Capítol 4

Jocs de demanda amb descompte

En aquest capítol presentarem el primer model amb funcions de costos particulars, els anomenats jocs de demanda amb descompte.

L'objectiu és realitzar un estudi d'aquest model, analitzant quines propietats satisfà així com els diferents tipus de solucions aplicables als jocs cooperatius. En concret estudiarem el core i les solucions puntuals clàssiques de la teoria de jocs cooperatius. També veurem que presenten una particular relació amb una coneguda classe de jocs que és la dels jocs de fallida (de l'anglès *bankruptcy games*).

4.1 El model

El model de demanda particular que desenvolupem en aquesta secció està motivat per l'acord de compra de revistes electròniques que va realitzar el Consorci de Biblioteques Universitàries de Catalunya amb Academic Press IDEAL. Les dades del mencionat acord estan desenvolupades en el capítol 2.

Tal i com s'ha definit un problema de demanda, les funcions de costos associades als béns venen determinades exclusivament pels venedors. En qualsevol àmbit de la vida es poden trobar funcions de costos de la forma més diversa. Per exemple, a la copisteria de la Facultat d'Econòmiques de la Universitat de Barcelona, el cost unitari de fotocopiar un document és major en les primeres vint còpies que quan es sobrepassa aquesta quantitat. O en un supermercat, el preu d'una llauna de refresc és més car que el preu unitari de cada llauna d'un pack de sis. Exemples d'aquest tipus donen lloc a funcions de costos amb característiques diferents, però totes elles tenen com a nexe comú el fet de determinar el preu partint d'un preu inicial al qual se li apliquen descomptes per volum.

Una situació semblant es produeix en l'acord realitzat pel CBUC i l'editorial Academic Press. A continuació, resumim amb brevetat les dades significatives de l'acord que permeten representar la situació com un problema de demanda. El preu final acordat, per permetre l'accés al gruix de revistes electròniques de l'editorial Academic Press, es fonamenta en l'objectiu de l'editorial de mantenir un nivell d'ingressos similar a l'assolit en els darrers períodes. És a dir, agregar les quantitats obtingudes com a resultat de les vendes de les revistes en format imprès a cada universitat. Per tant, inicialment es pren com a base la demanda històrica de cada membre del consorci. Amb la idea d'afegir incentius al consorci, s'implementa un grau de descompte del 10% sobre determinats béns. Aquesta darrera característica és la que dóna nom al model: jocs de demanda amb descompte.

En aquest cas, la taxa de descompte s'aplica únicament en el preu d'aquelles unitats que superen un cert volum de demanda. Aquest volum l'ha determinat el venedor i ens hi referirem com la quota de compra. El preu final que paga el consorci per una revista es fonamenta en el preu de la revista en format imprès i en l'aplicació d'un descompte per les unitats que superen la quota.

Així, les variables que donen cos a la funció de costos són:

- El preu de compra d'una unitat de cada bé, c_j per a tot $j \in \mathcal{G}$.
- La quota que indica el volum a partir del qual hi ha descompte, $q^* \in \mathbb{N}$, on $q^* \geq 0$.
- La taxa de descompte que s'aplica a les unitats que superen la quota, $\beta_j \in [0, 1]$ per a tot $j \in \mathcal{G}$.

En general, suposarem que la quota és la mateixa per a tots els béns del problema mentre que la taxa de descompte està associada a cada bé en particular. Per tant.la funció proposada té la mateixa estructura per a tots els béns que configuren el problema de demanda.

Així, per exemple, si per a un cert bé el preu inicial és de 10 u.m., la quota és de dues unitats, $q^* = 2$, i el descompte és del 20%, $\beta_j = 0'2$ i considerem una coalició que demanda cinc unitats d'aquest bé; aleshores això vol dir que les dues primeres unitats es paguen al preu inicial de 10 u.m.

però les altres tres tenen un preu unitari de 8 u.m., de manera que el cost final per a la coalició és de 44 u.m.

Les funcions de costos que expressen la idea exposada són de la forma $f_j^\beta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ on:

$$f_j^\beta(x) := \begin{cases} x \cdot c_j & \text{si } x \leq q^*, \\ x \cdot c_j + (q^* - x) \cdot \beta_j \cdot c_j & \text{si } x > q^*. \end{cases}$$

Observació 4.1. *La funció $f_j^\beta(x)$ és sempre contínua.*

La funció de costos es pot reescriure com el mínim de dues funcions lineals, és a dir,

$$f_j^\beta(x) = \min\{x \cdot c_j,\, x \cdot c_j + (q^* - x) \cdot \beta_j \cdot c_j\} \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}_+.$$

D'aquesta forma es pot descompondre en dues components

$$f_j^\beta(x) = x \cdot c_j + \min\{0, q^* - x\} \cdot \beta_j \cdot c_j.$$

Gràficament,

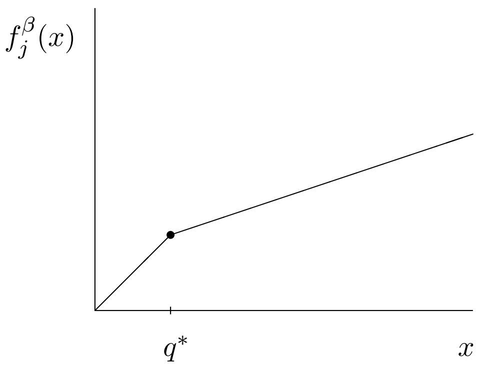

Figura 4.1: Funció de costos

Observació 4.2. *La funció $f_j^{\beta}(x)$ és còncava*[1] *lineal.*

Per traslladar l'acord a un problema de demanda hi ha una sèrie de dificultats, ja que la informació proporcionada és incompleta i no diu res sobre el tractament que cal aplicar a una coalició qualsevol de jugadors. Únicament se sap quin és el cost de la coalició total. Per això, s'intenta estendre la idea de l'acord a totes les altres coalicions possibles.

En general, doncs, un problema de demanda que incorpora descomptes ve determinat per:

- un conjunt de jugadors, que són els membres del consorci i que notem per
$$N = \{1, \ldots, n\},$$
- un conjunt de béns, que són les revistes electròniques que ofereix l'editorial, que notem per
$$\mathcal{G} = \{1, \ldots, m\},$$
- les unitats demandades dels béns pertanyents a $\mathcal{G}$ per cadascun dels jugadors $i \in N$,
- el cost d'adquisició de cada bé, que són els preus de les revistes en format paper, $c_j \geq 0$ per a tot $j \in \mathcal{G}$,
- i el descompte unitari que s'aplica per unitat comprada, β_j per a tot $j \in \mathcal{G}$, sempre que el nombre d'unitats superin una quota mínima $q^* \geq 0$.

Partint de l'acord, es proposa la funció de costos plantejada anteriorment, aplicable a cada bé, la qual avalua el cost segons el preu del bé, el descompte assignat, la quota i el nombre d'unitats demandades. La funció pren la forma:

$$f_j^{\beta}(x) = x \cdot c_j + \min\{0, q^* - x\} \cdot \beta_j \cdot c_j \text{ per a tot } j \in \mathcal{G},$$

on c_j és el preu del bé j, β_j és el percentatge de descompte i q^* és la quota.

A continuació modelitzarem el problema de demanda mitjançant un joc cooperatiu, el joc de demanda amb descompte. El joc el plantejarem prenent com a base l'acord a què van arribar el CBUC i l'editorial Academic Press IDEAL.

[1] Una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és còncava si per a tot $x, y \in \mathbb{R}$ amb $x \leq y$, i per a tot $\lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Definició 4.3. *Sigui* $\Omega = (N, \mathcal{G}, D, \mathbf{f}^{\beta})$ *el problema cooperatiu de demanda derivat de l'acord. El joc de demanda amb descompte,* c_{Ω_β}*, es defineix de la següent forma:*

$$\begin{aligned} c_{\Omega_\beta}(\emptyset) &:= 0\,; \\ c_{\Omega_\beta}(S) &:= \sum_{j\,\in\,\mathcal{G}} \left(\sum_{i \in S} d_{ij} \cdot c_j + \min\{\, 0,\, q^* \; - \sum_{i\,\in\,S} d_{ij} \} \cdot \beta_j \cdot c_j \right) \end{aligned}$$

per a tota $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$.

És a dir, per a cada coalició S de jugadors, $c_{\Omega_\beta}(S)$ denota el cost d'adquirir tots els béns demandats pels membres de la coalició. Així, el cost d'una coalició S ve donat pel cost de la seva demanda històrica més un descompte aplicat a les unitats que superen una determinada quota.

Teorema 4.4. *Sigui* (N, c_{Ω_β}) *un joc de demanda amb descompte. Aleshores,* c_{Ω_β} *és un joc còncau*[2]*, és a dir,*

$$c_{\Omega_\beta}(S \cup i) - c_{\Omega_\beta}(S) \geq c_{\Omega_\beta}(T \cup i) - c_{\Omega_\beta}(T) \quad \textit{per a tota}\; S \subseteq T \subseteq N \setminus i.$$

Demostració:
La demostració és immediata ja que tal i com s'indica en l'observació 4.2, $f_j^{\beta}(x)$ és una funció còncava, i la suma de funcions còncaves també ho és.

□

Observació 4.5. *La concavitat junt amb la positivitat i la creixença de les funcions de costos del joc de demanda amb descompte implica a la vegada la monotonia i la subadditivitat d'aquest. Per tant, els jocs de demanda amb descompte satisfan per una banda que les contribucions marginals d'un jugador decreixen a mesura que creix la coalició. Per altra banda, el cost d'una coalició augmenta a mesura que la coalició creix. I finalment, hi ha incentius a formar la coalició total ja que el cost d'aquesta coalició és inferior al cost de la suma dels costos de qualssevol coalicions disjuntes.*

El cas de costos constants estudiat en el capítol 3, es pot veure com un cas particular dels jocs de descompte. Considerem un problema cooperatiu de demanda amb funcions de costos amb descompte, Ω_β, tal que la quota està fixada en una unitat, $q^* = 1$ i el descompte és del 100% del preu per

[2] veure l'Apèndix A

a tots els béns, $\beta_j = 1$ per a tot $j \in \mathcal{G}$, llavors la funció de costos per a tot $j \in \mathcal{G}$, és constant i pren la forma

$$\begin{aligned} f_j^{\beta}(0) &= 0, \\ f_j^{\beta}(x) &= c_j > 0\,, \text{ per a } x \in \mathbb{N}_{++}. \end{aligned}$$

4.2 Descomposició

En aquesta secció estudiarem l'estructura tan especial que presenten el jocs de demanda amb descompte, així com també establirem una relació entre el nostre model i una coneguda subclasse de jocs convexos, els jocs de fallida.

Alternativament, la funció característica del joc de demanda amb descompte es pot escriure de la següent manera:

$$c_{\Omega_\beta}(S) := \sum_{j \in \mathcal{G}} \sum_{i \in S} d_{ij} \cdot c_j + \sum_{j \in \mathcal{G}} \min\{\,0,\, q^* - \sum_{i \in S} d_{ij}\} \cdot \beta_j \cdot c_j.$$

Així, s'observa que el joc està format per dos components ben diferenciats. En un posterior estudi, i sense pèrdua de generalitat, s'ignora la primera component, que notarem per c_D,

$$c_D(S) := \sum_{j \in \mathcal{G}} \sum_{i \in S} d_{ij} \cdot c_j,$$

ja que equival a un joc additiu, és a dir, el cost d'una coalició S ve donat pels costos sense descompte dels membres de la coalició. Recordar que tota solució per a un joc additiu assigna el seu cost individual a cada jugador.

El segon component presenta una característica molt especial com veurem més endavant. Aquest joc l'anomenarem joc de descompte i el notarem per c_β, així:

$$c_\beta(S) := \sum_{j \in \mathcal{G}} \min\{\,0,\, q^* - \sum_{i \in S} d_{ij}\} \cdot \beta_j \cdot c_j.$$

Aquest joc es pot desagregar com la suma dels jocs de descompte per a cada bé. Considerant que tant el descompte com el preu per a cada bé són paràmetres fixats i, per tant, no depenen dels membres presents en una determinada coalició, el joc de descompte el podem reescriure com:

$$c_\beta(S) := \sum_{j\,\in\,\mathcal{G}} \beta_j \cdot c_j \cdot w_j(S)$$

on $w_j(S) = \min\{\,0,\, q^* - \sum_{i\,\in\,S} d_{ij}\}$ per a tota $S \subseteq N,\, S \neq \emptyset$. El joc (N, w_j) el denominarem **joc de quota del bé** j.

Cal destacar que $c_\beta \leq 0$. Així, el joc de demanda amb descompte està compost per una part positiva, c_D, i una part negativa, c_β. És raonable que $c_\beta(S)$ sigui negatiu ja que equival al descompte aplicat a aquesta coalició.

Aquest desagregament del model ens facilitarà el seu estudi com veurem a continuació. La idea present darrera és establir una relació entre els jocs de demanda amb descompte i una coneguda classe de jocs, els jocs de fallida. Aquesta connexió ens permetrà trobar solucions les quals presentin un comportament interessant i que satisfacin determinades propietats.

Com hem comentat anteriorment, el joc de quota $(N,\, w_j)$ té una característica molt especial, la seva relació amb els jocs de fallida (O'Neill, 1982 [60]). Recordem que els jocs de fallida $(N, v_{E,r})$ recullen les anomenades situacions de fallida on un patrimoni, $E \geq 0$, ha de ser repartit entre uns agents que presenten uns drets sobre aquest, r_i, de manera que el patrimoni no és suficient per satisfer tots els drets, és a dir, $\sum_{i \in N} r_i \geq E$. En un joc de fallida, el valor d'una coalició representa el mínim que aquesta coalició pot aconseguir després d'assignar als membres que no pertanyen a la coalició els seus drets, o bé zero si no hi ha prou per garantir aquests drets:

$$v_{E,r}(S) := \max\{0,\, E - \sum_{i \in N\setminus S} r_i\} \quad \text{per a tota } S \subseteq N.$$

Lema 4.6. *Sigui* (N, w_j) *el joc de quota del bé* j*. Aleshores,* $-w_j$ *és un joc de fallida.*

Demostració:
Hem de comprovar que l'oposat de $w_j(S) = \min\{0,\, q^* - \sum_{i \in S} d_{ij}\}$ correspon a un joc de fallida. Noti's que $w_j(S) \leq 0$ per a tota $S \subseteq N$. Així, prenent el seu oposat obtenim

$$-w_j(S) = -\min\{0,\, q^* - \sum_{i\,\in\,S} d_{ij}\} = \max\{0,\, \sum_{i\,\in\,S} d_{ij} - q^*\}$$

o anàlogament $-w_j(S) = \max\{0, \sum_{i \in N} d_{ij} - q^* - \sum_{i \in N\setminus S} d_{ij}\}$. Observi's que $-w_j \geq 0$. Així si notem per $E_j = (\sum_{i \in N} d_{ij} - q^*)_+$ i per $r_i^j = d_{ij}$ obtenim

$$-w_j(S) = \max\{0, E_j - \sum_{i\in N\setminus S} r_i^j\}.$$

Així aquest joc es pot interpretar com un joc de fallida ja que $E_j = (\sum_{i\in N} d_{ij} - q^*)_+ \geq 0$ perquè sinó el joc de quota és el joc nul, $r_i^j \geq 0$ i $\sum_{i\in N} r_i^j \geq E_j$ ja que $q^* \geq 0$ per hipòtesi del model.

□

Observi's que l'oposat del joc de quota del bé j multiplicat pel descompte total sobre el preu del bé, $\beta_j \cdot c_j$, continua sent un joc de fallida.

Proposició 4.7. *Sigui (N, w_j) el joc de quota del bé j i $(N, \lambda_j w_j)$ el joc de quota del bé j per un escalar λ_j on $\lambda_j = \beta_j \cdot c_j$. Aleshores, $-\lambda_j w_j$ és un joc de fallida on el patrimoni és $E_j = \lambda_j(\sum_{i\in N} d_{ij} - q^*)_+$ i els drets $r_i^j = \lambda_j d_{ij}$ per a tot $i \in N$.*

Demostració:
La demostració és immediata a partir del lema 4.6.

□

La proposició anterior ens mostra que l'oposat del joc de descompte per a cada bé j és un joc de fallida on la quantitat a repartir és el descompte total a què es pot optar i on les demandes dels jugadors es corresponen amb el descompte que aconsegueix cada jugador marginalment amb la seva demanda, de manera que la suma dels descomptes individuals és més gran que el descompte total.

L'objectiu final és distribuir entre els agents l'estalvi obtingut fruït de la cooperació, que tècnicament correspon al descompte total aplicat.

Ara bé, cal considerar que en última instància s'ha de repartir no tan sols el descompte total d'adquirir un bé sinó el descompte total d'adquirir tots els béns. Per tant, haurem de realitzar una anàlisi agregada del model, és a dir, considerar l'oposat del joc de descompte com la suma de jocs fallida.

El principal inconvenient que es presenta és que, tot i que l'oposat del joc considerat és l'agregat de jocs de fallida, en general la suma de jocs de fallida no dóna lloc necessàriament a un joc de fallida.

Exemple 4.8. El joc v_1 que té com a funció característica

$$v_1(i) = 0 \text{ per a tot } i \in N\,,\; v_1(12) = 0,\; v_1(13) = 5,\; v_1(23) = 15,\; v_1(123) = 25,$$

és un joc de fallida associat a un problema de fallida on $E = 25$ i $r_1 = 10$, $r_2 = 20$, $r_3 = 30$.

El joc v_2 que té com a funció característica

$$v_2(1) = v_2(2) = 0,\; v_2(3) = v_2(12) = 10,\; v_2(13) = 20,\; v_2(23) = 30,\; v_2(123) = 40,$$

és un joc de fallida associat a un problema de fallida on $E = 40$ i $r_1 = 10$, $r_2 = 20$, $r_3 = 30$.

Ara bé, si considerem el joc suma $v = v_1 + v_2$ amb funció característica

$$v(1) = v(2) = 0,\; v(3) = 10,\; v(12) = 10,\; v(13) = 25,\; v(23) = 45,\; v(123) = 65,$$

s'observa que v no és un joc de fallida, ja que per ser-ho hauria d'estar associat a un problema de fallida on el patrimoni fos el valor de la coalició total, $E = 65$, i els drets fossin les contribucions marginals dels jugadors (ja que són els únics valors que fan que les coalicions de dos jugadors valguin 10, 25 i 45 respectivament), $r_1 = 20$, $r_2 = 40$, $r_3 = 55$. Llavors, amb aquests drets $v(3) = \max\{0, 65 - 20 - 40\} = 5 \neq 10$.

$\diamond$

Òbviament, hi ha situacions molt especials on la suma de jocs de fallida torna a ser un joc de fallida. Així, arribem a la conclusió de què l'oposat del joc de descompte encara que no és un joc de fallida és la suma de jocs de fallida.

4.3 El Core

L'objectiu final és cercar un repartiment del cost total d'adquisició dels béns i, per tant, en últim terme hem de referir-nos al joc de demanda amb descompte. Així, en primer lloc el que farem és centrar-nos en l'estudi de quins són els mètodes de distribució que satisfan la remarcable propietat de què tota coalició està d'acord amb la solució proposada ja que se'ls hi assigna un cost que és inferior al cost conjunt d'aquesta coalició. Ens estem referint al concepte de solució conjuntista per excel·lència, el core.

Com hem comentat anteriorment el joc de demanda amb descompte és còncau, en conseqüència el seu core és no buit. Aquests fets ens porten al resultat de què el core del joc de demanda amb descompte coincideix amb la suma del core del joc additiu més el core del joc de descompte.

Teorema 4.9. *Sigui* (N, c_{Ω_β}) *un joc de demanda amb descompte. Aleshores,*

$$Core(c_{\Omega_\beta}) = Core(c_D) + Core(c_\beta)$$

on c_D *i* c_β *són respectivament el joc additiu i el joc de descompte associats a* c_{Ω_β}*.*

Demostració:
La demostració és immediata ja que c_D és un joc additiu i, per tant, el seu core té un únic punt (veure la pàgina 182 de l'apèndix A).

□

El teorema anterior ens permet calcular el core d'un joc de demanda amb descompte d'una manera molt fàcil. Així només cal cercar el core d'un joc additiu, compost per una única distribució que correspon als costos individuals de cada jugador, és a dir, a la seva demanda pel preu; i cercar el core de la suma de jocs de fallida, que és un joc còncau i que, per tant, té com a vèrtexs els vectors de contribucions marginals. Aquests vectors només depenen del descompte total, de la quota i dels descomptes individuals.

Lema 4.10. *Sigui* (N, c_{Ω_β}) *un joc de demanda amb descompte i* (N, c_D) *el joc additiu associat. Aleshores,*

$$Core(c_D) = \{(\sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j)_{i \in N}\}.$$

Demostració:
La demostració és immediata, ja que c_D és un joc additiu (veure apèndix A) i, per tant, el seu core conté una única distribució que són els costos sense descomptes de cada jugador.

□

Lema 4.11. *Sigui* (N, c_{Ω_β}) *un joc de demanda amb descompte i* (N, c_β) *el joc de descompte associat. Aleshores,* $Core(c_\beta) = convex_{\pi \in \Pi^N}\{-\sum_{j \in \mathcal{G}} m^\pi(-\lambda_j w_j)\}$
on

$$m_i^\pi(-\lambda_j w_j) = \begin{cases} r_i^j & si \quad E_j \geq \sum\limits_{k \in P_i^{\pi'}} r_k^j + r_i^j, \\ E_j - \sum\limits_{k \in P_i^{\pi'}} r_k^j & si \quad 0 \leq E_j - \sum\limits_{k \in P_i^{\pi'}} r_k^j \leq r_i^j, \\ 0 & si \quad E_j \leq \sum\limits_{k \in P_i^{\pi'}} r_k^j, \end{cases}$$

on $r_i^j = \lambda_j d_{ij}$, $E_j = \lambda_j(\sum\limits_{i \in N} d_{ij} - q^*)_+$ *i* $\lambda_j = \beta_j \cdot c_j$, *per a* $j \in \mathcal{G}$ *i tot* $i \in N$ *i on* $\pi' \in \Pi^N$ *és tal que* $\pi'(k) = n - \pi(k) + 1$.

Demostració:
És immediata per l'observació B.12 i l'additivitat dels vectors de contribucions marginals.

□

Els lemes anteriors ens permeten caracteritzar el core del joc de demanda amb descompte, c_{Ω_β}, sense necessitat de recórrer a la funció característica del joc. Així, només necessitem disposar de les dades del problema de demanda amb descompte, és a dir, de la matriu de demanda dels béns, dels preus, de la quota i dels descomptes. Per calcular els extrems del core del joc de demanda amb descompte només cal trobar els vectors de contribucions marginals dels jocs de descompte per a cada bé, els quals són fàcilment computables ja que els seus oposats són jocs de fallida, i afegir-els-hi el cost sense descompte generat per la demanda de cada jugador.

En un joc de fallida, i fixat un ordre inicial, el vector de contribucions marginals associat a aquest ordre assigna drets de la següent manera: considera l'ordre invers i el jugador que arriba primer segons l'ordre invers rep el seu dret, i així successivament aquesta assignació es repeteix fins que no és possible assignar tots els drets a un jugador. En aquest moment se li assigna la quantitat que resta i als altres jugadors no se'ls hi assigna res.

Teorema 4.12. *Sigui* (N, c_{Ω_β}) *un joc de demanda amb descompte. Aleshores,* $Core(c_{\Omega_\beta}) = convex\{(\sum\limits_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j)_{i \in N} + m^\pi(c_\beta)\}$.

Demostració:

Pel teorema 4.9 es compleix $Core(c_{\Omega_\beta}) = Core(c_D) + Core(c_\beta)$. Pel lema 4.10 i pel lema 4.11, $Core(c_{\Omega_\beta}) = \{(\sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j)_{i \in N}\} + convex\{m^\pi(c_\beta)\} = convex\{(\sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j)_{i \in N} + m^\pi(c_\beta)\}$.

□

Observi's que una distribució del core assigna a un jugador el cost sense descompte generat per la seva demanda menys una part del descompte aplicat a les unitats que superen la quota. Així, el problema es redueix a distribuir el descompte total $c_\beta(N)$.

4.4 Solucions puntuals

Un cop analitzat el core, el següent pas és realitzar una proposta de solucions. L'estudi de les solucions el realitzarem diferenciant dues possibilitats. La primera opció és proposant solucions per al joc de demanda amb descompte i la segona opció és proposant solucions per als jocs desagregats, és a dir, per al joc additiu i per als jocs de quota.

La primera opció recau indiscutiblement en les solucions usuals per a la teoria de jocs cooperatius com són: el nucleolus, el valor de tau i el valor de Shapley. Respecte al nucleolus i al valor de tau no disposem d'una fórmula que ens permeti el seu comput d'una manera senzilla. Ara bé, el valor de Shapley és un cas especial ja que presenta la propietat de l'additivitat, la qual com veurem a continuació ens permetrà obtenir una expressió per a aquest concepte de solució aplicat al nostre model.

4.4.1 El Valor de Shapley

Com s'especifica a l'apèndix A, el valor de Shapley es caracteritza per ser un concepte de solució puntual que satisfà els axiomes d'eficiència, simetria, jugador fals i additivitat. Aquest darrer axioma permet calcular el valor de Shapley com a combinació dels diferents valors de Shapley dels jocs desagregats. L'additivitat juntament amb l'estructura especial dels jocs de descompte com a suma de jocs de fallida, on el valor de Shapley coincideix amb la regla d'ordre aleatori (veure teorema B.11 de l'apèndix B), possibilita oferir una fórmula de càlcul del valor de Shapley on només necessitem conèixer les demandes dels jugadors, el preu dels diferents béns, la quota i els descomptes, és a dir, no cal recórrer a la funció característica per al seu comput.

Teorema 4.13. *Sigui* (N, c_{Ω_β}) *un joc de demanda amb descompte. Aleshores, el valor de Shapley del joc* c_{Ω_β} *ve donat per:*

$$\phi_i(c_{\Omega_\beta}) = \sum_{j\,\in\,\mathcal{G}} \left(d_{ij}\cdot c_j - \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi^N} \min\left\{ \lambda_j d_{ij}, \max\{\lambda_j E_j - \sum_{k\in P_i^\pi} \lambda_j d_{ij}, 0\} \right\}\right)$$

on $E_j = (\sum_{i\,\in\,N} d_{ij} - q^*)_+\,,\ \ \lambda_j = \beta_j\cdot c_j$ *per a* $j\in\mathcal{G}$ *i tot* $i\in N$*.*

Demostració:

Ja hem vist que el joc de demanda amb descompte c_{Ω_β} es descompon com $c_{\Omega_\beta} = c_D + c_\beta$. Així, per l'axioma d'additivitat del valor de Shapley es compleix que $\phi_i(c_{\Omega_\beta}) = \phi_i(c_D) + \phi_i(c_\beta)$.

El valor de Shapley del joc c_D és $\phi_i(c_D) = \sum_{j\,\in\,\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j$ ja que el joc és additiu.

Per l'additivitat del valor de Shapley, pel joc de descompte c_β, aquest és $\phi_i(c_\beta) = \sum_{j\,\in\,\mathcal{G}} \phi_i(\lambda_j w_j)$ on $(N, -\lambda_j w_j)$ és un joc de fallida. Pel teorema B.11 de l'apèndix B, per un joc de fallida de paràmetres $(E_j,\, r^j)$ el valor de Shapley ve donat per $RO_i(E_j,\, r^j)$. Llavors

$$\phi_i(-\lambda_j w_j) = -\phi_i(\lambda_j w_j) = RO_i(E_j, r^j)$$

on $E_j = \lambda_j(\sum_{i\in N} d_{ij} - q^*)_+$ i $r_i^j = \lambda_j d_{ij}$.

Per tant,

$$\phi_i(-\lambda_j w_j) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi^N} \min\left\{ \lambda_j d_{ij}, \max\{\lambda_j(\sum_{i\,\in\,N} d_{ij} - q^*)_+ - \sum_{k\in P_i^\pi} \lambda_j d_{ij}, 0\} \right\}.$$

Així,

$$\phi_i(c_\beta) = -\sum_{j\,\in\,\mathcal{G}} \left(\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi^N} \min\left\{ \lambda_j d_{ij}, \max\{\lambda_j(\sum_{i\,\in\,N} d_{ij} - q^*)_+ - \sum_{k\in P_i^\pi} \lambda_j d_{ij}, 0\} \right\}\right).$$

Finalment,

$$\phi_i(c_{\Omega_\beta}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j \, + \, \phi_i(c_\beta).$$

□

La interpretació del valor de Shapley en el context dels jocs de demanda amb descompte és la següent: inicialment cada jugador ha de pagar per la seva demanda; ara bé, com la demanda presenta un descompte, a la quantitat inicialment assignada se li descompta una part. Aquesta part que se li descompta a cada usuari es relaciona segons el valor de Shapley a un cert grau d'incertesa, així es considera que el descompte que tindrà un jugador depèn de l'ordre en què acudeixi a demanar-lo. Si és el primer se li descompta el percentatge corresponent a la seva demanda, al segon se li descompta, si encara hi ha descompte per repartir, el percentatge corresponent a la seva demanda, i en cas contrari la part que resti, així es continua fins que el descompte total s'esgota, a partir d'aquest moment els altres jugadors no tindran cap descompte. El valor de Shapley té en compte tots els possibles ordres d'arribada i, per tant, realitza la mitjana d'aquests pagaments.

Remarcar que el valor de Shapley presenta la propietat de la racionalitat coalicional, és a dir, pertany al core dels jocs de demanda amb descompte ja que el joc és còncau. Per tant, és un concepte de solució a considerar.

4.4.2 Regles de fallida

Procedim a centrar-nos en la segona possibilitat, és a dir, en la proposta de solucions per als jocs desagregats. L'estudi dels jocs desagregats per a cada bé j ens ha permès obtenir una relació molt interessant amb la classe dels jocs de fallida (veure apèndix B). A continuació aprofitarem aquesta relació per proporcionar altres solucions a part de les utilitzades usualment com a mètodes de repartiment dins la teoria de jocs cooperatius.

La idea és usar la descomposició del joc en un joc additiu més jocs de fallida. D'aquesta manera ens centrarem en generar solucions per als jocs de fallida, les quals poden ser traslladades d'una manera molt elegant com a solució del joc de demanda amb descompte. Així, les solucions que presentarem seran les següents: en primer lloc proposarem les típiques solucions per a cada joc de fallida $-\lambda_j w_j$ conegudes com a regles de fallida , en segon lloc trobarem la solució associada al joc de descompte restant les solucions dels diferents béns j i finalment proposarem les solucions per al joc de demanda amb descompte sumant-li les demandes del béns per part del jugador.

El principal problema amb què ens trobem és que els conceptes de solució no són additius i, per tant, en general les solucions dels jocs desagregats no coincideixen amb les solucions del joc de demanda amb descompte. Ara bé aquest inconvenient és menor degut al fet que la suma de solucions que pertanyen al core dels diferents jocs desagregats també pertanyen al core del joc de demanda amb descompte.

Proposició 4.14. *Sigui (N, c_{Ω_β}) un joc de demanda amb descompte i $(N, -\lambda_j w_j)$ el joc de fallida associat. Sigui $\varphi(-\lambda_j w_j)$ una regla de fallida del joc $-\lambda_j w_j$ tal que $\varphi_i(-\lambda_j w_j) \leq d_{ij} \cdot \lambda_j$ per a tot $i \in N$, i sigui $\varphi_i(c_\beta) := -\sum_{j \in \mathcal{G}} \varphi_i(-\lambda_j w_j)$ per a tot $i \in N$ la corresponent regla de fallida del joc de descompte. Llavors, $\varphi(c_{\Omega_\beta}) \in Core(c_{\Omega_\beta})$ on $\varphi_i(c_{\Omega_\beta}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j + \varphi_i(c_\beta)$ per a tot $i \in N$.*

Demostració:

Com $\varphi(-\lambda_j w_j)$ satisfà que $\varphi_i(-\lambda_j w_j) \leq d_{ij} \cdot \beta_j \cdot c_j$ per a tot $i \in N$, aleshores pel teorema B.10, es compleix que $\varphi(-\lambda_j w_j) \in Core(-\lambda_j w_j)$ o equivalentment $\varphi(\lambda_j w_j) \in Core(\lambda_j w_j)$. Com $\lambda_j w_j$ són jocs còncaus, $\sum_{j \in \mathcal{G}} Core(\lambda_j w_j) = Core(\sum_{j \in \mathcal{G}} \lambda_j w_j) = Core(c_\beta)$.

Per tant, $\varphi(c_\beta) = \sum_{j \in \mathcal{G}} \varphi(\lambda_j w_j) \in Core(c_\beta)$.

Per últim, com $c_{\Omega_\beta} = c_D + c_\beta$ on c_D és un joc additiu amb un únic punt al core, $\{(\sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j)_{i \in N}\}$, i com pel teorema 4.9 es satisfà que $Core(c_{\Omega_\beta}) = Core(c_D) + Core(c_\beta)$, aleshores $\varphi(c_{\Omega_\beta}) \in Core(c_{\Omega_\beta})$ on

$$\varphi_i(c_{\Omega_\beta}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j + \varphi_i(c_\beta) \text{ per a tot } i \in N.$$

□

La relació del joc de demanda amb descompte c_{Ω_β} amb els jocs de fallida ens permet trobar solucions que satisfan una propietat tan raonable per a una solució com és pertànyer al core del joc i que, en general, no coincideixen amb les solucions tradicionals proposades per als jocs cooperatius, excepte per al valor de Shapley ja que aquest compleix l'axioma d'additivitat.

Així, procedirem a posar de manifest aquells conceptes de solució usualment utilitzats en els jocs de fallida (veure apèndix B) com són:

- Regla proporcional, $P(E, r)$.
- Regla proporcional als drets truncats, $P^t(E, r)$.
- Regla igualitària, $EA(E, r)$.
- Regla igualitària restringida, $CEA(E, r)$.
- Regla igualitària restringida de pèrdues, $CEL(E, r)$.
- Regla del Talmud, $T(E, r)$.
- Regla proporcional ajustada, $AP(E, r)$.
- Regla d'ordre aleatori, $RO(E, r)$.

Una vegada triat un concepte de solució per al joc de fallida, els sumarem i finalment els hi afegirem el cost sense descompte generat per la demanda de cada jugador. La principal característica és que aquests conceptes de solució pertanyen al core, la qual cosa justifica la pertinència d'aquests conceptes.

4.4.3 Una aplicació de les regles de fallida

En el següent exemple analitzarem i calcularem els conceptes de solució tradicionals de la teoria de jocs cooperatius i les regles de fallida presentades en la secció 3 de l'apèndix B, així com també justificarem el seu còmput.

Exemple 4.15. Sigui un problema cooperatiu de demanda $\Omega_\beta = (N, \mathcal{G}, D, \mathbf{f}^\beta)$ on:

- $N = \{1, 2, 3\}$ són les universitats que formen el consorci,
- $\mathcal{G} = \{\mathit{1}, \mathit{2}, \mathit{3}, \mathit{4}\}$ són el conjunt de revistes que ofereix l'editorial,
- La matriu de demanda és

$$\mathrm{D} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

- $c = (10, 20, 5, 8)$ és el vector de preus de les revistes,
- $q^* = 2$ és la quota que indica el volum a partir del qual hi ha el descompte,
- i on els descompte unitaris que s'apliquen a les unitats que superin la quota són $\beta = (0'1, 0'2, 0'2, 0'5)$.

Aquesta situació es pot modelitzar per mitjà d'un joc de costos de demanda amb descompte c_{Ω_β}, de manera que per a cada coalició S sabrem quin seria el cost en què hauria d'incórrer. Així, per exemple si les universitats $\{1, 2\}$ decidissin formar una coalició només elles dues, el cost que haurien de suportar seria la suma del cost de les seves respectives demandes, $3 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 8 = 132$, menys el descompte per les unitats que superen la quota, $1 \cdot 10 \cdot 0'1 + 1 \cdot 20 \cdot 0'2 + 2 \cdot 8 \cdot 0'5 = 13$, Així, el cost que haurien de suportar en total les universitats $\{1, 2\}$ seria $132 - 13 = 119$.

La funció característica associada al problema de demanda la descompondrem en el joc additiu, c_D, més el joc de descompte, c_β.

- Joc additiu, $c_D(S) = \displaystyle\sum_{j=1}^{4} \sum_{i \in S} d_{ij} \cdot c_j$:

S	$\sum_{i \in S} d_{i1} c_1$	$\sum_{i \in S} d_{i2} c_2$	$\sum_{i \in S} d_{i3} c_3$	$\sum_{i \in S} d_{i4} c_4$	$c_D(S)$
$\{1\}$	30	20	5	32	87
$\{2\}$	0	40	5	0	45
$\{3\}$	0	60	5	8	73
$\{1, 2\}$	30	60	10	32	132
$\{1, 3\}$	30	80	10	40	160
$\{2, 3\}$	0	100	10	8	118
$\{1, 2, 3\}$	30	120	15	40	205

- Joc de descompte, $c_\beta(S) = \displaystyle\sum_{j=1}^{4} \lambda_j \cdot w_j(S)$ on $\lambda_j = \beta_j \cdot c_j$:

S	$\lambda_1 w_1(S)$	$\lambda_2 w_2(S)$	$\lambda_3 w_3(S)$	$\lambda_4 w_4(S)$	$c_\beta(S)$
$\{1\}$	-1	0	0	-8	-9
$\{2\}$	0	0	0	0	0
$\{3\}$	0	-4	0	0	-4
$\{1,2\}$	-1	-4	0	-8	-13
$\{1,3\}$	-1	-8	0	-12	-21
$\{2,3\}$	0	-12	0	0	-12
$\{1,2,3\}$	-1	-16	-1	-12	-30

Així, la funció característica del joc de demanda amb descompte ve donada per $c_{\Omega_\beta} = c_D + c_\beta$:

$$c_{\Omega_\beta}(1) = 78, \qquad c_{\Omega_\beta}(2) = 45, \qquad c_{\Omega_\beta}(3) = 69,$$

$$c_{\Omega_\beta}(12) = 119, \quad c_{\Omega_\beta}(13) = 139, \quad c_{\Omega_\beta}(23) = 106,$$

$$c_{\Omega_\beta}(123) = 175.$$

Cal remarcar que la cooperació provoca una reducció del cost, de manera que és més satisfactori per a les universitats actuar conjuntament a fer-ho per separat. Aquesta reducció de costos és deguda al fet que quantes més revistes es demandin el descompte s'aplicarà a més revistes.

A continuació calcularem els conceptes de solució més usuals de la teoria de jocs cooperatius per al joc de demanda amb descompte. Així, calcularem el valor de Shapley, $\phi(c_{\Omega_\beta})$, el nucleolus, $\eta(c_{\Omega_\beta})$, i el valor de tau, $\tau(c_{\Omega_\beta})$:

- El valor de Shapley és $\phi(c_{\Omega_\beta}) = (73, 40, 62)$.
- El nucleolus és $\eta(c_{\Omega_\beta}) = (73'5, 40'5, 61)$.
- El valor de tau és $\tau(c_{\Omega_\beta}) = (73'06, 40'06, 61'88)$.

Per últim, degut a la relació existent entre els jocs de demanda amb descompte i els jocs de fallida, proposarem solucions per a aquests darrers tipus de jocs i les traslladarem als jocs de demanda amb descompte. El procediment serà el següent:

i) Trobar el problema de fallida associat a cada joc de quota amb signe negatiu, $-\lambda_j \cdot w_j$.

Els problemes de fallida corresponents, tindran com a patrimoni $E_j = \beta_j \cdot c_j(\sum_{i \in N} d_{ij} - q^*)_+$ i com a drets $r_i^j = \beta_j \cdot c_j \cdot d_{ij}$. Així,

Joc	$Patrimoni(E_j)$	$Drets(r^j)$
$-\lambda_1 \cdot w_1$	1	$(3,0,0)$
$-\lambda_2 \cdot w_2$	16	$(4,8,12)$
$-\lambda_3 \cdot w_3$	1	$(1,1,1)$
$-\lambda_4 \cdot w_4$	12	$(16,0,4)$

ii) Calcular les regles de fallida comentades en l'apèndix B per als problemes de fallida de cada bé, $\varphi(-\lambda_j \cdot w_j)$.

En aquest cas, les regles de fallida associades als problemes de fallida de cada bé són:

$Regla$	$(1,(3,0,0))$	$(16,(4,8,12))$	$(1,(1,1,1))$	$(12,(16,0,4))$
$P(E_j, r^j)$	$(1,0,0)$	$(2'66, 5'33, 8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(9'6, 0, 2'4)$
$P^t(E_j, r^j)$	$(1,0,0)$	$(2'66, 5'33, 8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(9,0,3)$
$EA(E_j, r^j)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(5'33, 5'33, 5'33)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(4,4,4)$
$CEA(E_j, r^j)$	$(1,0,0)$	$(4,6,6)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(8,0,4)$
$CEL(E_j, r^j)$	$(1,0,0)$	$(1'33, 5'33, 9'33)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(12,0,0)$
$T(E_j, r^j)$	$(1,0,0)$	$(2,5,9)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(10,0,2)$
$AP(E_j, r^j)$	$(1,0,0)$	$(2'4, 4'8, 8'8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(10'66, 0, 1'33)$
$RO(E_j, r^j)$	$(1,0,0)$	$(2'66, 4'66, 8'66)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(10,0,2)$

iii) Sumar les regles de fallida per a cada bé per obtenir la regla de fallida corresponent al joc de descompte, $\varphi(c_\beta)$.

iv) Sumar la solució del joc additiu (x) més la regla de fallida corresponent al joc de descompte per obtenir la regla corresponent del joc de demanda amb descompte, $\varphi_i(c_{\Omega_\beta}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j + \varphi_i(c_\beta)$.

Regla	$\sum_{j=1}^{4} d_{ij} \cdot c_j$	$\varphi(c_\beta)$	$\varphi(c_{\Omega_\beta})$
$P(c_{\Omega_\beta})$	$(87,45,73)$	$-(13'6,5'66,10'73)$	$(73'4,39'33,62'27)$
$P^t(c_{\Omega_\beta})$	$(87,45,73)$	$-(13,5'66,11'33)$	$(74,39'33,61'66)$
$EA(c_{\Omega_\beta})$	$(87,45,73)$	$-(10,10,10)$	$(77,35,63)$
$CEA(c_{\Omega_\beta})$	$(87,45,73)$	$-(13'33,6'33,10'33)$	$(73'66,38'66,62'66)$
$CEL(c_{\Omega_\beta})$	$(87,45,73)$	$-(14'66,5'66,9'66)$	$(72'33,39'33,63'33)$
$T(c_{\Omega_\beta})$	$(87,45,73)$	$-(12'33,5'33,11'33)$	$(74'66,39'66,61'66)$
$AP(c_{\Omega_\beta})$	$(87,45,73)$	$-(14'4,5'13,10'46)$	$(72'6,39'86,62'54)$
$RO(c_{\Omega_\beta})$	$(87,45,73)$	$-(14,5,11)$	$(73,40,62)$

Observi's que totes les solucions i regles presentades, excepte la distribució igualitària, tenen la característica de pertànyer al core del joc de demanda amb descompte.

Les solucions usuals de la teoria de jocs satisfan aquesta propietat ja que el joc considerat és còncau. En canvi les regles de fallida ho satisfan ja que en els respectius jocs de quota als jugadors se'ls hi assigna una quantitat inferior al seu dret.

Dels diferents conceptes de solució presentats és necessari destacar el valor de Shapley. Degut a l'axioma d'additivitat el valor de Shapley del joc de demanda amb descompte coincideix amb el cost de la demanda individual de cada jugador menys la suma de les regles d'ordre aleatori dels problemes de fallida dels diferents béns.

També cal destacar el nucleolus, ja que s'observa que tot i que el còmput del nucleolus del joc de demanda amb descompte no és senzill, podem trobar el nucleolus dels jocs de quota fàcilment, sumar-los i finalment obtenir la regla corresponent del joc de demanda amb descompte a partir de la diferència entre el cost de la demanda individual de cada jugador i aquesta suma de nucleolus. Remarcar que la solució obtinguda pertany al core del joc de demanda amb descompte, tot i que en general no coincideix amb el nucleolus d'aquest joc.

$\diamond$

En el cas de tenir un problema amb la demanda binària, estudiat en la secció 3.5, totes les regles de fallida assignen la mateixa distribució, és a dir, reparteixen el patrimoni de forma igualitària entre els jugadors amb drets no nuls.

4.5 Aplicació: assignació de costos en el CBUC en la compra de revistes a l'editorial Academic Press

En aquesta secció analitzem l'acord d'adquisició de revistes electròniques que va realitzar el Consorci de Biblioteques Universitàries de Catalunya (CBUC) amb l'editorial Academic Press IDEAL, una de les editorials més significatives en quant a volum de revistes que ofereix. Recordem que el CBUC està format per l'agrupació de vuit universitats públiques catalanes : Universitat de Barcelona (**UB**), Universitat Autònoma de Barcelona (**UAB**), Universitat Politècnica de Catalunya (**UPC**), Universitat Pompeu Fabra (**UPF**), Universitat Rovira i Virgili (**URV**), Universitat de Lleida (**UdL**), Universitat de Girona (**UdG**), Universitat Oberta de Catalunya (**UOC**) i la Biblioteca de Catalunya (**BC**). Les dades concretes del mencionat acord es troben recollides en el capítol 2.

Un dels objectius del CBUC és evitar la duplicació de revistes a les que estan subscrites els seus membres i crear un fons comú de revistes electròniques, i com a conseqüència el CBUC signa acords amb diferents editorials les quals li ofereixen unes tarifes beneficioses ja que presenten economies d'escala.

La principal motivació d'aquesta secció és estudiar com s'haurien de distribuir les tarifes de subscripció de les revistes oferides per l'editorial Academic Press IDEAL (acordades amb el CBUC) entre les diferents universitats. Aquest treball el farem des d'un punt de vista de la teoria de jocs cooperatius. En primer lloc comprovarem que aquesta situació coincideix amb un cas particular del model dels joc de demanda amb descompte. Així comentarem i calcularem el valor de Shapley estudiat en la secció 4.4.1, el valor de tau i el nucleolus. També presentarem el mètode de repartiment aplicat pel Consorci, compararem les diferents solucions i finalment proposarem aquella solució que per les propietats que satisfà sigui més apropiada per al nostre model.

Bàsicament l'acord es centra en la compra de les revistes ja eren comprades en format imprès amb anterioritat per algun membre del Consorci. Això inclou 123 de les 176 revistes de l'editorial. A més, es decideix incloure totes les altres revistes de forma gratuïta, de manera que totes les revistes són accessibles per tots els membres.

A la taula C.1 de l'apèndix C es troben recollides les dades relatives a la subscripció per part de les diferents universitats de la totalitat de les revistes oferides per l'editorial Academic Press IDEAL al Consorci.

El problema de distribució dels costos resultant de l'adquisició del paquet de revistes de l'editorial Academic Press IDEAL requereix l'anàlisi de determinats requisits. Així començarem establint la principal hipòtesi del problema, cada universitat té la seva pròpia demanda de revistes. D'ara endavant, en aquesta aplicació considerarem que el conjunt de jugadors és:

$$N = \{\mathbf{UB}, \mathbf{UAB}, \mathbf{UPC}, \mathbf{UPF}, \mathbf{URV}, \mathbf{UdL}, \mathbf{UdG}, \mathbf{UOC}, \mathbf{BC}\},$$

que $\mathcal{G}$ és el conjunt de revistes oferides per l'editorial Academic Press IDEAL, i que la demanda de cada universitat inclou exactament les revistes a les que estava subscrita en format imprès (veure taula C.1).

La quantia final s'estableix a partir de la demanda històrica. De cada revista s'han de pagar tantes unitats com universitats adquirien la revista (amb independència del nombre d'unitats que comprava una mateixa universitat). Com incentiu, es fa un 10% de descompte del cost de les revistes que tenen més d'un comprador. Formalment, per a cada $j \in \mathcal{G}$

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ c_j & \text{si} \quad x = 1, \\ x \cdot c_j - 0'1 \cdot (x-1) \cdot c_j & \text{si} \quad x \geq 2, \end{cases}$$

on c_j és el preu anual de subscripció per a cada revista.

Així, el joc cooperatiu de costos es correspon amb el joc de demanda amb descompte estudiat a la secció 4.1, on $\beta_j = 0'1$ i $q^* = 1$. A més, la determinació de les dades es fa de forma binària (secció 3.5). A partir de les dades recollides en la taula C.1 de l'apèndix C, obtenim el cost total, en dòlars americans, a repartir en aquest supòsit:

$$c_{\Omega_\beta}(N) = \sum_{j \in \mathcal{G}} \left(\sum_{i \in N} d_{ij} \cdot c_j + \min\{0, 1 - \sum_{i \in N} d_{ij}\} \cdot 0'1 \cdot c_j \right) = 252.900'51\,.$$

És a dir, el cost total de subscripció és el cost de la demanda binària històrica de les universitats menys un descompte del 10% sobre les revistes que demandaven més d'una universitat.

Si es compara el valor obtingut amb la suma dels costos individuals de cada universitat actuant separadament (taula 4.1) s'obté un estalvi total de 12.629'19 dòlars, el qual suposa gairebé un 5% del descompte sobre el cost total. Així, sembla que la cooperació entre les diferents universitats està garantida.

$c_{\Omega_\beta}(\mathbf{UB})$	$117.393'55$	$c_{\Omega_\beta}(\mathbf{UPF})$	$6.237'05$	$c_{\Omega_\beta}(\mathbf{URV})$	$7.842'00$
$c_{\Omega_\beta}(\mathbf{UAB})$	$85.107'50$	$c_{\Omega_\beta}(\mathbf{UdG})$	$6.955'80$	$c_{\Omega_\beta}(\mathbf{UOC})$	0
$c_{\Omega_\beta}(\mathbf{UPC})$	$27.176'25$	$c_{\Omega_\beta}(\mathbf{UdL})$	$14.817'55$	$c_{\Omega_\beta}(\mathbf{BC})$	0

Taula 4.1: Costos individuals de c_{Ω_β}

El cost de subscripció de tot el paquet de revistes per a una coalició S ve donat per:

$$c_{\Omega_\beta}(S) = \sum_{j\in\mathcal{G}} \left(\sum_{i\in S} d_{ij}\cdot c_j + \min\{0,\, 1 - \sum_{i\in S} d_{ij}\}\cdot 0'1 \cdot c_j \right).$$

El joc de demanda amb descompte té una estructura molt especial. S'observa clarament que el joc en qüestió és la suma de diferents jocs, un per a cada revista; de manera que el cost total de subscripció ve determinat per la suma dels costos d'adquisició de cada revista.

Com s'ha vist a la secció 4.1, la principal característica dels jocs de descompte és la concavitat, i l'efecte de la concavitat és el fet de treballar amb un joc amb core no buit. Així, es poden obtenir distribucions del cost total on totes les coalicions d'universitats estan satisfetes en l'aspecte que se'ls assigna un cost inferior al que suporten elles soles, $c_{\Omega_\beta}(S)$. La interpretació de la concavitat és el conegut com a efecte bola de neu. És a dir, es fomenta la cooperació entre totes les universitats, ja que el cost aportat per una universitat en incorporar-se a una coalició ja formada decreix quan més gran és la coalició. La concavitat també implica la subadditivitat de manera que la cooperació entre totes les universitats està garantida, degut al fet que per a qualssevol dues coalicions la suma dels seus costos és superior al cost de la coalició total.

L'estructura dels jocs de demanda amb descompte, que permet analitzar el joc com a suma de diferents jocs, una per a cada revista, fa raonable cercar mètodes de distribució additius que distribueixin separadament el cost de subscripció de cada revista demandada entre els membres del Consorci. Per aquest motiu centrarem l'anàlisi de l'aplicació en l'estudi d'un concepte de solució que es comporta additivament: el valor de Shapley. Ara bé, tot i no comportar-se additivament també pararem especial esment en el valor de tau, ja que per a jocs còncaus és senzill de computar. Finalment, parem atenció en el nucleolus ja que és un concepte de solució que sempre que el core és no buit hi pertany, encara que la seva computació és força complexa.

A part dels conceptes de solució clàssics, en l'anàlisi dels jocs amb descompte s'estudien múltiples regles de repartiment originades en la vinculació existent amb els jocs de fallida. Però com ja hem comentat en la pàgina 98, aquestes regles no aporten solucions diferents al valor de Shapley en el cas d'analitzar problemes amb demanda binària. Per tant, no les tindrem en compte en aquesta aplicació.

Dels conceptes de solucions conjuntistes considerarem el core. El core d'un joc de demanda amb descompte es pot descompondre en la suma del core d'un joc additiu més el core del joc de descompte.

El joc additiu, c_D, ve donat pels costos generats en la compra sense descompte. És conegut que el core d'un joc additiu té una única distribució, formada pels costos individuals. En aquest cas, aquest punt es correspon exactament amb els costos que tenien les universitats abans de l'acord, és a dir, $\sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j$. Per tant,

$$Core(c_D) \;=\; \{(\sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j)_{i\in N}\} = \{(c_{\Omega_\beta}(i))_{i\in N}\}.$$

Observi's que en aquest cas $c_{\Omega_\beta}(i) = c_D(i)$ ja que els descomptes s'apliquen a partir de la segona unitat demandada.

Ara només cal veure què assigna el core a la part del joc de descompte, c_β. Com ja hem vist en la pàgina 85, aquest joc pren valors negatius o zero ja que repartim un descompte. Els vèrtexs del core coincideixen amb els vectors de contribucions marginals i són senzills de calcular pel fet de ser un joc còncau.

En les distribucions del core, una universitat que demanda una revista en concret, pot obtenir un descompte que va des del 10% del preu de la revista a no obtenir cap descompte. En les revistes que demanda en exclusiva segur que no obté cap descompte perquè aquests no s'apliquen. Així, en el core del joc de demanda amb descompte una universitat paga com a molt les revistes demandades, o sigui el cost individual. I com a mínim, paga les revistes demandades exclusivament al seu preu original i la resta de revistes amb un preu rebaixat del 10%, és a dir, el cost separable de la universitat. Per tant, el pagament d'un jugador i dins del core està limitat per una fita superior i una fita inferior:

$$SC_i(c_{\Omega_\beta}) \;\leq\; x_i \;\leq\; c_{\Omega_\beta}(i) \quad \text{per a tot}\, i\in N.$$

Així, per a les diferents universitats, una distribució del core ha de complir les següents desigualtats:

$$\begin{array}{rcccl}
109.243'50 & \leq & x_{UB} & \leq & 117.393'55\,, \\
77.146'45 & \leq & x_{UAB} & \leq & 85.107'50\,, \\
24.945'98 & \leq & x_{UPC} & \leq & 27.176'25\,, \\
5.693'70 & \leq & x_{UPF} & \leq & 6.237'05\,, \\
6.394'82 & \leq & x_{UdG} & \leq & 6.955'80\,, \\
13.382'82 & \leq & x_{UdL} & \leq & 14.817'55\,, \\
7.057'80 & \leq & x_{URV} & \leq & 7.842'00\,, \\
0 & \leq & x_{UOC} & \leq & 0\,, \\
0 & \leq & x_{BC} & \leq & 0\,.
\end{array}$$

Aquests valors ens donen una idea de sobre què cal assignar a cada universitat, però no ens proposen una única distribució del cost total. En l'entorn pràctic que estem analitzant, és de gran interès trobar una solució que sigui fàcilment calculable. Degut a la gran quantitat de dades que cal gestionar, amb 123 revistes diferents i 9 universitats, és bàsic definir una solució que ens resolgui el problema de forma fiable i senzilla. D'aquesta manera, analitzem les solucions clàssiques de la teoria de jocs cooperatius per prendre una decisió: el nucleolus, el valor de Shapley i el valor de tau.

- **Valor de Shapley:** la fórmula del valor de Shapley per als jocs de demanda binària amb descompte l'hem obtingut al corol·lari 3.12. La seva expressió per al model d'Academic Press IDEAL on $\beta_j = 0'1$ és la següent:

  $$\phi_i(c_{\Omega_\beta}) = \sum_{j \in DP_i} \frac{f_j(n_j)}{n_j} \quad \text{per a tot}\, i \in N,$$

  on n_j és el nombre de demandants de la revista j i DP_i és el perfil de demanda de cada jugador i.

  El problema que s'estudia, a part de tractar-se d'un problema amb descompte, es determina a partir d'una matriu de demanda binària i amb una funció de costos que no carrega cost a la demanda de zero unitats ja que en l'acord es decideix regalar aquestes revistes. D'aquesta forma el valor de Shapley assigna a cada universitat una distribució on paga per totes les revistes que demanda a parts iguals amb els altres demandants, i no paga res de la resta de revistes.

Observi's que el valor de Shapley es computa per a cadascuna de les 123 revistes que formen part del paquet facilitat per Academic Press i després es sumen les diferents distribucions obtingudes, és a dir, s'aplica el principi de descomposició estudiat en la secció 3.5 com a forma de còmput del valor de Shapley.

La següent taula recull la part del cost total que ha d'assumir cada universitat en l'aplicació analitzada segons el valor de Shapley:

$\phi_{UB}(c_{\Omega_\beta})$	$112.790'4$	$\phi_{UPF}(c_{\Omega_\beta})$	$5.869'52$	$\phi_{URV}(c_{\Omega_\beta})$	$7.342'41$
$\phi_{UAB}(c_{\Omega_\beta})$	$80.628'27$	$\phi_{UdG}(c_{\Omega_\beta})$	$6.593'73$	$\phi_{UOC}(c_{\Omega_\beta})$	0
$\phi_{UPC}(c_{\Omega_\beta})$	$25.775'26$	$\phi_{UdL}(c_{\Omega_\beta})$	$13.900'92$	$\phi_{BC}(c_{\Omega_\beta})$	0

Taula 4.2: Valor de Shapley de c_{Ω_β}

El valor de Shapley és un concepte de solució que pertany al core dels joc de demanda amb descompte ja que aquests són jocs còncaus (veure pàgina 183).

- **Valor de tau:** per als jocs de demanda amb descompte, el valor de tau és molt senzill de calcular ja que es tracten de jocs còncaus. Tal i com s'explica en la pàgina 180, el valor de tau s'obté del compromís eficient entre una cota superior, que en el cas dels jocs còncaus ve donada pels costos individuals, $c(i)$, i per una cota inferior donada pels costos separables dels jugadors, $SC_i(c)$.

  Aquest fet permet calcular el valor de tau del problema originat sense necessitat de trobar la funció característica. Únicament cal saber quin és el cost individual i el cost separable de cada universitat.

  Tots dos valors els coneixem de l'estudi del core. Per tant, hem de cercar el compromís entre $(c_{\Omega_\beta}(i))_{i\in N}$ i $(SC_i(c_{\Omega_\beta}))_{i\in N}$.

  La següent taula recull la part del cost total que ha d'assumir cada universitat en l'aplicació analitzada segons el valor de tau:

  Anàlogament al que passava amb el valor de Shapley, el valor de tau també pertany al core.

- **Nucleolus:** per últim donarem el resultat de la distribució del cost total segons el nucleolus. Recordem que el nucleolus és la imputació que minimitza les màximes queixes (veure definició A.16).

$\tau_{UB}(c_{\Omega_\beta})$	112.642	$\tau_{UPF}(c_{\Omega_\beta})$	5.920	$\tau_{URV}(c_{\Omega_\beta})$	7.384
$\tau_{UAB}(c_{\Omega_\beta})$	80.466	$\tau_{UdG}(c_{\Omega_\beta})$	6.628	$\tau_{UOC}(c_{\Omega_\beta})$	0
$\tau_{UPC}(c_{\Omega_\beta})$	25.876	$\tau_{UdL}(c_{\Omega_\beta})$	13.881	$\tau_{BC}(c_{\Omega_\beta})$	0

Taula 4.3: Valor de tau de c_{Ω_β}

Si es prioritza la resolució del problema sense necessitat de construir el joc cooperatiu, la primera consideració és descartar el nucleolus, tot i les seves excel·lents propietats, degut a la dificultat de càlcul que suposa no només en general, sinó també en els jocs de demanda amb descompte. Tot i això, en l'anàlisi de la distribució del cost d'adquisició de les revistes d'Academic Press IDEAL entre els nou membres del Consorci, hem procedit a avaluar totes les coalicions possibles i a calcular el nucleolus mitjançant eines informàtiques, ja que és un concepte de solució interessant per la seva pertinença al core.

La funció característica del nostre joc de demanda amb descompte es troba a la taula C.2 de l'apèndix C.

La següent taula recull la part del cost total que ha d'assumir cada universitat en l'aplicació analitzada segons el nucleolus:

$\eta_{UB}(c_{\Omega_\beta})$	112.386′22	$\eta_{UPF}(c_{\Omega_\beta})$	5.965′38	$\eta_{URV}(c_{\Omega_\beta})$	7.449′90
$\eta_{UAB}(c_{\Omega_\beta})$	80.289′17	$\eta_{UdG}(c_{\Omega_\beta})$	6.675′31	$\eta_{UOC}(c_{\Omega_\beta})$	0
$\eta_{UPC}(c_{\Omega_\beta})$	26.034′35	$\eta_{UdL}(c_{\Omega_\beta})$	14.100′18	$\eta_{BC}(c_{\Omega_\beta})$	0

Taula 4.4: Nucleolus de c_{Ω_β}

Un cop analitzats els criteris de distribució tradicionals de la teoria de jocs cooperatius, ens centrarem en el criteri de distribució establert pel Consorci.

El CBUC determina els costos assignats a cada universitat exclusivament en funció de la demanda històrica. És a dir, es reparteixen els costos proporcionalment a la despesa que es venia efectuant, la qual coincideix amb la distribució proporcional respecte als costos individuals:

$$x_i = c_{\Omega_\beta}(i) \cdot \frac{c_{\Omega_\beta}(N)}{\sum_{k \in N} c_{\Omega_\beta}(k)} \quad \text{per a tot } i \in N.$$

La següent taula mostra el repartiment assignat a cada universitat pel CBUC:

$x_{UB}(c_{\Omega_\beta})$	111.810	$x_{UPF}(c_{\Omega_\beta})$	5.940	$x_{URV}(c_{\Omega_\beta})$	7.469
$x_{UAB}(c_{\Omega_\beta})$	81.059	$x_{UdG}(c_{\Omega_\beta})$	6.624	$x_{UOC}(c_{\Omega_\beta})$	0
$x_{UPC}(c_{\Omega_\beta})$	25.883	$x_{UdL}(c_{\Omega_\beta})$	14.112	$x_{BC}(c_{\Omega_\beta})$	0

Taula 4.5: Distribució del CBUC

L'objectiu final és realitzar una anàlisi comparativa entre les diferents solucions. Per a una millor comparació en la taula 4.6 recollim la totalitat de les distribucions computades:

Univ.	$\phi(c_{\Omega_\beta})$	$\tau(c_{\Omega_\beta})$	$\eta(c_{\Omega_\beta})$	x
UB	112.790'4	112.642	112.386'22	111.810
UAB	80.628'27	80.466	80.289'17	81.059
UPC	25.775'26	25.876	26.034'35	25.883
UPF	5.869'52	5.920	5.965'38	5.940
UdG	6.593'73	6.628	6.675'31	6.624
UdL	13.900'92	13.881	14.100'18	14.112
URV	7.342'41	7.384	7.449'90	7.469
UOC	0	0	0	0
BC	0	0	0	0
Total	252.900'51	252.900'51	252.900'51	252.900'51

Taula 4.6: Taula comparativa de les distribucions analitzades

En la taula 4.7 recollim els percentatges de la part de cost total de subscripció assignades a les diferents universitats per cadascuna de les distribucions de la taula 4.6.

Univ.	$\%\phi(c_{\Omega_\beta})$	$\%\tau(c_{\Omega_\beta})$	$\%\eta(c_{\Omega_\beta})$	$\%x$
UB	44'60	44'54	44'44	44'21
UAB	31'88	31'82	31'75	32'05
UPC	10'19	10'23	10'29	10'23
UPF	2'32	2'34	2'36	2'35
UdG	2'61	2'62	2'64	2'62
UdL	5'50	5'53	5'58	5'58
URV	2'90	2'92	2'95	2'95
UOC	0	0	0	0
BC	0	0	0	0
Total	100	100	100	100

Taula 4.7: Percentatges sobre el cost total

Cal destacar que tots els mètodes analitzats beneficien a les universitats petites, ja que es basen en la demanda històrica. Les universitats que es veuen clarament beneficiades són la UOC i la BC ja que no demandaven res i en conseqüència no suporten cap cost, i és més ara tenen accés a totes les revistes del paquet ofert per l'editorial API.

Una altra dada que pot ser d'interès és l'estalvi que té cadascuna de les universitats en les diferents situacions, ho recollim a la taula 4.8.

Univ.	$c_{\Omega_\beta}(i) - \phi(c_{\Omega_\beta})$	$c_{\Omega_\beta}(i) - \tau(c_{\Omega_\beta})$	$c_{\Omega_\beta}(i) - \eta(c_{\Omega_\beta})$	$c_{\Omega_\beta}(i) - x$
UB	4.603'15	4.750'99	5.007'33	5.583'50
UAB	4.479'23	4.640'82	4818'33	4.047'90
UPC	1.400'99	1.300'12	1.141'90	1.292'56
UPF	367'53	316'74	271'67	296'65
UdG	362'07	327'02	280'49	330'83
UdL	916'63	836'36	717'37	704'76
URV	499'59	457'14	392'10	372'98
UOC	0	0	0	0
BC	0	0	0	0

Taula 4.8: Estalvi sobre el cost individual

A la taula 4.8 es mostra la reducció en els costos per a cada universitat. S'observa que les universitats més grans, UB i UAB, presenten un estalvi similar, mentre que els estalvis de les altres no són comparables.

Per fer possible una comparació entre les dades, proporcionarem la reducció en el cost de cada universitat expressat en percentatges sobre el cost individual (taula 4.9).

Univ.	% R.ϕ	% R.τ	% R.η	% R.x
UB	0'04	0'04	0'04	0'05
UAB	0'05	0'05	0'06	0'05
UPC	0'05	0'05	0'04	0'05
UPF	0'06	0'05	0'04	0'05
UdG	0'05	0'05	0'04	0'05
UdL	0'06	0'06	0'05	0'05
URV	0'06	0'06	0'05	0'05
UOC	0	0	0	0
BC	0	0	0	0

Taula 4.9: Percentatge de reducció sobre el cost individual

Aquest model té la característica que les distribucions no presenten grans diferències en les assignacions, això és degut a que l'estalvi total és aproximadament d'un 5%. Així observant les dades veiem que els percentatges de reducció no difereixen gaire d'aquesta xifra, excepte per a la UOC i la BC que òbviament tenen estalvi zero ja que tenien cost zero. Per tant, les diferències entre els diferents mètodes de càlcul són menors, ara bé l'elecció d'un o un altre mètode pot tenir importants efectes sobre els pressupostos i actuacions de les universitats.

Comparació i proposta

En definitiva, davant la manca d'un mètode superior als altres, les diferències observades exigeixen que es comparin les propietats dels distints mètodes i es seleccioni el mètode d'acord amb les necessitats de cada cas. A continuació establirem les propietats que creiem que hauria de satisfer un mètode de distribució per a un joc de demanda amb descompte.

- **Racionalitat individual:** La primera propietat que podem demanar és que cap de les universitats es vegi perjudicada en compartir, és a dir, $y_i \leq c_{\Omega_\beta}(i)$ per a tot $i \in N$. És a dir, que a cap de les universitats se li assigni un cost superior al cost de la seva demanda, és l'anomenada racionalitat individual.

- **Racionalitat coalicional:** Una segona propietat que podem demanar és que cap grup d'universitats hagi de pagar més del que els hi costaria per si mateixes atendre a la seva demanda, és a dir, $\sum_{i \in S} y_i \leq c_{\Omega_\beta}(S)$, per tant estem demanant que pertanyi al core del joc de demanda.

- **Additivitat:** Una tercera propietat requerible és l'additivitat. El Consorci demana un paquet de revistes, les demandes de les quals són independents, així sembla raonable demanar que el sistema de repartiment sigui additiu, és a dir, $\psi_i(c_{\Omega_\beta}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} \psi_i^j(c_{\Omega_\beta}^j)$ per a tot $j \in \mathcal{G}$. El requeriment es tradueix en demanar que la solució assigni el mateix a la distribució realitzada sobre el conjunt de revistes que a la suma de les fetes sobre cadascuna de les revistes individualment, per tant, es requereix que el procés d'imputació es pugui dur a terme independentment per a cada revista.

- **Còmput fàcil:** Un quarta propietat que es pot requerir és un càlcul senzill. En un entorn pràctic és molt important aquesta propietat degut a l'elevat nombre de revistes demandades pel Consorci.

Procedim, per últim, a concretar l'objectiu de la present secció: proposar una solució de repartiment del cost total de subscripció del paquet de revistes de l'editorial Academic Press IDEAL. Per fer-ho tindrem en compte els criteris anteriorment establerts basats en les propietats que considerem ha de satisfer una solució per a un joc de demanda amb descompte.

D'aquesta manera el mètode de repartiment que proposem és el **valor de Shapley**. A continuació enumerarem les raons per les que creiem que és especialment idoni com a solució per al nostre model:

1. El valor de Shapley per als jocs de demanda amb descompte és un concepte de solució eficient que satisfà la racionalitat individual, és a dir, cap universitat incorre en un cost superior al cost de la seva demanda.

2. El valor de Shapley és un concepte de solució que pertany al core per als jocs còncaus. Com tot joc de demanda amb descompte és un joc còncau, el valor de Shapley sempre es troba dins del core d'aquests jocs. A més, en els nostres jocs això equival a que cap universitat suporta un cost superior al seu cost separable ni un cost inferior al seu cost individual.

3. El valor de Shapley per als jocs de demanda amb descompte és un concepte de solució additiu, de manera que el repartiment de costos es pot portar a terme imputant costos independentment per a cada revista. Aquesta propietat és especialment important ja que desglossa el seu còmput individualment per a cada revista, fet d'altra banda requerible ja que la demanda de cada revista és independent de les altres.

4. El valor de Shapley, en general s'obté com a solució de la mitjana d'una serie de pagaments tenint en compte totes les possibles ordenacions dels jugadors (en el nostre cas 9!=362.800 combinacions) i per tant el seu còmput és complicat. Ara bé, en el nostre model es pot efectuar un càlcul fàcil i ràpid que en anàlisis pràctics com és el nostre cas en prioritzen la seva aplicació.

5. I per últim, el valor de Shapley és l'**únic** concepte de solució dels analitzats que satisfà les condicions requerides anteriorment.

El valor de Shapley ja ha estat aplicat anteriorment amb èxit a problemes d'assignació de costos (veure Tijs i Driessen (1986) [76], Young (1994) [84] i Moulin i Shenker (1996) [56]).

A continuació mostrarem quines de les anteriors propietats no satisfan les altres solucions proposades des del punt de vista de la teoria de jocs cooperatius i la solució proposada pel CBUC.

Cal remarcar que totes les solucions satisfan la racionalitat individual i per tant cap d'elles ha de pagar un cost superior al de la seva demanda. Per altra banda, totes les distribucions proposades des de la vessant dels jocs cooperatius pertanyen al core dels jocs de demanda amb descompte. Ara bé la solució establerta pel CBUC en general no pertany al core i, per tant, tot i en aquest cas concret satisfà les desigualtats del core en general ens podríem trobar amb que alguna coalició d'universitats estigués descontenta amb la distribució assignada ja que per si mateixa incorreria en un cost inferior. Respecte a l'additivitat l'únic repartiment que ho satisfà és el valor de Shapley, ja que ni el nucleolus, ni el valor de tau ni la proporcional als costos individuals són additius. Per últim, remarcar que el càlcul del nucleolus és complicat i, per tant, en un àmbit pràctic com el nostre no té gaire sentit la seva aplicació com a concepte de solució.

Després d'haver realitzat una anàlisi del model i d'haver estudiat els diferents conceptes de solució arribem a la conclusió de què el valor de Shapley és el més apropiat. De totes maneres, cal remarcar que no existeix la millor solució i l'elecció del mètode de repartiment per part d'una universitat o d'una altra pot variar en funció de la seva política interna d'actuació i de les seves prioritats.