \geq 2$) que se atraen dos a dos con una fuerza newtoniana.

El caso $n=2$ ha sido ya estudiado en el Cap. 3

Newton fue el primero en formular el problema de los n-cuerpos de una forma precisa, enunciándolo como sigue: Dadas en un instante las posiciones y las velocidades de tres o más partículas que se mueven bajo la acción de sus atracciones gravitatorias mútuas, siendo conocidas las masas de las partículas, calcular sus posiciones y velocidades para otro instante.

El problema se complica si se han de tener en cuenta la forma de los cuerpos y su constitución interna, como en el caso del sistema Tierra-Luna-Sol ($n=3$).

Vimos que para el caso $n=2$ el problema es totalmente integrable. Veremos en este capítulo que el de los n-cuerpos ($n \geq 3$) no lo es en un caso general. Quizás sea éste el hecho de que tantos matemáticos y astrónomos eminentes se hayan dedicado a su estudio en las últimas tres centurias, habiéndose expuesto, en consecuencia, varios trabajos, todos ellos condicionados por las diez *integrales primeras* del movimiento que fueron conocidas ya por Euler; las únicas que se conocen desde entonces y probablemente las únicas que existen.

En el caso del problema de los tres cuerpos Lagrange halló *soluciones particulares*, las cuales existen cuando se dan ciertas relaciones entre las condiciones iniciales.

Posteriormente, se ha progresado principalmente en el estudio de *problemas especiales* en los que se han utilizado aproximaciones de varios tipos. Por ejemplo, en el problema de los tres cuerpos restringido circular en que dos masas puntuales se mueven en órbitas circulares no perturbadas alrededor de su centro de masas común mientras atraen una partícula de masa tan pequeña que no puede afectar apreciablemente sus órbitas, del cual se hace aplicación actualmente al estudio del movimiento de un satélite artificial en el espacio Tierra-Luna.

7.1 Ecuaciones del movimiento

Consideremos n puntos materiales ($n > 2$) P_i ($i=1,2,\dots,n$) de masas respectivas m_i ($i=1,2,\dots,n$) referidos a un sistema de coordenadas cartesianas fijo al que asociamos la variable tiempo t de manera que las posiciones de los puntos P_i estén definidas por los vectores $\vec{r}_i(t)$ de componentes r_i^j ($i=1,2,\dots,n; j=1,2,3$). Supongamos que la acción mútua entre dos puntos P_i, P_k tiene por dirección la recta que los une y por módulo $G m_i m_k |\rho_{ik}|^{-1}$, donde G es la constante de la gravitación universal, ρ_{ik} la distancia entre P_i y P_k y $f(\rho_{ik})$ una cierta función de dicha distancia, estando el sentido de la fuerza que P_k ejerce sobre P_i definido por el vector $\vec{r}_{ik} = \vec{r}_k - \vec{r}_i$ con $\rho_{ik} = |\vec{r}_{ik}|$. Incluiremos en la función $f(\rho_{ik})$ el signo correspondiente que será negativo para las fuerzas repulsivas y positivo para las atractivas.

Las ecuaciones del movimiento del punto P_i serán:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^n m_i m_k f(\rho_{ik}) \frac{\vec{r}_{ik}}{\rho_{ik}} \quad (k \neq i; i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7)$$

habiendo hecho $G=1$ con el consiguiente cambio de la variable tiempo que seguiremos llamando t .

Introduzcamos las funciones escalares energía cinética T y función de fuerzas U dadas por las expresiones

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (2.7)$$

$$U = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_i m_k F(\rho_{ik}) \quad (i \neq k) \quad (3.7)$$

donde

$$F(\rho_{ik}) = \int f(\rho_{ik}) d\rho_{ik} \quad (4.7)$$

Si derivamos parcialmente la función U con respecto a una cualquiera de las componentes r_i^j tendremos:

$$\frac{\partial U}{\partial r_i^j} = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_i m_k f(\rho_{ik}) \frac{\partial \rho_{ik}}{\partial r_i^j} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_i m_k f(\rho_{ik}) \frac{r_{ik}^j}{\rho_{ik}} \quad (i \neq k) \quad (5.7)$$

que nos da para el gradiente $U_{\vec{r}_i}$, teniendo en cuenta (1.7), la expresión

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = U_{\vec{r}_i} \quad (6.7)$$

La función lagrangiana

$$L = T + U$$

verifica, evidentemente las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = m_i \ddot{\vec{r}}_i - U_{\vec{r}_i} \quad (7.7)$$

A partir de (7.7) podemos obtener la formulación canónica del problema. En efecto, sea $\vec{p}_i$ el momento correspondiente a $\vec{r}_i$,

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = L_{\dot{\vec{r}}_i} \quad (8.7)$$

y H la función hamiltoniana

$$H = T - U$$

Teniendo en cuenta (8.7) y que (2.7) se puede escribir ahora

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{m_i}$$

se obtienen las igualdades

$$H_{p_i} = \frac{\vec{p}_i}{m_i} = \dot{\vec{r}}_i$$

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = U_{\vec{r}_i} = -H_{\vec{r}_i}$$

que constituyen las ecuaciones canónicas del movimiento

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= H_{\vec{p}_i} \\ \dot{\vec{p}}_i &= -H_{\vec{r}_i} \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, n) \quad (9.7)$$

llamadas ecuaciones de Hamilton-Jacobi, equivalentes a las (1.7) y (6.7).

7.2 Las diez integrales clásicas

Las ecuaciones (1.7) constituyen un sistema de $3n$ ecuaciones escalares diferenciales de segundo orden. Por tanto, el sistema es de orden $6n$ y se necesitarían para resolverlo completamente $6n$ constantes de integración, es decir, $6n$ funciones de $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$, t que permanecieran constantes durante el movimiento. Se conocen si $n=2$; pero, en el caso general sólo se conocen 10.

Sumando las ecuaciones (1.7), teniendo en cuenta que $\vec{r}_{ik} = -\vec{r}_{ki}$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \quad (10.7)$$

e integrando dos veces:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{A} \quad (11.7)$$

y

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{A}t + \vec{B} \quad (12.7)$$

expresiones que constituyen seis integrales primeras cuyas seis constantes de integración son las componentes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Para hallar el significado de estas integrales definamos el centro de masas de los n cuerpos por el vector de posición $\vec{r}_o$:

$$\vec{r}_o = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = M^{-1} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (13.7)$$

con $M = \sum m_i$.

Teniendo en cuenta (11.7), (12.7) y (13.7) resulta:

$$M\vec{r}_o = \vec{A}t + \vec{B} \quad (14.7)$$

$$M\dot{\vec{r}}_o = \vec{A} \quad (15.7)$$

relaciones que nos dicen que el centro de masas del sistema se mueve en el espacio con movimiento rectilíneo y uniforme.

Las integrales (11.7) y (12.7) reciben el nombre de *integrales del centro de gravedad* o del *momento lineal*.

Multiplicando vectorialmente las ecuaciones (1.7) por $\vec{r}_i$ y sumando se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_i m_k \frac{f(\rho_{ik})}{\rho_{ik}} \vec{r}_i \wedge \vec{r}_{ik} \quad (i \neq k) \quad (16.7)$$

Pero,

$$\vec{r}_i \wedge \vec{r}_{ik} = \vec{r}_i \wedge (\vec{r}_k - \vec{r}_i) = \vec{r}_i \wedge \vec{r}_k$$

y

$$\vec{r}_k \wedge \vec{r}_{ki} = \vec{r}_k \wedge (\vec{r}_i - \vec{r}_k) = \vec{r}_k \wedge \vec{r}_i$$

por consiguiente, en el segundo miembro de (16.7) se van destruyendo los términos dos a dos y en consecuencia queda:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \ddot{\vec{r}}_i = 0 \quad (17.7)$$

e integrando, teniendo en cuenta la igualdad

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i) = \vec{r}_i \wedge \ddot{\vec{r}}_i$$

se obtiene

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i = \vec{c} \quad (18.7)$$

expresión que aporta tres nuevas integrales primeras al problema que reciben el nombre de *integrales de las áreas* o del *momento angular*. El vector $\vec{c}$ es el *momento angular* y sus componentes constituyen otras tres constantes de integración.

La ecuación (18.7) nos dice que el momento angular de las masas en el sistema es constante. El vector $\vec{c}$ define un plano llamado *plano invariante* de Laplace inclinado

1,5° respecto al plano de la eclíptica y situado entre los planos orbitales de Júpiter y Saturno.

Para hallar la décima constante de integración multipliquemos escalarmente la ecuación (6.7) por $\dot{\vec{r}}_i$ y sumemos con respecto al índice i . Obtendremos:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = U_{\vec{r}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{dU}{dt} \quad (19.7)$$

e integrando:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = U + h \quad (20.7)$$

o lo que es lo mismo (ver (2.7)):

$$T = U + h \quad (21.7)$$

expresión que constituye la llamada *integral de la energía* siendo la constante de integración h la *energía del sistema*.

El primer miembro de la ecuación (21.7) es la energía cinética del sistema, mientras que $-U$ es la energía potencial. Por consiguiente, dicha ecuación (21.7) establece que la energía total del sistema de los n cuerpos es constante. Dicho de otra forma, el sistema es conservativo.

Las expresiones dadas por (11.7), (12.7), (18.7) y (20.7) se denominan *integrales clásicas* del problema de los n cuerpos. De momento no se conocen más. Bruns y Poincaré demostraron que, aparte de las diez encontradas, no existen otras integrales del problema de los n cuerpos que den ecuaciones que contengan sólo funciones, algebraicas o integrales, de las coordenadas y velocidades de los cuerpos válidas para todas las masas y que satisfagan las ecuaciones del movimiento.

Es posible reducir el orden del problema utilizando las diez integrales clásicas; el origen de coordenadas puede trasladarse al centro de masas del sistema y con la ayuda de las integrales del área y de la energía se obtiene un sistema de orden $(6n - 10)$.

7.3 Teorema del virial

Sea J el momento de inercia del sistema definido por

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^2 \quad (22.7)$$

y derivemos dos veces con respecto al tiempo. Obtenemos:

$$\ddot{J} = 2 \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i \quad (23.7)$$

o bien, teniendo en cuenta (2.7) y (6.7)

$$\ddot{J} = 4T + 2 \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot U_{\vec{r}_i} \quad (24.7)$$

Pero,

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i U_{\vec{r}_i} = \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) \quad (25.7)$$

y si la función $f(\rho_{ik})$ es del tipo ρ_{ik}^{λ} , U es una función homogénea de grado $\lambda + 1$ (recordar (3.7) y (4.7)) y en virtud del teorema de Euler el segundo miembro de (25.7) es $(\lambda + 1)U$, de donde podemos escribir (24.7) en la forma

$$\ddot{J} = 4T + 2(\lambda + 1)U$$

y teniendo en cuenta (21.7), también:

$$\ddot{J} = 2(\lambda + 3)U + 4h \quad (26.7)$$

En particular, para el caso newtoniano ($\lambda = -2$) se tiene:

$$\ddot{J} = 2U + 4h = 2T + 2h \quad (27.7)$$

identidad que recibe el nombre de Lagrange-Jacobi.

En (27.7) T y U son positivos, de modo que si h es positiva, $\ddot{J}$ es positivo y J crece indefinidamente, de modo que por lo menos una de las $\vec{r}_i$ debe crecer hasta el límite del sistema de los n -cuerpos, lo cual es equivalente a decir que por lo menos uno de los cuerpos escapa del sistema. Para que el sistema sea estable es necesario que h sea negativa y tal que haga J negativo. De todos modos esta condición no es suficiente para que el sistema sea estable.

7.4 Coordenadas relativas

Sean n cuerpos $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ de masas respectivas m_i referidas a un sistema de coordenadas cartesianas ($O; X, Y, Z$) (Fig. 1.7). Sean $\vec{r}_i$ sus posiciones.

Tomemos el cuerpo P_n como origen de un nuevo sistema de coordenadas x, y, z . Si designamos por $\vec{x}_i$ el vector de posición del cuerpo P_i en este nuevo sistema, será:

$$\vec{x}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_n \quad (28.7)$$

Veamos como se escribirán las ecuaciones (1.7) en este sistema de coordenadas relativas.

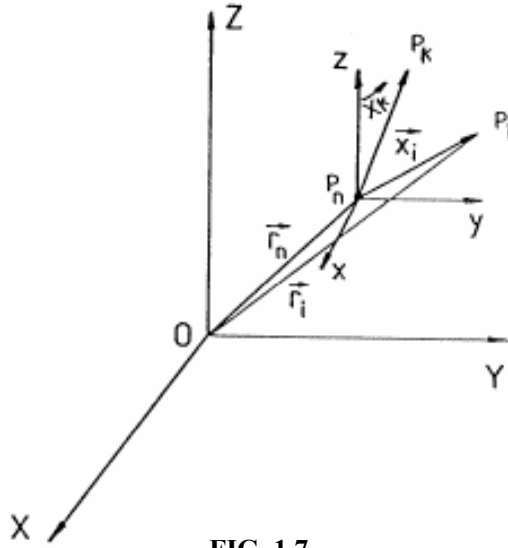


FIG. 1.7

Según (28.7) se tiene

$$\ddot{\vec{x}}_i = \ddot{\vec{r}}_i - \ddot{\vec{r}}_n = \sum_{k=i}^n m_k \frac{f(\rho_{ik})}{\rho_{ik}} \vec{r}_{ik} - \sum_{k=i}^{n-1} m_k \frac{f(\rho_{nk})}{\rho_{nk}} \vec{r}_{nk} \quad (29.7)$$

Aislando los términos para $k=n$ en la primera sumación y para $k=i$ en la segunda, resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}}_i &= -m_n \frac{f(|\vec{x}_i|)}{|\vec{x}_i|} \vec{x}_i + \sum_{k=1}^{n-1} m_k \frac{f(\rho_{ik})}{\rho_{ik}} \vec{r}_{ik} - m_i \frac{f(|\vec{x}_i|)}{|\vec{x}_i|} \vec{x}_i \sum_{k=1}^{n-1} m_k \frac{f(\rho_{nk})}{\rho_{nk}} \vec{r}_{nk} = \\ &= -(m_n + m_i) \frac{f(|\vec{x}_i|)}{|\vec{x}_i|} \vec{x}_i + \sum_{k=1}^{n-1} m_k \left(\frac{f(\rho_{ik})}{\rho_{ik}} \vec{r}_{ik} - \frac{f(\rho_{nk})}{\rho_{nk}} \vec{r}_{nk} \right) \end{aligned}$$

o también:

$$\ddot{\vec{x}}_i + (m_n + m_i) \frac{f(|\vec{x}_i|)}{|\vec{x}_i|} \vec{x}_i = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{f(|\vec{x}_k - \vec{x}_i|)}{|\vec{x}_k - \vec{x}_i|} (\vec{x}_k - \vec{x}_i) - \frac{f(|\vec{x}_k|)}{|\vec{x}_k|} \vec{x}_k \right] \quad (30.7)$$

Haciendo

$$\phi = - \sum_{k=1}^n m_k \left[F(|\vec{x}_k - \vec{x}_i|) + \frac{f(|\vec{x}_k|)}{|\vec{x}_k|} \vec{x}_i \cdot \vec{x}_k \right]$$

con F dada por (4.7), se comprueba que el segundo miembro de (30.7) es el gradiente $\phi_{\vec{x}_i}$ de la función ϕ con respecto a $\vec{x}_i$.

En particular, para el caso newtoniano es

$$f(\rho_{ik}) = \rho_{ik}^{-2}$$

y

$$F = \int \rho_{ik}^{-2} d\rho_{ik} = -\rho_{ik}^{-1} = -\frac{1}{|\vec{x}_k - \vec{x}_i|}$$

$$\frac{f(\rho_{ik})}{\rho_{ik}} = \rho_{ik}^{-3}$$

Por consiguiente:

$$\phi = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n m_k \left[\frac{1}{|\vec{x}_k - \vec{x}_i|} - \frac{\vec{x}_i \cdot \vec{x}_k}{|\vec{x}_k|^3} \right]$$

y

$$\phi_{x_i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n m_k \left[\frac{\vec{x}_k - \vec{x}_i}{|\vec{x}_k - \vec{x}_i|^3} - \frac{\vec{x}_k}{|\vec{x}_k|^3} \right] \quad (31.7)$$

Luego:

$$\ddot{\vec{x}}_i + (m_n + m_i) \frac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|^3} = \sum_{k=1}^n m_k \left[\frac{\vec{x}_k - \vec{x}_i}{|\vec{x}_k - \vec{x}_i|^3} - \frac{\vec{x}_k}{|\vec{x}_k|^3} \right] \quad (32.7)$$

Los primeros términos del segundo miembro son las *atracciones directas* sobre el cuerpo de masa m_i debidas a los cuerpos perturbadores. Los segundos términos reciben el nombre de *términos (o atracciones) indirectos*.

7.4.1 Aplicación al Sistema Solar

Consideremos las ecuaciones del movimiento de un cuerpo de masa despreciable (un cometa, por ejemplo) en el Sistema Solar. Si tomamos como origen de coordenadas relativas el Sol y llamamos $\vec{r}$ al vector de posición del cometa y $\vec{r}_k$ ($k = 1, 2, \dots, 9$) los vectores de posición heliocéntricos de los planetas, según (32.7), tendremos:

$$\ddot{\vec{r}} + M \frac{\vec{r}}{r^3} = \sum_{k=1}^9 m_k \left[\frac{\vec{r}_k - \vec{r}}{|\vec{r}_k - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_k}{|\vec{r}_k|^3} \right] \quad (33.7)$$

donde M representa la masa del Sol, m_k las masas de cada uno de los planetas (recordemos que $G = 1$).

$\sum_{k=1}^9$ representa la sumación sobre los nueve planetas en orden de distancias

medias crecientes del planeta al Sol. Debido al movimiento propio de los cometas el término de mayor contribución en el segundo miembro es el relativo a Júpiter, m_5 , pudiendo ser los efectos de los demás planetas relativamente pequeños. En la práctica, por consiguiente, la fórmula (33.7) se puede simplificar; pero, en cada caso, las simplificaciones deberán ser justificadas. Así, a menos que el cometa se mueva en su órbita

muy cerca de Plutón, el término $k = 9$ se puede despreciar puesto que tanto las atracciones directas como las indirectas de (33.7) son muy pequeñas. No sucede lo mismo en el caso de Mercurio en que dichos términos no son despreciables.

El término indirecto debido a Mercurio es:

$$-m_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}$$

Si llamamos r_1^o al centro de masas del Sol y de Mercurio, tendremos:

$$\vec{r}_1^o = \frac{m_1}{M + m_1} \vec{r}_1$$

lo que da lugar a:

$$\ddot{\vec{r}}_1^o = \frac{m_1}{M + m_1} \ddot{\vec{r}}_1$$

Por consiguiente, después de estas consideraciones podemos escribir (33.7) en la forma

$$\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_1^o + M \frac{\vec{r}}{r^3} = \sum_{k=1}^8 m_k \frac{\vec{r}_k - \vec{r}}{|\vec{r}_k - \vec{r}|^3} - \sum_{k=2}^8 m_k \frac{\vec{r}_k}{|\vec{r}_k|^3} \quad (34.7)$$

Observamos que despreciar un término indirecto afecta, parcialmente, a un cambio de origen del sistema de referencia. En trabajos prácticos sobre perturbaciones cometarias conviene muchas veces despreciar los planetas Mercurio, Venus, La Tierra y Marte debido a la pequeñez de sus perturbaciones directas. Las perturbaciones indirectas son absorbidas por un cambio de origen al centro de masas del Sol y los cuatro planetas citados. Si el vector de posición de dicho centro de masas es $\vec{r}_4^o$ escribiremos:

$$\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_4^o + M \frac{\vec{r}}{r^3} = \sum_{k=5}^8 m_k \frac{\vec{r}_k - \vec{r}}{|\vec{r}_k - \vec{r}|^3} - \sum_{k=5}^8 m_k \frac{\vec{r}_k}{|\vec{r}_k|^3} \quad (35.7)$$

$\vec{r}_4^o$ está tabulado en “Planetary coordinates for the years...”

Si el cometa es tal que $|r| \gg |rk|$ ($k=1,2,3,4$) entonces

$$\frac{\vec{r}_k - \vec{r}}{|\vec{r}_k - \vec{r}|^3} \simeq -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

y haciendo

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_4^o$$

es

$$\frac{\vec{r}}{r^3} \simeq \frac{\vec{r}'}{r'^3}$$

Por otra parte, si tomamos:

$$M_4 = M + \sum_{k=1}^4 m_k \quad (36.7)$$

podemos escribir (35.7) en la forma:

$$\ddot{\vec{r}}' + M_4 \frac{\vec{r}'}{r'^3} = \sum_{k=5}^8 m_k \left[\frac{\vec{r}_k - \vec{r}'}{|\vec{r}_k - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r}_k}{r_k^3} \right] \quad (37.7)$$

A la suma (36.7) se la llamaba antiguamente “caída de los planetas dentro del Sol”. La fórmula (37.7) nos da el movimiento del cometa con respecto al baricentro r'_4 en función de las posiciones heliocéntricas de los planetas Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

7.5 Problema de los tres cuerpos

Llamaremos problema de los tres cuerpos al caso particular del de los n -cuerpos para $n = 3$.

El sistema (1.7) en el caso newtoniano se escribirá:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^3 m_k \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{r_{ik}^3} \quad (k \neq i, i = 1, 2, 3) \quad (38.7)$$

y equivaldrá a un sistema de nueve ecuaciones escalares diferenciales de segundo orden. El orden del sistema será, por tanto, 18, lo cual quiere decir que se precisarán 18 constantes de integración para que quede completamente determinado el movimiento de los tres cuerpos.

De la misma manera que en 7.2 se pueden obtener también aquí diez integrales primeras: las seis del momento lineal

$$\sum_{i=1}^3 m_i \dot{\vec{r}} = \vec{A} \quad (39.7)$$

$$\sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i = \vec{A}t + \vec{B} \quad (40.7)$$

las tres del momento angular

$$\sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i = \vec{C} \quad (41.7)$$

y la de la energía

$$T - U = h \quad (42.7)$$

donde T y U tienen el mismo significado que (2.7) y (3.7) para $i = 1, 2, 3$ y $f(\rho_{ik}) = \rho_{ik}^{-2}$.

Conocidas estas integrales el orden del sistema puede reducirse a $18 - 10 = 8$. También se consigue una reducción de dos órdenes más aplicando lo que se llama la *eliminación de los nodos*, que consiste en eliminar la variable tiempo y elegir como una de las coordenadas de posición del sistema el ángulo formado por la normal al plano de los tres cuerpos y un eje fijo. Esta reducción, que ya estaba implícitamente contenida en los trabajos de Lagrange, fue desarrollada por primera vez con toda precisión por Jacobi en 1842.

Sundman en 1912 obtuvo una solución general del problema de los tres cuerpos; pero, su expresión es tan complicada y las series utilizadas tan lentamente convergentes que la hacen impracticable. Las únicas integrales primeras con las que se puede contar, por el momento, son las diez mencionadas, llamadas *integrales clásicas*. Sin embargo, existen, como veremos, situaciones especiales en que el problema se puede resolver analíticamente.

7.5.1 Caso en que $r_{12} \ll r_{13}$ y $r_{12} \ll r_{23}$

Supongamos tres cuerpos de masa m_1 , m_2 , m_3 y sean (Fig. 2.7) $\vec{r}_{12} \ll \vec{r}_{13}$ y $\vec{r}_{12} \ll \vec{r}_{23}$. Sería, por ejemplo, el caso de la Tierra (m_1), la Luna (m_3) y un satélite artificial de la Tierra (m_2).

Para simplificar haremos:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}, \quad \vec{r}_{13} = \vec{R}, \quad \vec{r}_{23} = \vec{\rho}$$

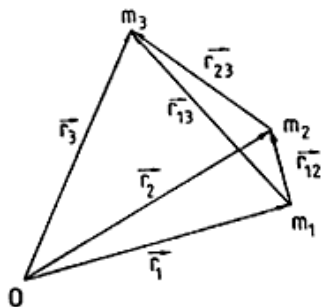


FIG. 2.7

Sustituyendo en las dos primeras ecuaciones del sistema (38.7) explicitando el valor de G , tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= Gm_2 \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm_3 \frac{\vec{R}}{R^3} \\ \ddot{\vec{r}} &= -Gm_1 \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm_3 \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \end{aligned} \right\} \quad (43.7)$$

y restando miembro a miembro:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} + Gm_3 \left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

o también, haciendo $G(m_1 + m_2) = \mu$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + Gm_3 \left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \quad (44.7)$$

que expresa el movimiento del satélite artificial alrededor de la Tierra perturbado por la presencia de la Luna. El segundo término del segundo miembro es la fuerza perturbatriz $\vec{f}$ que interesa expresar en función de $\vec{R}$ y $\vec{r}$ para estudios posteriores.

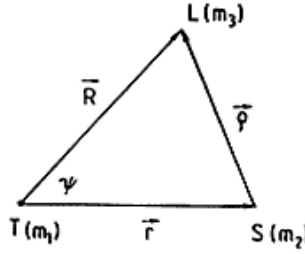


FIG.3.7

Del triángulo de la Fig. 3.7 deducimos:

$$\vec{\rho} = \vec{R} - \vec{r} \quad (45.7)$$

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r} \quad (46.7)$$

o también:

$$\rho = R \left(1 - 2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

de donde:

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{R^3} \left(1 - 2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

y teniendo en cuenta que $r \ll R$ y por tanto $\frac{r}{R} \ll 1$:

$$\frac{1}{\rho^3} \simeq \frac{1}{R^3} \left(1 - 2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

que desarrollado en serie da

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{R^3} \left(1 + 3 \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + \dots \right)$$

Con todo ello y teniendo en cuenta (45.7), $\vec{f}$ será:

$$\vec{f} = Gm_3 \left(\frac{\vec{R} - \vec{r}}{\rho^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = Gm^3 \left[-\frac{\vec{r}}{\rho^3} + \vec{R} \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) \right] = Gm^3 \left[-\frac{\vec{r}}{\rho^3} + 3 \frac{\vec{R}}{R^4} r \cos \psi \right]$$

y si $\rho \approx R$ todavía

$$\vec{f} = Gm^3 \left[-\frac{\vec{r}}{R^3} + 3 \frac{\vec{R}}{R^4} r \cos \psi \right]$$

Esta fórmula, ya de por sí muy sencilla, se puede simplificar todavía más si se considera que durante una revolución del satélite en torno a la Tierra, la Luna se desplaza menos de 1° y por tanto se puede tomar $\vec{R}$ constante en una vuelta.

7.5.2 El problema restringido circular

En este caso se supone despreciable la masa de uno de los cuerpos, por ejemplo la masa m_3 , respecto a las masas m_1 y m_2 de los otros dos cuerpos, de modo que m_1 y m_2 perturban el movimiento del cuerpo de masa m_3 pero m_3 no influye en el movimiento de los cuerpos de masas m_1 y m_2 .

Supondremos $m_1 > m_2$ y que la órbita relativa de m_2 respecto a m_1 es una circunferencia. Se tratará pues de estudiar el movimiento de tres cuerpos de los cuales dos de masa finita giran uno alrededor del otro en órbitas circulares mientras un tercer cuerpo de masa infinitesimal se mueve en su campo. Esta situación que fue estudiada principalmente por Poincaré y Hill entre otros, se halla con alguna aproximación en el Sistema Solar.

Tomemos el sistema (38.7) y escribámoslo para este caso:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= Gm_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= Gm_1 \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 &= Gm_1 \frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_{32}}{r_{32}^3} \end{aligned} \right\} \quad (47.7)$$

Restando las dos primeras ecuaciones y haciendo $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{12} = \vec{r}$ resulta:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (48.7)$$

con $\mu = G(m_1 + m_2)$.

La ecuación (48.7) expresa el movimiento relativo del cuerpo de masa m_2 con respecto al de masa m_1 . La tercera ecuación de (47.7) nos da el movimiento del tercer cuerpo de masa m_3 .

Supongamos que O es el centro de gravedad de los cuerpos de masas m_1 y m_2 (Fig. 4.7). Puesto que m_3 es infinitamente pequeña se puede suponer que O es también el centro de gravedad de los tres cuerpos.

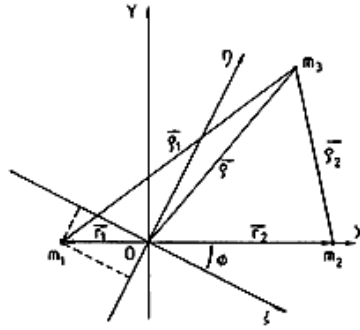


FIG. 4.7

Tomemos dos sistemas de coordenadas con origen en O definidos: uno de ellos, x, y, z , móvil, de modo que el eje x coincida con la recta que une los cuerpos de masas m_1 y m_2 , el eje y esté situado en el plano de la órbita que describe el cuerpo de masa m_2 alrededor del de masa m_1 y el eje z formando triedro trirectángulo con ellos; el otro ξ, η, ζ , que no gire con los cuerpos, es decir, fijo en el espacio y tal que $\zeta = z$.

Para pasar de la base ξ, η, ζ a la base x, y, z utilizaremos la matriz

$$R_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49.7)$$

donde ϕ es el ángulo que forman los ejes ξ y x en cada instante.

Estudiaremos el movimiento del cuerpo de masa m_3 respecto a los ejes móviles. Por comodidad en la notación haremos:

$$\vec{r}_3 = \rho \quad \vec{r}_{13} = \rho_1 \quad \vec{r}_{23} = \rho_2$$

con lo cual la tercera ecuación de (47.7) se escribirá:

$$\ddot{\rho} = -G \frac{m_1}{e_1^3} \rho_1 - G \frac{m_2}{e_2^3} \rho_2 \quad (50.7)$$

Para simplificar el problema podemos considerar un espacio más reducido (plano) y definir los vectores

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

y la matriz de giro

$$M(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

que aplicada a $\vec{\sigma}$ nos dará $\vec{s}$

$$\vec{s} = M(\phi)\vec{\sigma}$$

Con este convenio la equivalente a la ecuación (50.7) será:

$$\ddot{\vec{\sigma}} = -G \frac{m_1}{e_1^3} \vec{\sigma}_1 - G \frac{m_2}{e_2^3} \vec{\sigma}_2 \quad (51.7)$$

Recordemos las siguientes propiedades de la matriz $M(\phi)$:

$$M(\phi) \cdot M(\psi) = M(\phi + \psi)$$

$$\dot{M}(\phi) = \dot{\phi} M(\phi + 90^\circ)$$

$$(M(\phi))^{-1} = M(-\phi)$$

Luego,

$$\vec{\sigma} = M(-\phi)\vec{s} \quad (52.7)$$

y derivando dos veces:

$$\dot{\vec{\sigma}} = M(-\phi) \cdot \dot{\vec{s}} - \dot{\phi} M(-\phi + 90^\circ) \cdot \vec{s} \quad (53.7)$$

$$\ddot{\vec{\sigma}} = M(-\phi) \cdot \ddot{\vec{s}} - 2\dot{\phi} M(-\phi + 90^\circ) \cdot \dot{\vec{s}} + \dot{\phi}^2 M(-\phi + 180^\circ) \cdot \vec{s} - \ddot{\phi} M(-\phi + 90^\circ) \cdot \vec{s} \quad (54.7)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la definición que hemos dado de ϕ , si n es el movimiento medio del cuerpo de masa m_2 y ϕ_0 es un valor inicial de ϕ será

$$\phi = nt + \phi_0$$

de donde

$$\dot{\phi} = n$$

$$\ddot{\phi} = 0$$

Suponiendo $\phi = 0$, tendremos, al sustituir en (52.7), (53.7) y (54.7):

$$\vec{\sigma} = M(-\phi)\vec{s} \quad (55.7)$$

$$\dot{\vec{\sigma}} = M(-\phi) \cdot \dot{\vec{s}} - nM(-\phi + 90^\circ) \cdot \vec{s} \quad (56.7)$$

$$\ddot{\vec{\sigma}} = M(-\phi) \cdot \ddot{\vec{s}} - 2nM(-\phi + 90^\circ) \cdot \dot{\vec{s}} + n^2 M(-\phi + 180^\circ) \cdot \vec{s} \quad (57.7)$$

la expresión (55.7) escrita para $\vec{\sigma}_1$ y $\vec{\sigma}_2$ y sustituida en (51.7) nos dará

$$\ddot{\vec{\sigma}} = -G \frac{m_1}{\rho_1^3} M(-\phi) \vec{s}_1 - G \frac{m_2}{\rho_2^3} M(-\phi) \vec{s}_2$$

y multiplicando por la izquierda por $M(\phi)$ teniendo en cuenta el valor de $\ddot{\vec{\sigma}}$ dado por (57.7) y que

$$M(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = I, \quad M(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A, \\ M(180^\circ) = -I$$

obtenemos:

$$\left[\ddot{\vec{s}} - 2nA\dot{\vec{s}} = n^2\vec{s} - G \frac{m_1}{\rho_1^3} \vec{s}_1 - G \frac{m_2}{\rho_2^3} \vec{s}_2 \right]_{x,y} \quad (58.7)$$

y como que el tercer eje es común:

$$\left[\ddot{\vec{z}} = -G \frac{m_1}{\rho_1^3} \vec{z} - G \frac{m_2}{\rho_2^3} \vec{z} \right]_z \quad (59.7)$$

En el sistema de ejes móviles las coordenadas de los cuerpos de masas m_1 y m_2 son respectivamente $(x_1, 0, 0)$ y $(x_2, 0, 0)$; por tanto, los vectores $\vec{s}_1$ y $\vec{s}_2$ que figuran en (58.7) serán

$$\vec{s}_1 = \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y \end{bmatrix} \quad \vec{s}_2 = \begin{bmatrix} x - x_2 \\ y \end{bmatrix}$$

Veamos ahora cual es el significado del término $-2nA\dot{\vec{s}}$. Recordando el significado de A y $\dot{\vec{s}}$ tenemos:

$$nA\dot{\vec{s}} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \dot{y} \\ -n & \dot{x} \end{bmatrix} \quad (60.7)$$

y considerando por otra parte el vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix}$, podemos escribir

$$\vec{n} \wedge \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n\dot{y} \\ n\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61.7)$$

Comparando, pues, (60.7) con (61.7) vemos que

$$-2nA\dot{\vec{s}} = 2(\vec{n} \wedge \dot{\vec{r}})$$

Luego, podemos escribir conjuntamente (58.7) y (59.7) en la forma

$$\ddot{\vec{r}} + 2\vec{n} \wedge \dot{\vec{r}} = \nabla U \quad (62.7)$$

siendo

$$U = \frac{1}{2} n^2 s^2 + G \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)$$

La ecuación (62.7) se puede integrar fácilmente multiplicando sus dos miembros escalarmente por $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + 2(\vec{n} \wedge \dot{\vec{r}}) \cdot \dot{\vec{r}} = \nabla U \cdot \dot{\vec{r}} \quad (63.7)$$

pero, $\dot{\vec{r}} = V$ y $\nabla U \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{dU}{dt}$ por tanto, podemos escribir (63.7) en la forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (V^2) + 0 = \frac{dU}{dt}$$

de donde

$$V^2 = 2U - C \quad (64.7)$$

expresión que recibe el nombre de *integral de Jacobi* o de la energía relativa y que nos da el módulo de la velocidad del cuerpo infinitesimal en cada posición en el sistema móvil.

La integral de Jacobi se puede expresar también en función de las coordenadas y las componentes de la velocidad en el sistema de coordenadas fijo, obteniéndose:

$$v^2 - 2n(\vec{\rho} \wedge \vec{v}) = 2U - C \quad (65.7)$$

siendo v la velocidad del cuerpo de masa m_3 en el sistema fijo.

7.5.3 Criterio de Tisserand

Una aplicación de la ecuación de Jacobi es el criterio de Tisserand para la identificación de cometas.

Si un cometa se aproxima mucho a Júpiter, o a otro de los planetas, su órbita puede resultar muy perturbada y, a menos que alguna propiedad de su órbita heliocéntrica no se vea afectada por la perturbación planetaria, en su nuevo paso será difícil identificarlo.

Tisserand consideró la situación Sol-planeta-cometa como un ejemplo del problema restringido circular de los tres cuerpos en que el cometa juega el papel de cuerpo de masa infinitesimal. El planeta es generalmente Júpiter, de gran masa y distancia al Sol grande, y cuya órbita, aunque no circular, de excentricidad suficientemente pequeña para poderse despreciar. En la integral de Jacobi, aunque el cometa sea perturbado por Júpiter, la constante C se conservará invariante y dicha invariancia permitirá identificar el cometa.

Utilizaremos para sustituir en (65.7) los elementos orbitales de los dos posibles cometas en lugar de las coordenadas y velocidad de los mismos.

En el caso de Júpiter y el Sol es $\mu \approx 10^{-3}$, de modo que el centro del Sol puede tomarse como origen sin error sensible. Si $\vec{\rho}$ y $\vec{c}$ son el radio vector heliocéntrico del

cometa y la constante de las áreas en el problema de los dos cuerpos Sol-cometa, i , a y e son respectivamente la inclinación de la órbita del cometa con respecto al plano de la órbita de Júpiter alrededor del Sol, el semieje mayor y la excentricidad de la órbita del cometa, la integral de la energía del cometa nos da

$$v^2 = Gm_1 \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a} \right)$$

y la integral de las áreas

$$\vec{\rho} \wedge \vec{v} = \vec{c}$$

con

$$\vec{\rho} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} \end{bmatrix} = c \cos i$$

y

$$c^2 = Gm_1 a (1 - e^2)$$

Sustituyendo estas expresiones en (65.7) obtenemos:

$$Gm_1 \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a} \right) - 2n \sqrt{Gm_1 a (1 - e^2)} \cos i = 2G \frac{m_1}{\rho} + 2G \frac{m_2}{\rho_2} - C \quad (66.7)$$

(ρ_2 = distancia Júpiter-cometa).

Ahora bien, si designamos por A la distancia de Júpiter al Sol es

$$G(m_1 + m_2) = n^2 A^3$$

de donde,

$$n = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{A^3}}$$

y sustituyendo en (66.7) y operando, teniendo en cuenta que $m_2/m_1 \approx 0.001$, resulta, suprimiendo los términos afectados por dicho cociente

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{\frac{a(1 - e^2)}{A^3}} \cos i = \frac{C}{Gm_1} \quad (67.7)$$

Si observamos, pues, el paso de los que parecen ser dos cometas y los elementos orbitales que intervienen en la fórmula (67.7) del primero son a_o , e_o , i_o y del segundo a_1 , e_1 , i_1 y se verifica

$$\frac{1}{a_o} + 2\sqrt{\frac{a_o(1 - e_o^2)}{A^3}} \cos i_o = \frac{1}{a_1} + 2\sqrt{\frac{a_1(1 - e_1^2)}{A^3}} \cos i_1 \quad (68.7)$$

es muy probable que se trate de un mismo cometa; pero, si los dos miembros de (68.7) son muy distintos, podemos asegurar que se trata de dos cometas distintos. Tal es el criterio de Tisserand válido sólo aproximadamente. Debemos observar que aun que en

la deducción de la fórmula (67.7) se ha utilizado la inclinación de la órbita del cometa respecto a la de Júpiter, en la práctica, y sin error notable, en la fórmula (68.7) se utiliza la inclinación de la órbita del cometa respecto a la eclíptica.

7.5.4 Superficies de velocidad relativa nula

La ecuación (64.7) es una relación entre el cuadrado de la velocidad y las coordenadas del cuerpo infinitesimal referido a los ejes que giran. Por consiguiente, cuando se ha determinado la constante de integración C numéricamente, por las condiciones iniciales, dicha ecuación determina la velocidad con que el cuerpo infinitesimal se moverá en todos los puntos del espacio que gira; y, recíprocamente, para una velocidad dada, la ecuación (64.7) da el lugar de puntos del espacio relativo donde puede estar el cuerpo de masa infinitesimal.

En particular, si en (64.7) hacemos $V = 0$, nos queda

$$2U = C$$

o teniendo en cuenta el valor de U :

$$n^2(x^2 + y^2) + 2G\left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}\right) = C \quad (69.7)$$

Pero, recordando que $G(m_1 + m_2) = n^2 A^3$ con $A = r_1 + r_2$, podemos escribir (69.7) de la forma:

$$\frac{x^2 + y^2}{A^2} + 2\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{A}{\rho_1} + 2\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{A}{\rho_2} = \frac{CA}{G(m_1 + m_2)}$$

y tomando $A = l$, $m_1 + m_2 = l$, $m_2/(m_1 + m_2) = v$, $m_1/(m_1 + m_2) = l - v$, finalmente:

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-v)}{\rho_1} + 2\frac{v}{\rho_2} = C \quad (70.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (x - x_1)^2 + y^2 + z^2 \\ \rho_2^2 &= (x - x_2)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Para un dado valor de C (70.7) será el lugar de puntos situados en la superficie representada por la misma fórmula (70.7) y para distintos valores de C tendremos el lugar de superficies en el espacio definidas por (70.7).

La ecuación (70.7) define, para un dado valor de C los límites de las regiones en que el cuerpo de masa m_3 puede moverse. Es evidente que estas regiones son aquellas para las cuales es $2U > C$ pues de lo contrario V^2 sería negativo y resultarían valores imaginarios para la velocidad. Dicha ecuación recibe el nombre de *superficie límite de Hill* y no nos dice nada acerca de las órbitas que la partícula describe en el espacio en que se puede mover. Para obtenerlas es preciso conocer otras integrales del problema.

Las superficies expresadas por la ecuación (70.7) corresponden a las superficies de potencial constante ya que $2U = C$.

Puesto que en (70.7) y y z figuran sólo elevadas al cuadrado, resulta que las superficies límites de Hill son simétricas respecto al plano xy y respecto al plano xz , y cuando $v = 1/2$ también con respecto al plano yz (si $v = 1/2$ los puntos x_1 y x_2 están situados simétricamente respecto al origen). Las superficies para $v \neq 1/2$ pueden considerarse como deformaciones de aquellas para las cuales $v = 1/2$.

Para tener una idea aproximada de la forma de estas superficies estudia-remos la de las curvas que resultan al cortar por los planos de referencia.

La ecuación de las curvas de intersección de las superficies con el plano xy se obtiene haciendo $z = 0$ en (70.7) y de la fórmula es

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-v)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} + \frac{2v}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}} = C \quad (71.7)$$

Para valores muy grandes de x y de y que satisfagan esta ecuación, el tercer y cuarto términos no son demasiado importantes y la ecuación puede escribirse

$$x^2 + y^2 = C - \epsilon$$

donde ϵ es una cantidad pequeña. Esta ecuación representa un círculo de radio $\sqrt{C - \epsilon}$; por consiguiente, una rama de la curva en el plano xy es aproximadamente un óvalo circular asintótico al cilindro de eje el eje z y radio $\sqrt{C}$ en el interior del cual están contenidas las superficies. En efecto, cuando $z^2 \rightarrow \infty$, la ecuación (70.7) tiende a convertirse en la $x^2 + y^2 = C$. Cuanto mayor sea C , mayores son los valores de x y de y que satisfacen la ecuación y más pequeño es ϵ , y el óvalo es más circular.

Para valores pequeños de x y de y que satisfacen (71.7) el primer y segundo términos son poco importantes y la ecuación puede escribirse

$$\frac{1-v}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} + \frac{v}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}} = \frac{C}{2} - \epsilon \quad (72.7)$$

ecuación de la curva equipotencial para los dos centros de fuerza $1 - v$ y v . Si C es grande, se compone de dos óvalos cerrados alrededor de cada uno de los centros $1 - v$ y v (a,b Fig. 5.7). Para valores pequeños de C estos óvalos tienen tendencia a unirse entre sí. Hay un valor determinado de C para el cual los óvalos que envuelven $1 - v$ y v se encuentran en un punto doble L_2 en el cual tienen una tangente común. Si el valor de C se hace más pequeño, los óvalos se unen para formar una superficie única con un cuello estrecho, indicada por C en la Fig. 5.7, por donde es posible que la partícula escape de la proximidad de una de las masas finitas hacia la otra, pero todavía no es posible que escape a la otra región. Para un nuevo decrecimiento de C , la región interior encuentra a la exterior en un nuevo punto doble L_3 . Si C sigue decreciendo, se halla otro punto doble L_1 , mientras que el ensanchamiento del cuello en torno a L_3 proporciona a la partícula de masa infinitesimal la posibilidad de salir de la región que envuelve las dos masas finitas (e en Fig. 5.7). Si el proceso de decrecimiento de C continúa, las regiones inaccesibles para la partícula m_3 sobre el plano xy se encogen hasta quedar reducidas a dos puntos, L_4 y L_5 (f en Fig. 5.7).

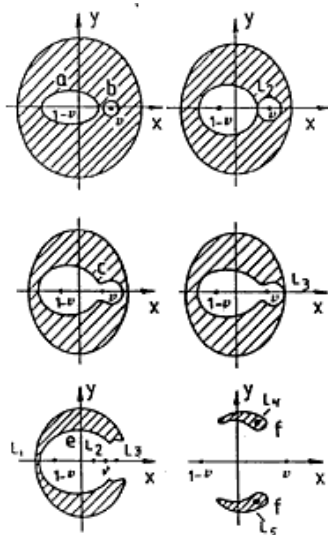


FIG. 5.7

En la Fig. 6.7 se representan simultáneamente todas las curvas que hemos ido considerando.

Para obtener las intersecciones de las superficies con el plano xz haremos $y = 0$ en la ecuación (70.7), con lo que obtendremos

$$x^2 + \frac{2(1-v)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + z^2}} + \frac{2v}{\sqrt{(x-x_2)^2 + z^2}} = C \quad (73.7)$$

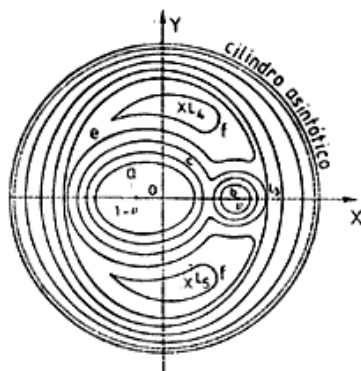


FIG. 6.7

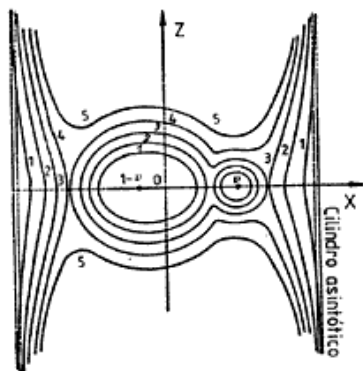


FIG. 7.7

Para valores muy grandes de x y de z que satisfagan esta ecuación, el segundo y tercer términos no son muy importantes y podremos escribir

$$x^2 = C - \epsilon$$

que es la ecuación de un par de rectas paralelas al eje z . Cuanto mayor sea C mayor es el valor de x que para un dado valor de z satisface la ecuación y menor es el valor de ϵ . Las rectas que corresponden al valor máximo de C son generatrices del cilindro asintótico. Para valores pequeños de x y de z que satisfagan la ecuación (73.7) podremos escribir

$$\frac{1-v}{\sqrt{(x-x_1)^2 + z^2}} + \frac{v}{\sqrt{(x-x_2)^2 + z^2}} = \frac{C}{2} - \epsilon \quad (74.7)$$

Volvemos a encontrar la ecuación de las curvas equipotenciales que tienen las mismas propiedades que las anteriores. Por consiguiente, la forma de las curvas en el plano xz es cualitativamente la dada en la Fig. 7.7, donde los números 1, 2, ... indican las curvas que corresponden a distintos valores decrecientes de C .

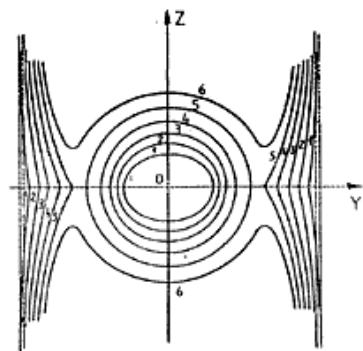


FIG. 8.7

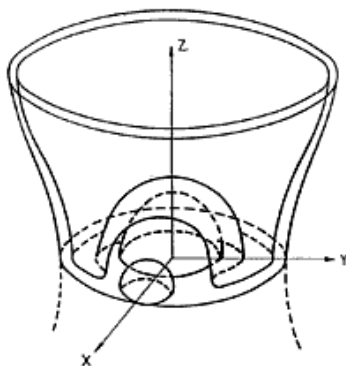


FIG. 9.7

Haciendo $x = 0$ en la ecuación (70.7) obtenemos la ecuación de las curvas de intersección de las superficies y el plano yz , esto es:

$$y^2 + \frac{2(1-v)}{\sqrt{x_1^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2v}{\sqrt{x_2^2 + y^2 + z^2}} = C \quad (75.7)$$

Para valores muy grandes de y y de z que satisfagan la ecuación (75.7) el segundo y tercer términos son poco importantes y podemos escribir

$$y^2 = C - \epsilon$$

que es la ecuación de un par de líneas próximas a las generatrices del cilindro asintótico y que se aproximan a él cuando C aumenta. Si $1 - v$ es mucho mayor que v , el valor numérico de x_2 es mucho mayor que el de x_1 ; por consiguiente, para pequeños valores de y y de z que satisfagan (75.7) dicha ecuación se podrá escribir

$$\frac{2(1-v)}{\sqrt{x_1^2 + y^2 + z^2}} = C - \epsilon$$

que es la ecuación de un círculo de radio tanto mayor cuanto menor sea C . La forma de las curvas en el plano yz es cualitativamente la representada en la Fig. 8.7, donde los números 1,2,... indican, como antes, las curvas que corresponden a distintos valores decrecientes de C .

Es evidente, después del estudio efectuado, que las superficies de Hill para distintos valores de C consistirán, si C es grande, de dos superficies cerradas, aproximadamente esféricas, que envuelven cada una de las masas finitas, metidas dentro de un conjunto de superficies que cuelgan a modo de cortinas de un cilindro asintótico simétrico con respecto al plano xy ; conforme el valor de C va disminuyendo, las superficies esféricas se van expandiendo y acercando una a la otra hasta unirse para después, formando ya una sola superficie y para valores de C todavía más pequeños, encontrarse con las “cortinas”, estando los primeros puntos de contacto en el plano xy . Para valores de C suficientemente pequeños, las superficies constan de dos partes simétricas respecto al plano xy , sin puntos comunes. En la Fig. 9.7 damos un esquema simplificado de la forma de estas superficies.

Hallada la forma de las superficies de Hill, podemos ver en que regiones del espacio relativo se puede mover la partícula de masa infinitesimal. La ecuación (64.7) nos da el cuadrado de la velocidad y ya hemos dicho que para que la velocidad sea real debe ser $2U > C$. Si esto ocurre en el interior de una superficie cerrada ocurrirá en cualquier otro punto interior a ella ya que la función cambia de signo solamente en una superficie de velocidad relativa cero ($2U = C$).

Es evidente que podemos tomar un punto tan cerca de $1 - v$ o de v , o lo que es lo mismo, ρ_1 o ρ_2 tan pequeños que por grande que sea C , se verifique que $2U > C$; en este caso el movimiento será real en el interior de una de las dos superficies esferoidales cerradas que envuelven las masas finitas o, si C no es tan grande, en la superficie cerrada que envuelve las dos masas finitas. Por otro lado, en la ecuación (64.7) podemos tomar x e y suficientemente grandes para que, por grande que sea C , se verifique que $2U > C$, en cuyo caso la partícula de masa infinitesimal estará muy alejada de las masas finitas y el movimiento será real en el espacio exterior.

Veamos una aplicación de lo estudiado al caso del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra: Si se supone la órbita de la Tierra circular y la masa de la Luna infinitesimal, se demuestra, calculando el valor de C , que la Luna se mueve en el interior de una superficie cerrada esferoidal que envuelve la Tierra. Por consiguiente, la Luna no puede atravesar esta superficie de velocidad cero y en consecuencia no puede alejarse indefinidamente de la Tierra. Basándose en esta propiedad Hill demostró que la distancia de la Luna a la Tierra tiene un límite superior.

7.5.5 Puntos dobles de las superficies $V = 0$

Se deduce de la expresión general de las superficies de velocidad relativa nula que los puntos dobles que presentan cuando C disminuye están todos en el plano xy . Por consiguiente, es suficiente para su estudio considerar la ecuación de las curvas en el plano xy (ver 71.7). Como hemos visto, hay tres puntos dobles en el eje x que aparecen cuando los óvalos que circundan las masas finitas para un determinado valor de C se tocan (L_2) y para otros valores de C tocan la curva exterior que los incluye (L_1, L_3); hay otros dos puntos dobles que aparecen cuando, para un valor de C muy pequeño, las superficies se encogen hasta desaparecer del plano xy en los dos puntos (L_4, L_5) que forman triángulo equilátero con los puntos ocupados por las masas finitas. Estos cinco puntos dobles reciben el nombre de *puntos de Lagrange* y están relacionados con importantes propiedades dinámicas del sistema.

Escribamos la ecuación (71.7) en la forma

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2(1-v)}{\rho_1} + \frac{2v}{\rho_2} - C = 0 \quad (76.7)$$

Las condiciones para que presente puntos dobles son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} &= x - (1-v) \frac{x-x_1}{\rho_1^3} - v \frac{x-x_2}{\rho_2^3} = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} &= y - (1-v) \frac{y}{\rho_1^3} - v \frac{y}{\rho_2^3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (77.7)$$

pero los primeros miembros de estas ecuaciones representan las derivadas de

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1-v)}{\rho_1} - \frac{v}{\rho_2} \quad (78.7)$$

por consiguiente, recordando (62.7) y tomando $n = 1$ podemos escribir

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (79.7)$$

Las expresiones $\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y}$ son proporcionales a los cosenos directores de la normal a cualquier punto ordinario de las curvas y puesto que $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son nulos en las superficies de velocidad nula se deduce que las direcciones de la aceleración o líneas de fuerza efectiva son ortogonales a las superficies de velocidad relativa nula. Por consiguiente, si un cuerpo de masa infinitesimal se coloca en una superficie de velocidad relativa nula, empezará su movimiento en la dirección de la normal; pero, en un punto doble el sentido de la normal resulta ambiguo, de aquí que puede suponerse que si este cuerpo de masa infinitesimal fue colocado en uno de estos puntos, en él permanecerá relativamente en reposo.

Las condiciones impuestas por (76.7) y (77.7) suponen también teniendo en cuenta (79.7) que $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ son nulas. Por tanto, si el cuerpo de masa infinitesimal se coloca en un punto doble con velocidad relativa nula, sus coordenadas verifican idénticamente las ecuaciones diferenciales del movimiento y permanecerá siempre relativamente en reposo a menos que sea perturbado por fuerzas exteriores al sistema considerado.

Sean las ecuaciones (77.7) la segunda de las cuales se satisface para $y = 0$. Los puntos dobles sobre el eje x vendrán determinados por las condiciones

$$\begin{aligned} x - (1-v) \frac{x-x_1}{\left[(x-x_1)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - v \frac{x-x_2}{\left[(x-x_2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (80.7)$$

Es fácil ver que el primer miembro de la primera ecuación, considerado como una función de x , cambia de signo una sola vez entre $+\infty$ y x_2 , entre x_2 y x_1 y entre x_1 y $-\infty$. Por consiguiente hay tres puntos dobles sobre el eje x en dichos intervalos. Designémosles por L_1 , L_2 y L_3 , respectivamente.

Supongamos que la distancia entre v y el punto doble L_1 es ρ . Entonces, $x - x_2 = \rho$, $x - x_1 = \rho_1 = 1 + \rho$, $x = 1 - v + \rho$. La ecuación que estamos considerando se puede escribir, sustituyendo todos los términos en función de ρ y quitando denominadores, de la forma

$$\rho^5 + (3-v)\rho^4 + (3-2v)\rho^3 - v\rho^2 - 2v\rho - v = 0 \quad (81.7)$$

ecuación con una sola raíz real positiva ya que sólo presenta una variación en el signo de sus coeficientes. El valor de esta raíz depende de v . Si $v = 0$, obtenemos

$$\rho^3(\rho^2 + 3\rho + 3) = 0$$

ecuación que tiene la raíz triple $\rho = 0$ y otras dos imaginarias conjugadas. Si $v \neq 0$, para un valor dado de v suficientemente pequeño, tres raíces de la ecuación (81.7) se pueden expresar por medio del desarrollo en serie de potencias de $v^{1/3}$

$$\rho = a_1 v^{1/3} + a_2 v^{2/3} + a_3 v^{3/3} + \dots \quad (82.7)$$

correspondiendo al valor real de $v^{1/3}$ un valor real de ρ y a los dos valores complejos de $v^{1/3}$ dos valores complejos de ρ . Sustituyendo el valor de ρ dado por (82.7) en (81.7) e igualando a cero los coeficientes de las distintas potencias de $v^{1/3}$, se halla:

$$a_1 = \frac{3^{2/3}}{3}, \quad a_2 = \frac{3^{1/3}}{9}, \quad a_3 = -\frac{1}{27}, \dots$$

Por consiguiente

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 = \rho &= \left(\frac{v}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{v}{3}\right)^{3/3} + \dots \\ \rho_1 &= 1 + \rho \end{aligned} \right\} \quad (83.7)$$

Representemos ahora por ρ la distancia de v al punto doble L_2 . Ahora $x - x_2 = -\rho$, $x - x_1 = \rho_1 = 1 - \rho$, $x = (1 - v) - \rho$. Por tanto, la primera ecuación de (80.7) resulta:

$$\rho^5 - (3 - v)\rho^4 + (3 - 2v)\rho^3 - v\rho^2 + 2v\rho - v = 0 \quad (84.7)$$

Resolviéndola como en el caso anterior se halla:

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 = \rho &= \left(\frac{v}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{v}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{v}{3}\right)^{3/3} + \dots \\ \rho_1 &= 1 - \rho \end{aligned} \right\} \quad (85.7)$$

Finalmente llamemos $1 - \rho$ a la distancia entre $1 - v$ y el punto doble L_3 . En este caso tendremos $x - x_2 = -2 + \rho$, $x - x_1 = -1 + \rho$, $x = -v - 1 + \rho$ y la primera ecuación de (80.7) se escribirá

$$\rho^5 - (7 + v)\rho^4 + (19 + 6v)\rho^3 - (24 + 13v)\rho^2 + (12 + 14v)\rho - 7v = 0 \quad (86.7)$$

Si $v = 0$ esta ecuación resulta

$$\rho(\rho^4 - 7\rho^3 + 19\rho^2 - 24\rho + 12) = 0$$

que tiene una raíz simple $\rho = 0$. Si $v \neq 0$, ρ se puede expresar por medio de un desarrollo en serie de potencias de v que converge para valores de v suficientemente pequeños:

$$\rho = b_1 v + b_2 v^2 + b_3 v^3 + \dots \quad (87.7)$$

Sustituyendo este valor de ρ en (86.7), operando e igualando a cero los coeficientes de las distintas potencias de v , hallamos

$$b_1 = \frac{7}{12}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{23 \cdot 7^2}{12^4}, \dots$$

con lo cual

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{7}{12} v + \frac{23 \cdot 7^2}{12^4} v^3 + \dots \\ \rho_1 &= 1 - \rho \\ \rho_2 &= 2 - \rho \end{aligned} \right\} \quad (88.7)$$

Para hallar los puntos dobles L_4 y L_5 situados fuera del eje x consideremos otra vez las ecuaciones (77.7). Puesto que ahora es $y \neq 0$, podemos dividir por y la segunda ecuación, obteniendo

$$1 - \frac{1-v}{\rho_1^3} - \frac{v}{\rho_2^3} = 0 \quad (89.7)$$

Multiplicando (89.7) primero por $x - x_2$ y después por $x - x_1$ y restando cada uno de los productos resultantes, separadamente, de la primera de (77.7), se obtiene

$$\left. \begin{aligned} x_2 - (1-v) \frac{x_2 - x_1}{\rho_1^3} &= 0 \\ x_1 - v \frac{x_1 - x_2}{\rho_2^3} &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (90.7)$$

Pero, $x_2 = 1 - v$, $x_1 = -v$ y $x_2 - x_1 = 1$; por tanto, las ecuaciones (90.7) se reducen a

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{\rho_1^3} &= 0 \\ 1 - \frac{1}{\rho_2^3} &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (91.7)$$

siendo las soluciones reales de (91.7) $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Por consiguiente, los puntos L_4 y L_5 forman sendos triángulos equiláteros con los cuerpos de masa finita.

7.5.6 La estabilidad de los puntos de Lagrange

Hemos hallado cinco soluciones particulares del movimiento del cuerpo de masa infinitesimal. Si dicho cuerpo se desplaza un poco de uno de los puntos de Lagrange debido a alguna perturbación producida por alguna causa distinta de la atracción de las dos masas finitas, puede ocurrir que adquiera una velocidad tal que salga despedido alejándose rápidamente del punto de Lagrange o que la velocidad que adquiera sea tal que haga que se quede oscilando en torno a dicho punto. En el primer caso decimos que la solución es *inestable* y en el segundo caso que estamos ante una solución *estable*.

Supongamos que la posición de un punto de Lagrange en el sistema de coordenadas que gira es (x_0, y_0) y representemos por $(x_0 + x', y_0 + y', z')$ la posición del cuerpo de masa infinitesimal cuando se ha desplazado respecto al punto de Lagrange con una velocidad $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$. Sustituyendo los valores de la posición y la velocidad en las ecuaciones del movimiento (62.7) para $n = 1$ y desarrollando en serie obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}' - 2\dot{y}' &= x' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 + y' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 + z' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_0 + \dots \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' &= x' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 + y' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0 + z' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_0 + \dots \\ \ddot{z}' &= x' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)_0 + y' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right)_0 + z' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (92.7)$$

donde el subíndice 0 indica el valor de las derivadas en el punto (x_0, y_0, z_0) .

Si los desplazamientos x', y', z' son pequeños podemos despreciar los términos del desarrollo a partir del segundo grado en x', y', z' y escribir las relaciones (92.7) en la forma

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}' - 2\dot{y}' &= x' U_{xx} + y' U_{xy} + z' U_{xz} \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' &= x' U_{yx} + y' U_{yy} + z' U_{yz} \\ \ddot{z}' &= x' U_{zx} + y' U_{zy} + z' U_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (93.7)$$

donde, tanto las derivadas $U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ como U se calculan para el punto de Lagrange (x_0, y_0, z_0) .

Consideremos, de momento, que nos situamos en el plano xy . Tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}' - 2\dot{y}' &= x' U_{xx} + y' U_{xy} \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' &= x' U_{yx} + y' U_{yy} \end{aligned} \right\} \quad (94.7)$$

sistema de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes cuya solución general es

$$x' = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e^{\lambda_i t} \quad y' = \sum_{i=1}^4 \beta_i e^{\lambda_i t} \quad (95.7)$$

donde las α_i son constantes de integración, las β_i son constantes que dependen de ellas y de los coeficientes que aparecen en (94.7) y las λ_i son raíces del determinante característico

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - U_{xx} & -2\lambda - U_{xy} \\ 2\lambda - U_{xy} & \lambda^2 - U_{yy} \end{vmatrix} = 0 \quad (96.7)$$

cuyos elementos son los coeficientes de α y β en las ecuaciones que se obtienen al sustituir en (94.7) las soluciones de la forma

$$x' = \alpha e^{\lambda t} \quad y' = \beta e^{\lambda t}$$

Si todas las soluciones λ_i obtenidas de la ecuación (96.7) son imaginarias puras, x' e y' se expresan mediante funciones periódicas estables en las proximidades de (x_0, y_0, z_0) . Si algunas de las soluciones λ_i son reales o complejas, x' e y' crecen con el tiempo y la solución es inestable.

Puede suceder que algún término de (95.7) sea constante ($\lambda_i = 0$). En este caso, si el resto de las λ_i son imaginarias puras, la solución es también estable.

Recordemos que $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-v}{\rho_1} + \frac{v}{\rho_2}$ con

$$\rho_i^2 = (x - x_i)^2 + y^2 + z^2 \quad (i = 1, 2)$$

y hagamos

$$A = \frac{1-v}{\rho_1^3} + \frac{v}{\rho_2^3}$$

$$B = 3 \left(\frac{1-v}{\rho_1^5} + \frac{v}{\rho_2^5} \right)$$

$$C = 3 \left[\frac{1-v}{\rho_1^5} (x_0 - x_1) + \frac{v}{\rho_2^5} (x_0 - x_2) \right]$$

hallaremos:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= 1 - A + 3(1-v) \frac{(x_0 - x_1)^2}{\rho_1^5} + 3v \frac{(x_0 - x_2)^2}{\rho_2^5} \\ U_{yy} &= 1 - A + B y_0^2 \\ U_{zz} &= -A + B z_0^2 \\ U_{xy} &= C y_0 \\ U_{xz} &= C z_0 \\ U_{yz} &= B y_0 z_0 \end{aligned} \quad (97.7)$$

En las soluciones L_1, L_2, L_3 es $y_0 = z_0 = 0$ de modo que

$$\rho_i^2 = (x_0 - x_i)^2 \quad (i = 1, 2)$$

Por consiguiente, por una parte

$$U_{xy} = U_{xz} = U_{yz} = 0$$

y por otra, las ecuaciones del movimiento para un pequeño desplazamiento se reducen a

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}' - 2\dot{y}' &= x'(1 + 2A) \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' &= y'(1 - A) \\ \ddot{z}' &= -z'A \end{aligned} \right\} \quad (98.7)$$

La tercera ecuación es independiente de las otras dos. Su solución es

$$z' = C_1 \cos A^{\frac{1}{2}}t + C_2 \sin A^{\frac{1}{2}}t$$

que nos dice que la oscilación en la dirección de z es finita y pequeña con periodo $2\pi A^{-\frac{1}{2}}$.

Sustituyendo los valores de U_{xx} , U_{yy} y U_{zz} en el determinante (96.7) y operando, obtenemos

$$\lambda^4 + (2 - A)\lambda^2 + (1 + A - 2A^2) = 0 \quad (99.7)$$

A cada punto alineado de Lagrange corresponderá un valor de A ; por tanto, tendremos tres ecuaciones en λ , una para cada uno de los puntos L_1, L_2, L_3 , de la forma (99.7). Se puede probar que para valores pequeños de v y, para cualquiera de las tres A se verifica:

$$1 + A - 2A^2 < 0$$

En consecuencia, la ecuación bicuadrada (99.7) considerada como en λ^2 tiene dos raíces reales opuestas y la ecuación en λ^4 tendrá cuatro raíces, dos reales y dos imaginarias conjugadas siendo las raíces de cada par iguales en valor absoluto pero de signos opuestos. Luego, las soluciones correspondientes a los puntos alineados son inestables. Sin embargo, escogiendo convenientemente los valores iniciales de x' , y' y z' el movimiento puede llegar a ser periódico, moviéndose el cuerpo de masa infinitesimal alrededor del punto de Lagrange en una trayectoria elíptica. De todos modos, en general, el caso colineal debe considerarse inestable.

Sea ahora las soluciones en triángulo equilátero que dan los puntos de Lagrange L_4 y L_5 . En este caso $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $x = \frac{1}{2} - v$, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_0 = 0$. Tomando el punto L_4 tenemos, sustituyendo en (97.7) y recordando que $x_l = -v$, $x_2 = 1 - v$:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= \frac{3}{4} & U_{xy} &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2v) \\ U_{yy} &= \frac{9}{4} & U_{xz} &= 0 \\ U_{zz} &= -1 & U_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (100.7)$$

Las ecuaciones del movimiento para un pequeño desplazamiento resultan ser:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}' - 2\dot{y}' &= \frac{3}{4}x' + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2v)y' \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2v)x' + \frac{9}{4}y' \\ \ddot{z}' &= -z' \end{aligned} \right\} \quad (101.7)$$

Observamos que también en este caso la oscilación en la dirección de z' es estable, viniendo dada por

$$z' = C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

donde C_3 y C_4 son constantes de integración, siendo el periodo 2π .

Sustituyendo los valores (100.7) en la ecuación (96.7) y operando se obtiene

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}v(1-v) = 0$$

La condición para que las cuatro raíces de esta ecuación bicuadrada sean imaginarias puras, conjugadas dos a dos, es que

$$1 - 27v(1-v) \geq 0$$

Si hacemos

$$1 - 27v(1-v) = \epsilon$$

obtenemos la ecuación

$$27v^2 - 27v + 1 - \epsilon = 0$$

cuyas soluciones son

$$v = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{23 + 4\epsilon}{108}}$$

Recordando que $v \leq \frac{1}{2}$, tomaremos la raíz que corresponde al signo menos.

Cuando sea $\epsilon = 0$, será $v = 0.0385$. Por tanto, para que el punto de Lagrange sea estable debe ser

$$v < 0.0385 \quad (102.7)$$

El razonamiento que hemos hecho se puede aplicar sin más que tomar $x = \frac{1}{2} - v$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = 0$, al punto L_5 . Por tanto, si se satisface la condición (102.7) existen alrededor de L_4 y L_5 cuerpos de masa infinitesimal que describen órbitas periódicas.

Aplicación al Sistema Solar: Después de haberse hallado las soluciones en línea recta y en triángulo equilátero del problema de los tres cuerpos que acabamos de exponer, se creyó durante algún tiempo que eran meras soluciones matemáticas, muy interesantes pero que no tendrían nunca aplicación astronómica ya que parecía muy improbable que pudieran existir tales formaciones en la naturaleza. Sin embargo, tales soluciones se dan en el Sistema Solar. En efecto, si tomamos como masas principales m_1 y m_2 el Sol y Júpiter, respectivamente, se verifica que $\mu \approx 0.001$ de modo que se satisface la condición de estabilidad (102.7), hallándose alrededor de los puntos L_4 y L_5 dos grupos de asteroides (Troyanos y Griegos) en oscilación, proporcionando cada uno de ellos con el Sol y Júpiter un ejemplo de solución en triángulo equilátero.

Por otra parte, Kordelewski sugirió que en el sistema Tierra-Luna los puntos L_4 y L_5 están ocupados por partículas meteóricas que aparecen, en muy buenas condiciones de visibilidad, como unas ténues nebulosidades. Otro ejemplo lo tenemos en el descubrimiento por parte del Voyager 1 en su viaje hacia Saturno: El satélite Dione B Helena orbita a la misma distancia de Saturno que de Dione oscilando alrededor de un punto avanzado 60° con respecto a Dione.

Con respecto a las soluciones en línea recta, si m_1 y m_2 son el Sol y la Tierra, respectivamente, en el punto de Lagrange L_3 , opuesto al Sol, aparece una débil luminosidad visible después de la puesta del Sol en el plano de la eclíptica. El fenómeno recibe el nombre de “Gegenschein” y se cree que es debido a la iluminación por el Sol de una acumulación de partículas meteóricas en el citado punto de Lagrange.

Capítulo 8

TEORÍA DE PERTURBACIONES

Sabemos que los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas casi perfectamente elípticas debido a que su atracción mutua es mucho menor que la atracción del Sol sobre los mismos.

En la solución del problema de los dos cuerpos los elementos orbitales son constantes; si suponemos que varían a causa de las atracciones mutuas entre los distintos cuerpos, deberemos establecer sus ecuaciones diferenciales y resolverlas. Las expresiones que obtengamos para los elementos (en general sumas de términos en senos y cosenos y términos seculares) podremos utilizarlas para obtener un mayor orden de aproximación. En la práctica este método es rápidamente convergente pero muy laborioso. Las expresiones analíticas que se obtienen, válidas para un determinado periodo de tiempo, reciben el nombre de *perturbaciones generales* y permiten establecer el estado del sistema planetario antes y después de una época determinada, pero no pueden utilizarse para periodos de tiempo demasiado largos.

El método de las perturbaciones generales es aplicable a sistemas de satélites, a asteroides perturbados por Júpiter, a la determinación de órbitas de satélites artificiales, etc. Es una herramienta muy potente en astrodinámica porque las expresiones analíticas ponen de manifiesto las distintas fuerzas que actúan sobre el cuerpo (por ejemplo, el achatamiento de la Tierra sobre un satélite).

Una aproximación distinta del problema de n-cuerpos es la que utiliza *perturbaciones especiales*, que implica la integración numérica, paso a paso, de las ecuaciones diferenciales del movimiento desde la época inicial a la época en la que se desean las posiciones de los cuerpos. Tiene la ventaja de que es aplicable a cualquier órbita que implique cualquier número de cuerpos, y la desventaja de que no conduce a una fórmula general, debiéndose calcular, aunque no interesen, todas las posiciones intermedias de los cuerpos para llegar a la configuración final.

Tanto las perturbaciones generales como las especiales se pueden dividir en *periódicas* y *seculares*.

Se llama *perturbación periódica* a toda perturbación de la órbita de referencia que se repite con un periodo de revolución determinado, siendo, generalmente, el resultado de configuraciones similares de los cuerpos implicados.

Una *perturbación secular* produce un cambio proporcional al tiempo, o dicho de otra forma, sus efectos se acumulan con el tiempo.

En algunos casos es difícil distinguir entre perturbaciones de periodo muy largo y perturbaciones seculares debido a que el tiempo durante el cual se han podido llevar a cabo observaciones es corto comparado con el periodo esperado.

8.1 Movimiento de dos cuerpos perturbado

Recordemos (3.2) que la ecuación del movimiento relativo en el problema de los dos cuerpos

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1.8)$$

es un caso particular de la ecuación del problema de la fuerza central cuando ésta es newtoniana

$$f(r) = \mu r^{-2}$$

Pues bien, supongamos ahora que además de esta fuerza central existe otra que llamaremos *fuerza perturbatriz*. La ecuación (1.8) se escribirá:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{f} \quad (2.8)$$

siendo $\vec{f}$ la fuerza perturbatriz por unidad de masa.

El movimiento que define (2.8) se llama *perturbado*. El secundario no describe una cónica y su trayectoria ni tan siquiera es plana.

En el instante t , el movimiento está definido por los vectores $\vec{r}$ y $\dot{\vec{r}}$. Si el movimiento fuese kepleriano ($f = 0$) se podrían deducir de ellos elementos orbitales Ω , ω , i , a , e , T . En el caso $f \neq 0$, estos elementos definen la órbita que describiría el secundario a partir de la época t , si en este mismo instante se suprimiera la perturbación. La órbita kepleriana que se puede hacer corresponder de esta forma a cada punto de la órbita perturbada recibe el nombre de *órbita osculatriz* en este punto y sus elementos se llaman *elementos osculadores*, estando completamente definidos por la posición y la velocidad del secundario perturbado en el instante t .

Mientras el secundario describe su órbita, la órbita osculatriz se deforma, ya que si no ocurriera así el movimiento sería kepleriano. Luego, los elementos osculadores son funciones del tiempo.

Podemos decir que la órbita osculatriz es una órbita kepleriana tangente en cada punto a una órbita perturbada y cuyos elementos varían con el tiempo, e identificar el movimiento perturbado con un movimiento kepleriano sobre la órbita osculatriz.

El problema que se nos presenta es pues el de obtener las expresiones que nos den los elementos osculadores en función del tiempo. Partamos de una órbita osculatriz inicial determinada por los elementos Ω , ω , i , a , e , T . Al cabo de un tiempo δt estaremos en un punto de la órbita perturbada al que le corresponderá otra órbita osculatriz con unos elementos osculadores que designaremos por $\Omega + \delta\Omega$, $\omega + \delta\omega$, $i + \delta i$, ... y en dicho punto el radio vector será $\vec{r} + \delta\vec{r}$ y la velocidad $\vec{v} + \delta\vec{v}$ (utilizaremos δ para indicar el paso de una osculatriz a otra y d cuando pasamos de un punto a otro de la órbita perturbada). Calcularemos las variaciones de los elementos $\delta\Omega, \delta\omega, \delta i, \dots$ durante la variación de tiempo δt . Llamaremos

$$\frac{\delta\Omega}{\delta t} = \Omega', \quad \frac{\delta i}{\delta t} = i', \dots$$

Integrando estas expresiones tendremos $\Omega(t), \omega(t), i(t)$, lo que nos dará en cada instante la posición de la órbita osculatriz.

Ahora bien, en cada instante t $\vec{r}$ es el vector de posición del secundario sobre la trayectoria y sobre la órbita osculatriz. Por tanto, al cambiar de osculatriz, $\vec{r}$ variará en segundo orden y por consiguiente,

$$\vec{r}' = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = 0 \quad (3.8)$$

En cambio, debido a la acción de la fuerza perturbatriz $\vec{f}$, en un tiempo δt la velocidad sufrirá una variación

$$\frac{\delta \vec{v}}{\delta t} = \vec{v}' = \vec{f} \quad (4.8)$$

Consideremos ahora, además del sistema de referencia P, Q, R que hemos definido al estudiar el problema de los dos cuerpos no perturbado (3.11.3), otro ligado al secundario S , (Fig. 1.8) definido de la siguiente forma:

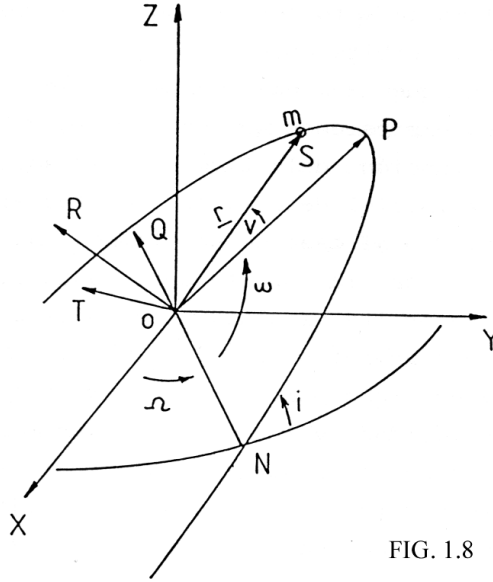


FIG. 1.8

Origen O común al P, Q, R . Eje S en la dirección de la recta que une el origen con el secundario. Eje T perpendicular al anterior en el plano de la órbita y sentido positivo hacia el sentido positivo de Q . Eje R coincidiendo con el eje R del sistema P, Q, R . Podemos suponer también tres vectores unitarios $\vec{S}, \vec{T}, \vec{R}$, sobre cada uno de dichos ejes, respectivamente.

Teniendo en cuenta (3.8), debido a la perturbación, la variación del plano de la órbita osculatriz se traducirá en una rotación alrededor de $\vec{r}$ definida por un vector

$$\vec{\phi} = \phi \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.8)$$

cuya expresión en función de sus componentes respecto a S, T, R serán:

$$\phi = \phi \vec{S} + \phi \vec{T} + \phi \vec{R} \quad (6.8)$$

Por otra parte, con la velocidad variarán los elementos Ω, i y $u = \omega + V$. Las variaciones de dichos elementos serán rotaciones alrededor de los ejes Z , línea de los nodos y R , respectivamente; por tanto, las podremos representar por tres vectores: $\vec{\Omega}'$ en la dirección del eje Z , y sentido hacia Z positivo; $\vec{i}'$ en la dirección de la línea de los nodos y sentido hacia el nodo ascendente N ; $\vec{u}'$ en la dirección de R y sentido hacia R positivo.

Por tanto, podremos expresar $\vec{\phi}$ de la forma:

$$\vec{\phi} = \vec{\Omega}' + \vec{i}' + \vec{u}' \quad (7.8)$$

Las componentes de los vectores $\vec{\Omega}'$, $\vec{i}'$, $\vec{u}'$ en la base S, T, R son:

$$\vec{\Omega}' = \begin{bmatrix} \Omega' \text{sen } i & \text{sen } u \\ \Omega' \text{sen } i & \cos u \\ \Omega' \cos i & \end{bmatrix} \quad \vec{i}' = \begin{bmatrix} i' \cos u \\ -i' \text{sen } u \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{u}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u' \end{bmatrix}$$

y por consiguiente:

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega' \text{sen } i \text{ sen } u + i' \cos u \\ \Omega' \text{sen } i \cos u - i' \text{sen } u \\ \Omega' \cos i + u' \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

8.2 Ecuaciones de Gauss

Deduciremos las ecuaciones de Gauss a partir de las integrales del movimiento.

Sean, en el sistema S, T, R :

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_S \\ f_T \\ f_R \end{bmatrix} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En el caso kepleriano, la ley de las áreas toma la forma $\vec{c} = \vec{r} \wedge \vec{v}$. En nuestro caso, $\vec{c}$ no es constante. Su variación será:

$$\vec{c}' = \vec{r}' \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{v}' = \vec{r} \wedge \vec{f}$$

por tanto:

$$\vec{c}' = \begin{bmatrix} 0 \\ -rf_R \\ rf_T \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

Por otra parte:

$$\vec{c} = c\vec{R} \quad \vec{c}' = c'\vec{R} - c\vec{R}' \quad \vec{R}' = \vec{\phi} \wedge \vec{R} \quad (10.8)$$

$$\vec{c}' = c'\vec{R} + c \begin{bmatrix} \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c'\vec{R} - c\phi\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c\phi \\ c' \end{bmatrix}$$

e identificando (9.8) y (10.8) resulta:

$$\phi = \frac{r}{c} f_R \quad c' = r f_T \quad (11.8)$$

o sea, teniendo en cuenta (8.8):

$$\left. \begin{aligned} \Omega' \sin i \sin u + i' \cos u &= \phi \\ \Omega' \sin i \cos u - i' \sin u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

Multiplicando la primera de (12.8) por $\sin u$ y la segunda por $\cos u$, sumando y substituyendo por la primera de las (11.8), obtenemos:

$$\Omega' = \frac{r \sin u}{c \sin i} f_R \quad (I)$$

Multiplicando ahora la primera de (12.8) por $\cos u$ y la segunda por $\sin u$, restando y substituyendo luego por la primera de las (11.8):

$$i' = \frac{r \cos u}{c} f_R \quad (II)$$

Si la fuerza perturbatriz no tiene tercera componente, es decir, si f está en el plano de la órbita, según (I) y (II) no variarán ni el nodo ni la inclinación de la órbita.

Para hallar la variación de a partiremos de la integral de la energía:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

derivando:

$$2v v' = 2\vec{v} \cdot \vec{v}' = \frac{\mu}{a^2} a'$$

de donde:

$$a' = 2 \frac{a^2}{\mu} \vec{v} \cdot \vec{f} \quad (13.8)$$

y recordando que las componentes de $\vec{v}$ en el sistema S, T, R son (ver 28.3):

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{ce}{p} \sin V \\ \frac{c}{p} (1 + e \cos V) \\ 0 \end{bmatrix}$$

y además

$$p = \frac{c^2}{\mu}$$

sustituyendo en (13.8) y operando resulta:

$$a' = 2 \frac{a^2}{c} [e \operatorname{sen} V f_s + (1 + e \cos V) f_T] \quad (III)$$

Partiendo de $p = \frac{c^2}{\mu}$ y derivando: $p' = 2cc' / \mu$ y teniendo en cuenta que $c' = rf_T$, sustituyendo:

$$p' = 2prf_T / c \quad (14.8)$$

Despejando ahora e^2 de $p = a(1 - e^2)$ y derivando, obtenemos:

$$2ee' = p \frac{a'}{a^2} - \frac{ap'}{a^2}$$

y sustituyendo a' por (III) y p' por (14.8), despejando después e' se obtiene:

$$e' = \frac{p}{c} [\operatorname{sen} V f_s + (\cos V + \cos E) f_T] \quad (IV)$$

Se puede calcular la variación del elemento orbital ω derivando $\omega = u - V$:

$$\omega' = u' - V'$$

De la tercera de (8.8) y (I) se obtiene

$$u' = -\frac{r}{c} \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} i} \cos i f_R \quad (15.8)$$

y de derivar la expresión que nos da el radio vector $r = \frac{p}{1 + e \cos V}$ teniendo en cuenta los valores de e' y p' ya obtenidos, se halla

$$eV' \operatorname{sen} V = \frac{p}{c} (\operatorname{sen} V \cos V f_s + \cos^2 V f_T + \cos V \cos E f_T - 2f_T)$$

y poniendo $\cos E$ en función de $\cos V$, utilizando

$$\cos E = \frac{e + \cos V}{1 + e \cos V}$$

operando, agrupando términos y simplificando se obtiene

$$V' = \frac{p}{ce} \left[\cos V f_s - \operatorname{sen} V \left(1 + \frac{r}{p} \right) f_T \right] \quad (16.8)$$

Sustituyendo (15.8) y (16.8) en $\omega' = u' - V'$ se obtiene finalmente:

$$\omega' = -\frac{p}{ce} \left[\cos V f_s - \sin V \left(1 + \frac{r}{p} \right) f_T \right] - \frac{r}{c} \sin u \cot i f_R \quad (V)$$

De $M = E - e \sin E$ derivando, obtenemos

$$M' = E'(1 - e \cos E) - e' \sin E \quad (17.8)$$

y de $r = a(1 - e \cos E)$ también derivando,

$$r' = 0 = a'(1 - e \cos E) + a(eE' \sin E - e' \cos E)$$

y despejando E' :

$$E' = \frac{\cos E}{e \sin E} e' - \frac{r}{a^2 e \sin E} a'$$

y sustituyendo en (17.8):

$$M' = \left(\frac{r \cos E}{a e \sin E} - \sin E \right) e' - \frac{r^2}{a^3 e \sin E} a'$$

El coeficiente de e' es

$$\frac{r \cos E - a e \sin^2 E}{a e \sin E} = \frac{\cos E - e}{e \sin E}$$

que se puede expresar en función de V recordando que

$$\left. \begin{aligned} a(\cos E - e) &= r \cos V \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E &= r \sin V \end{aligned} \right\}$$

resultando

$$\frac{\cos E - e}{e \sin E} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \cot V$$

y sustituyendo en M'

$$M' = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \cot V \cdot e' - \frac{r^2}{a^3 e \sin E} a'$$

y sustituyendo e' por (IV) y a' por (III), agrupando términos y simplificando, obtendremos finalmente:

$$M' = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \frac{p}{c} \left[\left(\cos V - 2e \frac{r}{p} \right) f_s - \sin V \left(1 + \frac{r}{p} \right) f_T \right] \quad (VI)$$

Las seis fórmulas indicadas por números romanos (del I al VI) constituyen las llamadas *fórmulas de Gauss* y dan la variación de los elementos orbitales al variar en un instante dado la velocidad del secundario a causa de la fuerza perturbatriz que actúa sobre él. Las aplicaremos al estudio del movimiento de satélites artificiales.

8.3 Variación de los elementos en un periodo

Sea α uno cualquiera de los elementos orbitales. En una cualquiera de las fórmulas de Gauss se verifica:

$$\alpha' = f(M, a, e, i, \Omega, \dots)$$

función que se puede desarrollar en serie trigonométrica según una cualquiera de las variables. Sea por ejemplo M :

$$\alpha' = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kM + b_k \sin kM)$$

pero, en este desarrollo a_k y b_k contienen también elementos de la órbita. Entonces podemos proceder por aproximaciones sucesivas. Si tomamos constantes los elementos del segundo miembro, diremos que tomamos una aproximación de primer orden. Si los consideramos linealmente variables, la aproximación es de segundo orden. Para una aproximación de primer orden será:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$$

Llamaremos $\Delta\alpha$ a la variación de α en un periodo, es decir:

$$\Delta\alpha = \int_0^P \alpha' dt$$

En general se acostumbra a integrar según M . Siendo $M = nt + \sigma$, obtenemos

$dM = n dt$ y por tanto,

$$\Delta\alpha = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \alpha'(M) dM \quad (18.8)$$

Por la ley de las áreas

$$r^2 \frac{dV}{dt} = c$$

$$nr^2 \frac{dV}{dM} = c$$

de donde

$$\frac{dM}{n} = \frac{1}{c} r^2 dV$$

y recordando que

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V}$$

queda

$$\Delta\alpha = \frac{p^2}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha'(V) dV}{(1 + e \cos V)^2}$$

que es la variación en función de la anomalía verdadera.

Recordando que $M = E - e \sin E$, diferenciando: $dM = (1 - e \cos E) dE$ y sustituyendo en (18.8), obtenemos la variación en función de la anomalía excéntrica:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \alpha'(E) (1 - e \cos E) dE$$

8.4 Perturbaciones debidas al potencial terrestre

Recordemos la expresión del potencial terrestre obtenida en 2.3.2, fórmula (31.2):

$$V = \frac{\mu}{r} \left[1 - \frac{J}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \sin^2 D - 1) \right] \quad (19.8)$$

$$U = -\frac{1}{3} \frac{\mu J a^2}{r^3} (3 \sin^2 D - 1) \quad (20.8)$$

es el potencial no newtoniano.

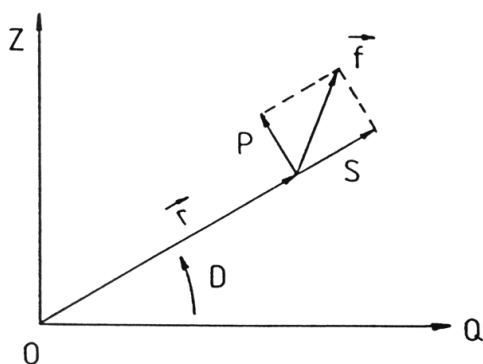


FIG. 2.8

Sean S y P las componentes radial y perpendicular, respectivamente, de la fuerza perturbatriz correspondiente al potencial terrestre (Fig. 2.8), iguales a las componentes del gradiente de U :

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\mu J a^2}{r^4} (3 \sin^2 D - 1) \\ P &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial D} = -\frac{\mu J a^2}{r^4} \sin 2D \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

Nos interesa ahora hallar las componentes f_S, f_T, f_R de la fuerza perturbatriz para sustituirlas en las ecuaciones de Gauss. De la figura 3.8 deducimos:

$$\begin{aligned} f_S &= S \\ f_T &= P \cos \theta \\ f_R &= P \sin \theta \end{aligned}$$

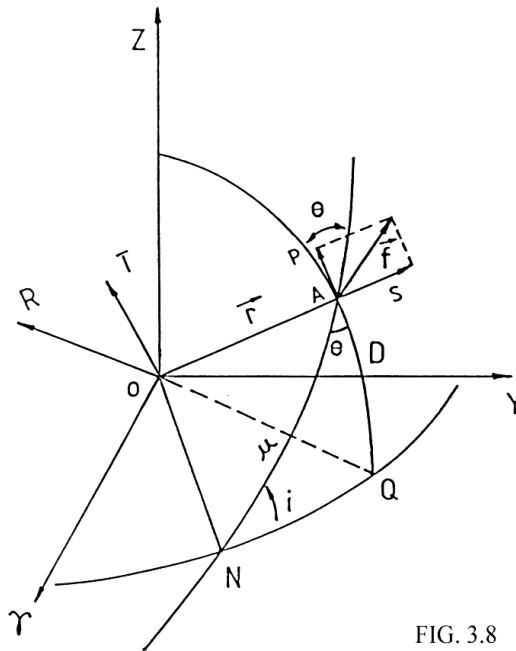


FIG. 3.8

y substituyendo en (21.8) tendremos

$$\left. \begin{aligned} f_S &= \frac{\mu J a^2}{r^4} (3 \sin^2 D - 1) \\ f_T &= -\frac{\mu J a^2}{r^4} 2 \sin D \cos D \cos \theta \\ f_R &= -\frac{\mu J a^2}{r^4} 2 \sin D \cos D \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (22.8)$$

Por otro lado deducimos del triángulo NAQ de la figura 3.8 las relaciones:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} D &= \operatorname{sen} i \operatorname{sen} u \\ \cos i &= \cos D \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta &= \cot u \tan D\end{aligned}\quad (23.8)$$

Que substituidas en (22.8) nos dan

$$\vec{f} = \left[\begin{array}{c} \frac{\mu J a^2}{r^4} (3 \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 u - 1) \\ -\frac{\mu J a^2}{r^4} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen} 2u \\ -\frac{\mu J a^2}{r^4} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} u \end{array} \right]_{S,T,R}$$

Escribiendo la expresión de la variación de los elementos en función de la anomalía verdadera teniendo en cuenta el valor $r = p / (1 + e \cos V)$, obtenemos:

$$\Delta \alpha = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} r^2 \alpha' dV \quad (24.8)$$

Sustituiremos α' sucesivamente por los valores de las variaciones de los elementos orbitales dadas por las fórmulas de Gauss. En primer lugar, para Ω' tendremos, recordando (I):

$$\Delta \Omega = -\frac{2 J a^2 \cos i}{p^2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos V) \operatorname{sen}^2 (\omega + V) dV$$

y resolviendo la integral (se sugiere utilizar el método de resolución que nos da la teoría de residuos) se obtiene:

$$\Delta \Omega = -\frac{J a^2 \cos i}{p^2} 2\pi \operatorname{rad} / \text{vuelta} \quad (25.8)$$

fórmula que nos da la variación de Ω en una vuelta.

Si $i < 90^\circ$ (movimiento directo), $\Delta \Omega < 0$, el nodo retrograda.

Si $i = 90^\circ$ (órbita polar), $\Delta \Omega = 0$

Si $i > 90^\circ$ (movimiento retrógrado), $\Delta \Omega > 0$, el nodo avanza.

Para hallar la variación de la inclinación partiremos de la segunda ecuación de Gauss, fórmula (II) y sustituiremos en (24.8) α' por i' . Tendremos:

$$\Delta i = -\frac{\mu J a^2 \operatorname{sen} 2i}{c^2} \frac{1}{p} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos V) \operatorname{sen} 2(\omega + V) dV$$

que una vez integrado nos dará:

$$\Delta i = 0$$

lo cual nos dice que la fuerza perturbatriz debida al potencial terrestre no afecta la inclinación de la órbita.

El mismo resultado se halla para las variaciones del semieje mayor y de la excentricidad. Es decir, se obtiene

$$\Delta a = 0 \quad \Delta e = 0$$

La quinta ecuación de Gauss nos dará la variación del argumento del periastro. En efecto, sustituyendo (V) en (24.8) e integrando, obtendremos:

$$\Delta \omega = \frac{Ja^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right)}{p^2} 2\pi \text{rad} / \text{vuelta}$$

Si $2 - \frac{5}{2} \sin^2 i = 0$, es $\Delta \omega = 0$. El ángulo i es entonces de $i_c = 63^\circ 26'$ ($\tan i = 2$).

Dicha inclinación, que recibe el nombre de *inclinación crítica*, es aquella con que debe lanzarse un satélite artificial para que la forma de la Tierra no influya en el argumento del periastro. De hecho, con esta inclinación fueron lanzados los primeros satélites rusos.

- Si $i = i_c$ no hay avance del periastro
- Si $i < i_c$ el periastro avanza
- Si $i > i_c$ el periastro retrograda.

Finalmente la sexta ecuación de Gauss nos proporcionará la variación de M o lo que es equivalente de $\sigma (M = nt + \sigma)$. Sustituyendo (VI) en (24.8) y operando se obtiene:

$$\Delta \sigma = \frac{Ja^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right)}{p^2} 2\pi \text{rad} / \text{vuelta}$$

- Si $\sin^2 i = 2/3$, σ no varía. Entonces $i_c = 54^\circ 44'$ y $\tan^2 i_c = 2$
 - Si $i < 54^\circ 44'$ es $\Delta \sigma > 0$
 - Si $i = i_c$ es $\Delta \sigma = 0$
 - Si $i > 54^\circ 44'$ es $\Delta \sigma < 0$
- i_c es la inclinación con que se lanzaron los Explorer.

8.4.1 Perturbaciones debidas al potencial terrestre en el caso particular de un potencial terrestre central

Estudiemos el caso en que la fuerza perturbatriz es de la forma

$$\vec{f} = \frac{h}{r^{n+1}} \vec{r}$$

Es evidente que en el sistema S, T, R sólo tiene componente no nula en la dirección de S , es decir

$$\vec{f} = (hr^{-n}, 0, 0)_{STR}$$

Trabajaremos con la anomalía verdadera; por tanto, utilizaremos, igual que en el apartado anterior la fórmula (24.8).

Como que según (I) y (II), Ω' e i' son proporcionales a f_R , serán

$$\Delta\Omega = \Delta i = 0$$

Para Δa tendremos, recordando (III):

$$\Delta a = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} r^2 \frac{2a^2}{c} e \sin V \frac{h}{r^n} dV = \frac{2a^2 eh}{c^2 p^{n-2}} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos V)^{n-2} \sin V dV$$

y siendo

$$\int_0^{2\pi} (1 + e \cos V)^{n-2} \sin V dV = 0$$

resulta

$$\Delta a = 0$$

Para Δe , tendremos asimismo, haciendo uso de (IV):

$$\Delta e = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} r^2 \frac{p}{c} \sin V \frac{h}{r^n} dV = \frac{h}{c^2 p^{n-3}} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos V)^{n-2} \sin V dV$$

resultando

$$\Delta e = 0$$

Vemos pues que una fuerza perturbatriz central no afecta la posición del nodo ni la inclinación y tampoco la forma de la órbita.

En cambio, veremos que sí afecta el argumento del nodo y la época de paso por el periastro. En efecto, sustituyendo en primer lugar ω' en (24.8) tendremos:

$$\Delta\omega = -\frac{h}{p^{n-3} c^2 e} \int_0^{2\pi} \cos V (1 + e \cos V)^{n-2} dV$$

El valor de la integral es

$$\int_0^{2\pi} \cos V (1 + e \cos V)^{n-2} dV = 2\pi \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{e^k}{2^{k+1}} \left(\frac{k+1}{2} \right)_{k \text{ impar}}$$

y por tanto:

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi h}{p^{n-3}c^2e} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{e^k}{2^{k+1}} \left(\frac{k+1}{2} \right)_{k \text{ impar}}$$

Otra forma frecuente de expresar este resultado se obtiene con el cambio $k = 2j - 1$ ($j = 1, 2, \dots$) que da:

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi h}{c^2ep^{n-3}} \sum_j \binom{n-2}{2j-1} e^{2j-1} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \text{ rad / vuelta}$$

Sustituyendo ahora σ' en (24.8) obtenemos:

$$\Delta\sigma = \frac{p}{c^2} \frac{\sqrt{1-e^2}h}{ep^{n-2}} \int_0^{2\pi} (1+e\cos V)^{n-2} \left(\cos V - \frac{2e}{1+e\cos V} \right) dV$$

y después del cálculo de la integral:

$$\Delta\sigma = \frac{h\sqrt{1-e^2}}{c^2ep^{n-1}} \left[2\pi \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{e^k}{2^k} \left(\frac{k+1}{(k+1)/2} \right) - 4\pi e \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} \frac{e^k}{2^k} \left(\frac{k}{k/2} \right) \right]$$

donde el primer sumatorio se extiende para valores impares de k y el segundo para valores pares.

8.5 Perturbaciones debidas a la resistencia de la atmósfera

Para el estudio de las perturbaciones debidas al efecto de la atmósfera se hacen diversas hipótesis simplificativas:

- a) Se supone la Tierra esférica
- b) La densidad de la atmósfera decrece exponencialmente con la altura

$$\delta = e^{-\beta h}$$

c) La densidad del aire no varía con el tiempo (se desprecian las mareas: la Luna y el Sol producen mareas sobre la atmósfera, llegando a variar la densidad hasta un 20% por este efecto)

d) La resistencia de la atmósfera al movimiento de un cuerpo es proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo

$$D = -\frac{1}{2} cs \delta V_R^2 \quad (26.8)$$

donde $c = \text{coeficiente de resistencia } (\approx 2,2)$
 $s = \text{área de la sección recta del satélite}$

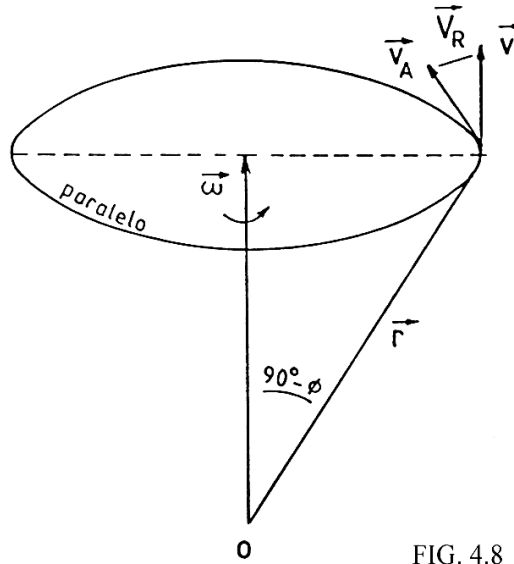


FIG. 4.8

e) La atmósfera gira con la Tierra; es decir, el punto r describe un paralelo (Fig. 4.8). Si $\vec{v}$ es la velocidad del satélite, $\vec{v}_A$ la velocidad de la atmósfera y $\vec{V}_R$ la velocidad resultante, tenemos:

$$\vec{V}_R = \vec{v} - \vec{v}_A$$

siendo

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

o también

$$v_A = \omega r \cos \phi \quad (27.8)$$

donde ω es la velocidad angular de la Tierra y ϕ la latitud del punto r .

Si llamamos γ al ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{v}_A$, podemos escribir:

$$V_R^2 = v^2 + v_A^2 - 2vv_A \cos \gamma$$

En general $r > q_0$ y $v < v_0$, por tanto $\frac{r}{v} > \frac{q_0}{v_0}$ y $\cos i \approx \cos i_0$ pero el cociente está restando de la unidad, de ahí la desigualdad dada.

Vemos pues que V_R está acotada por v y por un factor de reducción

$$F^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\omega q_0 \cos i_0}{v_0}$$

El cuadrado de este factor F es tal que está comprendido entre 1 y 0.9

$$0.9 \leq F \leq 1$$

Con esto

$$V_R^2 = Fv^2$$

y recordando (26.8) podemos escribir:

$$D = -\frac{1}{2}cs\delta Fv^2 \quad (28.8)$$

y teniendo en cuenta que si $\vec{f}$ es la fuerza perturbatriz por unidad de masa, será

$$D = mf \quad (29.8)$$

haciendo $k = \frac{s}{m}cF$ e igualando (28.8) y (29.8), obtendremos

$$f = -\frac{1}{2}k\delta v^2 \quad (30.8)$$

y de (30.8),

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}k\delta v\vec{v} \quad (31.8)$$

Para el cálculo de las perturbaciones debidas a la atmósfera trabajaremos en la base L, N, R , definida de la siguiente forma:

L dirigido según la tangente a la órbita en la posición del satélite

N dirigido según la normal

R perpendicular al plano de la órbita

Expresaremos las ecuaciones de Gauss en esta nueva base. El cambio se expresará por

$$\begin{bmatrix} S \\ T \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ N \\ R \end{bmatrix} \quad (32.8)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= L \cos \psi - N \sin \psi \\ T &= L \sin \psi + N \cos \psi \\ R &= R \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k\delta v^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{L,N,R} \quad (33.8)$$

En cuanto a la velocidad recordemos que en el sistema S,T,R es:

$$v_r = \frac{c}{p} e \sin V$$

$$v_p = \frac{c}{p} (1 + e \cos V)$$

de aquí que, según la Fig.6.8:

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= \frac{v_p}{v} \\ \cos \psi &= \frac{v_r}{v} \end{aligned} \right\} \quad (34.8)$$

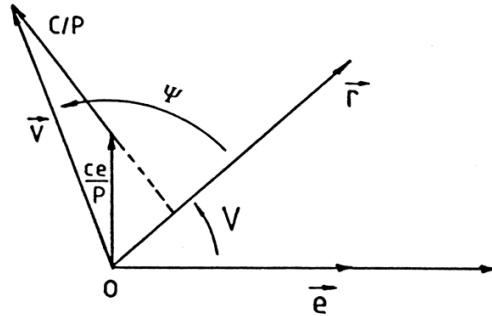


FIG. 6.8

Las dos primeras ecuaciones de Gauss se mantendrán ya que el tercer eje de uno y otro sistema coinciden. Es decir, volvemos a encontrar (I) y (II). Para hallar las restantes tendremos en cuenta los cambios indicados.

Así, para calcular a' partiremos de (III) y escribiremos, sustituyendo f_S y f_T por sus correspondientes valores deducidos de (32.8) y (34.8), teniendo además en cuenta que $\vec{f}$ sólo tiene primera componente,

$$a' = \frac{2a^2}{c} [e \sin V \cos \psi + (1 + e \cos V) \sin \psi] f_L =$$

$$= \frac{2a^2}{c} \left[e \sin V \frac{v_r}{v} + (1 + e \cos V) \frac{v_p}{v} \right] f_L$$

y teniendo en cuenta los valores de v_r , v_p y f_L (primera componente de $\vec{f}$) queda

$$a' = \frac{2a^2}{pv} [e^2 + 1 + 2e \cos V] \left(-\frac{1}{2} k \delta v^2 \right)$$

o lo que es lo mismo:

$$a' = -\frac{a^2 v^3 k \delta}{\mu} \left(\mu = \frac{c^2}{p}; \quad e^2 + 1 + 2e \cos V = \frac{v^2 p^2}{c^2} \right) \quad (35.8)$$

Análogamente, para calcular e' partiremos de (IV) y aplicando los mismos cambios y recordando que $\cos E = \frac{e + \cos V}{1 + e \cos V}$ obtendremos:

$$e' = -k \delta v (e + \cos V) \quad (36.8)$$

ω' y σ' se obtendrán a partir de (V) y (VI). Serán:

$$\omega' = -\frac{k \delta v \sin V}{e} \quad (37.8)$$

$$\sigma' = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(\frac{e^2 r}{p} + 1 \right) \delta k v \sin v \quad (38.8)$$

La presencia del término $\sin V$ en las ecuaciones (37.8) y (38.8) hará que al integrarlas obtengamos

$$\Delta \omega = 0 \quad \Delta \sigma = 0 \quad (39.8)$$

Deberemos pues preocuparnos solamente de a' y e' .

En las fórmulas (35.8) y (36.8) intervienen la densidad δ y la velocidad v que podemos expresar en función de la anomalía excéntrica E . En efecto, recordemos que $\delta = e^{-\beta h}$ (39.8) y escribámosla para el perigeo. Si llamamos δ_0 a la densidad en dicho punto tendremos:

$$\delta_0 = e^{-\beta q_0} \quad (40.8)$$

y tomando $h = r$ y dividiendo (39.8) por (40.8):

$$\delta = \delta_0 e^{-\beta(r-q_0)}$$

donde $r = a(1 - e \cos E)$.

Por otra parte, llamemos x a la semidistancia focal (Fig.7.8) :

$$x = ae$$

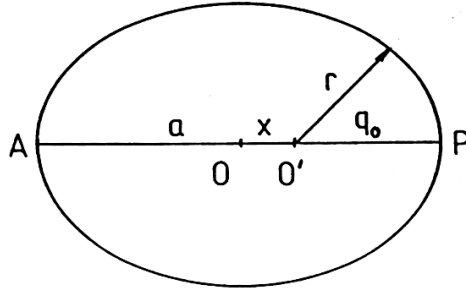


FIG. 7.8

con lo cual

$$q_0 = a(1 - e) = a - x$$

y

$$r = a - x \cos E$$

Por tanto

$$r - q_0 = x - x \cos E$$

y

$$\delta = \delta_0 e^{-\beta x} e^{\beta x \cos E} \quad (41.8)$$

Para la velocidad escribiremos:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{ra} (2a - r) = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}$$

de donde

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{(1 + e \cos E)^{\frac{1}{2}}}{(1 - e \cos E)^{\frac{1}{2}}} \quad (42.8)$$

Para simplificar aun más calcularemos x' y trabajaremos con a' y e' en lugar de hacerlo con a y e .

Escribiremos:

$$x' = a'e + ae'$$

y teniendo en cuenta (35.8) y (36.8) obtendremos:

$$x' = -ka \frac{e + \cos E}{1 - e \cos E} \delta V$$

pero, sustituyendo δ y v por (41.8) y (42.8), finalmente:

$$x' = -nK \frac{(1+e \cos E)^{\frac{1}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{3}{2}}} (e + \cos E) e^{\beta x \cos E} \quad (43.8)$$

donde

$$K = ka^2 \delta_0 e^{-\beta x}$$

Análogamente, sustituyendo en (35.8) δ y v por (41.8) y (42.8), se obtiene:

$$a' = -nK \frac{(1+e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{3}{2}}} e^{\beta x \cos E} \quad (44.8)$$

De (43.8) obtendremos

$$\Delta x = -K \int_0^{2\pi} \frac{(1+e \cos E)^{\frac{1}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{1}{2}}} (e + \cos E) e^{\beta x \cos E} dE \quad (45.8)$$

y de (44.8):

$$\Delta a = -K \int_0^{2\pi} \frac{(1+e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{1}{2}}} e^{\beta x \cos E} dE \quad (46.8)$$

Al resolver las integrales (45.8) y (46.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta x = -2\pi K \left\{ I_1(\beta x) + \frac{1}{2} e [3I_0(\beta x) + I_2(\beta x)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} e^2 [11 I_1(\beta x) + I_3(\beta x)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} e^3 [I_0(\beta x) + 8I_2(\beta x) + I_4(\beta x)] + 0(e^4) \right\} \end{aligned} \quad (47.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta a = -2\pi K \left\{ I_0(\beta x) + 2e I_1(\beta x) + \frac{3}{4} e^2 [7I_0(\beta x) + I_2(\beta x)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} e^3 [3I_1(\beta x) + I_3(\beta x)] + 0(e^4) \right\} \end{aligned} \quad (48.8)$$

De $e = \frac{x}{a}$, tomando incrementos se obtiene

$$\Delta e = \frac{\Delta x}{a} - \frac{x}{a^2} \Delta a$$

y sustituyendo Δx y Δa por sus valores (47.8) y (48.8):

$$\begin{aligned} \Delta e = -\frac{2\pi K}{a} \left\{ I_1(\beta x) + \frac{1}{2} e [I_0(\beta x) + I_2(\beta x)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} e^2 [-5I_1(\beta x) + I_3(\beta x)] + 0(e^3) \right\} \end{aligned} \quad (49.8)$$

Tanto en Δx como en Δa y Δe , $I_0(\beta x)$, $I_1(\beta x)$, representan las funciones de Bessel

$$I_n(\beta x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nE \cdot e^{\beta x \cos E} dE$$

Si designamos por q y q' las distancias perihélica y afélica respectivamente, tendremos:

$$q = a(1 - e) = a - x$$

$$q' = a(1 + e) = a + x$$

y de (47.8) y (48.8):

$$\begin{aligned} \Delta q = \Delta a - \Delta x = -2\pi K \left\{ I_0(\beta x) - I_1(\beta x) + \frac{e}{2} [-3I_0(\beta x) + 4I_1(\beta x) - I_2(\beta x)] + \dots \right\} \\ \Delta q' = \Delta a + \Delta x = -2\pi K \left\{ I_0(\beta x) + I_1(\beta x) + \frac{e}{2} [3I_0(\beta x) + 4I_1(\beta x) + I_2(\beta x)] + \dots \right\} \end{aligned}$$

En primera aproximación se puede suponer $e \approx 0$ y al comparar los incrementos de q y q' , obtendremos:

$$\frac{\Delta q'}{\Delta q} = \frac{I_0(\beta x) - I_1(\beta x)}{I_0(\beta x) + I_1(\beta x)}$$

Si se toma $\beta x \approx 3$ y $e < 0.2$, valores normales en el lanzamiento de satélites, este cociente es:

$$\frac{\Delta q'}{\Delta q} \approx 10$$

lo cual nos dice que el apogeo baja una diez veces más deprisa que el perigeo. La órbita tiende a hacerse circular.

Como que a disminuye, en media el satélite describe una espiral y acaba quemándose en la atmósfera. Es la “muerte” de un satélite artificial en órbita alrededor de la Tierra.

8.6 Perturbaciones debidas a la presión de radiación solar

Estudiaremos ahora las perturbaciones que sobre los elementos orbitales de un satélite artificial produce la presión de radiación solar directa, fenómeno que hay que tener en cuenta cuando se utilizan satélites con elevada superficie respecto a la masa. Despreciaremos la radiación reflejada procedente de los planetas (sobre todo de la Tierra) y de la Luna.

Se sabe que a una altitud de 800 km los efectos de la presión de radiación solar directa y la resistencia de la atmósfera sobre un satélite artificial de la Tierra son del mismo orden. Es más, para las temperaturas usuales exosféricas y por encima de los 800 km los efectos de la presión de radiación son mayores que los de la resistencia de la atmósfera para satélites que se mueven en órbitas circulares.

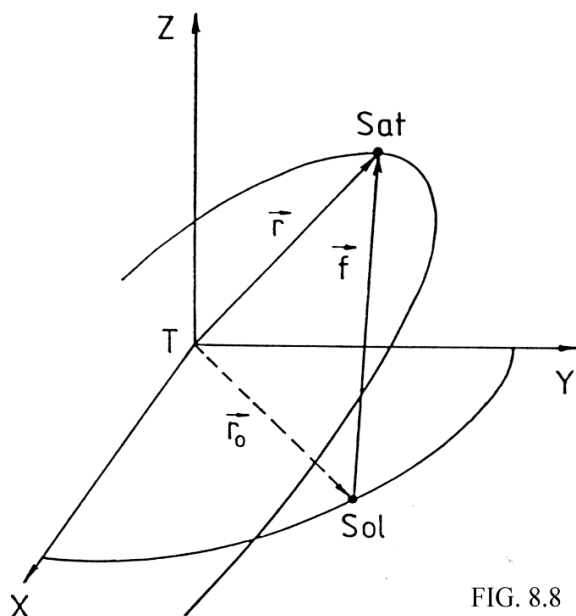


FIG. 8.8

Para un estudio más preciso de la evolución orbital y para satélites en órbitas muy excéntricas, los dos efectos deberán ser considerados simultáneamente.

Sea $\vec{f}$ la fuerza por unidad de masa debida a la presión de radiación solar directa. Llamemos $\vec{r}_0$ al vector de posición geocéntrico del Sol y $\vec{r}$ al vector de posición geocéntrico del satélite. De la Fig. 8.8 se deduce que la fuerza perturbatriz $\vec{f}$ se podrá expresar de la forma

$$\vec{f} = \sigma \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (50.8)$$

y puesto que r es siempre mucho más pequeño que r_0 se podrá escribir

$$\vec{f} = -f\vec{u} \quad (51.8)$$

con $f = \frac{\sigma}{r_0^2}$ y $\vec{u} = \frac{\vec{r}_0}{r_0}$ (vector unitario Tierra - Sol) siendo

$$\sigma = -\frac{kq_0s}{m} \quad (52.8)$$

donde k es un factor que depende del albedo y de la forma del satélite ($k = 1$ para una esfera perfectamente reflectante), s es la sección recta del satélite, m su masa y q_0 se toma igual a 4.65×10^{-5} dinas suponiendo constante la distancia geocéntrica del Sol y la intensidad de la radiación solar a esta distancia.

El vector $\vec{u}$, unitario en la dirección del Sol, varía con la posición relativa del Sol respecto a la Tierra; pero, en primera aproximación, podemos suponer que durante una vuelta del satélite $\vec{u}$ se mantiene constante. En efecto, en un día un satélite geodésico da ocho vueltas a la Tierra y el Sol recorre aproximadamente 1° en su movimiento anual aparente alrededor de la Tierra. Por tanto, en una vuelta del satélite, el Sol se habrá desplazado solamente $1/8$ de grado y, en consecuencia, podemos despreciar el movimiento del Sol. Luego, según (51.8) y (52.8) $\vec{f}$ será una fuerza de módulo y dirección constantes a lo largo de un periodo.

Resolveremos este caso en el sistema P, Q, R (3.11.3) y utilizaremos la fórmula

$$\Delta\alpha = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \alpha'(E)(1 - e \cos E) dE \quad (53.8)$$

Las componentes de $\vec{u}$ en el sistema P, Q, R serán

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_P \\ u_Q \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \vec{P} \\ \vec{u} \cdot \vec{Q} \\ \vec{u} \cdot \vec{R} \end{bmatrix} \quad (54.8)$$

y, por consiguiente, las de $\vec{f}$:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_P \\ f_Q \\ f_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f\vec{u} \cdot \vec{P} \\ -f\vec{u} \cdot \vec{Q} \\ -f\vec{u} \cdot \vec{R} \end{bmatrix} \quad (55.8)$$

8.6.1 Ecuación de sombra

Al aplicar la fórmula (53.8) tendremos en cuenta que responde al caso en que el satélite permanece siempre iluminado; pero, si el satélite penetra en el cono de sombra de la Tierra, mientras permanece eclipsado la presión de radiación no actúa sobre él y, por consiguiente, su movimiento no se ve perturbado por esta causa. Es preciso pues calcular cuando se producirá un eclipse. Como que la distancia del satélite a la Tierra es mucho más pequeña que su distancia al Sol, podemos suponer que la Tierra proyecta un cilindro de sombra en lugar de un cono (Fig. 9.8). Llamando $\vec{\rho}$ al radio de la Tierra, en el instante de entrada o salida del satélite del cilindro de sombra tendremos:

$$\lambda\vec{u} = \vec{r} - \vec{\rho}$$

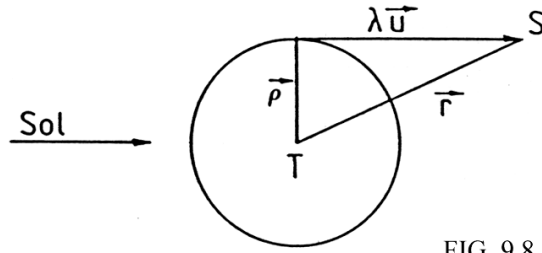


FIG. 9.8

y como que $\vec{\rho}$ y $\vec{u}$ son perpendiculares:

$$\vec{\rho} \cdot \vec{u} = \vec{\rho} \cdot (\vec{r} - \vec{\rho}) = 0$$

o sea:

$$\rho^2 = \vec{r} \cdot \vec{\rho}$$

Por otra parte, el módulo de $\lambda\vec{u}$ es λ y, por tanto

$$\lambda^2 = (r - \rho)^2 = r^2 + \rho^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{\rho} = r^2 - \rho^2$$

Luego

$$\lambda = \sqrt{r^2 - \rho^2} \quad (56.8)$$

Efectuando el producto escalar de r por u queda:

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\lambda} \vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} (r^2 - \rho^2) = \sqrt{r^2 - \rho^2} \quad (57.8)$$

Recordemos que una posición cualquiera $\vec{r}$ del satélite en el sistema P, Q, R es

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = a(\cos E - e) u_p + a\sqrt{1-e^2} \sin E u_Q$$

Luego, la condición de entrada en el cilindro de sombra será, según (57.8):

$$\sqrt{a^2(1-e \cos E)^2 - \rho^2} = a(\cos E - e) u_p + a\sqrt{1-e^2} \sin E u_Q \quad (58.8)$$

ecuación de cuarto grado en $\cos E$. Al resolverla podemos distinguir dos casos:

a) Las cuatro soluciones son imaginarias: el cilindro de sombra no corta la órbita del satélite.

b) Las cuatro soluciones son reales: hemos de buscar las dos soluciones que corresponden a la sombra para las cuales el satélite queda eclipsado; dicho de otra forma, la Tierra queda entre el Sol y el satélite ($\vec{u} \cdot \vec{r} < 0$).

Un posible caso intermedio, con dos soluciones reales y dos imaginarias, no se puede dar si consideramos un cilindro de sombra:

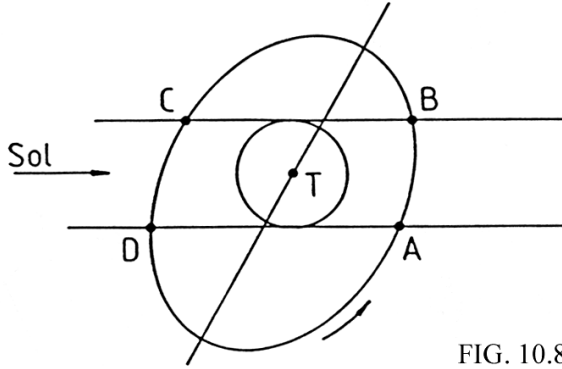


FIG. 10.8

Si A es el punto de entrada en la sombra, existirá un punto de salida B y forzosamente existirán los puntos C y D de entrada y salida de la parte iluminada del cilindro (Fig. 10.8). Por otro lado, si el satélite no entra en la zona de sombra, tampoco entrará en la parte iluminada del cilindro de sombra y permanecerá siempre iluminado.

8.6.2 Cálculo de las perturbaciones debidas a $\vec{f}$

Una vez hallados los valores E_1 y E_2 de la anomalía excéntrica correspondientes a los puntos de entrada y salida de la sombra, ya podremos integrar utilizando (53.8) en el caso a). En el caso b) distinguiremos dos subcasos que dependen de la posición del periastro con respecto a la sombra:

1) Si el periastro queda fuera del cilindro de sombra (Fig. 11.8), es $E_1 < E_2$ y efectuaremos la integración según el siguiente esquema:

$$\int_0^{E_1} + \int_{E_2}^{2\pi} = \int_{E_2}^{E_1} + \int_0^{2\pi} \quad (59.8)$$

2) Si el periastro queda dentro del cilindro de sombra (Fig. 12.8), es $E_2 < E_1$ y el esquema según el cual efectuaremos la integración es ahora:

$$\int_0^{2\pi} - \int_0^{E_2} - \int_{E_1}^{2\pi} = \int_{E_2}^{E_1} \quad (60.8)$$

Comparando (59.8) con (60.8) observamos que, en general, podemos escribir:

$$\Delta\alpha = \int_{E_2}^{E_1} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} \int_0^{2\pi} \quad (61.8)$$

donde $\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ toma el valor 1 si el perigeo está fuera del cilindro de sombra y 0 si está dentro.

Partamos ahora de las ecuaciones de Gauss e integremos según el esquema propuesto, para lo cual las expresaremos en función de E y sustituiremos las componentes f_S, f_Q, f_R que aparecen en ellas por f_P, f_Q, f_R siendo

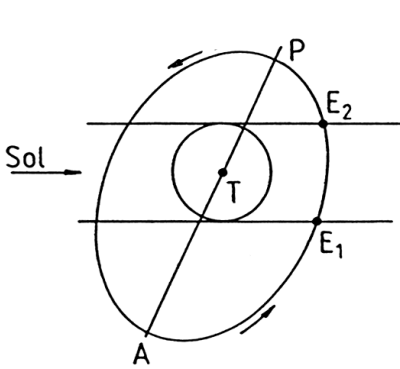


FIG. 11.8

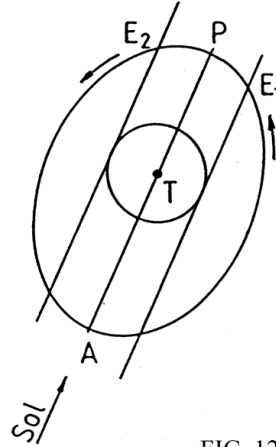


FIG. 12.8

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_S \\ f_T \\ f_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos V & \sin V & 0 \\ -\sin V & \cos V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_P \\ f_Q \\ f_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(u_P \cos V + u_Q \sin V) \\ -f(-u_P \cos V + u_Q \sin V) \\ -f(u_R) \end{bmatrix}$$

Empezaremos partiendo de (I), escribiéndola de la forma:

$$\Omega' = -\frac{r \sin \omega \cos V + \cos \omega \sin V}{c \sin i} f u_R$$

y recordando que

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a\mu(1-e^2)}; & r \sin V &= a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ r \cos V &= a(\cos E - e); & r &= a(1 - e \cos E) \end{aligned}$$

y sustituyendo:

$$\Omega' = -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{(\cos E - e) \sin \omega + \sqrt{1-e^2} \sin E \cos \omega}{\sin i} f u_R$$

Aplicando (61.8) teniendo en cuenta (53.8), si el satélite está siempre iluminado tendremos:

$$\Delta\Omega_0 = \frac{-fu_R}{\text{sen}i\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int_0^{2\pi} \left[(\cos E - e) \text{sen} \omega + \sqrt{1-e^2} \text{sen} E \cos \omega \right] (1 - e \cos E) dE$$

es decir:

$$\Delta\Omega_0 = \frac{3e\pi fu_R \text{sen} \omega}{n\sqrt{1-e^2} \text{sen} i} \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

y en el caso de que no permanezca siempre iluminado:

$$\Delta\Omega = -\frac{fu_R}{n\sqrt{1-e^2} \text{sen} i} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \left[\left(-\frac{3eE}{2} + (1+e^2) \text{sen} E - \frac{e \text{sen} 2E}{4} \right) \text{sen} \omega - \sqrt{1-e^2} \left(\cos E - \frac{e}{4} \cos 2E \right) \cos \omega \right]_{E_2}^{E_1} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \Delta\Omega_0$$

De la misma manera hallamos para los demás elementos

$$\begin{aligned} \Delta i_0 &= \frac{3e\pi fu_R \cos \omega}{n\sqrt{1-e^2}} \\ \Delta a_0 &= 0 \\ \Delta e_0 &= -\frac{3\sqrt{1-e^2} \pi f u_Q}{n} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \\ \Delta \omega_0 &= \frac{3\sqrt{1-e^2} \pi f u_P}{n e} \sqrt{\frac{a}{\mu}} - \Delta\Omega_0 \cos i \\ \Delta \sigma_0 &= -\frac{3(1+e^2) \pi f u_P}{n e} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \end{aligned}$$

si el satélite no se eclipsa y

$$\begin{aligned} \Delta i &= -\frac{fu_R}{n\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left[\left(-\frac{3eE}{2} - \frac{e}{4} \text{sen} 2E + (1+e^2) \text{sen} E \right) \cos \omega - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1-e^2} \left(\frac{e}{4} \cos 2E - \cos E \right) \text{sen} \omega \right]_{E_2}^{E_1} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \Delta i_0 \end{aligned}$$

$$\Delta a = -\frac{2af}{n} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left[\cos E u_P + \sqrt{1-e^2} \text{sen} E u_Q \right]_{E_2}^{E_1}$$

$$\Delta e = -\frac{f\sqrt{1-e^2}}{n} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{4} \cos 2Eu_p + \left(\frac{3E}{2} - 2e \sin E + \frac{1}{4} \sin 2E \right) u_Q \right]_{E_2}^{E_1} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \Delta e_0$$

$$\Delta \omega = \frac{f}{ne} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left[\sqrt{1-e^2} \left(\frac{3E}{2} - e \sin E - \frac{1}{4} \sin 2E \right) u_p + \left(\frac{1}{4} \cos 2E - e \cos E \right) u_Q \right]_{E_2}^{E_1} - \cos i \Delta \Omega + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \Delta \omega_0$$

$$\Delta \sigma = -\frac{f\sqrt{1-e^2}}{ne} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{3}{2} (1+e^2) E - (e^3 + 3e) \sin E + \frac{3e^2 - 1}{4} \sin 2E \right) u_p + \right. \\ \left. + \left(e(2-a) \cos E + (a-e^2) \frac{\cos^2 E}{2} - ae \frac{\cos^3 E}{3} \right) u_Q \right]_{E_2}^{E_1} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \Delta \sigma_0$$

si el satélite se eclipsa.

8.7 Perturbaciones debidas a la acción de otro astro lejano

Partiremos de la fórmula

$$\vec{f} = Gm_3 \left[-\frac{\vec{r}}{\rho^3} + 3 \frac{\vec{R}}{R^3} r \cos \Psi \right] \quad (62.8)$$

obtenida en 7.5.1, que expresa el valor de la fuerza perturbatriz por unidad de masa debida a la presencia de un astro lejano (en aquel caso la Luna). En ella, m_3 es la masa de la Luna, $\vec{r}$ es la distancia Tierra - satélite artificial, $\vec{\rho}$ la distancia satélite-Luna, $\vec{R}$ la distancia Tierra-Luna y Ψ el ángulo que forman los vectores $\vec{r}$ y $\vec{R}$.

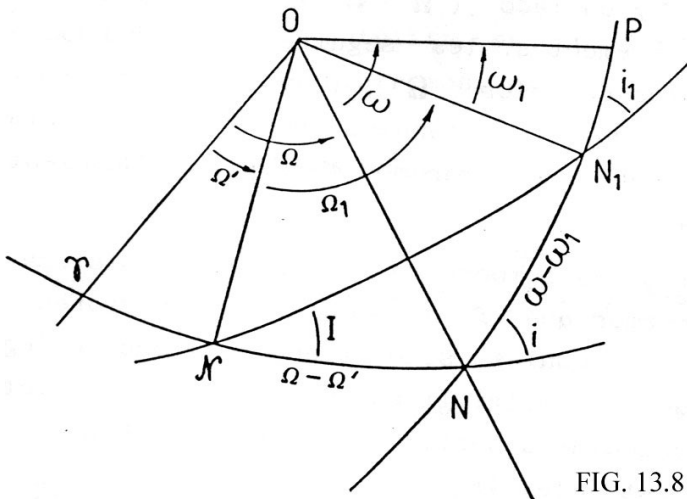


FIG. 13.8

Seguiremos suponiendo aquí, para fijar ideas, que el astro perturbador es la Luna y definiremos los elementos cuyas variaciones queremos hallar respecto al plano de la órbita de la Luna. Sean NN_1 la órbita del satélite, NN el ecuador y NN_1 la órbita lunar (Fig. 13.8). N es el nodo de la órbita lunar, N el nodo de la órbita del satélite (los dos respecto al ecuador) y N_1 es el nodo de la órbita del satélite respecto a la órbita lunar. Sean, además, I la inclinación del plano de la órbita de la Luna con respecto al del ecuador; i , la del plano de la órbita del satélite con respecto al mismo plano del ecuador, e i_1 la de la órbita del satélite con respecto al de la órbita de la Luna. Llamemos, por otra parte, Ω' , Ω y Ω_1 a los argumentos de los nodos N , N y N_1 respectivamente, este último contado desde la línea de los nodos ON , y ω y ω_1 , a los argumentos del periastro contados sobre la órbita del satélite desde su intersección con el ecuador y la órbita lunar respectivamente.

El problema que tendremos que resolver es, pues, el de calcular Ω_1 , i_1 y ω_1 conocidos I , Ω' , Ω , i y ω . Para ello podemos aplicar las fórmulas de la trigonometría esférica al triángulo MNN_1 (Fig. 13.8) en el que se conocen dos ángulos (I , $180^\circ - i$) y un lado ($\Omega - \Omega'$). Una vez determinados estos elementos les seguiremos llamando, por comodidad en los cálculos, Ω , i y ω , con el bien entendido de que los tenemos referidos al plano de la órbita lunar que tomaremos como plano fundamental XY (Fig. 14.8).

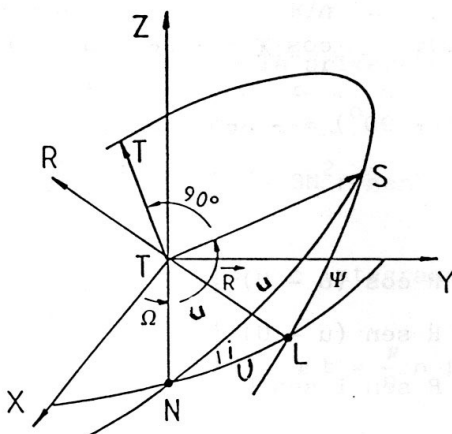


FIG. 14.8

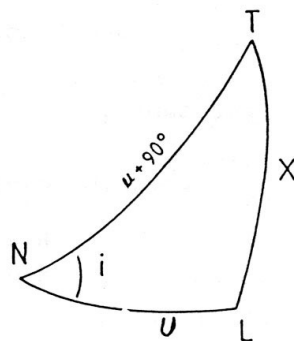


FIG. 15.8

Hallaremos las componentes de $\vec{f}$ en el sistema S, T, R . Observemos que $\vec{f}$ es suma de dos vectores, el primero de los cuales sólo tiene componente según S . El segundo está multiplicado por $\cos \Psi$, factor que podemos calcular a partir del triángulo NLS (nodo - Luna - satélite) (Fig. 14.8):

$$\cos \Psi = \cos u \cos U + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} U \cos i$$

fórmula que podemos simplificar si suponemos que la órbita del satélite es de inclinación pequeña ($\cos i \approx 1$). Escribiremos, pues:

$$\cos \Psi = \cos(u - U) \quad (63.8)$$

Por otra parte, si consideramos el triángulo TLN y llamamos χ al arco TL, podemos escribir (Fig. 15.8):

$$\cos \chi = -\operatorname{sen} u \cos U + \cos u \operatorname{sen} U \cos i$$

y, utilizando la misma hipótesis ($\cos i \simeq 1$):

$$\cos \chi = -\operatorname{sen}(u - U)$$

De todo ello resulta que los cosenos directores de $\vec{R}$ con respecto al sistema S, T, R son:

$$\begin{aligned} \cos \Psi &\simeq \cos(u - U) & \cos \chi &= -\operatorname{sen}(u - U) \\ \operatorname{sen} U \cos(i + 90^\circ) &= -\operatorname{sen} i \operatorname{sen} U \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R \cos(u - U) \\ -R \operatorname{sen}(u - U) \\ -R \operatorname{sen} i \operatorname{sen} U \end{bmatrix}_{S, T, R}$$

Luego, las componentes de $\vec{f}$, designando por M la masa de la Luna, serán:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_s = -\frac{GM}{\rho^3} r + \frac{3GM}{R^3} r \cos^2(u - U) \\ f_t = \frac{3GM}{R^3} r \operatorname{sen}(u - U) \cos(u - U) \\ f_r = -\frac{3GM}{R^3} r \operatorname{sen} i \operatorname{sen} U \cos(u - U) \end{bmatrix}_{S, T, R} \quad (64.8)$$

Si el astro perturbador describiese una órbita circular alrededor de la Tierra, GM/R^3 sería constante. Llamando N^2 a dicha constante, (64.8) quedaría:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} N^2 r (1 + 3 \cos 2(u - U)) \\ -\frac{3}{2} N^2 r \operatorname{sen} 2(u - U) \\ -3 N^2 r \operatorname{sen} i \operatorname{sen} U \cos(u - U) \end{bmatrix}_{S, T, R} \quad (65.8)$$

habiendo supuesto $R/\rho = 1$.

Partiendo de la primera ecuación de Gauss tendremos:

$$\Omega' = \frac{r}{c} \frac{\text{sen } U}{\text{sen } i} \left(-3N^2 r \text{sen } i \text{sen } U \cos(u - U) \right)$$

Suponiendo $r \approx a$ e integrando según M , para lo cual haremos

$$U = vt = \frac{v}{n} nt = qM$$

tendremos:

$$\Delta\Omega = -3 \left(\frac{N}{n} \right)^2 \int_0^{2\pi} \text{sen } u \text{sen } qM \cos(u - qM) dM \quad (66.8)$$

y como que lo que nos interesa son las perturbaciones seculares, para integrar podemos tomar $u = M$, con lo cual (66.8) se escribirá, operando:

$$\Delta\Omega = -\frac{3}{4} \left(\frac{N}{n} \right)^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2M - \cos 2qM + \cos 2(1-q)M) dM$$

de donde

$$\Delta\Omega = -\frac{3\pi}{2} \left(\frac{N}{n} \right)^2 \quad \text{rad / vuelta} \quad (67.8)$$

fórmula que nos dice que el nodo retrograda a lo largo del plano fundamental.

Si efectuáramos la integración entre θ y M encontraríamos:

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{4} \left(\frac{N}{n} \right)^2 \left[M - \frac{1}{2} \text{sen } 2M - \frac{1}{2q} \text{sen } 2qM + \frac{1}{2(1-q)} \text{sen } 2(1-q)M \right] \quad (68.8)$$

que expresa una oscilación del nodo que tiene lugar al mismo tiempo que la retrogradación.

Si aplicásemos las expresiones (67.8) y (68.8) al caso de la Luna perturbada por el Sol ($n \approx 13^\circ/\text{día}$, $N \approx 1^\circ/\text{día}$), obtendríamos que el nodo de la órbita lunar retrograda, dando una vuelta completa en 18,6 años, mientras va oscilando alrededor de su posición media.

Partiendo de la segunda fórmula de Gauss obtenemos

$$i' = \frac{r}{c} \cos u \left[-3N^2 r \text{sen } i \text{sen } U \cos(u - U) \right]$$

y, por consideraciones análogas al caso anterior,

$$\Delta i = -3 \left(\frac{N}{n} \right)^2 \text{sen } i \int_0^{2\pi} \cos M \text{sen } qM \cos(1-q)M dM \quad (69.8)$$

Utilizando la conocida fórmula trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

obtenemos:

$$\operatorname{sen} qM \cos M = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(1+q)M - \operatorname{sen}(1-q)M]$$

y volviéndola a aplicar:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(1+q)M - \operatorname{sen}(1-q)M] \cos(1-q)M = \\ & = \frac{1}{4} [\operatorname{sen} 2M + \operatorname{sen} 2qM - \operatorname{sen} 2(1-q)M] \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\Delta i = -\frac{3}{4} \left(\frac{N}{n} \right)^2 \operatorname{sen} i \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} 2M + \operatorname{sen} 2qM - \operatorname{sen} 2(1-q)M] dM \quad (70.8)$$

de donde

$$\Delta i = 0 \quad (71.8)$$

Si integrásemos entre 0 y M obtendríamos

$$i = i_0 - \frac{3}{4} \operatorname{sen} i \left(\frac{N}{n} \right)^2 \left[-\frac{1}{2} \cos 2M - \frac{1}{2q} \cos 2qM + \frac{1}{2(1-q)} \cos 2(1-q)M \right] \quad (72.8)$$

De estas expresiones (71.8) y (72.8) se deduce que sólo hay perturbaciones periódicas.

Para estudiar las perturbaciones producidas sobre el semieje mayor de la órbita, partiremos de la tercera fórmula de Gauss y, dado que suponemos $e \approx 0$ se reducirá a

$$a' = \frac{2a^2}{c} f_r$$

es decir, en nuestro caso:

$$a' = \frac{2a^2}{c} \left[-\frac{3}{2} N^2 r \operatorname{sen} 2(u-U) \right]$$

Luego, con $c = na^2$:

$$\Delta a = -3 \left(\frac{N}{n} \right)^2 a \int_0^{2\pi} \sin 2(1-q) M dM$$

es decir,

$$\Delta a = 0$$

e integrando entre 0 y M :

$$a = a_0 + \frac{3}{2} \left(\frac{N}{n} \right)^2 \frac{a}{1-q} \cos 2(1-q) M$$

o sea, que tampoco en este caso hay términos seculares.

Un cálculo análogo al efectuado nos daría

$$\Delta e = 0$$

Para el estudio de las variaciones del argumento del perigeo, partiendo de la quinta fórmula de Gauss, haciendo en ella $V = M$ y teniendo en cuenta la primera, obtenemos:

$$\omega' = -\frac{p}{ce} \left[\cos Mf_s - \left(1 + \frac{r}{q} \right) \sin Mf_T \right] - \cos i \Omega'$$

Sustituyendo f_s y f_T por sus valores (65.8), haciendo $p = a(1-e^2) \approx a$ y $r \approx a$, y utilizando relaciones trigonométricas análogas a las utilizadas para calcular Δi , integrando, obtenemos:

$$\Delta \omega = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{N}{n} \right) \text{ rad / vuelta}$$

e integrando entre 0 y M :

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 - \frac{1}{2e} \left(\frac{N}{n} \right)^2 & \left[\sin M - \frac{3}{2(3-2q)} \sin(3-2q)M + \frac{q}{2(1-2q)} \sin(1-2q)M \right] + \\ & + \frac{3}{4} \left(\frac{N}{n} \right)^2 M + \frac{3}{4} \left(\frac{N}{n} \right)^2 \left[-\frac{1}{2} \sin 2M - \frac{1}{2q} \sin 2qM + \frac{1}{2(1-q)} \sin 2(1-q)M \right] \end{aligned}$$

Hay un término secular, lo cual era de esperar porque también aparece en Ω , y los demás son términos periódicos.

8.8 Perturbaciones debidas a la acción de varios astros

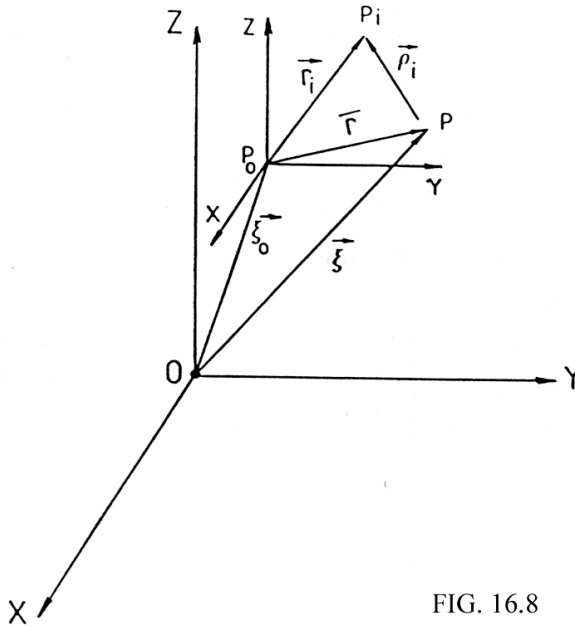


FIG. 16.8

Consideremos $n + 2$ puntos materiales P_0, P, P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de masas respectivas m_0, m, m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y sean $\vec{\xi}_0$ y $\vec{\xi}$ los vectores de posición de P_0 y P en un sistema inercial $O; X, Y, Z$ (Fig. 16.8). Tomemos un sistema de ejes cartesianos con origen en P_0 y ejes x, y, z paralelos a los X, Y, Z , respectivamente. Llamemos $\vec{r}$ y $\vec{r}_i$ a los vectores de posición de P y P_i con respecto a P_0 y $\vec{\rho}_i$ al vector de posición de P_i con respecto a P . De acuerdo con la fórmula (32.7) de 7.4, suponiendo $m_0 = 1$ y refiriendo las otras masas a esta unidad, la ecuación del movimiento de P con respecto a P_0 será

$$\ddot{\vec{r}} = -G(1+m)\frac{\vec{r}}{r^3} + G\sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{\vec{\rho}_i}{\rho_i^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right] \quad (73.8)$$

en la que el primer término del segundo miembro representa la acción del cuerpo P_0 sobre el cuerpo de masa m , el primer término en el paréntesis la acción de los cuerpos de masas m_i sobre el de masa m y el segundo término en el paréntesis representa la acción de los cuerpos de masas m_i sobre el primario de masa $m_0 = 1$. Evidentemente esta fórmula (73.8) se puede aplicar tanto al estudio del movimiento de un planeta del sistema solar ($P_0 = \text{Sol}$) como a un satélite artificial de cualquier planeta o satélite natural.

La parte de (73.8) que depende de m_i es la *aceleración perturbatriz* o *fuerza perturbatriz* por unidad de masa y es fácil ver que deriva de una función de fuerzas

$$R = G\sum_i m_i \left[\frac{1}{\rho_i} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r_i^3} \right] \quad (74.8)$$

llamada *función perturbatriz*.

Podemos obtener la formulación canónica de las ecuaciones del movimiento por consideraciones análogas a las planteadas en 7.1. En efecto, observemos que se verifica

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho_i} \right) = \frac{\vec{\rho}_i}{\rho_i^3} \quad (75.8)$$

$$\nabla \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r_i^3} \right) = \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (76.8)$$

Sustituyendo (75.8) y (76.8) en (73.8) obtenemos:

$$\ddot{\vec{r}} = -G(1+m) \frac{\vec{r}}{r^3} + \sum_{i=1}^n m_i \nabla \left[\frac{1}{\rho_i} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r_i^3} \right] \quad (77.8)$$

Teniendo en cuenta (74.8) y haciendo

$$k^2 = G(1+m)$$

$$U = \frac{k^2}{r}$$

nos queda

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla(U + R) \quad (78.8)$$

Introduciendo ahora la función hamiltoniana H definida en (7.1) y operando de manera análoga a como hemos operado allí, tendremos las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= +\nabla_{\dot{\vec{r}}} (H - R) \\ \ddot{\vec{r}} &= -\nabla_{\vec{r}} (H - R) \end{aligned} \right\} \quad (79.8)$$

indicando por $\nabla_{\dot{\vec{r}}}$ y $\nabla_{\vec{r}}$ los gradientes respecto a las variables $\dot{\vec{r}}$ y $\vec{r}$ respectivamente. Las ecuaciones (79.8) son una generalización de las (9.7) y suelen escribirse también en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{v}} + \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} &= \frac{\partial R}{\partial \vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} - \frac{\partial H}{\partial \dot{\vec{r}}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (80.8)$$

8.8.1 Perturbaciones especiales. Método de Encke

Veamos ahora como podemos integrar numéricamente las ecuaciones (73.8) para intervalos relativamente pequeños. Escribámoslas en la forma

$$\ddot{\vec{r}} = -k^2 \frac{\vec{r}}{r^3} + \sum_{i=1}^n Gm_i \left[\frac{\vec{\rho}_i}{\rho^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right] \quad (81.8)$$

Si las masas m_i desapareciesen bruscamente en un instante t , el movimiento sería kepleriano y obedecería a las ecuaciones

$$\ddot{\vec{r}}_0 = -k^2 \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} \quad (82.8)$$

siendo $\vec{r}_0$ el radio vector de P respecto a P_0 en el instante t_0 .

Supongamos que podemos distinguir entre cuerpo perturbado y cuerpo no perturbado. A partir de la época t_0 uno y otro siguen trayectorias distintas; pero, tienen evidentemente las mismas posiciones y las mismas velocidades iniciales

$$\vec{r}^0 = \vec{r}_0^0, \quad \dot{\vec{r}}^0 = \dot{\vec{r}}_0^0$$

Supongamos que hemos calculado el valor numérico de las coordenadas $\vec{r}_0$ en función del tiempo y pongamos

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + d\vec{r}_0$$

De esta forma ponemos en evidencia las perturbaciones de las coordenadas, o dicho de otra forma, las coordenadas diferenciales $d\vec{r}_0$ de la posición perturbada con relación a la posición kepleriana.

Continuemos designando por m_i las masas de los astros perturbadores y por $\vec{r}_i$ sus coordenadas. Si, como ocurre normalmente, nos proponemos determinar las perturbaciones ejercidas sobre un pequeño planeta o sobre un cometa por uno de los grandes planetas cuya teoría analítica ha sido completamente desarrollada y que no sufre ninguna perturbación sensible por parte del astro estudiado, es legítimo suponer conocidos los valores numéricos de las posiciones $\vec{r}_i$ en función del tiempo.

Las coordenadas $\vec{r} = \vec{r}_0 + d\vec{r}_0$ satisfacen la ecuación (81.8) de modo que

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + d\ddot{\vec{r}}_0 = -k^2 \frac{\vec{r}_0 + d\vec{r}_0}{(r_0 + dr_0)^3} + G \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{\vec{\rho}_i}{\rho^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right] \quad (83.8)$$

donde

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_0 - d\vec{r}_0$$

Si restamos $\ddot{\vec{r}}_0$ de los dos miembros de (83.8), teniendo en cuenta (82.8), obtendremos:

$$d\ddot{\vec{r}}_0 = -k^2 \left[\frac{\vec{r}_0 + d\vec{r}_0}{(r_0 + dr_0)^3} - \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} \right] + G \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{\vec{\rho}_i}{\rho^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right] \quad (84.8)$$

Las perturbaciones $d\vec{r}_0$ pueden determinarse por integración directa de las ecuaciones (84.8). El término $\frac{\vec{r}_0}{r_0^3}$ puede calcularse, para alguna fase de la integración, a partir de las leyes del movimiento elíptico y el $\frac{\vec{r}_0 + d\vec{r}_0}{(r_0 + dr_0)^3}$ se calculará para cada fase de la integración extrapolando $d\vec{r}_0$. Ahora bien, este proceso no es práctico, puesto que $d\vec{r}_0$ es muy pequeño y $\frac{\vec{r}_0}{r_0^3} \approx \frac{\vec{r}_0 + d\vec{r}_0}{(r_0 + dr_0)^3}$ con lo cual resulta que su diferencia, primer término de $d\ddot{\vec{r}}_0$, es muy poco significativa. Para salvar esta dificultad Encke ideó una transformación que dió lugar al llamado *método de Encke*.

Se tiene

$$\frac{\vec{r}_0}{r_0^3} - \frac{\vec{r}_0 + d\vec{r}_0}{(r_0 + dr_0)^3} = \frac{1}{r_0^3} \left[\vec{r}_0 - \frac{r_0^3 (\vec{r}_0 + d\vec{r}_0)}{(r_0 + dr_0)^3} \right] = \frac{1}{r_0^3} \left[\vec{r} - d\vec{r}_0 - \frac{r_0^3}{r^3} (\vec{r}_0 + d\vec{r}_0) \right] = \frac{1}{r_0^3} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) \vec{r}_0 - d\vec{r}_0 \right]$$

Hagamos ahora

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = r_0^2 + 2\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0 + d\vec{r}_0^2$$

de donde

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0 + d\vec{r}_0^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2 \left(\vec{r}_0 + \frac{1}{2} d\vec{r}_0 \right) \cdot d\vec{r}_0}{r_0^2}$$

y llamemos

$$q = \frac{\left(\vec{r}_0 + \frac{1}{2} d\vec{r}_0 \right) \cdot d\vec{r}_0}{r_0^2} \quad (85.8)$$

Tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{r_0^2} &= 1 + 2q \\ \frac{r_0^3}{r^3} &= (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} \\ 1 - \frac{r_0^3}{r^3} &= 1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad (86.8)$$

Si $d\vec{r}_0$ es tan pequeño en comparación con $\vec{r}_0$ que su cuadrado se puede despreciar, entonces escribiremos (85.8) en la forma:

$$q = \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0}{r_0^2} \quad (87.8)$$

función más fácil de calcular que la (85.8).

Si es $q \ll 1$ podemos obtener un valor aproximado de (86.8) desarrollando en serie

$$1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} = 3q - \frac{15}{2}q^2 + \dots \quad (88.8)$$

y todavía podemos definir una función

$$f = \frac{1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}}{q} = \frac{3q - \frac{15}{2}q^2 + \dots}{q}$$

que cuando $q \simeq 0$ vale $f = 3$.

La ecuación (84.8), resulta, con estos cambios:

$$d\ddot{\vec{r}}_0 = k^2 \frac{1}{r_0^3} (qf\vec{r} - d\vec{r}_0) + G \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{\vec{\rho}_i}{\rho_i^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right] \quad (89.8)$$

y es la que debe integrarse en el método de Encke. La solución comprende seis constantes de integración que se toman de modo que las coordenadas y las componentes de la velocidad en una órbita no perturbada ($\vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}_0$) sean las mismas que las de la órbita perturbada en una época particular para la cual $d\vec{r}_0$ y $d\dot{\vec{r}}_0$ son nulos. La fecha en la que esto ocurre se llama la *fecha de osculación*.

Las ecuaciones (89.8) son rigurosas si q se calcula con la fórmula (85.8). Para iniciar la integración q se calcula con la fórmula (87.8). Las perturbaciones van siendo incrementadas gradualmente y cuando sus cuadrados ya son apreciables entonces se utiliza la fórmula (85.8).

Si limitamos la integración a una época dada t_1 , obtendremos $\vec{r}_1$ y $\dot{\vec{r}}_1$ correspondientes a dicha época. Con $\vec{r}_1$ y $\dot{\vec{r}}_1$ podremos determinar los elementos de una nueva órbita osculatriz siendo t_1 la época origen. El proceso se puede seguir hasta conseguir que las diferencias O – C sean suficientemente pequeñas. De esta forma, la órbita perturbada se halla dividida en una serie de arcos cada uno de los cuales ha sido objeto de una operación particular. Decimos que con este proceso hemos *rectificado la órbita*.

El método de Encke es uno de los métodos que se conocen con el nombre genérico de *método de las perturbaciones especiales*. Se aplica al cálculo de efemérides de pequeños planetas para los cuales no se ha establecido una teoría analítica, al cálculo del movimiento de cometas perturbado por los grandes planetas, etc. Últimamente se ha recurrido al método de las perturbaciones especiales para controlar en ciertos puntos la teoría analítica de algunos planetas, principalmente Marte y Saturno.

8.8.2 Método de variación de las constantes de Lagrange

Siguiendo a Lagrange consideraremos un sistema algo más general que el (80.8) de $2k$ ecuaciones con $2k$ incógnitas $\dot{x}_i, x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) que escribiremos de la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{x}_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} &= 0 \\ \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial R}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (90.8)$$

con $H, \frac{\partial R}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}$ funciones de las $2k$ variables y el tiempo.

Supongamos que las funciones

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(t; a_1, a_2, \dots, a_{2k}) \\ \dot{x}_i &= \dot{x}_i(t; a_1, a_2, \dots, a_{2k}) \end{aligned} \right\} \quad (91.8)$$

que dependen del tiempo y de las constantes $a_1, \dots, a_{2k}$, son las integrales del sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{x}_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (92.8)$$

que resulta de (90.8) con $\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0$

El *método de Lagrange* consiste en suponer que las integrales del sistema (90.8) son de la forma (91.8) donde las constantes $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$ se consideran variables con el tiempo. De este modo tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{x}_i}{dt} &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (93.8)$$

mientras que si las a_j ($j = 1, 2, \dots, 2k$) son constantes será:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{x}_i}{dt} &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial x_i}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (94.8)$$

y por tanto, en este caso, el sistema (92.8) deberá escribirse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{x}_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (95.8)$$

Sustituyendo (93.8) en (90.8) teniendo en cuenta (95.8) queda:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} - \frac{\partial R}{\partial x_i} &= 0 \\ \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (96.8)$$

y multiplicando la primera de estas igualdades por $\frac{\partial x_i}{\partial a_h}$, la segunda por $-\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_h}$ y sumando respecto al índice i obtenemos:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{2k} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_j} \frac{\partial x_i}{\partial a_h} - \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_h} \right) \frac{da_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a_h} \quad (97.8)$$

ecuaciones de Lagrange que suelen escribirse de la forma

$$\sum_{j=1}^{2k} [a_h, a_j] \frac{da_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a_h} \quad (98.8)$$

donde

$$[a_h, a_j] = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_h} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_j} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_h} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right) \quad (99.8)$$

son los llamados *paréntesis de Lagrange*.

Recordemos algunas propiedades de estos paréntesis que nos van a ser útiles:

a) Si $a_h = a_j$, el paréntesis es nulo.

b) $[a_h, a_j] = -[a_j, a_h]$ para cualquier par de valores de a_h y a_j .

c) $\frac{\partial}{\partial t} [a_h, a_j] = 0$ cualesquiera que sean a_h y a_j .

d) Un giro del sistema de referencia alrededor de uno cualquiera de los ejes de modo que $O; x, y, z \rightarrow O; x_1, y_1, z_1$ transforma el paréntesis de Lagrange de la siguiente forma

$$[a_h, a_j] = [a_h, a_j]_1 + \frac{\partial(\alpha, \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_1)}{\partial(a_h, a_j)}$$

donde $\vec{r}_1$ y $\dot{\vec{r}}_1$ son los transformados de los vectores $\vec{r}$ y $\dot{\vec{r}}$ con este giro, α es el ángulo de giro y $\frac{\partial(\alpha, \vec{r}_1 \wedge \dot{\vec{r}}_1)}{\partial(a_h, a_j)}$ es el jacobiano de la transformación.

8.8.3 Aplicación al movimiento planetario

Para aplicar el método de variación de las constantes al movimiento planetario necesitamos algunas expresiones deducidas al estudiar el movimiento elíptico (3.6) y sus derivadas con respecto al tiempo que listamos a continuación:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos V = a(\cos E - e) \\ \eta &= r \sin V = a\sqrt{1-e^2} \sin E \end{aligned} \quad (100.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{k \sin E}{a^{\frac{1}{2}}(1-e \cos E)} \\ \dot{\eta} &= \frac{k\sqrt{1-e^2} \cos E}{a^{\frac{1}{2}}(1-e \cos E)} \quad (k^2 = n^2 a^3) \end{aligned} \quad (101.8)$$

$$E - e \sin E = nt + \chi \quad (102.8)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}(1-e \cos E)} \quad (103.8)$$

De las (100.8) y (101.8) deducimos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi}{\partial a} &= \cos E - e \\
 \frac{\partial \eta}{\partial a} &= \sqrt{1-e^2} \sin E \\
 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial a} &= \frac{k \sin E}{2a^{\frac{3}{2}}(1-e \cos E)} \\
 \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial a} &= -\frac{k\sqrt{1-e^2} \cos E}{2a^{\frac{3}{2}}(1-e \cos E)}
 \end{aligned} \tag{104.8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi}{\partial e} &= -a \left(1 + \sin E \frac{E}{e} \right) \\
 \frac{\partial \eta}{\partial e} &= a \left[-\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin E + \sqrt{1-e^2} \cos E \frac{\partial E}{\partial e} \right] \\
 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial e} &= \frac{-k \left[(\cos E - e) \frac{E}{e} + \sin E \cos E \right]}{a^{\frac{1}{2}}(1-e \cos E)^2} \\
 \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e} &= \frac{k \left[\cos E (\cos E - e) - (1-e^2) \sin E \frac{\partial E}{\partial e} \right]}{a^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-e^2} (1-e \cos E)^2}
 \end{aligned} \tag{105.8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi}{\partial \chi} &= -a \sin E \frac{\partial E}{\partial \chi} \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \chi} &= a \sqrt{1-e^2} \cos E \frac{\partial E}{\partial \chi} \\
 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \chi} &= -\frac{k (\cos E - e)}{a^{\frac{1}{2}}(1-e \cos E)^2} \frac{\partial E}{\partial \chi} \\
 \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \chi} &= -\frac{k \sqrt{1-e^2} \sin E}{a^{\frac{1}{2}}(1-e \cos E)^2} \frac{\partial E}{\partial \chi}
 \end{aligned} \tag{106.8}$$

En virtud de la independencia del tiempo los paréntesis de Lagrange (propiedad c)) podemos calcular el valor de estas derivadas para cualquier instante t . Así, si hacemos $t = T$ (época de paso a por el periastro) y tenemos en cuenta que en el periastro es $E = 0$, de (102.8) obtenemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial E}{\partial e}\right)_T &= \left(\frac{\sin E}{1 - \sin E}\right)_T = 0 \\ \left(\frac{\partial E}{\partial \chi}\right)_T &= \left(\frac{1}{1 - e \cos E}\right)_T = \frac{1}{1 - e}\end{aligned}\quad (107.8)$$

de donde se deducen los siguientes valores en el periastro para las derivadas (104.8), (105.8) y (106.8).

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial a} &= 1 - e & \frac{\partial \eta}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial a} &= 0 & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial a} &= -\frac{n}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial e} &= -a & \frac{\partial \eta}{\partial e} &= 0 \\ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial e} &= 0 & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e} &= \frac{a n}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial \chi} &= 0 & \frac{\partial \eta}{\partial \chi} &= a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \\ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \chi} &= -\frac{a n}{(1-e)^2} & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \chi} &= 0\end{aligned}\quad (108.8)$$

Recordemos, por otra parte, los giros que nos permiten pasar del sistema $(P_0; x, y, z)$ al sistema de coordenadas (ξ, η) sobre la órbita del punto P de masa m (3.11.3 y 3.12). Si llamamos p y q a dos cualesquiera de los elementos orbitales $\Omega, \omega, i, a, e, \chi$ y aplicamos la propiedad de los paréntesis de Lagrange que hemos designado por d), el paréntesis $[p, q]$, a causa de estos giros, se irá transformando en otros $[p, q]_1, [p, q]_2, [p, q]_3$, dados por las expresiones:

$$\begin{aligned}[p, q] &= [p, q]_1 + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(p, q)} \\ [p, q]_1 &= [p, q]_2 + \frac{\partial(i, F)}{\partial(p, q)} \\ [p, q]_2 &= [p, q]_3 + \frac{\partial(\omega, G)}{\partial(p, q)}\end{aligned}\quad (109.8)$$

siendo:

$$\begin{aligned} F &= y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2 = 0 \\ G &= \xi \dot{\eta} - \dot{\xi} \eta = k \sqrt{p} = na^2 \sqrt{1-e^2} \\ H &= x_1 \dot{y}_1 - \dot{x}_1 y_1 = x \dot{y} - \dot{x} y = (\xi \dot{\eta} - \dot{\xi} \eta) \cos i = G \cos i \end{aligned}$$

De (109.8) por sustituciones sucesivas se obtiene

$$[p, q] = [p, q]_3 + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\omega, G)}{\partial(p, q)} \quad (110.8)$$

siendo, por definición de peréntesis de Lagrange:

$$[p, q]_3 = \frac{\partial(\xi, \dot{\xi})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\eta, \dot{\eta})}{\partial(p, q)}$$

Pero, aplicando una conocida propiedad de los jacobianos y teniendo en cuenta las expresiones (108.8) podemos escribir:

$$\begin{aligned} [p, q]_3 &= \frac{\partial(a, e)}{\partial(p, q)} \left[\frac{\partial(\xi, \dot{\xi})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(\eta, \dot{\eta})}{\partial(a, e)} \right] + \\ &+ \frac{\partial(e, \chi)}{\partial(p, q)} \left[\frac{\partial(\xi, \dot{\xi})}{\partial(e, \chi)} + \frac{\partial(\eta, \dot{\eta})}{\partial(e, \chi)} \right] + \\ &+ \frac{\partial(\chi, a)}{\partial(p, q)} \left[\frac{\partial(\xi, \dot{\xi})}{\partial(\chi, a)} + \frac{\partial(\eta, \dot{\eta})}{\partial(\chi, a)} \right] = \frac{na}{2} \frac{\partial(\chi, a)}{\partial(p, q)} \end{aligned}$$

y sustituyendo en (110.8) resulta:

$$[p, q] = \frac{na}{2} \frac{\partial(\chi, a)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\omega, G)}{\partial(p, q)} \quad (111.8)$$

Para simplificar la expresión (111.8) se utiliza la variable

$$L = ka^{\frac{1}{2}}$$

cuya derivada respecto a p es

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{k}{2} a^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial a}{\partial p} = \frac{na}{2} \frac{\partial a}{\partial p}$$

y, por tanto,

$$[p, q] = \frac{\partial(\chi, L)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\omega, G)}{\partial(p, q)} \quad (112.8)$$

El proceso de cálculo que hemos seguido para llegar a la fórmula (112.8) constituye lo que se conoce con el nombre de *método de Whittaker*.

Las ecuaciones de Lagrange (98.8) para un movimiento orbital perturbado se pueden obtener de manera sencilla sustituyendo los elementos a_h, a_j (o p, q) por cualquiera de los elementos orbitales. Así, cuando utilicemos las variables $L, H, G, \Omega, \omega, \chi$ los paréntesis de Lagrange tomarán los valores:

$$\begin{aligned} [\chi, L] &= +1 & [\omega, G] &= +1 & [\Omega, H] &= +1 \\ [L, \chi] &= -1 & [G, \omega] &= -1 & [H, \Omega] &= -1 \end{aligned} \quad (113.8)$$

siendo nulos todos los restantes. Luego, en este sistema de variables, las ecuaciones (98.8) se escribirán:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \chi} & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \omega} & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\chi}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial L} & \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial G} & \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial H} \end{aligned} \quad (114.8)$$

sistema que constituye una de las formas canónicas de las ecuaciones del movimiento planetario.

Si, en lugar de las anteriores, utilizamos las variables $L, H, G, l = M = nt + \chi$, $g = \omega$, $h = \Omega$, llamadas *variables de Delaunay*, obtendremos:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{dl}{dt} = \frac{d\chi}{dt} + n \\ \frac{\partial R}{\partial \chi} &= \frac{\partial R}{\partial M} = \frac{\partial R}{\partial l} \end{aligned}$$

resultando el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial l} & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial g} & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial h} \\ \frac{dl}{dt} &= n - \frac{\partial R}{\partial L} & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial G} & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial H} \end{aligned} \quad (115.8)$$

Si en lugar de la función perturbatriz R consideramos la función

$$F = \frac{k^4}{2L^2} + R = \frac{n^2 a^2}{2} + R$$

al sustituir R en función de F en (115.8) obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dL}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial l} & \frac{dG}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial g} & \frac{dH}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial h} \\ \frac{dl}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial L} & \frac{dg}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial G} & \frac{dh}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial H} \end{aligned} \quad (116.8)$$

utilizado por Delaunay en su teoría de la Luna.

Si tomamos las variables ordinarias $\Omega, \omega, i, a, e, \chi$ y calculamos los paréntesis de Lagrange utilizando (112.8) encontraremos que los únicos no nulos son:

$$\begin{aligned} [\Omega, i] &= -na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \\ [\Omega, a] &= \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \cos i \\ [\Omega, e] &= -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i \\ [\omega, a] &= \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \\ [\omega, e] &= -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \\ [a, \chi] &= -\frac{na}{2} \end{aligned} \quad (117.8)$$

y los que resultan de permutar las variables entre sí que en virtud de la propiedad b) tienen signos contrarios.

Sustituyendo los valores (117.8) y sus opuestos en las ecuaciones (98.8) se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} -na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \frac{di}{dt} + \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \cos i \frac{da}{dt} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i \frac{de}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \frac{da}{dt} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial i} \\ -\frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \cos i \frac{d\Omega}{dt} - \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \frac{d\omega}{dt} - \frac{na}{2} \frac{d\chi}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial a} \\ \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{na}{2} \frac{da}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \chi} \end{aligned} \quad (118.8)$$

Despejando de (118.8) las derivadas de los elementos orbitales se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi} \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left[\frac{\partial R}{\partial \Omega} - \cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} \right] \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left[\sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \chi} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right] \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\
 \frac{d\chi}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}
 \end{aligned} \tag{119.8}$$

sistema fundamental en el estudio del movimiento planetario que nos da las variaciones de los elementos orbitales de un determinado planeta (de masa m) a partir de un cierto instante en el que conocemos su órbita osculatriz.

Estas ecuaciones (119.8) son rigurosas y aunque las hayamos deducido para las perturbaciones producidas sobre un planeta de masa m por otros cuerpos del sistema solar (recordemos (74.8)), se pueden utilizar cuando R es debida a cualquier otra causa; por ejemplo, a la forma y distribución de la masa de un planeta cuando se aplican a un satélite artificial de dicho planeta.

Es fácil pasar del sistema (119.8) al sistema de ecuaciones de Gauss (I a VI del Cap. 8) sin más que tener en cuenta que la R a la que nos estamos refiriendo como función perturbatriz es la aceleración perturbatriz. Basta pues escribir las derivadas de R que aparecen en (119.8) en función de las componentes radial, transversal y perpendicular a la órbita.

8.8.4 Solución de las ecuaciones planetarias de Lagrange

Se puede establecer la *teoría analítica general* de las perturbaciones en el sistema planetario utilizando las ecuaciones (119.8) y la función R (74.8) escritas para cada uno de los planetas siendo el Sol el primario de masa 1. Sin embargo, en la solución de Lagrange la función R se escribe en la *forma de d'Alembert*

$$R = \sum F \cos D \tag{120.8}$$

donde los coeficiente F son los productos de m_i (masa de los cuerpos perturbadores) por ciertas funciones de los ejes mayores, de las excentricidades y de las inclinaciones, es decir, si, para simplificar y como hacen la mayoría de los autores, suponemos un solo cuerpo perturbador de masa m' ,

$$F = m' \phi(a, e, i) \tag{121.8}$$

y donde los argumentos D dependen linealmente de las anomalías medias, de los argumentos de los nodos y de los argumentos de los perihelios de los cuerpos perturbadores y del perturbado, o sea:

$$D = j(nt + \chi) + j'(n't + \chi') + k\omega + k'\omega' + l\Omega + l'\Omega' \quad (122.8)$$

con j, j', k, k', l, l' enteros.

Como que las masas de los planetas son muy pequeñas comparadas con la del Sol, podemos suponer que la variación de los elementos dada por las ecuaciones (119.8) es muy pequeña; por consiguiente, para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de Lagrange podemos proceder por aproximaciones sucesivas.

Para obtener las *perturbaciones de primer orden* en la primera aproximación reemplazaremos en los segundos miembros todos los elementos por sus valores iniciales (elementos osculadores) $a_0, e_0, i_0, \dots$ e integraremos después con relación al tiempo. Tendremos:

$$\begin{aligned} \delta_1 a &= \frac{2}{n_0 a_0} \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \chi} dt \\ \delta_1 i &= \frac{-1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2} \sin i_0} \left[\int_0^t \frac{\partial R}{\partial \Omega} dt - \cos i_0 \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \omega} dt \right] \\ \delta_1 e &= \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2 e_0} \left[\sqrt{1-e^2} \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \chi} dt - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \omega} dt \right] \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (123.8)$$

Teniendo en cuenta (120.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_0}{\partial \chi_0} &= -\sum j F_0 \sin D_0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial R_0}{\partial i_0} &= \sum \left(\frac{\partial F}{\partial i} \right)_0 \cos D_0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (124.8)$$

y substituyendo en (123.8):

$$\begin{aligned} \delta_1 a &= \frac{-2}{n_0 a_0} \sum j F_0 \int_0^t \sin D_0 dt \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_1 \Omega &= \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2} \sin i_0} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial i} \right)_0 \int_0^t \cos D_0 dt \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (125.8)$$

En estas seis ecuaciones (125.8) intervienen integrales de dos tipos:

$$I_1 = \int \sin D_0 dt = -\frac{\cos D}{jn_0 + j'n'_0}$$

$$J_1 = \int \cos D_0 dt = \frac{\sin D_0}{jn_0 + j'n'_0}$$

cuando el tiempo figura linealmente en los argumentos D_0 , y

$$I_2 = t \sin D_0$$

$$J_2 = t \cos D_0$$

cuando $j = j' = 0$ y, por tanto, el tiempo no figura en la expresión de D_0 .

En el primer caso las integrales dan las *desigualdades periódicas* de los elementos y en el segundo caso dan las *perturbaciones seculares*.

Observamos que en el segundo supuesto ($j = j' = 0$), en virtud de las expresiones (124.8), en las perturbaciones de primer orden y en la primera aproximación las perturbaciones del eje mayor y las del movimiento medio no contienen términos seculares.

Generalmente, los valores j y j' son tales que $jn_0 + j'n'_0$ no es una cantidad particularmente pequeña en comparación con jn_0 o $j'n'_0$ y los periodos de los términos en que figuran son del mismo orden que los periodos orbitales de los dos cuerpos implicados. Estos términos reciben el nombre de *desigualdades de corto periodo*. Si j y j' son tales que hacen que $jn_0 + j'n'_0$ tome un valor, sinó nulo, muy pequeño sin ser nulos j y j' , entonces existirá una relación aproximada de conmensurabilidad entre el movimiento medio del cuerpo perturbado y el del perturbador. Las desigualdades correspondientes tienen un periodo muy largo y reciben el nombre de *desigualdades de largo periodo*; además, su coeficiente, que contiene el factor $\frac{F_0}{jn_0 + j'n'_0}$ puede tomar un valor muy grande independientemente de que F_0 sea grande o pequeño. Se dice entonces que $jn_0 + j'n'_0$ es un *pequeño divisor*.

El ejemplo más notable de desigualdades a largo periodo es dado por Júpiter y Saturno cuyos movimientos medios son respectivamente

$$n = 299''.1284 \quad \text{y} \quad n' = 120''.4547$$

Si desarrollamos la razón $\frac{n}{n'}$, en fracción continua obtenemos:

$$\frac{n}{n'} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{14} + \dots}$$

Las fracciones reducidas son:

$$\frac{2}{7}, \frac{5}{2}, \frac{29}{72}, \frac{60}{149}, \dots$$

y la que da el divisor más pequeño es $\frac{5}{2}$. Luego:

$$5n' - 2n = 4''.0167 \quad (\text{o } 1467''.1 \text{ por año})$$

El periodo de esta desigualdad abarca 883 años; la longitud media de Júpiter puede ser perturbada de unos 20' y la de Saturno de unos 50'. Estas son las desigualdades más importantes debidas a las perturbaciones en el sistema solar.

FIG. 1.9

9.1.1 Libraciones físicas

Las leyes de Cassini son aproximadas. La coincidencia de los nodos no es rigurosa, de modo que en N no tenemos un punto sinó un pequeño triángulo; la inclinación I presenta fluctuaciones de amplitud muy pequeña, y la dirección del eje mayor puede separarse algunas centésimas de grado de la que hemos definido. Estas pequeñas desviaciones constituyen la *libración física* que se determina a partir de la teoría dinámica de la rotación de la Luna.

Sea (Fig. 2.9) x, y, z un sistema de coordenadas rectangulares seleno-céntricas cuyos ejes coinciden con los ejes principales de inercia de la Luna y su origen con el centro de gravedad de la misma; el eje x orientado hacia la Tierra, el eje y perpendicular a él de modo que el sistema esté orientado en sentido directo y el eje z en la dirección del eje de giro de la Luna. Por otra parte, sean, con respecto a estos ejes, p, q, r los cosenos directores del eje de la eclíptica y λ, μ, ν los del radio vector Tierra-Luna. p, q, μ y ν son pequeños mientras que $r = \lambda \approx 1$.

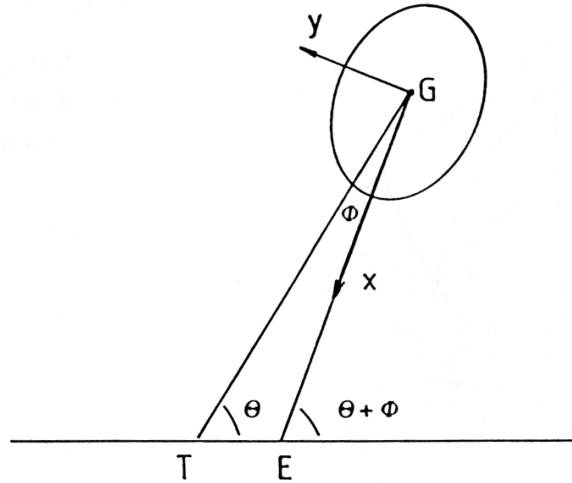


FIG. 2.9

Supongamos la Tierra esférica, de masa M y a una distancia R , constante, de la Luna y llamemos A, B y C a los momentos de inercia de la Luna con relación a los ejes coordenados. Sean $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ las componentes de la velocidad angular de la Luna en dicho sistema x, y, z . Las dos primeras son pequeñas y sus cuadrados y productos podrán despreciarse.

Recordemos la ecuación de Euler generalizada relativa al movimiento de un cuerpo en rotación (2.6):

$$I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge I\vec{\omega} = \vec{N} \quad (1.9)$$

donde I es el tensor de inercia que en el caso que estamos considerando se escribe

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

y $\vec{N}$ el momento de las fuerzas exteriores que supondremos limitadas a la de atracción de la Tierra,

$$\vec{N} = \frac{3GM}{R^5} \vec{R} \wedge I\vec{R} \quad (3.9)$$

Desarrollando (1.9) tendremos:

$$\left. \begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\omega_z &= \frac{3GM}{R^3}(C-B)\mu\nu \\ B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x &= \frac{3GM}{R^3}(A-C)\nu\lambda \\ C\dot{\omega}_z + (B-A)\omega_x\omega_y &= \frac{3GM}{R^3}(B-A)\lambda\mu \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

y despreciando cantidades pequeñas de segundo orden:

$$\left. \begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\omega_z &= 0 \\ B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x &= \frac{3GM}{R^3}(A-C)\nu \\ C\dot{\omega}_z &= \frac{3GM}{R^3}(B-A)\mu \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Consideremos la tercera ecuación de (5.9) que por contener solamente $\dot{\omega}_z$ puede ser estudiada independientemente de las otras. Supongamos (Fig. 2.9) que la dirección TG forma un ángulo θ con una dirección determinada y llamemos ϕ al ángulo TGE . ϕ nos da la medida de la *libración en longitud*. La dirección GE forma un ángulo $\theta + \phi$ con la dirección fija. Una rotación positiva alrededor del eje z , ω_z haría disminuir el ángulo $\theta + \phi$, por consiguiente:

$$\omega_z = -\frac{d}{dt}(\theta + \phi)$$

Ahora bien:

$$\mu = \cos \widehat{BGT} = \sin \phi \simeq \phi$$

por tanto, con mucha aproximación, resulta

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta + \phi) = -\frac{3GM}{R^3} \frac{B-A}{C} \phi \quad (6.9)$$

Supongamos en primer lugar el caso en que la órbita de la Luna es circular, es decir, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$. La expresión (6.9) describirá un movimiento armónico simple de la forma:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + w^2\phi = 0 \quad (7.9)$$

con

$$w^2 = \frac{3GM}{R^3} \frac{B-A}{C} \quad (8.9)$$

lo cual implica que sea $B > A$ y por consiguiente, si a , b y c son las longitudes interceptadas por la Luna sobre los ejes x , y y z respectivamente, que sea $a > b$. La solución de (7.9) es

$$\phi = \alpha \cos(wt + \beta) \quad (9.9)$$

donde α y β son constantes arbitrarias, amplitud y fase inicial del movimiento armónico que representa (9.9). Si esta oscilación pudiera ser observada, su periodo nos daría el valor de $\frac{B-A}{C}$; pero, es demasiado pequeña para ser detectada.

Consideremos ahora la órbita de la Luna no circular. Si la tercera ley de Cassini fuera exacta, sería:

$$\frac{d}{dt}(\theta + \phi) = n$$

con n constante; por tanto:

$$\theta + \phi = nt + \varepsilon \quad (10.9)$$

Si t se cuenta desde el perigeo, ε es una cantidad pequeña, del mismo orden de ϕ , y θ representa la anomalía verdadera. Suponiendo desviaciones periódicas de la ley de Cassini, pongamos:

$$\theta + \phi + \chi = nt + \varepsilon \quad (11.9)$$

y derivando dos veces respecto al tiempo, teniendo en cuenta (6.9) y (8.9), tendremos:

$$\ddot{\chi} = -w^2(\chi + \theta - nt - \varepsilon)$$

o también

$$\ddot{\chi} + w^2\chi = -w^2(\theta - nt - \varepsilon) \quad (12.9)$$

En esta ecuación $\theta - nt$ representa la ecuación del centro de una órbita kepleriana y por tanto se podría expresar por su correspondiente desarrollo en serie; pero, hemos de tener presente que la órbita de la Luna es una órbita perturbada y, por consiguiente, desarrollaremos el paréntesis del segundo miembro de (12.9) en una serie de la forma

$$\sum H \sin(ht + h')$$

que incluirá la ecuación del centro y las desigualdades periódicas del movimiento de la Luna (despreciamos la aceleración secular).

Para resolver (12.9) empecemos por considerar la ecuación

$$\ddot{\chi} + w^2\chi = -w^2H \sin(ht + h') \quad (13.9)$$

Supongamos una integral particular de la forma

$$\chi = \gamma \sin(ht + h')$$

Derivando dos veces y sustituyendo deducimos el valor de γ

$$\gamma = \frac{-w^2 H}{w^2 - h^2}$$

Por otra parte, la solución de la ecuación sin segundo miembro es

$$\alpha \cos(wt + \beta) \quad (14.9)$$

Luego, la solución de (13.9) es

$$\chi = \alpha \cos(wt + \beta) + w^2 \frac{H}{h^2 - w^2} \sin(ht + h')$$

y la integral general de la ecuación completa es:

$$\chi = \alpha \cos(wt + \beta) + w^2 \sum \frac{H}{h^2 - w^2} \sin(ht + h') \quad (15.9)$$

Hemos dicho que la función complementaria (14.9) correspondiente a las oscilaciones libres es demasiado pequeña para ser observada. Los términos de la solución particular corresponden a las oscilaciones forzadas; para que dichas oscilaciones sean observables, en ellos debe ser o H grande o h pequeño.

En la teoría lunar los términos más importantes son el primer término del desarrollo de la ecuación del centro o *desigualdad elíptica*, para el cual

$$ht + h' = g \quad H = 22639.''1 \quad h = 47033.''97 \quad (16.9)$$

$$\frac{2\pi}{h} = 1 \text{ mes anomalístico}$$

y la *ecuación anual*, para la cual

$$ht + h' = \zeta \quad H = -668.''9 \quad h = 3548.''16 \quad (17.9)$$

$$\frac{2\pi}{h} = 1 \text{ año anomalístico}$$

donde g es la anomalía media de la Luna, ζ es la anomalía media del Sol y la unidad de tiempo es el día solar medio.

Sustituyendo los valores (16.9) y (17.9) en los correspondientes términos del segundo miembro de (15.9), observaremos que, puesto que w es muy pequeño, el segundo de ellos, esto es, la ecuación anual, proporciona la mayor oscilación forzada. Esta puede observarse, aunque no con mucha precisión, y puede establecerse el valor de $\frac{B-A}{C}$ a partir de las observaciones de su amplitud.

Trataremos ahora las dos primeras ecuaciones de (5.9) sin tener en cuenta ya la variación en ω_z .

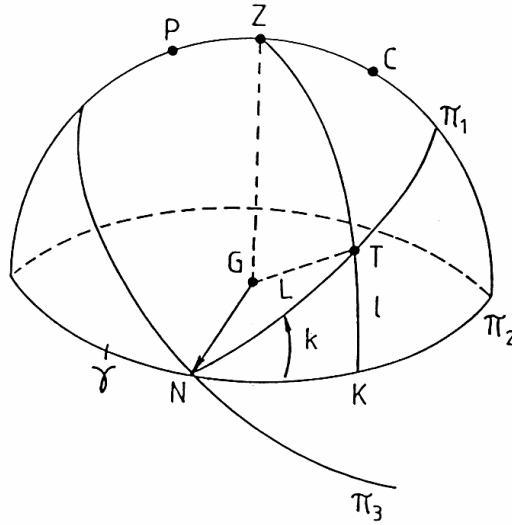


FIG. 3.9

Sea, en la Fig. 3.9, la línea $NTII_1$ la órbita de la Tierra alrededor de la Luna en la esfera celeste centrada en la Luna y N su nodo ascendente con respecto a un plano Π_2 paralelo a la eclíptica por el centro de la Luna. El círculo máximo que pasa por Z (polo de Π_2) y T corta a Π_2 en K . El arco $KT = l$ es la latitud selenocéntrica de la Tierra. Despreciando la precesión podemos escribir

$$\gamma N = -gt + \text{conste}$$

donde g es la velocidad de retrogradación de los nodos.

Sea k la inclinación de la órbita de la Tierra con relación a Π_2 la proyección de la retrogradación de N sobre la órbita de la Tierra durante un tiempo t será un arco $gt \cos k$, pero por ser k muy pequeño, podemos suponer que dicho arco es gt . Por tanto, suponiendo que la Tierra se mueve en una órbita circular con movimiento angular n , podremos escribir

$$NT = L = nt + gt + c \quad (c = \text{cte})$$

y

$$\cos ZT = p\lambda + q\mu + r\nu \approx p + \nu$$

y también

$$\cos ZT = \text{sen } l = \text{sen } k \text{ sen } L \approx k \text{ sen } L$$

Por consiguiente:

$$\nu = k \text{ sen } L - p = k \text{ sen } (nt + gt + c) - p \quad (18.9)$$

Sean, en la misma figura 3.9, P el polo de Π_1 y C el polo de Π_3 (plano del ecuador de la Luna). La condición para que P , Z y C estén en un mismo círculo máximo como se requiere en virtud de la tercera ley de Cassini es

$$\vec{C} \cdot \vec{N} = 0$$

donde $\vec{C}$ es el vector director de GC y $\vec{N}$ es el vector director de la línea de los nodos, ya que, en efecto, si N es el polo del círculo máximo que pasa por P y Z , y C ha de estar en este mismo círculo, los vectores $\vec{C}$ y $\vec{N}$ han de ser perpendiculares.

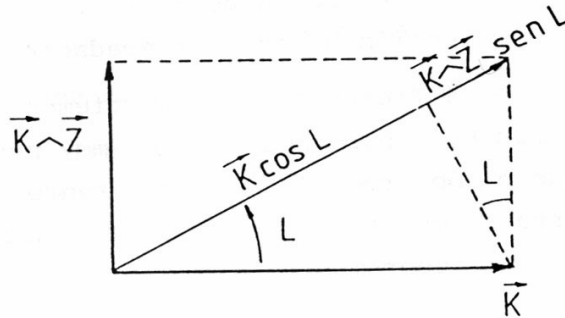


FIG. 4.9

Podemos calcular $\vec{N}$ a partir de $\vec{K}$ y $\vec{K} \wedge \vec{Z}$ indicando por $\vec{K}$ y $\vec{Z}$ los vectores directores de GK y GZ respectivamente, suponiendo $k \approx 0$ (Fig. 4.9)

$$\vec{N} = \vec{K} \cos L + \vec{K} \wedge \vec{Z} \sin L$$

Ahora bien, si designamos por $\vec{T}$ el vector de posición selenocéntrico de la Tierra, es:

$$\vec{K} = \frac{\vec{Z} \wedge (\vec{Z} \wedge \vec{T})}{\sin ZT}$$

y recordando la propiedad del triple producto vectorial $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ y tomando $\sin ZT = 1$ es:

$$\vec{K} \approx \vec{Z} \cos ZT - \vec{T}$$

Por consiguiente:

$$\vec{N} = (\vec{Z} \cos ZT - \vec{T}) \cos L + \vec{Z} \wedge \vec{T} \sin L$$

es decir, desarrollando:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} (p \cos ZT - \lambda) \cos L + (qv - r\mu) \sin L \\ (q \cos ZT - \mu) \cos L + (r\lambda - pv) \sin L \\ (r \cos ZT - v) \cos L + (p\mu - q\lambda) \sin L \end{bmatrix}$$

y multiplicando escalarmente por $\vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned}\vec{C} \cdot \vec{N} &= (r \cos ZT - v) \cos L + (p\mu - q\lambda) \sin L \simeq \\ &\simeq (\cos ZT - v) \cos L - q \sin L \\ &\quad (r \simeq 1, \lambda \simeq 1, p\mu \simeq 0)\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\cos ZT = p + v$, también

$$\vec{C} \cdot \vec{N} = p \cos L - q \sin L \quad (19.9)$$

Sea por otra parte, con respecto a los ejes móviles x, y, z (Fig. 2.9):

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{Z} = \vec{0} \quad (20.9)$$

puesto que en virtud de la segunda ley $\vec{Z}$ es fijo en el espacio.

Desarrollando (20.9), tendremos:

$$\left. \begin{aligned}\dot{p} - \omega_z q + \omega_y r &= 0 \\ \dot{q} - \omega_x r + \omega_z p &= 0 \\ \dot{r} - \omega_y p + \omega_x q &= 0\end{aligned} \right\} \quad (21.9)$$

o también, dentro de la aproximación en que nos movemos (tomamos $\omega_z = n$):

$$\left. \begin{aligned}\dot{p} - nq + \omega_y r &= 0 \\ \dot{q} - \omega_x r + np &= 0 \\ \dot{r} &= 0\end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

Derivando las dos primeras respecto al tiempo y teniendo en cuenta la tercera obtenemos:

$$\left. \begin{aligned}\dot{\omega}_y &= -\ddot{p} + n\dot{q} \\ \dot{\omega}_x &= \ddot{q} + n\dot{p}\end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

y sustituyendo en las dos primeras ecuaciones de (5.9), dividiendo por A la primera y por B la segunda, tomando $r = 1$ y recordando (18.9) tendremos:

$$\left. \begin{aligned}\ddot{q} + n\dot{p} + \frac{C-B}{A} n(nq - \dot{p}) &= 0 \\ -\ddot{p} + n\dot{q} + \frac{A-C}{B} n(\dot{q} + np) &= \frac{3GM}{R^3} \frac{A-C}{B} (k \sin L - p)\end{aligned} \right\} \quad (24.9)$$

Haciendo para simplificar

$$\frac{C-B}{A} = \sigma \quad y \quad \frac{C-A}{B} = \tau$$

teniendo además en cuenta que $MG/R^3 = n^2$, las ecuaciones (24.9) se escribirán:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q} + n\dot{p}(1-\sigma) + n^2\sigma q &= 0 \\ -\ddot{p} + n\dot{q}(1-\tau) - 4n^2\tau p &= -3n^2\tau k \sin L \end{aligned} \right\} \quad (25.9)$$

La solución de estas ecuaciones constará de una función complementaria, que representará las oscilaciones libres y una integral particular procedente del término en $\sin L$, que dará las oscilaciones forzadas.

Las oscilaciones libres han de ser estables. Hallaremos las condiciones para que así sea:

Supongamos que

$$p = Fe^{st} \quad y \quad q = Ge^{st}$$

son soluciones de las ecuaciones (25.9) sin segundos miembros. La ecuación característica del sistema es:

$$s^4 + s^2 n^2 (1 + 3\tau + \sigma\tau) + 4n^4 \sigma\tau = 0 \quad (26.9)$$

Para que las oscilaciones sean estables, las dos raíces de esta ecuación, considerada como de segundo grado en s^2 , deben ser reales y negativas. La condición para que sean reales es

$$(1 + 3\tau + \sigma\tau)^2 - 16\sigma\tau > 0$$

y las condiciones para que sean negativas:

$$\begin{aligned} -n^2(1 + 3\tau + \sigma\tau) &< 0 \\ \sigma\tau &> 0 \end{aligned}$$

La tercera es equivalente a decir que $(C-A)(C-B) > 0$ o lo que es lo mismo que si $C > B$ es $C > A$ y si $C < B$ es $C < A$.

Tanto en un caso como en otro se cumplen las otras dos. Por consiguiente el eje c en la dirección de GZ es a la vez mayor o menor que los otros dos. Es decir, el eje de rotación de la Luna o es el más largo o es el más corto de los ejes de la Luna.

Consideremos ahora las oscilaciones forzadas. Ensayemos una solución de la forma

$$\left. \begin{aligned} p &= P \sin L \\ q &= Q \cos L \end{aligned} \right\} \quad (27.9)$$

Sustituyendo en (25.9) con segundos miembros, recordando que $L = nt + gt + c$, resulta:

$$\left. \begin{aligned} Q \left[-(n+g)^2 + n^2 \sigma \right] + Pn(n+g)(1-\sigma) &= 0 \\ P \left[(n+g)^2 - 4n^2 \tau \right] - Qn(n+g)(1-\tau) &= -3n^2 \tau k \end{aligned} \right\} \quad (28.9)$$

ecuaciones que resueltas, eliminando los productos de pequeñas cantidades dan:

$$\frac{Q}{P} = 1 - \frac{g}{n} \quad (29.9)$$

$$P = \frac{3n\tau k}{3n\tau - 2g} \quad (30.9)$$

De (19.9) y (28.9) resulta:

$$\vec{C} \cdot \vec{N} = (P - Q) \sin L \cos L$$

y de (29.9)

$$P - Q = \frac{Pg}{n}$$

luego:

$$\vec{C} \cdot \vec{N} = \frac{Pg}{2n} \sin 2L \quad (31.9)$$

lo cual nos dice que hay una oscilación de pequeña amplitud alrededor de cero. A parte de esta oscilación, $\vec{C} \cdot \vec{N}$ es nulo y P , Z y C están en el mismo círculo máximo, propiedad que confirma la primera ley de Cassini. Se deduce lo mismo si las funciones complementarias se incluyen en la evaluación de $\vec{C} \cdot \vec{N}$.

Hemos de ver ahora cual es la condición para que Z esté entre P y C ; pero, antes, calculemos el valor del arco $\widehat{CZ}$. Teniendo en cuenta que

$$\cos CZ = 0 \cdot p + 0 \cdot q + 1 \cdot r = r$$

elevando al cuadrado

$$\cos^2 CZ = r^2 = 1 - (p^2 + q^2)$$

de donde

$$p^2 + q^2 = 1 - \cos^2 CZ = \sin^2 CZ \simeq \widehat{CZ}^2$$

y por tanto, teniendo en cuenta (28.9) y (29.9) :

$$\widehat{CZ}^2 = P^2 \sin^2 L + Q^2 \cos^2 L = P^2 \left(1 - \frac{g}{n} - \frac{g}{n} \cos 2L \right) \quad (32.9)$$

Luego, a parte de una pequeña oscilación, de periodo medio mes nodal, $\widehat{CZ}$ es constante, lo que prueba la segunda ley de Cassini. Esta pequeña variación en la inclinación del plano del ecuador lunar sobre la eclíptica da lugar a la llamada *libración física en latitud*. Los valores de la libración física oscilan entre $-0.^\circ02$ y $+0.^\circ02$.

Supongamos ahora que $L = 90^\circ$ (Fig. 3.9). La Tierra T se hallará en el círculo máximo PZC y tendremos:

$$\widehat{TP} > \widehat{TZ}$$

Si el eje x corta a la esfera celeste en el punto A , este punto estará muy cerca del círculo máximo $PZCE$ y puesto que $CA = 90^\circ$, para que Z esté entre P y C deberá ser $AZ > 90^\circ$. Por tanto,

$$\cos AZ = p = P \sin 90^\circ < 0$$

luego,

$$P = \frac{k\tau}{\tau - \frac{2g}{3n}} < 0 \quad (33.9)$$

y como que $\tau < \frac{2g}{3n}$ para que se verifique (33.9) ha de ser $\tau > 0$, lo cual implica que sea $C-A > 0$ o $c < a$.

Nos había quedado la duda de si el eje de rotación era el más largo o el más corto de la Luna. De lo que acabamos de decir se desprende que

$$a > b > c$$

por consiguiente vemos que c es el menor de los tres ejes.

Aproximando el valor de CZ dado por (32.9) podemos escribir

$$\widehat{CZ} = |P| = \left| \frac{3k\tau}{3\tau - 2\frac{g}{n}} \right| \quad (34.9)$$

de donde sustituyendo los valores observados $\widehat{CZ} = 91.4$, $k = 308.7$ y $g/n = 0.00402$, hallamos $\tau = 0.00061$.

9.1.2 Libraciones ópticas

La observación telescópica de la Luna nos dice que los detalles de su superficie no ocupan posiciones rigurosamente invariables sobre el disco, sino que experimentan desplazamientos de cierta amplitud alrededor de una posición media. Damos a dichos desplazamientos el nombre de *libración óptica*.

Partamos del sistema de coordenadas x, y, z que hemos definido en el apartado anterior al cual referiremos los puntos de la superficie lunar, así como las direcciones selenocéntricas de la Tierra y del Sol. La longitud selenográfica o selenocéntrica se mide sobre el ecuador lunar, en sentido directo, a partir del punto X (Fig. 1.9); la latitud selenográfica o selenocéntrica se mide a partir del ecuador, positivamente hacia el norte. La posición del punto X está definida por la tercera ley de Cassini:

$$NX = L_m - \Omega - 180^\circ$$

siendo L_m la longitud media de la Luna y Ω el argumento del nodo.

En la Fig. 1.9, T representa la posición selenocéntrica de la Tierra en la esfera celeste. Sus coordenadas eclípticas son:

$$\left. \begin{aligned} YT_1 &= L - 180^\circ \\ T_1T &= -B \end{aligned} \right\} \quad (35.9)$$

donde L y B son las coordenadas eclípticas longitud y latitud de la Luna. Este punto T tiene las mismas coordenadas selenográficas λ y β que el punto de la superficie de la Luna que un observador geocéntrico ve en el centro del disco lunar. Es decir

$$\left. \begin{aligned} XT_2 &= \lambda \\ T_2T &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (36.9)$$

λ recibe el nombre de *libración en longitud* y β el de *libración en latitud*. La composición de estas dos libraciones da lugar a la llamada *libración óptica*.

Para calcular la libración óptica consideremos el triángulo NTT_1 (Fig. 1.9) en el que

$$\left. \begin{aligned} NT &= a, & NT_1 &= b = L - \Omega - 180^\circ \\ T_1T &= c = -B, & i' &= J \end{aligned} \right\} \quad (37.9)$$

Si incrementamos el ángulo J en $\delta J = I$ y suponemos que el triángulo sigue siendo rectángulo tendremos:

$$\lambda = XT_2 = NT_1 - NX + \delta b$$

es decir

$$\lambda = L - \Omega - 180^\circ - (L_m - \Omega - 180^\circ) + \delta b$$

y

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= L - L_m + \delta b \\ \beta &= -B + \delta c \end{aligned} \right\} \quad (38.9)$$

Pero, del mismo triángulo NTT_I deducimos:

$$\left. \begin{aligned} \tan b &= \tan a \cos J \\ \sen c &= \sen a \sen J \\ \cos a &= \cos b \cos c \end{aligned} \right\}$$

de donde, diferenciando las dos primeras y operando teniendo en cuenta la tercera, resulta:

$$\left. \begin{aligned} \delta b &= -\tan c \cos b \delta J \\ \delta c &= \sen b \delta J \end{aligned} \right\} \quad (39.9)$$

Sustituyendo en (38.9) y recordando (37.9) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= L - L_m - I \cos(L - \Omega) \tan B \\ \beta &= -B - I \sen(L - \Omega) \end{aligned} \right\} \quad (40.9)$$

La libración en longitud puede alcanzar un valor de hasta 8° en valor absoluto y la libración en latitud hasta unos 7° .

Para obtener la libración completa sumaremos a estas cantidades las correspondientes a la libración física.

El último término de la expresión que nos da λ es de segundo orden con relación a las inclinaciones I e i' ; en consecuencia, la libración en longitud difiere poco de las desigualdades de la longitud de la Luna $L - L_m$, cuya parte principal está constituida por la ecuación del centro de periodo la *revolución anomalística* de la Luna como veremos más adelante.

La parte principal de la libración en latitud es $-(i' - I) \sen(L - \Omega)$ cuyo periodo es la *revolución draconítica*. (Cap. 10).

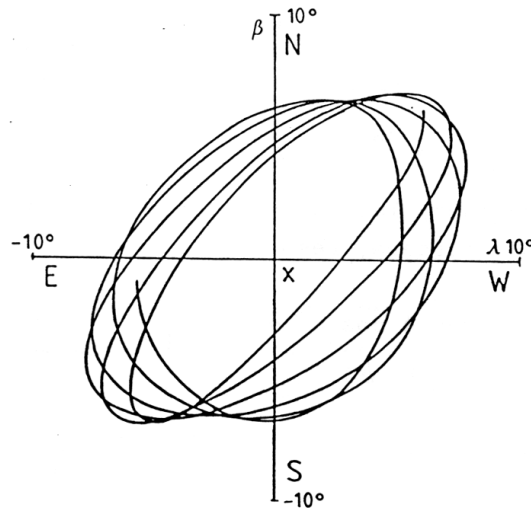


FIG. 5.9

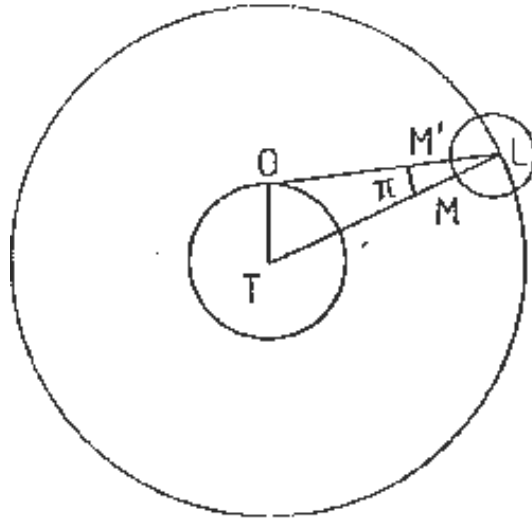


FIG. 7.9

La suma de las distintas libraciones alcanza $\pm 9^\circ$ en longitud y $\pm 8^\circ$ en latitud, gracias a lo cual podemos ver desde la Tierra 3/5 partes del hemisferio oculto de la Luna.

El cálculo de la libración diurna se reduce al de la paralaje en coordenadas ecuatoriales. Sean $\Delta\lambda$ y $\Delta\beta$ la libración diurna en longitud y en latitud y $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$ la paralaje diurna de la Luna en ascensión recta y en declinación. Con respecto al punto T de la Fig. 1.9 el punto que representa la dirección selenocéntrica del observador tiene las siguientes coordenadas diferenciales:

$$\begin{array}{ll} \text{selenocéntricas:} & \Delta\lambda \cos \beta, \Delta\beta \\ \text{ecuatoriales:} & \Delta\alpha \cos \delta, -\Delta\delta \end{array} \quad (42.9)$$

Para pasar de un sistema de coordenadas al otro efectuaremos un giro de ángulo C alrededor del tercer eje puesto que éste es el valor del ángulo que forman los planos del ecuador de la Tierra y del de la Luna respectivamente (Fig. 6.9). Tendremos, pues:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \cos \beta \\ \Delta\beta \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos C & \sin C & 0 \\ -\sin C & \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \cos \delta \\ -\Delta\delta \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta\alpha \cos \delta \cos C - \Delta\delta \sin C \\ -\Delta\alpha \cos \delta \sin C - \Delta\delta \cos C \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43.9)$$

de donde:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\lambda \cos \beta = \Delta\alpha \cos \delta \cos C - \Delta\delta \sin C \\ \Delta\beta = -\Delta\alpha \cos \delta \sin C - \Delta\delta \cos C \end{array} \right\} \quad (44.9)$$

La libración total se obtendrá sumando $\Delta\lambda$ y $\Delta\beta$ deducidas de (44.9) a λ y β respectivamente. El valor topocéntrico del ángulo C se obtendrá sustituyendo los valores topocéntricos de la ascensión recta α y la declinación δ de la Luna, en lugar de los geocéntricos, en la fórmula (41.9).

9.2 Fases de la Luna

En el transcurso de una revolución alrededor de la Tierra la Luna no presenta siempre el mismo aspecto, dependiendo éste, en gran parte, de la diferencia de las longitudes celestes aparentes de la Luna y del Sol.

Si esta diferencia es de 0° tenemos *luna nueva*; si es de 180° , *luna llena*; si es de 90° , *cuarto creciente*, y si es de 270° , *cuarto menguante*. Las épocas en que la diferencia de longitudes es de 0° o 180° reciben el nombre de *sicigias* y aquéllas en que es de 90° a 270° , el de *cuadraturas*.

Ahora bien, el aspecto del disco lunar no depende únicamente de la diferencia de las longitudes celestes mencionadas, sino que depende también de la latitud celeste de la Luna y de la posición del observador en la superficie de la Tierra. Más concretamente, está determinado por el *ángulo de fase* (5.3.1) que en este caso definiremos como el ángulo de las direcciones selenocéntricas del Sol y de la Tierra. Según que consideremos la dirección selenocéntrica del centro de la Tierra o la del observador tendremos el *ángulo de fase geocéntrico* o el *ángulo de fase topocéntrico*.

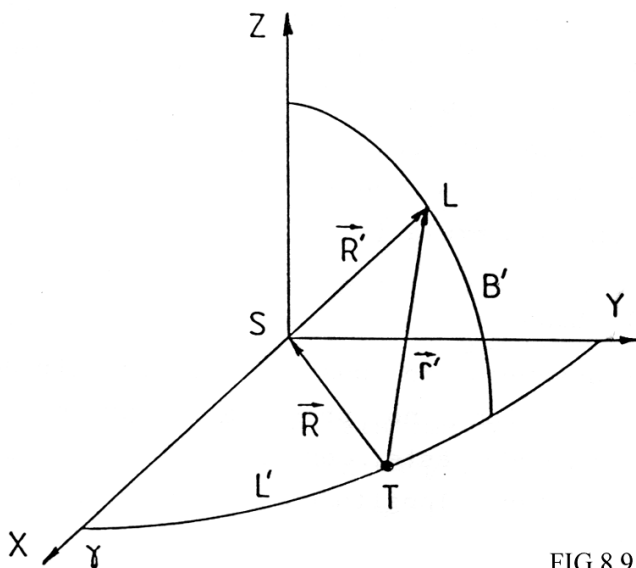


FIG 8.9

Las fórmulas (40.9) y (44.9) nos dan las coordenadas selenocéntricas del centro de la Tierra λ y β y las del lugar de observación, $\lambda + \Delta\lambda$ y $\beta + \Delta\beta$. Vamos a calcular las del centro del Sol que designaremos por l_0 y b_0 . Sean ζ y $\bar{R}$ la longitud celeste y el radio vector del Sol; L y B la longitud y la latitud de la Luna y $\bar{r}'$ su vector de posición; L' y B' la longitud y la latitud heliocéntricas de la Luna y $\bar{R}'$ su vector de posición

heliocéntrica. $L' \simeq \zeta + 180^\circ$, $B' < 1'$. Las componentes de los vectores $\vec{R}$, $\vec{r}'$ y $\vec{R}'$ son:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} -R \cos \zeta \\ -R \sin \zeta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{r}' = \begin{bmatrix} r' \cos B \cos L \\ r' \cos B \sin L \\ r' \sin B \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}' = \begin{bmatrix} R' \cos B' \cos L' \\ R' \cos B' \sin L' \\ R' \sin B' \end{bmatrix}$$

y entre ellos se verifica la relación

$$\vec{R}' = \vec{R} + \vec{r}'$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} R' \cos B' \cos L' &= -R \cos \zeta + r' \cos B \cos L \\ R' \cos B' \sin L' &= -R \sin \zeta + r' \cos B \sin L \\ R' \sin B' &= r' \sin B \end{aligned} \right\} \quad (45.9)$$

Multiplicando la primera de (45.9) por $\sin \zeta$, la segunda por $\cos \zeta$ y restando obtenemos

$$R' \cos B' \sin(\zeta - L') = r' \cos B \sin(\zeta - L) \quad (46.9)$$

y multiplicando la primera por $\cos \zeta$ y la segunda por $\sin \zeta$ y sumando,

$$R' \cos B' \cos(\zeta - L') = -R + r' \cos B \cos(\zeta - L) \quad (47.9)$$

Dividiendo ahora miembro a miembro las expresiones (46.9) y (47.9) y verificando operaciones para simplificar se llega a la relación

$$\sin(L' - \zeta) = -\frac{r'}{R} \cos B \sin(L - L') \quad (48.9)$$

Reemplazando $\frac{r'}{R}$ por la razón $\frac{P}{P'}$ entre las paralajes del Sol y de la Luna y sustituyendo en el primer miembro de (48.9) y en la tercera de (45.9) los senos por los arcos queda:

$$\left. \begin{aligned} L' &= \zeta + 180^\circ - \frac{P}{P'} \cos B \sin(L - \zeta) \\ B' &= \frac{P}{P'} B \end{aligned} \right\} \quad (49.9)$$

Análogamente a como hemos obtenido (40.9) obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} l_0 &= L' - L_m = \zeta - L_m + 180^\circ + \frac{P}{P'} \cos B \sin(\zeta - L) \\ b_0 &= -B' - I \sin(L' - \Omega) = -\frac{P}{P'} B + I \sin(\zeta - \Omega) \end{aligned} \right\} \quad (50.9)$$

habiendo despreciado el término de segundo orden de la longitud dada la pequeñez de B' .

Estas expresiones nos dan las coordenadas selenográficas del punto de la superficie de la Luna que tiene el Sol en su cenit; es el polo del hemisferio iluminado. La distancia cenital del Sol para un punto de la superficie de la Luna dado por sus coordenadas selenográficas, se obtiene calculando la distancia angular del punto correspondiente al punto de coordenadas l_0, b_0 .

Hay que advertir que los valores de l_0, b_0 dados por (50.9) son aproximados y que se les debería sumar la libración física si quisiéramos trabajar con valores más exactos.

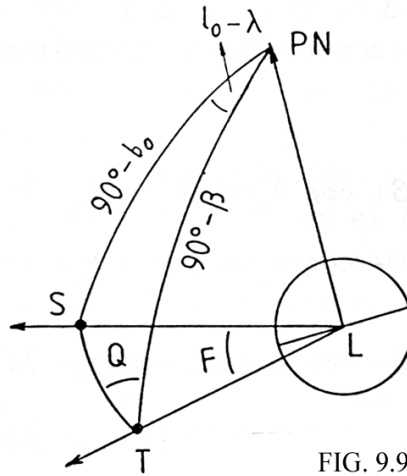


FIG. 9.9

Designemos por F el ángulo de fase geocéntrico de la Luna y por Q el ángulo de posición del Sol con respecto al centro de la Luna, contado a partir del polo norte de la Luna (Fig. 9.9); podemos obtener el valor de F y el de Q resolviendo las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \cos F &= \sin \beta \sin b_0 + \cos \beta \cos b_0 \cos(l_0 - \lambda) \\ \sin F \cos Q &= \cos \beta \sin b_0 - \sin \beta \cos b_0 \cos(l_0 - \lambda) \\ \sin F \sin Q &= -\cos b_0 \sin(l_0 - \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (51.9)$$

análogas a las (50.5) del Cap. 5.

Se obtiene la fase topocéntrica $F + \Delta F$ y el ángulo de posición correspondiente sumando a la libración en longitud y en latitud que figuran en (51.9) la libración diurna $\Delta\lambda$ y $\Delta\beta$. De este modo se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \cos(F + \Delta F) &= \sin(\beta + \Delta\beta)\sin b_0 + \cos(\beta + \Delta\beta)\cos b_0 \cos(l_0 - \lambda - \Delta\lambda) \\ \sin(F + \Delta F)\cos Q &= \cos(\beta + \Delta\beta)\sin b_0 - \sin(\beta + \Delta\beta)\cos b_0 \cos(l_0 - \lambda - \Delta\lambda) \\ \sin(F + \Delta F)\sin Q &= -\cos b_0 \sin(l_0 - \lambda - \Delta\lambda) \end{aligned} \right\}$$

y teniendo en cuenta que ΔF , $\Delta\lambda$ y $\Delta\beta$ son muy pequeños, desarrollando, sustituyendo infinitésimos y agrupando, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta F \sin F &= \cos \beta \sin b_0 \Delta\beta + \cos b_0 \cos \beta \sin(l_0 - \lambda) \Delta\lambda - \\ &\quad - \cos b_0 \sin \beta \cos(l_0 - \lambda) \Delta\beta \\ \Delta F \cos F \cos Q &= -\sin \beta \sin b_0 \Delta\beta - \cos b_0 \sin \beta \sin(l_0 - \lambda) \Delta\lambda - \\ &\quad - \cos b_0 \cos \beta \cos(l_0 - \lambda) \Delta\beta \\ \Delta F \cos F \sin Q &= \cos b_0 \cos(l_0 - \lambda) \Delta\lambda \end{aligned} \right\}$$

Multiplicando la segunda de estas relaciones por $\cos Q$, la tercera por $\sin Q$ y sumando tendremos:

$$\begin{aligned} \Delta F \cos F &= -\sin \beta \sin b_0 \cos Q \Delta\beta - \cos b_0 \sin \beta \sin(l_0 - \lambda) \cos Q \Delta\lambda - \\ &\quad - \cos \beta \cos b_0 \cos(l_0 - \lambda) \cos Q \Delta\beta + \cos b_0 \cos(l_0 - \lambda) \sin Q \Delta\lambda \end{aligned}$$

que junto con la primera nos permitirá despejar ΔF :

$$\Delta F = \Delta\lambda \cos \beta \sin Q - \Delta\beta \cos Q \quad (52.9)$$

que, teniendo en cuenta (44.9) se puede escribir:

$$\Delta F = \Delta\alpha \cos \delta \sin(C + Q) + \Delta\delta \cos(C + Q) \quad (53.9)$$

donde recordemos que $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$ son los valores de la paralaje diurna de la Luna en ascensión recta y en declinación y C es el ángulo de posición del eje de rotación de la Luna calculado en (41.9). El ángulo $C + Q$ es el ángulo de posición del Sol con respecto a la Luna contado desde el polo norte celeste en sentido antihorario.

En las “Efemérides Astronómicas” del Real Instituto y Observatorio de la Armada se dan las coordenadas selenográficas de la Tierra, la libración física, las coordenadas selenográficas del Sol y el ángulo de posición del eje de la Luna y del limbo iluminado. Además, se dan la *edad de la Luna*, o número de días transcurridos desde la última Luna nueva, y la *fracción iluminada* o *fase* que es la relación entre el área iluminada y el área total del disco lunar (recordar (48.5) de Cap. 5).

Se puede calcular el ángulo de fase sin utilizar l_0 y b_0 . En efecto, sustituyendo en la primera de (51.9) los valores de λ , β , l_0 , y b_0 por los dados por las fórmulas (40.9) y (50.9), obtenemos en coordenadas eclípticas:

$$\cos F \approx \sin B \sin B' + \cos B \cos B' \cos(L' - L) \quad (54.9)$$

y si tenemos en cuenta que el primer término del segundo miembro es siempre menor que 0.00004, podremos escribir, utilizando (49.9):

$$\cos F \approx -\cos B \cos \left[\zeta - L + \frac{P}{P'} \cos B \sin(\zeta - L) \right]$$

La corrección ΔF la obtendremos de (53.9).

9.3 Movimiento orbital de la Luna

El estudio del movimiento de la Luna es uno de los problemas más difíciles de la Mecánica Celeste debido a que es el cuerpo perturbador y no el astro central el que posee la masa preponderante, lo cual hace que la órbita que describe la Luna alrededor de la Tierra se separe mucho de una órbita kepleriana y, en consecuencia, la *teoría de la Luna* deba de construirse de distinta manera a la que explica el movimiento de los planetas.

Ya desde la antigüedad se habían ido descubriendo empíricamente ciertas desigualdades tales como la *ecuación del centro*, utilizada por Hiparco; la *evección*, introducida por Tolomeo; la *variación*, corrección introducida por Tycho Brahe, y la *ecuación anual*. Pero, era imposible detectar de la misma manera un gran número de otras desigualdades no despreciables, aunque menos importantes, que se superponían a las desigualdades principales, las cuales se pusieron de manifiesto al estudiar la teoría del movimiento de la Luna analíticamente.

Newton se ocupó del estudio de las grandes desigualdades llegando hasta una segunda aproximación. A partir de Newton la teoría de la Luna ha sido ampliamente desarrollada, habiéndose empleado desde entonces métodos que difieren considerablemente unos de otros y que presentan sus ventajas o inconvenientes en determinados aspectos.

Se suelen distinguir tres tipos de teorías: analíticas, analítico-numéricas y numéricas. Entre las primeras podemos destacar la de Delaunay, que desarrolló completamente la función perturbatriz hasta cantidades de séptimo orden. Las analítico-numéricas empiezan con la de Laplace que mantiene las dos excentricidades y el $\sin \frac{i}{2}$

como parámetros y atribuye un valor numérico a $m = \frac{n_1}{n}$. Pertenece a esta clase la teoría

de Hill-Brown. Airy propuso una aproximación puramente numérica al problema de mejorar la teoría de Delaunay, pero sin éxito. Recientemente Eckert ha aplicado la técnica de Airy a la teoría de Brown del problema lunar principal, es decir, el de hallar el movimiento de la Luna bajo la acción gravitatoria de la Tierra y del Sol considerando los tres cuerpos como masas puntuales, y por otra parte, Deprit ha confeccionado analíticamente unas efemérides lunares que mejoran dicha teoría de Brown.

9.3.1 El sistema Tierra-Luna

La Luna se mueve alrededor de la Tierra en una órbita aproximadamente elíptica cuyos valores medios del semieje mayor, la excentricidad y la inclinación son

$$a = 384.400 \text{ km}; \quad e = 0.05490; \quad i = 5^{\circ} 8' 43''.4$$

Ya hemos dicho que el movimiento de la Luna es fuertemente perturbado por el Sol. Por esta causa estos tres elementos están sujetos a variaciones periódicas alrededor de dichos valores. La excentricidad varía de 0.044 a 0.067, la inclinación oscila entre $4^{\circ} 58'$ y $5^{\circ} 19'$, y el eje mayor gira en sentido directo con un periodo de 8 años 310 días.

Podemos definir varios periodos de revolución de la Luna en su órbita. Llamamos *revolución sinódica* al intervalo medio de dos conjunciones sucesivas de la Luna y del Sol (lunas nuevas). Se calcula su duración a partir del conocimiento de épocas en que se han producido eclipses de Sol separadas por intervalos de tiempo muy largos. Su es de 29.5305883 días = $29^{\text{d}} 12^{\text{h}} 44^{\text{m}} 2^{\text{s}}.8$. Es la *lunación* que regula las fases de la Luna y los eclipses. Constituye el *mes* de los antiguos calendarios lunares.

Revolución sidérea es el tiempo necesario para que la longitud media de la Luna referida a un equinoccio fijo aumente 360° . Su valor es de 27.32166150 días = $27^{\text{d}} 7^{\text{h}} 43^{\text{m}} 11^{\text{s}}.5$. Durante un mes sidéreo el Sol ha recorrido aproximadamente 1/12 de su órbita y, por consiguiente, al cabo de una revolución sidérea la Luna no presentará la misma fase.

El *movimiento medio sinódico* de la Luna es la diferencia entre el *movimiento medio sidéreo* n' de la Luna y el movimiento medio sidéreo n del Sol y vale:

$$n' - n = \frac{360^{\circ} \times 60' \times 60''}{29.5305883} = 43886''.6979$$

De aquí que, siendo $n = 3548''.1928$,

$$n' = 43886''.6979 + 3548''.1928 = 47434''.8907$$

Si dividimos $360^{\circ} \times 60' \times 60'' = 1.296.000''$ por este valor de n' encontraremos el número de días de una revolución sidérea.

Revolución trópica es el tiempo necesario para que la ascensión recta media de la Luna aumente en 24 horas. Su valor se halla dividiendo $1296000''$ por el del *movimiento medio trópico* de la Luna, referido al equinoccio medio móvil, que se obtiene sumando la precesión diurna $\lambda = 0''.1376$ al movimiento medio sidéreo. Es decir,

$$\frac{1296000''}{n' + \lambda} = 27.3215816 \text{ días} = 27^{\text{d}} 7^{\text{h}} 43^{\text{m}} 4^{\text{s}}.6$$

Hemos dicho que el periodo de revolución del eje mayor de la órbita de la Luna es de 8 años 310 días. Dividiendo $1296000''$ por dicha cantidad hallaremos el valor del *movimiento sidéreo medio del perigeo* $\mu = 400''.9167$. Llamamos *revolución anomalística* al tiempo necesario para que la anomalía media de la Luna aumente en 360° . Por otra parte, el *movimiento medio anomalístico*, que referimos a su perigeo móvil, valdrá:

$$n' - \mu = 47033''.9740$$

y por tanto, la duración de una revolución anomalística será de

$$\frac{1296000''}{n' - \mu} = 27.5545503 \text{ días} = 27^d 13^h 18^m 37^s.4$$

También hemos dicho que la inclinación del plano de la órbita de la Luna sobre la eclíptica sufre variaciones periódicas. De ellas, la más importante tiene una semiamplitud de $9'$ y un periodo de 173 días. Asimismo, la línea de los nodos retrograda secularmente, siendo el valor del movimiento medio sidéreo de $\nu = -3' 10'' .77$ y el periodo de revolución correspondiente de 18.60 años (ver 8.7).

Se llama *revolución draconítica* al intervalo medio de dos pasos consecutivos de la Luna por el nodo ascendente de su órbita. La duración de una revolución draconítica es:

$$\frac{1296000''}{n' - \nu} = 27.2122178 \text{ días} = 27^d 5^h 5^m 35^s.6$$

Este periodo rige las variaciones de la latitud celeste de la Luna y juega un papel importante en la predicción de eclipses.

9.3.2 Desarrollo de la fuerza perturbatriz

En la exposición de este apartado seguimos a Danjon cuyo desarrollo de la teoría de la Luna lleva a una primera aproximación de la teoría de Delaunay.

Supondremos, de momento, que la inclinación i' de la órbita lunar es nula y que, por consiguiente, la fuerza perturbatriz está situada en su plano ($i'^2 = 0.008$). Tomaremos la masa del Sol como unidad y llamaremos m y m' a las masas de la Tierra y de la Luna, respectivamente, e y e' a las excentricidades de sus órbitas, a y a' sus semiejes mayores, n y n' a sus movimientos medios y r y r' a los radios vectores geocéntricos del Sol y de la Luna (Fig. 10.9). Los símbolos ζ y Λ representarán las longitudes geocéntricas del Sol y de la Luna. Las latitudes se supondrán nulas. Sean S , T y L los centros del Sol, la Tierra y la Luna respectivamente (Fig. 10.9); hagamos

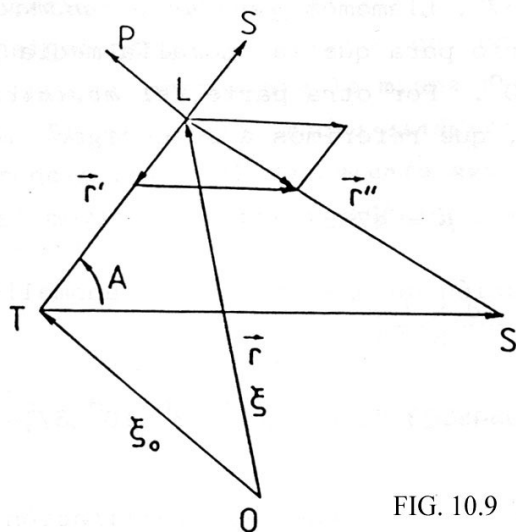


FIG. 10.9

$$SL = \vec{r}'' STL = \Lambda - \zeta = A$$

Sean, por otra parte, O el origen de un sistema inercial de referencia y $\vec{\xi}_0$ y $\vec{\xi}$ los vectores de posición de la Tierra y de la Luna en dicho sistema. El movimiento de T vendrá definido por

$$\ddot{\vec{\xi}}_0 = Gm' \frac{\vec{r}'}{r'^3} + GM \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (55.9)$$

y el de L por

$$\ddot{\vec{\xi}} = -Gm \frac{\vec{r}'}{r'^3} + GM \frac{\vec{r}''}{r''^3} \quad (56.9)$$

Restando estas dos igualdades miembro a miembro tendremos

$$\ddot{\vec{r}}' = -G(m+m') \frac{\vec{r}'}{r'^3} + GM \left(\frac{\vec{r}''}{r''^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad (57.9)$$

que representa el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. El segundo término del segundo miembro es la fuerza perturbatriz debida a la atracción solar (recordar (44.7) de 7.5).

Hagamos $GM=k$ y descompongamos $k \frac{\vec{r}''}{r''^3}$ en suma de dos vectores, uno dirigido de L hacia T y el paralelo a TS . Tendremos:

$$\frac{\vec{r}''}{r''^3} = \frac{\vec{r}'}{r'^3} + \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (58.9)$$

con lo que la expresión de la fuerza perturbatriz será ahora

$$\vec{f} = k \left(\frac{\vec{r}'}{r'^3} + \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad (M=1) \quad (59.9)$$

o también

$$\vec{f} = k \frac{\vec{r}'}{r'^3} + k\vec{r} \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} \right) \quad (60.9)$$

Las componentes S y P de $\vec{f}$ según el radio vector y según la normal al radio vector son:

$$\left. \begin{aligned} S &= -\frac{kr'}{r'^3} + kr \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} \right) \cos A \\ P &= -kr \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} \right) \sin A \end{aligned} \right\} \quad (61.9)$$

De la misma figura 10.9 se deduce:

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos A$$

de donde:

$$\frac{1}{r'^{n3}} = \frac{1}{r^3} \left(1 - 2 \frac{r'}{r} \cos A + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-3/2}$$

Desarrollando y limitando al segundo orden con relación a r'/r , obtenemos:

$$\frac{1}{r'^{n3}} = \frac{1}{r^3} \left[1 + 3 \frac{r'}{r} \cos A + \frac{3}{4} \frac{r'^2}{r^2} (3 + 5 \cos 2A) + \dots \right] \quad (62.9)$$

y llevando este valor a las expresiones (61.9) de S y P , haciendo $k = n^2 a^3$, lo cual supone despreciar las masas de la Luna y de la Tierra frente a la del Sol, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} S &= \frac{n^2 a^3}{r^3} r' \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2A + \frac{9}{8} \frac{r'}{r} \cos A + \frac{15}{8} \frac{r'}{r} \cos 3A + \dots \right] \\ P &= -\frac{n^2 a^3}{r^3} r' \left[\frac{3}{2} \sin 2A + \frac{3}{8} \frac{r'}{r} \sin A + \frac{15}{8} \frac{r'}{r} \sin 3A + \dots \right] \end{aligned} \quad (63.9)$$

Más adelante se introducirán en estas expresiones los elementos keplerianos; pero, hemos de observar que los elementos keplerianos del Sol se refieren, no al centro de la Tierra, sino al baricentro del sistema Tierra-Luna.

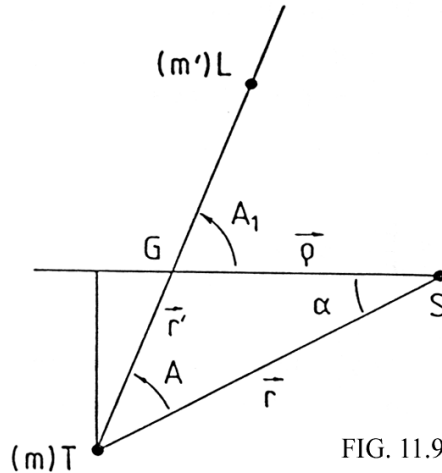


FIG. 11.9

Sea $\vec{p}$ el radio vector de dicho baricentro y A_1 el ángulo que forma con TL (Fig. 11.9). Tendremos:

$$\frac{GT}{GL} = \frac{m'}{m}; \quad \frac{GT}{GT + GL} = \frac{m'}{m' + m}$$

o sea:

$$GT = \frac{m'}{m' + m} r'$$

Luego, teniendo en cuenta que $G T$ es muy pequeño, podemos escribir con mucha aproximación:

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \frac{m'}{m+m'} \vec{r}' \cos A_1 \quad (64.9)$$

y

$$A = A_1 - \alpha \approx A_1 - \tan \alpha \approx A_1 - \frac{m'}{m+m'} \frac{r'}{\rho} \sin A_1 \quad (65.9)$$

De (64.9) deducimos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{m'}{m+m'} \frac{r'}{\rho} \cos A_1 \right) \\ \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{\rho^3} \left(1 - \frac{3m'}{m+m'} \frac{r'}{\rho} \cos A_1 \right) \end{aligned}$$

valores que sustituidos juntamente con (65.9) en (63.9) nos dan

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} n^2 \frac{a^3}{\rho^3} r' \left[1 + 3 \cos 2A_1 + \frac{r' m - m'}{\rho m + m'} \left(\frac{9}{4} \cos A_1 + \frac{15}{4} \cos 3A_1 \right) + \dots \right] \\ P &= -\frac{1}{2} n^2 \frac{a^3}{\rho^3} r' \left[3 \sin 2A_1 + \frac{r' m - m'}{\rho m + m'} \left(\frac{3}{4} \sin A_1 + \frac{15}{4} \sin 3A_1 \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (66.9)$$

Vamos a introducir ahora los elementos keplerianos utilizando, para representar los radios vectores, los desarrollos (48.3) y (49.3), que escritos para nuestro caso nos dan:

$$\frac{a^3}{\rho^3} = 1 + \frac{3}{2} e^2 + 3e \cos M + \frac{9}{2} e^2 \cos 2M + \dots \quad (67.9)$$

$$r' = a' \left[1 + \frac{e'^2}{2} - e' \cos M' - \frac{e'^2}{2} \cos 2M' + \dots \right] \quad (68.9)$$

donde e y M son la excentricidad y anomalía media del baricentro y e' y M' son la excentricidad y anomalía media de la Luna.

El ángulo A_1 , diferencia entre la longitud de la Luna y la longitud baricéntrica del Sol, puede expresarse en función de los movimientos medios sidéreos n y n' del Sol y de la Luna y de las desigualdades keplerianas periódicas de las longitudes de estos astros que designaremos respectivamente por ΣP y $\Sigma P'$.

Pondremos

$$\begin{aligned} \sigma &= (n' - n)t + \sigma_0 \\ A_1 &= \sigma - \Sigma P + \Sigma P' \end{aligned} \quad (69.9)$$

con

$$\begin{aligned}\Sigma P &= 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \dots \\ \Sigma P' &= 2e' \sin M' + \frac{5}{4}e'^2 \sin 2M' + \dots\end{aligned}\quad (70.9)$$

En el desarrollo de la fuerza perturbatriz intervienen términos en $\text{sen} jA_1$ y $\text{cos} jA_1$ donde j es un entero. Teniendo en cuenta el valor de (69.9) de A_1 podemos escribir:

$$\begin{aligned}\cos jA_1 &= \cos [j\sigma - (j\Sigma P - j\Sigma P')] = \\ &= \cos j\sigma \cos j(\Sigma P - \Sigma P') + \sin j\sigma \sin j(\Sigma P - \Sigma P')\end{aligned}$$

y desarrollando en serie:

$$\begin{aligned}\cos jA_1 &= \left[1 - \frac{j^2}{2}(\Sigma P' - \Sigma P)^2 + \dots \right] \cos j\sigma - \\ &- \left[j(\Sigma P' - \Sigma P) - \frac{j^3}{6}(\Sigma P' - \Sigma P)^3 + \dots \right] \sin j\sigma\end{aligned}\quad (71.9)$$

y análogamente:

$$\begin{aligned}\sin jA_1 &= \left[1 - \frac{j^2}{2}(\Sigma P' - \Sigma P)^2 + \dots \right] \sin j\sigma + \\ &+ \left[j(\Sigma P' - \Sigma P) - \frac{j^3}{6}(\Sigma P' - \Sigma P)^3 + \dots \right] \cos j\sigma\end{aligned}\quad (72.9)$$

Es fácil ver que sustituyendo (70.9) en (71.9) y (72.9) obtendremos en las expresiones de $\text{cos} jA_1$ y $\text{sen} jA_1$ productos de senos de los ángulos $M, M', 2M, 2M'$, etc. afectados de exponentes enteros. Estos productos se podrán transformar en sumas de senos y cosenos, que multiplicadas por $\text{sen} j\sigma$ y $\text{cos} j\sigma$ nos proporcionarán $\text{cos} jA_1$ y $\text{sen} jA_1$ bajo la forma de sumas de cosenos o de senos con argumentos combinaciones lineales de los ángulos σ, M y M' .

Total, que sustituyendo (67.9), (68.9) y los valores hallados para $\text{cos} jA_1$ y $\text{sen} jA_1$ en (66.9), obtendremos unas nuevas expresiones de S y P en las que aparecerán $e, e', a, a', \sigma, M, M'$ y múltiplos de los argumentos σ, M y M' . Pero, los desarrollos de S y P no se utilizan para estudiar las perturbaciones que dependen de e' ; en consecuencia, cuando interese, despreciaremos los términos en que aparezca e' y escribiremos solamente los que dependan de e .

Teniendo en cuenta todo lo expuesto queda, finalmente.

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}n^2a' \left[1 + \frac{3}{2}e^2 + 3\cos 2\sigma + 3e\cos M + \frac{9}{4}\frac{a'm-m'}{a'm+m'}\cos \sigma + \dots \right] \\ P &= -\frac{1}{2}n^2a' \left[3\sin 2\sigma + \frac{3}{4}\frac{a'm-m'}{a'm+m'}\sin \sigma + \dots \right]\end{aligned}\quad (73.9)$$

desarrollo que utilizaremos, como queda dicho, para el estudio de perturbaciones que no dependen de e' .

9.3.3 Desarrollo de la función perturbatriz

Cuando interese estudiar las perturbaciones que dependen de la excentricidad e' utilizaremos la función perturbatriz (recordar (74.8))

$$R = \frac{n^2 a^3}{r} \left(\frac{r}{r''} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad (74.9)$$

De la Fig. 10.9 deducimos:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos A$$

y

$$\begin{aligned} \frac{r}{r''} &= \left[1 - 2 \frac{r'}{r} \cos A + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = 1 + \frac{r'}{r} \cos A - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \\ &+ \frac{3}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cos^2 A - \frac{3}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \cos A + \frac{5}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \cos^3 A + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo en (74.9) obtenemos el siguiente desarrollo de la función perturbatriz:

$$R = \frac{n^2 a^3}{r} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (1 + 3 \cos 2A) + \frac{1}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 (3 \cos A + 5 \cos 3A) + \dots \right]$$

en el que los primeros términos despreciados son los de cuarto orden en r'/r . Si se omite el primer término, el cual no contiene los elementos de la órbita lunar y por consiguiente no intervendrá en las derivadas parciales, queda:

$$R = \frac{n^2 a^3}{r^3} r'^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2A + \frac{3}{8} \frac{r'}{r} \cos A + \frac{5}{8} \frac{r'}{r} \cos 3A + \dots \right] \quad (75.9)$$

Podemos expresar R en función de e , e' , a , a' , σ , M , M' y múltiplos de los argumentos σ , M y M' , añadiendo a los desarrollos parciales que hemos utilizado para obtener S y P

$$r'^2 = a'^2 \left[1 + \frac{3}{2} e'^2 - 2e' \cos M' - \frac{1}{2} e'^2 \cos 2M' + \dots \right]$$

Obtendremos:

$$\begin{aligned}
 R = n^2 a'^2 & \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} e'^2 + \frac{3}{4} \cos 2\sigma + \frac{3}{4} e \cos M - \frac{1}{2} e' \cos M' - \right. \\
 & - \frac{3}{8} e \cos(2\sigma + M) + \frac{21}{8} e \cos(2\sigma - M) + \frac{3}{4} e' \cos(2\sigma + M') - \\
 & - \frac{9}{4} e' \cos(2\sigma - M') + \frac{3}{4} e'^2 \cos(2\sigma + 2M') + \frac{15}{8} e'^2 \cos(2\sigma - 2M') - \\
 & \left. - \frac{1}{8} e'^2 \cos 2M' + \frac{m-m'}{m+m'} \left(\frac{3}{8} \frac{a'}{a} \cos \sigma + \frac{5}{8} \frac{a'}{a} \cos 3\sigma \right) + \dots \right] \quad (76.9)
 \end{aligned}$$

Si tuviéramos en cuenta la inclinación i' , a los argumentos que figuran en el desarrollo (76.9) deberíamos añadir la distancia de la Luna a su nodo ascendente, $\eta = \Lambda_m - \Omega'$.

9.3.4 Perturbaciones independientes de la excentricidad de la órbita lunar

Para estudiar las perturbaciones independientes de la excentricidad e' de la órbita de la Luna utilizaremos las ecuaciones del movimiento en la forma

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}' - r' \dot{\Lambda}^2 &= -k \frac{m+m'}{r'^2} + S \\ \frac{\dot{r}'}{r'^2} \dot{\Lambda} &= P r' \end{aligned} \right\} \quad (77.9)$$

que se deduce de las ecuaciones del movimiento en coordenadas polares

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}' - r' \dot{\Lambda}^2 &= f \\ r'^2 \dot{\Lambda} &= C \end{aligned} \right\}$$

donde f representa el módulo de la fuerza central ejercida sobre la unidad de masa y C es la constante de las áreas, recordando además que si u y w son las componentes de la velocidad orbital el efecto de la fuerza perturbatriz durante el tiempo dt se puede representar por $du = Sdt$, $dw = Pdt$ y de esta segunda se deduce $r' dw = dC = r' Pdt$.

La primera de las ecuaciones (77.9) expresa la aceleración radial en coordenadas polares y la segunda, la aceleración normal al radio vector.

La integración de estas ecuaciones con un grado de aproximación suficiente para establecer las Tablas de la Luna es una operación muy complicada. Sin embargo, se pueden establecer algunas reglas conducentes a la simplificación del problema:

1ª) Introduciremos sucesivamente, en las ecuaciones del movimiento, cada uno de los términos de la fuerza perturbatriz y estableceremos la perturbación correspondiente como si existiera sola.

2ª) Integraremos las ecuaciones como si los argumentos σ , M y M' fueran funciones lineales del tiempo y, por consiguiente, despreciando en los segundos miembros las perturbaciones de las cuales son afectados.

3ª) Cuando en los segundos miembros aparezcan a la vez términos de largo periodo y términos de corto periodo despreciaremos estos últimos.

Los resultados que se obtienen observando estas reglas constituyen la llamada *segunda aproximación de la teoría de la Luna*.

a) *Término constante de la fuerza perturbatriz:*

En (73.9) P no contiene término constante; por consiguiente, el segundo miembro de la segunda ecuación de (77.9) es nulo y el movimiento obedece a la ley de las áreas. Por otra parte, la primera ecuación de (77.9) se puede escribir, teniendo en cuenta el desarrollo de S :

$$\ddot{r}' - r' \dot{\Lambda}^2 = \frac{-k(m+m') + \frac{1}{2}n^2 a'^3 \left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right)}{r'^2} + \frac{1}{2}n^2 a' \left(1 - \frac{a'^2}{r'^2}\right) \left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right)$$

y puesto que estamos suponiendo $e' = 0$, será $a' = r'$ (órbita circular) y por tanto el segundo sumando del segundo miembro será cero. La ecuación resultante, junto con la que expresa la ley de las áreas, determina un movimiento circular que se escribe

$$n'^2 a'^3 = k(m+m') - \frac{1}{2}n^2 a'^3 \left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right)$$

obteniéndose finalmente:

$$k(m+m') = n'^2 a'^3 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{n'^2} \left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right)\right] = n'^2 a'^3 F \quad (78.9)$$

donde $F = 1.0028$. Una teoría más completa teniendo en cuenta e' e i' da para F el valor

$$F = 1.002723 = \frac{368}{367}$$

El efecto de este factor es una reducción de la atracción de la Tierra sobre la Luna causada por la presencia del Sol.

b) *Variación:* Es una desigualdad del movimiento de la Luna, descubierta por Tycho Brahe en 1582 y de la cual Newton dio la teoría en su obra “Principios Matemáticos de la Filosofía Natural y su Sistema del Mundo”. Su periodo es de una semi-revolución sinódica; se anula en las sicigias y en las cuadraturas y toma su valor máximo en los octantes donde sobrepasa los 39'. Estas circunstancias bastan para saber que el argumento del cual depende es el doble del ángulo σ definido como la diferencia entre las longitudes medias de la Luna y del Sol:

$$\sigma = (n' - n)t + \chi' - \chi \quad (79.9)$$

Para calcularla partamos de las ecuaciones (77.9), sustituyamos en ellas los valores

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} n^2 a' (1 + 3 \cos 2\sigma) \\ P &= -\frac{3}{2} n^2 a' \sin 2\sigma \end{aligned} \right\} \quad (80.9)$$

deducidos de (73.9) y tengamos en cuenta los resultados obtenidos en el párrafo a). Escribiremos:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}' - r' \dot{\Lambda}^2 &= -n'^2 \frac{a'^3}{r'^2} + \frac{1}{2} n^2 a' \left(1 - \frac{a'^2}{r'^2} + 3 \cos 2\sigma \right) \\ \dot{C} &= -\frac{3}{2} n^2 a'^2 \sin 2\sigma \end{aligned} \right\} \quad (81.9)$$

Integremos suponiendo constantes n' y a' : La segunda da, por integración inmediata

$$C = C_0 + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n' - n} a' \cos 2\sigma$$

de donde, siendo el valor medio de C $n' a'^2$ es

$$r'^2 \dot{\Lambda} = n' a'^2 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'(n' - n)} \cos 2\sigma \right] \quad (82.9)$$

Despejando de (82.9) $\dot{\Lambda}$, elevando al cuadrado, desarrollando en serie y despreciando los términos en 4σ , hallamos

$$\dot{\Lambda}^2 = n'^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'(n' - n)} \cos 2\sigma \right] \quad (83.9)$$

valor que sustituido en la primera de las ecuaciones (81.9) nos proporciona

$$\ddot{r}' = n^2 a' \left(1 - \frac{a'}{r'} \right) \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a'}{r'} \right) - \left(\frac{n'}{n} \right)^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \right] + \frac{3}{2} n^2 a' \left[1 + \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \frac{n'}{n' - n} \right] \cos 2\sigma$$

y si, puesto que $a' \approx r'$ reemplazamos $\frac{a'}{r'}$ por 1 en las dos expresiones entre corchetes, resulta:

$$\ddot{r}' = -a' \left(1 - \frac{a'}{r'} \right) (n'^2 - n^2) + \frac{3}{2} n^2 a' \left(1 + \frac{n'}{n' - n} \right) \cos 2\sigma \quad (84.9)$$

Busquemos una solución de (84.9) de la forma

$$r' = a'(1 - x \cos 2\sigma)$$

Tendremos

$$\begin{aligned}\frac{a'}{r'} &= 1 + x \cos 2\sigma + \dots \\ 1 - \frac{a'}{r'} &= -x \cos 2\sigma \dots\end{aligned}\tag{85.9}$$

y

$$\ddot{r}' = 4(n' - n)^2 a' x \cos 2\sigma \tag{86.9}$$

Sustituyendo (85.9) y (86.9) en (84.9) resulta

$$\left[4(n' - n)^2 - (n'^2 - n^2) \right] x = \frac{3}{2} n^2 \frac{2n' - n}{n' - n}$$

de donde

$$x = \frac{3}{2} \left(\frac{n}{n' - n} \right)^2 \frac{2n' - n}{3n' - 5n} = \frac{1}{139.1} = 0.0071 \tag{87.9}$$

(recordar que $n = 3548''.1928$ y $n' = 47434''.8907$).

Este resultado nos dice que la Luna describe un óvalo cuyo semieje menor, $r' = a'(1-x)$, está dirigido hacia el Sol ($\sigma = 0$). La razón de sus ejes es:

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{138}{140} = \frac{69}{70}$$

Como consecuencia, la paralaje de la Luna es más pequeña en las cuadraturas que en las sicigias en aproximadamente $1/60$.

Consideremos de nuevo la ecuación (82.9) y sustituyamos en ella

$$\left(\frac{a'}{r'} \right)^2 = 1 + 2x \cos 2\sigma + \dots$$

Tendremos, despreciando términos de orden superior

$$\dot{\Lambda} = n' \left[1 + \left(2x + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'(n' - n)} \right) \cos 2\sigma \right]$$

e integrando:

$$\Lambda = n't + \chi' + \frac{n'}{n' - n} \left(x + \frac{3n^2}{8n'(n' - n)} \right) \sin 2\sigma + \dots \tag{88.9}$$

La desigualdad que aparece en la expresión (87.9) de la longitud de la Luna es la *variación*. Su coeficiente, calculado a partir de esta fórmula es $0.01022 = 35'.1$.

Si desarrollamos en serie el valor de x dado por (87.9) obtenemos

$$x = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \left(1 + \frac{19}{6} \frac{n}{n'} + \dots\right)$$

resultando para el coeficiente de la variación la serie

$$\frac{11}{8} \left(\frac{n}{n'}\right)^2 + \frac{59}{12} \left(\frac{n}{n'}\right)^3 + \dots$$

cuyos dos primeros términos constituyen los de una serie lentamente convergente que estableció Delaunay de la forma:

$$\frac{11}{8} \left(\frac{n}{n'}\right)^2 + \frac{59}{12} \left(\frac{n}{n'}\right)^3 + \frac{893}{72} \left(\frac{n}{n'}\right)^4 + \frac{2855}{108} \left(\frac{n}{n'}\right)^5 + \frac{8304449}{165888} \left(\frac{n}{n'}\right)^6 + \dots \quad (89.9)$$

cuya suma es:

$$1587'' + 424'' + 80'' + 13'' + 2'' + \dots = 35'6''$$

Si se tuvieran en cuenta los términos que dependen de las excentricidades y de la inclinación, la variación llegaría a valer $39'30''$

c) *Desigualdad paraláctica*: es una desigualdad del movimiento de la Luna que depende del argumento σ y cuyo periodo es igual a la revolución sinódica.

Los términos correspondientes de la fuerza perturbatriz son:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{9}{8} n^2 a' \frac{a' m - m'}{a m + m'} \cos \sigma \\ P &= -\frac{3}{8} n^2 a' \frac{a' m - m'}{a m + m'} \sin \sigma \end{aligned} \right\} \quad (90.9)$$

que sustituiremos en las ecuaciones (77.9) tomando el cociente $\frac{m - m'}{m + m'} = 1$. Teniendo en cuenta, además, (78.9) obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}' - r' \dot{\Lambda}^2 &= -\frac{n'^2 a'^3}{r'^2} + \frac{9}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \cos \sigma \\ \dot{C} &= -\frac{3}{8} n^2 \frac{a'^3}{a} \sin \sigma \end{aligned} \right\} \quad (91.9)$$

La segunda ecuación se integra inmediatamente, resultando:

$$C = C_0 + \frac{3}{8} \frac{n^2}{n' - n} \frac{a'^3}{a} \cos \sigma$$

de donde tomando $C_0 = n' a'^2$ es:

$$r'^2 \dot{\Lambda} = n' a'^2 \left[1 + \frac{3}{8} \frac{n^2}{n'(n'-n)} \frac{a'}{a} \cos \sigma \right] \quad (92.9)$$

Eliminando $\dot{\Lambda}$ entre esta ecuación y la primera de las (91.9) obtenemos

$$\ddot{r}' = n'^2 \frac{a'^3}{r'^2} \left(\frac{a'}{r'} - 1 \right) + \frac{3}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \left(3 + \frac{2n'}{n'-n} \frac{a'^3}{r'^3} \right) \cos \sigma \quad (93.9)$$

o, también, haciendo como antes $r' = a'$ salvo en el factor $\left(\frac{a'}{r'} - 1 \right)$:

$$\ddot{r}' = n'^2 a' \left[\frac{a'}{r'} - 1 + \frac{3}{8} \frac{a'}{a} \frac{n^2}{n'^2} \frac{5n'-3n}{n'-n} \cos \sigma \right] \quad (94.9)$$

Busquemos una solución de la forma

$$r' = a' \left(1 + x \frac{a'}{a} \cos \sigma \right) \quad (95.9)$$

Será

$$\frac{a'}{r'} - 1 = -x \frac{a'}{a} \cos \sigma + \dots$$

y

$$\ddot{r}' = -x \frac{a'^2}{a} (n'-n)^2 \cos \sigma$$

Sustituyendo en (94.9) y operando obtendremos:

$$\left[n'^2 - (n'-n)^2 \right] x = \frac{3}{8} \frac{n^2}{n'-n} (5n'-3n) \quad (96.9)$$

de donde

$$x = 0.0752$$

A partir de (96.9) podemos desarrollar x en términos de n/n' :

$$x = \frac{15}{16} \frac{n}{n'} + \frac{27}{32} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \dots$$

pero, una teoría más completa nos diría que sólo el primer término de este desarrollo es exacto.

Calculemos la desigualdad correspondiente de la longitud. De (92.9) teniendo en cuenta (95.9), se deduce

$$\dot{\Lambda} = n' - n' \frac{a'}{a} \left(2x - \frac{3}{8} \frac{n^2}{n'(n'-n)} \right) \cos \sigma$$

e integrando:

$$\Lambda = n't + \chi' - \frac{a'}{a} \left(2x - \frac{3}{8} \frac{n^2}{n'(n'-n)} \right) \frac{n'}{n'-n} \sin \sigma$$

y teniendo en cuenta el desarrollo de x :

$$\Lambda = n't + \chi' - \frac{a'}{a} \left(\frac{15}{8} \frac{n}{n'} + \dots \right) \sin \sigma \quad (97.9)$$

En la teoría de Delaunay el coeficiente de la *desigualdad paraláctica* se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & -\frac{a' m - m'}{a m + m'} \left[\frac{15}{8} \frac{n}{n'} + \frac{93}{8} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \frac{6887}{128} \left(\frac{n}{n'} \right)^3 + \right. \\ & \left. + \frac{137197}{512} \left(\frac{n}{n'} \right)^4 + \dots \right] = -124''.96 \end{aligned} \quad (98.9)$$

El efecto de los términos (90.9) de la fuerza perturbatriz sobre la órbita de la Luna es una deformación sobre la misma en el sentido de que el radio de curvatura de la trayectoria perturbada es mayor en la luna nueva que en la llena y la órbita, por tanto, no es centrada, estando su centro desplazado hacia el Sol.

Debido a la deformación de la órbita, la paralaje de la Luna disminuye en 1" cerca de la luna nueva y aumenta de la misma cantidad en la luna llena. La variación correspondiente de la distancia a la Tierra es, en media, de ± 110 km.

La observación de ocultaciones de estrellas por la Luna proporciona el valor del coeficiente (98.9) con mucha precisión, ya que la desigualdad paraláctica retrasa las ocultaciones en $3^m 48^s$ en cuarto creciente y las avanza otro tanto en cuarto menguante.

d) *Ecuación anual*: Es una variación periódica del movimiento medio de la Luna de periodo anual. Está ligada a la variación de la fuerza perturbatriz del Sol, que depende de $1/r^3$ y de M . Fue descubierta, como la variación, por Tycho Brahe.

En (73.9) el desarrollo de S contiene un término en M y el desarrollo de P no lo contiene. La constante de las áreas puede por tanto considerarse aquí como invariable y las ecuaciones del movimiento (77.9) pueden escribirse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}' - r' \dot{\Lambda}^2 &= -\frac{n'^2 a'^3}{r'^2} + \frac{3}{2} n'^2 a' e \cos M \\ r'^2 \dot{\Lambda} &= n' a'^2 \end{aligned} \right\} \quad (99.9)$$

Eliminemos $\dot{\Lambda}$ entre estas dos ecuaciones:

$$\ddot{r}' = \frac{n'^2 a'^3}{r'^2} \left(\frac{a'}{r'} - 1 \right) + \frac{3}{2} n'^2 a' e \cos M \quad (100.9)$$

Busquemos una solución de la forma

$$r' = a'(1 + x \cos M) \quad (101.9)$$

de donde

$$\frac{a'}{r'} - 1 = -x \cos M$$

y

$$\ddot{r}' = -a' x n^2 \cos M$$

Hagamos como siempre $\frac{a'}{r'} = 1$ fuera del paréntesis en (100.9). Tendremos:

$$x(n'^2 - n^2) = \frac{3}{2} n^2 e$$

o tambien:

$$x = \frac{3}{2} e \frac{n^2}{n'^2} \left(1 + \frac{n^2}{n'^2} + \dots \right) = 0.000141 \quad (102.9)$$

Sustituyendo en la segunda de (99.9) el valor de $\left(\frac{a'}{r'}\right)^2$ dado por (101.9), obtenemos

$$\dot{\Lambda} = n' - 2n' x \cos M + \dots$$

e integrando:

$$\Lambda = n' t + \chi' - 2 \frac{n'}{n} x \sin M + \dots \quad (103.9)$$

El coeficiente $-2 \frac{n'}{n} x$ de esta desigualdad es de unos $-12'.5$ y su desarrollo

$$-3e \frac{n'}{n} \left(1 + \frac{n^2}{n'^2} + \dots \right) \quad (104.9)$$

tiene por primer término $-3e \frac{n'}{n}$; no contiene término en $\left(\frac{n}{n'}\right)^2$ y el término en $\left(\frac{n}{n'}\right)^3$ no puede deducirse de la teoría que estamos desarrollando.

Delaunay obtiene el siguiente desarrollo del coeficiente de la *ecuación anual*:

$$-e \left[3 \frac{n}{n'} - \frac{735}{16} \left(\frac{n}{n'}\right)^3 - \frac{1261}{4} \left(\frac{n}{n'}\right)^4 - \frac{142817}{96} \left(\frac{n}{n'}\right)^5 - \frac{3257665}{576} \left(\frac{n}{n'}\right)^6 - \dots \right]$$

cuya suma es $-11' 2''$.

Si se añadiesen los términos que dependen de la excentricidad e' , su valor sería de $-11' 8''$.

Debido a la ecuación anual, del 2 de enero al 2 de julio la Luna está retrasada sobre la Luna media y esta avanzada del 2 de julio al 2 de enero siguiente. A principios de abril los eclipses y las ocultaciones se retrasan en más de 20 minutos y se adelantan en la misma cantidad a principios de octubre.

a) *Aceleración secular*: En 1787 Laplace demostró que la variación secular de la excentricidad e de la órbita de la Tierra tiene como consecuencia una aceleración secular del movimiento medio de la Luna. En efecto, la distancia media del Sol a la Tierra tiene por expresión

$$a \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \quad (105.9)$$

variando, por tanto, en el mismo sentido que la excentricidad; por consiguiente, la fuerza perturbatriz, no periódica, ejercida por el Sol sobre la Luna, varía también secularmente, dando lugar al fenómeno, que había sido observado ya por Halley en 1693, por el cual el movimiento medio de la Luna obtenido comparando observaciones de eclipses reseñados por Tolomeo (siglo II) y de eclipses observados por los árabes (siglo IX) era menor que el que se deducía de comparar estos últimos con las observaciones de eclipses contemporáneos. Lalande fijó en $10''$ por siglo el valor de esta variación, dándole el nombre de *aceleración secular de la Luna*.

Hemos dicho en el apartado a) que el valor $k(m + m')$ dado por (78.9) es constante. Ahora bien, en el segundo miembro de dicha expresión figura la excentricidad e que decrece secularmente; por tanto, los elementos de la órbita lunar n' y a' han de ser variables. Por otra parte, la expresión de la componente P de la fuerza perturbatriz (recordar 73.9) no contiene más que términos periódicos, y en consecuencia, la constante de las áreas

$$C = n' a'^2 \quad (106.9)$$

es también invariante.

Eliminando a' entre (106.9) y (78.9) se deduce

$$k(m + m') = n'^2 \left(\frac{C}{n'} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 e^2 \right]$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{k(m + m')}{C^{3/2}}$$

es invariante, tendremos:

$$I = n' \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 e^2 \right]^2 \quad (107.9)$$

siendo I una constante.

De (107.9) se deduce fácilmente la derivada del movimiento medio n' con relación a la excentricidad e :

$$\frac{dn'}{de} = -3 \frac{n'^2}{n'} e \quad (108.9)$$

Tomemos

$$e = e_0 - ht$$

entonces,

$$\frac{dn'}{dt} = \frac{dn'}{de} \frac{de}{dt}$$

de donde, tomando sólo el término en h :

$$dn' = 3 \frac{n'^2}{n'} e_0 h dt$$

e integrando

$$n' = n'_0 + 3 \frac{n'^2}{n'} e_0 h dt$$

y

$$\Lambda = n'_0 t + \chi' + \frac{3}{2} \frac{n'^2}{n'} e_0 h t^2 \quad (109.9)$$

Tomando en el coeficiente de t^2 los valores de e_0 y h de la teoría de Newcomb, se deduce para la aceleración secular:

$$bt^2 = 10''.3t^2$$

estando el tiempo t expresado en siglos.

El desarrollo del término b dado por Delaunay es

$$b = \frac{n'^2}{n'} e_0 h \left[\frac{3}{2} - \frac{3771}{64} \left(\frac{n'}{n} \right)^2 - \frac{34047}{64} \left(\frac{n'}{n} \right)^3 - \dots \right] \quad (110.9)$$

siendo $b = 6''$.

Hoy en día se evalúa en $12''.36$ el valor de b exigido por las observaciones.

En realidad, la aceleración secular de la Luna es una desigualdad periódica de periodo muy largo ya que actualmente la excentricidad de la órbita de la Tierra está decreciendo y lo continuará haciendo durante 24.000 años aproximadamente; pasará entonces a crecer y la variación correspondiente del movimiento medio de la Luna cambiará de sentido.

Siendo invariante el producto $n'^2 a'^3$, y conocido el aumento secular del movimiento medio n' , se deduce la disminución correspondiente de la distancia a' , resultando ser de menos de $2m$ por siglo.

9.3.5 Perturbaciones que dependen de la excentricidad de la órbita lunar

Para estudiar las variaciones que dependen de la excentricidad e' de la órbita de la Luna utilizaremos, como indicamos en 9.3.3, la función perturbatriz R que sustituiremos en las ecuaciones de Gauss (119.8) adecuadas a nuestro caso. Supondremos nula la inclinación de la órbita y despreciaremos los términos en el cuadrado de la excentricidad, con lo que dichas ecuaciones tomarán la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n'a'} \frac{\partial R}{\partial \chi'} \\ \frac{de'}{dt} &= -\frac{1}{n'a'^2 e'} \frac{\partial R}{\partial \omega'} \\ \frac{d\omega'}{dt} &= \frac{1}{n'a'^2 e'} \frac{\partial R}{\partial e'} \end{aligned} \right\} \quad (111.9)$$

Los únicos términos de la función perturbatriz que intervienen en las derivadas de e' y de ω' son los que contienen uno u otro de estos dos elementos. Por tanto, a partir de (76.9) escribiremos:

$$R = n^2 a'^2 \left[\frac{3}{8} e'^2 - \frac{1}{2} e' \cos M' + \frac{3}{4} e' \cos(2\sigma + M') - \frac{9}{4} e' \cos(2\sigma - M') - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} e'^2 \cos 2M' + \frac{3}{4} e'^2 \cos 2(\sigma + M') + \frac{15}{8} e'^2 \cos 2(\sigma - M') + \dots \right] \quad (112.9)$$

En el desarrollo que utilizaremos sólo consideraremos los términos no periódicos y los de periodo muy largo que son los que separan al máximo el cuerpo perturbado de su lugar medio.

El periodo de los términos en M' es próximo a un mes. El de los términos en $2\sigma - M'$ también es próximo a un mes ya que $2\sigma - M' = 2(n' - n)t - n't = n't - 2nt$ y teniendo en cuenta que $n' = 13^\circ/\text{día}$ y $2n = 2^\circ/\text{día}$, la diferencia es de $11^\circ/\text{día}$; por tanto $360^\circ/11^\circ \approx 32$ días. El periodo de los términos en $2M'$ es de aproximadamente 14 días. Los de los términos en $2\sigma + M'$ y en $2(\sigma + M)$ son respectivamente de unos 9 y 7 días. Veamos cual es el del término $2(\sigma - M')$:

$$2(\sigma - M') = 2[(\Lambda - \zeta) - (\Lambda - \omega')] = -2(\zeta - \omega')$$

Si suponemos fijo el perigeo de la Luna, el periodo es de seis meses, o sea, mucho mayor que los otros.

Limitaremos, pues, la función perturbatriz a los siguientes términos:

$$R = \frac{3}{8} n^2 a'^2 e'^2 [1 + 5 \cos 2(\sigma - M')] = \frac{3}{8} n^2 a'^2 e'^2 [1 + 5 \cos 2(\zeta - \omega')] \quad (113.9)$$

Sustituyendo esta expresión de R en las ecuaciones (111.9) tendremos:

$$\frac{da'}{dt} = 0 \quad (114.9)$$

puesto que $\frac{\partial R}{\partial \chi} = 0$ al no figurar en (113.9) la longitud de la Luna. Esto nos dice que el semieje mayor no sufre perturbaciones que dependan del argumento $2(\sigma - M')$.

$$\frac{de'}{dt} = -\frac{15}{4} \frac{n^2}{n'} e' \sin 2(\zeta - \omega') \quad (115.9)$$

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{1}{4} \frac{n^2}{n'} [3 + 15 \cos 2(\zeta - \omega')] \quad (116.9)$$

a) *Movimiento secular del perigeo*: Para estudiar el movimiento del perigeo pongamos $\zeta - \omega' = \varphi$

y derivemos respecto al tiempo teniendo en cuenta (116.9):

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \frac{d\omega'}{dt} = n - \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} - \frac{15}{4} \frac{n^2}{n'} \cos 2\varphi = \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'}\right) \left(1 - \frac{15n}{4n' - 3n} \cos 2\varphi\right) \quad (117.9)$$

Integremos efectuando el cambio de variable $\tan \varphi = x$ y haciendo $\frac{15n}{4n' - 3n} = p$; tendremos:

$$\cos 2\varphi = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad d\varphi = \frac{1}{1 + x^2} dx$$

y sustituyendo en (117.9):

$$\frac{1}{1 + x^2} dx = n \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'}\right) \left(1 - p \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) dt$$

de donde:

$$\frac{dx}{1 - p + (1 + p)x^2} = n \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'}\right) dt$$

e integrando

$$\int \frac{dx}{1 - p + (1 + p)x^2} = n \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'}\right) (t - t_0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - p^2}} \arctan \left[\sqrt{\frac{1 + p}{1 - p}} \tan \varphi \right] = n \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'}\right) (t - t_0)$$

Luego,

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{1 - p}{1 + p}} \tan \left[n \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'}\right) \sqrt{1 - p^2} (t - t_0) \right] \quad (118.9)$$

Hagamos

$$q = \sqrt{\frac{1 - p}{1 + p}} \quad \psi = n \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'}\right) \sqrt{1 - p^2} (t - t_0)$$

Sustituyendo en (118.9) queda:

$\tan \varphi = q \tan \psi$
lo cual implica

$$\varphi = \psi - \frac{1 - q}{1 + q} \sin 2\psi + \dots \quad (119.9)$$

siendo el primer término despreciado en $\text{sen } 4\psi$.

Podemos escribir, pues, la expresión que da la longitud del perigeo de la siguiente forma

$$\omega' = \zeta - \varphi = nt + \chi - \psi + \frac{1-q}{1+q} \text{sen } 2\psi + \dots$$

o también:

$$\omega' = nt + \chi - n \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \sqrt{1-p^2} (t-t_0) + \frac{1-q}{1+q} \text{sen } 2\psi + \dots$$

y haciendo

$$\omega'_0 = \chi + n \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \sqrt{1-p^2} t_0$$

sustituyendo el valor de p y agrupando los términos en t , queda finalmente:

$$\omega' = \omega'_0 + nt \left[1 - \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{15n}{4n' - 3n} \right)^2} \right] + \frac{1-q}{1+q} \text{sen } 2\psi + \dots \quad (120.9)$$

Vemos pues que el perigeo presenta un *movimiento secular* cuya velocidad angular media es

$$\mu = n \left[1 - \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{15n}{4n' - 3n} \right)^2} \right]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\mu = n' \frac{n}{n'} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2} \frac{n}{n'} - \frac{27}{2} \left(\frac{n}{n'} \right)^2} \right] \quad (121.9)$$

expresión aproximada que da para el movimiento medio del perigeo el valor de $351''$ siendo el valor observado de $401''$.

El desarrollo de (121.9) es

$$\mu = n' \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \frac{225}{32} \left(\frac{n}{n'} \right)^3 + \dots \right]$$

siendo la serie dada por Delaunay:

$$n' \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \frac{225}{32} \left(\frac{n}{n'} \right)^3 + \frac{4071}{128} \left(\frac{n}{n'} \right)^4 + \frac{265493}{2048} \left(\frac{n}{n'} \right)^5 + \dots \right]$$

cuya suma es $400''.4688$.

Si se tienen en cuenta otros términos que dependen de las excentricidades y de las inclinaciones se halla $\mu = 400''.9167$ con un periodo de revolución de 8 años 310 días.

b) *Movimiento periódico del perigeo*: La longitud del perigeo que acabamos de obtener (120.9) contiene un término periódico cuyo argumento ψ es la parte secular del ángulo φ (119.9). Si designamos por ω'_m la longitud media del perigeo y despreciamos la excentricidad de la órbita terrestre, podemos escribir (120.9) de la forma:

$$\omega' = \omega'_0 + \mu t + \frac{1-q}{1+q} \sin 2(\zeta - \omega'_m) \quad (122.9)$$

El coeficiente de la desigualdad es

$$\alpha = \frac{1-q}{1+q} = \frac{1-\sqrt{1-p^2}}{p} \quad (123.9)$$

Sustituyendo p por su valor $\left(p = \frac{15n}{4n' - 3n}\right)$ y desarrollando en serie encontramos, en nuestro estudio, que sólo el primer término es válido

$$\alpha = \frac{15}{8} \frac{n}{n'} + \dots$$

El valor de α es de $8^\circ.7$ y el periodo de la desigualdad es de 205.89 días.

c) *Variaciones de la excentricidad*: Para poner en evidencia la desigualdad correspondiente de la excentricidad partamos de las ecuaciones (115.9) y (116.9). Teniendo en cuenta que estamos haciendo $\varphi = \theta - \omega'$, podemos escribir

$$d\varphi = d\zeta - d\omega' = n - d\omega'$$

y, por tanto, sustituyendo en (116.9):

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \frac{1}{4} \frac{n^2}{n'} [3 + 15 \cos 2\varphi]$$

o también:

$$\frac{d\varphi}{dt} = n \left[1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} - \frac{15}{4} \frac{n}{n'} \cos 2\varphi \right] \quad (124.9)$$

y dividiendo (115.9) por (124.9) se obtiene

$$\frac{de'}{e'} = \frac{-\frac{15}{4} \frac{n}{n'} \sin 2\varphi d\varphi}{1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} - \frac{15}{4} \frac{n}{n'} \cos 2\varphi} \quad (125.9)$$

ecuación diferencial a variables separables que se integra inmediatamente, teniendo en cuenta que, a menos de un factor -2 el numerador es la derivada del denominador. Por tanto:

$$le' = -\frac{1}{2}l \left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} - \frac{15}{4} \frac{n}{n'} \cos 2\varphi \right)$$

es decir,

$$e' = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} - \frac{15}{4} \frac{n}{n'} \cos 2\varphi}}$$

siendo K una constante.

Recordando (124.9) esta expresión de e' puede escribirse, elevando al cuadrado,

$$e'^2 = \frac{K^2 n}{\frac{d\varphi}{dt}}$$

y como que según (119.9) y (123.9) es

$$\varphi = \psi - \alpha \sin 2\psi$$

es

$$\frac{d\varphi}{dt} = (1 - 2\alpha \cos 2\psi) \frac{d\psi}{dt}$$

con $\frac{d\psi}{dt}$ constante. Luego, podemos escribir

$$e'^2 = \frac{K^2 n}{(1 - 2\alpha \cos 2\psi) \frac{d\psi}{dt}}$$

o sea

$$e' = e'_0 (1 - 2\alpha \cos 2\psi)^{-1/2} \quad (126.9)$$

con

$$e'_0 = \frac{K^2 n}{\frac{d\psi}{dt}} = \text{cte}$$

Desarrollando (126.9) obtenemos:

$$e' = e'_0 (1 + \alpha \cos 2\psi + \dots) = e'_0 (1 + \alpha \cos 2(\zeta - \omega'_m) + \dots) \quad (127.9)$$

Siendo la excentricidad media $e'_0 = 0.0549$, la excentricidad e' varía entre

$$e'_0(1 - \alpha) = 0.0448 \quad \text{y} \quad e'_0(1 + \alpha) = 0.0650$$

d) *Ecuación del centro. Evección* : De (122.9) y (127.9) deducimos que la órbita está definida por las dos relaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \omega'_0 + \mu t + \alpha \sin 2(\zeta - \omega') \\ e' &= e'_0 [1 + \alpha \cos 2(\zeta - \omega'_m)] \end{aligned} \right\} \quad (128.9)$$

no siendo perturbado el eje mayor a' (114.9).

Calculemos ahora la *ecuación del centro* de esta órbita deformable. Sea M'_p la anomalía media perturbada de la Luna:

$$\Lambda = n't + \chi' + 2e' \sin M'_p \quad (129.9)$$

donde

$$M'_p = n't + \chi' - \omega' = n't + \chi' - \omega'_0 - \mu t - \alpha \sin 2(\zeta - \omega'_m)$$

o también

$$M'_p = M' - \alpha \sin 2\psi \quad (130.9)$$

donde M' es la parte secular de M'_p :

$$M' = (n' - \mu)t + \chi' - \omega'_0$$

De (130.9) deducimos:

$$\sin M'_p = \sin M' - \alpha \sin 2\psi \cos M' \quad (131.9)$$

y llevando los valores de e' y $\sin M'_p$ a la expresión (129.9) obtenemos:

$$\Lambda = n't + \chi' + 2e'_0(1 + \alpha \cos 2\psi)(\sin M' - \alpha \sin 2\psi \cos M')$$

de donde, despreciando los términos de segundo orden

$$\Lambda = n't + \chi' + 2e'_0 \sin M' + 2e'_0 \alpha \sin(M' - 2\psi) + \dots$$

El término $2e'_0 \sin M'$ representa la ecuación del centro en una órbita elíptica de magnitud invariable (primer término del desarrollo de la ecuación del centro), en la que la línea de los ápsides giraría uniformemente en sentido directo con velocidad angular μ . El término $2e'_0 \alpha \sin(M' - 2\psi)$ representa una desigualdad que se suma a la ecuación del centro y que depende del seno del argumento $M' - 2\psi$, recibe el nombre de *evección*

y su descubrimiento se atribuye a Ptolomeo. Teniendo en cuenta el significado de $M' - 2\psi$ vemos que el tiempo interviene en la ecuación bajo el factor

$$n' - 2n + \mu = 40739'' .42$$

correspondiendo a un periodo de 31.81 días.

El coeficiente de la evección es

$$2e'_0 \alpha = e'_0 \left(\frac{15}{4} \frac{n}{n'} + \dots \right)$$

cuyo valor es de $57' .4$.

La serie obtenida por Delaunay es

$$e'_0 \left[\frac{15}{4} \frac{n}{n'} + \frac{263}{16} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \frac{48217}{768} \left(\frac{n}{n'} \right)^3 + \frac{1880537}{9216} \left(\frac{n}{n'} \right)^4 + \dots \right]$$

cuya suma es $1^\circ 16' 26''$.

La ecuación del centro es (recordar 4.7.1)

$$C = 6^\circ 17' 20'' \sin M' + 12' 49'' \sin 2M' + 36'' \sin 3M' + \dots$$

Obsérvese que los coeficientes son grandes debido a qué la excentricidad e'_0 es relativamente grande.

e) *Reducción a la eclíptica*: No es propiamente una perturbación sinó una reducción, análoga a la reducción al ecuador (4.7.2), que fue introducida en la teoría de la Luna por Tycho Brahe y que expresa la diferencia entre la longitud celeste y la longitud sobre la órbita. Viene dada por

$$l - \Lambda = -\tan^2 \frac{i'}{2} \sin 2\eta = -6' .9 \sin 2\eta$$

donde l es la longitud celeste, i' la inclinación de la órbita de la Luna sobre la eclíptica y η el argumento de latitud $\Lambda - \Omega$.

Resumimos a continuación los resultados obtenidos que afectan a la longitud:

$l = n't + \chi' + \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} e_0 h t^2 +$	aceleración secular
$+ 2e'_0 \sin M' + \frac{5}{4} e'^2_0 \sin 2M' +$	ecuación del centro
$+ \left[\frac{11}{8} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \frac{59}{12} \left(\frac{n}{n'} \right)^3 \right] \sin 2\sigma -$	variación
$- \left[\frac{15}{8} \frac{n}{n'} + \frac{93}{8} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right] \frac{a}{a'} \frac{m - m'}{m + m'} \sin \sigma -$	desigualdad paraláctica
$- 3 \frac{n}{n'} e \sin M +$	ecuación anual
$+ \frac{15}{4} \frac{n}{n'} e'_0 \sin (2\sigma - M') -$	evección
$- \tan^2 \frac{i'}{2} \sin 2\eta$	reducción a la eclíptica

9.3.6 Desigualdades que dependen de una perturbación ortogonal al plano orbital de la Luna

Hasta ahora hemos supuesto la fuerza perturbatriz $\vec{f}$ sobre el plano de la órbita lunar; pero, en realidad está situada en el plano que contiene los centros del Sol, de la Tierra y de la Luna. Admite pues, además de las componentes S y P , una componente T perpendicular al plano de la órbita.

En la expresión (60.9) de la fuerza perturbatriz $\vec{f}$ intervienen dos términos el primero de los cuales representa un vector dirigido según el radio vector de la Luna y el segundo un vector paralelo al radio vector Tierra-Sol. Recordemos que, tomando el sentido positivo hacia el Sol, este último es

$$k\vec{r}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) \quad (132.9)$$

y su módulo

$$n^2 \frac{a^3}{r^3} r' (3 \cos A + \dots) \quad (133.9)$$

Si limitamos el desarrollo (133.9) a su primer término y despreciamos las excentricidades este módulo es

$$3n^2 a' \cos \sigma$$

$$(A \approx \sigma, r' \approx a', \left(\frac{a}{r}\right)^3 \approx 1).$$

La proyección sobre la normal al plano de la órbita es la componente ortogonal buscada.

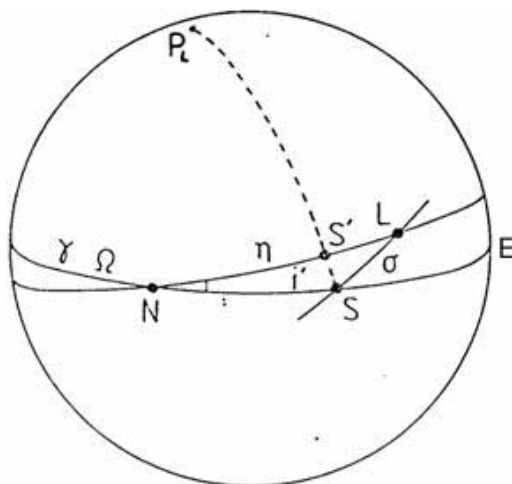


FIG. 12.9

Representemos sobre la esfera celeste la eclíptica E , la órbita de la Luna L , el Sol S , el nodo ascendente de la órbita de la Luna N y el polo norte P_L del plano de la órbita de la Luna (Fig.12.9).

Pongamos

$$NL = \eta$$

y sean, por otra parte, i' la inclinación de la órbita de la Luna sobre la eclíptica, Ω' la longitud del nodo y σ la distancia SL . En primera aproximación tendremos:

$$NS = \eta - \sigma \quad \eta = \Lambda - \Omega' \quad \sigma = \Lambda - \zeta$$

La componente ortogonal T tiene por expresión

$$T = -3n^2 a' \cos \sigma \sin \widehat{SS'}$$

(el signo menos indica que se proyecta hacia la parte negativa de la normal).

Ahora bien,

$$\sin \widehat{SS'} = \sin i' \sin NS = \sin i' \sin (\eta - \sigma)$$

luego,

$$\begin{aligned} T &= -3n^2 a' \cos \sigma \sin i' \sin (\eta - \sigma) = \\ &= -3n^2 a' \cos \sigma \sin i' (\sin \eta \cos \sigma - \cos \eta \sin \sigma) = \\ &= -\frac{3}{2} n^2 a' \sin i' (\sin \eta (1 + \cos 2\sigma) - \cos \eta \sin 2\sigma) \end{aligned}$$

Es decir:

$$T = \frac{3}{2} n^2 a' \sin i' (\sin (2\sigma - \eta) - \sin \eta) \quad (134.9)$$

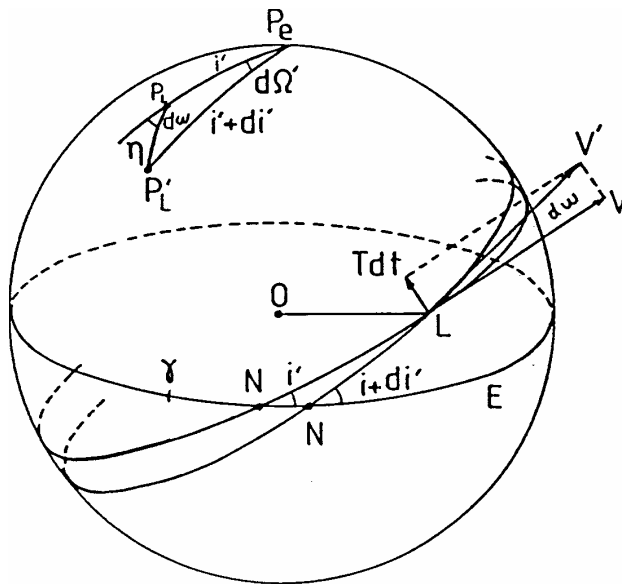


FIG. 13.9

Veamos cuales son los efectos de una perturbación ortogonal instantánea. Supongamos que la órbita de la Luna es circular. Sea $\vec{V}$ la velocidad de la Luna en su órbita y compongamos esta velocidad con $\overline{Tdt}$. La velocidad resultante, que representa la velocidad perturbada $\vec{V}'$ continúa siendo perpendicular al radio vector $\overline{OL}$ y forma con $\vec{V}$ un ángulo $d\omega$. La perturbación hace girar el plano de la órbita, alrededor de $\overline{OL}$, un ángulo $d\omega$; el nodo pasa de N a N' desplazándose $d\Omega'$ y la inclinación de la órbita varía en di' .

Por ser $d\omega$ muy pequeño podemos escribir

$$d\omega = -\frac{Tdt}{V} = -\frac{T}{n'a'}dt \quad (135.9)$$

donde Tdt y V son los módulos de $\overline{Tdt}$ y $\vec{V}$.

Por otra parte, sean P_L y P_L' los polos de las órbitas lunares no perturbada y perturbada y P_e el polo de la eclíptica. En el triángulo $P_e P_L P_L'$ se verifica:

$$\begin{aligned} d\Omega' &= -d\omega \frac{\text{sen } \eta}{\text{sen } i} \\ di' &= -d\omega \cos \eta \end{aligned} \quad (136.9)$$

de donde

$$\frac{d\Omega'}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} \frac{\text{sen } \eta}{\text{sen } i}$$

y teniendo en cuenta (135.9)

$$\frac{d\Omega'}{dt} = \frac{T}{n'a'} \frac{\text{sen } \eta}{\text{sen } i}$$

Sustituyendo T por su valor (134.9):

$$\frac{d\Omega'}{dt} = \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} [\text{sen}(2\sigma - \eta) - \text{sen } \eta] \text{sen } \eta$$

y desarrollando y operando el segundo miembro:

$$\frac{d\Omega'}{dt} = \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} [\cos 2(\sigma - \eta) + \cos 2\eta - \cos 2\sigma - 1] \quad (137.9)$$

Análogamente, a partir de la segunda ecuación de (136.9) obtenemos:

$$\frac{di'}{dt} = \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} \text{sen } i' [\text{sen}(2\sigma - \eta) - \text{sen } \eta] \cos \eta$$

o también, operando el segundo miembro:

$$\frac{di'}{dt} = \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} \sin i' [\sin 2(\sigma - \eta) + \sin 2\sigma - \sin 2\eta] \quad (138.9)$$

Recordando el significado de los distintos argumentos, las ecuaciones diferenciales (137.9) y (138.9) se pueden escribir también en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega'}{dt} &= -\frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} [1 - \cos 2(\zeta - \Omega') + \cos 2(\Lambda - \zeta) - \cos 2(\Lambda - \Omega')] \\ \frac{di'}{dt} &= -\frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} \sin i' [\sin 2(\zeta - \Omega') - \sin 2(\Lambda - \zeta) + \sin 2(\Lambda - \Omega')] \end{aligned} \quad (139.9)$$

El periodo de los términos en $2(\zeta - \Omega')$ es del orden de 6 meses y es el más largo. Los términos en $2(\Lambda - \zeta)$ tienen un periodo igual a la semirrevolucion sinódica y el de los términos en $2(\Lambda - \Omega')$ es de una semirrevolución draconítica.

Consideraremos sólo los términos de periodo largo y escribiremos:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega'}{dt} &= -\frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} [1 - \cos 2(\zeta - \Omega')] = -\frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} \sin^2(\zeta - \Omega') \\ \frac{di'}{dt} &= -\frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} \sin i' \sin 2(\zeta - \Omega') \end{aligned} \quad (140.9)$$

a) *Movimiento del nodo*: La primera de las ecuaciones (140.9) es del mismo tipo que la (116.9); por tanto, podemos utilizar para integrarla el mismo procedimiento que utilizamos allí haciendo ahora $\zeta - \Omega' = \varphi$. Hallaremos para la longitud del nodo:

$$\Omega' = \Omega'_0 + n \left[1 - \left(1 + \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{3n}{4n' + 3n} \right)^2} \right] t + \frac{1 - \sqrt{1 - p^2}}{p} \sin 2\psi \quad (141.9)$$

con

$$\psi = n \left(1 + \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{3n}{4n' + 3n} \right)^2} (t - t_0) \quad (142.9)$$

El movimiento medio sidéreo del nodo es, en primera aproximación

$$\nu = -n \left[\sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{n}{n'}} - 1 \right] = -n' \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 - \frac{9}{32} \left(\frac{n}{n'} \right)^3 + \dots \right] \quad (143.9)$$

serie cuya suma es $-193''.8$. El valor observado es de $-190''.77$.

La serie obtenida por Delaunay es:

$$\nu = -n' \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 - \frac{9}{32} \left(\frac{n}{n'} \right)^3 - \frac{273}{128} \left(\frac{n}{n'} \right)^4 - \frac{9797}{2048} \left(\frac{n}{n'} \right)^5 - \frac{199273}{24576} \left(\frac{n}{n'} \right)^6 - \dots \right]$$

La longitud del nodo afectada de su principal desigualdad es

$$\Omega' = \Omega'_m + \beta \sin 2\psi \quad (144.9)$$

donde Ω'_m es la longitud media y $\beta = \frac{1 - \sqrt{1 - p^2}}{p}$.

El periodo de esta desigualdad es de 173.31 días y su semiamplitud es, teniendo en cuenta el valor de p :

$$\beta = \frac{3n}{8n'} - \frac{9}{32} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \dots = 1^\circ 31'$$

b) *Desigualdades de la inclinación*: Para estudiar las desigualdades de la inclinación partamos de la segunda ecuación de (140.9) y del valor de $d\varphi/dt$ que se deduce de hacer $\varphi = \zeta - \Omega'$. Tendremos

$$\left. \begin{aligned} \frac{di'}{dt} &= -\frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} \sin i' \sin 2\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= n \left(1 + \frac{3}{4} \frac{n}{n'} - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \cos 2\varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad (145.9)$$

Eliminando dt entre estas dos ecuaciones resulta

$$\frac{di'}{\sin i'} = \frac{-\frac{3}{4} \frac{n}{n'} \sin 2\varphi d\varphi}{1 + \frac{3}{4} \frac{n}{n'} - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \cos 2\varphi}$$

ecuación diferencial a variables separables que podemos resolver haciendo

$$\begin{aligned} \tan \frac{i'}{2} &= u & \frac{1}{2 \cos^2 \frac{i'}{2}} di' &= du \\ \frac{di'}{\sin i'} &= \frac{2 \cos^2 \frac{i'}{2} du}{2 \sin \frac{i'}{2} \cos \frac{i'}{2}} = \frac{du}{u} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{du}{u} = \frac{-\frac{3}{4} \frac{n}{n'} \sin 2\varphi d\varphi}{1 + \frac{3}{4} \frac{n}{n'} - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \cos 2\varphi}$$

ecuación del mismo tipo que la (125.9) cuya integral es, una vez restablecido el valor de la variable,

$$i' = i'_0 + \sin i'_0 \left[\frac{3}{8} \frac{n}{n'} - \frac{9}{32} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \dots \right] \cos 2\psi$$

Vemos pues que la inclinación está afectada de una desigualdad del mismo periodo que el nodo, 173.31 días, y su semiamplitud es $\beta \sin i'_0 = 8'.2$.

9.3.7 Desigualdades de la latitud celeste de la Luna

Calcularemos la latitud celeste de la Luna mediante la ecuación

$$\sin B = \sin i' \sin (\Lambda - \Omega') \quad (146.9)$$

la cual contiene las desigualdades correspondientes a la longitud de la Luna y las desigualdades correspondientes al nodo y la inclinación.

Despreciemos las desigualdades de la inclinación y del nodo y pongamos

$$\Lambda - \Omega'_m = \eta + \Sigma p \quad (147.9)$$

donde η crece uniformemente con el tiempo y Σp representa las desigualdades periódicas de la longitud de la Luna y se escribe

$$\Sigma p = \Sigma k \sin \lambda \quad (148.9)$$

siendo λ una función lineal del tiempo y k una constante.

De (147.9) deducimos

$$\sin (\Lambda - \Omega'_m) = \sin \eta + \Sigma p \cos \eta$$

y substituyendo en (146.9), teniendo en cuenta (148.9) y operando, obtenemos:

$$\sin B = \sin i'_0 \sin \eta + \Sigma \frac{k}{2} \sin i'_0 [\sin (\lambda + \eta) + \sin (\lambda - \eta)] \quad (149.9)$$

forma general del desarrollo del seno de la latitud supuesto fijo el plano de la órbita.

Las desigualdades de la latitud que se obtienen como consecuencia de las del nodo y de la inclinación son pequeñas a excepción de la que recibe el nombre de *gran desigualdad*

de la latitud. Si el plano de la órbita no sufre otra perturbación que la retrogradación del nodo, salvo desigualdades periódicas, la latitud toma el valor

$$\text{sen } B_0 = \text{sen } i'_0 \text{sen}(\Lambda - \Omega'_m) \quad (150.9)$$

Desarrollando en serie (146.9) y (150.9), tomando solamente los términos de primer orden en i'_0 y restando obtenemos:

$$B - B_0 = (i' - i'_0) \text{sen}(\Lambda - \Omega'_m) - (\Omega' - \Omega'_m) \text{sen } i'_0 \cos(\Lambda - \Omega'_m)$$

y sustituyendo las desigualdades por sus expresiones

$$\begin{aligned} \Omega' - \Omega'_m &= \frac{3}{8} \frac{n}{n'} \left[\left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \text{sen } 2(\zeta - \Omega'_m) - \frac{n}{n'} \text{sen } 2(\Lambda - \zeta) + \frac{n}{n'} \text{sen } 2(\Lambda - \Omega'_m) \right] \\ i' - i'_0 &= \frac{3}{8} \frac{n}{n'} \text{sen } i'_0 \left[\left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \cos 2(\zeta - \Omega'_m) - \frac{n}{n'} \cos 2(\Lambda - \zeta) + \frac{n}{n'} \cos 2(\Lambda - \Omega'_m) \right] \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} B - B_0 &= \frac{3}{8} \frac{n}{n'} \text{sen } i'_0 \left[\left(1 - \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \text{sen}(\Lambda - \Omega'_m - 2\zeta + 2\Omega'_m) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{n'} \text{sen}(2\Lambda - 2\zeta - \Lambda + \Omega'_m) - \frac{n}{n'} \text{sen}(\Lambda - \Omega'_m) \right] \end{aligned} \quad (151.9)$$

El tercer término de esta expresión (151.9) contiene únicamente el argumento de latitud de la Luna $\Lambda - \Omega'_m$ y puede englobarse en la inclinación siendo este valor corregido de i'_0 el que se determina por observación. Los otros dos términos de (151.9) son términos semejantes y por tanto se pueden sumar. La parte secular de su argumento es

$$\Lambda + \Omega'_m - 2\zeta = 2\sigma - \eta$$

Luego, el desarrollo de B es:

$$B = B_0 + \frac{3}{8} \frac{n}{n'} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{n}{n'} \right) \text{sen } i'_0 \text{sen}(2\sigma - \eta) \quad (152.9)$$

Vemos pues que aparece una desigualdad de la latitud celeste cuya amplitud es de $17' 38''$.

Si se tiene en cuenta que Λ está afectada por la variación puede escribirse

$$\Lambda - \Omega'_m = \eta + \frac{11}{8} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \text{sen } 2\sigma$$

valor que afecta al desarrollo de la latitud (152.9), obteniéndose la *gran desigualdad de la latitud* en la forma:

$$\sin i'_0 \left[\frac{3}{8} \frac{n}{n'} + \frac{25}{32} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \dots \right] \sin(2\sigma - \eta)$$

El tiempo interviene en su argumento con el coeficiente

$$n' - 2n + \nu = 11^\circ 9' 7.''733$$

que corresponde a un periodo de 32.28 días. La amplitud de la gran desigualdad es de $21' 10''$.

Capítulo 10

ECLIPSES, OCULTACIONES Y PASOS

El término *eclipse* significa un oscurecimiento de la luz de un cuerpo celeste por otro. Un eclipse del Sol por la Luna recibe el nombre de *eclipse de Sol*. Un eclipse del Sol por un planeta inferior se llama *paso* del planeta por delante del Sol. Un *eclipse de Luna* es un eclipse de la Luna por la Tierra. Una *ocultación* de una estrella o de un planeta es un eclipse de la estrella o del planeta por la Luna. La ocultación de una estrella puede ser también producida por un planeta.

Tanto en el caso de un eclipse de Sol como de Luna el centro de la Luna se halla cerca de la recta que une los centros del Sol y de la Tierra. Por consiguiente, la Luna está en sicigias (oposición o conjunción); los eclipses de Luna se producen en Luna llena, los de Sol en Luna nueva. Pero, es evidente que no hay eclipse en cada sicigia sino únicamente cuando ésta tiene lugar cerca del nodo de la órbita lunar.

La periodicidad de los eclipses vendrá dada por el mínimo común múltiplo de la periodicidad del mes sinódico ($S=29^{\text{d}}.530589$), del intervalo entre dos pasos de la Luna por el nodo de su órbita (revolución draconítica, $D = 27^{\text{d}}.212220$) y del intervalo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por dicho nodo (año eclipse, $A = 346^{\text{d}}.62$). Observemos que 223 revoluciones sinódicas se componen sensiblemente del mismo número de días que 242 revoluciones draconíticas

$$223 S = 6585,32 \text{ días}$$

$$242 D = 6585,36 \text{ días}$$

$$\text{Dif.} = 0,04 \text{ días} = 0^{\text{h}} 51^{\text{m}} 12^{\text{s}}$$

y que con 19 años eclipse obtenemos:

$$19 A = 6585,78 \text{ días}$$

Luego, obtenemos la relación aproximada:

$$223 S = 242 D = 19 A = 18 \text{ años } 11 \text{ días}$$

Este periodo de 18 años 11 días es el llamado *Saros* y en él se reproducen los eclipses casi en idénticas condiciones. Teniendo en cuenta que su duración en días comprende una parte fraccionaria próxima a un tercio de día, las regiones de la Tierra desde las cuales se observa la repetición de un eclipse se hallan en media a 120° al oeste de aquéllas en que se había observado el precedente.

10.1 Eclipses de Sol. Predicción para la Tierra en general

Sean (Fig. 1.10) N el nodo de la órbita lunar, I la inclinación de dicha órbita, S y L la posición geocéntrica del Sol y la Luna en el instante de la conjunción en longitud; S' y L' el Sol y la Luna en el instante en que es mínima la distancia angular $\sum$ entre

ambos; β y β' las latitudes de la Luna en dichos instantes; λ el cociente entre los movimientos en longitud de la Luna y del Sol.

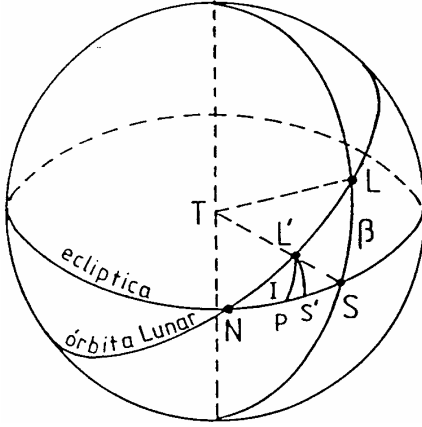


FIG. 1.10

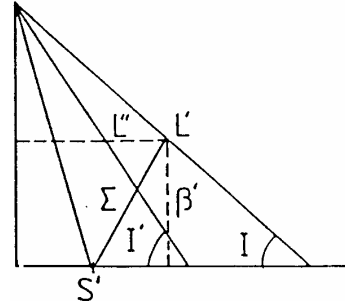


FIG. 2.10

Considerando el triángulo NLS plano (Fig. 2.10), podemos escribir:

$$SS' = \beta \tan \gamma$$

$$SP = \lambda \beta \tan \gamma$$

con

$$\lambda = \frac{SP}{SS'} = \frac{\text{movimiento de la Luna en longitud}}{\text{movimiento del Sol en longitud}}$$

de donde:

$$S'P = SP - SS' = (\lambda - 1) \beta \tan \gamma$$

por otra parte:

$$L'P = \beta' = \beta - LM = \beta - SP \tan I = \beta - \lambda \beta \tan \gamma \tan I$$

y por tanto:

$$\Sigma^2 = L'P^2 + S'P^2 = \beta^2 \left[(\lambda - 1)^2 \tan^2 \gamma + (1 - \lambda \tan I \tan \gamma)^2 \right] \quad (1.10)$$

Teniendo en cuenta que $\Sigma = \Sigma(\gamma)$ (γ varía de una configuración a otra) y haciendo $d\Sigma/d\gamma = 0$, se obtiene para el mínimo de Σ

$$\tan \gamma = \frac{\lambda \tan I}{(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 \tan^2 I} \quad (2.10)$$

que podemos expresar en función del movimiento relativo de la Luna respecto al Sol. Para ello llamaremos I' a la inclinación de la órbita de la Luna respecto a la eclíptica fijando el Sol en el momento de la conjunción (S). En el triángulo $L S N$ de la Fig.2.10 tenemos:

$$\beta = NS \tan I$$

y en el triángulo $L S N'$:

$$\beta = N'S \tan I'$$

de donde:

$$\tan I' = \frac{NS}{N'S} \tan I$$

pero

$$\frac{NS}{N'S} = \frac{L'M}{L''M} = \frac{PS}{PS'} = \frac{\lambda \beta \tan \gamma}{(\lambda - 1) \beta \tan \gamma} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

y por tanto

$$\tan I' = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \tan I \quad (3.10)$$

Sustituyendo (2.10), teniendo en cuenta (3.10) en (1.10) queda

$$\Sigma^2 = \beta^2 \frac{1}{1 + \tan^2 I'}$$

es decir

$$\Sigma = \beta \cos I' \quad (4.10)$$

Designemos por π y π' las paralajes horizontales de la Luna y del Sol y por s y s' los semidiámetros aparentes de la Luna y del Sol (Fig. 3.10).

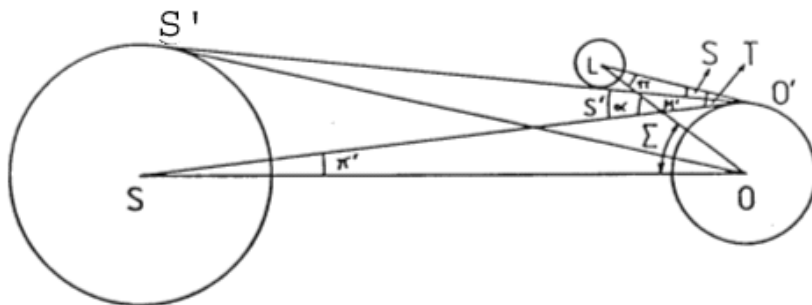


FIG. 3.10

Entonces

$$T = \Sigma - (\pi - \pi')$$

será la distancia aparente entre los centros del Sol y de la Luna para un observador O' situado en la superficie de la Tierra. Para dicho observador un eclipse de Sol será *posible* si

$$\Sigma - (\pi - \pi') < s + s'$$

o según (4.10) si

$$\beta \cos I' < \pi - \pi' + s + s' \quad (5.10)$$

Si en (5.10) sustituimos los valores mínimos de π , s y s' y el máximo de π' (ver TABLA VIII), veremos que el eclipse de Sol será *seguro* para $\beta < 1^\circ 24' 36''$

Sustituyendo, en cambio, los valores máximos de π , s , s' y el mínimo de π' , veremos que el eclipse de Sol será *imposible* para $\beta > 1^\circ 34' 46''$, siendo *dudoso* entre dichos límites (para el cálculo se ha tomado el valor medio de $\cos I' = \frac{1}{1.00472}$).

TABLA I - CARACTERÍSTICAS DEL ECLIPSE DE SOL

	Máximos	Mínimos	Medios
	° ' "	° ' "	° ' "
I	-	4 59	5 8
π	61 27	53 53	57 3
π'	9	8	8.5
s	16 46	14 41	15 35
s'	16 18	15 45	16 1
λ	16.2	10.9	13.5

10.1.1 Ecuaciones fundamentales de la teoría de eclipses

Durante un eclipse de Sol la Luna proyectará dos conos de sombra (Fig. 4.10). Uno tangente exterior a las superficies de la Luna y del Sol y otro tangente interior. El primero recibe el nombre de *cono de sombra* y el segundo de *cono de penumbra*.

El eje de dichos conos (que une los centros de la Luna y el Sol) es el llamado *eje de sombra*.

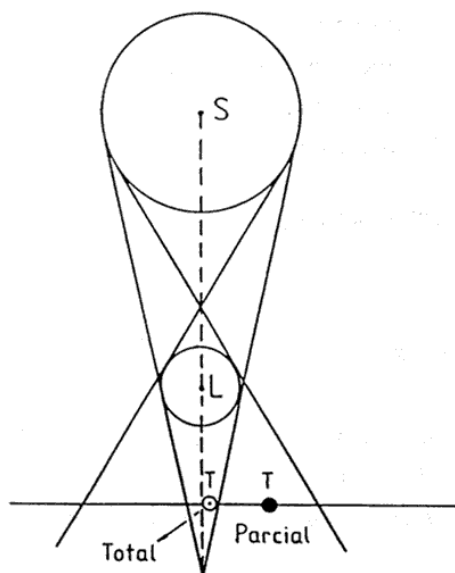


FIG 4.10

Evidentemente en un lugar de la Tierra habrá eclipse (total o parcial) si la distancia de dicho lugar al eje del cono de sombra es menor que el radio de sombra (umbral o penumbral) correspondiente a dicho lugar.

Estudiaremos las circunstancias de un eclipse de Sol para un lugar determinado. Para ello definamos un sistema de coordenadas cartesianas *fundamental o de Bessel* con origen en el centro de la Tierra T (Fig. 5.10), con el eje z paralelo por T al eje de sombra (positivo hacia el Sol), plano fundamental perpendicular al eje z , con el eje x intersección de dicho plano con el ecuador (positivo hacia el este) y el eje y perpendicular a x en sentido directo (positivo hacia el norte).

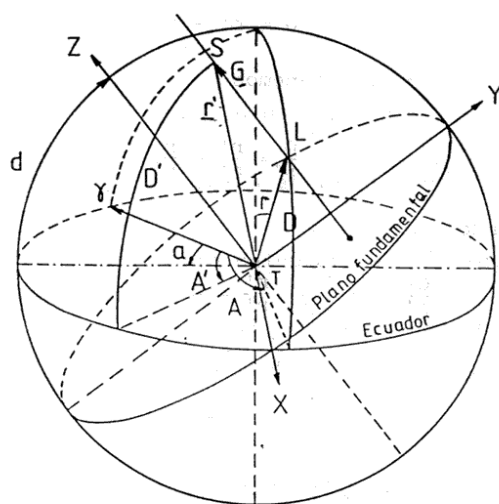


FIG. 5.10

Sean $\vec{r}(r, A, D)$ el vector de posición geocéntrico de la Luna en una base ecuatorial, $\vec{r}'(r', A', D')$ el vector de posición del Sol en la misma base y $\vec{G}(G, a, d)$ el vector de posición del punto Z que define la posición del eje del cono de sombra. Las efemérides astronómicas nos proporcionan A, D y π de la Luna ($r = \frac{\sin \Pi_0}{\sin \pi}$ en unidades astronómicas, siendo Π_0 la paralaje horizontal del Sol a la distancia media) y A', D' y π' del Sol ($r' = \frac{1}{\sin \pi'}$).

De la Fig. 5.10 se deduce

$$\vec{G} = \vec{r}' - \vec{r}$$

dividiendo por r' tenemos

$$\frac{\vec{G}}{r'} = \frac{\vec{r}'}{r'} - \frac{\vec{r}}{r'}$$

y llamando

$$\frac{\vec{G}}{r'} = \vec{g} \quad \frac{\vec{r}'}{r'} = \vec{u} \quad \frac{\vec{r}}{r'} = \vec{b}$$

nos queda

$$\vec{g} = \vec{u} - \vec{b} \quad (6.10)$$

Si escribimos la relación (6.10) tomando sus componentes ecuatoriales tendremos:

$$\left. \begin{aligned} g \cos d \cos a &= \cos D' \cos A' - b \cos D \cos A \\ g \cos d \sin a &= \cos D' \sin A' - b \cos D \sin A \\ g \sin d &= \sin D' - b \sin D \end{aligned} \right\}$$

Tomando como origen de ascensiones rectas el meridiano celeste que pasa por el Sol, lo qual equivale a efectuar una rotación de ángulo A' alrededor del eje del mundo

$$R_3(A') = \begin{bmatrix} \cos A' & \sin A' & 0 \\ -\sin A' & \cos A' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$\left. \begin{aligned} g \cos d \cos(a - A') &= \cos D' - b \cos D \cos(A - A') \\ g \cos d \sin(a - A') &= -b \cos D \sin(A - A') \\ g \sin d &= \sin D' - b \sin D \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

fórmulas que permiten calcular la dirección (a, d) del eje de sombra y g .

Por otra parte para calcular b tenemos

$$b = \frac{r}{r'} = \frac{\sin \Pi_0}{r' \sin \pi} = \frac{\sin \Pi_0 \sin \pi'}{\sin \pi}$$

Teniendo en cuenta los valores

$$b \simeq \frac{1}{400} \quad A - A' < 1^\circ 43' \quad a - A' < 17''$$

las relaciones (7.10) pueden transformarse en otras aproximadas muy precisas. En efecto, puesto que $\cos D \sec D' \cos (A - A') \simeq 1$ dividiendo la segunda por la primera obtendremos

$$a - A' \simeq \frac{-b(A - A')}{1 - b} \cos D \sec D'$$

o también si suponemos $\cos D \simeq \cos D'$

$$a = A' - \frac{b(A - A')}{1 - b} \quad (8.10)$$

La declinación d la podemos hallar aplicando una rotación $R_2(-D')$ a la identidad (6.10) con lo que queda:

$$\left. \begin{aligned} g \cos(d - D') &= 1 - b \cos(D - D') \\ g \sin(d - D') &= -b \sin(D - D') \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

y dividiendo la segunda por la primera haciendo antes $\cos(D - D') = 1$

$$\tan(d - D') \simeq d - D' = -\frac{b}{1 - b}(D - D')$$

o también

$$d = D' - \frac{b}{1 - b}(D - D') \quad (10.10)$$

Luego, con mucha aproximación $Z(a, d)$ y G vendrán definidos por las relaciones

$$\left. \begin{aligned} a &= A' - \frac{b(A - A')}{1 - b} \\ d &= D' - \frac{b(D - D')}{1 - b} \\ g &= 1 - b \quad G = r'g \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

10.1.2 Distancia al eje del cono de sombra

Consideremos en la base de Bessel los vectores unitarios $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ (según x, y, z) y

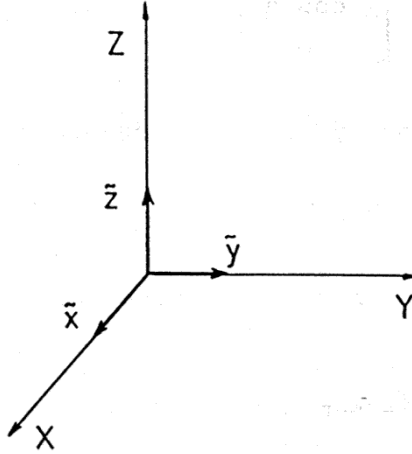


FIG. 6.10

hallemos sus componentes en una base ecuatorial. Evidentemente para el vector $\tilde{z}$ es

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \cos d \cos a \\ \cos d \sin a \\ \sin d \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

Para hallar las componentes de $\tilde{x}$ supongamos un vector $\tilde{e}_3$ unitario en la dirección del eje del mundo. $\tilde{x}$ es ortogonal a $\tilde{e}_3$ y a $\tilde{z}$, es decir, tiene la dirección del producto vectorial $\tilde{e}_3 \wedge \tilde{z}$:

$$\tilde{x} = \lambda \tilde{e}_3 \wedge \tilde{z} \quad (13.10)$$

siendo λ el factor de normalización. De (13.10), tendremos, teniendo en cuenta (12.10)

$$\tilde{x} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \cos d \cos a \\ \cos d \sin a \\ \sin d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -\cos d \sin a \\ \cos d \cos a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14.10)$$

El módulo del vector $\tilde{x}$ dado por (13.10) es:

$$|\tilde{x}| = |\lambda \tilde{e}_3 \wedge \tilde{z}| = \lambda \cos d = 1 \quad (15.10)$$

de donde

$$\lambda = \frac{1}{\cos d}$$

con lo cual

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} a \\ \cos a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.10)$$

Las componentes de $\tilde{y}$ las obtendremos de

$$\tilde{y} = \tilde{z} \wedge \tilde{x}$$

sustituyendo $\tilde{z}$ y $\tilde{x}$ por sus componentes (12.10) y (16.10):

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} d \cos a \\ -\operatorname{sen} d \operatorname{sen} a \\ \cos d \end{bmatrix} \quad (17.10)$$

Con ello tenemos $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ en función de a y d conocidos y cualquier vector puede ahora expresarse en esta base.

Sea $\vec{r}$ la posición geocéntrica de la Luna. En la base ecuatorial geocéntrica se tiene:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos D \cos A \\ r \cos D \operatorname{sen} A \\ r \operatorname{sen} D \end{bmatrix} \quad (18.10)$$

En la base de Bessel sera:

$$\left. \begin{aligned} x &= \vec{r} \cdot \tilde{x} \\ y &= \vec{r} \cdot \tilde{y} \\ z &= \vec{r} \cdot \tilde{z} \end{aligned} \right\} \quad (19.10)$$

o sea, teniendo presente (16.10), (17.10) y (12.10)

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos D \operatorname{sen}(A - a) \\ r(\operatorname{sen} D \cos d - \cos D \operatorname{sen} d \cos(A - a)) \\ r(\operatorname{sen} D \operatorname{sen} d + \cos D \cos d \cos(A - a)) \end{bmatrix} \quad (20.10)$$

Por otra parte, si designamos por ϕ' y $\vec{\rho}$ la latitud geocéntrica y el radio vector correspondiente al lugar de observación y por θ el tiempo sidéreo local en él, en la base ecuatorial sera:

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} \rho \cos \phi' \cos \theta \\ \rho \cos \phi' \operatorname{sen} \theta \\ \rho \operatorname{sen} \phi' \end{bmatrix} \quad (21.10)$$

y en la base de Bessel teniendo en cuenta que las coordenadas ξ, η, ζ del observador se obtendrán de

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \vec{\rho} \cdot \vec{\tilde{x}} \\ \eta &= \vec{\rho} \cdot \vec{\tilde{y}} \\ \zeta &= \vec{\rho} \cdot \vec{\tilde{z}} \end{aligned} \right\} \quad (22.10)$$

y acudiendo otra vez a (16.10), (17.10) y (12.10), será:

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \phi' \sin(\theta - a) \\ \rho (\sin \phi' \cos d - \cos \phi' \sin d \cos(\theta - a)) \\ \rho (\sin \phi' \sin d + \cos \phi' \cos d \cos(\theta - a)) \end{bmatrix} \quad (23.10)$$

Todo lo necesario para calcular estos vectores lo obtenemos de las “Efemérides Astronómicas”. Hay que tener en cuenta que a partir de 1985 los Anuarios publican sus efemérides astronómicas con argumento de tiempo dinámico. En las relaciones anteriores (23.10) podemos poner (Fig. 7.10)

$$\theta - a = \mu - \lambda_D = h \quad (24.10)$$

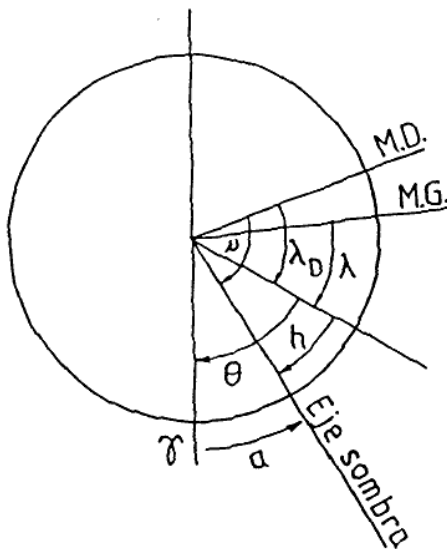


FIG.7.10

siendo μ el ángulo horario de la dirección del eje de sombra para el meridiano dinámico y λ_D la longitud dinámica del lugar relacionada con la longitud geográfica por la expresión

$$\lambda_D = \lambda + 1.00274 \Delta T$$

con ΔT diferencia entre el $T.D.$ y el $T.U.$ (ver FIG. 7.10 apartado 4.10)

Conocidas las coordenadas rectilíneas geocéntricas (20.10) de la Luna y las del lugar de observación (23.10) en la base de Bessel, la distancia θ de dicho lugar al eje del cono de sombra vendrá dada por la relación (Fig. 8.10)

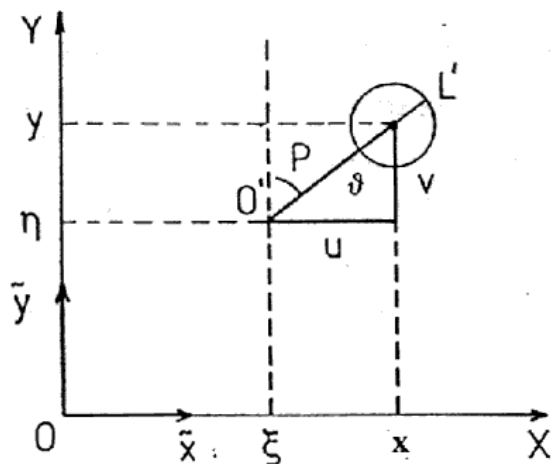


FIG. 8.1

$$\theta = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (25.10)$$

con

$$\left. \begin{aligned} u &= x - \xi \\ v &= y - \eta \end{aligned} \right\} \quad (26.10)$$

y el ángulo P (Figs. 8.10 y 9.10) se obtendrá de las relaciones

$$\left. \begin{aligned} u &= \theta \sin P \\ v &= \theta \cos P \end{aligned} \right\} \quad (27.10)$$

siendo

$$\tan P = \frac{u}{v}$$

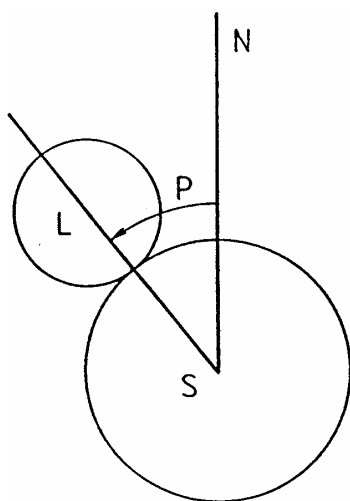


FIG. 9.10

Más adelante (10.1.5) veremos que el valor de P nos indicará en que punto del limbo solar tiene lugar el contacto (Fig. 9.10).

10.1.3 Radios de los conos de sombra y penumbra

Hallaremos ahora los radios de los conos de sombra y penumbra en el plano fundamental y en el paralelo a éste por el lugar de observación. Designaremos con el subíndice 1 los elementos referentes al cono de penumbra y con el subíndice 2 los referentes al cono de sombra (Fig. 10.10).

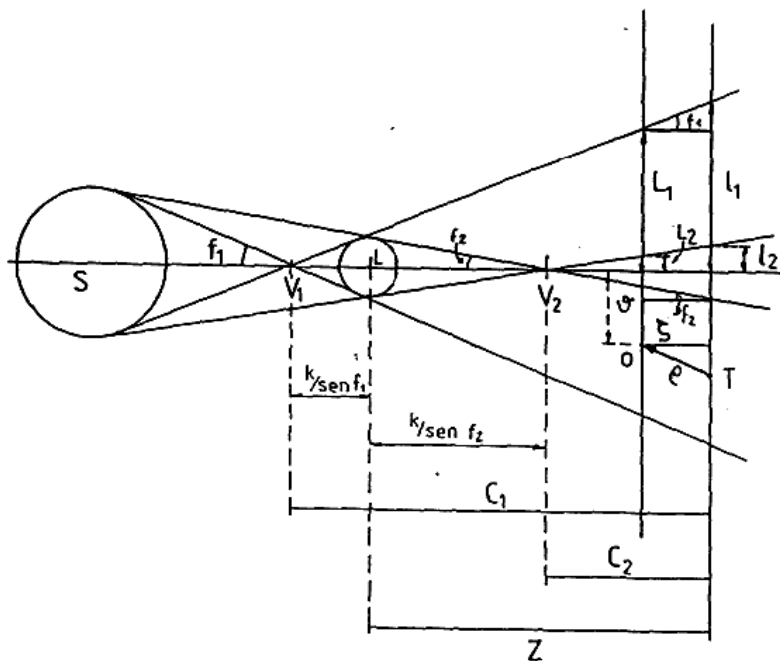


FIG. 10.10

Sean V_1 y V_2 los vértices del cono de penumbra y sombra respectivamente; f_1 y f_2 los ángulos de las generatrices de los conos, de penumbra y sombra, con el eje de sombra; C_1 y C_2 las distancias de los vértices de los conos, de penumbra y sombra, respectivamente, al plano fundamental; $\delta = \arcsin(k \sin \pi_0)$ es el semidiámetro aparente de la Luna donde π_0 es la paralaje horizontal de la Luna y k una constante cuyo valor adoptado por la Unión Astronómica Internacional desde 1986 es $k = 0.2725076$ correspondiente al radio medio de la Luna tomando el ecuatorial de la Tierra como unidad, y $H = 959''$,63 el semidiámetro aparente del Sol. De la Fig. 10.10 se deduce:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= z + \frac{k}{\sin f_1} \\ c_2 &= z - \frac{k}{\sin f_2} \end{aligned} \right\} c = z \pm \frac{k}{\sin f} \quad (28.10)$$

Los ángulos f_1 y f_2 se hallan en los anuarios.

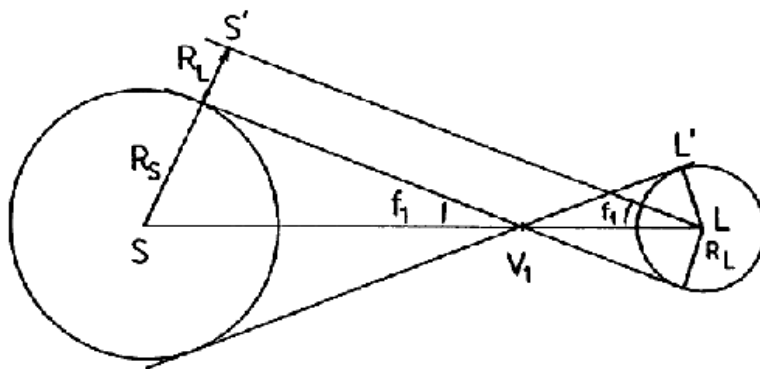


FIG. 11.10

De la Fig. 11.10 por semejanza de triángulos podemos obtener

$$\sin f_1 = \frac{R_S + R_L}{SL} = \frac{\sin H + k \sin \pi_0}{G}$$

y recordando que $G = g r'$:

$$\sin f_1 = \frac{\sin H + k \sin \pi_0}{g r'} \quad (29.10)$$

Análogamente, para f_2 :

$$\sin f_2 = \frac{\sin H - k \sin \pi_0}{g r'} \quad (30.10)$$

Las expresiones (29.10) y (30.10) suelen escribirse, agrupándolas, como:

$$\operatorname{sen} f = \frac{\operatorname{sen} H \pm k \operatorname{sen} \pi_0}{gr'} \quad (31.10)$$

En la misma figura 10.10 llamemos l al radio de los conos de sombra sobre el plano fundamental (l_1 radio del cono de penumbra, l_2 radio del cono de sombra) y L al radio de los conos sobre el plano paralelo al plano fundamental que pasa por el observador (L_1 del cono de penumbra y L_2 del de sombra). Se deduce:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= c_1 \tan f_1 = z \tan f_1 + k \sec f_1 \\ l_2 &= c_2 \tan f_2 = z \tan f_2 - k \sec f_2 \end{aligned} \right\} \quad (32.10)$$

o también, agrupando:

$$l = c \tan f = z \tan f \pm k \sec f \quad (33.10)$$

Por otra parte,

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= l_1 - \zeta \tan f_1 \\ L_2 &= l_2 - \zeta \tan f_2 \end{aligned} \right\} \quad (34.10)$$

o

$$L = l - \zeta \tan f \quad (35.10)$$

10.1.4 Circunstancias de un eclipse para un lugar determinado

Antes del cálculo de las circunstancias de un eclipse para un lugar determinado observemos que las variaciones horarias x' , y' y l' de las coordenadas x , y y l se obtienen a partir de las diferencias entre los valores que figuran en las tablas de elementos generales o besselianos que se publican en los anuarios. Para calcular las variaciones horarias de ξ y η tendremos que derivar sus expresiones dadas en (23.10), quedando al tener en cuenta (24.10):

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \rho \cos \phi' \mu' \cos h \\ \eta' &= -(\rho \operatorname{sen} \phi' \operatorname{sen} d + \rho \cos \phi' \cos d \cos h) d' + \rho \cos \phi' \operatorname{sen} d \mu' \operatorname{sen} h \end{aligned} \right\}$$

o también:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \rho \cos \phi' \mu' \cos h \\ \eta' &= -\zeta d' + \xi \mu' \operatorname{sen} d \end{aligned} \right\} \quad (36.10)$$

Para los valores μ' y d' se toman sus variaciones horarias.

a) *Principio y fin del eclipse*

Observando una vez más la Fig. 10.10 deducimos:

Si $\vartheta = L_1$ comienza o acaba un eclipse parcial

Si $\vartheta = L_2$ pueden suceder dos casos:

- a) $\zeta > c_2$ habrá eclipse total
 b) $\zeta < c_2$ habrá tangencia interior

Podemos por tanto escribir que la condición general de principio y fin del eclipse será:

$$g = L \quad (37.10)$$

De las ecuaciones (25.10) y (26.10) deducimos, por tanto:

$$L^2 = g^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \quad (38.10)$$

$$\left. \begin{aligned} L \sin P &= x - \xi = u \\ L \cos P &= y - \eta = v \end{aligned} \right\} \quad (39.10)$$

En el entorno del tiempo en que esto se verifica, tomemos un tiempo T_0 y sean x , y , ξ , η , las coordenadas de la Luna y del observador para esta época T_0 . Calculemos las variaciones horarias de u y v :

$$\left. \begin{aligned} u' &= x' - \xi' \\ v' &= y' - \eta' \end{aligned} \right\} \quad (40.10)$$

Llamando T al instante del contacto y despreciando la variación de L durante el pequeño intervalo $\tau = T - T_0$, la ecuación (39.10) queda

$$\left. \begin{aligned} L \sin P &= u + u' \tau \\ L \cos P &= v + v' \tau \end{aligned} \right\} \quad (41.10)$$

Consideremos en la base x , y con origen en el punto en que se proyecta el observador los siguientes vectores (Fig. 12.10)

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} L \sin P \\ L \cos P \end{bmatrix} \quad \vec{m} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

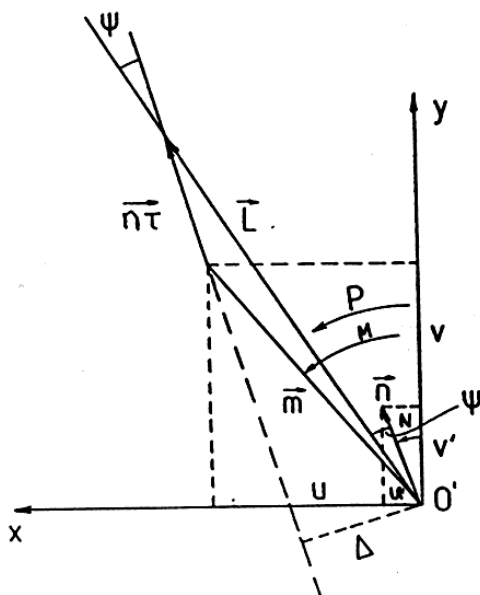


FIG. 12.10

De la figura 12.10 se deduce:

$$\left. \begin{aligned} u &= m \operatorname{sen} M \\ v &= m \cos M \end{aligned} \right\} \quad (42.10)$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= n \operatorname{sen} N \\ v' &= n \cos N \end{aligned} \right\}$$

y también

$$\psi = P - N \quad (43.10)$$

siendo ψ el ángulo que forman $\vec{L}$ y $\vec{n}$.

De acuerdo con las relaciones que acabamos de exponer, las ecuaciones (41.10) se pueden escribir en forma vectorial

$$\vec{L} = \vec{m} + \vec{n}\tau \quad (44.10)$$

Multiplicando (44.10) vectorialmente por $\vec{n}$, obtendremos:

$$\vec{L} \wedge \vec{n} = \vec{m} \wedge \vec{n} + \vec{0}$$

Tomando módulos:

$$Ln \operatorname{sen} \psi = uv' - u'v \quad (45.10)$$

y dividiendo por n :

$$L \sin \psi = \frac{1}{n} (uv' - u'v) = \Delta \quad (46.10)$$

siendo Δ la distancia mínima del origen al vector $\vec{n}\tau$.

De (46.10) se deduce que

$$\sin \psi = \frac{\Delta}{L} \quad (47.10)$$

Si multiplicamos escalarmente (44.10) por $\vec{n}$, obtendremos:

$$\vec{L} \cdot \vec{n} = Ln \cos \psi = \vec{m} \cdot \vec{n} + n^2 \tau$$

de donde:

$$Ln \cos \psi = uu' + vv' + n^2 \tau$$

Si

$$uu' + vv' = D$$

queda

$$Ln \cos \psi = D + n^2 \tau$$

y despejando τ :

$$\tau = \frac{L}{n} \cos \psi - \frac{D}{n^2} \quad (48.10)$$

El ángulo ψ dado por (47.10) no queda determinado, obteniéndose por tanto dos valores de ψ que sustituidos en (48.10) nos darán los valores de τ correspondientes al *principio* (τ_p) y *fin* (τ_f) del eclipse. Se toma

$$\cos \psi < 0 \text{ para el principio } T_p = T_0 + \tau_p$$

$$\cos \psi > 0 \text{ para el final } T_f = T_0 + \tau_f$$

Puesto que L no se conoce, para calcular (47.10) y (48.10) partiremos de un valor aproximado que nos proporcionará unas épocas aproximadas. Obtenidas éstas, corrientemente debe aplicarse de nuevo el método (una o más veces) tomando dichas épocas como de partida en cada caso y efectuando los cálculos por separado.

b) *Máxima fase del eclipse*: Podemos calcular también el instante de la *máxima fase* del eclipse, la cual tendrá lugar cuando la distancia aparente Luna-Sol sea mínima, condición que es equivalente a decir que $L - \mathcal{G}$ es máxima y despreciando la variación de L es lo mismo que decir que $\mathcal{G}$ es mínima.

De (44.10) suponiendo que partimos del valor $\mathcal{G} = L$, tenemos:

$$\vec{\mathcal{G}} = \vec{m} + \vec{n}\tau \quad (49.10)$$

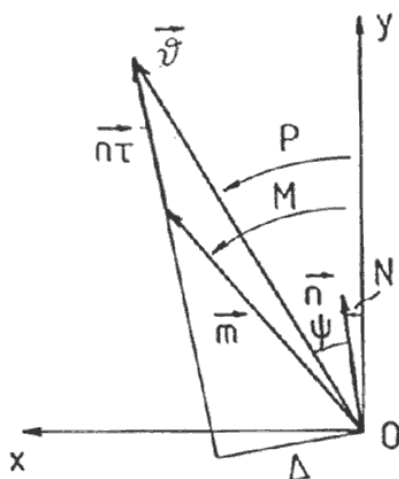


FIG. 13.10

y observando la figura 13.10 vemos que $\bar{g}$ será mínimo cuando alcance el valor Δ , con lo cual $\bar{g}$ y $\bar{n}$ serán perpendiculares, es decir:

$$\bar{g} \cdot \bar{n} = 0$$

o también.

$$\bar{g} \cdot \bar{n} = \bar{m} \cdot \bar{n} + n^2 \tau = 0$$

de donde:

$$\tau = -\frac{m \cdot n}{n^2} = -\frac{uu' + vv'}{n^2} = -\frac{D}{n^2} \quad (50.10)$$

Dicho valor (50.10) de τ nos dará, sumado a T_0 , la época de la *máxima fase del eclipse*.

c) *Ángulo de posición de los puntos de contacto:*

El *ángulo de posición* del punto en que la Luna encuentra el borde del Sol al comienzo del eclipse será (Fig. 12.10):

$$P = N + \psi \quad (51.10)$$

siendo

$$\cot N = \frac{v'}{u'}$$

El ángulo de posición P lo tomaremos a partir del punto boreal B del Sol (punto más cercano al polo norte) hacia el este. Llamaremos vértice V del limbo al punto más alto del disco. Al ángulo de posición del punto de contacto respecto del

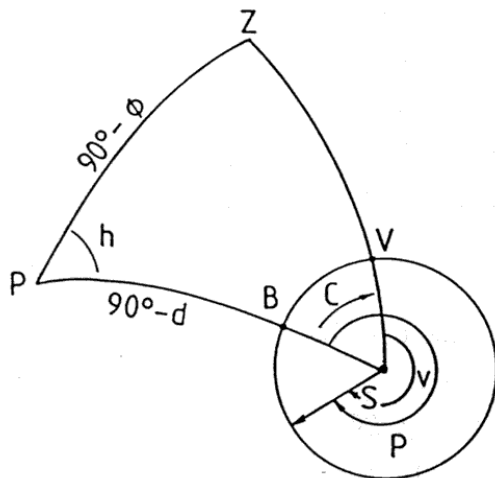


FIG. 14.10

vértice del limbo le designaremos por V (Fig. 14.10). Si C es el *ángulo paraláctico* en el Sol, podremos escribir

$$V = P - C \quad (52.10)$$

Aplicando la segunda y tercera fórmulas de Bessel al triángulo PSZ , tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } z \text{ sen } C &= \cos \phi \text{ sen } h \\ \text{sen } z \cos C &= \text{sen } \phi \cos d - \cos \phi \text{ sen } d \cos h \end{aligned} \right\} \quad (53.10)$$

Suponiendo en las fórmulas (23.10) $\rho = 1$, $\phi' = \phi$, las coordenadas del observador nos quedarán

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \cos \phi \text{ sen } h \\ \eta &= \text{sen } \phi \cos d - \cos \phi \text{ sen } d \cos h \\ \zeta &= \text{sen } \psi \text{ sen } d + \cos \phi \cos d \cos h \end{aligned} \right\} \quad (54.10)$$

que sustituidas en (53.10) nos darán:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } z \text{ sen } C &= \xi \\ \text{sen } z \cos C &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (55.10)$$

de donde

$$\tan C = \frac{\xi}{\eta} \quad (56.10)$$

con C tal que $\text{sen } C$ tenga el mismo signo que ξ .

El ángulo paraláctico así deducido para el principio y el fin del eclipse, combinado con el correspondiente valor de P , nos suministra mediante (52.10) los respectivos ángulos de posición V de los contactos.

d) *Grado de oscurecimiento*: Llamaremos *grado de oscurecimiento* G en una época

T a la fracción de diámetro aparente del Sol que está cubierta por el disco lunar. Con mucha aproximación se tendrá (Fig.15.10)

$$G = \frac{r'}{r} = \frac{L_1 - \vartheta}{L_1 + L_2} \quad (57.10)$$

siendo L_1 y L_2 los radios de la penumbra y de la sombra respectivamente y ϑ la distancia del observador al eje de sombra (recordemos que L_2 es negativo).

e) *Magnitud del eclipse*: En particular, llamaremos *magnitud del eclipse al grado de oscurecimiento máximo*, el cual tendrá lugar, evidentemente, en el instante de la máxima fase (ϑ mínima):

$$M_1 = G_{\max.} = \frac{L_1 - \Delta}{L_1 + L_2} \quad (58.10)$$

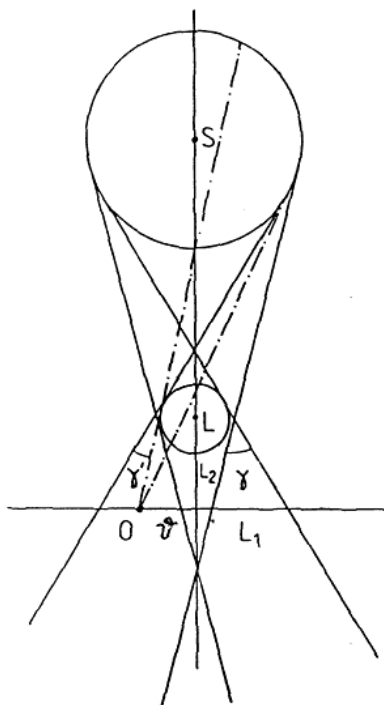


FIG. 15.10

Recordando las fórmulas (34.10) y (32.10) y teniendo en cuenta que $f_1 \approx f_2$, podemos escribir:

$$L_1 + L_2 \approx l_1 + l_2 \approx 2z \tan f \approx 2(l_1 - k) \approx 2(L_1 - k)$$

y

$$M_1 \approx \frac{L_1 - \Delta}{2L_1 - 0.5450} \quad (59.10)$$

fórmula aproximada que sólo se aplica para los eclipses parciales.

10.1.5 Mapa del eclipse

En los Anuarios, junto a los elementos referentes a los eclipses de Sol que ocurren en el año, se incluyen mapas de los que pueden deducirse valores aproximados de las circunstancias para un lugar determinado. Veamos de una forma elemental cómo se construyen tales mapas.

Representemos la sombra proyectada sobre el plano fundamental, suponiendo la Tierra esférica y despreciando la refracción (Fig. 16.10). Sean H la intersección de la Tierra con el plano fundamental; C la intersección del cono de penumbra con dicho plano. Supongamos que reemplazamos el cono de penumbra por un cilindro de revolución que tiene el mismo círculo de base C en el plano fundamental. La proyección ortogonal sobre el plano fundamental de la curva intersección del cilindro de base C con la superficie de la Tierra es la circunferencia C (Fig. 16.10, a) cuya proyección cartográfica es una curva C_1 (Fig. 16.10, b). Distinguiremos dos casos según que C y H sean secantes o C sea interior a H (C' en la Fig.a).

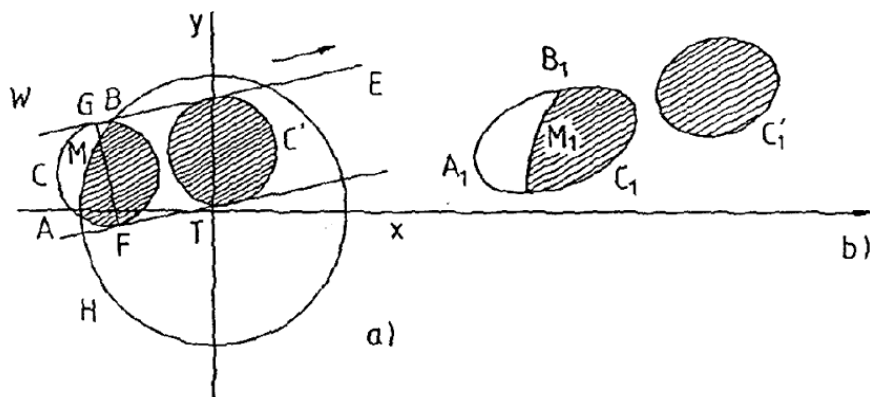


FIG 16.10

Si C y H son secantes, en un instante dado, la región desde la cual el eclipse es visible como eclipse parcial está limitada por una parte de la transformada C_1 de C y la transformada A_1B_1 del arco AB de H .

Si C es interior a H la región desde la cual el eclipse es visible está limitada por la curva C'_1 .

El conjunto de puntos de la Tierra desde los que se puede observar el eclipse parcial se obtiene determinando la envolvente de las curvas C_1 . Para la determinación de esta envolvente se ha de tener en cuenta el desplazamiento de la sombra en el plano fundamental (de oeste a este) y la rotación de la Tierra. La transformada de C es móvil y permanece constantemente tangente a dos paralelos terrestres.

El eclipse general comienza y termina en los instantes en que los círculos C y H son tangentes exteriores (recordar 37.10).

Supongamos C y H secantes y que los puntos de intersección A y B corresponden a la salida del Sol. Para un observador situado en A el eclipse termina en este instante; en efecto, la sombra deja este punto para dirigirse al este. En cambio, para un observador situado en B el eclipse empieza al orto ya que la sombra comienza a cubrirle.

Admitamos que el radio de C sea invariable y que su círculo se desplaza en el plano fundamental con movimiento rectilíneo y uniforme. En estas condiciones, C permanece tangente a dos rectas paralelas pasando por F y G . Un observador que estuviera quieto con relación a los ejes de coordenadas observaría el medio del eclipse y el máximo de su magnitud cuando el diámetro FG pasase por el lugar que ocupa dicho observador. Así pues, un observador situado en M vería el medio del eclipse al salir el Sol.

Teniendo en cuenta el desplazamiento de la sombra en el plano fundamental y la rotación de la Tierra se pueden determinar sobre el mapa los lugares de los puntos A , B y M . Son las curvas siguientes (Fig. 17.10):

- 1.- Principio del eclipse al orto
- 2.- Máximo del eclipse al orto
- 3.- Fin del eclipse al orto
- 4.- Fin del eclipse al ocaso
- 5.- Máximo del eclipse al ocaso
- 6.- Principio del eclipse al ocaso

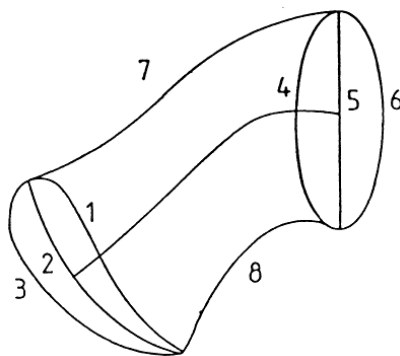


FIG. 17.10

Para acabar con la determinación del dominio de visibilidad, hemos de trazar sus límites boreal y austral. Cuando en la mitad del eclipse general el círculo C es interior al H (Fig. 16.10), la envolvente de las curvas C_1 se compone de dos curvas (7 y 8 de la Fig. 17.10) que difieren poco del lugar de los puntos F y G respectivamente. Si los círculos C y H son siempre secantes hay una sola de estas curvas (7 u 8) y los arcos 1, 3, 4 y 6 forman una sola curva con un punto doble, la cual con el límite boreal o austral

delimita el dominio de visibilidad (Fig. 18.10). Hace falta añadir entonces el arco 9 de paralelo terrestre al cual la proyección cartográfica de H permanece tangente. Según que el polo P pertenezca o no al dominio de visibilidad el arco 9 se dispondrá según indica la Fig. 18.10. Entre este arco y los 3 y 6 hay una pequeña región en la cual el Sol se pone y sale eclipsado, es decir que el medio del eclipse tiene lugar por la noche.

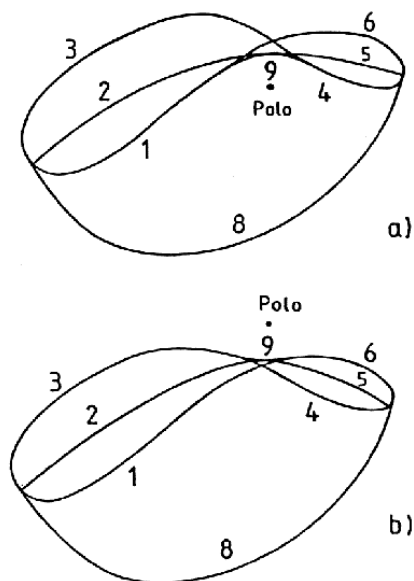


Fig. 18.10

10.2 Eclipses de Luna

El cálculo de un *eclipse de Luna* es análogo al de un eclipse de Sol, si bien el problema se simplifica por el hecho de que las circunstancias y los tiempos son los mismos para todos los lugares de la Tierra en los cuales la Luna es visible.

Cabe distinguir tres tipos de eclipses lunares:

Eclipse penumbral: tiene lugar cuando la Luna entra sólo en la penumbra de la Tierra (1 en Fig. 19.10).

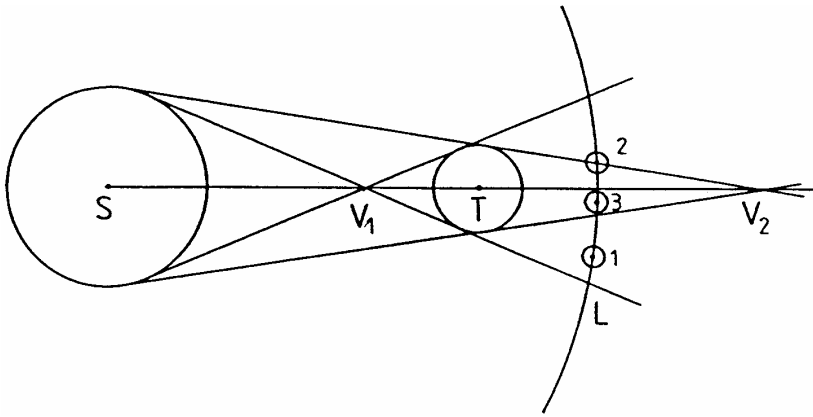


FIG. 19.10

Eclipse parcial: tiene lugar cuando la Luna está parcialmente incluida en el cono de sombra (2 en Fig. 19.10).

Eclipse total: tiene lugar cuando la Luna entra totalmente en el cono de sombra (3 en Fig. 19.10).

10.2.1 Posibilidad de los eclipses de Luna

Para estudiar la posibilidad de un eclipse de Luna supondremos la Tierra esférica de radio el correspondiente a un lugar de latitud $\phi = 45^\circ$. El valor de la paralaje de la Luna será con estas hipótesis

$$\pi_1 = 0.998340 \pi \quad (60.10)$$

deducido de las expresiones (recordar 2.1.1):

$$\rho^2 = C^2 \cos^2 \phi + S^2 \sin^2 \phi$$

$$C^2 = \frac{1}{1 - (2f - f^2) \sin^2 \phi}$$

$$S = (1 - f)^2 C$$

tomando en ellas $f = \frac{1}{298,25}$ y $\phi = 45^\circ$.

Supongamos la Luna a una distancia r . Tracemos una esfera de centro en la Tierra y radio r (Fig. 20.10). De la Fig. 20.10 se deduce

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \pi_1 + f_1 \\ \gamma_2 &= \pi_1 - f_2 \end{aligned} \right\} \gamma = \pi_1 \pm f \quad (61.10)$$

Para calcular los valores de los ángulos f_1 y f_2 hacemos

$$\text{sen } f_1 \approx f_1 = \frac{\rho}{V_1 T} = \frac{R}{SV_1} = \frac{\rho + R}{V_1 T + SV_1} \quad (\rho = \rho_{45^\circ})$$

Pero,

$$V_1 T + SV_1 = ST = r'$$

por tanto:

$$f_1 = \frac{\rho + R}{r'} = \frac{\rho}{r'} + \frac{R}{r'}$$

Llamando

$$\frac{\rho}{r'} = \pi' \quad y \quad \frac{R}{r'} = s'$$

nos queda

$$f_1 = s' + \pi' \quad (62.10)$$

Análogamente para f_2 obtendremos:

$$f_2 = \frac{R}{SV_2} = \frac{\rho}{TV_2} = \frac{R - \rho}{r'}$$

es decir

$$f_2 = s' - \pi' \quad (63.10)$$

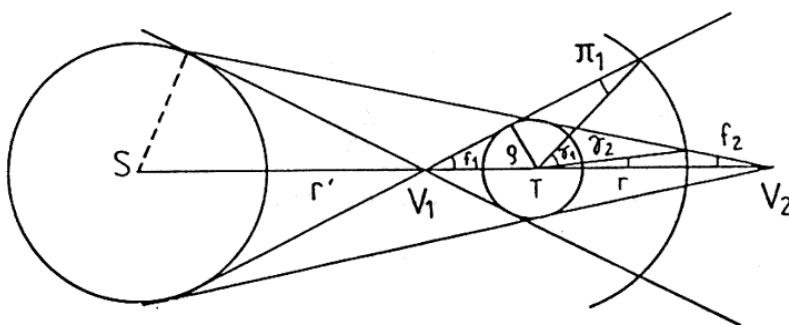


FIG. 20.10

Luego, sustituyendo en (61.10) los valores de $f = s' \pm \pi'$ tendremos

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \pi_1 + s' + \pi' \\ \gamma_2 &= \pi_1 - s' + \pi' \end{aligned} \right\} \quad (64.10)$$

Sin embargo, no se toman estos valores debido al efecto que produce la atmósfera de la Tierra de incrementar el radio aparente de la sombra de un 20%, siendo

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= 1.02 (\pi_1 + s' + \pi') \\ \gamma_2 &= 1.02 (\pi_1 - s' + \pi') \end{aligned} \right\} \quad (65.10)$$

donde γ_1 y γ_2 están expresados en las mismas unidades que las paralajes y el semidiámetro aparente del Sol (normalmente en segundos de arco).

La distancia angular L entre el centro de la Luna y el eje del cono de sombra será (Fig. 20.10):

Al comienzo y fin del eclipse penumbral:

$$L_1 = \gamma_1 + s = 1.02 (\pi_1 + s' + \pi') + s \quad (66.10)$$

Al comienzo y fin del eclipse parcial:

$$L_2 = \gamma_2 + s = 1.02 (\pi_1 - s' + \pi') + s \quad (67.10)$$

Al comienzo y fin del eclipse total:

$$L_3 = \gamma_2 - s = 1.02 (\pi_1 - s' + \pi') - s \quad (68.10)$$

Hemos visto (4.10) que la distancia mínima del centro de la Luna al eje del cono de sombra es

$$\Sigma = \beta \cos I'$$

donde aquí β será la latitud del centro de la Luna en la oposición (Luna llena) e I' la inclinación de la órbita relativa lunar que viene dada por (3.10)

$$\tan I' = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \tan I$$

siendo I la inclinación de la órbita lunar, y λ la relación entre los movimientos en longitud de la Luna y del Sol en el entorno de la oposición.

Para que tenga lugar un eclipse penumbral de Luna debe ser

$$\Sigma < L_1$$

es decir:

$$\beta \cos I' < 1.02 (\pi_1 + s' + \pi') + s \quad (69.10)$$

Para que el eclipse sea parcial se ha de verificar:

$$\Sigma < L_2$$

es decir:

$$\beta \cos I' < 1.02 (\pi_1 - s' + \pi') + s \quad (70.10)$$

Finalmente, para que se produzca eclipse total, ha de ser

$$\Sigma < L_3$$

es decir:

$$\beta \cos I' < 1.02 (\pi_1 - s' + \pi') - s \quad (71.10)$$

Si en (70.10) tomamos el valor medio de $\cos I' = 0.995$ o lo que es lo mismo de $\sec I' = 1.00472$, $\pi_1 = \pi$ y aplicamos valores medios, resulta:

$$0.00472 [1.02 (\pi - s' + \pi') + s] = 16''$$

y por tanto:

$$\beta < (1 + 0.00472) [1.02 (\pi - s' + \pi') + s] = 1.02 (\pi - s' + \pi) + s + 16'' \quad (72.10)$$

Si sustituimos en (72.10) los valores mínimos de π , π' , s y el máximo de s' , el eclipse parcial de Luna será

$$\text{seguro para } \beta < 53' 26''$$

Sustituyendo en cambio los valores máximos de π , π' , s y el mínimo de s' , el eclipse parcial de Luna será

$$\text{imposible para } \beta > 63' 46''$$

siendo dudoso entre dichos límites.

Análogamente, tomando el valor medio de $\cos I'$ y sustituyendo adecuadamente los valores máximos y mínimos de π_1 , π' , s y s' en (69.10) y en (71.10) se obtiene:

Si	$\beta > 1^\circ 36' 38''$	no hay eclipse
si	$1^\circ 36' 38'' > \beta > 1^\circ 26' 19''$	el eclipse penumbral es posible
si	$1^\circ 26' 19'' > \beta > 1^\circ 03' 46''$	el eclipse penumbral es seguro (parcial imposible)
si	$1^\circ 03' 46'' > \beta > 0^\circ 53' 26''$	el eclipse penumbral es seguro (parcial posible)
si	$\beta < 0^\circ 23' 48''$	el eclipse es total seguro.

10.2.2 Cálculo de las circunstancias de un eclipse de Luna

Para hallar la época T en que tiene lugar una determinada fase de un eclipse de Luna pueden utilizarse las ecuaciones fundamentales de la teoría de eclipses, bastando permutar la Luna y la Tierra en dichas ecuaciones y considerar un eclipse de Luna como un eclipse de Sol observado desde la Luna. Pero, dado que es suficiente que estos cálculos sean aproximados se suele sustituir la teoría general por una teoría mucho más simple. Supondremos el observador en el centro de la Tierra ya que el efecto de paralaje no modifica de una manera sensible el aspecto de un eclipse ni la época de las distintas fases.

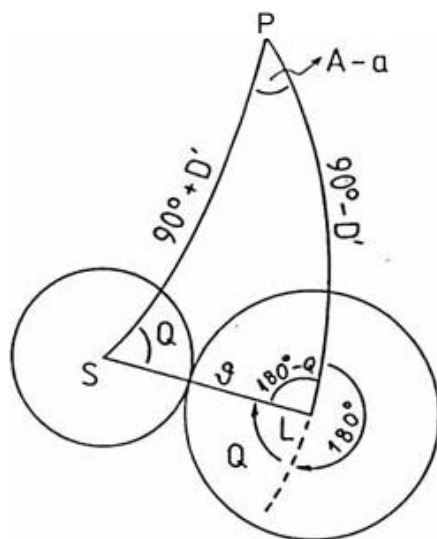


FIG. 21.10

Sean (Fig. 21.10) P el polo norte; S la posición aparente geocéntrica del centro de la sombra de la Tierra (opuesta al Sol); L el centro de la Luna vista desde el centro de la Tierra; Q el ángulo en el Sol; A y D la ascensión recta y la declinación de la Luna; $A' - 180^\circ$ y D' la ascensión recta y la declinación del Sol; a y d la ascensión recta y la declinación del punto S ($a = A' + 12^h$, $d = -D'$); $\vartheta = LS$.

Con ello en el triángulo PSL es:

$$PS = 90^\circ + D' = 90^\circ - d; \quad PL = 90^\circ - D; \quad P = A - A' - 180 = A - a$$

De donde

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } \vartheta \text{ sen } Q &= \cos D \text{ sen } (A - a) \\ \text{sen } \vartheta \cos Q &= \text{sen } D \cos d - \cos D \text{ sen } d \cos (A - a) \end{aligned} \right\} \quad (73.10)$$

Se trata ahora de determinar para qué épocas se satisfacen estas relaciones (73.10) cuando en ellas sustituimos ϑ por los valores correspondientes a las distintas fases del eclipse de Luna. Puesto que sería supérfluo efectuar un cálculo preciso, dada la poca exactitud con que se pueden observar los contactos, bastará considerar que siendo ϑ del orden de 1° podemos escribir dichas (73.10) en la forma

$$\left. \begin{aligned} \vartheta \text{ sen } Q &= \cos D \text{ sen } (A - a) \\ \vartheta \cos Q &= \text{sen } D \cos d - \cos D \text{ sen } d \cos (A - a) \end{aligned} \right\} \quad (74.10)$$

Las coordenadas x, y referidas al plano de Bessel serán:

$$\left. \begin{aligned} x &= \vartheta \text{ sen } Q = (A - a) \cos D \\ y &= \vartheta \cos Q = D - d + \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (75.10)$$

donde

$$\epsilon = \frac{1}{4} (A - a) \sin 2d \sin (A - a)$$

obtenida suponiendo que $A - a$ es muy pequeño y recordando la fórmula trigonométrica $\cos (A - a) = 1 - 2 \sin^2 \frac{A - a}{2}$.

Los elementos x e y vienen expresados en segundos de arco. La cantidad ϵ es pequeña y puede a menudo ser ignorada, aunque aparezca en el cálculo para las efemérides.

Calculadas x e y para varias horas sucesivas anteriores y posteriores a la época de la Luna llena, y deducidas de ellas sus variaciones horarias x' , y' , si x_0 , y_0 denotan los valores de x e y para un instante T_0 cerca de la oposición, la época de contacto será

$$T = T_0 + \tau$$

y las coordenadas

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x' \tau \\ y &= y_0 + y' \tau \end{aligned} \right\} \quad (76.10)$$

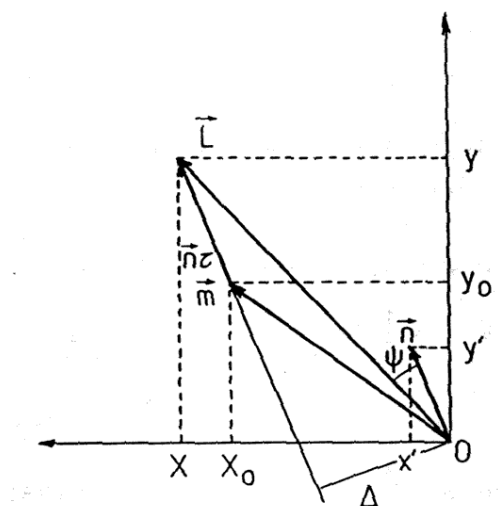


FIG. 22.10

En el instante de los contactos $\vartheta = L$ y por tanto

$$L^2 = x^2 + y^2 \quad \text{con} \quad L = L_1, L_2, L_3$$

dados por (66.10), (67.10), (68.10) respectivamente.

Por otra parte (Fig. 22.10)

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{m} + \vec{n} \tau \quad (77.10)$$

Multiplicando (77.10) vectorialmente por n , obtenemos

$$\vec{L} \wedge \vec{n} = \vec{m} \wedge \vec{n}$$

Aplicando módulos y teniendo en cuenta la teoría general explicada en 10.1 tenemos

$$Ln \sin \psi = x_0 y' - y_0 x'$$

$$L \sin \psi = \frac{1}{n} (x_0 y' - y_0 x') = \Delta$$

de donde

$$\sin \psi = \frac{\Delta}{L} \quad (78.10)$$

Multiplicando (77.10) escalarmente por n , obtenemos

$$\vec{L} \cdot \vec{n} = \vec{m} \cdot \vec{n} + n^2 \tau$$

o también

$$L n \cos \psi = (x_0 x' + y_0 y') + n^2 \tau$$

y haciendo

$$x_0 x' + y_0 y' = D$$

resulta

$$\tau = \frac{L}{N} \cos \psi - \frac{D}{n^2} \quad (79.10)$$

debiendo tomarse $\cos \psi$ con signo negativo o positivo según se trate del primer o último contactos.

Si en (79.10) ponemos $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi}$, tendremos según (78.10):

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{L^2}} = \frac{1}{L} \sqrt{L^2 - \Delta^2}$$

y entonces

$$\tau = \frac{1}{n} \sqrt{L^2 - \Delta^2} - \frac{D}{n^2} \quad (80.10)$$

Para que (80.10) tenga solución real debe ser $L^2 > \Delta^2$.

a) *Máxima fase del eclipse*: En el momento de máximo oscurecimiento o *fase máxima* se verificará

$$L = \Delta$$

es decir, el máximo del eclipse tendrá lugar en la época para la cual

$$\tau = -\frac{D}{n^2}$$

b) *Grado de oscurecimiento*: El grado de oscurecimiento es

$$\frac{L_2 - g}{2s}$$

c) *Magnitud del eclipse*: Teniendo en cuenta que llamamos magnitud del eclipse a la distancia del borde eclipsado al borde de la sombra en la mitad del eclipse (fase máxima), tomando el diámetro de la Luna como unidad es

$$M = \frac{L_2 - \Delta}{2s}$$

d) *Angulo de posición del punto de contacto*: El ángulo de posición del punto de contacto sobre el limbo lunar contado desde el norte hacia el oeste es, según la Fig. 21.10:

$$P = Q + 180^\circ$$

siendo $\tan Q = \frac{x}{y}$ con el signo de $\sin Q$ igual que el signo de x .

Si consideramos como polo de un hemisferio terrestre el lugar que tiene la Luna en su cenit todos los habitantes de este hemisferio verán el eclipse y los del hemisferio opuesto no lo verán. Por consiguiente, para determinar las regiones de la Tierra desde las cuales se puede observar el fenómeno, se determinarán las coordenadas geográficas de los lugares que tienen la Luna en su cenit en el momento de cada una de las principales fases del eclipse.

10.2.3 Efecto de la atmósfera terrestre

Es fácil calcular que la distancia del vértice O del cono de sombra geométrico determinado por las tangentes exteriores al Sol y la Tierra al centro de la Tierra es de 216 radios terrestres. Pero, al penetrar en la atmósfera terrestre, un rayo luminoso AB (Fig. 23.10)

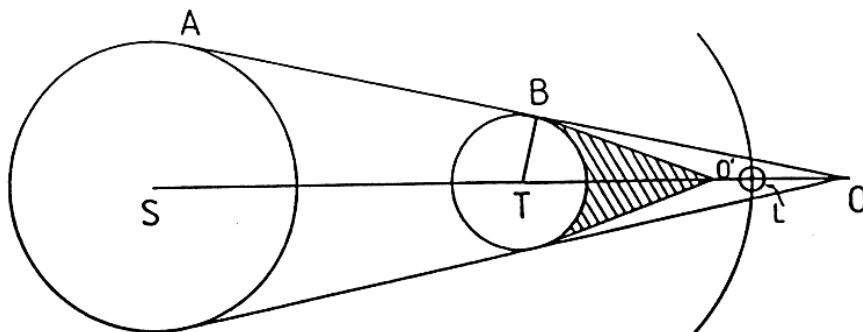


FIG. 23.10

tangente al Sol y a la Tierra se desvía por efecto de la refracción, acercándose a la vertical TB hasta que llega al punto B y alejándose de la misma vertical en su trayecto desde el punto B hasta que sale de la atmósfera; su desviación total es, por consiguiente, el doble de la desviación horizontal, es decir $2 \times 35' = 70'$, lo cual hace que el vértice O' del cono de sombra se halle a una distancia del centro de la Tierra de tan sólo 40 radios terrestres. Por tanto, dicho cono no puede alcanzar la Luna cuya distancia a la Tierra oscila entre 56 y 64 radios terrestres. Luego, en un eclipse total de Luna, ésta quedará alumbrada únicamente por los rayos que habrán atravesado nuestra atmósfera y cuya intensidad es, naturalmente, mucho menor que la de los rayos directos, pero suficiente para que el disco de la Luna no desaparezca por completo durante un eclipse total. En la mayoría de los casos el disco lunar presenta una coloración rojo-oscuro con regiones amarillentas o azuladas mientras que otras veces aparece con un tinte ceniciento debido a la humedad de la atmósfera.

10.3 Ocultaciones de estrellas por la Luna

De acuerdo con la definición de eclipse dada al principio del capítulo, designamos por ocultación de una estrella por la Luna el fenómeno por el cual la estrella se hace invisible al pasar aparentemente por detrás del disco lunar.

Las fases de una ocultación son la *inmersión* y la *emersión*. La inmersión es la desaparición de la estrella por el borde lunar y la emersión es la reaparición de la misma. Cuando la Luna es creciente las inmersiones se producen por el borde oscuro, que se percibe por la luz cinérea. El observador estima el tiempo de contacto con seguridad. La reaparición por el borde iluminado por el Sol, salvo en casos de estrellas muy brillantes, no se aprecia. Cuando la Luna decrece las inmersiones se producen por el borde claro y es difícil apreciarlas si no se ha calculado muy bien el ángulo de posición correspondiente.

10.3.1 Predicción de ocultaciones para un lugar determinado

La teoría de las ocultaciones de estrellas por la Luna es un caso particular de la de los eclipses de Sol sustituyendo el Sol por la estrella y tomando su paralaje y semidiámetro iguales a cero, con lo cual (31.10) nos dará $f = 0^\circ$; es decir, $f_1 = f_2 = 0^\circ$ lo que significa que en lugar de dos conos de sombra tendremos un cilindro cuyo diámetro será el diámetro de la Luna. El punto Z (dirección del eje de dicho cilindro) será la posición de la estrella vista desde la Luna, que coincide prácticamente con la posición de la estrella vista desde el punto de observación a causa de la gran distancia que nos separa de ella. Evidentemente en un lugar de la Tierra habrá ocultación si la distancia de dicho lugar al eje del cono de sombra es menor que el radio de sombra.

La posición de Z vendrá dada, por tanto, por

$$a = A' \quad d = D'$$

siendo (A', D') las coordenadas ecuatoriales de la estrella, y además, el radio del cilindro será

$$L = l = R_L \text{ (radio medio de la Luna)}$$

Las coordenadas de la Luna obtenidas en (20.10) seran:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos D \sin(A - A') \\ r \sin D \cos D' - r \cos D \sin D' \cos(A - A') \end{bmatrix} \quad (81.10)$$

siendo $r = \frac{1}{\sin \pi}$ si se toma como unidad el radio de la Tierra y $r = \frac{1}{k \sin \pi}$ si tomamos como unidad el radio de la Luna ($k = R_L / R_T$).

Sustituyendo este último valor de r en (81.10) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{k \sin \pi} \cos D \sin(A - A') \\ y &= \frac{1}{k \sin \pi} (\sin D \cos D' - \cos D \sin D' \cos(A - A')) \end{aligned} \right\} \quad (82.10)$$

Si hacemos $\cos(A - A') = [1 - \sin^2(A - A')]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2(A - A')$ y sustituimos en (82.10) nos queda

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{k \sin \pi} \cos D \sin(A - A') \\ y &= \frac{1}{k \sin \pi} \left(\sin(D - D') + \frac{1}{2} x \sin D' \sin(A - A') \right) \end{aligned} \right\} \quad (83.10)$$

Las expresiones (83.10) pueden escribirse en forma aproximada haciendo

$$k \sin \pi = \frac{1}{r} = \sin s = s$$

y

$$\sin(A - A') = A - A'$$

quedando

$$\left. \begin{aligned} x &= 15 \frac{\cos D}{s''} (A - A') \\ y &= \frac{D - D'}{s''} + \frac{1}{2} x \sin D' (A - A') \end{aligned} \right\} \quad (84.10)$$

El hecho de que en la expresión de x aparezca el factor 15 es debido a que el semidiámetro s se da en segundos de arco y la diferencia de ascensiones rectas $A - A'$ en segundos de tiempo.

Las expresiones (84.10) se utilizan para la predicción de las ocultaciones.

10.3.2 Epocas y ángulos de posición de la inmersión y la emersión para un lugar determinado

Las coordenadas del observador (23.10) en unidades del radio de la Luna seran:

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \rho \cos \phi' \sin h \\ \frac{1}{k} \rho (\sin \phi' \cos D - \cos \phi' \sin D \cos h) \end{bmatrix} \quad (85.10)$$

siendo h el ángulo horario de la estrella.

Los ángulos de posición que contábamos sobre el Sol ahora deberán contarse sobre la Luna lo cual implica sumar 180° a los valores obtenidos en la teoría de eclipse de Sol (Fig. 24.10):

$$\begin{aligned} V' &= V + 180^\circ \\ \chi &= P + 180^\circ \end{aligned} \quad (86.10)$$

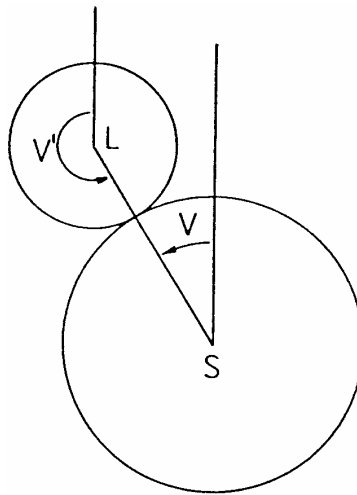


FIG. 24.10

La distancia $\mathcal{G}$ del observador al eje del cilindro de sombra es igual a la distancia del punto O' , proyección ortogonal de la posición del observador sobre el plano fundamental, al punto L' intersección del eje de sombra con dicho plano (Fig.8.10). Es decir:

$$\mathcal{G}^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \quad (87.10)$$

Pero, en la teoría de ocultaciones es

$$x - \xi = f \quad y - \eta = g$$

de donde

$$g^2 = f^2 + g^2 \quad (88.10)$$

En el instante de la inmersión, suponiendo la Luna esférica, la posición del observador correcta y las efemérides correctas, es $g = R_L$ y tomando el radio de la Luna como unidad ($R_L = 1$), tenemos:

$$f^2 + g^2 = 1 \quad (89.10)$$

y según (86.10)

$$\left. \begin{aligned} f &= -\sin \chi \\ g &= -\cos \chi \end{aligned} \right\} \tan \chi = \frac{f}{g} \quad (90.10)$$

Para calcular las épocas de los contactos (inmersión y emersión) llamemos T_0 a una época aproximada de la ocultación, que puede ser el instante de la conjunción en ascensión recta de la Luna con la estrella deducido de las efemérides de la Luna, y τ la diferencia entre esta época y la real T_c (seguimos de momento suponiendo la Luna esférica). Se verifica:

$$T_c = T_0 + \tau \quad (91.10)$$

Si (x', y') , (ξ', η') son las variaciones horarias de las dos primeras coordenadas besselianas (x, y) , (ξ, η) de la Luna y del observador respectivamente en la época T_0 , las coordenadas en la época T_c (91.10) serán:

$$(x + x'\tau, y + y'\tau) \quad \text{y} \quad (\xi + \xi'\tau, \eta + \eta'\tau) \quad (92.10)$$

x' e y' se calculan tal como hemos explicado para el caso de un eclipse de Sol (10.1.5). Para calcular ξ' y η' derivaremos las expresiones de ξ y η dadas en (85.10) suponiendo nula la variación de la declinación de la estrella. Obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \mu' \frac{\rho}{k} \cos \phi' \cos h \\ \eta' &= \mu' \frac{\rho}{k} \cos \phi' \sin D' \sin h \end{aligned} \right\} \quad (93.10)$$

donde $\mu - \lambda = (\theta - A') = h$ y por tanto $\mu' = h'$

Tomando

$$h' = \frac{2\pi}{24} 1.00273791 = 0.262516$$

podremos escribir (93.10) en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= 0.262516 \frac{\rho}{k} \cos \phi' \cos h \\ \eta' &= 0.262516 \xi \sin D' \end{aligned} \right\} \quad (94.10)$$

Consideremos ahora los vectores (Fig.25.10):

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix}$$

Para la época

$T_c = T + \tau$ tenemos:

$$\vec{m} + \vec{n}\tau = \vec{L}$$

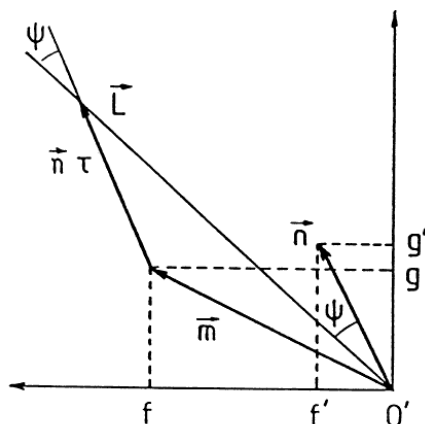


FIG. 25.10

Aplicando aquí la (46.10) obtenemos

$$\text{sen } \psi = \Delta = \frac{1}{kn} (fg' - f'g) \quad (95.10)$$

con $n = \sqrt{f'^2 + g'^2}$. Al igual que en la teoría de eclipses el ángulo ψ queda indeterminado.

De (48.10) deducimos

$$\tau = \frac{k}{n} \cos \psi - \frac{D}{n^2} \quad (96.10)$$

con $D = ff' + gg'$, tomándose $\cos \psi > 0$ para las emersiones y $\cos \psi < 0$ para las inmersiones. Habremos obtenido pues $T_{ci} = T_0 + \tau_i$, $T_{ce} = T_0 + \tau_e$. Como en el cálculo de las circunstancias de un eclipse de Sol, para una segunda aproximación se calcularán las épocas de inmersión y emersión por separado a partir de las épocas aproximadas anteriormente obtenidas.

10.3.3 Reducción de observaciones

La información que nos da una ocultación proporciona una relación entre la posición de la estrella, el limbo lunar y la posición del observador en el instante de la ocultación. Puede hacerse una reducción adecuada para eliminar el efecto de la posición del observador, hallando el exceso de distancia aparente de la estrella al centro de la Luna respecto al valor tomado del semidiámetro de la Luna supuesta esférica

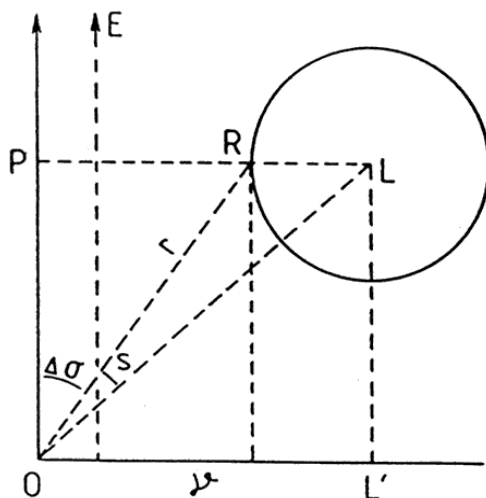


FIG 26.10

Sean L el centro de la Luna, P la posición aparente de la estrella y O la posición del observador en un instante dado. Sea además $\Delta\sigma$ la distancia angular aparente de la estrella al limbo lunar (Fig. 26.10). En dicho instante, la proyección sobre el plano fundamental de la distancia del observador al centro de la Luna según (87.10) es

$$\mathcal{G} = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$$

La proyección de la distancia del observador al limbo lunar, tomando el radio de la Luna como unidad, será, por consiguiente

$$PR = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2} - 1 \quad (97.10)$$

que corresponde a la distancia angular $\Delta\sigma$.

Para hallar dicha distancia angular, dada la pequeñez de los ángulos, según la misma figura 26.10 podemos escribir:

$$\Delta\sigma = \frac{PR}{r} \quad s = \frac{1}{r}$$

y por tanto, según (97.10)

$$\Delta\sigma = s \left\{ \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \quad (98.10)$$

pero

$$s = \frac{k \operatorname{sen} \pi}{\operatorname{sen} 1''} \approx (k\pi)''$$

y por consiguiente:

$$\Delta\sigma = k\pi \left\{ \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}$$

y recordando el significado de f y g ($f = x - \xi$, $g = y - \eta$), queda finalmente

$$\Delta\sigma = k\pi \left\{ \sqrt{f^2 + g^2} - 1 \right\} \quad (99.10)$$

El proceso que se sigue para el cálculo del tiempo real de la ocultación, suponiendo la Luna esférica, es el siguiente: A partir de una época aproximada T_0 se obtiene un valor de $\Delta\sigma$ y un valor de τ que nos dará la época $T_{c1} = T_0 + \tau$ más aproximada que T_0 . Tomando esta época T_{c1} como inicial, procederemos a calcular otra vez $\Delta\sigma$ y τ , de modo que la época de la ocultación será ahora $T_{c2} = T_{c1} + \tau_1$, siendo T_1 la última τ obtenida. Cuando siguiendo este proceso iterativo lleguemos a una $\Delta\sigma$ nula, habremos obtenido la época real de la ocultación, supuesta la Luna esférica. Pero, la Luna no es una esfera perfecta pues su superficie presenta irregularidades (montañas, valles, etc.). Mediante las *tablas de Watts* conocemos el relieve lunar en el punto de contacto, en función de las libraciones en longitud y latitud (Apartado 9.1) y del ángulo de posición del punto de contacto cuyo valor es (Fig. 27.10)

$$\Pi = \chi - C \quad (100.10)$$

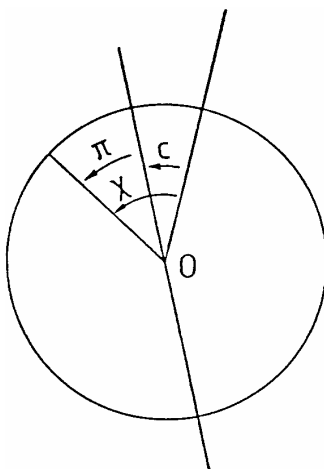


FIG. 27.10

donde C es el ángulo de posición topocéntrico y χ el ángulo de inmersión o emersión con respecto al centro de la Luna medido del Norte hacia el este (recordar 86.10).

Las cartas de Watts nos dan, en décimas de segundo de arco, la diferencia $\Delta\sigma_w$ de relieve, en el punto de contacto, entre el borde de la Luna supuesta esférica y el borde real (Fig. 28.10).

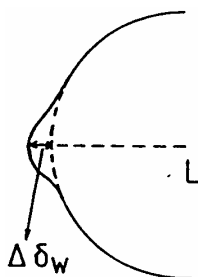


FIG. 28.10

La distancia angular $\Delta\sigma_w$ es positiva o negativa según que la curva correspondiente en las cartas de Watts sea continua o de trazos, lo cual indica que el borde lunar presenta una montaña o un cráter, respectivamente.

La distancia entre la estrella y el borde real de la Luna será entonces

$$\Delta\sigma_c = \Delta\sigma - \Delta\sigma_w$$

En general, $\Delta\sigma_c$ será distinto de cero, lo cual se deberá a diversas causas:

- Mala determinación de la posición de la Luna (A, D, π)
- Mala determinación de la posición del observador (ϕ, λ, a)
- Mala determinación de k (la posición de la estrella se supone, en general, bien determinada).

Llamemos

$$F = \Delta\sigma_c = \Delta\sigma - \Delta\sigma_w \quad (101.10)$$

siendo

$$\Delta\sigma_c = F(A, D, \pi, k, \phi, \lambda, a) \quad (102.10)$$

Teniendo en cuenta las causas de error citadas podremos escribir:

$$0 = F + \frac{\partial F}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial F}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial F}{\partial \pi} \Delta \pi + \frac{\partial F}{\partial k} \Delta k + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \frac{\partial F}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial F}{\partial a} \Delta a \quad (103.10)$$

teniendo para cada observación una ecuación de este tipo.

Como que las incógnitas son siete ($\Delta A, \Delta D, \Delta \pi, \Delta k, \Delta \phi, \Delta \lambda, \Delta a$) teóricamente nos bastarán siete observaciones para resolver el problema. Sin embargo, en la práctica se parte de muchas más observaciones y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido por mínimos cuadrados.

Para simplificar el cálculo se suele suponer que no hay error en la determinación de la posición de la Luna con lo cual la ecuación (103.10) queda reducida a:

$$0 = F + \frac{\partial F}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \frac{\partial F}{\partial a} \Delta a \quad (104.10)$$

Para calcular los coeficientes de las incógnitas $\Delta \phi$, $\Delta \lambda$, Δa que figuran en (104.10), tendremos en cuenta (101.10) de la que se deduce:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \phi}$$

y análogamente para las demás derivadas.

Así pues, partiendo de (99.10) y derivando respecto a λ , ϕ y a , obtendremos:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \lambda} = \frac{k\pi}{\sqrt{f^2 + g^2}} \left(f \frac{\partial f}{\partial \lambda} + g \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right) \quad (105.10)$$

y teniendo en cuenta que $\sqrt{f^2 + g^2} = 1$ y generalizando a las otras variables, podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \lambda} &= k\pi \left(f \frac{\partial f}{\partial \lambda} + g \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \phi} &= k\pi \left(f \frac{\partial f}{\partial \phi} + g \frac{\partial g}{\partial \phi} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial a} &= k\pi \left(f \frac{\partial f}{\partial a} + g \frac{\partial g}{\partial a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (106.10)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $f = x - \zeta$ y $g = y - \eta$, y que x e y no dependen de (λ, ϕ, a) obtendremos a partir de las expresiones (106.10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= -k\pi \left(f \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + g \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} &= -k\pi \left(f \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} + g \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial a} &= -k\pi \left(f \frac{\partial \zeta}{\partial a} + g \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (107.10)$$

Derivando respecto a λ , ϕ y a las expresiones (85.10) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{k} \rho \cos \phi' \cos h \\ \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{k} \rho \cos \phi' \sin D' \sin h \\ \frac{\partial \xi}{\partial \phi} &= -\frac{1}{k} \rho \sin \phi' \sin h \\ \frac{\partial \eta}{\partial \phi} &= \frac{1}{k} \rho [\cos \phi' \cos D' + \sin \phi' \sin D' \cos h] \\ \frac{\partial \xi}{\partial a} &= \frac{\xi}{\rho} \\ \frac{\partial \eta}{\partial a} &= \frac{\eta}{\rho} \end{aligned} \right\} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial \phi} \approx 1 \right) \quad (108.10)$$

y sustituyendo en las (107.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \pi \rho \cos \phi' [f \cos h + g \sin D' \sin h] \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} &= \pi \rho [f \sin \phi' \sin h - g (\cos \phi' \cos D' + \sin \phi' \sin D' \cos h)] \\ \frac{\partial F}{\partial a} &= -k\pi \left[f \frac{\xi}{\rho} + g \frac{\eta}{\rho} \right] \end{aligned} \quad (109.10)$$

con
$$\rho = \sqrt{(S + H)^2 \sin^2 \phi + (C + H)^2 \cos^2 \phi}$$

(ver 2.1.1 y 2.1.2)

Sustituyendo las expresiones (109.10) en (104.10) tendremos para cada ocultación la ecuación:

$$0 = F + \pi \rho [f \sin \phi' \sin h - g (\cos \phi' \cos D' + \sin \phi' \sin D' \cos h)] \Delta \phi + \pi \rho \cos \phi' (f \cos h + g \sin D' \sin h) \Delta \lambda - K\pi \left(\varepsilon \frac{\xi}{\rho} + \vartheta \frac{\eta}{\rho} \right) \Delta a \quad (110.10)$$

Si quisiéramos tener en cuenta la corrección a la posición de la Luna, deberíamos añadir a la ecuación (110.10) dos términos más: uno en ΔL y otro en ΔB que expresarían los errores en la longitud y la latitud orbitales de la Luna.

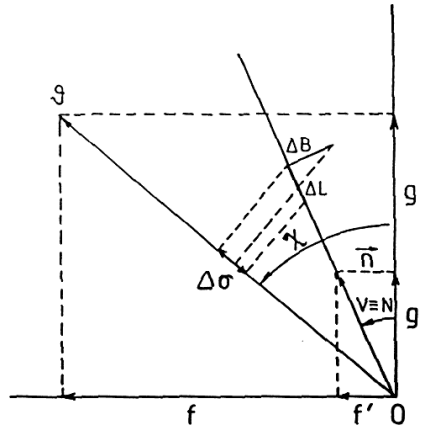


FIG. 29.10

De la Fig. 29.10 se obtiene

$$\Delta\sigma = \cos(\chi - V) \Delta L + \sin(\chi - V) \Delta B \quad (111.10)$$

con

$$\tan V \equiv \tan N = \frac{f'}{g'}$$

Si despreciamos el movimiento del observador, tendremos

$$f' = x' \quad g' = y'$$

con lo que

$$\tan V = \frac{x'}{y'}$$

Los términos del segundo miembro de la ecuación (111.10) son los términos a añadir a la ecuación (110.10).

10.3.4 Curvas límites

Estudiaremos en este apartado la zona de la superficie terrestre desde la cual es visible una determinada ocultación, hallando los paralelos de latitud que limitan dicha zona de visibilidad.

Como en el caso de los eclipses de Sol, los vectores \$\vec{m}\$ y \$\vec{n}\$ pueden expresarse por sus componentes en la forma:

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \sin M \\ m \cos M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \xi \\ y - \eta \end{bmatrix} \quad (112.10)$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \sin N \\ n \cos N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - \xi' \\ y' - \eta' \end{bmatrix}$$

Para un observador situado en un punto de la línea límite que tratamos de encontrar, la distancia mínima a que se encontrará la estrella del centro de la Luna deberá ser igual al radio de la Luna (recordemos que en unidades del radio ecuatorial terrestre es $k = 0.2725026$). En otras palabras, en la expresión (95.10) tendremos

$$(x - \xi) \cos N - (y - \eta) \sin N = \pm k \quad (113.10)$$

Si queremos determinar los paralelos de forma aproximada podemos despreciar las variaciones de ξ y η frente a las de x e y , con lo que el valor de N vendrá dado por

$$\tan N = \frac{x'}{y'} \quad (114.10)$$

Si llamamos x_0 e y_0 a los valores de x e y en el instante inicial T_0 , se verificará

$$(x_0 - \xi) \cos N - (y_0 - \eta) \sin N = \pm k \quad (115.10)$$

Por otra parte, si consideramos, para simplificar, la Tierra esférica, las ecuaciones (23.10), haciendo $\rho = 1$ y $\phi' = \phi$ se escribirán:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \cos \phi \sin h \\ \eta &= \sin \phi \cos D' - \cos \phi \sin D' \cos h \\ \zeta &= \sin \phi \sin D' + \cos \phi \cos D' \cos h \end{aligned} \right\} \quad (116.10)$$

donde ξ , η , ζ vienen expresadas en radios terrestres.

Si multiplicamos la segunda de (116.10) por $\cos D'$, la tercera por $\sin D'$ y sumamos, obtenemos

$$\sin \phi = \eta \cos D' + \zeta \sin D' \quad (117.10)$$

cumpléndose

$$\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$$

Hallaremos los paralelos límites de latitud buscando los valores máximo y mínimo de la latitud en (117.10) que verifiquen (115.10).

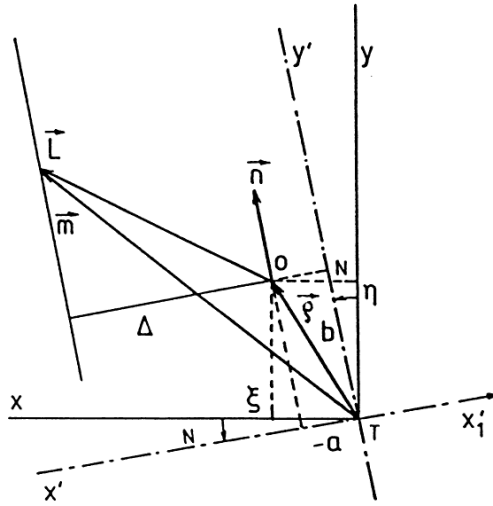


FIG. 30.10

Para ello introduciremos un cambio de ejes de coordenadas (Fig. 30.10). Tomaremos como nuevo eje y (que llamaremos y') la dirección del movimiento relativo de la Luna y el observador, o sea la dirección de $\vec{n}$. Llamemos $-a$ y b a las componentes de $\vec{\rho}$ en esta nueva base:

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}_{xy} = \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix}_{x'y'} \quad (118.10)$$

Para pasar de la base x', y' a la x, y aplicaremos la matriz $R_3(N)$ con lo cual

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos N & \sin N \\ -\sin N & \cos N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -a \cos N + b \sin N \\ \eta &= a \sin N + b \cos N \end{aligned} \right\} \quad (119.10)$$

verificándose

$$\xi^2 + a^2 + b^2 = 1 \quad (120.10)$$

Desarrollando (115.10) y utilizando las (119.10) obtenemos:

$$x_0 \cos N - y_0 \sin N + a = \pm k$$

o sea:

$$a = -x_0 \cos N + y_0 \sin N \pm k \quad (121.10)$$

que en nuestra hipótesis es constante.

Consideremos ahora la base z, y', x'_1 con x'_1 , opuesta a x' e y' y z los mismos ejes de antes (Fig. 31.10). Tomemos los elementos auxiliares γ y ϵ definidos por

$$\begin{aligned} a &= \cos \gamma \\ b &= \sin \gamma \cos \epsilon \\ \zeta &= \sin \gamma \sin \epsilon \end{aligned} \quad (122.10)$$

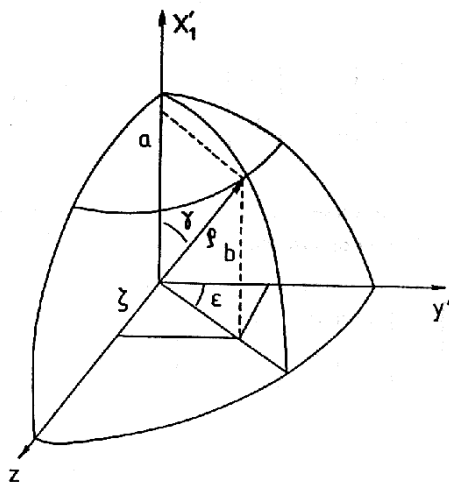


FIG. 31.10

Las componentes en esta base del vector de posición $\vec{\rho}$ del observador son:

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} \zeta \\ b \\ a \end{bmatrix}_{z, y', x'_1} \quad (123.10)$$

y las coordenadas esféricas del observador son (ϵ, γ) con $\sin \gamma > 0$ (ver Fig. 31.10).

Sustituyendo en (117.10) la expresión de η de (119.10), obtenemos

$$\sin \phi = (a \sin N + b \cos N) \cos D' + \zeta \sin D' \quad (124.10)$$

y utilizando (122.10)

$$\sin \phi = \cos \gamma \sin N \cos D' + \sin \gamma \cos \epsilon \cos N \cos D' + \sin \gamma \sin \epsilon \sin D' \quad (125.10)$$

e introduciendo ahora los ángulos auxiliares β y λ (Fig. 32.10) definidos por

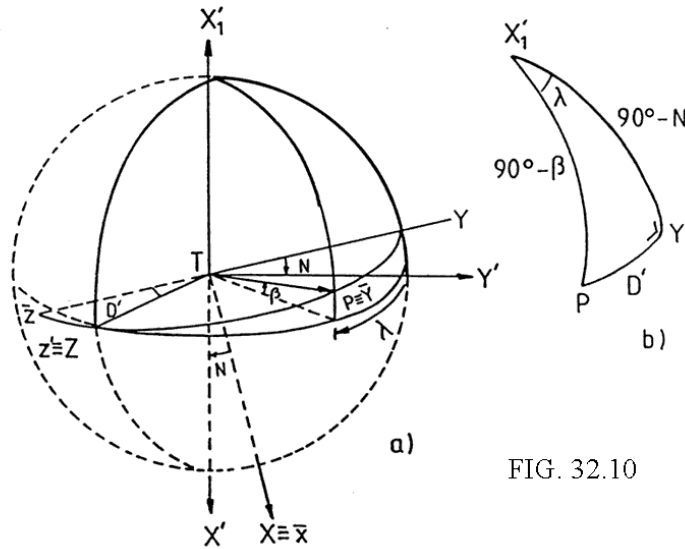


FIG. 32.10

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} N \cos D' &= \operatorname{sen} \beta \\ \cos N \cos D' &= \cos \beta \cos \lambda \\ \operatorname{sen} D' &= \cos \beta \operatorname{sen} \lambda\end{aligned}\quad (126.10)$$

con $\cos \beta$ siempre positivo, sustituyendo (126.10) en (125.10), resulta

$$\operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} \beta \cos \gamma + \cos \beta \operatorname{sen} \gamma \cos (\lambda - \epsilon) \quad (127.10)$$

Para ver el significado de los ángulos β y λ supongamos que en la figura 32.10 P es el polo norte terrestre y el plano determinado por $\bar{z}$ y $\bar{x}$ es el plano ecuatorial. Es fácil ver que dichos ángulos representan una longitud y una latitud de P . En efecto, aplicando al triángulo esférico $P Y X'_1$ (Fig. 32.10,b) rectángulo en Y las fórmulas de la trigonometría esférica, se obtienen sin dificultad las expresiones (126.10).

En (127.10) obtendremos el valor máximo de ϕ cuando sea $\cos (\lambda - \epsilon) = 1$ o sea cuando $\lambda = \epsilon$ en cuyo caso

$$\operatorname{sen} \phi_M = \operatorname{sen} (\beta + \gamma)$$

y obtendremos el valor mínimo de ϕ cuando $\cos (\lambda - \epsilon) = -1$ o sea $\lambda - \epsilon = 180^\circ$, con lo cual

$$\operatorname{sen} \phi_m = \operatorname{sen} (\beta - \gamma)$$

Es decir, el límite norte vendrá determinado por

$$\phi = \beta + \gamma \quad (128.10)$$

y el límite sur por

$$\phi = \beta - \gamma \quad (129.10)$$

Puesto que de los dos valores opuestos que puede tomar ζ sólo nos interesa el positivo (para el cual la ocultación es visible), según (122.10), tomándose $\sin \gamma$ positivo deberá serlo también $\sin \epsilon$. Para el límite norte: $\lambda = \epsilon$ y $\sin \lambda > 0$, y, según (126.10) $\sin D' > 0$, luego $D' > 0$ (pues $\cos \beta > 0$).

La expresión (128.10) nos da, pues, el límite norte de visibilidad sólo cuando la declinación de la estrella es positiva ($D' > 0$).

Para el límite sur, análogamente, la expresión (129.10) da el límite sur de visibilidad sólo cuando la declinación de la estrella es negativa ($D' < 0$).

Para cada uno de los dos casos el segundo límite de visibilidad será, evidentemente, uno de los dos puntos en los cuales las curvas límites generales norte y sur tocan a las curvas límites correspondientes al orto y ocaso, puntos en los cuales $\zeta = 0$ y, por tanto, $\sin \epsilon = 0$, $\cos \epsilon \pm 1$ que reducen la fórmula (125.10) a

$$\sin \phi = \sin (N \pm \gamma) \cos D'$$

Si $\cos N$ es positivo, el signo superior de esta ecuación nos dará el límite norte para el caso en que la declinación de la estrella sea negativa y el signo inferior nos dará el límite sur para estrellas de declinación positiva. Recíprocamente, si $\cos N$ es negativo, el signo superior nos dará el límite sur para declinaciones positivas y el inferior nos dará el límite norte para declinaciones negativas.

10.3.5 Ocultaciones rasantes

Cuando en una ocultación de una estrella por la Luna el tiempo transcurrido entre la inmersión y la emersión estelar es inferior a 10 minutos, hecho que se produce si la estrella se oculta por una zona próxima a los polos norte o sur lunares, se dice entonces que la ocultación es *rasante*. En este caso, puede ocurrir que el fenómeno conste de varias inmersiones y varias emersiones debidas al relieve lunar en dicha zona.

Una ocultación rasante puede ser observada, en principio, desde un punto situado sobre los paralelos de latitud límites ya que desde tales puntos la trayectoria aparente de la estrella se observa tangente al limbo lunar. En todo caso, dicho fenómeno será visible a lo largo de una línea, denominada *línea límite* (norte o sur) que, debido a la variación de la declinación de la Luna, no coincidirá con el paralelo de latitud límite (norte o sur).

Recordemos que en el apartado anterior los paralelos límites han sido calculados en forma aproximada suponiendo la Tierra esférica. En el caso que nos ocupa deberemos calcular con precisión la posición de la línea límite, lugar geométrico de los puntos de la superficie terrestre desde los cuales se observa la trayectoria de la estrella tangente al limbo medio lunar. Para ello, partiremos del valor aproximado de la latitud máxima o mínima (según se quiera calcular la línea límite norte o sur) obtenida en 10.3.4 y calcularemos, para una longitud geodésica determinada, el valor exacto de la latitud de la línea límite.

Como en el cálculo de una ocultación normal (llamada también *ocultación total* en contraposición a la rasante) tomaremos como tiempo inicial aproximado el tiempo T_0 de conjunción en ascensión recta de la estrella con el centro de la Luna. Para este instante inicial, calcularemos las coordenadas besselianas (x, y) del centro de la Luna en unidades del radio ecuatorial terrestre (81.10) y el ángulo horario $h_E = \theta + A'$ de la estrella a partir de

$$h_E = \theta_0 + 1.00273791 T_0 - \lambda - A'$$

siendo θ_0 el tiempo sidéreo en Greenwich a 0^h de T.U. Las coordenadas del observador (ξ, η) se obtendrán de las ecuaciones (85.10) pero tomando como unidad el radio ecuatorial terrestre. Los valores de $\rho \sin \phi'$ y $\rho \cos \phi'$ vendrán dados por las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} \rho \sin \phi' &= (S + H) \sin \phi \\ \rho \cos \phi' &= (C + H) \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (130.10)$$

donde S y C son funciones de la latitud astronómica y H la altitud reducida del lugar (ver apartado 2.1.1). Haciendo $H = 0$ se obtendrá la curva límite al nivel del mar.

Las variaciones horarias x' e y' de las coordenadas x e y de la Luna se calculan con suficiente precisión hallando los valores de dichas coordenadas lunares para los instantes $T_0 + 10^m$ y $T_0 - 10^m$ y multiplicando por 3 la diferencia entre los mismos. Los valores de x' e y' se toman como constantes en todo el proceso de cálculo.

Las variaciones horarias ξ' y η' de las coordenadas ξ y η del observador se obtienen derivando respecto al tiempo las relaciones (85.10) expresadas en radios ecuatoriales terrestres:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \rho \cos \phi' \cos h_E h_E' \\ \eta' &= \rho \cos \phi' \sin D' \sin h_E h_E' = \xi \sin D' h_E' \end{aligned} \right\} \quad (131.10)$$

donde h_E' es la variación horaria de la estrella que, en radianes por hora vale

$$h_E' = \frac{2\pi \cdot 1.00273791}{24^h} = 0.26252$$

Introduciendo los elementos auxiliares f, g, f', g' que hemos utilizado anteriormente, la fórmula (95.10) nos proporciona el valor de $\sin \psi = \Delta$ que representa la mínima distancia entre la trayectoria aparente del centro de la Luna y el observador, tomando como unidad el radio de la Luna.

Esta distancia Δ deberá ser igual al radio de la Luna (unidad en este caso) para que en el lugar de latitud ϕ , la ocultación sea rasante, es decir, la trayectoria aparente de la estrella sea tangente al limbo medio de la Luna. Si no fuera así ($\Delta \neq 1$), deberíamos efectuar la corrección correspondiente a la latitud del punto de observación. Dicho de otro modo, deberíamos conocer la variación de Δ con ϕ .

En general, la variación de Δ con respecto a la posición del observador será debida a variaciones en la longitud, la latitud y la altitud del punto de observación.

$$\delta\Delta = q = \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda} \delta\lambda + \frac{\partial\Delta}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\Delta}{\partial H} \delta H$$

En nuestro caso tomamos una longitud dada, constante, y calculamos la curva límite para $H = 0$. Por tanto,

$$q = \frac{\partial\Delta}{\partial\phi} \delta\phi \quad (132.10)$$

Como que los elementos besselianos son independientes de la posición del observador, se cumple:

$$\begin{aligned} \delta f &= -\delta\zeta \\ \delta g &= -\delta\eta \end{aligned} \quad (133.10)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que las funciones S y C se pueden escribir en la forma (ver (7.2) y (8.2)):

$$\begin{aligned} C(\phi) &= \left[1 - e^2 \sin^2 \phi\right]^{\frac{1}{2}} \\ S(\phi) &= (1 - e^2) C(\phi) \end{aligned} \quad (134.10)$$

derivándolas con respecto a ϕ se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S &= (1 - e^2) e^2 \sin \phi \cos \phi (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{3}{2}} \delta\phi \\ \delta C &= e^2 \sin \phi \cos \phi (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{3}{2}} \delta\phi \end{aligned}$$

que se puede escribir también de la forma:

$$\begin{cases} \delta S = SC^2 e^2 \sin \phi \cos \phi \delta\phi \\ \delta C = C^3 e^2 \sin \phi \cos \phi \delta\phi \end{cases} \quad (135.10)$$

Teniendo en cuenta (130.10) y que $H = 0$ es

$$\zeta = C \cos \phi \sin h_E$$

y por tanto, será:

$$\delta\zeta = -C \sin \phi \sin h_E \delta\phi + \cos \phi \sin h_E \delta C$$

o sea

$$\delta\zeta = (C^3 e^2 \cos^2 \phi - C) \sin \phi \sin h_E \delta\phi \quad (136.10)$$

De (134.10) se deduce:

$$\left. \begin{aligned} C^3 &= \frac{SC^2}{1-e^2} \\ C &= \frac{SC^2}{SC} = SC^2 \frac{1-e^2 \sin^2 \phi}{1-e^2} \end{aligned} \right\} \quad (137.10)$$

Sustituyendo en (136.10) se obtiene finalmente

$$\delta \xi = -SC^2 \sin \phi \sin h_E \delta \phi \quad (138.10)$$

De $\eta = S \sin \phi \cos D' - C \cos \phi \sin D' \cos h_E$

escrita teniendo en cuenta otra vez (130.10), se deduce

$$\begin{aligned} \delta \eta &= \sin \phi \cos D' \delta S + S \cos \phi \cos D' \delta \phi - \cos \phi \sin D' \cos h_E \delta C + \\ &+ C \sin \phi \sin D' \cos h_E \delta \phi \end{aligned}$$

y sustituyendo los valores encontrados de δS y δC :

$$\begin{aligned} \delta \eta &= (S C^2 e^2 \sin^2 \phi + S) \cos \phi \cos D' \delta \phi + \\ &+ (C - C^3 e^2 \cos^2 \phi) \sin \phi \sin D' \cos h_E \delta \phi \end{aligned} \quad (139.10)$$

Sustituyendo (137.10) en (139.10) y haciendo

$$S \equiv \frac{SC^2}{C^2} = (1 - e^2 \sin^2 \phi) SC^2$$

resulta:

$$\delta \eta = SC^2 (\cos \phi \cos D' + \sin \phi \sin D' \cos h_E) \delta \phi \quad (140.10)$$

Derivando la fórmula (95.10) respecto a ϕ tendremos:

$$\delta \Delta = q = \frac{1}{kn} (g' \delta f - f' \delta g) \delta \phi = \frac{1}{kn} (f' \delta \eta - g' \delta \xi) \delta \phi \quad (141.10)$$

y sustituyendo (138.10) y (140.10) en esta última:

$$q = \frac{SC^2}{kn} [f' (\cos \phi \cos D' + \sin \phi \sin D' \cos h_E) + g' \sin \phi \sin h_E] \delta \phi \quad (142.10)$$

fórmula que proporciona la variación de Δ con la latitud. Si hacemos $\delta \phi = 1^\circ$, obtendremos la variación de Δ por grado de variación de ϕ .

La corrección que deberá hacerse a la latitud será entonces

$$\Delta\phi = \frac{\Delta_0 - \Delta}{q} \quad (143.10)$$

donde $\Delta_0 = 1$ si buscamos el límite norte y $\Delta_0 = -1$ si buscamos el límite sur. En efecto, si se trata de un límite norte, $\Delta = \sin \psi$ es positivo y por tanto $1 - \Delta$ representa la máxima distancia de la estrella al limbo lunar norte; luego dividiendo esta máxima distancia por la variación q de Δ con la latitud, tendremos efectivamente la corrección a aplicar a ϕ . Si, en cambio, se trata de un límite sur, Δ es negativo y $(-1 - \Delta)$ representará asimismo la máxima distancia de la estrella al limbo lunar sur y, como antes, al dividirlo por q tendremos cómo debe variar ϕ para que desde el nuevo punto se vea la trayectoria de la estrella tangente a dicho limbo.

En cuanto a la variación en el tiempo, utilizaremos la expresión (96.10) que escribiremos en la forma

$$\tau = \frac{\pm k \cos \psi}{n} - \frac{f f' + g g'}{n^2} \quad (144.10)$$

Pero, en las proximidades del punto de contacto de una ocultación rasante, el ángulo ψ es aproximadamente igual a 90° , por lo que puede despreciarse el primer término de (144.10) y tomar simplemente

$$\tau = - \frac{f f' + g g'}{n^2}$$

Con los nuevos valores encontrados de la latitud ($\phi + \Delta\phi$) y del tiempo ($T_0 + \tau$) puede repetirse el proceso tomando dichos valores como aproximados, llegándose a valores más exactos de ϕ y T .

El ángulo de posición χ del punto en que se produce la ocultación rasante se calcula, una vez efectuada la última iteración, mediante la fórmula (90.10).

Una vez efectuado el cálculo de la latitud que corresponde a una cierta longitud λ , se repiten los cálculos para longitudes distintas de la anterior obteniendo sucesivamente los distintos puntos de la línea límite (al nivel del mar).

10.3.6 Observación de ocultaciones rasantes

Cuando uno de los paralelos de latitud que limitan la zona desde la que es visible una ocultación de una estrella por la Luna pasa cerca de nuestra estación, se procede al cálculo preciso de la posición de la línea límite desde la cual la ocultación será rasante.

Una de las ventajas de la observación de ocultaciones rasantes es que puede ser efectuada con telescopios de poca abertura. Ello, no obstante, obliga a una serie de restricciones a la hora de realizar una observación. Por ejemplo, debe tenerse en cuenta la magnitud de la estrella y, sobre todo, si la ocultación se produce por el borde oscuro o el iluminado de la Luna, para lo cual debe calcularse el ángulo de posición del cuerno iluminado y compararlo con el ángulo de posición de la rasante, teniendo en cuenta la fase de la Luna (creciente o decreciente).

Una vez efectuada la predicción se procede a representar sobre un mapa, a la mayor escala posible, los distintos puntos de la línea límite, que, como hemos dicho, está calculada para el nivel del mar. En consecuencia, deberá corregirse para obtenerla sobre la superficie topográfica. Para ello se ve que (Fig. 33.10) en un lugar A , al nivel del mar, se observa el mismo fenómeno que en el lugar B , de altitud a . Por lo tanto, la línea límite habrá que desplazarla en la dirección del acimut de la Luna una distancia

$$b = a \cot h$$

donde h es la altura de la estrella (o de la Luna).

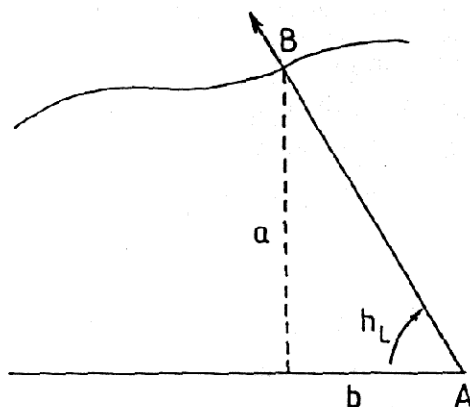


FIG. 33.10

Hecho esto, se procede a trazar el perfil previsto de la zona desde la que se observa la ocultación, utilizando para ello la obra “The Marginal Zone of the Moon” de C.B. Watts (llamada cartas de Watts). Con este fin se calcula el ángulo de posición Π del punto del limbo lunar por el que empieza la ocultación referido al eje de rotación de la Luna, a partir de los datos que proporcionan los Anuarios de las libraciones geocéntricas en longitud l_0 y en latitud b_0 y del ángulo de posición C_0 , o bien por cálculo directo empleando las fórmulas que hemos visto en los apartados anteriores.

A partir de l_0 , b_0 y C_0 se calculan l , b y C (valores topocéntricos) utilizando las expresiones dadas en 9.1.3. El ángulo Π se obtendrá restando C de χ (recordar (100.10)).

Con los datos Π , l , b se hallan las correcciones por limbo correspondientes a ángulos de posición cada $0^\circ.2$ a partir del Π hallado, que, llevados a escala conveniente como elevaciones o depresiones (respecto al limbo medio) según su signo, proporcionan el *perfil previsto* de dicha zona. Normalmente se dibujan 10° de limbo, centrados en el punto de tangencia (Π) de la rasante.

Se traza el contorno del limbo medio representándolo por un arco de cosenoide. El argumento horizontal es el ángulo de posición axial, generalmente a escala $1^\circ : 2.5 \text{ cm}$. El argumento vertical es la corrección de limbo, ampliada a escala $1'' : 2.5 \text{ cm}$. Trazado así el limbo medio, la trayectoria aparente de la estrella será una línea recta tangente al limbo lunar.

La observación de una ocultación rasante adquiere importancia cuando se dispone de varios equipos establecidos a distintas distancias de la línea límite. Según cual sea la distancia del punto de observación a la línea límite, la trayectoria aparente de la estrella cortará al perfil previsto a una u otra distancia de la trayectoria tangente al limbo medio. Los puntos de observación deben elegirse teniendo en cuenta el perfil previsto en cada caso. Para ello, se eligen sobre el mismo, las trayectorias aparentes que se pretende ver y se mide su distancia Δ a la trayectoria tangente (en segundos de arco). Entonces, para observar estas trayectorias, deberemos desplazarnos sobre la línea límite, una distancia que nos vendrá determinada por el valor de q (142.10) pues su inversa nos da la variación de latitud que deberemos efectuar correspondiente a una variación Δ de distancia de la Luna. Si se toma esta distancia igual a 1" (en radios lunares $r_L \text{ sen } 1''/R_L$) obtendremos la variación de latitud en grados, fácilmente transformable en metros o en kilómetros.

10.3.7 Reducción de observaciones rasantes

Los resultados de la observación de una ocultación rasante son únicamente los tiempos de contacto registrados desde los distintos puntos de observación.

Conocida la posición de los puntos de observación se efectúa la reducción de los puntos de contacto calculando para cada tiempo de contacto el ángulo de posición χ y la separación $\Delta\sigma$ respecto del limbo medio (ecuaciones (90.10) y (99.10) respectivamente). Representando los contactos como puntos sobre el limbo medio, estos puntos deberían coincidir sobre el perfil previsto. En caso contrario, puede estudiarse cual debe ser la corrección al ángulo de posición Π o a la separación $\Delta\sigma_w$ correspondiente al perfil previsto para mejorar la coincidencia de éste con los contactos observados.

La corrección en ángulo de posición es el llamado H.P.C. (Horizontal Profile Correction) -bien estudiado- que nos corrige el argumento de entrada Π de las cartas de Watts. Morrison asigna un valor promedio de $-0^\circ.25$ como corrección al ángulo de posición Π de las cartas de Watts, obtenido a partir de la observación de muchas ocultaciones rasantes.

La corrección a la separación $\Delta\sigma_w$ es el llamado V.P.C. (Vertical Profile Correction). Este V.P.C. no tiene un valor definido, sino que depende de la zona de la Luna en que se produzca la ocultación rasante. La existencia de este V.P.C. condiciona la localización de la línea límite, por lo cual se acostumbra a incluir su efecto en las predicciones tomando para ello un V.P.C. previsto, deducido de anteriores observaciones de ocultaciones rasantes en dicha zona de la Luna.

Como se ve, la observación de ocultaciones rasantes sirve para corregir las cartas de Watts. Por otra parte, por la segunda ley de Cassini del movimiento de la Luna sabemos que hay una zona de la misma que no es visible nunca iluminada. Por esta razón, las cartas de Watts, obtenidas a partir de fotografía, no dan correcciones para esta zona. Las ocultaciones rasantes producidas en dichas zonas oscuras permitirán "construir" el perfil lunar en ellas.

A partir de la observación de gran número de observaciones rasantes pueden determinarse ciertas fluctuaciones en el movimiento de la Luna y establecerse las diferencias entre los patrones de tiempo (tiempo de efemérides o dinámico y universal).

10.4 Pasos de Mercurio y Venus por delante del Sol

Los pasos de los planetas Mercurio y Venus por delante del disco del Sol pueden calcularse mediante la teoría general de los eclipses de Sol sustituyendo la Luna por el planeta. El valor del radio lunar se sustituirá por $k = 0.3897$ para Mercurio y por $k = 0.9975$ para Venus. No repetiremos, por tanto, la teoría expuesta en los apartados 10.1. Haremos únicamente algunas consideraciones que nos pueden ayudar a conocer mejor el fenómeno.

En el caso de Mercurio, el Sol pasa por el nodo ascendente de su órbita el 10-11 de noviembre y por el nodo descendente el 8-9 de mayo. Los pasos de Mercurio por delante del Sol se producen pues necesariamente en estas fechas aunque debido a la variación secular de la longitud del nodo dichas épocas se retrasan en un poco más de un día por siglo. El valor del segundo miembro de la fórmula (5.10), cuando la Tierra y Mercurio se hallan cerca de la línea de los nodos de la órbita de este último, es de unos $978''$ en noviembre y $963''$ en mayo. Por otra parte, los límites superiores de los intervalos de tiempo que separan los pasos de Mercurio y de la Tierra en cada uno de los nodos son: $\pm 3^{\text{d}}.97$ en noviembre y $\pm 1^{\text{d}}.88$ en mayo. Vemos pues que es mayor la probabilidad de que se produzca un paso en noviembre que en mayo, diferencia debida a la excentricidad de la órbita del planeta.

Estudiemos ahora la periodicidad del fenómeno que nos ocupa. Teniendo en cuenta la precesión de la línea de los nodos de la órbita de Mercurio, el periodo de revolución de la Tierra con respecto a dicha línea es $T = 365^{\text{d}}.25422$ mientras que el de Mercurio con respecto a esta misma línea (revolución draconítica) es

$D = 87^{\text{d}}.96913$. Supongamos que en una época dada ha tenido lugar un paso; el fenómeno se reproducirá cuando el Sol, Mercurio y la Tierra vuelvan a ocupar, aproximadamente, las mismas posiciones relativas, habiendo transcurrido entre los dos pasos $mD = nT$ días, siendo m y n números naturales. Los valores de m y n que verifican esta igualdad con una mejor aproximación son:

$m = 29$	$n = 7$	$mD - nT = - 5^{\text{d}}.675$
$m = 54$	$n = 13$	$mD - nT = + 2.028$
$m = 137$	$n = 33$	$mD - nT = - 1.618$
$m = 191$	$n = 46$	$mD - nT = + 0.410$

Supongamos que un paso de noviembre sea central y se haya producido en una época t_0 ; en la época $t_0 + 54 D$, por ejemplo, Mercurio se encuentra en conjunción con el mismo nodo, pero faltan 2.028 días para que la Tierra llegue también a él. Según las condiciones anteriores vemos que el paso tendrá lugar, pero no será central. Los intervalos obtenidos se combinan para dar lugar a una periodicidad irregular como puede observarse en la adjunta tabla que abarca los pasos ocurridos en este siglo y los que se producirán los años 2003 y 2006.

Año	Fecha	Periodicidad
1907	12 nov.	13 años
1914	7 nov.	7 años
1924	7 mayo	10 años
1927	8 nov.	3 años
1937	10 mayo	10 años
1940	12 nov.	3 años
1953	13 nov.	13 años
1957	6 mayo	4 años
1960	6 nov.	3 años
1970	9 mayo	10 años
1973	10 nov.	3 años
1986	13 nov.	13 años
1993	6 nov.	7 años
1999	15 nov.	6 años
2003	7 mayo	4 años
2006	8 nov.	3 años

En el caso de Venus las condiciones de posibilidad son todavía más restrictivas debido, en parte, a que Venus no entra en conjunción con cada uno de sus nodos más que 163 veces por siglo. El Sol pasa por el nodo ascendente de su órbita hacia el 9 de diciembre y por el nodo descendente hacia el 8 de junio. Los pasos de Venus por delante del Sol se producirán, pues, en estas fechas. El valor del segundo miembro de la fórmula (5.10) es de unos 2015' en diciembre y 1955' en junio. Para estudiar la periodicidad del fenómeno, teniendo en cuenta las variaciones del nodo y de la excentricidad, partiremos de los valores T y D de los periodos de revolución de la Tierra y Venus respectivamente con relación al nodo de la órbita de Venus:

$T = 365^{\text{d}}.25155$, $D = 224^{\text{d}}.69889$. Análogamente al caso de Mercurio, si en una época dada ha tenido lugar un paso el fenómeno se reproducirá cuando el Sol, Venus y la Tierra vuelvan a ocupar, aproximadamente, las mismas posiciones relativas habiendo transcurrido entre los dos pasos $mD = nT$ días. Los valores de m y n que verifican esta igualdad con una mejor aproximación son

$$m = 13 \quad n = 8 \quad mD - nT = -0^{\text{d}}.92683$$

$$m = 395 \quad n = 243 \quad mD - nT = -0.06510$$

En la tabla adjunta damos los pasos desde 1769 hasta 2490. En ella se advierte que cuando en junio o diciembre hay un paso al cabo de 8 años hay otro en el mismo mes y que el intervalo entre dos pasos en distinto mes es de 105 o 122 años, reproduciéndose los pasos cada 243 años.

Año	Fecha	Periodicidad
1769	8 junio	8 años
1874	8 dic.	105 años
1882	6 dic.	8 años
2004	7 junio	122 años
2012	7 junio	8 años
2117	10 dic.	105 años
2125	8 dic.	8 años
2247	9 junio	122 años
2255	8 junio	8 años
2360	9 dic.	105 años
2368	9 dic.	8 años
2490	8 junio	122 años

Bibliografía

- AOKI, S. y otros, 1982. *The New Definition of Universal Time*. Astronomy and Astrophysics, 105, 359-361.
- BROUWER, D. and CLEMENCE, G.M., 1961. *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press. London
- CALAFAT, R., 1977. *Ocultaciones rasantes de estrellas por la Luna*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Física. Universidad de Barcelona. Barcelona.
- CAPITAINE, N., 1998. *Overview, formulation and current situation for precession/nutation*. I.A.U. Highlights of Astronomy, Vol. 11 A, p. 153-157.
- DANBY, J.M.A., 1962. *Fundamentals of Celestial Mechanics*. The Macmillan Company. New York.
- DANJON, A., 1959. *Astronomie Générale*. J. et R. Sennac. Paris.
- DANJON, A., 1980 (2a Ed). *Astronomie Générale*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris.
- DUBYAGO, A.D., 1961. *The Determination of Orbits*. The Macmillan Company. New York.
- ESCOBAL, P.R., 1965. *Methods of Orbit Determination*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- FERRAZ-MELO, S. and NACOZY, P. E., Edit., 1983. *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*. Proceedings of a CN Pq-NSF Symposium and Workshop, Embu, Brasil.
- GARFINKEL, B., 1959. *The Orbit of a Satellite of an Oblate Planet*. The Astronomical Journal, 64, 9.
- HAGIHARA, Y., 1972. *Celestial Mechanics*. Vol. 2. The MIT Press. Cambridge.
- KOVALEVSKY, J.; MCCARTHY, D., 1998. *Astronomical effects of currents changes in fundamental astrometric references*. I.A.U. Highlights of Astronomy, Vol. 11 A, p. 182-186.
- LIESKE, J. H., 1977. *Expressions for the Precession Quantities based upon the IUA (1976) System of Astronomical Constants*. Astronomy and Astrophysics, 58, 1-16.
- LIESKE, J.H., 1979. *Precession Matrix based on IAU (1976) System of Astronomical Constants*. Astronomy and Astrophysics, 73, 282-284.
- MORANDO, B., 1974. *Mouvement d'un satellite artificiel de la Terre*. Gordon and Breach. Paris.
- MOULTON, F. R., 1914. *An Introduction to Celestial Mechanics*. MacMillan Company. New York.
- MÜELLER, I.I., 1964. *Introduction to Satellite Geodesy*. Frederick Ungar Publ. CO. New York.
- NÚÑEZ, J., 2002. *Astrometría óptica desde la Tierra y desde el espacio*. Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, Vol. LIX, Num. 10.
- ORÚS, J.J. de, 1966. *Apuntes de Astronomía*. Universidad de Barcelona. Cátedra de Astronomía. Facultad de Ciencias. Barcelona.
- PLUMMER, H. C., 1960. *An introductory Treatise on Dynamical Astronomy*. Dover Publications. New York.
- ROSSELLÓ, G., 1981. *Corrección de las constantes fundamentales a partir de la observación de ocultaciones de estrellas por la Luna*. Tesis Doctoral. Facultad de Física. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Barcelona.
- ROY, A.E., 1979. *Orbital Motion*. Adam Hilger Ltd. Bristol.
- SALAZAR, A., 1984. *Posiciones aparentes de las estrellas*. Boletín Astrnómico nº 8 del Instituto y Observatorio de Marina. San Fernando (Cádiz).
- SEVILLA, M.J., 1980. *El Sistema IAU(1976) de Constantes Astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas*. Comunicaciones III Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica, p. 685-706.
- SMART, W.M., 1953. *Celestial Mechanics*. Longmans, Green and CO. London.
- SMART, W.M., 1977. *Text-Book on Spherical Astronomy*. Cambridge University Press. Cambridge.

- Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid 2002. Instituto Geográfico Nacional. Madrid.
- Celestial Mechanics. 1982. 28. Nos. 1/2. Proceedings of the Seventh Oberwolfach Conference on *Mathematical Methods in Celestial Mechanics*, 1981. Edit. R.L.Duncombe. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht. Holland.
- Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1993. 56. Nos. 1/2. *Qualitative and Quantitative Behaviour of Planetary Systems*. Proceedings of the Third Alexander von Humbold Colloquium on Celestial Mechanics, 1992. Edit. R. Dvorak and J. Henrard. Kluwer Academic Pub. Dordrecht, Holland.
- Efemérides Astronómicas 2001. Real Instituto y Observatorio de la Armada. San fernando (Cádiz).
- Planetary and Lunar Coordinates for the years 1984-2000. Her Majesty's Stationery Office. London, 1983.
- Transactions of the International Astronomical Union XXII A. IAU Symposium 166: *Astronomical and Astrophysical Objectives of Sub-Milliarcsecond Optical Astrometry*. Den Haag, Holland, 1994.
- Transactions of the International Astronomical Union XXIV A. IAU Colloquium 165: *Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies*. Poznan, Poland, 1996. Edit. 1. Wytrzyszczak, J.H. Lieske, R.A. Feldman. Kluwer

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

Aberración

- anua, 159
- constante de -, 160
- corrección de -, 237
- de la luz, 157
- diurna, 159, 165
- elipse de -, 163
- estelar, 158
- planetaria, 158
- secular, 159

Aceleración

- centrífuga, 75
- de la gravitación, 75
- perturbatriz, 331
- secular, 384, 392

Acimut, 16

Acuario, 21

Achatamiento, 57

- dinámico de la Tierra, 93
- ecuatorial, 56
- polar, 56

Afelio, 153

Albedo, 219

Almucantarat, 15

Altitud reducida, 63

Altura, 16

Amplitud, 29

- occidua, 29
- ortiva, 29

Ángulo

- s de Euler, 144
- de fase, 202, 364

- - - geocéntrico, 364

- - - topocéntrico, 364

- de la vertical, 59

- de nutación, 94

- de posición, 212, 418, 431

- de precesión, 94

- de rotación propia, 94

- horario, 17

máximo - - -, 209

- paraláctico, 42, 419

Anillos, 195

 sistema de -, 195

Anomalía

- excéntrica, 129

- media, 129, 146

- verdadera, 120, 129

Año, 174

- anomalístico, 175

- astronómico, 102, 176

- civil, 176

- ficticio de Bessel, 177

- gregoriano, 176

- sidéreo, 174

- trópico, 175

Ápsides

 línea de los -, 153

Apoastro

 distancia del -, 146

Apogeo, 153, 203

Arco semidiurno, 29

Áreas

 constante de las -, 118

 integral de las -s, 118

 ley de las -s, 26, 119

Argumento

- de declinación del perihelio, 197
- de latitud del perihelio, 145, 196
- del nodo, 145
- del periastro, 145

Aries, 20

- medio, 27, 104
- verdadero, 27, 104

Armónicos de orden n , 73**Ascensión recta, 23**

- del nodo ascendente, 197
- planetocéntrica, 210

Asteroides, 195, 196**Atracciones**

- directas, 272
- indirectas, 272

Aurora, 32**B****Barker**

- ecuación de -, 141
- tablas de -, 142

Bessel

- año ficticio de -, 177
- números de -, 108, 165
- sistema de -, 405

Bólido, 196**Bradley, 163****Brillo**

- aparente, 217

C**Cabellera, 196****Calendario**

- gregoriano, 175
- juliano, 175

Cáncer, 21

- punto -, 20
- trópico de -, 20

Capricornio, 21

- punto -, 20
- trópico de -, 20

Cassini

- leyes de -, 349

Cénit (o zenit), 13**Cielo**

- línea del medio -, 14
- medio -, 14

Círculo

- horario, 15
- meridiano, 44
- polar antártico, 20
- polar ártico, 20

Claireaud

- fórmula de -, 80

Cola, 196**Colatitud, 14****Coluro**

- del equinoccio, 21
- del solsticio, 21

Cometa de 109 días, 142

- s 195, 196
- s no periódicos, 196
- s periódicos, 196

Conjunción

- inferior, 203
- superior, 203

Cono

- de penumbra, 404, 412
- de sombra, 404, 412

Constante

- s astronómicas IAU (1976), 110, 174
- de aberración, 160

- s estelares, 108, 165
- de la aberración diurna, 165
- de la energía, 126
- de la gravitación, 115
- de la nutación, 101
- de la precesión general, 97, 101
- de la precesión lunisolar, 101
- de las áreas, 118
- s vectoriales A,B,C, 150
- vectoriales eclípticas, 197
- vectoriales ecuatoriales, 197
- s vectoriales m,n, 151
- s vectoriales P,0,R, 146

Constelaciones, 21

- zodiacales, 21

Coordenadas

- celestes medias, 102
- - verdaderas, 102
- eclípticas, 24
- ecuatoriales, 23
- - medias, 102
- - verdaderas, 102
- esféricas, 15
- geocéntricas, 63
- geodésicas, 58
- geográficas, 58
- heliográficas, 212
- horarias, 16
- horizontales, 15
- planetocéntricas, 210
- planetográficas, 210
- polares, 140
- rectilíneas, 16
- reducidas, 136, 150
- selenocéntricas, 363
- topocéntricas, 63
- uranográficas, 23

Corrección de paralaje diurna, 63

Crepúsculo

- astronómico, 32
- civil, 32
- matutino, 32
- náutico, 32
- vespertino, 32

Criterio

- de Tisserand, 281

Cuadratura

- planeta en -, 203

Cuadraturas, 364

Cuarto

- creciente, 364
- menguante, 364

Cuernos

- línea de los -, 215

Culminación

- inferior, 29
- superior, 29

Chandier

- periodo de -, 86

D

D'Alambert

- forma de -, 344

Declinación, 17

- planetocéntrica, 210

Delaunay

- variables de -, 342

Descartes

- ley de -, 50

Desigualdad

- es de la inclinación, 397
- es de largo período, 346
- es periódicas, 346
- mensual, 153

Desviación de la vertical, 57

Día, 154

- cero de enero, 177
- juliano, 176
- - de efemérides, 176
- medio de efemérides, 189
- sidereal, 28

- sidéreo, 28, 186
- - aparente, 28
- - medio, 28
- solar, 36
- - medio, 37, 186
- - verdadero, 36

Diámetro aparente del Sol, 32

Dicotomía, 204, 214

Difusión

indicatriz de -, 219

Distancia, 16

- cenital, 16
- del apoastro, 146
- del periaastro, 146
- media, 122, 154
- polar, 17
- unidad astronómica de -, 154

Divisiones, 195

Divisor

pequeño -, 346

E

Eclipse, 401

- de Luna, 401, 423
- de Sol, 401, 423
- parcial, 424, 426
- penumbral, 423, 426
- total, 424, 426
- fase máxima del -, 417, 430
- fin del -, 417
- magnitud del -, 420, 431
- máximo del -, 422
- principio del -, 417

Eclíptica, 20

- eje de la -, 20
- media, 21, 102
- oblicuidad de la -, 20
- plano de la -, 20, 153
- polos de la -, 20
- verdadera, 22, 102

Ecuación

- anual, 368, 382, 383, 392
- de Barker, 141
- de equinoccios, 28, 111
- de Euler, 83
- - - generalizada, 91
- de Kepler, 132
- de sombra, 320
- de tiempo, 39, 182
- del centro, 36, 155, 179, 368, 391, 392
- de la órbita relativa, 120
- s de Lagrange, 337

Ecuador

- celeste, 14
- instantáneo, 57
- medio, 58, 102
- reducción al -, 37, 180
- verdadero, 102

Edad

- de la Luna, 367

Efecto paraláctico, 22

Efemérides

cálculo de -, 149

Eje

- de la eclíptica, 20
- de figura, 58
- del mundo, 13, 57
- de sombra, 404

Elementos

- eclípticos, 196
- ecuatoriales, 197
- orbitales, 144
- osculadores, 288

Elipse de aberración, 163

Elipsoide

- central de inercia, 57
- internacional, 55
- terrestre, 55

Elongación, 202

- máxima -, 203, 209
- - occidental, 203
- - oriental, 203

Emersión, 432, 435

Encke

fórmulas aproximadas de -, 246

método de -, 333, 334

Energía

- del sistema, 269

Enjambres

- meteorices, 196

Época

- de paso por el periastron, 123, 146

- standard J 2000, 174

Equinoccio, 20

coluro de los -s, 21

- de otoño, 20

- de primavera, 20, 176

- medio, 102

- verdadero, 102

Escorpio, 21

Esfera celeste, 13

Estación, 208

-es, 177

Estacionario

planeta -, 203

Este

punto cardinal -, 14

Estrella

- circumpolar, 44

- perpetuamente visible, 44

- polar, 105

-s fugaces, 196

Euler

ángulos de -, 144

ecuación de -, 83

ecuación generalizada de -, 91

fórmula, de -, 260

Evección, 368, 391, 392

Excentricidad, 121, 146

F

Factor

- de la forma dinámica de la Tierra, 74

- paraláctico en ascensión recta, 68

- - - declinación, 68

Fase, 367

- de un planeta, 214

- máxima, 417, 430

- mínima, 214

ángulo de -, 202

máximo - - -, 204

función de -, 217

Fases

- de la Luna, 364

Fecha

- juliana, 111, 176

- - modificada, 176

- de osculación, 335

Fórmula

- de Clairaut, 80

- de Jeffreys, 79

- de Laplace, 52

Fracción

- iluminada, 367

Fuerza

- perturbatriz, 298, 331

Función

- perturbatriz, 331

G

Gas

- interplanetario, 195, 196

Gauss, 232

método de -, 241

sistema de ecuaciones de -, 252, 300

Gegenschein, 196, 296

Géminis, 21

Geoide, 56, 76

Gibosa

forma -, 214

Gladstone

ley de -, 51

Grado

- de oscurecimiento, 420, 431

Gravedad

potencial de la -, 75

H

Hemisferio

- invisible, 13

- visible, 13

Hill

superficie límite de -, 283

Hodógrafa, 124

Hora

- legal, 39

- oficial, 39

Horizonte

- aparente, 14

- astronómico, 13, 57

depresión del -, 14

- geodésico, 57

- sensible, 14

- verdadero, 13

Husos horarios, 39

I

Iluminación

defecto de -, 215

Inclinación, 197

- crítica, 308

- de la órbita, 145

Indicatriz

- de difusión, 219

Índice de refracción, 51

Inmersión, 432, 435

Innes

tablas de -, 150

Integral

- de Jacobi, 281

- de las áreas, 118, 268

- de la energía, 126, 269

- del centro de gravedad, 268

- del momento angular, 268

- del momento lineal, 268

-es clásicas, 267, 269, 275

-es primeras, 265

Intensidad

- luminosa, 217

Invierno, 20, 178

J

Jacobi

integral de -, 281

Jeffreys

fórmula de -, 79

Juliano

día -, 176

siglo -, 111

Júpiter, 195

K

Kepler

ecuación de -, 132

1a ley de -, 121

2a ley de -, 26, 119

3a ley de -, 123

L

Lagrange

ecuaciones de -, 337

método de -, 336

paréntesis de -, 338

puntos de -, 288

Lagrange-Jacobi

identidad de -, 270

Lambert

teorema de -, 259

Laplace, 232

fórmula de -, 52

método de -, 233

plano invariante de -, 268

Latitud

- astronómica, 58

- celeste, 24

- del lugar, 14

- del perihelio, 145

- geocéntrica, 59

- geodésica, 58

- geográfica, 58

- heliográfica, 212

- planetográfica, 210

menor de -, 21

Legendre

polinomios de -, 70

Leo, 21

Leuschner

método de -, 238

Ley

- de las áreas, 26, 119, 135

- de atracción, 117

- de Descartes, 50

- de Gladstone, 51

- de Newton, 117

-es de Cassini, 349

-es de Kepler, 26, 117, 119, 121, 123

Libra, 21

punto -, 20

Libración

- diurna, 362

- física, 350

- en latitud, 359, 360

- en longitud, 351, 360

- óptica, 360

Limbo

- brillante, 214

- oscuro, 214

Límite

línea -, 447

- norte, 447

- sur, 447

Línea

- del medio cielo, 14

- de los ápsides, 153

- de los equinoccios, 20, 102

- de los nodos, 99, 144

- de los solsticios, 20

- límite, 447

- - norte, 447

- - sur, 447

Longitud

- aparente del Sol, 26

- celeste, 24

- del nodo, 95, 145

- del periastro, 145

- geográfica, 38

- heliográfica, 212

- media del perigeo, 155

- planetocéntrica, 215

- planetográfica, 210

máximo de -, 21

nutación en -, 97

precesión en -, 97

Lugar

latitud del -, 14

vertical de un -, 13

Luna

- llena, 364

- nueva, 364

Lunación, 369

Lúnula, 214

Luz

- antisolar, 196

- zodiacal, 196

LL

Lluvia

- de estrellas fugaces, 196

M

Magnitud

- aparente, 217

- de un eclipse, 420

Mañana, 29

Marte, 195

Matriz de precesión, 110

Máxima digresión, 43

- occidental, 43

- oriental, 43

Máximo de longitud, 21

Medianoche, 29

Mediodía, 29

Menor de latitud, 21

Mercurio, 195

Meridiana, 14

Meridiano, 14

- de efemérides, 189

- del lugar, 14

plano -, 14

Meteorito, 196

Meteoroides, 195, 196

Meteoros, 196

Método

- de Encke, 333

- de Lagrange, 336

- de las perturbaciones especiales, 336

- de Wittaker, 342

Modelo

- dinámico, 56

- geométrico, 55

Momento

- angular, 268

- de orden n , 73

- lineal, 116

Movimiento

- anuo del Sol, 19

- aparente del Sol, 19

- de traslación de la Tierra, 19

- del nodo, 396

- directo, 145

- diurno, 13

- diurno del Sol, 29

- kepleriano, 117

- medio, 122, 146

- medio sinódico, 205, 369

- - anomalístico, 369

- - sidéreo, 369

- - trópico, 369

- periódico del perigeo, 389

- propio de las estrellas, 172

- - en ascensión recta, 172

- - en declinación, 172

- retrógrado, 145

- secular del perigeo, 387, 388

Muller

fórmulas de -, 219

N

Nadir, 13

Neptuno, 195

Newton, 265

Nodo

- argumento del -, 145
- ascendente, 99, 144, 196
- ascensión recta del - -, 197
- descendente, 99, 144
- eliminación de los -s, 275
- línea de los -s, 99, 144
- longitud del -, 95, 100, 145, 196

Norte

- polo celeste -, 13
- punto cardinal -, 14

Núcleo, 196**Números besselianos, 108, 165****Nutación, 27**

- de origen solar, 97
- lunar, 100
- luni-solar, 101
- en longitud, 97
- en oblicuidad, 97

O**Oblicuidad**

- de la eclíptica, 20
- media de la eclíptica, 97
- verdadera de la eclíptica, 102

Ocaso, 29**Ocultación, 401**

- rasante, 447, 448, 451
- total, 448

Oeste

- Punto cardinal -, 14

Olbers, 232

- método de -, 257

Oposición, 203**Órbita**

- definitiva, 231
- osculatriz, 298
- preliminar, 231

- elementos de la -, 144
- inclinación de la -, 145

Orto, 29**Oscilaciones**

- forzadas, 357
- libres, 357

Osculación

- fecha de -, 335

Oscurecimiento

- grado de -, 420, 431

Otoño, 20, 177**P****Paralaje**

- anua, 166, 167
- del Sol, 65
- diurna, 63
- en altura, 64
- estelar, 167
- horizontal, 64
- - ecuatorial, 65

Paralelo celeste, 15**Parámetro, 121, 140****Paréntesis**

- de Lagrange, 338

Paso, 401

- de Mercurio, 454
- de Venus, 454

Perfil

- previsto, 452

Periastro, 121

- distancia del -, 146
- longitud del -, 145

Perigeo, 153, 203

- argumento del -, 145

Perihelio, 153

- argumento de declinación del -, 197
- argumento de latitud del -, 145, 196
- avance del -, 154
- longitud del -, 196

Periodo

- de Chandier, 86
- de revolución, 146
- euleriano, 86
- juliano, 176

Perpendicular, 14

Perturbaciones

- de primer orden, 345
- especiales, 297
- generales, 297
- periódicas, 297
- seculares, 297, 346

Piscis, 21

Planeta

- datos físicos de los -, 195
- en conjunción, 203
- en cuadratura, 203
- en oposición, 203
- estacionario, 203
- inferior, 202
- joviano, 195
- superior, 202
- terrestre, 195

Plano

- de la eclíptica, 20
- invariante de Laplace, 268
- horario, 15
- meridiano, 14
- vertical, 14

Plutón, 195

Pogson

- fórmula de -, 218

Polinomios de Legendre, 70

Polo

- celeste, 13

- de la eclíptica, 20

- norte, 13
- sur, 13

Polodia, 86

Polvo meteórico, 195, 196

Posición

- aparente, 158, 173
- media, 173
- verdadera, 158, 173

Potencial

- centrífugo, 76
- de la gravedad, 76
- gravitatorio, 76
- terrestre, 73

Precesión, 97

- de los equinoccios, 27
- de origen solar, 97
- en longitud, 98
- general en ascensión recta, 107
- - en declinación, 108
- - en longitud, 97
- lunar, 100
- luni-solar, 101
- matriz de -, 110
- planetaria, 101, 155

Primavera, 20, 177

Primer vertical, 14, 45

Problema

- de la fuerza central, 117
- de los dos cuerpos, 115
- de los n-cuerpos, 265
- s especiales, 265

Punto

- Aries, 20
- autumnal, 20
- Cáncer, 20
- Capricornio, 20
- s cardinales, 14
- cardinal este, 14
- - norte, 14
- - oeste, 14

- - sur, 14
- Libra, 20
- radiante, 196
- vernal, 20

R

Radio

- ecuatorial, 55
- medio de la Tierra, 22, 55
- polar, 55

Reducción

- a la eclíptica, 392
- al año, 109
- al día, 109
- al ecuador, 37, 180, 181

Reflexión

- especular, 218
- difusa, 219

Reforma

- gregoriana, 176
- juliana, 175

Refracción

- astronómica, 32, 51
- corregida de temperatura, 53
- índice de -, 51
- normal, 51

Retrogradación

- de la línea de los nodos, 100
- duración de la -, 209

Revolución

- anomalística, 361, 369
- draconítica, 361, 370
- sidérea, 369
- sinódica, 205, 369
- trópica, 369

S

Sagitario, 21

Satélite

- geoestacionario, 129
- sincrónico, 129
- s, 195

Saturno, 195

Scaliger, Julio, 176

Segundo, 189

- atómico, 190
- de efemérides, 189

Semidiámetro aparente del Sol, 33

Semieje mayor, 146, 154

Series

- t y g, 240

Sicigias, 364

Siglo juliano, 111

Signos del zodiaco, 21

Sistema

- energía del -, 269
- de anillos, 195
- de constantes astronómicas, 110
- de ecuaciones de Gauss, 252
- solar, 195
- Tierra-Luna, 22

Sol, 195, 220

- aparente, 174
- datos físicos del -, 195
- ficticio, 36, 179
- medio, 36, 182, 184
- movimiento anuo del -, 19
- aparente del -, 19
- diurno del -, 29
- verdadero, 179

Solsticio

- de invierno, 20
- de verano, 20

Solsticios, 20

Solución

- estable, 292
- inestable, 292
- s particulares, 265

Superficie
- límite de Hill, 283, 288

Sur
 polo celeste -, 13
 punto cardinal -, 14

T

Tablas de Innes, 150

Tarde, 29

Tauro, 21

Teoría
- de la Luna, 368

Terminador, 214

Término
- constante de la fuerza perturbatriz, 377
-s periódicos, 97
-s seculares, 97

Tiempo
- atómico, 190
- - internacional, 190
- civil, 38, 187
- de efemérides, 188
- de luz, 154, 157
- dinámico baricéntrico, 191
- - terrestre, 190
 ecuación de -, 39, 185
- newtoniano, 199
- oficial, 187
- sidéreo aparente, 28, 186
- - de efemérides, 189
- - medio, 28, 186
- solar aparente, 185
- solar medio, 37, 185, 188
- - verdadero, 36
- universal, 39, 187, 188
- - coordinado, 190

Tierra, La, 195

Tisserand
 criterio de -, 281

Trópico
- de Cáncer, 20
- de Capricornio, 20
Tycho Brahe, 377

U

Unidad astronómica de distancia, 154

Urano, 195

V

Variables
- de Delaunay, 342

Variación, 368, 377, 380, 392
- ánuca en ascensión recta, 173
- ánuca en declinación, 173
- de la excentricidad, 389

Vector de
- movimiento medio sinódico, 206

Velocidad
- circular, 127
- cósmica, 128
- de escape, 128
- de satelización, 128

Venus, 195

Verano, 20, 177

Vertical
- astronómica, 57
 desviación de la -, 57
- de un lugar, 13
- geodésica, 57
 primer -, 14

Virgo, 21

W

Watts

cartas de -, 438, 452

Weber-Fechner

ley de -, 217

Whittaker

método de -, 342

Z

Zodiaco, 21

signos del -

Astronomía esférica y mecánica celeste

Astronomía esférica y mecánica celeste es un texto mayoritariamente de Astronomía Fundamental dirigido tanto a estudiantes universitarios que necesiten un texto para sus estudios básicos o avanzados de Astronomía como a profesores universitarios o investigadores que lo precisen para su docencia o investigación. El tratamiento que se da de la materia, dotado del rigor matemático necesario, hace que el libro pueda utilizarse en los estudios de Física, Matemáticas o Ingeniería. Por otro lado, parte de su contenido sirve como base para estudiantes de Astrofísica que sin duda necesitan sólidos conocimientos de Astronomía Fundamental. Esta publicación viene a cubrir un hueco en la literatura docente en castellano dado que incluye numerosos temas sobre Astronomía Fundamental no desarrollados en ningún otro texto en dicha lengua.

Juan José de Orús Navarro. Doctor en Ciencias Matemáticas, licenciado en Ciencias Físicas e ingeniero industrial. Catedrático de la Universidad de Barcelona. Miembro de la Unión Astronómica Internacional y de la Académie Internationale d'Histoire des Sciences. Académico numerario en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona (Sección de Matemáticas y Astronomía).

M.^a Asunción Català Poch. Doctora en Ciencias, Sección de Matemáticas. Profesora titular emérita, con carácter honorífico de la Universidad de Barcelona. Miembro de la International Astronomical Union en la cual fue representante española en la Comisión 46 para la enseñanza de la Astronomía. Trabajó en el Institut Henri Poincaré, Laboratoire de Dynamique et Statistique Stellaire.

Jorge Núñez de Murga. Profesor titular de Astronomía de la Universidad de Barcelona. Investigador principal en diversos proyectos de investigación en las universidades de Yale y Berkeley. Miembro de la Comisión 8 de la Unión Astronómica Internacional. Académico numerario en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona (Sección de Matemáticas y Astronomía).

UNIVERSITAT 24

www.publicacions.ub.es

Publicacions i Edicions

