



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

DOBLE GRADO DE MATEMÁTICAS Y ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Trabajo de fin de grado

CONSTRUCCIÓN Y EVALUACIÓN DE CARTERAS DEL DJIA MEDIANTE MEDIDAS DE RIESGO

Autora: Rocío Mora García

Director: Dr. Josep Vives i Santa Eulalia
Realizado en: Departamento de Matemática Económica,
Financiera y Actuarial
Barcelona, 10 de junio de 2025

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado analiza la relación entre la rentabilidad y el riesgo en inversiones financieras, utilizando datos históricos de las 30 empresas que componen el DJIA. Para ver esta relación se realiza un ejercicio práctico mediante el cual se calculan diferentes medidas de riesgo como volatilidad, beta, VaR, AVaR, coeficiente de variación y downside deviation a partir de rentabilidades simples y medias.

Posteriormente, se implementa el modelo de Markowitz para construir carteras eficientes a partir de la frontera eficiente que proporciona este modelo. Por último, se analiza el modelo CAPM como una extensión del modelo de Markowitz, que introduce el concepto de rentabilidad esperada como determinante para conocer si los activos analizados se encuentran infravalorados o sobrevalorados.

Todo el análisis se lleva a cabo en R y se visualiza mediante un paquete de R llamado Shiny.

Agradecimientos

A mis padres, Remedios y Enrique, por enseñarme el valor del trabajo y del esfuerzo y, en especial, por haberlos sentido a lo largo de estos 5 años más cerca que nunca a pesar de los 689,7 km que nos separaban.

A mi hermana, Marta, por estar siempre a mi lado y enseñarme el valor de lo importante.

A Álvaro, por enseñarme verdaderamente que el amor es entrega, es paciente, no se irrita y que no tiene límites.

A Laura, por haber convertido en hogar un lugar desconocido y ser mi hombro diario durante todos estos años.

A mi tutor, el Dr. Josep Vives, por su esfuerzo, dedicación y ser mi guía constante a lo largo de estos meses, que han sido clave para el desarrollo de este trabajo.

Y, por último, a mi familia, amigas, compañeros y profesores que me han acompañado a lo largo de estos 5 años, muchas gracias.

Índice general

1.	Introducción	1
2.	Conceptos previos	2
2.1.	Concepto de riesgo financiero	2
2.2.	Rentabilidad y rentabilidad media	2
2.3.	DJIA	2
3.	Medidas de riesgo	4
3.1.	Volatilidad	4
3.2.	VaR	4
3.2.1.	Cuantiles	4
3.2.2.	Propiedades del VaR	7
3.2.3.	Cálculo del VaR	7
3.3.	Rango	9
3.4.	Desviación Absoluta Mediana	9
3.5.	AVaR	10
3.5.1.	Propiedades del AVaR	10
3.5.2.	Cálculo del AVaR	11
3.5.3.	Subaditividad	12
3.6.	Coefficiente de Variación	20
3.7.	Desviación a la baja	20
4.	Aplicación práctica: DJIA	22
4.1.	Objetivos	22
4.2.	Procedimiento	22
4.3.	Cálculo de la rentabilidad	23
4.4.	Aspectos importantes	24
4.5.	Cálculo de la correlación	24
4.6.	Modelo de Markowitz	26
4.6.1.	Hipótesis del modelo	26
4.6.2.	Problema matemático asociado	27

4.7.	Modelo CAPM	36
4.7.1.	Problema matemático asociado	37
4.7.2.	Relación entre el modelo CAPM y el modelo de Markowitz	38
5.	Conclusiones	42

1. Introducción

En la actualidad, cada vez más personas se interesan por los mercados financieros, invirtiendo en bolsa de forma activa o pasiva. Sin embargo, muchas de ellas carecen de los conocimientos necesarios para tomar decisiones informadas, lo que se traduce en resultados desfavorables. Como afirmaba el trader **José A. Madrigal** en una entrevista en *La Vanguardia*, “*el 98 % de las personas que empiezan a invertir en bolsa pierden dinero*”. Esta afirmación pone de relieve la necesidad de comprender mejor los riesgos asociados a la inversión financiera.

Durante mis estudios universitarios, me he dado cuenta de que el riesgo financiero es un concepto amplio que admite múltiples interpretaciones y formas de medición. En función de la medida utilizada, las decisiones de inversión pueden variar considerablemente. Este hecho, unido a mi interés por las finanzas cuantitativas, ha motivado la realización de este Trabajo de Fin de Grado centrado en el análisis de distintas medidas de riesgo financiero y su aplicación práctica en la construcción y valoración de carteras.

En la primera parte del trabajo se abordan, desde un enfoque teórico, siete medidas de riesgo ampliamente utilizadas: la volatilidad, el Value at Risk (VaR), el Average Value at Risk (AVaR), el rango, la desviación absoluta mediana, el coeficiente de variación y la desviación a la baja. Estas medidas se agrupan en dos categorías —simples y estructuradas— y se estudia la correlación entre ellas para identificar cuáles capturan dimensiones similares del riesgo.

Posteriormente, se aplica el modelo de Markowitz para construir la frontera eficiente asociada a cada medida, lo que permite comparar cómo varía la composición de las carteras óptimas en función del criterio de riesgo adoptado. Finalmente, se utiliza el modelo CAPM para calcular la rentabilidad esperada de las carteras eficientes y determinar si están sobrevaloradas o infravaloradas por el mercado.

La parte empírica se ha desarrollado con datos semanales de precios de cierre de las 30 empresas del índice *Dow Jones Industrial Average (DJIA)*, en el periodo comprendido entre 2022 y 2024. Aunque el estudio está limitado a este conjunto de datos, permite reflexionar sobre la relevancia de las distintas medidas de riesgo en la toma de decisiones y sobre la capacidad del modelo CAPM para valorar adecuadamente las carteras en un entorno real.

Este trabajo pretende, en definitiva, ofrecer una visión comparada y aplicada del riesgo financiero, destacando la importancia de una elección adecuada de las métricas de riesgo en la gestión de inversiones.

2. Conceptos previos

2.1. Concepto de riesgo financiero

El riesgo financiero comúnmente se define como la incertidumbre que lleva asociado el rendimiento futuro de una inversión, pero en el momento en el que se desea definir matemáticamente el riesgo a través de una fórmula matemática nos damos cuenta de que se trata de un concepto muy amplio, ya que depende de un gran número de consideraciones. Por este motivo, podemos encontrar diversas fórmulas para medir el riesgo. En este trabajo me he centrado en siete;

1. Volatilidad
2. Valor en Riesgo (VaR)
3. Rango
4. Desviación absoluta mediana
5. Pérdida esperada (AVaR)
6. Coeficiente de variación
7. Desviación a la baja

2.2. Rentabilidad y rentabilidad media

El concepto de rentabilidad hace referencia a la relación entre los beneficios obtenidos o que pueden obtenerse de una inversión y el capital invertido. Se trata de un indicador fundamental tanto para la empresa como para el inversor, ya que, para la empresa, la rentabilidad es una medida del éxito económico de sus actividades, ya que una mayor rentabilidad refleja una gestión eficiente que permitirá un incremento en la capacidad de crecimiento futuro.

Mientras que para el inversor, la rentabilidad permite estimar el retorno obtenido respecto al capital invertido, facilitando así la comparación entre diferentes oportunidades y la toma de decisiones sobre la permanencia o retirada de una determinada inversión.

En este trabajo he utilizado la fórmula de la **rentabilidad simple** para cada subperíodo $t \in [0, T]$ y también se empleará la fórmula de la **rentabilidad media** de T , donde:

- **t**. Representa cada uno de los subintervalos dentro del intervalo total de análisis.
- **T**. Es el horizonte temporal del análisis que en este caso es $T = 156$, que es el número de semanas que hay en el periodo analizado que va del 01/01/2022 al 31/12/2024.

2.3. DJIA

En la parte práctica de este trabajo he utilizado el **DJIA (Dow Jones Industrial Average)** que es un índice bursátil que refleja el comportamiento de las 30 empresas más grandes y representativas de EEUU que cotizan en la Bolsa de Nueva York. Estas compañías pertenecen a diversos sectores económicos, excluyendo el ámbito del transporte

y de los servicios públicos, los cuales cuentan con sus propios índices específicos. Destacar que, a diferencia de otros índices, el DJIA se pondera por el precio de las acciones y estas cantidades se emplearán en el cálculo de la rentabilidad en la parte práctica.

Además, destacar que se trata de uno de los principales indicadores del rendimiento general del mercado y de la economía estadounidense.

Las empresas que formaban parte de este índice a 31 de diciembre de 2024 y que son las que he utilizado en la parte práctica, son las siguientes [1]:

1. P&G	11. Coca-Cola	21. Nike
2. 3M	12. Goldman Sachs	22. NVIDIA
3. Amazon	13. Home Depot	23. Salesforce
4. American Express	14. Honeywell	24. Sherwin-Williams
5. Amgen	15. IBM	25. Travelers
6. Apple	16. Johnson & Johnson	26. UnitedHealth
7. Boeing	17. JPMorgan	27. Verizon
8. Caterpillar	18. McDonalds's	28. Visa
9. Chevron	19. Merck&Co	29. Walmart
10. Cisco	20. Microsoft	30. Walt Disney

Para la aplicación práctica he considerado que la rentabilidad semanal del periodo analizado de las 30 empresas que componen el DJIA es el precio de cierre semanal por acción del periodo comprendido del 01/01/2022 al 31/12/2024.

Destacar que para el cálculo de cada medida de riesgo he considerado la rentabilidad del subperíodo, que es el rendimiento que se habría obtenido al adquirir acciones al final de una semana y liquidarlas al final de la siguiente. Destacar que no he tenido en cuenta el entorno económico, dividendos, impuestos,... con la finalidad de simplificar el cálculo.

$$\text{Rentabilidad del subperíodo } t := r_t := \frac{\text{Valor Cierre}_t - \text{Valor Cierre}_{t-1}}{\text{Valor Cierre}_{t-1}}$$

Mientras que la rentabilidad media del periodo es el promedio de los rendimientos individuales r_t en cada periodo t entre N que es el número total de observaciones del periodo analizado.

$$\text{Rentabilidad media periodo } t := \mu_T := \frac{1}{N} \sum_{t \in T} r_t$$

3. Medidas de riesgo

Una de las mayores dificultades que sufre la economía financiera es medir el riesgo que lleva asociado un activo, que es uno de los aspectos clave en la toma de decisiones de inversión. Para ello se emplean medidas de riesgo para tratar de cuantificar el riesgo que lleva asociado una operación financiera. Por lo que en este apartado se estudian las diversas medidas de riesgo que pueden ser empleadas en la toma de decisiones financieras.

3.1. Volatilidad

Es una medida estadística basada en que los movimientos pasados pueden proporcionar información de interés sobre las futuras variaciones. Esta medida define el riesgo de una acción como la variación de la rentabilidad de una acción respecto al valor promedio o esperado.

La volatilidad [2] se define como la raíz cuadrada de la varianza [3] donde la varianza se define como:

$$\text{Var}(r_t) = \frac{1}{N} \sum_{t \in T} (r_t - \mu_t)^2.$$

Por lo que el cálculo de la volatilidad [3] se realiza de la siguiente manera:

$$\text{Volatilidad}_T := \sigma_T := \sqrt{\text{Var}(r_t)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t \in T} (r_t - \mu_T)^2}.$$

Ventajas de la volatilidad:

- Destaca su simplicidad de cálculo e interpretación ya que es fácil de implementar y comprender, lo que la hace accesible a todos los públicos.

Desventajas de la volatilidad:

- Esta medida pondera de la misma forma la información más próxima al periodo que la más lejana, lo que disminuye el peso de las observaciones más actuales y como consecuencia puede reducir la capacidad analítica para detectar cambios recientes.
- No incorpora información sobre eventos futuros esperados ya que se trata de una medida puramente retrospectiva, lo que puede afectar al resultado.

3.2. VaR

3.2.1. Cuantiles

Se llevará a cabo el estudio de los cuantiles de F_X , donde X es la ganancia descontada de una inversión y F_X es su función de distribución, antes de estudiar el VaR.

Para definir los cuantiles se denotará un cuantil como q . Donde q representa un cuantil de la variable aleatoria X , es decir, es un punto concreto de la distribución de probabilidad acumulada $F_X(x)$ de X .

Definición 3.1. [Pag 101, 4] Sea $\alpha \in (0,1)$. Para cualquier α -**cuantil** de X donde:

$$q \in [q_\alpha(X), q^\alpha(X)]$$

Se define:

- Un α -**cuantil superior** de X como:

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}.$$

- Un α -**cuantil inferior** de X como:

$$q_\alpha(X) = \inf\{x : \alpha \leq F_X(x)\}.$$

A continuación, se presentan las propiedades básicas de los cuantiles:

Proposición 3.2. [Pag 102, 4] Sean X, Y variables aleatorias;

- (1) $X \geq Y$ implica $q^\alpha(X) \geq q^\alpha(Y)$.
- (2) Para cualquier $b \in \mathbb{R}$, $q^\alpha(X + b) = q^\alpha(X) + b$.
- (3) Para $b > 0$, $q^\alpha(bX) = bq^\alpha(X)$.
- (4) $q^\alpha(-X) = -q_{1-\alpha}(X)$.

Demostración [Pag 120, 4].

- (1) Si $X \geq Y \implies X \leq x$ luego $Y \leq x$ y por lo tanto $P(X \leq x) \leq P(Y \leq x)$. Entonces,

$$F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(Y \leq x) = F_Y(x).$$

Como $\alpha < F_X(x) \implies \alpha < F_Y(x)$. Lo que implica que

$$\{x : \alpha < F_X(x)\} \subset \{x : \alpha < F_Y(x)\},$$

lo cual lleva a

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} \geq \inf\{x : \alpha < F_Y(x)\} = q^\alpha(Y).$$

- (2) Sea $Y = X + b$ entonces:

$$F_Y(x + b) = P(X + b \leq x + b) = F_X(x).$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} q^\alpha(X + b) &= \inf\{x + b : \alpha < F_Y(x + b)\} \\ &= \inf\{x : \alpha < F_Y(x + b)\} + b \\ &= \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} + b \\ &= q^\alpha(X) + b. \end{aligned}$$

- (3) Sabemos que $P(bX \leq x) = P(X \leq x/b) \implies F_{bX}(x) = F_X(x/b)$. Entonces para $b > 0$:

$$\begin{aligned} q^\alpha(bX) &= \inf\{x : \alpha < F_{bX}(x)\} \\ &= \inf\{x : \alpha < F_X(x/b)\} \\ &= \inf\{by : \alpha < F_X(y)\} \\ &= b \cdot \inf\{y : \alpha < F_X(y)\} \\ &= b \cdot q_\alpha(X). \end{aligned}$$

- (4) Para demostrar la propiedad 4 primero tenemos que demostrar la siguiente igualdad:

$$\forall b \in \mathbb{R}, \inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} = \inf\{x : b \leq P(X < x)\}.$$

Conocemos que, $P(X < x) \leq P(X \leq x)$ y si $b \leq P(X < x)$ entonces $b \leq P(X \leq x)$, lo que implica que:

$$\{x : b \leq P(X < x)\} \subset \{x : b \leq P(X \leq x)\}.$$

Por lo que:

$$\inf\{x : b \leq P(X < x)\} \geq \inf\{x : b \leq P(X \leq x)\}.$$

Si demostramos que la inecuación es estricta llegamos a una contradicción, entonces procederemos por reducción al absurdo demostrando que es cierta la igualdad.

Suponemos que:

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} < x^* < \inf\{x : b \leq P(X < x)\}$$

para algún $x^* \in \mathbb{R}$.

Entonces $P(X < x^*) < b$ y como $x \rightarrow P(X < x)$ es continua por la izquierda,

$\exists \hat{x} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} < \hat{x} < x^*$$

para

$$P(X < \hat{x}) < b. \tag{1}$$

Como $\hat{x} > \inf\{x : b \leq P(X \leq x)\}$ entonces $b \leq P(X \leq \hat{x})$ que entra en contradicción con (1). Por tanto

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} = x^* = \inf\{x : b \leq P(X < x)\}.$$

Para demostrar la proposición 4 utilizaremos:

$$F_{-X}(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X < -x).$$

Por lo que mediante las siguientes igualdades demostraremos 4:

$$\begin{aligned} q^\alpha(-X) &= \inf\{x : \alpha < F_{-X}(x)\} \\ &= -\sup\{-x : \alpha < F_{-X}(x)\} \\ &= -\sup\{-x : \alpha < 1 - P(X < -x)\} \\ &= -\sup\{y : \alpha < 1 - P(X < y)\} \\ &= -\sup\{y : P(X < y) < 1 - \alpha\} \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha \leq P(X < y)\} \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha \leq P(X \leq y)\} \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha \leq F_X(y)\} \\ &= -q_{1-\alpha}(X). \end{aligned}$$

□

Una vez explicados los cuantiles, se puede proceder a la explicación del VaR como medida de riesgo.

El **VaR** es una técnica estadística que mide el riesgo financiero de una inversión. Surge como respuesta a la necesidad de cuantificar la pérdida máxima que puede sufrir una inversión en un periodo determinado y a un nivel de confianza $1 - \alpha$.

Definición 3.3. *El Value at Risk (VaR) [Pag 103, 4] a un nivel de confianza $1 - \alpha$ se define como:*

$$\text{VaR}^\alpha(X) = -q^\alpha(X) = -\inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

A continuación, se presentan las propiedades básicas del VaR:

3.2.2. Propiedades del VaR

Proposición 3.4. [Pag 104, 4] *Sean X, Y variables aleatorias:*

- (1) $X \geq Y \implies \text{VaR}^\alpha(X) \leq \text{VaR}^\alpha(Y)$.
- (2) $\forall a \in \mathbb{R}, \text{VaR}^\alpha(X + a) = \text{VaR}^\alpha(X) - a$.
- (3) $\forall a \geq 0, \text{VaR}^\alpha(aX) = a\text{VaR}^\alpha(X)$.

Demostración.

- (1) Sea $X \geq Y$, entonces:

$$\text{VaR}^\alpha(X) = -q^\alpha(X) \leq -q^\alpha(Y) = \text{VaR}^\alpha(Y).$$

- (2) $\forall a \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\text{VaR}^\alpha(X + a) = -q^\alpha(X + a) = -q^\alpha(X) - a = \text{VaR}^\alpha(X) - a.$$

- (3) $\forall a \geq 0$,

$$\text{VaR}^\alpha(aX) = -q^\alpha(aX) = -a \cdot q^\alpha(X) = a\text{VaR}^\alpha(X). \quad \square$$

3.2.3. Cálculo del VaR

En este apartado se llevará a cabo la explicación de cómo se realiza el cálculo del VaR en función de si X es una variable discreta o continua.

Caso discreto. El VaR para distribuciones discretas es el siguiente:

Lema 3.5. [Pag 106, 4] *Sea X una variable aleatoria discreta tal que*

$$P(X = x_i) = p_i, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1 \text{ y } x_1 < x_2 < \dots < x_N.$$

Entonces:

$$\text{VaR}^\alpha(X) = -x_{k_\alpha}$$

donde $k_\alpha \in \mathbb{N}$ es el número más grande que verifica: $\sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i \leq \alpha$.

Demostración [Pag 107, 4]. Sea X una distribución discreta y $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Tenemos que:

$$P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k p_i.$$

Además, utilizamos:

$$\min \left\{ k : \alpha < \sum_{i=1}^k p_i \right\} = \max \left\{ k : \sum_{i=1}^{k-1} p_i \leq \alpha \right\}.$$

Por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} q^\alpha(X) &= \inf\{x : \alpha < P(X \leq x)\} \\ &= \min\{x_k : \alpha < P(X \leq x_k)\} \\ &= \min \left\{ x_k : \alpha < \sum_{i=1}^k p_i \right\} \\ &= \max \left\{ x_k : \sum_{i=1}^{k-1} p_i \leq \alpha \right\} \\ &= x_{k_\alpha}. \end{aligned}$$

Y concluimos que

$$\text{VaR}^\alpha(X) = -q^\alpha(X).$$

□

Caso continuo. Para distribuciones continuas, el cálculo se realiza de la siguiente manera:

Lema 3.6. [Pag 102, 4] Si $F_X(x)$ es continua y estrictamente creciente, entonces:

$$q^\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha).$$

Demostración [Pag 102, 4]. Que F_X sea continua y estrictamente creciente garantiza que F_X es invertible. La función inversa

$$\alpha \rightarrow F^{-1}(\alpha)$$

es continua y $\alpha < F_X(x)$ es equivalente a $F_X^{-1}(\alpha) < x$. Entonces:

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} = \inf\{x : F_X^{-1}(\alpha) < x\} = F_X^{-1}(\alpha).$$

□

Ventajas del VaR:

- Facilita medir el riesgo
- Su simplicidad ya que cuantifica el riesgo de una inversión en 1 solo número lo que hace simplifica la valoración del riesgo.
- Es una técnica estadística muy estandarizada lo que facilita su comparación

Desventajas del VaR:

- El VaR no facilita información de las posibles pérdidas potenciales en situaciones con una probabilidad inferior a α .
- La utilidad del VaR depende de la calidad de los datos empleados.
- El VaR no considera todas las peores situaciones posibles por lo que cuando se realiza su cálculo se tiene que complementar con otros test para emplearlo como medida de riesgo.
- La dificultad y elevados costes de algunos métodos empleados para el cálculo del VaR como el método Monte Carlo.
- Una desventaja es que el VaR no verifica la subaditividad, es decir, no se cumple:

$$\text{VaR}^\alpha(X + Y) \leq \text{VaR}^\alpha(X) + \text{VaR}^\alpha(Y).$$

3.3. Rango

El rango es la medida de riesgo más sencilla que existe, definida como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo del conjunto de datos analizados. Su utilidad principal en el ámbito financiero es ofrecer una estimación rápida del riesgo o la volatilidad de un activo financiero a lo largo de un período determinado.

Matemáticamente el rango [5] se define como:

$$\text{Rango}_T := \max_{t \in T}(r_t) - \min_{t \in T}(r_t).$$

Ventajas del Rango:

- Es muy fácil de calcular e interpretar, ya que solo se requieren los valores extremos del conjunto de datos.
- Facilita la comparación entre distintos activos o periodos, gracias a su simplicidad.

Desventajas del Rango:

- Es muy sensible a la presencia de datos extremos atípicos ya que puede distorsionar significativamente los resultados obtenidos.
- No considera los valores intermedios del conjunto, lo cual puede llevar a interpretación incompleta de los resultados.

3.4. Desviación Absoluta Mediana

La desviación absoluta mediana es una medida de riesgo que cuantifica la volatilidad de la rentabilidad de un activo financiero, tomando como referencia la mediana del conjunto de rentabilidades. Su definición matemática es la siguiente [6]:

$$\text{Desviación absoluta mediana} := \frac{1}{N} \sum_{t \in T} |r_t - \text{Med}_T|.$$

Ventajas de la desviación absoluta mediana:

- Su fácil interpretación.
- Si los datos presentan cambios extremos esta medida de riesgo tiene una mayor estabilidad que otras medidas.
- Al usarse la mediana en lugar de la media en su cálculo matemático disminuye la influencia de datos atípicos o extremos.

Desventaja de la desviación absoluta mediana:

- No es siempre eficiente en grandes muestras que siguen una distribución normal.

3.5. AVaR

En este apartado se realizará la explicación del AVaR que es una medida de riesgo que comparte con el VaR su simplicidad pero que es preferible al VaR, ya que facilita información de las posibles pérdidas potenciales en situaciones con una probabilidad inferior a α .

Definición 3.7. *El Average Value at Risk (AVaR) [Pag 125, 4] de X se define como:*

$$\text{AVaR}^\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}^\beta(X) d\beta = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\beta(X) d\beta.$$

3.5.1. Propiedades del AVaR

El AVaR comparte las propiedades con el VaR y son las siguientes [Pag 126, 4]:

Proposición 3.8. *Sean X, Y variables aleatorias tal que $X \leq Y$ y $m \in \mathbb{R}$:*

- (1) $\text{AVaR}^\alpha(X) \geq \text{AVaR}^\alpha(Y)$.
- (2) $\text{AVaR}^\alpha(X + m) = \text{AVaR}^\alpha(X) - m$.
- (3) Para $\lambda \geq 0$, $\text{AVaR}^\alpha(\lambda X) = \lambda \text{AVaR}^\alpha(X)$.

Demostración.

- (1) Si $X \leq Y$, se verifica que:

$$\text{AVaR}^\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}^\beta(X) d\beta \geq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}^\beta(Y) d\beta = \text{AVaR}^\alpha(Y).$$

- (2) Para cualquier $m \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{AVaR}^\alpha(X + m) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}^\beta(X + m) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^\alpha \text{VaR}^\beta(X) - m \right) d\beta \\ &= \text{AVaR}^\alpha(X) - m. \end{aligned}$$

Para realizar la segunda igualdad se debe tener en cuenta que si $Y = X + m$, entonces:

$$\begin{aligned}\text{VaR}^\alpha(Y) &= -F_Y^{-1}(\alpha) \\ &= -(F_X^{-1}(\alpha) + m) \\ &= -F_X^{-1}(\alpha) - m \\ &= \text{VaR}^\beta(X) - m.\end{aligned}\tag{2}$$

(3) $\forall \lambda \geq 0$, se cumple:

$$\begin{aligned}\text{AVaR}^\alpha(\lambda X) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}^\beta(\lambda X) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \lambda \text{VaR}^\beta(X) d\beta \\ &= \lambda \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}^\beta(X) d\beta \\ &= \lambda \text{AVaR}^\alpha(X).\end{aligned}\quad \square$$

3.5.2. Cálculo del AVaR

Caso discreto Para explicar cómo se realiza el cálculo del AVaR para distribuciones discretas, se tendrá en cuenta el *Lema 3.5*. Ahora si se procede a explicar cómo se realiza el cálculo del AVaR para distribuciones discretas:

Corolario 3.9. [Pag 129, 4] Sea X una variable aleatoria discreta con $P(X = x_i) = p_i$, $p_1 + \dots + p_N = 1$ y $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Entonces:

$$\text{AVaR}^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i x_i + x_{k_\alpha} \left(\alpha - \sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i \right) \right].$$

donde $k_\alpha \in \mathbb{N}$ es el número más grande que verifica: $\sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i \leq \alpha$.

Demostración [Pag 129, 4]. Por el anterior **Lema 2.8**, sabemos que se verifica:

$$q^\alpha(X) = -\text{VaR}^\alpha(X) = x_{k_\alpha},$$

por eso:

$$\begin{aligned}P(X < q^\alpha(X)) &= \sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i \\ \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}) &= \sum_{i=1}^{k_\alpha-1} p_i x_i.\end{aligned}$$

Y substituyendo en la **Proposición 2.12**, obtenemos el resultado deseado. $\square$

Caso continuo El siguiente corolario explica cómo se lleva a cabo el cálculo del AVaR para distribuciones continuas:

Corolario 3.10. [Pag 129, 4] Si X es una variable aleatoria con función de distribución F_X estrictamente creciente y continua, entonces:

$$\text{AVaR}^\alpha(X) = -\mathbb{E}(X|X \leq q^\alpha(X)).$$

Demostración [Pag 155, 4]. Como F_X es continua, $\forall q \in \mathbb{R}$,

$$P(X = q) = 0.$$

Por el Lema 3.6,

$$q^\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$$

entonces:

$$\begin{aligned} P(X < q^\alpha(X)) &= P(X \leq q^\alpha(X)) - P(X = q^\alpha(X)) \\ &= P(X \leq q^\alpha(X)) \\ &= F_X(q^\alpha(X)) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5), obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{AVaR}^\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha} [\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}) + q^\alpha(X)(\alpha - P(X < q^\alpha(X)))] \\ &= -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\frac{1}{P(X \leq q^\alpha(X))} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\mathbb{E}(X|X \leq q^\alpha(X)). \end{aligned}$$

tal y como queríamos. □

3.5.3. Subaditividad

El AVaR no comparte con el VaR la desventaja de presentar un mayor riesgo en inversiones diversificadas, ya que el AVaR verifica la siguiente propiedad que se denomina subaditividad:

Teorema 3.11 (Subaditividad del AVaR). [Pag 126, 4] $\forall X, Y$:

$$\text{AVaR}^\alpha(X + Y) \leq \text{AVaR}^\alpha(X) + \text{AVaR}^\alpha(Y).$$

Antes de realizar la demostración de este teorema, necesitamos los siguientes resultados que nos proporcionarán una formulación alternativa del AVaR.

En primer lugar, enunciaré un lema técnico:

Lema 3.12. Sea $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Sea U una variable aleatoria distribuida uniformemente en $(0,1)$. Entonces la variable aleatoria Y se define como $Y(x) = q^{U(x)}(X)$ y tiene la misma distribución que X [Pag 127, 4].

Demostración [Pag 154, 4]. Utilizaremos la notación siguiente $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ para

$$g(\alpha) = q^\alpha(X).$$

Definimos $Y = g(U)$ y como U es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $(0, 1)$, $\forall$ conjunto Boreliano $A \subset (0, 1)$ la probabilidad de que U esté dentro de A es:

$$P(U \in A) = m(A)$$

donde m es la medida de Lebesgue.

Fijamos $y \in \mathbb{R}$ entonces como máximo existe un α tal que:

$$g(\alpha) = q^\alpha(X) = y.$$

Esto significa que la antiimagen de $g^{-1}(y)$ está formada por un solo punto entonces:

$$P(g(U) = y) = P(U \in g^{-1}(y)) = m(g^{-1}(y)) = 0. \quad (3)$$

Por la definición de cuartil superior que es la siguiente:

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

tenemos que $\alpha < F_X(x)$ entonces $q^\alpha(X) \leq x$. Lo que significa que:

$$\{\alpha : \alpha < F_X(y)\} \subset \{\alpha : q^\alpha(X) \leq y\} = \{\alpha : g(\alpha) \leq y\}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(U) \leq y) \\ &= P(g(U) < y) + P(g(U) = y) \\ &= P(g(U) < y) \\ &\leq P(U < F_X(y)) \\ &= F_X(y). \end{aligned}$$

Por lo que hemos visto que $F_Y(y) = F_X(y)$, lo que demuestra el lema. $\square$

A continuación obtendré una desigualdad que me permitirá dar una formulación alternativa del AVaR:

Sea f_U una densidad uniforme en $(0,1)$ que se define como:

$$f_U(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

lo que implica que:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} q^s(X) f_U(s) ds = \int_0^1 q^s(X) ds.$$

Por lo que por el Lema3.12 para cualquier variable aleatoria X se verifica que:

$$\int_0^1 q^s(X) ds = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) \quad (4)$$

ya que X e Y tienen las mismas distribuciones.

Ahora se aplicará la ecuación (4) para obtener una formulación alternativa del AVaR:

Proposición 3.13. [Pag 128, 4] $\forall \alpha \in (0, 1)$

$$\text{AVaR}^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \left[\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}) + q^\alpha(X)(\alpha - P(X < q^\alpha(X))) \right]. \quad (5)$$

Demostración [Pag 128, 4]. La parte negativa de x la denotamos por x^- , en otras palabras, $x^- = -\min\{x, 0\}$. Como $f(x) = -x^-$ es una función no decreciente, por el siguiente lema:

Lema 3.14. [Pag 102, 4] Sea X una variable aleatoria. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua por la derecha y no decreciente, entonces:

$$q^\alpha(f(X)) = f(q^\alpha(X)).$$

Para cualquier variable aleatoria Y y todo $\beta \in (0, 1)$ se satisface:

$$q^\beta(-Y^-) = q^\beta(f(Y)) = f(q^\beta(Y)) = -(q^\beta(Y))^- . \quad (6)$$

Para simplificar la notación, escribimos $q^\alpha(X) = q^\alpha$. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{AVaR}^\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\beta(X) \, d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (q^\beta(X) - q^\alpha) \, d\beta - q^\alpha \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 -(q^\beta(X) - q^\alpha)^- \, d\beta - q^\alpha \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 -(q^\beta(X - q^\alpha))^- \, d\beta - q^\alpha \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 q^\beta(-(X - q^\alpha)^-) \, d\beta - q^\alpha \\ &= -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(-(X - q^\alpha)^-) - q^\alpha \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_{\{X < q^\alpha\}} (X - q^\alpha) \, dP - q^\alpha \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left[\int_{\{X < q^\alpha\}} X \, dP - \int_{\{X < q^\alpha\}} q^\alpha \, dP + \alpha q^\alpha \right] \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left[\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}}) + q^\alpha(\alpha - P(X < q^\alpha)) \right]. \quad \square \end{aligned}$$

A partir de la **Proposición 3.11.** se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 3.15. [Pag 129, 4] Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución F_X es estrictamente creciente y continua, entonces:

$$\text{AVaR}^\alpha(X) = -\mathbb{E}(X | X \leq q^\alpha(X)).$$

Demostración [Pag 155, 4]. Como F_X es continua, $\forall q \in \mathbb{R}$,

$$P(X = q) = 0.$$

Por el siguiente lema:

Lema 3.16. [Pag 102, 4] Si $F_X(x)$ es continua y estrictamente creciente, entonces tenemos que:

$$q^\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P(X < q^\alpha(X)) &= P(X \leq q^\alpha(X)) - P(X = q^\alpha(X)) \\ &= P(X \leq q^\alpha(X)) \\ &= F_X(q^\alpha(X)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

y sustituyendo en (2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{AVaR}^\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha} [\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}) + q^\alpha(X)(\alpha - P(X < q^\alpha(X)))] \\ &= -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \leq q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\frac{1}{P(X \leq q^\alpha(X))} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \leq q^\alpha(X)\}}) \\ &= -\mathbb{E}(X | X \leq q^\alpha(X)) \end{aligned}$$

tal y como se quería. □

Destacar que en distribuciones generales existe la posibilidad de que F_X tenga un salto en α . Para esta posible situación se empleará el siguiente lema:

Lema 3.17. [Pag 130, 4] Para $\alpha \in (0, 1)$, sea $q^\alpha = q^\alpha(X)$ y fijamos:

$$\mathbb{1}_X^\alpha = \begin{cases} \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}}, & \text{si } P(X = q^\alpha) = 0 \\ \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}} + k \mathbb{1}_{\{X = q^\alpha\}}, & \text{si } P(X = q^\alpha) > 0 \end{cases}$$

donde:

$$\kappa = \frac{\alpha - P(X < q^\alpha)}{P(X = q^\alpha)}. \quad (7)$$

Por lo que:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_X^\alpha) = \alpha \quad (8)$$

y $\forall \omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_X^\alpha(\omega) \in [0, 1] \quad (9)$$

Demostración [Pag 156, 4]. Para la ecuación (3) se puede observar que si $P(X = q^\alpha) = 0$ entonces:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_X^\alpha) = P(X < q^\alpha) = P(X \leq q^\alpha) = \alpha \quad (10)$$

por el contrario si $P(X = q^\alpha) > 0$ obtenemos:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_X^\alpha) = P(X < q^\alpha) + \alpha - P(X < q^\alpha) = \alpha.$$

Para demostrar la segunda afirmación comenzamos observando que cuando

$$P(X = q^\alpha) = 0$$

entonces

$$\mathbb{1}_X^\alpha = \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}} \in \{0, 1\}$$

y que si $P(X = q^\alpha) > 0$ y $\omega \notin \{X = q^\alpha\}$ entonces

$$\mathbb{1}_X^\alpha(\omega) = \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}}(\omega) \in \{0, 1\}.$$

El único caso no trivial se da cuando $P(X = q^\alpha) > 0$ y $\omega \in \{X = q^\alpha\}$, entonces:

$$P(X = q^\alpha) = F_X(q^\alpha) - F_X(q_-^\alpha)$$

por lo que para $\omega \in \{X = q^\alpha\}$

$$\mathbb{1}_X^\alpha(\omega) = \kappa = \frac{\alpha - F_X(q_-^\alpha)}{F_X(q^\alpha) - F_X(q_-^\alpha)}.$$

Recordemos que la definición de q^α es:

$$q^\alpha = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}$$

por lo que para cualquier $q < q^\alpha$ tenemos $\alpha \geq F_X(q)$, entonces:

$$\alpha \geq F_X(q_-^\alpha).$$

Y para cualquier $q > q^\alpha$ con $\alpha < F_X(q)$, por la continuidad por la derecha de F_X tenemos:

$$\alpha \leq F_X(q^\alpha).$$

Por lo que queda demostrado que $\alpha \in [F_X(q_-^\alpha), F_X(q^\alpha)]$ lo que implica que el cociente de la ecuación (6) se encuentra en $[0, 1]$. $\square$

En la siguiente proposición se expresa AVaR^α como una esperanza gracias a la definición de $\mathbb{1}_X^\alpha$:

Proposición 3.18. [Pag 130, 4] $\forall \alpha \in (0, 1)$.

$$\text{AVaR}^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_X^\alpha).$$

Demostración [Pag 130, 4]. Escribiré $q^\alpha(X) = q^\alpha$. Si $P(X = q^\alpha) = 0$ entonces $P(X < q^\alpha) = P(X \leq q^\alpha) = \alpha$ por lo que por la Proposición 3.13:

$$\text{AVaR}^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}}) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_X^\alpha).$$

Si $P(X = q^\alpha) > 0$ utilizando:

$$\int_{\{X=q^\alpha\}} X \, dP = \int_{\{X=q^\alpha\}} q^\alpha \, dP = q^\alpha P(X = q^\alpha)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_X^\alpha) &= \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}}) + \mathbb{E}\left(X \frac{\alpha - P(X < q^\alpha)}{P(X = q^\alpha)} \mathbb{1}_{\{X = q^\alpha\}}\right) \\ &= \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}}) + \int_{\{X = q^\alpha\}} X \frac{\alpha - P(X < q^\alpha)}{P(X = q^\alpha)} \, dP \\ &= \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}}) + \frac{\alpha - P(X < q^\alpha)}{P(X = q^\alpha)} \int_{\{X = q^\alpha\}} X \, dP \\ &= \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < q^\alpha\}}) + q^\alpha(\alpha - P(X < q^\alpha)) \\ &= -\alpha \text{AVaR}^\alpha(X) \end{aligned}$$

y llegamos al resultado deseado. $\square$

En el Lema 3.17 se ha visto que la variable aleatoria $Z(\omega) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{1}_X^\alpha(\omega)$ es integrable, con esperanza 1 y acotada inferiormente por $\frac{1}{\alpha}$. Por lo que ahora podemos definir una nueva medida de probabilidad:

$$Q_X^\alpha(A) = \int_A Z \, dP.$$

Por lo que usando esta medida de probabilidad se puede dar una definición simplificada del AVaR que nos simplificará la demostración de la subaditividad:

$$\text{AVaR}^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_X^\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \int_\Omega X \mathbb{1}_X^\alpha \, dP = - \int_\Omega X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} \, dP = -\mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X).$$

Antes de dar la demostración de subaditividad, es necesario conocer el siguiente resultado:

Teorema 3.19. [Pag 131, 4] Para $\alpha \in (0, 1)$ tomamos:

$$P_\alpha = \left\{ Q : Q \text{ es una medida de probabilidad, } Q \ll P, \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

Entonces:

$$\sup\{-\mathbb{E}_Q(X) : Q \in P_\alpha\} = \text{AVaR}^\alpha(X).$$

Demostración [Pag 131, 4]. Escribimos $q^\alpha = q^\alpha(X)$. Sabemos que:

$$\frac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{1}_X^\alpha(\omega).$$

Por la definición de $\mathbb{1}_X^\alpha$ del Lema 3.16 tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) &= \frac{1}{\alpha} \text{ para } \omega \in \{X < q^\alpha\}. \\ \frac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) &= \frac{1}{\alpha} \kappa \text{ para } \omega \in \{X = q^\alpha\}. \\ \frac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) &= 0 \text{ para } \omega \in \{X > q^\alpha\}. \end{aligned}$$

Sea Q una medida arbitraria de P_α , entonces calculamos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(X) &= \int_\Omega X \frac{dQ}{dP} \, dP \\ &= \int_{\{X < q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} \, dP + \int_{\{X = q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} \, dP + \int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} \, dP \\ &= \int_{\{X < q^\alpha\}} X \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) \, dP + \int_{\{X < q^\alpha\}} X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} \, dP \\ &\quad + \int_{\{X = q^\alpha\}} X \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \kappa \right) \, dP + \int_{\{X = q^\alpha\}} X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} \, dP \\ &\quad + \int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} \, dP + \int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} \, dP \\ &= \int_{\{X < q^\alpha\}} X \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) \, dP + \int_{\{X = q^\alpha\}} X \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \kappa \right) \, dP \\ &\quad + \int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} \, dP + \int_\Omega X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} \, dP. \end{aligned}$$

Ahora analizaremos cada una de las 4 integrales anteriores. Por definición $\frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\alpha}$, por tanto, cuando $\{X < q^\alpha\}$ se cumple que:

$$(X - q^\alpha) \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) \geq 0$$

que da como resultado:

$$\int_{\{X < q^\alpha\}} X \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP \geq \int_{\{X < q^\alpha\}} q^\alpha \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP.$$

Claramente:

$$\int_{\{X = q^\alpha\}} X \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP = \int_{\{X = q^\alpha\}} q^\alpha \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP.$$

Como $\frac{dQ}{dP} \geq 0$,

$$\int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} dP \geq \int_{\{X > q^\alpha\}} q^\alpha \frac{dQ}{dP} dP.$$

Y en la última integral tenemos que:

$$\int_{\Omega} X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} dP = \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X).$$

Ahora se sustituyen las ecuaciones (7), (8), (9) y (10) en la fórmula de $\mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X)$ obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(X) &\geq \int_{\{X < q^\alpha\}} q^\alpha \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP + \int_{\{X = q^\alpha\}} q^\alpha \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP \\ &\quad + \int_{\{X > q^\alpha\}} q^\alpha \frac{dQ}{dP} dP + \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X) \\ &= - \int_{\{X < q^\alpha\}} q^\alpha \frac{1}{\alpha} dP - \int_{\{X = q^\alpha\}} q^\alpha \frac{1}{\alpha} \kappa dP \\ &\quad + \int_{\Omega} q^\alpha \frac{dQ}{dP} dP + \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X) \\ &= -q^\alpha \frac{1}{\alpha} P(X < q^\alpha) - q^\alpha \frac{1}{\alpha} \kappa P(X = q^\alpha) + q^\alpha + \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X) \\ &= \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X). \end{aligned}$$

Por lo que hemos demostrado que $-\mathbb{E}_Q(X) \leq -\mathbb{E}_{Q_\alpha}(X)$. Como $Q_X^\alpha \in P_\alpha$, entonces:

$$\sup\{-\mathbb{E}_Q(X) : Q \in P_\alpha\} = -\mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X) = \text{AVaR}^\alpha(X)$$

tal y como se quería. □

Ahora ya procedemos a la demostración de la subaditividad:

Demostración del Teorema 3.9 [Pag 133, 4] (Subaditividad del AVaR). Sea U un conjunto arbitrario y dadas 2 funciones $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ dichas funciones verifican:

$$\sup_{x \in U} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in U} f(x) + \sup_{x \in U} g(x). \quad (11)$$

Fijamos X e Y y aplicamos la desigualdad (11). Por último, tomamos $U = P_\alpha$, $f(Q) = -\mathbb{E}_Q(X)$ y $g(Q) = -\mathbb{E}_Q(Y)$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{AVaR}^\alpha(X + Y) &= \sup\{-\mathbb{E}_Q(X + Y) : Q \in P_\alpha\} \\
 &= \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) + \mathbb{E}_Q(-Y) : Q \in P_\alpha\} \\
 &\leq \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) : Q \in P_\alpha\} + \sup\{\mathbb{E}_Q(-Y) : Q \in P_\alpha\} \\
 &\quad \text{usando (11)} \\
 &= \text{AVaR}^\alpha(X) + \text{AVaR}^\alpha(Y).
 \end{aligned}$$

□

Ventajas del AVaR:

- El AVaR proporciona información más completa que el VaR ya que el AVaR no solo indica el umbral de pérdida sino que estima la pérdida promedio en los peores escenarios, es decir, mide cuando se supera el VaR.
- A diferencia del VaR, el AVaR verifica las propiedades de coherencia de las medidas de riesgo que son:
 1. Monotonía
 2. Subaditividad
 3. Homogeneidad positiva
 4. Invarianza traslacional
- Esta medida de riesgo presenta una gran sensibilidad a los riesgos asociados a eventos raros.

Desventajas del AVaR:

- Esta medida de riesgo requiere una mayor complejidad computacional.
- Aunque esta medida es mejor que el VaR su cálculo requiere conocer el valor del VaR para definir el umbral de integración.
- Tiene una interpretación menos intuitiva que el VaR lo que la hace menos accesible a personas no especializadas.

3.6. Coeficiente de Variación

El coeficiente de variación [7] es una medida de riesgo que expresa la volatilidad de una inversión en proporción a su rentabilidad media, indicando cuánto riesgo asume el inversor por cada unidad de retorno esperado. Esta medida se puede representar matemáticamente de la siguiente forma:

$$CV_T := \frac{\text{Volatilidad}_T}{\mu} := \frac{\sigma_T}{\mu}.$$

Ventajas coeficiente de variación:

- Esta medida de riesgo te permite comparar carteras compuestas por activos con distintas escalas de rentabilidad.
- Destaca por su simplicidad ya que es fácil de calcular y entender, lo que la convierte en una herramienta útil a emplear previamente a la aplicación de modelos más complejos.

Desventaja coeficiente de variación:

- Si la rentabilidad media en el periodo es muy baja o nula, es decir, $\mu_T \approx 0$ entonces el coeficiente se ve muy incrementado y pierde sentido interpretativo pudiendo dar lugar a la toma de decisiones erróneas.

3.7. Desviación a la baja

La Desviación a la baja [8] mide la volatilidad de los rendimientos negativos de una cartera respecto a un umbral objetivo. Este umbral habitualmente es 0 o la rentabilidad mínima aceptable. La representación matemática de la Desviación a la baja es la siguiente:

$$\text{Desviación a la baja}_T := \delta_T := \sqrt{\frac{\sum_{t \in T} D_t^2}{N}}.$$

donde:

$$D_t = \begin{cases} 0 & \text{si } r_t \geq R^* \\ r_t - R^* & \text{si } r_t \leq R^* \end{cases}$$

Ventajas Desviación a la baja:

- Proporciona un riesgo más realista a los inversores conservadores ya que ignora las desviaciones positivas y se centra únicamente en las pérdidas.

Desventajas Desviación a la baja:

- Su escasa difusión en la práctica financiera convencional puede generar dificultades interpretativas, ya que los analistas podrían carecer de familiaridad con esta métrica, limitando su utilidad en informes destinados a públicos generales.
- Su cálculo presenta una alta dependencia del valor umbral seleccionado, lo que implica que variaciones en este parámetro alteran sustancialmente los resultados y, consecuentemente, su interpretación. Esta característica incorpora subjetividad en su aplicación práctica.

- Al no tener en cuenta la volatilidad positiva esta medida puede no reflejar toda la inestabilidad del activo o de la cartera, principalmente si hay rendimientos muy por encima del umbral.

4. Aplicación práctica: DJIA

4.1. Objetivos

Una vez definidas y analizadas las distintas medidas de riesgo desde un enfoque teórico, se ha procedido a su aplicación práctica utilizando datos reales correspondientes al índice *Dow Jones Industrial Average (DJIA)*, concretamente los precios de cierre semanales del periodo comprendido entre el 1 de enero de 2022 y el 31 de diciembre de 2024. Los objetivos principales de esta aplicación son los siguientes:

1. Analizar la *correlación* entre las diferentes medidas de riesgo, diferenciando entre medidas de riesgo simples y medidas de riesgo estructuradas.
2. Construir la *frontera eficiente* para cada una de las medidas de riesgo mencionadas, aplicando el *modelo de Markowitz*, con el objetivo de identificar carteras seguras que minimicen el riesgo asumido por el inversor.
3. Evaluar la *rentabilidad esperada* de las carteras eficientes obtenidas a través del *modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM)*, con el fin de analizar si dichas carteras están sobrevaloradas o infravaloradas. De esta manera, se pretende determinar si la inversión en estas carteras podría ofrecer rendimientos superiores al promedio del mercado, en caso de que se detecte una subvaloración por parte del mismo o viceversa.

Cabe señalar que esta aplicación se ha desarrollado a partir de un conjunto específico de datos, por lo que las conclusiones obtenidas, aunque útiles, no deben considerarse necesariamente como demostraciones concluyentes o generalizables.

4.2. Procedimiento

Para llevar a cabo esta aplicación práctica se han seguido los siguientes pasos metodológicos:

1. **Recopilación de datos:** Se han descargado los datos semanales de precios de cierre de las 30 empresas que componen el índice DJIA, correspondientes al período comprendido entre el 1 de enero de 2022 y el 31 de diciembre de 2024.
2. **Desarrollo de un programa en R, a través del cual se han implementado los siguientes análisis:**
 - a) A partir de los rendimientos semanales de cada empresa, se han calculado diversas medidas de riesgo. Posteriormente, se ha elaborado un ranking de empresas para cada medida, ordenadas de mayor a menor riesgo.
 - b) Se ha calculado la matriz de correlación entre las medidas de riesgo, distinguiendo entre el grupo de medidas simples y el grupo de medidas estructuradas.
 - c) Se ha construido la frontera eficiente para cada medida de riesgo utilizando el modelo de Markowitz, con el objetivo de identificar carteras óptimas y comparar sus características visualmente mediante gráficos.

- d) Se ha aplicado el modelo CAPM para estimar la rentabilidad esperada de cada una de las carteras eficientes obtenidas, evaluando así su posible sobrevaloración o infravaloración.
3. **Análisis de resultados:** Finalmente, se ha examinado si las medidas de riesgo con alta correlación dan lugar a carteras seguras similares, y posteriormente detectar la sobrevaloración o infravaloración de las carteras según el modelo CAPM para ver si los rendimientos que puede obtener el inversor son superiores o inferiores a los planteados por el modelo de Markowitz.

4.3. Cálculo de la rentabilidad

Recordemos que para el cálculo de cada medida de riesgo he considerado la rentabilidad del subperíodo y destacar que no he tenido en cuenta el entorno económico, dividendos, impuestos... con la finalidad de simplificar el cálculo.

$$\text{Rentabilidad del subperíodo } t := r_t := \frac{\text{Valor Cierre}_t - \text{Valor Cierre}_{t-1}}{\text{Valor Cierre}_{t-1}}$$

$$\text{Rentabilidad media periodo } t := \mu_T := \frac{1}{N} \sum_{t \in T} r_t$$

	Empresa	Rentabilidad Media 2022-2024
1	P&G	0,0004
2	3M	-0,00011
3	Amazon	0,00325
4	American Express	0,00436
5	Amgen	0,00145
6	Apple	0,00287
7	Boeing	-0,00013
8	Caterpillar	0,00405
9	Chevron	0,00183
10	Cisco	0,00026
11	Coca-Cola	0,00042
12	Goldman Sachs	0,00321
13	Home Depot	0,00055
14	Honeywell	0,00074
15	IBM	0,00372
16	Johnson & Johnson	-0,00095
17	JPMorgan	0,00303
18	McDonald's	0,00097
19	Merck&Co	0,00174
20	Microsoft	0,00252
21	Nike	-0,00378
22	NVIDIA	0,01322
23	Salesforce	0,00381
24	Sherwin-Williams	0,00104
25	Travelers	0,00283
26	UnitedHealth	0,00132
27	Verizon	-0,00138
28	Visa	0,00284
29	Walmart	0,0045
30	Walt Disney	-0,00138

Tabla 1: Rentabilidad media semanal de cada empresa para el periodo analizado

4.4. Aspectos importantes

1. Las medidas de riesgo que dependen de parámetros o variables adicionales he considerado;
 - He usado $R^* = 0$ para las medidas de riesgo probabilidad de pérdida y Desviación a la baja.
 - Para el VaR he empleado un nivel de confianza del 95 %.
 - Para el AVaR he utilizado $q = 10$ %.
2. Para elaborar los rankings de cada medida de riesgo tendré en cuenta que;
 - Mayor valor de la **volatilidad** implica mayor riesgo.
 - Mayor valor del **VaR** implica mayor riesgo.
 - Mayor valor del **rango** implica mayor riesgo.
 - Mayor valor de la **desviación absoluta mediana** implica mayor riesgo.
 - Mayor valor del **AVaR** implica mayor riesgo.
 - Mayor valor del **coeficiente de variación** implica mayor riesgo.
 - Mayor valor del **downside deviation** implica mayor riesgo.

4.5. Cálculo de la correlación

La correlación se calculará mediante el **coeficiente de correlación de Pearson**:

$$\text{Correlación entre X e Y} := \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{DS(X)DS(Y)}$$

donde

- X e Y medidas de riesgo que queremos comparar-
- $\text{Cov}(X, Y)$ covarianza de las 2 medidas de riesgo que se quieren comparar.
- $DS(X)$ y $DS(Y)$ desviación estándar de cada medida de riesgo que se quieren comparar.

Para el cálculo de la correlación se separan las medidas en **medidas simples** y **medidas estructuradas**.

- **Medidas simples**

Las medidas simples son aquellas que se calculan directamente a partir de los datos sin necesidad de realizar suposiciones complejas ni estructuras estadísticas adicionales. Por lo que son fáciles de calcular e interpretar.

Entre las medidas estudiadas en el trabajo las medidas simples son rango, desviación absoluta mediana = DAM, desviación típica, coeficiente de variación y desviación a la baja.

	Rango	DAM	Volatilidad	Coefficiente de Variación	Desviación a la baja
Rango	1	0,370563484	0,570577686	0,442664723	-0,064084626
DAM	0,370563484	1	0,976215172	-0,550660796	0,533342836
Volatilidad	0,570577686	0,976215172	1	-0,259119464	0,25678686
Coefficiente de Variación	0,442664723	-0,550660796	-0,259119464	1	-0,830774197
Desviación a la baja	-0,064084626	0,533342836	0,25678686	-0,830774197	1

Tabla 2: Correlación medidas simples

■ Medidas estructuradas

Las medidas estructuradas son aquellas que su calculo requiere algún modelo, suposición o transformación estadística adicional. Al ser su cálculo más complejo también proporcionan conclusiones más complejas ya que proporcionan información acerca del comportamiento de los datos o la sensibilidad de los factores de mercado.

De entre las medidas analizadas en el trabajo las medidas estructuradas son volatilidad, VaR y AVaR.

	Volatilidad	VaR	AVaR
Volatilidad	1	0,998377186	0,112300511
VaR	0,998377186	1	0,066644748
AVaR	0,112300511	0,066644748	1

Tabla 3: Correlación medidas estructuradas

Ejemplo de cálculo

A continuación, se expone como se realiza el cálculo de la correlación entre las medidas de riesgo *volatilidad* y *desviación absoluta mediana*.

A partir de los resultados obtenidos de volatilidad y desviación absoluta mediana [Tabla 1] y [Tabla 4] del anexo se calcula:

- Media de volatilidad = $\bar{x} = 11.8277$
- Media desviación absoluta mediana = $\bar{y} = 2.6064$

Posteriormente, para cada empresa se calcula:

$(x_i - \bar{x})$
$(y_i - \bar{y})$
$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
$(x_i - \bar{x})^2$
$(y_i - \bar{y})^2$

Por ejemplo, los resultados para Boeing son:

$x_i = 20.4722$
$y_i = 5.2100$
$(x_i - \bar{x}) = 8.6445$
$(y_i - \bar{y}) = 2.6036$
$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = 22.507$
$(x_i - \bar{x})^2 = 74.727$
$(y_i - \bar{y})^2 = 6.779$

Repetimos esto para las 30 empresas, y obtenemos:

$\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = 200$
$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 600$
$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 70$

Entonces:

$$\text{Corr}(\text{Volatilidad, DAM}) = \frac{200}{\sqrt{600 \cdot 70}} \approx 0.976$$

4.6. Modelo de Markowitz

4.6.1. Hipótesis del modelo

El modelo de Markowitz fue elaborado por Harry Max Markowitz en su artículo *Portfolio Selection* en 1952 y posteriormente esta teoría fue ampliada en su libro *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*.

La finalidad de esta teoría es crear una cartera que logre maximizar la rentabilidad esperada para un nivel determinado de riesgo o minimizar el riesgo para una rentabilidad esperada. Por último, destacar que este trabajo creó las bases de la **Teoría Moderna de Carteras**.

Gracias a esta teoría, Markowitz recibió el premio Nobel de economía en 1990 junto con Merton Miller y William Sharpe.

Esta teoría se basa en las siguientes *hipótesis*:

1. Conocimiento total de los activos

Todos los activos que forman parte de la cartera están perfectamente definidos y sus características estadísticas como la media, varianza y covarianza también son conocidas.

2. Todos los activos son arriesgados

Se considera que todos los activos tiene una varianza positiva: $\sigma_k^2 > 0 \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

3. Todas las variables aleatorias siguen una distribución normal

4. Presupuesto completamente invertido

El total del capital que se destina a la cartera debe distribuirse totalmente en la constitución de la cartera, cumpliendo:

$$\sum_{k=1}^n x_k = 1$$

donde x_k son los pesos relativos de cada activo en la cartera.

5. No se permite la venta en corto

Lo que implica que los pesos de cada activo en la cartera verifican $x_k \geq 0 \forall k$

6. Inversores aversos al riesgo

Lo que implica que los inversores prefieren mayor rentabilidad y menor riesgo.

7. Activos infinitamente divisibles, sin fricciones

Los activos pueden fraccionarse sin restricciones por lo que no se tiene en cuenta:

- Comisiones
- Impuestos
- Costes de transacción

Ventajas del modelo de Markowitz:

- Este modelo permite construir carteras eficientes que minimizan el riesgo.
- Este modelo puede aplicarse a diversas medidas de riesgo como la volatilidad, VaR o AVaR, por ejemplo.

Desventajas del modelo de Markowitz:

- Tiene supuestos poco realistas ya que asume que a los inversores solo les importa el riesgo y el rendimiento promedio, cuando los inversores tienen en consideración más factores como el precio de la acción o el tiempo.
- Este modelo es muy sensible a los datos por lo que si las estimaciones de rentabilidad o de correlación están mal, el modelo puede recomendar carteras poco realistas.
- Si se tienen muchos activos la matriz de covarianzas que se obtenga puede ser muy grande y por lo tanto difícil de estimar con precisión.
- No tiene en cuenta restricciones como límites regulatorios o falta de liquidez.

4.6.2. Problema matemático asociado

Las **variables** que lleva asociado el problema matemático del modelo de Markowitz son las siguientes:

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Son las proporciones de capital invertidos en cada uno de los activos.
- μ_i . Rentabilidad esperada del activo i .

- σ_i . Desviación estándar del activo i.
- σ_{ij} . Covarianza entre los activos i y j.
- x_i . Proporción del capital invertido en el activo i.
- $\mu_p = \sum x_i \mu_i$. Rentabilidad esperada de la cartera.
- $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}$. Varianza de la cartera.
- V . Matriz de covarianzas entre los rendimientos de los activos que tiene dimensión $n \times n$.
- $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$. Vector de rentabilidades esperadas de los activos.
- $\mathcal{R}^*$. Rentabilidad esperada de la cartera.

Problema de optimización

El riesgo de la cartera, medido como la varianza de la cartera, es:

$$\sigma_p^2 = x^T \cdot V \cdot x$$

Y esta la función que se desea minimizar, es decir, queremos minimizar el riesgo. Las restricciones a las que se encuentra sujeta esta función son:

- **Rentabilidad esperada de la cartera**

$$\sum_{k=1}^n x_k R_k = \mathcal{R}^*$$

- **Restricción presupuestaria**

$$\sum_{k=1}^n x_k = 1$$

- **Restricción de no negatividad (Opcional)**

$$x_k \geq 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Una vez realizado la minimización de la función, el problema se resolverá de la siguiente manera:

- Si no se verifica que $x_k \geq 0$ el problema se puede resolver de manera analítica mediante el método de los **multiplicadores de Lagrange**.
- Si $x_k \geq 0$, el problema se vuelve más complejo y se utilizan métodos numéricos como el **método de la línea crítica**.

A continuación, se lleva a cabo el cálculo de la frontera eficiente para las distintas medidas de riesgo excepto del rango ya que, el modelo de Markowitz construye la frontera eficiente minimizando el riesgo para una rentabilidad esperada y el problema es que el rango es una medida no aditiva, es decir, no se puede descomponer lo que dificulta la construcción de la matriz de varianzas-covarianzas que es necesaria para el modelo de Markowitz.

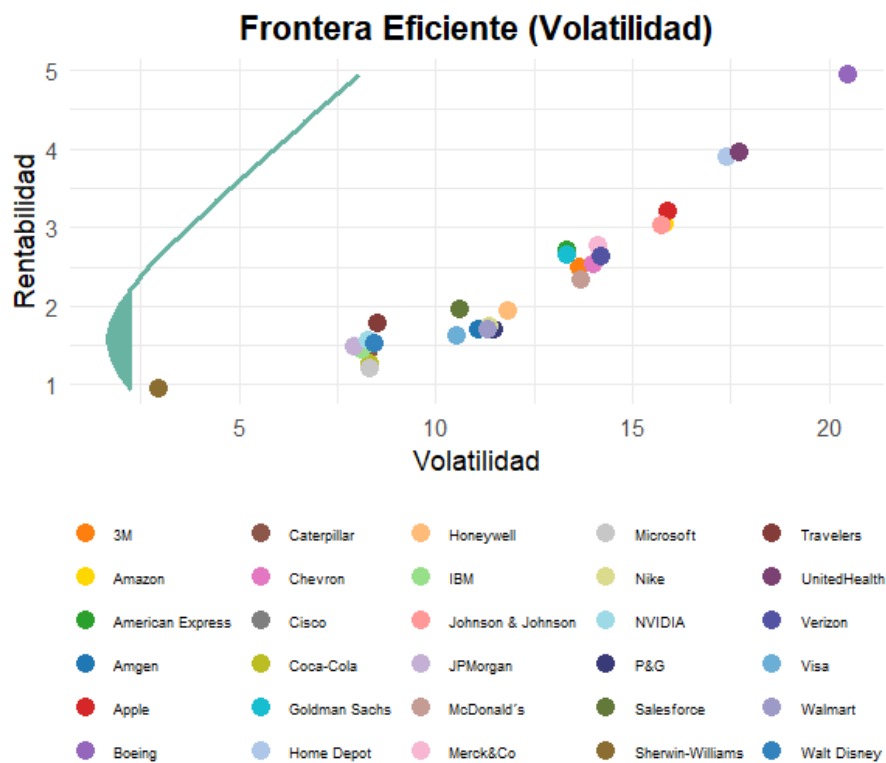


Figura 1: Frontera Eficiente y Composición de Cartera Utilizando Value at Risk (Volatilidad)

■ Volatilidad

1. Frontera eficiente (<8 % de volatilidad).

En la gráfica se puede observar que la mayoría de acciones presentan una volatilidad superior al 8 % y que la frontera eficiente se encuentra en una volatilidad menor o igual que el 8 % por lo que cuando se invierte en acciones con una volatilidad inferior al 8 %, la cartera alcanza un riesgo inferior. Además, esto demuestra que una cartera compuesta por acciones individuales del DJIA diversificada disminuiría el riesgo que afronte el inversor ya que la mayoría presentan volatilidades superiores, excepto Sherwin-Williams.

Conclusiones:

- Se valida el principio de diversificación que plantea el Modelo de Markowitz
- Para alcanzar el menor riesgo posible invertir tan solo en Sherwin Williams

2. Empresas sobre la frontera eficiente.

Ninguna empresa se encuentra sobre la frontera eficiente lo que verifica el Modelo de Markowitz que plantea que los activos individuales no pueden ser eficientes por sí mismo, excepto en casos excepcionales.

Conclusión: Invertir en acciones individuales y no diversificar comporta un mayor riesgo.

3. Composición de cartera segura.

El tramo inicial de la frontera es el segmento que incluye las carteras más seguras y conservadores y que implican por lo tanto un menor riesgo.

Conclusión: Solo invertir en la compañía Sherwin Williams.

4. Composición de cartera que maximiza el beneficio.

El extremo superior derecho de la frontera muestra las carteras más rentables aunque esta composición de cartera también conlleva un mayor riesgo.

Conclusión: Invertir tan solo en Boeing.

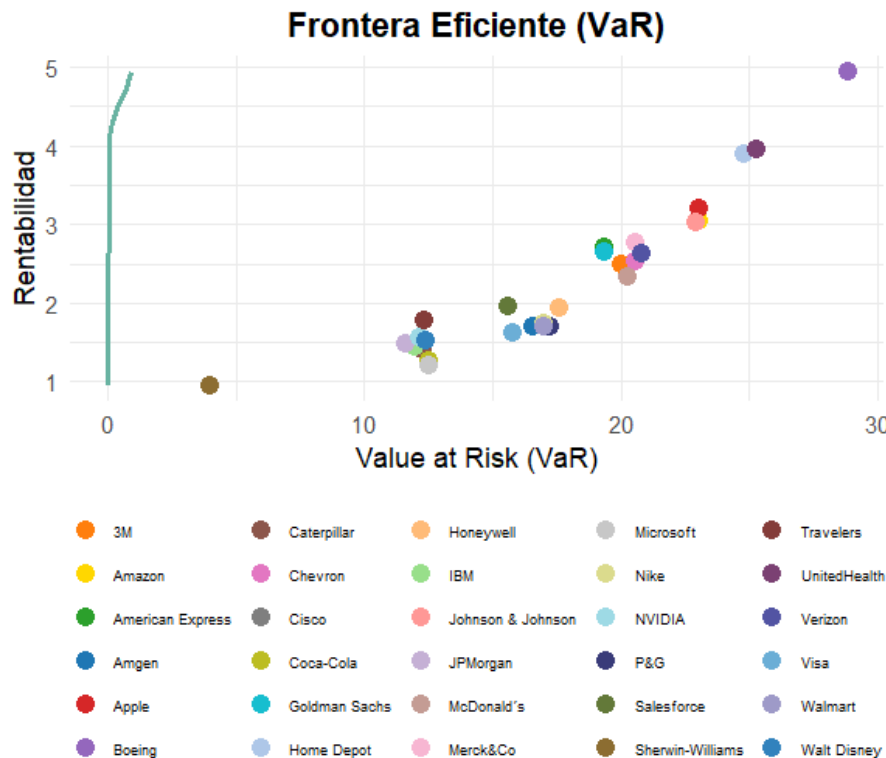


Figura 2: Frontera Eficiente y Composición de Cartera Utilizando Value at Risk (VaR)

■ VaR

1. Frontera eficiente (0 % - 2,5 % VaR).

La frontera eficiente se encuentra entre el 0 % y el 2,5 % del VaR. Destacar que todas las empresas tienen un VaR superior al de la frontera eficiente siendo la compañía con un VaR inferior Sherwin Williams y el resto presentan un riesgo muy superior al de la frontera, ya que estas presentan un riesgo superior o igual al 11 % aproximadamente.

Conclusión: Se valida el principio de diversificación que plantea el Modelo de Markowitz.

2. Empresas sobre la frontera eficiente.

Ninguna empresa individual se encuentra sobre la frontera eficiente lo que implica que invertir en 1 sola empresa no es eficiente ya que siempre existe una combinación de activos mucho mejor a la inversión individual.

Conclusión: Invertir en acciones individuales es una decisión equivocada frente a invertir en carteras diversificadas que minimizan el riesgo.

3. Composición de cartera segura.

La cartera formada por el tramo inicial de la gráfica supone un menor riesgo y estaría formada por activos de algunas de las siguientes compañías:

- | | |
|---------------------|--------------|
| a) Sherwin-Williams | c) Microsoft |
| b) Cisco | d) JPMorgan |

4. Composición de cartera que maximiza el beneficio.

En el extremo superior derecha se encuentran las carteras que maximizan el beneficio pero que también llevan asociadas un mayor riesgo. Por lo que la cartera que maximiza el beneficio se encuentra compuesta por compañías como;

- | | | |
|-----------|-----------------|---------------|
| a) Boeing | b) UnitedHealth | c) Home Depot |
|-----------|-----------------|---------------|

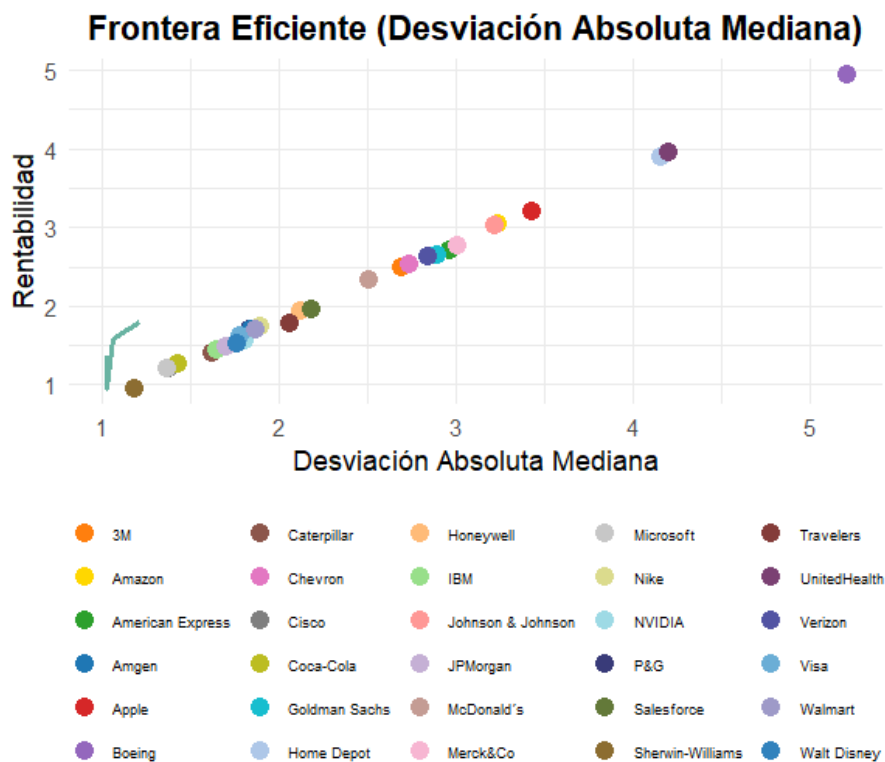


Figura 3: Frontera Eficiente y Composición de Cartera Utilizando Desviación absoluta mediana

■ Desviación Absoluta Mediana

1. Frontera eficiente (<5 % Desviación Absoluta Mediana).

La frontera eficiente se encuentra por debajo del 5 % de la Desviación Absoluta Mediana por lo que el inversor reduce su riesgo cuando invierte en empresas como Sherwin-Williams, Cisco y Coca-Cola que presentan una volatilidad inferior al 5 %.

Conclusión:

Esta medida de riesgo valida el principio de diversificación que plantea el Modelo de Markowitz.

2. Empresas sobre la frontera eficiente.

Ninguna empresa individual se encuentra sobre la frontera eficiente, por lo que no hay ninguna empresa en la que invertir en ella sola reduzca el riesgo que lleva asociado la inversión.

Conclusión:

Este planteamiento refuerza la hipótesis del Modelo de Markowitz, que formula que los activos individuales no son eficientes por sí mismos

3. Composición de cartera segura

El tramo inicial de la gráfica muestra la composición de las carteras más seguras. Por lo que la composición de cartera más segura sería la combinación de invertir en las siguientes empresas:

- a) Sherwin-Williams b) Cisco c) Coca-Cola

4. Composición de cartera que maximiza el beneficio

El extremo superior derecho del gráfico muestra las empresas que maximizan el beneficio. La empresa que presenta un mayor riesgo es Boeing por lo que si se desea maximizar el beneficio sería recomendable invertir en Boeing, aunque esta inversión también lleva asociada un mayor riesgo.

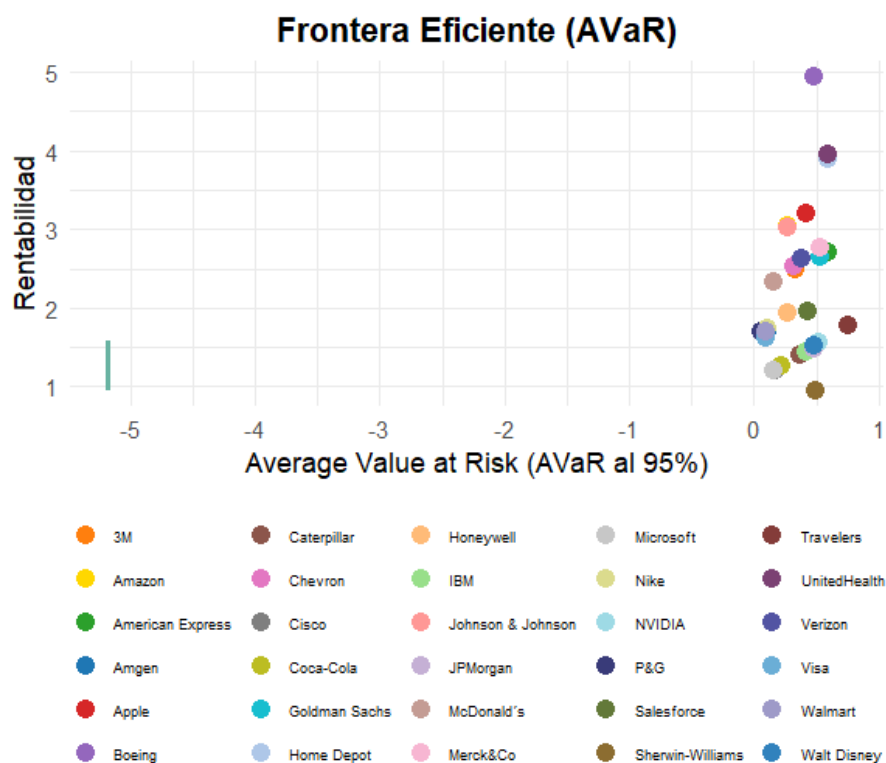


Figura 4: Frontera Eficiente y Composición de Cartera Utilizando Average Value at Risk (AVaR)

■ AVaR

1. Frontera eficiente ($<1\%$ del AVaR).

Como la frontera eficiente se encuentra por debajo del 1% del AVaR el inversor minimiza su riesgo al invertir en activos cuyo AVaR sea inferior a 1. Observando el gráfico se puede observar que no hay ninguna acción individual que nos permita alcanzar el nivel de riesgo mínimo

Conclusión: Con esta medida de riesgo volvemos a confirmar que con una cartera diversificada se alcanzan niveles de riesgo inferiores que al invertir en tan solo en cualquier acción individual del DJIA

2. Empresas sobre la frontera eficiente.

En la gráfica se puede observar que ninguna empresa se encuentra sobre la frontera eficiente.

Conclusión: Se vuelve a reafirmar que los activos no son eficientes por sí solos, volviendo a respaldar la hipótesis de diversificación de activos de la hipótesis de Markowitz.

3. Composición de cartera segura.

La parte inicial de la gráfica esta formada por activos con un AVaR reducido. Por lo que observando el gráfico se puede deducir que las carteras más seguras serán aquellas compuestas por activos de:

a) Sherwin-Williams b) Visa c) Walmart

4. Composición de cartera que maximiza el beneficio

En el extremo superior derecho de la gráfica se puede observar que la cartera que maximice el beneficio estará formada por acciones de las siguientes empresas:

a) UnitedHealth b) Boeing

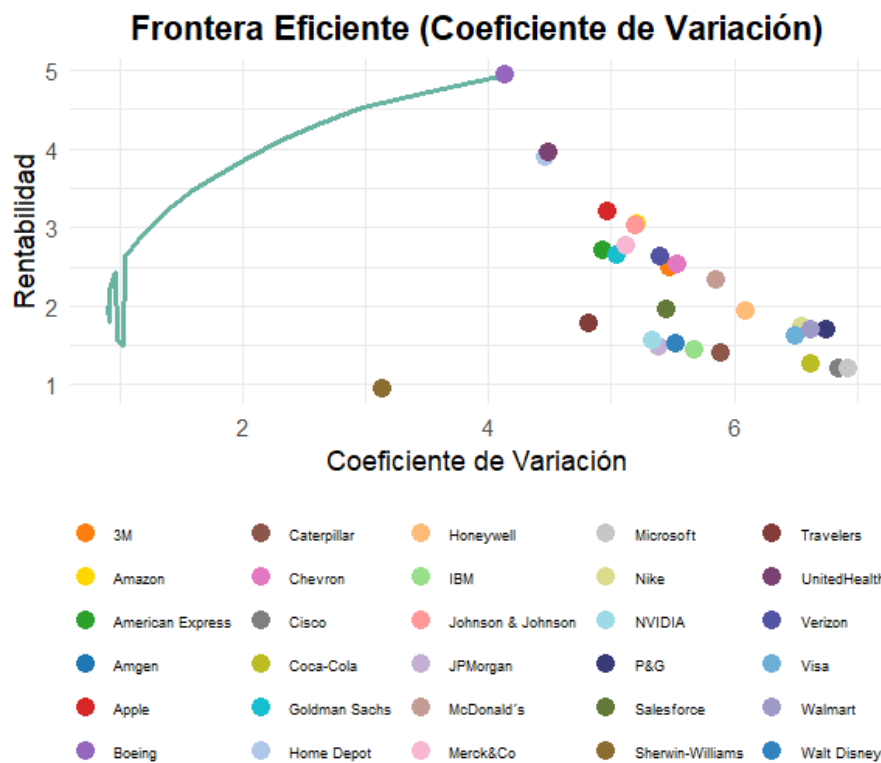


Figura 5: Frontera Eficiente y Composición de Cartera Utilizando Coeficiente de variación

■ Coeficiente de Variación

1. Frontera eficiente (<4% coeficiente de variación).

La frontera eficiente se encuentra mayoritariamente por debajo del 4 % del coeficiente de variación. La única empresa con un coeficiente de variación próximo al 4 % es Boeing por lo que invertir en esta empresa es la única inversión individual que garantiza una cierta seguridad sin necesidad de diversificar.

Conclusión: Al observar el gráfico y ver que pocas empresas presentan una rentabilidad inferior a este porcentaje se puede deducir que para esta medida de riesgo invertir en carteras diversificadas puede permitir alcanzar una mayor rentabilidad y reducir el riesgo.

2. Empresa sobre la frontera eficiente

La única empresa que se encuentra sobre la frontera eficiente es Boeing, mientras que el resto de empresas se encuentran por debajo y a la derecha de la curva eficiente.

Conclusión: La única opción de invertir en una cartera individual sería invertir en Boeing.

3. Composición de cartera segura

En el tramo inferior izquierdo de la frontera eficiente se encuentran las carteras más seguras en cuanto al riesgo medido a través del coeficiente de variación. En esta localización no hay empresas.

La cartera que maximiza el beneficio es aquella en la que las empresas que la componen presentan una rentabilidad elevada respecto al resto de empresas analizadas.

En este caso, Boeing es la empresa que más se aproxima al punto de máxima rentabilidad, esto señala que si el inversor desea conseguir una elevada rentabilidad a cambio de exponerse a un elevado riesgo, Boeing debe formar parte de su cartera.

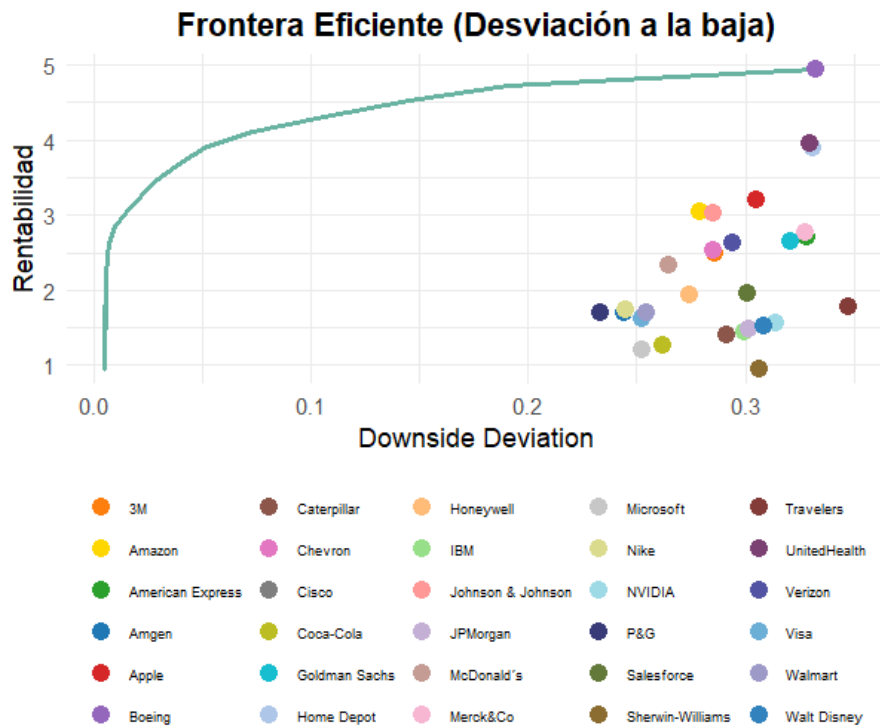


Figura 6: Frontera Eficiente y Composición de Cartera Utilizando Desviación a la baja

■ Desviación a la baja

1. Frontera eficiente ($<0.35\%$ desviación a la baja).

La frontera eficiente se encuentra por debajo del $0,35\%$ aproximadamente de la desviación a la baja.

Conclusión: Como la mayoría de las empresas se encuentran por debajo de porcentaje esto implica que invirtiendo en carteras diversificadas se puede lograr un riesgo inferior. Esto valida la hipótesis del modelo de Markowitz de que las carteras diversificadas son más eficientes.

2. Empresas sobre la frontera eficiente.

Ninguna empresa individual se encuentra sobre la frontera eficiente ya que en la gráfica se puede observar que todas las empresas se encuentran por debajo y a la derecha de la frontera.

Conclusión: Ninguna empresa individual es eficiente por sí misma lo que implica que invertir en 1 sola empresa implica asumir un mayor riesgo.

3. Composición de cartera segura

Al igual que hemos visto antes las carteras más seguras son aquellas que se sitúan en el extremo inferior izquierdo de la frontera, ya que es la posición donde la Desviación a la baja es mínimo. En la gráfica se puede observar que ninguna empresa se encuentra en esta posición por lo que no se puede conocer cuál es la composición de cartera más segura.

4. Composición de cartera que maximiza el beneficio

El extremo superior derecho indica las empresas que maximizan el beneficio, visualmente la empresa más próxima a este punto es Boeing, lo que sugiere que la cartera que maximiza el beneficio contará con acciones de Boeing aparte de acciones de otras compañías.

4.7. Modelo CAPM

El modelo CAPM fue desarrollado por *William Forsyth Sharpe*, *John Lintner* y *Jan Mossin* a partir del modelo de Markowitz, que ha sido explicado en el apartado anterior.

Esta teoría es una herramienta de valoración financiera que pone en relación el riesgo de un activo con su rentabilidad esperada.

Esta teoría se basa en las siguientes *hipótesis*:

1. Mercados eficientes.

Toda la información relevante a las acciones o inversiones está disponible, es decir, no hay información oculta que de ventaja a unos inversores respecto a otros.

2. Inversores racionales y aversos al riesgo.

Todos los inversores a la hora de invertir utilizan la razón y prefieren no correr riesgos.

3. Horizonte temporal único.

Los inversores planean para la inversión para un periodo determinado y no están pensando en largos horizontes temporales como décadas, por ejemplo.

4. Libre acceso al mercado.

El acceso al mercado es libre, es decir, no hay impuestos, comisiones ni problemas a la hora de vender acciones.

5. Todos los inversores tienen expectativas homogéneas.

Todos los inversores tienen las mismas creencias acerca de cuánto ganaran con sus inversiones o lo arriesgadas que son.

6. Todos los activos son perfectamente divisibles y líquidos.

Los inversores pueden comprar o vender cualquier cantidad de activos de una acción o inversión sin problemas.

Ventajas del modelo CAPM:

- Destaca por su sencillez a la hora de usarlo y de entenderlo.

- Es popular y esta bastante implantado en el mundo financiero.

Desventajas del modelo CAPM:

- Sus hipótesis son poco realistas ya que considera que el mercado cuenta con información perfecta.
- La beta y la prima de riesgo del mercado son difíciles de estimar.
- Este modelo se basa en la rentabilidad pasada y la rentabilidad previa de la empresa no garantiza el rendimiento futuro.
- El CAPM solo usa el riesgo de mercado, que es la β para predecir la rentabilidad de un activo pero en la vida real hay otros factores que también importan como el tamaño de la empresa o el valor de la acción.

4.7.1. Problema matemático asociado

Para la aplicación del modelo CAPM, en primer lugar se lleva a cabo el cálculo de β para cada empresa y mide la sensibilidad de la rentabilidad del activo i :

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i - R_f, R_m - R_f)}{\text{Var}(R_m - R_f)}$$

Su interpretación es la siguiente:

- $\beta = 1$. El activo tiene el mismo riesgo que el mercado.
- $\beta > 1$. El activo es más volátil que el mercado.
- $\beta < 1$. El activo es menos volátil que el mercado.
- $\beta = 0$. El activo no tiene correlación con el mercado.
- $\beta < 0$. El activo se mueve en dirección opuesta al mercado.

Posteriormente, se calcula la *rentabilidad esperada del mercado* $= \mathbb{E}[R_m] - R_f$ que es la esperanza matemática y se calcula como la media muestral de las diferencias semanales entre el rendimiento del mercado y la tasa libre de riesgo:

$$\mathbb{E}[R_m] - R_f = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (R_{m,t} - R_{f,t})$$

Por último, se calcula la rentabilidad esperada para cada activo mediante la fórmula del modelo CAPM.

$$\mathbb{E}[R_i] = R_f + \beta_i * (\mathbb{E}[R_m] - R_f)$$

donde:

1. $\mathbb{E}[R_i]$. Rentabilidad esperada del activo i .

2. R_f . Tasa libre de riesgo.
3. β_i . Es la β del activo i , que mide la sensibilidad del mercado.
4. $\mathbb{E}[R_m]$. Rentabilidad esperada del mercado.
5. $\mathbb{E}[R_m] - R_f$. Prima de riesgo del mercado.

Para sacar conclusiones de la formula matemática compararé la rentabilidad observada en cada medida de riesgo con la rentabilidad obtenido en la fórmula del modelo CAPM y sacaré conclusiones acerca de si la cartera está infravalorada o sobrevalorada:

1. Si la **rentabilidad observada** $>$ **rentabilidad CAPM** $\rightarrow$ Cartera infravalorada, es decir, el mercado podría estar subestimando su valor en relación con el rendimiento que están generando.
2. Si la **rentabilidad observada** $<$ **rentabilidad CAPM** $\rightarrow$ Cartera sobrevalorada, es decir, el mercado podría estar sobrevalorando su valor en relación con el rendimiento que están generando.

4.7.2. Relación entre el modelo CAPM y el modelo de Markowitz

El modelo CAPM se basa en los principios del modelo de Markowitz. Este modelo propone construir carteras eficientes maximizando la rentabilidad esperada para un nivel dado de riesgo. Mientras que el CAPM asume que todos los inversores eligen carteras eficientes y añade un activo libre de riesgo, lo que lleva al inversor a una única cartera óptima conocida como *la cartera de mercado*.

Así que, mientras Markowitz permite múltiples carteras eficientes, el CAPM selecciona una única como referencia para valorar activos.

A continuación, se analizan mediante el modelo CAPM las carteras seguras obtenidas por el modelo de Markowitz compuestas por más de 1 empresa:

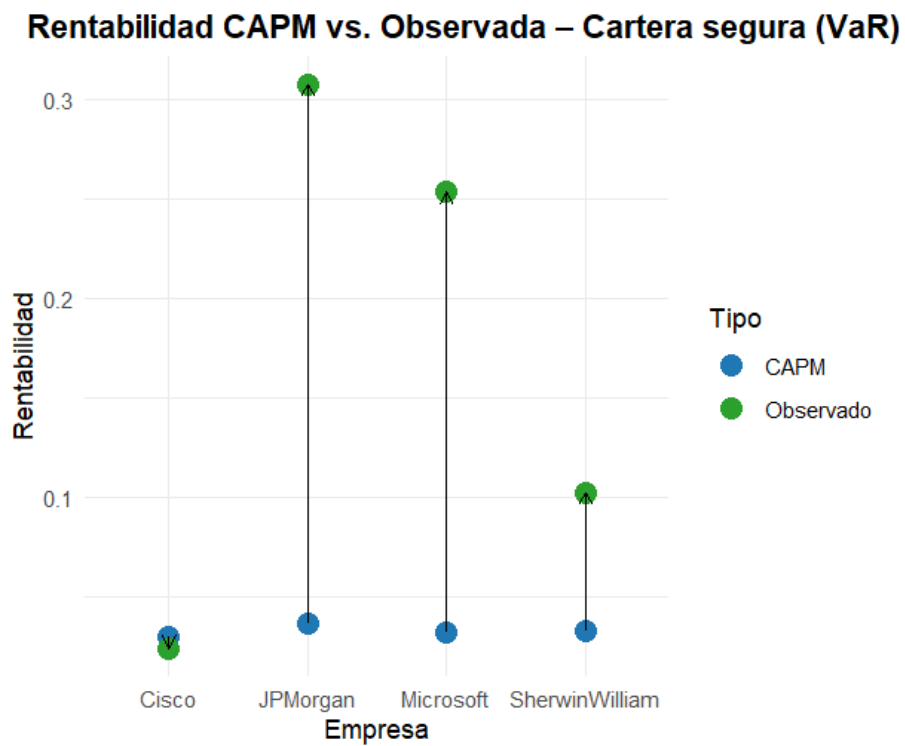


Figura 7: Rentabilidad CAPM vs rentabilidad observada de la cartera segura el VaR

Observación	Análisis
La cartera segura del VaR mayoritariamente se encuentra infravalorada.	La cartera se encuentra infravalorada ya que 3 de las 4 empresas que componen la cartera segura según el VaR presentan una rentabilidad observada muy superior a la esperada por el modelo CAPM.
Una empresa presenta sobrevaloración.	La empresa CISCO posiblemente se encuentra sobrevalorada ya que su rentabilidad observada es inferior a la estimada por el modelo CAPM, indicando que el mercado podría estar dándole un mayor valor del que debería y haciendo que esta compañía sea la menos atractiva de esta cartera, según el modelo CAPM.
Conclusión	Dado que la mayoría de las empresas tienen observaciones de rentabilidad superiores a la rentabilidad del modelo CAPM, la cartera compuesta por Cisco, JPMorgan, Microsoft y Sherwin-Williams parecería estar generando valor por encima del riesgo asumido por la medida de riesgo VaR en el periodo observado. Esto valida la estrategia de selección basada en el modelo de Markowitz empleando VaR como criterio de riesgo.

Tabla 4: Análisis de valoración de la cartera segura bajo el modelo CAPM y la medida de riesgo VaR

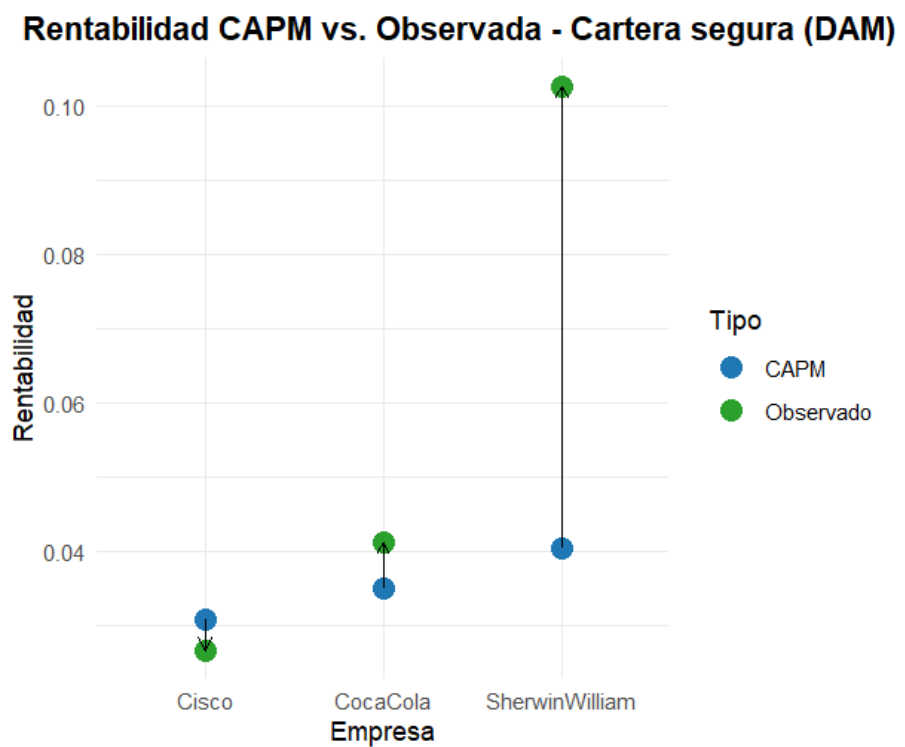


Figura 8: Rentabilidad CAPM vs rentabilidad observada de la cartera segura la DAM

Observación	Análisis
La cartera segura de DAM mayoritariamente se encuentra infravalorada.	2 de las 3 empresas que componen la cartera: Sherwin-Williams y Coca Cola muestran rentabilidades observadas superiores a las que predice el modelo CAPM, lo que sugiere que podrían estar infravaloradas, es decir, el mercado podría estar subestimando su valor en relación con el rendimiento que están generando.
Una empresa presenta sobrevaloración.	La empresa que presenta esta situación es Cisco, ya que su rentabilidad observada es ligeramente inferior a la esperada por CAPM, indicando su sobrevaloración.
Conclusión	El comportamiento de esta cartera refleja que la creación de esta cartera mediante esta medida de riesgo ha identificado empresas que, en su mayoría, superan las expectativas del CAPM. Esto demuestra que esta medida es un buen criterio a la hora de encontrar carteras seguras con el método de Markowitz.

Tabla 5: Análisis de valoración de la cartera segura bajo CAPM y la medida de riesgo Downside Absolute Median (DAM)

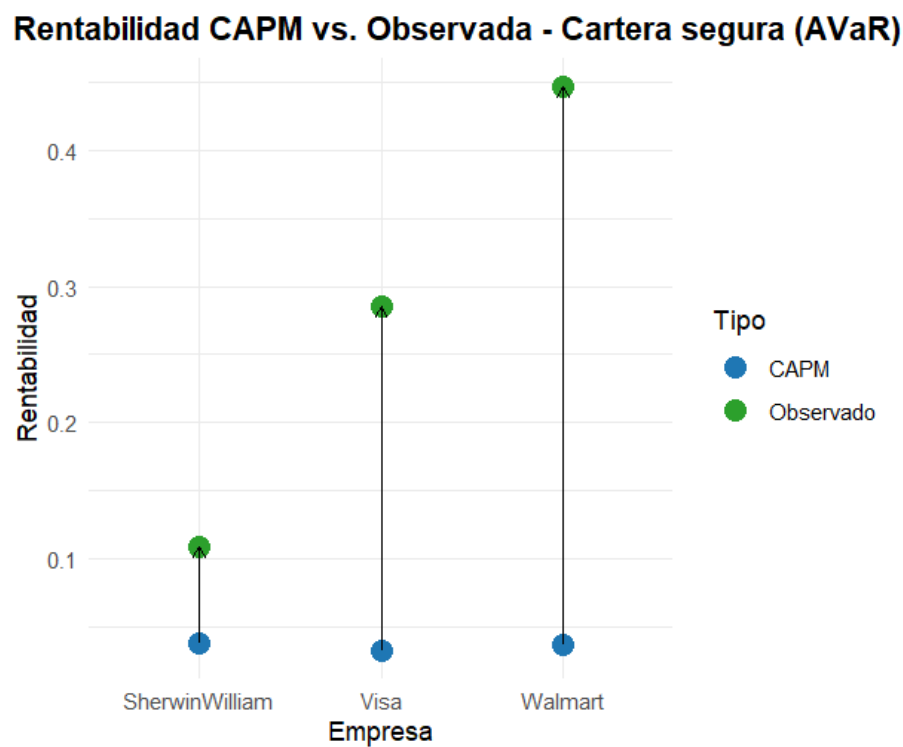


Figura 9: Rentabilidad CAPM vs rentabilidad observada de la cartera segura el AVaR

Observación	Análisis
La cartera segura del AVaR mayoritariamente se encuentra infravalorada.	Las tres empresas tienen rentabilidades observadas muy superiores a las que predice el modelo CAPM, lo que sugiere que el mercado podría estar infravalorando el valor real de las empresas.
Ninguna empresa presenta sobrevaloración.	No se identifica ninguna empresa con rentabilidad observada inferior a la esperada por el modelo CAPM, lo que sugiere que todos los activos están aportando valor en relación con el riesgo asumido.
Conclusión	El uso de esta medida de riesgo ha permitido construir una cartera compuesta por activos con muy buenas rentabilidades relativas, convirtiendo esta medida en una forma muy útil para construir carteras seguras.

Tabla 6: Análisis de valoración de la cartera segura bajo CAPM y la medida de riesgo AVaR

5. Conclusiones

A través de este trabajo he podido analizar con profundidad la relación entre distintas medidas de riesgo financiero y su impacto en la construcción de carteras eficientes, tomando como base el *modelo de Markowitz* y evaluando posteriormente su valoración según el *modelo de equilibrio de activos financieros (CAPM)*.

En primer lugar, se ha observado que aquellas medidas de riesgo que presentan una alta correlación entre sí, como es el caso de:

1. Volatilidad y Valor en Riesgo (VaR)
2. Volatilidad y Desviación Absoluta Mediana

tienden a generar carteras seguras similares mientras que las medidas con una menor correlación tienen carteras más dispares, tal y como se observa en la siguiente tabla:

Métrica 1	Métrica 2	Correlación	Similitud Carteras Seguras
Volatilidad	VaR	Alta	Sherwin Williams
VaR	DAM	Alta	Sherwin Williams, Cisco

Tabla 7: Relación entre la correlación alta y las carteras obtenidas a partir del Modelo de Markowitz

En el primer caso la cartera segura del VaR se encuentra compuesta por Sherwin Williams, Cisco, Microsoft y JPMorgan, mientras que la de volatilidad solo esta formada por Sherwin Williams. Por lo que todas las empresas de la cartera segura que forman volatilidad que tan solo es 1 se encuentra en las del VaR. Mientras que en el segundo caso la Desviación Absoluta Mediana se encuentra formada por 3 empresas y 2 se encuentran en la cartera segura del VaR, es decir, la mayoría.

En dichas carteras, aparecen de forma recurrente empresas como Sherwin Williams y Cisco, lo que sugiere que estas medidas capturan componentes del riesgo de manera parecida y, por ende, identifican perfiles de inversión equivalentes en términos de estabilidad.

Por el contrario, las medidas que evidencian una baja correlación o incluso correlación negativa como es el caso de:

1. Rango y AVaR
2. Rango y Desviación Absoluta Mediana

conducen a la construcción de carteras seguras significativamente diferentes tal y como se puede observar en la siguiente tabla:

Métrica 1	Métrica 2	Correlación	Similitud Carteras Seguras
VaR	AVaR	Baja	Sherwin Williams
DAM	Volatilidad	Baja	Sherwin Williams
Volatilidad	AVaR	Baja	Sherwin Williams

Tabla 8: Relación entre la correlación baja y las carteras obtenidas a partir del Modelo de Markowitz

En los 3 casos anteriores la correlación es baja y en todas las situaciones comparten 1 empresa que es Sherwin Williams, esto puede deberse como se ha mencionado antes que en todas las medidas de riesgo esta empresa tiene un componente similar.

Esta divergencia en la composición de las carteras permite concluir que estas medidas cuantifican aspectos del riesgo distintos, y, por tanto, pueden ser útiles de forma complementaria dependiendo del perfil del inversor y de los objetivos de análisis.

En cuanto a la consistencia entre carteras seguras y aquellas que maximizan la rentabilidad, se ha identificado una clara diferenciación. Las carteras que buscan maximizar el beneficio presentan una fuerte presencia de empresas como Boeing y UnitedHealth, lo cual puede interpretarse como una toma de posiciones en activos de mayor riesgo con el fin de obtener mayores rentabilidades esperadas. Por su parte, las carteras seguras que son aquellas que minimizan el riesgo según cada medida repiten con frecuencia valores considerados más estables o defensivos, como Sherwin Williams, Cisco o CocaCola, lo que refuerza la validez práctica de las medidas en términos de aversión al riesgo.

Finalmente, al incorporar el modelo CAPM como herramienta para evaluar la correcta valoración de las carteras eficientes generadas, se constata que las carteras seguras construidas a partir de las medidas VaR, desviación absoluta mediana (DAM) y AVaR resultan infravaloradas según el modelo. Este hallazgo es especialmente relevante, ya que podría sugerir que estas carteras presentan un potencial de rentabilidad superior al que el mercado ha reconocido, constituyendo así una posible oportunidad de inversión desde el punto de vista teórico. No obstante, también se advierte que determinados valores como Cisco aparecen como sobrevalorados en más de una de estas carteras seguras, lo que puede indicar una valoración de mercado excesivamente optimista sobre estos activos, alertando así de posibles desviaciones entre el riesgo real y el percibido.

En resumen, este análisis pone de manifiesto la importancia de la elección de la medida de riesgo en la construcción de carteras y su valoración posterior, así como la necesidad de comprender con precisión qué aspecto del riesgo cuantifica cada medida para una correcta toma de decisiones en entornos financieros complejos y cambiantes.

Bibliografía

- [1] *Investing.com United States 30 componentes y cotización*. <https://es.investing.com/indices/investing.com-united-states-30-components>. Consultado el 11 de mayo de 2025.
- [2] M.a Dolores Robles Fernández. «Medidas de volatilidad». En: *Revista española de financiación y contabilidad* 31.114 (2002), pág. 1080.
- [3] Admin. *Notas técnicas sobre el cálculo de la volatilidad*. Jun. de 2019. URL: <https://estrategiastrading.com/calcular-volatilidad/>.
- [4] Maciej J. Capiński y Ekkehard Kopp. *Portfolio Theory and Risk Management*. Cambridge University Press, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09781139017398>.
- [5] José Francisco López. *Rango (estadística) - Qué es, fórmula y ejemplos*. Feb. de 2024. URL: <https://economipedia.com/definiciones/rango-estadistica.html>.
- [6] Cristina Ortega. *Desviación media: Qué es, fórmula y cómo calcularla*. Sep. de 2023. URL: <https://www.questionpro.com/blog/es/desviacion-media/>.
- [7] *Coeficiente de Variación: ¿Qué es y cómo se calcula? - Glosario Billin*. Ene. de 2024. URL: <https://www.billin.net/glosario/coeficiente-de-variacion/>.
- [8] Fabian Scheler. *Quantamental Platform - A fast R function for calculating rolling downside deviation*. 2022. URL: <https://quantamental.amadeus.ch/post/a-fast-function-to-calculate-rolling-downside-deviation>.
- [9] José Luís Alvarez. *¿Qué es el coeficiente Beta (β) en finanzas?* Ago. de 2022. URL: <https://hollymontt.com/es/hollyblog/que-es-coeficiente-beta/>.
- [10] Adrián Oscar Vaca Guzmán. *¿Qué es el coeficiente beta de una acción?* Ago. de 2022. URL: <https://ligadebolsa.com/2022/08/15/coeficiente-beta/>.
- [11] Colaboradores de Wikipedia. *Tasa de retorno*. Sep. de 2023. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Tasa_de_retorno.
- [12] William F. Sharpe. «Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk». En: *The Journal of Finance* 19.3 (1964), págs. 425-442.
- [13] John Lintner. «The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets». En: *Review of Economics and Statistics* 47.1 (1965), págs. 13-37.
- [14] Jan Mossin. «Equilibrium in a Capital Asset Market». En: *Econometrica* 34.4 (1966), págs. 768-783.
- [15] Harry Markowitz. «Portfolio Selection». En: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), págs. 77-91.

- [16] Harry Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Yale University Press, 1959.
- [17] Edwin J. Elton et al. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. 9.^a ed. Wiley, 2014.
- [18] Zvi Bodie, Alex Kane y Alan J. Marcus. *Investments*. 12.^a ed. McGraw-Hill, 2020.
- [19] Richard A. Brealey, Stewart C. Myers y Franklin Allen. *Principles of Corporate Finance*. McGraw-Hill Education, 2019.
- [20] Zvi Bodie, Alex Kane y Alan J. Marcus. *Investments*. McGraw-Hill Education, 2018.
- [21] James C. Van Horne y John M. Wachowicz. *Fundamentos de Administración Financiera*. Pearson Educación, 2008.
- [22] eumed.net. *Fundamentos de Finanzas Empresariales*. Consultado en 2025. 2007. URL: <https://www.eumed.net/libros-gratis/2007a/255/index.htm>.