

con los que vulgarmente se conocen con los mismos vocablos en otras ciencias, ó lo que en lenguaje vulgar significan. No se trata aquí, al hablar de *análisis*, de descomposición de un todo en partes, ni tampoco de pasar de lo compuesto á lo simple, para que partiendo de verdades particulares vengamos á deducir principios generales; ni tampoco al hablar de *síntesis* queremos significar el concepto contrario al anterior. Nada de esto; con la frase método *analítico* entendemos, como Duhamel, el procedimiento que se sigue cuando al querer demostrar una proposición la suponemos verdadera, y buscamos, por el supuesto de que así sea, de qué otra podría deducirse, indagando luego si ésta á su vez podría ser consecuencia de una tercera, y así, por sucesivas etapas, procuramos llegar á una verdad ya demostrada ó axiomática.

Y al explicarlo así, nótese bien que diferimos de la acepción que á este procedimiento dió Euclides y más tarde Pappus. Euclides, dice en el libro 13 de sus *Elementos*, que “el procedimiento analítico consiste en admitir la cosa buscada como verdadera, para deducir de ella consecuencias sucesivas hasta encontrar una que sea una verdad aceptada;” y al decir esto, olvidó que, según antes hemos dicho, la verdad de una consecuencia no legitima la de las premisas de que se deduce.

Pappus ya trató este asunto con alguna mayor firmeza, por cuanto exige luego una demostración siguiendo un camino inverso, pero olvida que de este modo no deducirá nunca la verdad propuesta si las proposiciones sucesivas no son todas recíprocas.

El procedimiento *analítico*, tal como lo entiende Duhamel, no puede conducir á error, como el de Euclides ó el de Pappus, y viene á establecer una verdadera cadena de proposiciones que, empezando por la que queremos demos-

trar, termina en una proposición ya conocida. Es un verdadero método de *reducción* y se aplica por igual en su esencia á la demostración de teoremas y á la resolución de problemas, debiendo, sin embargo, tener presente, al aplicarlo, algunas observaciones de suma importancia:

Si dos proposiciones sucesivas son recíprocas, se puede suponer la segunda como deducción de la primera, y si esta reciprocidad tiene lugar para toda la cadena de proposiciones, claro es que el método resulta en esencia *deductivo*, que partiendo de la proposición que queremos demostrar deduce sucesivamente todas las demás hasta llegar á una proposición reconocidamente verdadera.

Para la resolución de problemas se aplica también el método *analítico*: El objeto de un problema es determinar una ó varias cosas que satisfagan á determinadas condiciones. Si no podemos resolverlo directamente en virtud de las relaciones que puedan establecerse entre los datos y las incógnitas, procuramos buscar cosas de la misma especie sujetas á nuevas condiciones que incluyan las primeras como consecuencia; queda así el primer problema reducido á un segundo problema, que si es más fácil que el primero, ya habremos adelantado algo en el camino. Si el segundo problema no puede ser inmediatamente resuelto, se busca el modo de convertirlo ó reducirlo á un tercero y así sucesivamente hasta llegar á un problema de fácil resolución ó que sepa resolverse.

Claro es que no hay determinación absoluta en esta marcha, y que algunas veces puede conducirnos á problemas de mayor dificultad y por esto el método expresado se califica de procedimiento de indagación, no de determinación.

Una condición, sin embargo, hay que añadir en este caso, y es que si no existe reciprocidad entre las soluciones del segundo problema con las del primero, podría

muy bien suceder que resuelto aquél no lo quedara éste en todas sus soluciones, pues algunas de estas últimas no lo serían del segundo problema.

Si las condiciones relativas á uno cualquiera de los problemas sucesivos, son simplemente consecuencia de las del siguiente, todas las soluciones de uno cualquiera de ellos son soluciones del propuesto, pero puede ser que no tengamos así todas las de este último.

Si las condiciones relativas á uno cualquiera de estos problemas son simplemente consecuencia de las del precedente, las soluciones de uno cualquiera de ellos, comprende todas las del propuesto, pero además pueden haber otras que no lo sean.

El procedimiento *sintético*, consiste en partir de una verdad inconcusa ó antes demostrada, para deducir por medio de sucesivos silogismos la verdad de la proposición que tratamos de demostrar. No difiere, pues, del *analítico*, más que en la inversión del orden de los teoremas ó problemas, pudiendo decir gráficamente que lo constituye la misma cadena de eslabones, pero que la seguimos empezando por el que antes fué el último y terminamos por el que fué primero. Es un verdadero método de *deducción*, que puede emplearse con gran fruto, cuando tratamos de exponer una demostración, después que por medio del *análisis* hemos determinado de qué verdad debíamos partir.

El procedimiento *analítico*, es el propio y genuino de la invención, y el procedimiento *sintético* es el más elegante para la exposición ó la enseñanza, sin por ello negarle la condición de inventivo cuando lo permiten la índole de los principios de que se parte. El segundo tiene quizás el inconveniente de que á veces partimos de verdades que el que nos escucha ó el que aprende no vé qué relación

puedan tener con el fin que nos proponemos, ó con el teorema que tratamos de demostrar, y tiene que aguzar la memoria, si quiere retener la demostración; pero este inconveniente es, á mi entender, de poca monta, si se tiene en cuenta que en una demostración analítica también es necesario recordar, de entre las verdades á que hemos de acudir, cual hemos de escoger.

Antes ya hemos hecho notar que el procedimiento *analítico* es algo indeterminado, y depende su buen éxito de la mayor ó menor habilidad del que lo emplea, y hasta á veces de ciertas adivinaciones á que nos empuja el cerebro, resultando en general demostraciones más largas y menos directas. La forma sintética satisface más al alumno.

El arte del profesor consiste en no ligarse exclusivamente con ninguno de los dos métodos, sino, al contrario, escoger en cada caso el más conveniente, alternándolos si es preciso dentro de una misma teoría.

Respecto á la resolución de problemas, es completamente imposible la aplicación del método *sintético*, pues éste debiera consistir en resolver primero un problema, de su solución deducir la de un segundo, de éste la de un tercero, y así por sucesivas operaciones llegar á la resolución del problema propuesto. Pero aquí cabe preguntar: ¿cuál es el problema que como primero de la serie hemos de empezar por resolver? Es imposible fijarlo *à priori*, á menos que antes lo hayamos buscado, indagándolo por medio del procedimiento *analítico*. Este es el único que con seguridad nos conducirá á la solución deseada; el *sintético* puede emplearse como método expositivo. Sólo para ciertos casos de aplicación á las ciencias naturales y cosmogónicas, es quizás aplicable el método *sintético* como procedimiento de invención, porque las consecuen-

cias de algunas leyes generales pueden llevarnos á la explicación de ciertos fenómenos, y como se parte entonces de principios conocidos, respecto á un sistema de cosas, de consecuencia en consecuencia se llega, algunas veces, á la determinación de nuevas leyes á que dichos sistemas satisfagan.

En las cuestiones ordinarias de la vida, se hacen constantemente trabajos de análisis y síntesis, pues siempre una acción depende de otra, ésta de una tercera, y luego, para realizar la primera, procedemos con el método sintético, partiendo de la última.

Los mismos procedimientos racionalmente empleados, nos dan medio para reconocer si una proporción es verdadera ó falsa, y en este último caso, para dar una demostración de su falsedad.

Como consecuencia ó aplicación de estos procedimientos, conviene mencionar aquí la demostración tan empleada por los antiguos geómetros y conocida con el nombre de *Reducción al absurdo*, que consiste en demostrar la falsedad de una proposición contradictoria con la que tratamos de demostrar; pero al hacerlo, debe tenerse muy presente que si esta proposición contradictoria comprende varios casos particulares, es preciso demostrar su falsedad para cada caso, pues si sólo uno fuera cierto, la proposición propuesta no lo sería. Para tener la seguridad de aquella falsedad, es preciso demostrar que cada caso de la proposición contradictoria conduce por razonamientos justos á conclusiones absurdas en sí mismas, ó contradictorias con las hipótesis sentadas, ó con algunas de sus consecuencias.

Reasumiendo, y como regla general, podemos establecer que, toda proposición admite como variantes la *recíproca*, la *contradictoria* y la *recíproca de la contradictoria*, y que para que las cuatro formas sean ciertas, es preciso

demostrar la verdad, por lo menos, de dos de ellas, sin que sean la primera y la cuarta, ni la segunda y la tercera.

En cada caso hemos de escoger las que más fácilmente puedan serlo, haciendo especial estudio de los casos en que alguna de ellas sea falsa.

Con el divorcio de la filosofía y de la ciencia matemática, ó mejor dicho, desde que los filósofos no han sido matemáticos, se ha ido adulterando ó modificando el sentido de la palabra *análisis*; y confundiendo una operación previa que casi siempre ha de verificarse antes de la demostración de un teorema ó de la resolución de un problema, que es su descomposición en varios más elementales, con el método *analítico* antes indicado, ha venido á interpretarse la palabra *análisis*, en el sentido de ser una descomposición de un todo en sus partes más simples, y la *síntesis*, en el de una composición, como así lo explica Condillac, que tal empeño toma en esta interpretación, que hasta trata de demostrar la verdad de su concepto, resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sin embargo, á pesar de que pretende seguir sólo un procedimiento de descomposición para resolverlo, demuestra Duhamel con mucho acierto, que lo que hace Condillac es un verdadero razonamiento analítico, en el sentido mismo que antes hemos explicado.

Por muchos que sean los esfuerzos para demostrar lo contrario, resulta un hecho innegable que el hombre, al investigar las primeras verdades de una ciencia, procede por *reducción*, empleando el método *analítico*, penetra en los detalles y aplicaciones de cada verdad encontrada, desarrollando luego la teoría, y elevándose, por fin, á las leyes generales, que, cual potentes focos luminosos, le indican el camino que luego ha de seguir, para que por medio del método *sintético* pueda realizar una exposi-

ción ordenada y lógica, y descubrir frecuentemente otras muchas é ignoradas verdades, como simples corolarios de las primeras. Para expresar con pocas palabras estos tres períodos que distinguimos en la formación de la ciencia en general, y de la Matemática en particular, diremos que en el primer período se pasa de lo concreto á lo abstracto; en el segundo, permanece en la región de lo abstracto; para, en el tercero, volver de lo abstracto á lo concreto.

Así Vieta concibe la substitución de los números en los algoritmos que entre ellos pueden establecerse, por simples letras, que al representar un número indeterminado, ya fuese entero ó fraccionario, positivo ó negativo, real ó imaginario, levanta poderosamente el vuelo de la ciencia de los números, dándole una generalidad precursora del concepto de su continuidad, y luego del de sus diversos órdenes cuantitativos, y más tarde Leibnitz inicia la substitución de estas letras por simples entes de razón; amplía luego Boole los signos que tenía y le bastaban al Álgebra, y se constituye la Lógica Matemática.

Si ahora queremos proceder didácticamente á la exposición de toda esa cadena de elucubraciones, deberemos empezar por la teoría de las leyes formales de los conceptos abstractos, para luego deducir en consecuencia las que se refieran al concepto cantidad, estableciendo su continuidad, y, por tanto, sus diversos órdenes infinitesimales, para luego, en el caso de la finitud, encontrarnos con el Álgebra, y de ésta, por fin, en el caso en que la cantidad en general resulte ser un número, deducir las más elementales teorías de la Aritmética vulgar.

Monge, á principios del siglo XIX, estudia con detención los diversos procedimientos que hasta entonces, y sin sujetarse á ningún principio general, se empleaban para la representación gráfica de los cuerpos de tres dimensiones

sobre una superficie plana. Cada profesión tenía su procedimiento propio fundado en principios geométricos, pero sin relación alguna entre sí. De la selección de todos los métodos empleados y por procedimiento analítico fué Monge determinando las verdades comunes á todos ellos, estableciendo los teoremas en que podían fundarse, y por fin llegó á establecer una ley general que los comprendiera á todos y cuyo desarrollo constituye hoy la llamada *Geometría descriptiva*.

Establecidas y fundamentadas las leyes generales relativas á esta ciencia, se ha facilitado notablemente el trabajo del arquitecto y del ingeniero, y sobre todo se ha logrado establecer un lenguaje universal completo, para ponerlos en relación con los artífices encargados de realizar sus proyectos, y luego como notables aplicaciones se han originado la teoría de las Sombras, de la Perspectiva, de la Gnomónica y de otras ramas que cual corolarios de los principios de la Geometría descriptiva van cada día enriqueciendo el campo de las ciencias de aplicación. Si quisiéramos exponer ahora la Geometría descriptiva ya no empezaríamos por las nociones aisladas de que partió Monge, sino que partiríamos de los principios generales hoy establecidos, y siguiendo el método *sintético* iríamos exponiendo los numerosos teoremas y problemas á que la aplicación de aquélla da lugar.

Pero téngase muy en cuenta que al hablar de método expositivo ó didáctico y al reconocer que el procedimiento *sintético* es el que mejor conviene á su naturaleza y á su objeto, no queremos con ello afirmar que sea el más pedagógico, pues una cosa es exponer una ciencia para que la comprenda y la admire un cerebro ya educado é impuesto de los elementos necesarios para la comprensión de lo que se le explica, y otra es cuando se trata de

que las verdades en la misma ciencia contenidas sean asimiladas por inteligencias jóvenes y en estado incompleto de desarrollo.

Y para terminar este punto, permítasenos observar, que la frase *Análisis matemático* se ha ido vulgarizando para ser aplicada á una rama especial de la Matemática, en lugar de darle su acepción verdadera, conociéndose con tal nombre, el conjunto de teoremas y problemas en que para su demostración ó resolución debe aplicarse el cálculo algebraico. Carnot aun particulariza más el vocablo y lo aplica sólo á los problemas de cálculo en que entren elementos extraños á las cantidades reales y positivas. Para Carnot empieza el análisis donde se hace uso de cantidades negativas aisladas ó de cantidades imaginarias.

Tales opiniones obedecen á que el método *analítico* es con ventaja empleado en la resolución de los problemas y en la demostración de teoremas relativos á la cantidad abstracta, y para operar con ésta es preciso el uso del cálculo algebraico que permite la introducción de las cantidades conocidas y desconocidas dentro de los mismos algoritmos; y en cambio el *sintético* es de uso más frecuente en las teorías relativas á la forma, siendo muy generalizado en la Geometría y empleado casi exclusivamente en la exposición ó enseñanza de esta importante rama de la Matemática.

Es sensible que se haya adulterado el sentido de tales palabras, pues lo que hoy se llama por muchos *Análisis matemático* tiene su nombre perfectamente adecuado en el de *Álgebra* (1), ya que algebraicos son los algoritmos con

(1) Vieta designó con el nombre de *Logística especial* ó *Cálculo de símbolos* á la ciencia algebraica, de su invención, en oposición á la *Logística numérica* que es la hoy designada por *Aritmética universal*.

que se expresan las relaciones que ligan entre sí las cantidades variables, funciones unas de otras, y cuyo estudio es sin duda el de mayor alcance de aquella ciencia, y no habría necesidad de emplear en su lugar, un nombre que con tal precisión expresa uno de los métodos de demostración que se conocen en la Matemática y que es común á todas las ramas y derivaciones de la misma.

Creo que es inoportuno ó cuando menos antipedagógico la introducción de nuevos modismos para designar ciertas asignaturas, cuando éstas tienen ya su nombre propio; y lo resulta mucho más, si aquéllos sirven desde antiguo para designar procedimientos seguidos en el desenvolvimiento de la misma ciencia.

La asignatura de *Análisis matemático* debiera llamarse, como antes, *Álgebra superior*, y si se querían distinguir los dos cursos en que hoy está dividida, sería muy apropiado para el primer curso el de *Aritmética universal ó general*.

III

Del estudio que hemos hecho, aunque sea en esbozo, de los métodos que deben seguirse para la indagación de las verdades matemáticas en un caso, y para la exposición de las mismas en otro; y también del cuidado con que debe procederse al formular los silogismos, se deduce la influencia que desde el punto de vista pedagógico ha de tener la enseñanza de la Matemática en la inteligencia de

los alumnos, desarrollando notablemente en ellos las funciones del raciocinio, acostumbrándoles á exigir el mayor rigorismo en sus juicios y constituyendo, como dice Arago, una verdadera *Lógica en acción*.

Por esto la pedagogía moderna exige que siempre la enseñanza de la Matemática alterne con la de las demás ciencias, ya sean las físicas ó naturales, y hasta con las de carácter completamente subjetivo, como las morales y las éticas. Los métodos empleados para la deducción de las verdades, infiltra en el ánimo de los alumnos los principios más fundamentales de la Lógica, y éstos constituyen la más preciada gimnasia del entendimiento.

En ninguna ciencia se deducen las verdades mediatas con más rigor, y en ninguna se demuestra con mayor claridad la inexactitud de una afirmación.

Laisant establece dos axiomas, según mi opinión, perfectamente fundados; es el 1.º, *que en la vida actual y en el medio en que vivimos, la enseñanza de la Matemática es necesaria á todos*, y el 2.º, *que toda inteligencia es apta para adquirir la ciencia matemática, hasta ciertos límites, si al enseñársela se hace conforme á las leyes de una buena pedagogía*.

No es difícil encontrar, á veces, personas no exentas de ilustración, que declaran haber tenido siempre aversión hacia los estudios matemáticos y que no recuerdan ninguna noción de las que les fueron enseñadas.

Creo que hay exageración, aunque sean sinceros, pues es muy difícil saber lo que ha adquirido nuestro cerebro y en que medida le han aprovechado los estudios que realizó en su juventud, ya que nuestro estado mental es una resultante tan general, que nadie puede saber con certeza que sería, si de su enseñanza se hubiera suprimido tal ó cual ciencia.

Si se afirmase que todo alumno es apto para ser un matemático, entonces la contestación debiera ser negativa, pues una cosa es la adquisición de los principios fundamentales de una ciencia, y de sus aplicaciones más generales y prácticas, y otra es profundizar acerca de su génesis y contribuir á su adelanto con nuevas verdades. Para lo segundo es necesario tener especial predisposición hacia estos estudios, por más que muchas veces el trabajo continuado y la firme voluntad vengan á suplir las aptitudes naturales ó las hagan aparecer impensadamente, y en este caso, no por ser más tardío el fruto, deja de ser más sabroso y nutritivo.

Las ciencias morales, en que el hombre sin querer introduce algo de su individualidad en los procedimientos, llegan á convencer en muchos puntos, pero no siempre llegan á demostrar. En ellas, el sentimiento entra en lucha con el entendimiento, y establécese á veces una conclusión, no porque sea rigurosamente lógica, sino porque se acomoda mejor á nuestra manera de sentir.

Las ciencias físicas, presentan medios más á propósito que las morales, para desarrollar la aptitud lógica de nuestro entendimiento, pero necesitan, para establecer sus juicios, muchas é importantes observaciones, y generalmente, han de partir de hipótesis, que por ser tales, no tienen la evidencia que nos asegura la bondad de las deducciones. En estas ciencias, el procedimiento analítico es casi el único que cabe emplear, pues los resultados de las experiencias son los que permiten plantear las leyes, y sólo después de formuladas éstas, es cuando cabe deducir consecuencias, aunque nunca con la inquebrantable exactitud de la ciencia matemática.

Y aquí llega la ocasión de tratar de un prejuicio, que, por lo corriente y general, es preciso destruir. Piensan, y

dicen muchos que no han estudiado con algún detenimiento la ciencia matemática, y no han saboreado, por tanto, las innumerables bellezas que ella encierra, que su estudio es antitético al de las artes en general, y sobretodo, al del arte bello; indicando que si bien puede concedérsele un poder educativo sobre la inteligencia, no la creen á propósito para el desarrollo de la imaginación; como si ésta no fuese sino una función de aquélla y no dependiera en su esencia del grado de perfección de la primera. Si por imaginación se entiende sólo la erudición auxiliada de portentosa memoria, que hace dueño, al que posee estas cualidades, de innumerables ideas, imágenes, frases y demás conceptos análogos, poca ó ninguna influencia habrá de tener en estas cualidades cerebrales, el estudio ó la enseñanza de la Matemática, pero si por imaginación entendemos la facultad del hombre de verificar con rapidez comparaciones, establecer raciocinios é inducir leyes, que muchas veces adivina por una gran educación, auxiliada de portentoso genio, entonces, sin duda alguna, que la enseñanza de la Matemática ha de tener decidida influencia en su desarrollo.

Distinguiréis en seguida al orador que ha educado su inteligencia en las leyes inflexibles de la Lógica, del que sólo se ha preocupado del barniz exterior de sus conceptos. El primero os convencerá, y os gustará tanto más cuanto mayor tiempo estéis oyéndole. El segundo, os cautivará en el primer momento por la galanura de sus frases y su prodigiosa erudición, á veces, pero os cansará al breve rato, y no os convencerá seguramente, porque no es el exceso de fraseología, sino la buena fundamentación de los conceptos lo que quiere para ello nuestro espíritu.

Y ¿qué diremos del arte bello, lo mismo si nos referimos al plástico, que al sonoro, y dentro del primero, si

nos fijamos en el pictórico, escultórico ó arquitectónico? Pues debemos afirmar, que en toda manifestación del arte que no haya fundamento lógico, y quién dice lógico, dice matemático, no puede existir la *belleza*, que para que sea tal, debe ir en indisoluble lazo con la *verdad*, y ambas hermanadas con la *bondad* de la concepción artística. El arquitecto falto de educación matemática, no es tal arquitecto, será un decorador, si queréis, será un más ó menos afortunado copista de arquitecturas que fueron, pero nunca sembrará semilla que luego fructifique en alguna manifestación del arte.

La imaginación de un arquitecto, desarrollada sólo al impulso de sensaciones que experimentó al contemplar formas bellas y caprichosas, producirá obras elegantes y hasta de mucho aparato, pero no creará ningún estilo serio, ni obra arquitectónica propiamente dicha saldrá de su lápiz. Y esto puede comprobarse en el churriguerismo del siglo XVIII, y en el llamado modernismo, que por desgracia del arte comienza hoy á aparecer, y que llevado de la sinrazón en que descansa, ha de servir para que se apoderen de la arquitectura los que por saber sólo dibujar y decorar, creen tener patente bastante para ser colaboradores en este arte por excelencia, y que más que ningún otro, necesita del sólido fundamento de los principios matemáticos. En cambio, sujetando el empleo de las formas á las leyes que dicte la mecánica, habida cuenta siempre de los materiales que se empleen, y seleccionando luego aquéllas que por la belleza de sus contornos satisfagan al sentimiento innato de la buena proporción y continuidad de líneas, entonces, y sólo entonces, es cuando se produce una obra arquitectónica.

Iguales consideraciones nos sugiere la pintura, la escultura ó la música, pues todas sus manifestaciones bellas

obedecen á leyes lógicas y matemáticas, que se traducen en armonías de líneas y proporciones, ó de amplitud y número de vibraciones, que el hombre no puede siempre formular matemáticamente, pero que gracias á lo que llamamos inspiración, ese soplo divino que anima algunas veces su inteligencia y que no es más que una adivinación de aquellas leyes, llega á obtener obras que á las mismas se acomodan; y es tal la íntima relación entre lo bello y lo verdadero, que en donde haya belleza real y efectiva, podemos afirmar que hay también verdad, y recíprocamente, encontramos siempre la belleza en una verdad inconcusa ó demostrada.

Toda verdad matemática encierra una belleza innegable, que no será belleza objetiva, pero que lo es de concepto y de concordancia de ideas; y algunas veces ofrece un fondo tal de armonía y son tan generales las aplicaciones que de aquella verdad se vislumbran, que no parece sino que es un cuadro de inmensa perspectiva, que cuanto más lo miramos, más nos extasiamos en él y mayor número de hermosos detalles descubrimos.

¡Qué hermosura y belleza se disfruta, por ejemplo, al analizar y estudiar los numerosos corolarios que se deducen de un teorema como el de Pascal, que se refiere á un exágono inscrito en una cónica, ó de su correlativo de Brianchon! ¡Qué hermosa perspectiva se distingue al vislumbrar las múltiples y variadas aplicaciones del teorema de Desargues!

¡Y qué diremos del concepto de proyectividad de las formas, que ha elevado el rango de la Geometría, sacándola de la tutela del análisis sin menguar su generalidad, dándonos á descubrir, por la mutua combinación de las formas homográficas y correlativas, un campo ilimitado de curvas y superficies de órdenes superiores, que al compararlo con

las que hoy tenemos estudiadas, no parece sino que comparamos el Universo entero con el sistema solar de que formamos parte!

Sólo el que ha cultivado con algún interés la ciencia de la verdad, puede explicar la fruición especial que experimenta su ánimo, al reconocer que se halla en posesión de lo que es su anhelo constante, y como dice D'Israeli, constituye la pasión dominante del sér humano, con la ventaja sobre las bellezas físicas, de su inmutabilidad y eterna permanencia.

IV

Entremos ahora en el estudio detenido de la parte primordial de nuestro tema, intentando formar, aunque sea trazado á grandes rasgos, el esquema de lo que debe ser la enseñanza de la Matemática, cuando los que han de ser iniciados en ella son cerebros jóvenes y en estado aún de desarrollo.

Tres son los períodos que comprende esta enseñanza, aparejados con los tres períodos de desarrollo intelectual que admiten los fisiólogos. En los dos primeros es preciso que la Matemática, en sus diversas ramas y grados de dificultad, figure siempre entre los estudios que se hagan en cada curso, pues así viene á ser como un recordador perenne de las leyes de la Lógica y del bien pensar, que son útiles á toda clase de estudios.

Las enseñanzas deben ser tan poco dogmáticas como sea posible, pero sí deben ser esencialmente filosóficas. Esta conciliación de la simplicidad de la forma con la pro-

fundidad de las ideas, constituye una de las cualidades más apreciables del difícil arte pedagógico. Las explicaciones orales del profesor son de absoluta necesidad en todos los períodos, para engendrar en el discípulo el amor y el cariño hacia la ciencia, pero distribuyendo el tiempo disponible para la clase, en tres partes: una, en que el profesor explique la teoría general del tema que se proponga desarrollar; otra, en que se hagan aplicaciones, auxiliado de los alumnos, y una tercera, en que éstos hagan un epílogo ó resumen de lo explicado en la lección anterior, para que sirva de repaso y de corrección de las ideas equivocadas que puedan haber adquirido. Puede esta última parte ocupar el primer lugar, si así lo cree oportuno el profesor, pero éste nunca debe olvidar la necesidad de los repasos cuotidianos si quiere obtener un buen resultado para sus alumnos.

No creemos de absoluta necesidad el texto en ninguno de los períodos y menos en los dos primeros en que la enseñanza debe ser más objetiva, vivaz, variada y familiar, y de ahí que el libro de texto pueda reducirse á su más mínima expresión. En cambio, creemos de gran utilidad los apuntes, en los períodos segundo y tercero de la enseñanza, pues constituyen un gran medio de asimilación; pero siempre en el bien entendido, que aquellos apuntes, no constituyan una copia taquigráfica de lo que en clase se diga, en que sólo se traduzcan en signos las palabras cuyo sonido perciben los sentidos, sino que se fijen en ellos los conceptos que debe recoger la inteligencia. Al hacerlos, debe procurarse que sean someros, fijando los puntos principales y con suficientes datos para reconstituir luego, en casa, la lección explicada. Este es el mejor y más eficaz procedimiento de estudio que debiera siempre emplear el alumno para obtener buen resultado de su trabajo.

Si nos fijamos ahora especialmente en el primer período ó enseñanza primaria de la Matemática, vemos que en él deben sólo adquirirse simples nociones de lo que es la ciencia, con algunas de las definiciones y operaciones elementales más indispensables para todos los usos de la vida, y natural es, que en este caso, sean la Aritmética y la Geometría en sus partes más elementales las que deban integrar dicha enseñanza. Hay que alternar los conocimientos relativos á dichas dos ramas de la Matemática, procurando interpretar con la Geometría de una sola dimensión los algoritmos más fundamentales, para que así vislumbre algo el alumno respecto á las cantidades negativas y adivine ya la generalidad del Álgebra al substituir los números por simples letras. No ha de aprender de memoria las tablas de sumar y de multiplicar sin que antes las haya obtenido directamente y su ánimo se haya compenetrado de ellas por la práctica, evitando siempre demostraciones, y que las cuatro operaciones fundamentales se asimilen al alumno sin querer, y por medio de múltiples ejemplos objetivos, y también, que utilizando modelos de yeso ó madera empiece á comprender la diferencia de las formas y la distinción necesaria entre las de una, dos y tres dimensiones.

También en la Aritmética conviene iniciar á los alumnos en los conceptos de *asociación*, *distribución* y *permutación*, para prepararles, así para los estudios que más tarde puedan emprender, como para tener los conocimientos más indispensables para ejercer luego con provecho alguna modesta profesión.

En Geometría es preciso que el alumno adquiera las nociones de *igualdad* y *desigualdad*, apreciando aquélla por la superposición y distinguiéndola de la *simetría* sin necesidad de limitarla al estudio de la llamada Geometría plana, sino ayudándole á concebir desde el principio, las

figuras de tres dimensiones, iniciándole también en el trazado y propiedades principales de las tres curvas de segundo orden y de aquellas otras trascendentes de más común empleo en la práctica, con el fin de que mañana pueda entender al facultativo bajo cuya dirección trabaje, si sus condiciones no le han permitido ir más allá en los conocimientos adquiridos (1).

Las naciones más adelantadas en conocimientos científicos, incluyen algo de Álgebra en la primera enseñanza, extendiendo la noción de las cuatro operaciones aritméticas al caso de fracciones algébricas, y llegando hasta la resolución de ecuaciones de primer grado y de los sistemas de ecuaciones del mismo orden. La Geometría debe simultanearse siempre con la enseñanza del dibujo, para que prácticamente resuelva el alumno muchos de los problemas que aquélla le demuestra y que con frecuencia no puede comprender, por falta del ejercicio gráfico que el dibujo proporciona.

Respecto de los períodos de segunda enseñanza y enseñanza de facultad, comunes son los preceptos que deben establecerse respecto del orden y de la forma en que han de emitirse los conceptos relativos á las distintas asignaturas que las constituyen, pues desde el alumno de la segunda enseñanza que empieza á iniciarse en la Matemática, considerada como ciencia, hasta que llega por sucesivas etapas á vislumbrar la generalidad de sus concepciones y la sublime belleza de sus verdades, siempre debe tener en cuenta el profesor que aquel orden y el bien entendido enlace de todos los temas que constituyen el cues-

(1) Nuestro estimado compañero el Dr. D. E. Fontseré, Catedrático de la Facultad de Ciencias de esta Universidad, acaba de publicar una obrita titulada: *Principios y problemas de Geometría*, que creemos perfectamente conforme con las ideas que exponemos y que ha de ser, sin duda, de mucha utilidad para los artesanos y alumnos de las Escuelas primarias, á quienes va dedicada.

tionario de su asignatura, debe ser su preocupación constante y el objeto predilecto de sus estudios.

Para la enseñanza de la Matemática en estos dos períodos, y sobre todo en el de la segunda enseñanza, en que por primera vez entra el alumno en campo tanpreciado, hay que empezar siempre por sentar algunas ideas ó conceptos que por su índole y especial alcurnia no puedan definirse. No hemos de intentar la definición del *espacio* ni la del *tiempo*, con ser estas dos nociones las más fundamentales de las ciencias exactas. Sin la primera no hay Geometría; sin la segunda no hay Mecánica; sin la comparación de sus elementos no hay *número*.

Considérase al número como una noción abstracta, independiente de los conceptos de espacio y tiempo, aunque si bien raciocinamos respecto del particular, nos convencemos de que la primera idea de número debió nacer de la comparación de formas extensas ó de la reunión de una serie de unidades extensas ó temporales.

Las dos nociones de espacio y tiempo, perteneciendo á dos órdenes distintos de conocimientos, son ambas intuitivas, y como dice Pascal, la marcha más perfecta que debe seguir el hombre en la exposición de una ciencia, no consiste en demostrarlo ni en definirlo todo, ni tampoco en no demostrar ni definir nada, sino en mantenerse en el justo medio de no tratar de definir lo que es claro y evidente para toda inteligencia, limitándose á definir lo que no tenga aquel carácter.

Contra este laudable consejo de tan ilustre matemático atentan igualmente los que se empeñan en buscar artificiosas definiciones de cosas que no la admiten y en quererlo todo demostrar, por más que muchas veces se cometan con ello peticiones de principio, como los que se desdeñan de hacerlo para cosas que no son tan evidentes

por sí mismas y que necesitan de un procedimiento lógico para llevar el convencimiento al ánimo del alumno.

A las nociones de cantidad y número hemos de añadir la de *combinación, orden y situación relativa*, y una vez éstas adquiridas, es preciso sentar las leyes formales á que dichos conceptos han de obedecer, y que por su sencillez y generalidad no es preciso que se refieran precisamente á cantidades, sino sólo á entes de razón.

Definidas ó simplemente enumeradas las nociones que indicamos, y sentados los principios de verdad, comunes á todos los conocimientos de la humana razón, hay que entrar francamente en el campo de la ciencia, y en él distinguiremos siempre dos períodos. Uno, que aunque parezca extraño á primera vista, tratándose de la Matemática, es experimental, y otro que es esencialmente racional. En el primero se comprenden todas aquellas verdades que inducimos de la pluralidad de varios hechos observados, con el auxilio del instinto intelectual de que nos dotó el Supremo Hacedor, y de cuya comparación y estudio obtenemos una ley ó principio general, sin que podamos dar del mismo una demostración ni la necesite muchas veces nuestro espíritu.

Este primer período es común á todas las ciencias y tiene mayor ó menor importancia, según el grado de objetividad de aquéllas, pero no podemos pasarnos sin él, pues muchas de las verdades axiomáticas que sentamos como evidentes y que se consideran como principios racionales de evidencia inmediata, tienen un principio de origen en la experiencia, pero de una experiencia tan repetida, que á fuerza de hábito llegamos á olvidar que de la experimentación proceden.

Para el reconocimiento de una verdad que no sea necesaria ni de sentido común, no hay más caminos que la

experiencia y el raciocinio. Algunas veces se ha querido tomar como evidencia lo que no es más que el convencimiento íntimo que de una verdad tenemos por repetidas experiencias y múltiples comprobaciones, desconociendo el carácter que aquélla ha de revestir para ser tal; pero hay que admitir también que la experiencia por sí sola no sería tampoco fuente segura de verdades, sin estar dotado el hombre de ese instinto intelectual que nos hace *razonables aun antes de raciocinar* (Balmes).

Hay que establecer, pues, axiomas, y hasta postulados cuando no podemos lograr aquella evidencia inmediata, y estos últimos son á la ciencia matemática lo que las hipótesis son á las ciencias físicas. Hay que distinguir siempre estas hipótesis ó aquellos postulados, considerados en sí mismos y como tales, esencialmente arbitrarios, pero nunca contradictorios entre sí, y el valor de estas hipótesis ó de aquellos postulados considerados desde el punto de vista de sus aplicaciones.

Toda ciencia fundada en hipótesis no contradictorias y desarrollada conforme á las leyes de la Lógica es absolutamente *racional*. Dentro de su racionalidad podrá ser ó no *verdadera*, según que tenga ó no comprobación dentro del mundo real. La verdad es la realidad; *Verum est id quod est*, es lo que es, dice San Agustín.

Cada rama de la ciencia matemática necesita, pues, ante todo, de sus axiomas, y la Geometría es la que los necesita en mayor número, efecto quizás de su relativa objetividad, dentro del carácter subjetivo de su esencia y de su desenvolvimiento, y todos tienen su origen en la noción del espacio y en la posibilidad de dar movimiento á las formas concebidas en el mismo, conservando la invariabilidad de su forma y por tanto pudiendo una de ellas ocupar la misma porción de espacio que otra ocupa, supo-

niendo siempre á la forma abstracta y libre de la materia de que está formado el cuerpo que la tenga.

Sigue después la noción de la *línea recta* para la cual hemos de aceptar la definición clásica de Euclides, diciendo que es la línea que queda determinada completamente y sin ninguna restricción, por sólo dos puntos de la misma, y por último, la del *plano*, definido por su propiedad característica de ser la única superficie superponible á sí misma sin flexión, y con ó sin inversión de sus dos caras.

En estas nociones se apoyan las veintiocho primeras proposiciones del primer libro de Euclides, pero ellas solas no bastan á la ciencia geométrica para su completo desarrollo, y necesita establecer otra verdad, que incluyó Euclides entre los axiomas, y que luego se designó con el nombre de *postulado*, por no creerla con suficiente carácter de evidencia para ser aceptada como principio racional y ser imposible su demostración, fundándonos sólo en los axiomas establecidos. Y aquí vemos precisamente comprobada la necesidad de formular las hipótesis de que hablábamos para la ciencia en general, pero también hemos de insistir en la necesidad de rechazar aquellas que en sus resultados estén en contradicción con la realidad, y si esta circunstancia no puede comprobarse de un modo absoluto, basta que la contradicción exista con ese silogismo natural y tácito que conocemos con el nombre de *sentido común* (1).

(1) Dice Balmes en su *Filosofía fundamental* :

«El *sentido común*, significa una ley de nuestro espíritu diferente en apariencia según sean diferentes los casos á que se aplica, pero que en realidad y á pesar de sus modificaciones, es una sola, siempre la misma, y consiste en una inclinación natural de nuestro espíritu á dar su asenso á ciertas verdades, no atestiguadas por la conciencia, ni demostradas por la razón, y que todos los hombres han menester para satisfacer las necesidades de la vida sensitiva, intelectual ó moral.

El verdadero sentido común, que reúne todas las condiciones de tal, puede servir de criterio absolutamente infalible y se puede desafiar á los escépticos á que señalen un ejemplo en que haya fallido.»

Y en efecto, á propósito del célebre postulado de Euclides (1), y con motivo de las muchas é infructuosas tentativas que han existido para su demostración, Lobattchewsky y Bolyai, á principios del siglo pasado, trataron de fundar otra Geometría, independiente de aquel postulado, pero tuvieron necesidad de establecer otro que lo substituyera y que como aquél es indemostrable (2), y más tarde Riemann estableció una tercera Geometría, también fundada en su postulado respectivo (3).

Pues bien: de conformidad á lo que hemos dicho, tan racional es la Geometría euclideana como la de Lobattchewsky, como la de Riemann, y como la constituida por todas las verdades geométricas dependientes sólo de la posición relativa de figuras ó que puedan establecerse sin

(1) Este postulado que constituye el axioma XI de la Geometría de Euclides, dice: *Cuando dos rectas formen con una transversal dos ángulos interiores de un mismo lado, cuya suma difiera de dos rectos, dichas rectas deben encontrarse hacia el lado de la secante en que aquella suma sea inferior á dichos dos rectos.* Cuya proposición equivale á decir que: *Dos rectas, una perpendicular y otra oblicua á una tercera, deben encontrarse hacia el lado de ésta en que sea agudo el ángulo formado por la oblicua, ó también y con más brevedad puede expresarse, diciendo que Por un punto exterior á una recta dada no puede trazársele más que una paralela,* lo mismo si se entiende por tal una recta que por más que se prolongue no puede encontrar á la primera, que si se la define como límite que separa los vectores que cortan de los que no cortan á la recta dada.

(2) Lobattchewsky con Bolyai y Gauss, admiten que puede ocurrir la condición negativa del postulado de Euclides, y en su virtud, que *dos rectas, una perpendicular y otra oblicua á una tercera, pueden no encontrarse á ningún lado de esta última*; lo que equivale á decir que: *Por un punto exterior á una recta dada, pueden trazársele infinidad de rectas paralelas* si por recta paralela á otra se entiende la que por más que se prolongue no puede llegar nunca á encontrar á ésta, ó que *Por un punto exterior á una recta dada, pueden trazársele dos paralelas* si por tales se entienden las que constituyen los límites que separan las que cortan de las que no cortan á la recta dada, y que serán las que comprendan el haz de rectas que por más que se prolonguen no cortarán á esta última.

A la Geometría fundada en este postulado, se la conoce con los nombres de *abstracta* ó *Geometría imaginaria*.

(3) Riemann ha tratado de establecer una Geometría, fundado en el siguiente postulado: *Dos rectas en un plano siempre se encuentran,* que equivale á decir: *« Por un punto exterior á una recta dada, no puede trazársele ninguna paralela »* cuya proposición resulta ser la negación del principio admitido de que dos puntos de un plano determinan una sola recta. Se distingue á esta Geometría con el calificativo de *doblemente abstracta*.

el auxilio de postulado alguno, pues todas ellas, con procedimientos esencialmente lógicos, obtienen resultados absolutamente conformes con la hipótesis ó postulado que respectivamente sientan acerca de las paralelas que pueden trazarse á una recta desde un punto exterior, ó independientes de tal principio, si no lo necesitan para su desenvolvimiento; pero de las tres Geometrías antes citadas, llamadas respectivamente parabólica, hiperbólica y elíptica, la primera, la de Euclides, es sólo la que satisface á las propiedades reales del espacio, tal y como el hombre las comprende y las aprecia, y por este motivo calificaré á la Geometría euclideana de Geometría *humana*, creyendo ser este adjetivo el que mejor comprende su doble carácter de racional y conforme con las condiciones del espacio en que operamos.

Mr. de Tilly ha querido obtener, por medio del análisis, una fórmula general, en la cual existe un parámetro que de ser cero, positivo ó negativo, puede dar lugar y con ello deducir la existencia de las tres Geometrías, pero un examen riguroso de sus procedimientos nos indica que para llegar á la fórmula expresada, se necesita partir de la noción de distancia entre dos puntos, y al sentar ésta, se funda, sin querer, en el mismo postulado de Euclides, del que quiere prescindir. En cambio Beltrami, partiendo del procedimiento geométrico de superposición de figuras, base de las demostraciones seguidas en esta ciencia, demuestra que las Geometrías de Lobattchewsky y Riemann, no son más que la aplicación de la Geometría euclideana á las figuras trazadas en los espacios de dos dimensiones que constituyen las superficies pseudoesféricas y esféricas respectivamente; las dos de curvatura uniforme en todos sus puntos, negativa la primera y positiva la segunda.

Las líneas geodésicas propias de dichas superficies son

dentro de ellas, lo que la línea recta es en el plano, y para aquéllas se realizan todas las propiedades que Lobatchewsky y Riemann quieren gratuitamente aplicar á la superficie plana, que aunque de curvatura constante, es nula en todos sus puntos y por tanto no puede ser caso comprendido en el anterior; y tiene su comprobación este aserto, en otra propiedad distintiva de la geometría plana y que hace que no pueda incluirse ó asimilarse á las geometrías esférica y pseudoesférica, y es la de la *inquebrantabilidad* del plano, entendiéndose por tal, su propiedad exclusiva, de que antes incidentalmente hemos hablado, de poder aplicar una cualquiera de sus partes sobre otra parte del mismo, ó de otro plano, sin flexión alguna é invirtiendo ó no la superficie que la constituye. Y para legitimar, si cabe aun más, el concepto de Geometría racional y humana que tenemos, de la fundada en el discutido postulado de Euclides, nótese la circunstancia demostrada por Beltrami de la imposibilidad de constituir una *estereometría* ó geometría del espacio con las geometrías hiperbólica y elíptica.

No tiene tanta intervención la experiencia en las leyes fundamentales de la Aritmética, la más simple y más abstracta de todas las ramas de la Matemática; sin embargo, el principio de la continuidad en la realización de los fenómenos naturales, así como el de la uniformidad en el transcurso del tiempo, son los que han engendrado en nosotros la noción abstracta de la continuidad en las variaciones del *quantum*, así como del principio de divisibilidad ilimitado de un espacio, ó del aumento indefinido de un tiempo, se ha derivado la noción de los indefinidamente pequeños é indefinidamente grandes.

En la Mecánica, hemos de acudir á la experiencia para concebir la idea de fuerza, y luego la de masa, por

el efecto móvil que aquella produzca al ser aplicada á distintos cuerpos, y claro es, que á medida que pretendamos entrar en la explicación de ciencias más objetivas, como la Astronomía y Geodesia, más son los datos que la experiencia debe proporcionarnos, y ya no sólo en forma axiomática, ni siquiera postulante, sino en la de verdaderas hipótesis, como la de la ley de la gravitación universal.

Poco importante desde el punto de vista de su extensión, es, pues, el primer período que podemos designar como experimental, en la ciencia Matemática, pero no por esto el profesor debe tener menos cuidado en que las pocas, pero fundamentales ideas que establezca, sean intangibles desde el punto de vista filosófico, y de fácil comprensión para los alumnos.

Establecidas las bases de uno cualquiera de los grandes capítulos en que puede suponerse dividida esta sublime ciencia, cabe entrar ya en el segundo período, esencialmente lógico ó racional, y al proponernos transmitir á nuestros discípulos las verdades que en tan gran número encierra, con las demostraciones ó silogismos que para ello deben emplearse, y con la oportuna aplicación de los métodos analítico y sintético antes indicados, es preciso tener en cuenta tres importantes condiciones, si se quiere que la enseñanza sea fructífera y provechosa: Ante todo, debe tenerse siempre presente, al explicar un teorema cualquiera, *la teoría general* de que se deriva, ó á que pertenece; luego, poner claro y manifiesto *el mecanismo del cálculo*, y por último, hacer muchas aplicaciones de dicho teorema, por medio de la *resolución de problemas*. Es preciso emplear simultáneamente los tres medios expresados, y el olvido ó insuficiencia de uno de ellos, puede hacer ineficaz la enseñanza de la Matemática. Es como un producto de tres factores, en que la anulación de uno de

ellos implica necesariamente la desaparición del producto.

El recuerdo constante de las teorías generales, influye de una manera decisiva sobre el raciocinio, permitiendo adivinar al alumno, bajo forma sistemática, lo que se ha descubierto acerca de un punto determinado, después de larga serie de estudios. Aquí puede el profesor seguir el método analítico ó el sintético, según su criterio, ó alternar los dos, conforme ya hemos antes aconsejado. En algunos casos, convendrá que el alumno se asimile el procedimiento que siguió el primer matemático que descubrió una verdad determinada, para llegar á la posesión de la misma; otras veces, para dar más seguridad á la demostración, y sobre todo mayor elegancia, cuando los conocimientos adquiridos lo permitan, será conveniente emplear el procedimiento sintético, para que se acostumbre el discípulo á descubrir con una sola mirada de su inteligencia, la portentosa fecundidad de un determinado teorema.

El mecanismo del cálculo, es la lengua con la cual el matemático expresa sus ideas, y plantea y resuelve sus problemas. Es su conocimiento, un trabajo previo de preparación que debe hacer el alumno en sus primeros años, cuando aun su inteligencia no está suficientemente cultivada, y sólo es conveniente iniciarle en las primeras nociones de la ciencia, para que así, alternando con ellas, no sea tan fatigosa la asimilación de aquel mecanismo. Claro es que el recuerdo de todos los símbolos empleados no constituye la esencia de la educación matemática, pero es la técnica indispensable en toda ciencia, que abrevia los razonamientos y facilita la obtención del resultado.

La aplicación de los principios teóricos y del mecanismo adquirido, á la resolución de los problemas, constituye el tercero de los factores indispensables á toda enseñanza matemática, y entre los tres enumerados y

descritos, es el que mejor influencia tiene en el desarrollo de las facultades intelectuales.

Desgraciadamente, este es el punto más flaco de la enseñanza en nuestra patria. Recientemente, se han introducido clases prácticas en las asignaturas de la Facultad de Ciencias, pero por falta de personal resultan deficientes y de muy difícil realización.

Yo sé decir que en mi cátedra, es de tal necesidad esta parte práctica, ó de aplicación á problemas varios, que puedo asegurar que no sabé Geometría descriptiva (entendiendo por saber, el saberla aplicar), por muy enterado que esté de su parte teórica, y por bien que la comprenda, quien no haya realizado problemas relativos á todos los puntos que constituyen la asignatura, y desafío al mejor teórico, para que resuelva de primera intención un caso práctico de la misma, si antes no se ha tomado la molestia de ir resolviendo problemas con datos cualesquiera, y hasta aportados por él mismo, si se quiere, durante el tiempo en que ha ido asimilando las verdades que constituyen tan hermosa rama de la ciencia matemática.

Los beneficiosos resultados que producen los problemas en esta enseñanza, se manifiestan principalmente por la independencia que llega á lograr el alumno en su resolución, apartándose, algunas veces, de los procedimientos empleados en clase, cuando por la naturaleza de los datos escogidos, se le acude otro mejor y más rápido. Esto me sucede á mí con gran frecuencia en cátedra, y no os podéis figurar el gozo que experimento, cuando un alumno, por su propio esfuerzo, y en vista de los datos de un problema por él mismo planteado, veo que lo resuelve por un método racional, aunque sea distinto del procedimiento general por mí indicado.

Demuestra entonces el alumno que ha aprovechado las

lecciones explicadas, y yo tengo la satisfacción de haber contribuido en algo al desarrollo de sus disposiciones para el cultivo de la Matemática.

Desde otro punto de vista debe también considerarse la importancia que tiene la resolución de problemas, y es la de presentar á los ojos del alumno las aplicaciones que en las ciencias físicas ó industriales tienen las verdades abstractas y al parecer sin finalidad alguna, que en clase se les enseñan, y á la par que se contribuye así á su mayor ilustración, se le deja vislumbrar algo del hermoso conjunto que debidamente enlazadas, constituyen las verdades todas de una ciencia, para él á veces tan escuetas y faltadas de utilidad y hasta de belleza, cuando las oyó sólo de labios del profesor. La resolución de problemas debidamente escogidos, justifica ante los alumnos la importancia práctica de las aplicaciones de las asignaturas que cursa, y en alguna de éstas es de todo punto indispensable ir variando las condiciones de los datos, y hasta ir cambiando la naturaleza de éstos, si se quiere que el alumno se convenza, de la generalidad de los principios científicos que la integran.

Un ejemplo citaré, sacado de la práctica en la enseñanza de mi asignatura: Cuando se trata de las lecciones relativas al trazado de planos tangentes á las superficies, conviene siempre recordar, primero, la teoría general relativa á la generación de éstas, repasando, aunque sea ligeramente, los procedimientos diversos que para ello pueden seguirse, luego, la definición y propiedades de un plano tangente y las del haz de planos tangentes que tiene por arista una generatriz, si la superficie es alabeada, y entonces, aplicando los procedimientos aprendidos en la primera parte de la asignatura, que la constituye el *mecanismo del trazado* (que desempeña aquí

el papel del *mecanismo del cálculo*), llégase con gran facilidad á la determinación de aquellos planos tangentes, en un punto dado de una superficie, pasando por un punto exterior ó paralelos á una recta dada.

Pero, si al llegar aquí, no se indica algo al alumno respecto de la importancia que tiene aquel trazado de planos tangentes ó aquella determinación de sus puntos de contacto ¿qué entusiasmo podrá despertarse en los alumnos por aquellos preciosos conceptos y rigurosas consecuencias? Ninguno completamente. Aprende entonces el alumno lo que se le ha explicado con indiferencia y con el deseo de recordarlo sólo hasta el día del examen. En cambio, si después del trazado de un plano tangente, se le advierte que este último determina la normal y que el lugar geométrico de las normales trazadas á lo largo de una línea situada en una superficie, ha de ser la superficie de junta de los sillares que formen una bóveda que tenga la primera como intradós; y levantando la cabeza al techo abovedado de la cátedra se les indica que si aquel fuese de sillería, las líneas de separación ó subdivisión de sillares, debieran ser las que diesen como superficie normal la más sencilla posible, y que el ideal de la Estereotomía es que aquélla sea una superficie desarrollable, cuando no plana; y si de igual manera se le advierte que el trazado de planos tangentes desde un punto exterior ó paralelos á una recta dada, es la operación necesaria para la determinación de la línea de separación de luz y sombra de un cuerpo limitado por una superficie curva, suponiéndola iluminada por rayos emergentes de un foco ó paralelos entre sí; entonces el alumno se convence de la necesidad de aquellas teorías y de aquellos estudios, y si con un ejemplo práctico en forma de problema puede completar aquel convencimiento, se logra un notable estímulo para su aplicación.

La resolución de problemas es á la Matemática lo que el trabajo de laboratorio á las ciencias fisico-químicas, y así como no se comprendería que el estudio de éstas pudiera realizarse sin el laboratorio ó el gabinete, tampoco puede ser fructífera la enseñanza matemática sin que alterne la explicación teórica con la aplicación de las fórmulas y teoremas demostrados.

Hágase mucha práctica matemática, dicútanse con detención los problemas, y veréis como el mismo alumno se cuidará de consultar las teorías que se hayan explicado, cuando se convenza que sin ellas no puede resolver satisfactoriamente aquéllos.

Otras recomendaciones hemos de hacer que completen las bases pedagógicas que hemos establecido.

Al enseñar, es preciso no abusar del rigorismo en las demostraciones, y hasta alguna vez es conveniente tomar ciertas verdades como evidentes, advirtiéndole al alumno que más tarde se demostrarán, y será cuando su ánimo esté más versado en la asignatura, y se halle debidamente preparada su inteligencia. La enseñanza elemental, sobre todo, debe ser lo más objetiva posible y muchas ideas darlas *sub-condicione*, y luego, en una segunda explicación, llenar todos los huecos y demostrar rigurosamente todos los detalles.

Tampoco deben proponerse al alumno puntos sujetos á discusión ni interpretaciones dudosas de ciertos resultados; muy al contrario, hay que presentarle fácil el camino, libre de toda duda, y sólo así se logrará que lo siga con cariño.

Así, por ejemplo: la imposibilidad de demostrar el postulado de Euclides y la necesidad de tomarlo como á base de la Geometría humana, no influye en las verdades que del mismo se derivan, y es preciso evitar que apa-