



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Àlgebres de Banach i el teorema de Gelfand-Naimark

Autor: Andreu Camprubí Peiró

Director: Dr. Joaquim Ortega Cerdà

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 21 de juny de 2020

Abstract

Banach algebras are Banach spaces equipped with a continuous multiplication. We begin this thesis by familiarizing ourselves with the general theory of these objects. Next, we turn our attention to the study of the commutative case. It is in this frame that we conclude the project, by proving the Gelfand-Naimark theorem, a striking representation theorem of a certain type of Banach algebras, namely commutative C^* -algebras.

Resum

Les àlgebres de Banach són espais de Banach equipats amb una multiplicació contínua. Iniciem aquest treball familiaritzant-nos amb la teoria general d'aquests objectes. Seguidament, centrem la nostra atenció en l'estudi del cas commutatiu. Concloem el projecte en aquest marc, amb la demostració del teorema de Gelfand-Naimark, un sorprenent teorema de representació d'un cert tipus d'àlgebres de Banach: les C^* -àlgebres commutatives.

Agraïments

Voldria agrair especialment al Dr. Joaquim Ortega el seu temps de dedicació i l'ajuda proporcionada per tal de resoldre els dubtes que m'han anat sorgint en el desenvolupament d'aquest treball.

Índex

1	Introducció	1
1.1	Per què s'anomenen àlgebres de Banach?	1
1.2	Breu perspectiva històrica	1
2	Teoria general de les àlgebres de Banach	2
2.1	Definició i exemples	2
2.2	Homomorfismes complexos	6
2.3	L'espectre d'un element d'una àlgebra de Banach	8
2.4	Càlcul simbòlic	15
2.4.1	Integració de funcions a valors en una àlgebra de Banach	15
2.4.2	Contorns	17
2.4.3	Aplicacions	23
3	Teoria de Gelfand	24
3.1	Ideals i homomorfismes	24
3.1.1	Homomorfismes i àlgebres quocient	26
3.2	Transformada de Gelfand	32
3.3	El teorema de Gelfand-Naimark	39
3.3.1	Connexions amb el càlcul simbòlic	43
3.3.2	El teorema de Gelfand-Naimark en el cas no unitari	44
4	Conclusions	49

1 Introducció

1.1 Per què s'anomenen àlgebres de Banach?

Les àlgebres de Banach, tal com els espais de Banach, reben el seu nom del matemàtic polonès Stefan Banach (1892-1945), que introduí el concepte d'espai de Banach però en canvi mai estudià les àlgebres de Banach. Aquestes s'anomenen així simplement perquè són àlgebres que també tenen estructura d'espai de Banach. El primer matemàtic que les va definir explícitament, anomenant-les *anells lineals mètrics* fou el japonès Mitio Nagumo l'any 1936 [13]. Tanmateix, el primer matemàtic que va desenvolupar-ne una teoria general fou Israel M. Gelfand (1913-2009), que les va introduir amb el nom d'*anells normats* [7]. Finalment el 1945 el nom d'àlgebra de Banach fou proposat per W. Ambrose [1], i és el que ha perdurat fins a dia d'avui.

1.2 Breu perspectiva històrica

El tema de la tesi doctoral de Gelfand de 1939 fou les àlgebres de Banach commutatives. En ella fou el primer en identificar el rol central jugat pels ideals maximals. Utilitzant les seves propietats, va crear l'estructura moderna de la teoria commutativa de les àlgebres de Banach. Aquesta teoria, actualment anomenada teoria de Gelfand, va revelar interessants connexions entre l'anàlisi funcional i l'anàlisi clàssica. Com a exemple sorprenent d'aquest fet, Gelfand va ser capaç de demostrar el lema de Wiener (veure teorema (3.17)) en unes poques línies. Aquest fet va provar la potència de la teoria i va atreure l'atenció de la resta de la comunitat matemàtica. Pocs anys més tard, el 1943, en col·laboració amb M. A. Naimark van demostrar el teorema de Gelfand-Naimark (veure teorema (3.32)), fet que marcà l'inici de la teoria de les C^* -àlgebres.

Estructura de la Memòria

En la secció 2 d'aquest treball presentem la teoria general de les àlgebres de Banach. El que necessitarem en la següent secció arriba fins el teorema de Gelfand-Mazur. A partir d'aquest punt tot el que segueix és independent de la resta del treball.

En la secció 3 centrem la nostra atenció en l'estudi de la teoria de Gelfand. Presentem els objectes bàsics: els ideals i la transformada de Gelfand. Com a colofó donem una demostració del teorema de Gelfand-Naimark. Presentem també algunes connexions amb el càlcul simbòlic desenvolupat en la secció anterior.

Per acabar, en la secció 4 exposarem les conclusions i proposarem possibles continuacions per a aquest treball.

2 Teoria general de les àlgebres de Banach

2.1 Definició i exemples

Definició 2.1. Un *espai de Banach* complex, A , dotat d'una multiplicació que satisfà

$$(2.1) \quad x(yz) = (xy)z,$$

$$(2.2) \quad (x + y)z = xz + yz, \quad x(y + z) = xy + xz,$$

$$(2.3) \quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y),$$

i

$$(2.4) \quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

per tot $x, y, z \in A$ i per tot $\alpha \in \mathbb{C}$ s'anomena **àlgebra de Banach**.

Si a més conté un **element unitat** e tal que

$$(2.5) \quad xe = ex = x$$

per tot $x \in A$, i

$$(2.6) \quad \|e\| = 1,$$

es diu que l'àlgebra de Banach és **unitària**.

Observacions 2.2. Un espai vectorial sobre el cos dels complexos amb una multiplicació que satisfà les condicions (2.1) a (2.3) s'anomena **àlgebra complexa**.

En general no demanarem que A sigui commutativa, és a dir, que $xy = yx$ per tot x i y de A .

És clar que l'element unitat, $e \in A$ és únic, ja que si e' també satisfés (2.5), aleshores $e' = e'e = e$.

En aquest treball, a no ser que s'indiqui el contrari, sempre suposarem l'existència d'element unitat. Procedirem d'aquesta manera ja que quan existeix un element unitat té sentit parlar d'inversos i, tal com veurem més endavant, l'espectre d'un element de A pot definir-se de manera més natural que en el cas contrari. A més, la pèrdua de generalitat resultant és petita, ja que moltes àlgebres de Banach tenen element unitat, i a les altres se les pot dotar d'un pel procediment canònic que segueix.

Proposició 2.3 (Unitarització). *Tota àlgebra de Banach A no unitària es pot considerar com un ideal bilàter tancat d'una àlgebra de Banach unitària.*

Demostració. Suposem que A satisfà les condicions (2.1) a (2.4), però que A no té element unitat. Sigui A_1 el conjunt de tots els parells ordenats (x, λ) , $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, és a dir, $A_1 = A \times \mathbb{C}$. Aleshores A_1 esdevé una àlgebra de Banach si les operacions d'espai vectorial i la multiplicació es defineixen per

$$(x, \lambda) + (y, \mu) := (x + y, \lambda + \mu), \quad \mu(x, \lambda) := (\mu x, \mu \lambda),$$

i

$$(x, \lambda)(y, \mu) := (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu),$$

i definim

$$\|(x, \lambda)\| := \|x\|_A + |\lambda|, \quad e := (0, 1)$$

per tot $x, y \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. A més l'aplicació $x \mapsto (x, 0)$ és un isomorfisme isomètric d'espais vectorials de A en un ideal bilàter tancat J de A_1 de codimensió 1. La comprovació que A_1 verifica les condicions (2.1) a (2.6) i és de Banach és rutinària. Pel que fa a la segona afirmació, sigui $J = \{(x, \lambda) \in A_1 : \lambda = 0\}$ (la imatge de l'aplicació abans esmentada). Tenim que $\text{codim}(J) := \dim(A_1/J) = \dim(\mathbb{C}) = 1$, ja que $A_1/J \cong \mathbb{C}$ via l'isomorfisme $\pi((x, \lambda)) \mapsto \lambda$, on per π denotem l'aplicació quocient. Clarament, A_1 és commutativa si, i només si, A és commutativa. $\square$

Observació 2.4. La desigualtat (2.4) ens diu que la multiplicació és una operació contínua en A . Això vol dir que si $x_n \rightarrow x$ i $y_n \rightarrow y$, aleshores $x_n y_n \rightarrow xy$. Aquest fet és conseqüència de la identitat

$$(2.7) \quad x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y).$$

En efecte, (2.7) implica que

$$\|x_n y_n - xy\| \leq \|(x_n - x)\| \|y_n\| + \|x\| \|(y_n - y)\| \rightarrow 0.$$

En particular, la multiplicació és contínua per l'esquerra i per la dreta, és a dir,

$$(2.8) \quad x_n y \rightarrow xy \quad \text{i} \quad x y_n \rightarrow xy$$

si $x_n \rightarrow x$ i $y_n \rightarrow y$.

El següent resultat és interessant ja que mostra que la condició (2.4) pot ser substituïda per la condició (aparentment més feble) (2.8) i que podem prescindir de la condició (2.6) sense per això estendre la classe d'àlgebres en consideració.

Teorema 2.5. *Suposem que A és un espai de Banach i a més una àlgebra complexa amb element unitat $e \neq 0$ en la qual la multiplicació és contínua per l'esquerra i per la dreta. Aleshores existeix una norma equivalent sobre A que converteix A en una àlgebra de Banach.*

(L'assumpció $e \neq 0$ exclou el cas patològic $A = \{0\}$).

Demostració. Per a $x \in A$, sigui $L_x : A \rightarrow A$ l'operador de multiplicació per l'esquerra definit per $y \mapsto xy$. Siguin $\tilde{A}$ el conjunt de tots els L_x . Clarament L_x és lineal. Com assumim que la multiplicació per la dreta és contínua, tenim que si $y_n \rightarrow y$, aleshores $L_x(y_n) = xy_n \rightarrow xy$, i per tant L_x és continu (en ser continu per successions). Així doncs $\tilde{A} \subseteq \mathcal{L}(A)$, l'espai de Banach de tots els operadors lineals i continus de A en A .

És clar que $x \mapsto L_x$ és lineal, és a dir, $L_{x+y} = L_x + L_y$ i $L_{\lambda x} = \lambda L_x$. A més (2.1) implica que també és multiplicativa, és a dir, $L_{xy} = L_x L_y$. Si $x \in A$, aleshores

$$\|x\|_A = \|xe\|_A = \|L_x e\|_A \leq \|L_x\| \|e\|_A.$$

Podem resumir aquests fets dient que $x \mapsto L_x$ és un isomorfisme de A en l'àlgebra $\tilde{A}$, que té invers continu. Com

$$\|L_x L_y\| = \sup_{a \leq 1} \|L_x L_y a\|_A \leq \sup_{a \leq 1} \|L_x\| \|L_y a\|_A = \|L_x\| \|L_y\|$$

i

$$\|L_e\| = \|I\| = 1,$$

$\tilde{A}$ satisfà les condicions (2.4) a (2.6). Per veure que $\tilde{A}$ és una àlgebra de Banach només ens manca veure'n la completesa, això és, que és un subespai tancat de $\mathcal{L}(A)$ respecte de la topologia donada per la norma d'operadors.

Suposem que $T \in \mathcal{L}(A)$, $T_i \in \tilde{A}$ i $T_i \rightarrow T$ en la topologia de $\mathcal{L}(A)$. Si T_i és la multiplicació per l'esquerra per $x_i \in A$, aleshores

$$(2.9) \quad T_i(y) = x_i y = (x_i e)y = T_i(e)y.$$

Quan $i \rightarrow \infty$, el primer terme de (2.9) tendeix a $T(y)$, i $T_i(e) \rightarrow T(e)$. Com la multiplicació s'ha suposat contínua per l'esquerra en A , el darrer terme de (2.9) tendeix cap a $T(e)y$. Posem $x = T(e)$. Aleshores,

$$T(y) = T(e)y = xy = L_x(y), \quad \forall y \in A$$

de manera que $T = L_x \in \tilde{A}$, i $\tilde{A}$ és tancada.

Ara el teorema de l'aplicació oberta (veure, per exemple, els corol·laris 2.12 de [17]) implica que $x \mapsto L_x$ és també contínua. Així doncs, A i $\tilde{A}$ són homeomorfs i $\|x\|_A$ i $\|L_x\|$ són normes equivalents en A . $\square$

Observació 2.6. El teorema anterior ens diu, en particular, que en tota àlgebra de Banach la continuïtat per la dreta i per l'esquerra de la multiplicació n'impliquen la continuïtat conjunta.

Principalment hi ha tres classes d'àlgebres de Banach, que a grans trets es poden descriure com a *àlgebres de funcions* (amb la multiplicació puntual), *àlgebres d'operadors* (amb la composició d'operadors) i *àlgebres de convolució* (amb el producte de convolució). Vegem-ne alguns exemples.

Exemple 2.7. Sigui X un espai de Hausdorff compacte no buit. Denotem per $\mathcal{C}(X)$ l'àlgebra de totes les funcions complexes contínues sobre X . Les operacions d'àlgebra són la suma, la multiplicació i el producte per escalar puntuals. Amb la norma del suprem

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{C}(X)$$

l'àlgebra $\mathcal{C}(X)$ esdevé una àlgebra de Banach commutativa i unitària, ja que la funció constant igual a 1 n'és l'element unitat.

Si X és un conjunt finit que consta, per exemple, de n punts, aleshores $\mathcal{C}(X)$ és simplement $\mathbb{C}^n$. En efecte, si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ s'identifiquen via l'isomorfisme $f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n))$.

En particular, en el cas $n = 1$, obtenim l'exemple més senzill d'àlgebra de Banach, $\mathbb{C}$ amb el mòdul complex.

Exemple 2.8. Sigui X un espai de Banach. Denotem per $\mathcal{L}(X)$ l'àlgebra de tots els operadors lineals i continus en X . La multiplicació és la composició d'operadors. És una àlgebra de Banach amb la norma usual d'operadors

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\}, \quad \forall T \in \mathcal{L}(X).$$

L'operador identitat I n'és l'element unitat. Si $\dim(X) = n < \infty$ ($n \neq 0$), aleshores $\mathcal{L}(X)$ és isomorfa a $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, l'àlgebra de les matrius n per n complexes. Si $\dim(X) > 1$, aleshores $\mathcal{L}(X)$ no és commutativa.

Tota subàlgebra tancada de $\mathcal{L}(X)$ que contingui I també és una àlgebra de Banach. La demostració del teorema (2.5) prova que de fet, tota àlgebra de Banach és isomorfa i homeomorfa a una d'aquestes.

Exemple 2.9. Anem a introduir ara una subàlgebra de Banach de $\mathcal{C}(X)$ (veure l'exemple (2.7)). Sigui X un subconjunt compacte no buit de $\mathbb{C}$. Denotem per $A(X)$ l'àlgebra de les funcions $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, contínues en X i holomorfes en l'interior X° de X . Clarament, $A(X)$ és completa (respecte la norma del suprem), ja que el límit uniforme d'una successió de funcions holomorfes és una funció holomorfa (és doncs tancada en $\mathcal{C}(X)$).

És d'especial interès el cas en què $X = \mathbb{D}$, on $\mathbb{D}$ denota el disc unitat tancat $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. En aquest cas $A(\mathbb{D})$ s'anomena **àlgebra disc**.

Exemple 2.10. L'espai $(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$, amb la convolució

$$(g * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)dy$$

com a multiplicació, és una àlgebra de Banach commutativa no unitària (veure la secció 9.19 de [16]).

Se li pot afegir una unitat pel procediment descrit en la proposició (2.3) o es pot fer més concretament per extensió de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a

$$\mathcal{L} := \{f + \alpha\delta : f \in L^1(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{C}\},$$

on $\delta = \delta_0$ és la mesura de Dirac en $\mathbb{R}^n$. En efecte, $\mathcal{L}$ és una àlgebra de Banach commutativa amb unitat δ respecte de les operacions

$$\begin{aligned} (f + \alpha\delta) + (g + \beta\delta) &:= (f + g) + (\alpha + \beta)\delta, \\ \beta(f + \alpha\delta) &:= (\beta f) + (\alpha\beta)\delta, \\ (f + \alpha\delta) * (g + \beta\delta) &:= (f * g + \beta f + \alpha g) + (\alpha\beta)\delta, \end{aligned}$$

per tot $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i per tot $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, i la norma

$$\|f + \alpha\delta\| = \|f\|_1 + |\alpha|, \quad \forall f + \alpha\delta \in \mathcal{L}.$$

A més $L^1(\mathbb{R}^n)$ és isomètricament isomorf a un subespai de $\mathcal{L}$ via $f \mapsto f + 0 \cdot \delta$.

Observació 2.11. Tot i que les àlgebres de Banach reals (que es defineixen de manera anàloga al cas complex) també han estat estudiades, en aquest treball ens centrarem en les àlgebres de Banach complexes, que presenten una teoria més rica. Això és degut al fet que certes propietats de les funcions holomorfes juguen un paper important en el desenvolupament de la teoria. Aquest fet quedarà ben pal·lès en la part corresponent al càlcul simbòlic (veure subsecció (2.4)). A més algun dels teoremes que veurem més endavant (per exemple el teorema (2.26)) és fals en el cas real.

Un altre motiu pel qual resulta més interessant el cas complex és que $\mathbb{C}$ té una involució (veure definició (3.25)) natural no trivial, la conjugació, i que moltes de les propietats profundes de certs tipus d'àlgebres de Banach depenen de la presència d'una involució.

2.2 Homomorfismes complexos

Entre les aplicacions importants d'una àlgebra de Banach en una altra hi ha els homomorfismes.

Definició 2.12. *Siguin A i B àlgebres de Banach. Si $h : A \rightarrow B$ és una aplicació lineal que a més és multiplicativa, és a dir,*

$$h(xy) = h(x)h(y), \quad \forall x, y \in A,$$

*aleshores h s'anomena **homomorfisme**.*

És especialment interessant el cas en què $B = \mathbb{C}$.

Definició 2.13. *Siguin A una àlgebra complexa i ϕ una forma lineal sobre A no idènticament nul·la. Si a més ϕ és multiplicativa, és a dir,*

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

*per tot $x, y \in A$, aleshores diem que ϕ és un **homomorfisme complex** sobre A .*

(El fet d'excloure el cas $\phi \equiv 0$ és simplement una qüestió de conveniència).

Definició 2.14. *Un element $x \in A$ es diu **invertible** si té un **invers** en A , és a dir, si existeix un element $x^{-1} \in A$ tal que*

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e,$$

on e és la unitat de A .

Proposició 2.15. *L'element invers, si existeix, és únic.*

Demostració. Sigui x un element de A i suposem que té dos inversos, y i z . Aleshores $yx = e = xz$, i per tant $y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z$. $\square$

Proposició 2.16. *Si ϕ és un homomorfisme complex sobre una àlgebra complexa A amb unitat e , aleshores $\phi(e) = 1$ i $\phi(x) \neq 0$ per tot element $x \in A$ invertible.*

Demostració. Donat que hem exclòs $\phi \equiv 0$ en la definició d'homomorfisme complex, tenim que $\phi(y) \neq 0$ per algun $y \in A$. Com

$$\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e),$$

la llei de cancel·lació en $\mathbb{C}$ implica que $\phi(e) = 1$.

Si x és invertible, aleshores

$$\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(xx^{-1}) = \phi(e) = 1,$$

per tant $\phi(x) \neq 0$. $\square$

Les parts (a) i (c) del següent teorema es troben entre els fets més utilitzats en la teoria de les àlgebres de Banach.

Teorema 2.17. *Sigui A una àlgebra de Banach. Si $x \in A$ és tal que $\|x\| < 1$, aleshores:*

(a) $e - x$ és invertible i $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($x^0 := e$),

(b) $\|(e - x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$,

(c) $|\phi(x)| < 1$ per tot ϕ homomorfisme complex sobre A .

Demostració. (a) Com $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ i $\|x\| < 1$, els elements

$$(2.10) \quad s_n = e + x + x^2 + \cdots + x^n$$

formen una successió de Cauchy en A .

Vegem-ho. Hem de veure que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0, \|s_n - s_m\| < \varepsilon.$$

Suposem sense pèrdua de generalitat que $m > n$ i tenim que

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\| &= \left\| \sum_{i=0}^n x^i - \sum_{j=0}^m x^j \right\| = \| -x^{n+1} - \cdots - x^m \| = \left\| \sum_{j=n+1}^m x^j \right\| \\ &\leq \|x^{n+1}\| + \cdots + \|x^m\| \leq \|x\|^{n+1} + \cdots + \|x\|^m = \sum_{j=n+1}^m \|x\|^j \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Com A és complet, existeix un $s \in A$ tal que $s_n \rightarrow s$. Donat que $x^n \rightarrow 0$ ($\|x\|^n \leq \|x\|^n \rightarrow 0$ ja que $\|x\| < 1$), i

$$s_n(e - x) = \left(\sum_{i=0}^n x^i \right) (e - x) = \sum_{i=0}^n (x^i - x^{i+1}) = e - x^{n+1} = (e - x)s_n$$

(per aquesta darrera igualtat l'argument és el mateix que abans però ara multiplicant per la dreta), la continuïtat de la multiplicació implica que s és l'invers de $e - x$. En efecte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(e - x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e - x^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e - x)s_n \iff s(e - x) = e = (e - x)s.$$

(b) Ara, (2.10) prova que

$$\|s - e - x\| = \left\| \sum_{i=2}^{\infty} x^i \right\| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \|x\|^i = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|} - \|x\| = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

(c) Finalment, sigui $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $|\lambda| \geq 1$. Per (a), $e - \lambda^{-1}x$ és invertible. Per la proposició (2.16),

$$1 - \lambda^{-1}\phi(x) = \phi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0.$$

Per tant $\phi(x) \neq \lambda$. Això acaba la demostració. $\square$

Observació 2.18. La part (c) del teorema (2.17) implica que tot homomorfisme complex sobre una àlgebra de Banach és continu.

Amb el mateix argument que en (c) però amb $|\lambda| > 1$ es veu que $\|x\| \leq 1$ implica $|\phi(x)| \leq 1$.

2.3 L'espectre d'un element d'una àlgebra de Banach

En aquesta subsecció introduïm la noció bàsica d'espectre d'un element d'una àlgebra de Banach i n'establim algunes de les propietats bàsiques.

Definició 2.19. *Sigui A una àlgebra de Banach. Denotem per $G(A)$ el conjunt de tots els elements invertibles en A . Aquest conjunt té estructura de grup, ja que si $x, y \in G(A)$, aleshores $y^{-1}x$ és l'invers de $x^{-1}y$, i per tant $x^{-1}y \in G(A)$.*

Per a $x \in A$, el conjunt

$$(2.11) \quad \sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(A)\}$$

*s'anomena **espectre** de x en A . El seu complementari, $\Omega_A(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$, s'anomena **conjunt resolvent** de x .*

Observació 2.20. Observis que el concepte d'espectre que acabem de definir estén la noció d'espectre d'un operador lineal i continu en un espai de Hilbert.

En la literatura també es pot trobar l'espectre definit com a

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G(A)\}.$$

Clarament aquesta definició és equivalent a (2.11) ja que $x - \lambda e$ és invertible en A si, i només si, $\lambda e - x$ és invertible en A .

Notació 1. *Quan no hi hagi dubte possible sobre quina és l'àlgebra A que estiguem considerant, ometrem el subíndex A i escriurem simplement $\sigma(x)$ i $\Omega(x)$ per referir-nos a l'espectre i el conjunt resolvent d'un element $x \in A$.*

Exemple 2.21. Si $A = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, aleshores l'espectre és simplement el conjunt dels valors propis. Més en general, si X és un espai de Banach de dimensió infinita i $A = \mathcal{L}(X)$, conjunt dels operadors lineals i continus en X , aleshores tot valor propi pertany a l'espectre, però el recíproc no és cert en general, ja que un operador injectiu no té perquè ser exhaustiu. Vegem això amb un exemple concret.

Considerem l'espai de Hilbert $H = L^2([0, 1])$, i definim l'operador de multiplicació per l'esquerra $T : H \rightarrow H$ per $Tf(x) = xf(x)$. Vegem que està ben definit. Com,

$$\int_0^1 |xf(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty,$$

aleshores $xf(x) \in H$. Vegem a més que és lineal i continu. Donat que,

$$T(\lambda f + \mu g) = x(\lambda f + \mu g) = \lambda(xf) + \mu(xg) = \lambda T(f) + \mu T(g), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ i } \forall f, g \in H,$$

T és lineal. A més,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2 &= \|xf\|_2 = \left(\int_0^1 |xf(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|f\|_2. \end{aligned}$$

Per tant T és continu. Així doncs, $T \in \mathcal{L}(H)$. Sigui $EV(T)$ el conjunt dels valors propis de T . Anem a veure que $EV(T) = \emptyset$, és a dir, que $T - \lambda I$ és injectiu per tot $\lambda \in \mathbb{C}$. Per a veure-ho vegem que $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$ per tot $\lambda \in \mathbb{C}$. La inclusió $\{0\} \subseteq \ker(T - \lambda I)$

és clara, ja que $(T - \lambda I)(0) = 0$ per ser $T - \lambda I$ lineal. Per veure l'altra inclusió, sigui $f \in \ker(T - \lambda I)$. Aleshores,

$$(T - \lambda I)(f) = 0 \iff Tf - \lambda f = 0 \iff (x - \lambda)f = 0 \iff (x - \lambda)f(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ara tenim que $\{x \in [0, 1] : x = \lambda \text{ per algun } \lambda \in \mathbb{C}\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \operatorname{Im}(\lambda) \neq 0 \text{ o } \operatorname{Re}(\lambda) \in [0, 1]^c \\ \lambda & \text{si } \operatorname{Im}(\lambda) = 0 \text{ i } \operatorname{Re}(\lambda) \in [0, 1] \end{cases}$, per tant és un conjunt de mesura nul·la amb la mesura de Lebesgue. Així doncs, $f(x) = 0$ a.e. x i aleshores, $f = 0$ en H . Queda doncs provat que T no té valors propis.

Anem a veure ara que $\sigma(T) = [0, 1]$, és a dir, que $T - \lambda I$ no és exhaustiu per tot $\lambda \in [0, 1]$. Vegem primer la inclusió $\sigma(T) \subseteq [0, 1]$. Si $\lambda \notin [0, 1]$, aleshores $(x - \lambda)^{-1}f \in H$ per tot $f \in H$, ja que $x - \lambda \neq 0$ en $[0, 1]$. En efecte,

$$\int_0^1 |(x - \lambda)^{-1}f(x)|^2 dx = \int_0^1 |(x - \lambda)^{-1}|^2 |f(x)|^2 dx \leq K \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty,$$

on hem usat que $\frac{1}{|x - \lambda|^2} \leq K$, on $K > 0$, ja que $x \in [0, 1]$. Per tant, $(T - \lambda I)^{-1} : H \rightarrow H$ definit per $f \mapsto (x - \lambda)^{-1}f$ és l'invers de $T - \lambda I$ si $\lambda \notin [0, 1]$. Per tant $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ està inclòs en el conjunt resolvent de T , i això ens dona que $\sigma(T) \subseteq [0, 1]$.

Vegem ara l'altra inclusió. Sigui $\lambda \in [0, 1]$. Aleshores $T - \lambda I$ no és exhaustiu, ja que $c(x - \lambda)^{-1} \notin H$ per a $c \neq 0$, i per tant les funcions constants no nul·les c no pertanyen a la imatge de $T - \lambda I$. Vegem això més en detall. Prenem $f = c$, amb c una constant no nul·la, que pertany a H . Suposem que existeix $g \in H$ tal que $(T - \lambda I)(g) = c$. Aleshores,

$$Tg - \lambda g = c \iff (x - \lambda)g(x) = c \iff g(x) = \frac{c}{x - \lambda}.$$

Però,

$$\int_0^1 |g(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{|c|^2}{|x - \lambda|^2} dx = |c|^2 \int_0^1 \frac{1}{|x - \lambda|^2} dx = \begin{cases} \frac{|c|^2}{(\lambda - 1)\lambda}, & \text{si } \lambda \notin [0, 1] \\ \infty & \text{si } \lambda \in [0, 1] \end{cases}.$$

Com en el nostre cas $\lambda \in [0, 1]$, tenim que $g \notin H$, arribant a una contradicció. Així doncs la imatge de $T - \lambda I$ no és igual a H . Per tant $T - \lambda I$ no és exhaustiu i aleshores $\lambda \in \sigma(T)$.

El següent teorema mostra que si afegim una “petita pertorbació” a un element invertible, aquest segueix sent invertible.

Teorema 2.22. *Siguin A una àlgebra de Banach, $x \in G(A)$ i $h \in A$ tal que $\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Aleshores $x + h \in G(A)$, i*

$$\|(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2.$$

Demostració. Com $x + h = x(e + x^{-1}h)$ i $\|x^{-1}h\| < \frac{1}{2}$, la part (a) del teorema (2.17) implica que $e - (-x^{-1}h) \in G(A)$. Així doncs, $x(e + x^{-1}h) \in G(A)$ i per tant $x + h \in G(A)$.

La part (b) del teorema (2.17) implica que la norma del segon membre de la identitat

$$(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = [(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1},$$

obtinguda utilitzant que $(x + h)^{-1} = [x(e + x^{-1}h)]^{-1} = (e + x^{-1}h)^{-1}x^{-1}$, és com a molt $2\|x^{-1}h\|^2\|x^{-1}\|$. En efecte, de (2.17) (b) tenim que,

$$\|(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\| \leq \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1 - \|x^{-1}h\|} < \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\|x^{-1}h\|^2.$$

Per tant,

$$\|[(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1}\| \leq \|[(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]\| \|x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}h\|^2 \|x^{-1}\|.$$

Com

$$2\|x^{-1}h\|^2 \|x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3 \|h\|^2$$

obtenim la desigualtat buscada. $\square$

Teorema 2.23. *Si A és una àlgebra de Banach, aleshores $G(A)$ és un subconjunt obert de A , i l'aplicació $x \mapsto x^{-1}$ és un homeomorfisme de $G(A)$ en $G(A)$.*

Demostració. Del teorema (2.22) obtenim que $G(A)$ és obert. En efecte, sigui $x \in G(A)$ i $\varepsilon = \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Aleshores si $a \in B_\varepsilon(x) \implies \|a - x\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$ i el teorema (2.22) implica que $(a - x) + x = a \in G(A)$.

Del mateix teorema (2.22) també obtenim la continuïtat de $x \mapsto x^{-1}$. En efecte,

$$\begin{aligned} \|y^{-1} - x^{-1}\| &\leq \|(y^{-1} - x^{-1}) + x^{-1}(y - x)x^{-1}\| + \|x^{-1}(y - x)x^{-1}\| \\ &\leq 2\|x^{-1}\|^3 \|y - x\|^2 + \|x^{-1}\|^2 \|y - x\|, \end{aligned}$$

on $y \in G(A)$. Per tant, per tot $x \in G(A)$ i per tot $\varepsilon > 0$ escollim δ tal que $2\|x^{-1}\|^3 \delta^2 + \|x^{-1}\|^2 \delta < \varepsilon$, i obtenim la continuïtat de l'aplicació.

Finalment, com $x \mapsto x^{-1}$ aplica $G(A)$ en $G(A)$ i és la seva pròpia inversa ($(x^{-1})^{-1} = x$), és un homeomorfisme. $\square$

El següent teorema és un dels resultats més fonamentals de la teoria de les àlgebres de Banach. En la seva demostració la teoria de les funcions holomorfes en una variable complexa jugarà un paper rellevant. Abans d'enunciar aquest teorema, però, ens convé donar una definició i enunciar el teorema següents.

Definició 2.24. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un obert i X un espai de Banach complex. Una funció $f : \Omega \rightarrow X$ es diu **holomorfa** en Ω si*

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existeix (en la topologia de X) per tot $z \in \Omega$.

Teorema 2.25 (Teorema de Cauchy). *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$, sigui X un espai de Banach complex i suposem que $f : \Omega \rightarrow X$ és holomorfa. Aleshores el teorema de Cauchy és vàlid, és a dir, si Γ és un camí tancat en Ω tal que $\text{Ind}_\Gamma(w) = 0$ per tot $w \notin \Omega$, aleshores*

$$(2.12) \quad \int_\Gamma f(\zeta) d\zeta = 0.$$

A més si Γ_1 i Γ_2 són camins tancats en Ω tals que

$$\text{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \text{Ind}_{\Gamma_2}(w)$$

per tot $w \notin \Omega$, aleshores

$$(2.13) \quad \int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_2} f(\zeta) d\zeta.$$

Una demostració d'aquest teorema es pot trobar, per exemple, en el teorema 3.31 de [17].

Teorema 2.26. *Si A és una àlgebra de Banach i $x \in A$, aleshores l'espectre $\sigma(x)$ de x és compacte i no buit.*

Demostració. Anem a veure primer que $\sigma(x)$ és acotat. Si $|\lambda| > \|x\|$ aleshores $e - \lambda^{-1}x \in G(A)$ pel teorema (2.17), i com $\lambda e - x = \lambda(e - \lambda^{-1}x)$, que té per invers $\lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1}$, també tenim que $\lambda e - x \in G(A)$. Per tant, $\lambda \notin \sigma(x)$. Així doncs, si $\lambda \in \sigma(x)$, aleshores $|\lambda| \leq \|x\|$. És a dir, $\sigma(x)$ és un conjunt acotat.

Vegem ara que $\sigma(x)$ és tancat. Per a fer-ho definim $g : \mathbb{C} \rightarrow A$ per $g(\lambda) = \lambda e - x$. Tenim que g és contínua ja que

$$\|g(\lambda) - g(\mu)\| = \|\lambda e - x - (\mu e - x)\| = \|(\lambda - \mu)e\| = |\lambda - \mu|.$$

Així doncs, és una isometria i per tant contínua. A més

$$g^{-1}(G(A)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : g(\lambda) \in G(A)\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \in G(A)\} = \sigma(x)^c.$$

Com g és contínua i $G(A)$ és obert, $\sigma(x)^c$ és obert i per tant $\sigma(x)$ és tancat. Concloem doncs que $\sigma(x)$ és compacte.

Sigui $\Omega = \sigma(x)^c$. Per tal de veure que $\sigma(x)$ és no buit, definim $f : \Omega \rightarrow G(A)$ per

$$(2.14) \quad f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \forall \lambda \in \Omega.$$

Ara substituïm x per $\lambda e - x$ i h per $(\mu - \lambda)e$ en el teorema (2.22). Si $\lambda \in \Omega$ i μ és prou proper a λ , el resultat d'aquesta substitució és

$$(2.15) \quad \|f(\mu) - f(\lambda) + (\mu - \lambda)f^2(\lambda)\| \leq 2\|f(\lambda)\|^3|\mu - \lambda|^2,$$

de manera que

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} = -f^2(\lambda), \quad \forall \lambda \in \Omega$$

ja que fent $\mu \rightarrow \lambda$ en (2.15) tenim que $\left\| \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} - (-f^2(\lambda)) \right\| \rightarrow 0$. Per tant f és una funció holomorfa en Ω a valors en A .

Si $|\lambda| > \|x\|$, es compleix que $\|(\lambda^{-1}x)^n\| \leq \|\lambda^{-1}x\|^n$ i $\|\lambda^{-1}x\| < 1$. Per tant, el mateix argument que en la demostració de la part (a) del teorema (2.17) prova que $s_n = e + \lambda^{-1}x + \dots + \lambda^{-n}x^n$ és de Cauchy. Així doncs, $s_n \rightarrow s \in A$, on

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}x^n = (e - \lambda^{-1}x)^{-1} = [\lambda^{-1}(\lambda e - x)]^{-1} = \lambda f(\lambda).$$

Per tant,

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}x^n.$$

Aquesta sèrie no és més que la sèrie de Laurent de f en el domini $\{|\lambda| > \|x\|\}$. Per tant, la sèrie convergeix uniformement sobre compactes de $\{|\lambda| > \|x\|\}$. En particular, convergeix uniformement sobre tota circumferència Γ_r , amb centre en 0 i radi $r > \|x\|$. Així doncs, la integració de $f(\lambda)$ terme a terme és legítima. Per tant,

$$(2.16) \quad x^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^n f(\lambda) d\lambda \quad \text{per a } r > \|x\| \text{ i } \forall n \in \mathbb{N}.$$

En efecte,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^n f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\lambda^{m+1}} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \int_{\Gamma_r} \frac{1}{\lambda^{1+(m-n)}} d\lambda,$$

i aquesta darrera integral val $2\pi i$ si $n = m$ i 0 en cas contrari. D'aquí obtenim (2.16).

Si $\sigma(x)$ fos buit, Ω seria $\mathbb{C}$ i el teorema de Cauchy (2.25), implicaria que totes les integrals de (2.16) són 0. Però quan $n = 0$, el membre de l'esquerra de (2.16) és $e \neq 0$. Aquesta contradicció prova que $\sigma(x)$ és no buit. $\square$

Observació 2.27. Per tal d'aplicar el teorema de Cauchy (2.25) a les integrals de l'equació (2.16) hem fet servir el resultat següent aplicat a $\varphi(\lambda) = \lambda^n$:

Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$, A una àlgebra de Banach i $f : \Omega \rightarrow A$, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funcions holomorfes. Aleshores $\varphi f : \Omega \rightarrow A$ és una funció holomorfa.

Definició 2.28. Per tot $x \in A$, el **radi espectral** de x és el número

$$\rho_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\}.$$

És a dir, és el radi del menor disc tancat en $\mathbb{C}$ centrat en 0, que conté $\sigma_A(x)$.

Observació 2.29. L'existència de $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ és conseqüència del teorema (2.26) (n'hem obtingut que $\sigma(x)$ és no buit i acotat). Això ens garanteix que la definició (2.28) té sentit.

Notació 2. De nou quan no hi hagi dubte possible sobre quina és l'àlgebra A que estiguem considerant, ometrem el subíndex A i escriurem simplement $\rho(x)$ per referir-nos al radi espectral d'un element $x \in A$.

Teorema 2.30. Per tot $x \in A$ el radi espectral $\rho(x)$ satisfà

$$(2.17) \quad \rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Aquesta igualtat s'anomena **fórmula del radi espectral**.

Observem que l'existència del límit (2.17) és part de la conclusió.

Demostració. Primer notem que la implicació $\lambda \in \sigma(x)$ aleshores $|\lambda| \leq \|x\|$ vista en el teorema (2.26) i la definició de radi espectral, ens donen la desigualtat

$$(2.18) \quad \rho(x) \leq \|x\|.$$

A més tenim que $\Omega = \sigma(x)^c$ conté tots els $\lambda \in \mathbb{C}$ tals que $|\lambda| > \rho(x)$, ja que si $\lambda \in \sigma(x)$ aleshores $|\lambda| \leq \rho(x)$, i per tant $|\lambda| > \rho(x)$ implica que $\lambda \in \Omega$. Així doncs, si $w \notin \Omega$ aleshores $|w| \leq \rho(x)$. En conseqüència,

$$\text{Ind}_{\Gamma_{r_1}}(w) = \text{Ind}_{\Gamma_{r_2}}(w) = 1$$

per a Γ_{r_1} i Γ_{r_2} circumferències centrades en 0 i de radis $r_1 > \|x\|$ i $r_2 > \rho(x)$. Per tant aplicant (2.13) del teorema de Cauchy (2.25), tenim que la condició $r > \|x\|$ pot substituir-se en (2.16) del teorema (2.26) per $r > \rho(x)$.

Considerant l'aplicació f definida en (2.14) del teorema (2.26) definim

$$M(r) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \|f(re^{i\theta})\|, \quad \forall r > \rho(x).$$

Com f és contínua, la composició de f i $\|\cdot\|$ també és contínua. A més $\{re^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$ és compacte, i per tant el teorema de Weierstrass garanteix que $M(r) < \infty$. Ara (2.16) del teorema (2.26) ens dona que

$$\|x^n\| \leq r^{n+1} M(r).$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \|x^n\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma_r} \lambda^n f(\lambda) d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |re^{i\theta}|^n \|f(re^{i\theta})\| |\Gamma'_r(\theta)| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} r^n M(r) \int_0^{2\pi} |\Gamma'_r(\theta)| d\theta = \frac{1}{2\pi} r^n M(r) 2\pi r = r^{n+1} M(r). \end{aligned}$$

D'aquí, prenent arrel n -èssima, obtenim que

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r r^{\frac{1}{n}} M(r)^{\frac{1}{n}}.$$

Com el membre de la dreta és una successió convergent, és acotada. Això garanteix l'existència del límit superior del membre de l'esquerra. Ara, prenent límit superior a banda i banda de la desigualtat obtenim que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r, \quad \forall r > \rho(x),$$

d'on

$$(2.19) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(x).$$

D'altra banda, si $\lambda \in \sigma(x)$, la factorització

$$(2.20) \quad (\lambda e - x) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-1-i} x^i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-i} x^i - \lambda^{n-1-i} x^{i+1} = \lambda^n e - x^n$$

prova que $\lambda^n e - x^n \notin G(A)$. Per tant $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Per la desigualtat (2.18), $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ per a $n \in \mathbb{N}^*$. Per tant,

$$|\lambda|^n \leq \|x^n\| \iff |\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \iff |\lambda| \leq \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

És a dir, $\inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ és una cota superior de $|\lambda|$. Per definició de radi espectral, tenim doncs que

$$(2.21) \quad \rho(x) \leq \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

i (2.17) és una conseqüència directa de (2.19) i (2.21). □

Observació 2.31. Per a deduir de (2.20) que $\lambda^n e - x^n \notin G(A)$ hem fet ús del cas commutatiu del resultat següent:

Si xy i yx són invertibles en A , aleshores x i y són invertibles en A

El següent teorema és una conseqüència del teorema (2.26), i caracteritza les àlgebres de Banach que són àlgebres amb divisió, és a dir, en què tot element no nul és invertible.

Teorema 2.32 (Gelfand-Mazur). *Si A és una àlgebra de Banach amb divisió. Aleshores A és isomètricament isomorfa al cos dels complexos.*

Demostració. Pel teorema (2.26), per tot $x \in A$, existeix $\lambda_x \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_x e - x \notin G(A)$. Com $G(A) = A \setminus \{0\}$ per hipòtesi, se segueix que $\lambda_x e = x$.

Vegem que aquest λ_x és únic, és a dir, que $\sigma(x)$ consta exactament d'un punt. Siguin $x \in A$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, tals que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Aleshores com a molt un dels elements $\lambda_1 e - x$ i $\lambda_2 e - x$ és 0. En efecte, si

$$\lambda_1 e - x = 0 \quad \text{i} \quad \lambda_2 e - x = 0 \implies \lambda_1 e = \lambda_2 e \iff (\lambda_1 - \lambda_2)e = 0,$$

que com $e \neq 0$ implica que $\lambda_1 = \lambda_2$, que és una contradicció. Per tant, com ens trobem en una àlgebra amb divisió, almenys un dels dos és invertible, i per tant no pot ser que tots dos pertanyin a $\sigma(x)$.

Considerem ara l'aplicació $x \mapsto \lambda_x$. Clarament és un morfisme d'àlgebres. A més és exhaustiu ja que per tot $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \in \sigma(\mu e)$, i per tant $\mu = \lambda_{\mu e}$. És també una isometria, ja que $|\lambda_x| = \|\lambda_x e\| = \|x\|$ per tot $x \in A$. $\square$

Ens preguntem ara si els espectres de dos elements x i y de A són propers, en un sentit convenientment definit, quan x i y són propers l'un a l'altre. El següent teorema respon a aquesta pregunta de manera senzilla.

Teorema 2.33. *Suposem que A és una àlgebra de Banach, $x \in A$, Ω és un conjunt obert de $\mathbb{C}$ i $\sigma(x) \subseteq \Omega$. Aleshores existeix $\delta > 0$ tal que $\sigma(x + y) \subseteq \Omega$ per cada $y \in A$ tal que $\|y\| < \delta$.*

Demostració. Ja hem vist que $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ és una funció contínua de λ en el complementari de $\sigma(x)$. Aquesta norma tendeix a 0 quan $|\lambda| \rightarrow \infty$. En efecte, recordem que en el teorema (2.26) vam veure que si $\lambda > \|x\|$, $\|(\lambda e - x)^{-1}\| = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n$. Per tant, en aquestes condicions

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|},$$

que prova que $\|(\lambda e - x)^{-1}\| \rightarrow 0$ quan $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Així doncs existeix un número $M < \infty$ tal que

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| < M, \quad \forall \lambda \in \Omega^c.$$

Ara, si $y \in A$, $\|y\| < \frac{1}{M}$ i $\lambda \notin \Omega$, se segueix que

$$\lambda e - (x + y) = (\lambda e - x)[e - (\lambda e - x)^{-1}y]$$

és invertible en A , ja que $\|(\lambda e - x)^{-1}y\| \leq \|(\lambda e - x)^{-1}\|\|y\| < M \frac{1}{M} = 1$. Per tant $\lambda \notin \sigma(x + y)$. Això dona la conclusió desitjada amb $\delta = \frac{1}{M}$, ja que hem provat que $\Omega^c \subseteq \sigma(x + y)^c$ que implica $\sigma(x + y) \subseteq \Omega$. $\square$

2.4 Càlcul simbòlic

Donada una funció $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ és obert i x un element d'una àlgebra de Banach A , volem veure quan podem donar sentit a l'expressió $f(x)$ en A .

Exemple 2.34. Si considerem $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $f(\lambda) = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n \lambda^n$, és a dir, un polinomi amb coeficients complexos α_i , és clar què vol dir $f(x)$. En efecte, és l'element de A definit per $f(x) = \alpha_0 e + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$, que es troba ben definit ja que la multiplicació, la suma i el producte per escalar són tancats en A .

Exemple 2.35. Si considerem $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$ i que sigui entera,

resulta natural definir $f(x) \in A$ per $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$, ja que aquesta sèrie sempre és convergent. En efecte, si $f(\lambda) \in H(\mathbb{C})$, aleshores el seu radi de convergència és $R_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|} = \infty$. D'altra banda,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\alpha_k x^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \|x^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \|x\|^k,$$

que té per radi de convergència $R_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|} = R_\lambda = \infty$. Així doncs,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\alpha_k x^k\| < \infty, \quad \forall x \in A \implies \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k < \infty, \quad \forall x \in A,$$

ja que ens trobem en un espai de Banach. Notem que en particular, si

$$f(\lambda) = e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \implies e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in A.$$

Exemple 2.36. Considerem $f : \mathbb{C} \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$, la funció meromorfa definida per $f(\lambda) = \frac{1}{\alpha - \lambda}$. En aquest cas, la definició natural de $f(x)$ és $f(x) = (\alpha e - x)^{-1}$, que té sentit per tot x tal que $\alpha \notin \sigma(x)$.

En vista d'aquest darrer exemple podríem conjecturar que $f(x)$ és definible en A quan f és holomorfa en un conjunt obert que conté a $\sigma(x)$. Més endavant en aquesta subsecció veurem que aquesta conjectura és correcta i que es pot deduir d'una certa versió de la fórmula de Cauchy.

Interrompem ara el desenvolupament principal d'aquesta subsecció, per tal de presentar alguns resultats que necessitem més endavant.

2.4.1 Integració de funcions a valors en una àlgebra de Banach

Per tal de poder desenvolupar el càlcul simbòlic necessitem poder integrar funcions contínues definides sobre un espai de mesura compacte Q amb una mesura complexa μ i que prenen valors en una àlgebra de Banach A .

Definició 2.37. *Siguin μ una mesura complexa de Borel en un espai de mesura compacte i de Hausdorff Q , X un espai de Banach i f una funció contínua de Q a X . L'aplicació $\Lambda f : Q \rightarrow \mathbb{C}$ es defineix per*

$$(\Lambda f)(q) := \Lambda(f(q)), \quad \forall q \in Q.$$

Si existeix un vector $y \in X$ tal que

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu$$

per tota $\Lambda \in X^*$, aleshores, per definició, prendrem

$$\int_Q f d\mu := y.$$

Observació 2.38. És clar que com a molt existeix un tal y , ja que X^* separa punts de X (veure el corol·lari del teorema 3.4 en [17]).

L'existència queda provada pel següent teorema, del qual se'n pot trobar una demostració, per exemple, en el teorema 3.27 de [17].

Teorema 2.39. *Siguin X un espai de Banach i μ una mesura complexa de Borel definida en un espai de Hausdorff compacte Q . Si $f : Q \rightarrow X$ és contínua, aleshores la integral*

$$y = \int_Q f d\mu$$

existeix en el sentit de la definició (2.37).

Presentem ara un resultat del qual haurem de fer ús més endavant. Se'n pot trobar una demostració, per exemple, en el teorema 3.29 de [17].

Teorema 2.40. *Sigui Q un espai de Hausdorff compacte, X un espai de Banach, $f : Q \rightarrow X$ contínua, i μ una mesura de Borel positiva definida en Q . Aleshores*

$$\left\| \int_Q f d\mu \right\| \leq \int_Q \|f\| d\mu.$$

Ens interessa ara demostrar una propietat addicional d'aquesta integral que farem servir en el que segueix.

Proposició 2.41. *Sigui A una àlgebra de Banach i f una funció a valors en A , contínua en un espai de Hausdorff compacte Q sobre el que està definida una mesura complexa de Borel μ . Si $x \in A$, aleshores*

$$(2.22) \quad x \int_Q f d\mu = \int_Q x f(p) d\mu(p)$$

i

$$(2.23) \quad \left(\int_Q f d\mu \right) x = \int_Q f(p) x d\mu(p), \quad \forall p \in Q.$$

Demostració. Provem primer (2.22). Sigui M_x l'operador de multiplicació per l'esquerra per x , definit per $z \mapsto xz$ per tot $z \in A$, i sigui Λ una forma lineal acotada sobre A . Aleshores ΛM_x és una forma lineal acotada sobre A . En efecte, és lineal donat que

$$(\Lambda M_x)(\lambda a + \mu b) = \Lambda(\lambda x a + \mu x b) = \lambda \Lambda(x a) + \mu \Lambda(x b) = \lambda (\Lambda M_x)(a) + \mu (\Lambda M_x)(b),$$

i acotada ja que

$$|\Lambda M_x(a)| = |\Lambda(xa)| \leq M\|xa\| \leq M\|x\|\|a\|,$$

per a $M > 0$, tenint en compte que Λ és acotada. Com M_x és continu i per tant $M_x f$ també, la definició (2.37) aplicada d'una banda a la integral de f i de l'altra a la integral de $M_x f$ implica que

$$\Lambda M_x \int_Q f d\mu = \int_Q (\Lambda M_x f) d\mu = \Lambda \int_Q (M_x f) d\mu,$$

per cada $\Lambda \in A^*$. Així doncs com A^* separa punts de A ,

$$M_x \int_Q f d\mu = \int_Q (M_x f) d\mu$$

que és justament una altra forma d'escriure (2.22).

Provem ara (2.23) Canviant en la demostració de (2.22) M_x per l'operador de multiplicació per la dreta la demostració és exactament la mateixa. $\square$

2.4.2 Contorns

Tot i que l'exposat en la subsecció (2.4.1) és més general, a nosaltres ens interessarà realitzar la integració sobre uns compactes de Hausdorff particulars que presentem a continuació.

Sigui K un subconjunt compacte d'un obert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i sigui Γ una col·lecció finita de segments orientats $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ en Ω cap dels quals talla a K . En aquestes condicions,

- (1) La integració sobre Γ es defineix per

$$\int_{\Gamma} \phi(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \phi(\lambda) d\lambda.$$

- (2) Podem escollir Γ un cicle de manera que

$$\text{Ind}_{\Gamma}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\lambda}{\lambda - \zeta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta \in K \\ 0 & \text{si } \zeta \notin \Omega \end{cases}$$

i tal que la fórmula de Cauchy

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \zeta)^{-1} f(\lambda) d\lambda$$

sigui vàlida per tota funció f holomorfa en Ω i per cada $\zeta \in K$. Per a una demostració d'aquest fet vegis, per exemple, el teorema 13.5 de [16].

Per referir-nos a la situació (2) direm que *el contorn Γ envolta K en Ω* .

Notis que ni K , ni Ω , ni la unió dels segments orientats γ_i s'han suposat connexos.

Reprenem ara el fil principal. Anem a veure com donar sentit a $f(x)$ si f és una funció racional. Primer de tot necessitarem el següent lema.

Lema 2.42. *Siguin A una àlgebra de Banach, $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha \notin \sigma(x)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ i suposem que Γ envolta a $\sigma(x)$ en Ω . Aleshores*

$$(2.24) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (\alpha e - x)^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demostració. Denotem la integral en (2.24) per y_n . Quan $\lambda \notin \sigma(x)$,

$$(2.25) \quad (\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1}.$$

Ara per la proposició (2.41), y_n és llavors la suma de

$$(\alpha e - x)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n d\lambda = 0,$$

on la integral és zero pel teorema de Cauchy, ja que $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0$, i de

$$(\alpha e - x)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^{n+1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Per tant,

$$(\alpha e - x)y_n = y_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Aquesta fórmula recurrent demostra que la igualtat (2.24) es dedueix del cas $n = 0$. Hem de provar doncs que

$$(2.26) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = e.$$

Sigui Γ_r una circumferència orientada positivament, centrada en 0 i de radi $r > \|x\|$. Sobre Γ_r , $(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n$, tal com es va veure en la demostració del teorema (2.26). La integració terme a terme d'aquesta sèrie dona (2.26), amb Γ_r en lloc de Γ . En efecte,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{\Gamma_r} \frac{1}{\lambda^{n+1}} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} x^n (2\pi i \delta_{n0}) = e.$$

Com l'integrand de (2.26) és una funció a valors en A holomorfa sobre el complementari de $\sigma(x)$ (vist en la demostració del teorema (2.26)), i com

$$\text{Ind}_{\Gamma_r}(\zeta) = 1 = \text{Ind}_{\Gamma}(\zeta)$$

per cada $\zeta \in \sigma(x)$, el teorema de Cauchy (2.25) prova que la integral (2.26) no canvia si se substitueix Γ per Γ_r . Això completa la demostració. $\square$

Teorema 2.43. *Sigui*

$$(2.27) \quad R(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m,k} c_{m,k} (\lambda - \alpha_m)^{-k}$$

una funció racional amb pols en els punts α_m . (P és un polinomi, i la suma de (2.27) té tan sols un nombre finit de termes). Si $x \in A$ i $\sigma(x)$ no conté pols de R , definim

$$(2.28) \quad R(x) = P(x) + \sum_{m,k} c_{m,k} (x - \alpha_m e)^{-k}.$$

Si Ω és un conjunt obert en $\mathbb{C}$ que conté a $\sigma(x)$ i en el que R és holomorfa, i si Γ envolta a $\sigma(x)$ en Ω , aleshores

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Demostració. La prova s'obté aplicant el lema (2.42). En efecte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} P(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda + \\ &+ \sum_{m,k} c_{m,k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \alpha_m)^{-k} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = P(x) + \sum_{m,k} c_{m,k} (x - \alpha_m e)^{-k} = R(x). \end{aligned}$$

On hem aplicat el lema (2.42) a cadascun dels termes del polinomi $P(\lambda)$ i a la integral del segon sumand. $\square$

Notis que (2.28) és la definició més natural de funció racional en $x \in A$. El teorema ens demostra que mitjançant la fórmula de Cauchy s'obté el mateix resultat. Aquest fet motiva la següent definició.

Definició 2.44. *Siguin A una àlgebra de Banach, Ω un conjunt obert en $\mathbb{C}$ i $H(\Omega)$ l'àlgebra de totes les funcions complexes holomorfes en Ω . Pel teorema (2.33),*

$$A_{\Omega} = \{x \in A : \sigma(x) \subseteq \Omega\}$$

és un subconjunt obert de A .

Definim $\tilde{H}(A_{\Omega})$ com el conjunt de totes les funcions $\tilde{f}$ a valors en A , definides sobre A_{Ω} , obtingudes a partir de funcions $f \in H(\Omega)$ per la fórmula

$$(2.29) \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

on Γ és qualsevol contorn que envolti $\sigma(x)$ en Ω .

Aquesta definició requereix d'alguns comentaris.

- (a) Com Γ està aïllat de $\sigma(x)$ i la inversió és contínua en A , l'integrand en (2.29) és una funció contínua, per tant la integral existeix i defineix a $\tilde{f}(x)$ com a element de A .
- (b) L'integrand, de fet, és una funció holomorfa a valors en A definida en el complementari de $\sigma(x)$ (veure l'observació (2.27)). Per tant el teorema de Cauchy (2.25), implica que $\tilde{f}(x)$ és independent de l'elecció de Γ , en el benentès que Γ envolti $\sigma(x)$ en Ω .
- (c) Si $x = \alpha e$ i $\alpha \in \Omega$, la fórmula (2.29) esdevé

$$(2.30) \quad \tilde{f}(\alpha e) = f(\alpha)e.$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha e) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - \alpha e)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)[(\lambda - \alpha)e]^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)e}{\lambda - \alpha} d\lambda = f(\alpha)e. \end{aligned}$$

On $\lambda \neq \alpha$ ja que Γ no talla $\sigma(\alpha e)$, i la darrera igualtat s'obté utilitzant que $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 1$ donat que $\sigma(\alpha e) = \{\alpha\}$ i aplicant el teorema de Cauchy.

Observis que $\alpha e \in A_{\Omega}$, si, i només si, $\alpha \in \Omega$. En efecte, $\alpha e \in A_{\Omega}$, si, i només si, $\{\alpha\} = \sigma(\alpha e) \subseteq \Omega$, si, i només si, $\alpha \in \Omega$.

Si identifiquem $\lambda \in \mathbb{C}$ amb $\lambda e \in A$, cada $\tilde{f} \in H(\Omega)$ pot considerar-se com a $f : A_{\Omega} \cap \langle e \rangle \rightarrow A$ i aleshores (2.30) prova que $\tilde{f}$ pot considerar-se com una extensió de f .

- (d) Si S és un conjunt qualsevol i A és una àlgebra, la col·lecció de totes les funcions definides en S i a valors en A és una àlgebra si es defineixen el producte per escalar, la suma i la multiplicació punt a punt. Per exemple, si u i v apliquen S en A , aleshores

$$(uv)(s) = u(s)v(s), \quad \forall s \in S.$$

Nosaltres aplicarem aquest fet a funcions definides en A_Ω a valors en A .

Els objectes $\tilde{f}(x)$ definits a partir de la definició (2.44) tenen algunes propietats interessants. En resumim les més importants en els següents tres teoremes.

Teorema 2.45. *Siguin A , $H(\Omega)$ i $\tilde{H}(A_\Omega)$ com en la definició (2.44). Aleshores:*

- (1) $\tilde{H}(A_\Omega)$ és una àlgebra complexa.
- (2) L'aplicació $f \mapsto \tilde{f}$ és un isomorfisme d'àlgebres de $H(\Omega)$ en $\tilde{H}(A_\Omega)$ que és continu en el sentit següent:
- Si $f_n \in H(\Omega)$ amb $n \in \mathbb{N}^*$ i $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre els subconjunts compactes de Ω , aleshores

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x) \quad \forall x \in A_\Omega.$$

- (3) Si $u(\lambda) = \lambda$ i $v(\lambda) = 1$ en Ω , aleshores $\tilde{u}(x) = x$ i $\tilde{v}(x) = e$ per tot $x \in A_\Omega$.

Demostració. L'afirmació (3) se segueix del teorema (2.43). En efecte, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $\lambda \mapsto \lambda$ i $v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $\lambda \mapsto 1$ són funcions racionals holomorfes en Ω . Com $x \in A_\Omega$, aleshores $\sigma(x) \subseteq \Omega$. Per tant,

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = x,$$

i

$$\tilde{v}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = e.$$

L'afirmació (1) se segueix de l'observació (d).

Comprovem ara l'afirmació (2). La linealitat de $f \mapsto \tilde{f}$ és clara, en vista de la representació integral (2.29) de la definició (2.44).

Per veure'n la injectivitat, si f pertany al nucli de l'aplicació, $\tilde{f} = 0$. Aleshores com $f(\alpha)e = \tilde{f}(\alpha e)$ per tot $\alpha \in \Omega$ (veure (2.30)), tenim que $f = 0$.

L'exhaustivitat és clara per definició de $\tilde{H}(A_\Omega)$.

Anem a veure'n la continuïtat en el sentit esmentat en l'enunciat. Tenim que

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists n'_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq n'_0, \quad |f_n(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon' \quad \forall \lambda \in K \subseteq \Omega \text{ compacte.}$$

Volem veure que

$$\forall x \in A_\Omega \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq n_0, \quad \|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)\| < \varepsilon.$$

Fent ús del teorema (2.40), de la definició (2.30), del fet que $(\lambda e - x)^{-1}$ és contínua per tot $\lambda \in \Gamma$ (vist en la demostració del teorema (2.26)) i usant el mateix Γ per tot f_n , tenim que

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)\| &= \frac{1}{2\pi i} \left\| \int_{\Gamma} [f_n(\lambda) - f(\lambda)](\lambda e - x)^{-1} d\lambda \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |f_n(\lambda) - f(\lambda)| \|(\lambda e - x)^{-1}\| d\lambda.\end{aligned}$$

Com Γ és compacte i $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ és contínua, el teorema de Weierstrass ens dona que $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ és acotat en Γ , és a dir, $\|(\lambda e - x)^{-1}\| \leq C$ per tot $\lambda \in \Gamma$. Ara donat un $\varepsilon > 0$ prenem $\varepsilon' = \frac{2\pi\varepsilon}{CM}$, on $M = \int_{\Gamma} d\lambda$, i escollim $n_0 = n'_0$. Aleshores per tot $n \geq n_0$, $|f_n(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon'$ i per tant

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |f_n(\lambda) - f(\lambda)| \|(\lambda e - x)^{-1}\| d\lambda < \frac{1}{2\pi} \varepsilon' C \int_{\Gamma} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \varepsilon' CM = \varepsilon.$$

Només ens manca veure que $f \mapsto \tilde{f}$ és multiplicativa. Dit d'una altra manera, si $f \in H(\Omega)$, $g \in H(\Omega)$ i $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ per tot $\lambda \in \Omega$, hem de veure que

$$(2.31) \quad \tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x), \quad \forall x \in A_{\Omega}.$$

En el cas racional, si f i g són funcions racionals sense pols en Ω i $h = fg$, aleshores $h(x) = f(x)g(x)$, i com el teorema (2.43) assegura que $R(x) = \tilde{R}(x)$, (2.31) és vàlida.

En el cas general, el teorema de Runge (teorema 13.9 de [16]) ens permet aproximar f i g per funcions racionals f_n i g_n , uniformement sobre els subconjunts compactes de Ω . Aleshores $f_n g_n$ convergeix a h de la mateixa manera (ja que el producte en $\mathbb{C}$ és continu), i (2.31) se segueix de la continuïtat de l'aplicació $f \mapsto \tilde{f}$. En efecte, com ja tenim el resultat en el cas racional sabem que si $f_n \in H(\Omega)$, $g_n \in H(\Omega)$ i $h_n(\lambda) = f_n(\lambda)g_n(\lambda)$ per tot $\lambda \in \Omega$, aleshores $\tilde{h}_n(x) = \tilde{f}_n(x)\tilde{g}_n(x)$ per tot $x \in A_{\Omega}$. Com $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$, $h_n \rightarrow h$ i $f \rightarrow \tilde{f}$ és contínua, aleshores $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$, $\tilde{g}_n \rightarrow \tilde{g}$ i $\tilde{h}_n \rightarrow \tilde{h}$. Per tant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x)\tilde{g}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n(x) \iff \tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x), \quad \forall x \in A_{\Omega}$$

, on s'ha fet servir que el producte és continu en A . $\square$

Com $H(\Omega)$ és clarament una àlgebra commutativa, pel teorema (2.45) $\tilde{H}(A_{\Omega})$ és també commutativa. Malgrat que això pugui semblar sorprenent ja que $\tilde{f}(x)$ i $\tilde{f}(y)$ no tenen perquè commutar, $\tilde{f}(x)$ i $\tilde{g}(x)$ sí que commuten en A per tot $x \in A_{\Omega}$. Per tant $\tilde{f}\tilde{g} = \tilde{g}\tilde{f}$ per la definició del producte en $\tilde{H}(A_{\Omega})$ (veure (d) en els comentaris a la definició (2.44)).

Teorema 2.46. *Siguin $x \in A_{\Omega}$ i $f \in H(\Omega)$. Aleshores:*

- (a) $\tilde{f}$ és invertible en A si, i només si, $f(\lambda) \neq 0$ per tot $\lambda \in \sigma(x)$.
- (b) $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$.

La part (b) s'anomena **teorema de l'aplicació espectral**.

Demostració. (a) Per a la implicació cap a l'esquerra. Si f no té zeros en $\sigma(x)$, aleshores $g = \frac{1}{f}$ és holomorfa en un conjunt obert Ω_1 tal que $\sigma(x) \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega$. En efecte, $\Omega_1 =$

$\Omega \setminus Z(f)$, on per $Z(f)$ denotem el conjunt de zeros de f en Ω , que és un tancat. Com $fg = 1$ en Ω_1 , el teorema (2.45) (amb Ω_1 en lloc de Ω) prova que $\tilde{g}(x)\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = e$ (aplicant $f \mapsto \tilde{f}$ a la igualtat anterior), i per tant $\tilde{f}(x)$ és invertible en A .

Per veure la implicació cap a la dreta procedim pel contrarecíproc. Si $f(\alpha) = 0$ per algun $\alpha \in \sigma(x)$, aleshores existeix $h \in H(\Omega)$ tal que

$$(\lambda - \alpha)h(\lambda) = f(\lambda), \quad \forall \lambda \in \Omega,$$

la qual cosa implica

$$(2.32) \quad (x - \alpha e)\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{h}(x)(x - \alpha e)$$

pel teorema (2.45) i fent servir que pel lema (2.42), $f \mapsto \tilde{f}$ envia $\lambda - \alpha$ a $x - \alpha e$. Com $x - \alpha e$ no és invertible en A , tampoc ho és $\tilde{f}(x)$ per (2.32).

(b) Fixem $\beta \in \mathbb{C}$. Per definició, $\beta \in \sigma(\tilde{f}(x))$ si, i només si, $\tilde{f}(x) - \beta e$ no és invertible en A . Per (a), aplicat a $f - \beta$ en lloc de f , això succeeix si, i només si, $f - \beta$ té algun zero en $\sigma(x)$, és a dir, si, i només si, existeix $\lambda_0 \in \sigma(x)$ tal que $(f - \beta)(\lambda_0) = 0$, que ocorre si, i només si, $f(\lambda_0) = \beta$ si, i només si, $\beta \in f(\sigma(x))$. $\square$

El teorema de l'aplicació espectral fa possible incloure la composició de funcions entre les operacions del càlcul simbòlic, tal com mostra el següent teorema.

Teorema 2.47. *Siguin $x \in A_\Omega$, $f \in H(\Omega)$, Ω_1 un obert que conté a $f(\sigma(x))$, $g \in H(\Omega_1)$, i $h(\lambda) = g(f(\lambda))$ en Ω_0 , conjunt de tots els $\lambda \in \Omega$ tals que $f(\lambda) \in \Omega_1$. Aleshores $\tilde{f}(x) \in A_{\Omega_1}$ i $\tilde{h}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$. És a dir, $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ si $h = g \circ f$.*

Demostració. Per la part (b) del teorema (2.46), $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x)) \subseteq \Omega_1$, que és equivalent al fet que $\tilde{f}(x) \in A_{\Omega_1}$, i per tant $\tilde{g}(\tilde{f}(x))$ està ben definit.

Fixem un contorn Γ_1 que envolti $f(\sigma(x))$ en Ω_1 . Com f és contínua, existeix un conjunt obert W , amb $\sigma(x) \subseteq W \subseteq \Omega_0$, prou petit per tal que

$$(2.33) \quad \text{Ind}_{\Gamma_1}(f(\lambda)) = 1, \quad \forall \lambda \in W.$$

Aquest fet ens indica que $f(\lambda) \notin \Gamma_1$ per tot $\lambda \in W$. Fixem un contorn Γ_0 que envolti $\sigma(x)$ en W . Si $\zeta \in \Gamma_1$, aleshores $\frac{1}{\zeta - f} \in H(W)$. Per tant usant l'isomorfisme del teorema (2.45), amb W en lloc de Ω , tenim que

$$(2.34) \quad [\zeta e - \tilde{f}(x)]^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} [\zeta - f(\lambda)]^{-1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda, \quad \forall \zeta \in \Gamma_1.$$

Com Γ_1 envolta a $\sigma(\tilde{f}(x))$ en Ω_1 , (2.33) i (2.34) impliquen

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\zeta) [\zeta e - \tilde{f}(x)]^{-1} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\zeta) [\zeta e - \tilde{f}(x)]^{-1} d\zeta \right) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} g(f(\lambda)) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} h(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \tilde{h}(x). \end{aligned}$$

On en la segona igualtat hem fet servir el teorema de Fubini i en la tercera igualtat hem fet servir (2.33) per aplicar el teorema de Cauchy per tal d'obtenir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\zeta) [\zeta e - \tilde{f}(x)]^{-1} d\zeta = g(f(\lambda)).$$

$\square$

2.4.3 Aplicacions

Donem ara algunes aplicacions del càlcul simbòlic que hem desenvolupat fins ara.

Definició 2.48. *Diem que un element $x \in A$ té una **arrel n -èssima** (amb $n \in \mathbb{N}^*$) en A si $x = y^n$ per algun $y \in A$.*

*Si $x = \exp(y)$ per algun $y \in A$, diem que y és un **logaritme** de $x \in A$.*

Observació 2.49. Podem definir l'exponencial d'un element d'una àlgebra de Banach via la sèrie de potències o equivalentment mitjançant la integral de línia de la definició (2.44). A més, com

$$\int_{\Gamma} \sum_{n=0}^k \frac{\lambda^n}{n!} (\lambda e - y)^{-1} d\lambda = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \int_{\Gamma} \lambda^n (\lambda e - y)^{-1} d\lambda = \sum_{n=0}^k \frac{y^n}{n!}$$

i

$$f_k(\lambda) = \sum_{n=0}^k \frac{\lambda^n}{n!} \text{ convergeix uniformement a } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \exp(\lambda) \text{ per tot } \lambda \in \mathbb{C},$$

la continuïtat demostrada en (2.45) ens dona que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{y^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda) (\lambda e - y)^{-1} d\lambda.$$

Per tant ambdues definicions coincideixen.

Teorema 2.50. *Siguin A una àlgebra de Banach, $x \in A$ i suposem que l'espectre $\sigma(x)$ de x no separa 0 de ∞ . Aleshores:*

- (a) x té arrels de tots els ordres en A ,
- (b) x té un logaritme en A , i
- (c) si $\varepsilon > 0$, existeix un polinomi P tal que $\|x^{-1} - P(x)\| < \varepsilon$.

A més, si $\sigma(x)$ està en l'eix real positiu, les arrels en (a) poden escollir-se de manera que satisfacin la mateixa condició.

Demostració. Per hipòtesi, 0 està en la component no acotada del complementari de $\sigma(x)$. Per tant, existeix una funció f , holomorfa en un conjunt obert simplement connex que no conté 0, $\Omega \supseteq \sigma(x)$, que satisfà $\exp(f(\lambda)) = \lambda$. En efecte, com $\lambda \in H(\Omega)$ i $\frac{1}{\lambda} \in H(\Omega)$, una aplicació de la part (h) del teorema 13.11 de [16] ens mostra l'existència d'una tal f . Se segueix del teorema (2.47) que $\exp(\tilde{f}(x)) = x$, per tant $y = \tilde{f}(x)$ és un logaritme de x . Si $0 < |\lambda| < \infty$ per tot $\lambda \in \sigma(x)$, f pot escollir-se real sobre $\sigma(x)$ (prenent la determinació principal del logaritme, que és real sobre els reals) i, aleshores, $\sigma(y) = \sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$ està en l'eix real, pel teorema de l'aplicació espectral. Això prova (b).

Si $z = \exp(\frac{y}{n})$, aleshores $z^n = x$, ja que $[\exp(\frac{f(\lambda)}{n})]^n = \exp(f(\lambda))$ i aleshores pel teorema (2.47), $[\exp(\frac{y}{n})]^n = \exp(y) = x$. Una altra aplicació del teorema de l'aplicació espectral ens dona que $\sigma(z) = \sigma[\exp(\frac{y}{n})] = \exp[\frac{f(\sigma(x))}{n}] = \exp[\frac{\sigma(y)}{n}] \subseteq (0, \infty)$ si $\sigma(y) \subseteq (0, \infty)$. Això prova (a).

Per provar (c), observis que $\frac{1}{\lambda}$ es pot aproximar per polinomis, uniformement sobre algun conjunt obert que contingui $\sigma(x)$ (teorema de Runge) i fent servir la continuïtat vista en el teorema (2.45) obtenim el resultat desitjat. En efecte, com existeix $P_n(\lambda) \rightarrow \frac{1}{\lambda}$ uniformement per tot $\lambda \in \sigma(x) \subseteq \Omega$, aleshores $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x^{-1}$ per tot $x \in A_\Omega$. Per tant, per tot $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que tot P_n amb $n \geq n_0$ és tal que $\|x^{-1} - P_n(x)\| < \varepsilon$. $\square$

Exemple 2.51. Com a cas particular de (b) tenim que $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ és l'exponencial d'una matriu $N \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ si, i només si, 0 no és un valor propi de M si, i només si, M és invertible. La segona equivalència és evident. Per veure la primera equivalència, aplicant (b) a $A = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ obtenim la implicació cap a l'esquerra, i recordant que si $M = \exp(N)$, els valors propis de M són e^{λ_i} , on λ_i són els valors propis de N , tenim la implicació cap a la dreta.

3 Teoria de Gelfand

L'objectiu principal d'aquesta secció és desenvolupar la teoria de Gelfand de les àlgebres de Banach commutatives. Com en la secció precedent sempre suposarem que les àlgebres de Banach estudiades són unitàries.

3.1 Ideals i homomorfismes

Primer de tot recollim alguns resultats bàsics sobre ideals en una àlgebra de Banach commutativa. Comencem considerant una àlgebra complexa commutativa.

Definició 3.1. Es diu que un subconjunt no buit J d'una àlgebra complexa commutativa A és un *ideal* quan

- (a) J és un subespai vectorial de A , i
- (b) $xy \in J$ sempre que $x \in A$ i $y \in J$.

Observacions 3.2. (1) De la definició és clar que tot ideal és una subàlgebra de A .

- (2) Notem que (b) implica que J és tancat pel producte per escalar. En efecte, per (b) si $\lambda e \in A$, i $y \in J$, aleshores $\lambda ey = \lambda y \in J$, per tot $\lambda \in \mathbb{C}$ i per tot $y \in J$. En la definició (3.1) podríem demanar, doncs, només que J sigui tancat per la suma i la part (b).

Definició 3.3. Sigui J un ideal de A . Si $J \neq A$, diem que J és un *ideal propi*.

Exemple 3.4. Clarament $\{0\}$ és un ideal propi de A .

Exemple 3.5. Sigui $\mathcal{C}([0, 1]) := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$, amb la norma del suprem, l'àlgebra de Banach de les funcions complexes contínues en $[0, 1]$. Sigui $J = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : f(x) = 0 \forall x \in [0, \frac{1}{2}]\}$. Tenim que $J \subsetneq \mathcal{C}([0, 1])$, ja que la funció constant igual a 1 pertany a $\mathcal{C}([0, 1])$ però no pertany a J , i J és no buit ja que la funció idènticament nul·la hi pertany. A més, si $f, g \in J$, aleshores $f + g \in J$, ja que en aquest cas $f(x) + g(x) = 0$ per tot $x \in [0, \frac{1}{2}]$. També es compleix que si $\lambda \in \mathbb{C}$ i $f \in J$, aleshores $\lambda f \in J$, ja que $\lambda f(x) = 0$ per tot $x \in [0, \frac{1}{2}]$, i que si $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ i $g \in J$, aleshores $f(x)g(x) = 0$ ja que $g(x) = 0$ per tot $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Així doncs, J és un exemple d'ideal propi no trivial de $\mathcal{C}([0, 1])$.

Definició 3.6. *Diem **ideal maximal** a tot ideal propi I de A que no estigui contingut en cap ideal propi més gran, és a dir, si no existeix cap ideal propi J de A tal que $I \subsetneq J \subsetneq A$.*

Veure'm exemples d'ideals maximals més endavant.

Vegem ara algunes propietats bàsiques dels ideals.

Proposició 3.7. *Sigui A una àlgebra complexa commutativa. Aleshores:*

- (a) *Cap ideal propi de A conté elements invertibles de A .*
- (b) *Si a més A és una àlgebra de Banach, per tot J ideal de A , la seva adherència $\overline{J}$ és també un ideal. Si J és propi, aleshores $\overline{J}$ també.*

Demostració. (a) Sigui $J \subsetneq A$ un ideal propi i sigui $x \in G(A)$. Si $x \in J$, aleshores com $x^{-1} \in A$, $x^{-1}x = e \in J$. Per tant, per tot $y \in A$, $ye = y \in J$, de manera que $A \subseteq J$ i per tant $J = A$, contradint l'assumpció que J és propi.

(b) Tenim que $J \subseteq \overline{J} \subseteq A$. Vegem que $\overline{J}$ és un ideal. Si $x, y \in \overline{J}$, aleshores existeixen $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq J$ tals que $x_n \rightarrow x$ i $y_n \rightarrow y$. Com la suma és contínua i $\overline{J}$ és tancat, aleshores $x_n + y_n \rightarrow x + y \in \overline{J}$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ i $x \in \overline{J}$, aleshores existeix $(x_n)_n \subseteq J$ tal que $x_n \rightarrow x$. Com el producte per escalar és continu i $\overline{J}$ és tancat, aleshores $\lambda x_n \rightarrow \lambda x \in \overline{J}$. Finalment, si $x \in A$ i $y \in \overline{J}$, aleshores existeix $(y_n)_n \subseteq J$ tal que $y_n \rightarrow y$. Com el producte és continu i $\overline{J}$ és tancat, aleshores $xy_n \rightarrow xy \in \overline{J}$. Queda doncs provat que $\overline{J}$ és un ideal de A .

A més, si J és un ideal propi, aleshores verifica que $J \subseteq G(A)^c$ i $G(A)^c$ és tancat en A . Ara fent servir que $\overline{J}$ és la intersecció de tots els tancats que contenen J , tenim que $\overline{J} \subseteq G(A)^c$. Per tant, $\overline{J} \neq A$, és a dir, és propi. $\square$

Observacions 3.8. (1) De la part (a) de la proposició (3.7) se segueix que si $e \in J$, aleshores $J = A$, és a dir, que si J és propi, aleshores és una subàlgebra no unitària de A (veure (1) de l'observació (3.2)).

- (2) Tot element no invertible x de A pertany a un ideal propi, per exemple, $J = \{zx : z \in A\} = \langle x \rangle$. Així doncs, $x \in A$ és invertible si, i només si, x no pertany a cap ideal propi.
- (3) En particular si una àlgebra de Banach A no conté cap ideal propi no trivial ($\neq \{0\}$), aleshores A és un cos.

Per a la demostració del proper teorema farem ús del següent resultat. Se'n pot trobar una demostració (que utilitza l'axioma de l'elecció), per exemple, en [16].

Teorema 3.9 (Teorema de maximalitat de Hausdorff). *Tot conjunt parcialment ordenat no buit $\mathcal{P}$ conté un subconjunt totalment ordenat $\mathcal{Q}$ que és maximal respecte de la propietat de ser totalment ordenat.*

Teorema 3.10. *Sigui A una àlgebra complexa commutativa amb unitat. Aleshores:*

- (a) *Tot ideal propi de A està contingut en un ideal maximal de A .*
- (b) *Si a més A és una àlgebra de Banach, aleshores tot ideal maximal de A és tancat.*

Demostració. (a) Sigui J un ideal propi de A . Sigui $\mathcal{P}$ la col·lecció de tots els ideals propis de A que contenen J . Ordenem $\mathcal{P}$ parcialment per la inclusió de conjunts; sigui $\mathcal{Q}$ una subcol·lecció maximal totalment ordenada de $\mathcal{P}$ (l'existència de $\mathcal{Q}$ queda assegurada pel teorema de maximalitat de Hausdorff (3.9)), i sigui M la unió de tots els elements de $\mathcal{Q}$. Com que és la unió d'una col·lecció totalment ordenada d'ideals, M és un ideal. En efecte, si $x, y \in M$, aleshores existeixen $I, J \in \mathcal{Q}$ tals que $x \in I$ i $y \in J$. Com l'ordre en $\mathcal{Q}$ és total, suposem sense pèrdua de generalitat que $I \subseteq J$. Aleshores com $x, y \in J$, tenim que $x + y \in J \subseteq M$. A més si $\lambda \in \mathbb{C}$ i $x \in M$, aleshores existeix $I \in \mathcal{Q}$ tal que $x \in I$, i per tant $\lambda x \in I \subseteq M$. Finalment, si $x \in A$ i $y \in M$, aleshores existeix $I \in \mathcal{Q}$ tal que $y \in I$, i per tant $xy \in I \subseteq M$. Evidentment, $J \subseteq M$, i $M \neq A$ ja que cap element de $\mathcal{P}$ conté la unitat de A . Ara, la maximalitat de $\mathcal{Q}$ implica que M és un ideal maximal de A . En efecte, si existeix I_0 ideal propi de A tal que $M \subsetneq I_0 \subsetneq A$, aleshores I_0 conté J i per tant $I_0 \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ (com I_0 inclou estrictament M , no pot pertànyer a $\mathcal{Q}$). Però com $M \subsetneq I_0$, i és la unió de tots els elements de $\mathcal{Q}$, per tot $I \in \mathcal{Q}$, $I \subsetneq I_0$. Això ens dona que la col·lecció formada per tots els $I \in \mathcal{Q}$ i aquest I_0 és una col·lecció totalment ordenada de $\mathcal{P}$ més gran que $\mathcal{Q}$, contradient la maximalitat de $\mathcal{Q}$.

(b) Sigui M un ideal maximal de A . Com M és un ideal propi, aleshores $\overline{M}$ és un ideal propi de A . Donat que $M \subseteq \overline{M}$, la maximalitat de M prova que $M = \overline{M}$, d'on se segueix que M és tancat. $\square$

Observació 3.11. Recollint alguns dels resultats precedents, podem enunciar el següent:

Un element x d'una àlgebra de Banach commutativa A és invertible si, i només si, x no pertany a cap ideal maximal. En particular, si A no admet cap ideal maximal no nul, aleshores és un cos.

3.1.1 Homomorfismes i àlgebres quocient

En aquesta subsecció farem la construcció d'unes àlgebres de Banach que ens seran molt útils per demostrar un dels fets clau de la teoria de Gelfand. Comencem abans amb un resultat senzill.

Proposició 3.12. *Siguin A i B àlgebres de Banach commutatives i ϕ un homomorfisme de A en B . Aleshores en nucli de ϕ és un ideal de A , que és tancat quan ϕ és continu.*

Demostració. Tenim que $\ker(\phi) \subseteq A$ i $\ker(\phi) \neq \emptyset$ ja que $0 \in \ker(\phi)$. Si $x, y \in \ker(\phi)$, aleshores $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) = 0 + 0 = 0$, per tant $x + y \in \ker(\phi)$. També, si $\lambda \in \mathbb{C}$ i $x \in \ker(\phi)$, aleshores $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x) = \lambda 0 = 0$, per tant $\lambda x \in \ker(\phi)$. Finalment, si $x \in A$ i $y \in \ker(\phi)$, aleshores $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = \phi(x)0 = 0$, per tant $xy \in \ker(\phi)$. Així doncs queda comprovat que $\ker(\phi)$ és un ideal de A .

Sigui $(x_n)_n \subseteq A$, tal que $x_n \in \ker(\phi)$ i $x_n \rightarrow x$. Si ϕ és continu, $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi(x)$, aleshores $x \in \ker(\phi)$, i per tant $\ker(\phi)$ és tancat en A . Això prova la segona afirmació. $\square$

Ara anem a abordar la construcció de les àlgebres de Banach esmentades a l'inici. Abans però recordem la construcció següent.

Definició 3.13. *Sigui E un espai vectorial i F un subespai vectorial de E . Definim una relació binària $\sim$ a E per*

$$u \sim v \iff u - v \in F.$$

Clarament $\sim$ és d'equivalència. Designem el conjunt quocient per E/F i per $\pi(u)$ la classe a E/F del vector u de E . Tenim que $\pi(u) = \{u + w : w \in F\}$. Definim a E/F una suma i un producte per escalar per

$$(3.1) \quad \pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y), \quad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x), \quad \forall x, y \in E \text{ i } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Es comprova fàcilment que aquestes operacions estan ben definides, és a dir, que no depenen del representant escollit a cada classe. El zero de E/F és $\pi(0) = F$. Amb la suma i el producte per escalar que hem definit, doncs, E/F és clarament un espai vectorial, que s'anomena **espai vectorial quocient** de E per F . A més per (3.1), π és una aplicació lineal exhaustiva de E en E/F que té F per nucli. Aquesta aplicació π s'anomena **aplicació quocient** de E en E/F .

Ara aquest espai vectorial es pot equipar amb una multiplicació i una norma que el converteixen en una àlgebra de Banach.

Teorema 3.14. *Sigui J un ideal propi tancat d'una àlgebra de Banach commutativa A , i $\pi : A \rightarrow A/J$ l'aplicació quocient. Aleshores A/J és una àlgebra de Banach i π un homomorfisme.*

Demostració. Definim en A/J l'aplicació $\|\pi(x)\|_{A/J} = \inf\{\|x - z\|_A : z \in J\}$. Vegem que és una norma en A/J . Tenim que

$$\|\pi(x)\|_{A/J} = \inf\{\|x - z\|_A : z \in J\} = 0 \implies \forall \varepsilon_n > 0 \exists z_n \in J : \|x - z_n\|_A < \varepsilon_n,$$

on $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$. Així doncs

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - z_n\|_A \leq 0 \iff z_n \rightarrow x,$$

on $x \in J$ per ser J tancat. Per tant, $\pi(x) = \pi(0)$. Clarament $\|\pi(0)\|_{A/J} = \inf\{\|z\|_A : z \in J\} = 0$, ja que $0 \in J$. A més,

$$\begin{aligned} \|\lambda\pi(x)\|_{A/J} &= \|\pi(\lambda x)\|_{A/J} = \inf\{\|\lambda x - z\|_A : z \in J\} = \inf\{\|\lambda(x - \frac{z}{\lambda})\|_A : z \in J\} = \\ &= \inf\{\|\lambda(x - z')\|_A : z' \in J\} = \inf\{|\lambda| \|(x - z')\|_A : z' \in J\} = \\ &= |\lambda| \inf\{\|(x - z')\|_A : z' \in J\} = |\lambda| \|\pi(x)\|_{A/J}, \end{aligned}$$

on $z' = \frac{z}{\lambda}$ i $\lambda \neq 0$ (el cas $\lambda = 0$ és immediat). Finalment,

$$\begin{aligned} \|\pi(x) + \pi(y)\|_{A/J} &= \|\pi(x + y)\|_{A/J} = \inf\{\|x + y - z\|_A : z \in J\} = \\ &= \inf\{\|x + y - z + w - w\|_A : z \in J\} \leq \inf\{\|x - z + w\|_A + \\ &+ \|y - w\|_A : z, w \in J\} = \inf\{\|x - z'\|_A + \|y - w\|_A : z', w \in J\} \\ &= \inf\{\|x - z'\|_A : z' \in J\} + \inf\{\|y - w\|_A : w \in J\} = \\ &= \|\pi(x)\|_{A/J} + \|\pi(y)\|_{A/J}, \end{aligned}$$

on $z' = z - w$ i $w \in J$. L'aplicació $\|\pi(x)\|_{A/J}$ és doncs una norma, que s'anomena **norma quocient**.

Vegem ara que amb aquesta norma A/J és un espai de Banach. Sigui $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A/J$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_{A/J} < \infty$. Com π és exhaustiva, per tot $u_n \in A/J$ existeix $y_n \in A$ tal que $\pi(y_n) = u_n$. A més la definició de la norma quocient ens garanteix que per tot $\varepsilon > 0$ existeix $z(\varepsilon) \in J$ tal que $\|y_n - z(\varepsilon)\|_A \leq \|u_n\|_{A/J} + \varepsilon$. Prenent $x_n = y_n - z(\varepsilon)$ i

$\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, concloem que existeix $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\pi(x_n) = u_n$ i $\|x_n\|_A \leq \|u_n\|_{A/J} + \frac{1}{2^n}$. Per tant $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_A < \infty$, de manera que com A és un espai de Banach existeix $x \in A$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$. Com $\|\pi(x)\|_{A/J} = \inf\{\|x - z\|_A : z \in J\}$ i $0 \in J$, aleshores $\|x\| \in \{\|x - z\|_A : z \in J\}$ i per tant $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. Això demostra que π és contínua. La continuïtat de π implica que $\sum_{n=0}^{\infty} \pi(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \pi(x)$. Hem provat doncs que tota sèrie absolutament convergent en A/J és convergent en A/J , i per tant que A/J és un espai de Banach.

Definim ara una multiplicació en A/J per

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \quad \forall x, y \in A.$$

Vegem que està ben definit, és a dir, que no depèn del representant escollit. Siguin $\pi(x') = \pi(x)$ i $\pi(y') = \pi(y)$, aleshores $x' - x \in J$ i $y' - y \in J$. Ara la identitat

$$x'y' - xy = (x' - x)y + x(y' - y)$$

prova que $x'y' - xy \in J$. Per tant, $\pi(x'y') = \pi(xy)$.

Ara la comprovació que A/J amb aquesta multiplicació és una àlgebra complexa commutativa és rutinària. Donada la definició de les operacions en A/J , és evident que π és un homomorfisme. A més, com $\pi(e)$ és la unitat en A/J , ja que $\pi(x)\pi(e) = \pi(e)\pi(x) = \pi(x)$ per tot $x \in A$, també es verifica que π envia la unitat de A a la unitat de A/J .

Ens queda només per veure que la norma quocient satisfà la desigualtat multiplicativa (2.4) i la propietat (2.6).

Pel que fa a la primera, suposem que $x_i \in A$ ($i = 1, 2$) i $\delta > 0$. Aleshores

$$(3.2) \quad \|x_i + y_i\|_A \leq \|\pi(x_i)\|_{A/J} + \delta \quad (i = 1, 2)$$

per algun $y_i \in J$, per definició de la norma quocient. Com

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \in \pi(x_1 x_2)$$

tenim que

$$\|\pi(x_1 x_2)\|_{A/J} = \|\pi[(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)]\|_{A/J} = \inf\{\|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - z\|_A : z \in J\}.$$

Donat que $\|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\|_A \in \{\|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - z\|_A : z \in J\}$, aleshores

$$\|\pi(x_1 x_2)\|_{A/J} \leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\|_A \leq \|x_1 + y_1\|_A \|x_2 + y_2\|_A,$$

de manera que (3.2) implica la desigualtat multiplicativa

$$(3.3) \quad \|\pi(x_1)\pi(x_2)\|_{A/J} \leq \|\pi(x_1)\|_{A/J} \|\pi(x_2)\|_{A/J}.$$

En efecte,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \|\pi(x_1)\pi(x_2)\|_{A/J} &= \|\pi(x_1 x_2)\|_{A/J} \leq \|\pi(x_1)\|_{A/J} \|\pi(x_2)\|_{A/J} + \delta \|\pi(x_2)\|_{A/J} + \delta^2 + \\ &\quad + \delta \|\pi(x_1)\|_{A/J}, \end{aligned}$$

i prenent el límit $\delta \rightarrow 0$ en (3.4) arribem a (3.3).

Finalment, com $\pi(e) \neq 0$ (si $\pi(e) = 0$, aleshores $e \in J$, que no pot ser ja que e és invertible i J és un ideal propi), aleshores per (3.3), $\|\pi(e^2)\|_{A/J} \leq \|\pi(e)\|^2$, per tant

$$1 \leq \frac{\|\pi(e)\|_{A/J}^2}{\|\pi(e^2)\|_{A/J}} = \frac{\|\pi(e)\|_{A/J}^2}{\|\pi(e)\|_{A/J}} = \|\pi(e)\|_{A/J},$$

on hem usat que $\pi(e)^2 = \pi(e)\pi(e) = \pi(ee) = \pi(e)$. A més, com $\|\pi(x)\|_{A/J} \leq \|x\|_A$ per tot $x \in A$, es té que $\|\pi(e)\|_{A/J} \leq \|e\|_A = 1$. Obtenim doncs que $\|\pi(e)\|_{A/J} = 1$. $\square$

La part (a) del següent teorema constitueix un dels fets clau de tota la teoria de Gelfand.

Teorema 3.15. *Sigui A una àlgebra de Banach commutativa, i sigui Δ el conjunt de tots els homomorfismes complexos de A . Aleshores es verifiquen les propietats següents:*

- (a) *Tot ideal maximal de A és el nucli d'algun $h \in \Delta$.*
- (b) *Si $h \in \Delta$, el nucli de h és un ideal maximal de A .*
- (c) *Un element $x \in A$ és invertible en A si, i només si, $h(x) \neq 0$ per tot $h \in \Delta$.*
- (d) *$\lambda \in \sigma(x)$ si, i només si, $h(x) = \lambda$ per algun $h \in \Delta$.*

Demostració. (a) Sigui M un ideal maximal de A . Aleshores pel teorema (3.10), M és tancat, de manera que pel teorema (3.14) A/M és una àlgebra de Banach. Escollim $x \in A$, $x \notin M$ i definim

$$J = \{ax + y : a \in A, y \in M\}.$$

Aleshores J és un ideal de A que conté M , ja que $x \in J$ (prendre $a = e$ i $y = 0$). Per tant, la maximalitat de M implica que $J = A$, de manera que

$$(3.5) \quad ax + y = e \text{ per algun } a \in A \text{ i } y \in M.$$

Si $\pi : A \rightarrow A/M$ és l'homomorfisme de pas al quocient, aplicant-lo a (3.5) se segueix que $\pi(a)\pi(x) = \pi(e)$, amb $\pi(x) \neq \pi(0)$ ja que $x \notin M$. Tenim doncs que tot element no nul $\pi(x)$ de l'àlgebra de Banach A/M és invertible en A/M . Per tant, pel teorema de Gelfand-Mazur (2.32), existeix un isomorfisme j de A/M en $\mathbb{C}$. Definim $h = j \circ \pi$. Aleshores $h \in \Delta$, i M és el nucli de h . En efecte, si $m \in M$, aleshores $h(m) = j(\pi(m)) = j(0) = 0$ i per tant $m \in \ker(h)$, on hem usat que j és lineal i $m \in M = \ker(\pi)$. Si $m \in \ker(h)$, aleshores $h(m) = 0 = j(\pi(m))$, per tant $\pi(m) \in \ker(j) = \{\pi(0)\}$, de manera que $m \in M$.

(b) Si $h \in \Delta$, aleshores $h^{-1}(0)$ és un ideal de A que és maximal per tenir codimensió 1. En efecte, d'una banda $h^{-1}(0) = \{x \in A : h(x) = 0\} = \ker(h)$, que prova que és un ideal de A . D'altra banda, $\text{codim}(\ker(h)) = \dim(A/\ker(h))$. Pel teorema d'isomorfia, $A/\ker(h) \cong \text{Im}(h)$. Com $\text{Im}(h) \subseteq \mathbb{C}$, $\dim(\text{Im}(h)) \leq 1$, i $0 < \dim(\text{Im}(h))$, ja que $h \neq 0$ (ho demanem en la definició d'homomorfisme complex). Per tant $\dim(\text{Im}(h)) = 1$, de manera que $\dim(A/\ker(h)) = 1$. Ara, si existeix un ideal propi I de A tal que $\ker(h) \subsetneq I \subsetneq A$, aleshores d'una banda $\dim(A) = \dim(\ker(h)) + \dim(A/\ker(h))$ i de l'altra $\dim(A) = \dim(I) + \dim(A/I)$. Com $\dim(\ker(h)) < \dim(I)$, això implica que $\dim(A/I) < \dim(A/\ker(h)) = 1$, per tant $\dim(A/I) = 0$, que implica que $A = I$, contradicent que I sigui propi. Així doncs, $\ker(h)$ és maximal.

(c) Si x és invertible en A i $h \in \Delta$, aleshores $h(x)h(x^{-1}) = h(xx^{-1}) = h(e) = 1$, per tant $h(x) \neq 0$. Això prova la implicació cap a la dreta.

Si x no és invertible, aleshores el conjunt $\{ax : a \in A\}$ no conté e (i per tant és diferent de A), per tant és un ideal propi contingut en un ideal maximal (pel teorema (3.10)), que és el nucli d'algun $h \in \Delta$ per (a). Com $x \in \ker(h)$, aleshores $h(x) = 0$. Això prova la implicació cap a l'esquerra.

(d) Si $\lambda \notin \sigma(x)$, aleshores $x - \lambda e \in G(A)$. Prenem $h \in \Delta$, aleshores $h(x - \lambda e)h((x - \lambda e)^{-1}) = h(e) = 1$, de manera que per tot $h \in \Delta$, $h(x - \lambda e) \neq 0$. Així doncs, $h(x) \neq \lambda$. Això prova la implicació cap a l'esquerra.

Per veure la implicació cap a la dreta, fem el mateix argument que per veure la implicació cap a l'esquerra en (c) canviant x per $x - \lambda e$. $\square$

Observació 3.16. Podem recollir el que hem vist fins ara en el següent resultat:

Sigui A una àlgebra de Banach commutativa amb unitat. Aleshores pel teorema (3.10), l'ideal propi $\{0\}$ està contingut en un ideal maximal que, per la part (a) del teorema (3.15) és el nucli d'un homomorfisme complex de A . Això garanteix que per aquestes àlgebres de Banach, $\Delta \neq \emptyset$, o equivalentment, el conjunt de tots els ideals maximals és no buit.

Anem a veure una aplicació del teorema (3.15). Aquesta aplicació és un teorema que té a veure amb funcions complexes definides en $\mathbb{R}^n$ que es poden expressar com a suma de sèries trigonomètriques absolutament convergents. És interessant notar que les afirmacions que es fan en aquest teorema no involucren conceptes algebraics però que es poden demostrar fent servir mètodes provinents de les àlgebres de Banach.

Teorema 3.17 (Lema de Wiener). *Sigui f una funció complexa definida en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$(3.6) \quad f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{im \cdot x}, \text{ amb } \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_m| < \infty.$$

Si $f(x) \neq 0$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$, aleshores

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} b_m e^{im \cdot x}, \text{ amb } \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |b_m| < \infty.$$

Demostració. Sigui W l'espai de les funcions de la forma (3.6), normat per

$$\|f\| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_m|.$$

Anem a provar que W és una àlgebra de Banach commutativa respecte el producte punt a punt, amb unitat donada per la funció constant 1. Aquesta àlgebra de Banach s'anomena *àlgebra de Wiener*.

Sigui $l^1(\mathbb{Z}^n)$ l'espai de Banach de les successions complexes indexades per $\mathbb{Z}^n$ absolutament convergents. Considerem l'aplicació $W \rightarrow l^1(\mathbb{Z}^n)$ definida per $f \mapsto \hat{f}(m)$, on $\hat{f}(m)$ és el coeficient de Fourier d'ordre $m \in \mathbb{Z}^n$ de f . Té sentit parlar dels coeficients de Fourier de $f \in W$ ja que $W \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T}^n) \subseteq L^1(\mathbb{T}^n)$. La segona inclusió és evident. Per a veure la primera, considerem $f_m(x) = a_m e^{im \cdot x}$, que verifica $|f_m(x)| \leq |a_m|$, i aplicant-hi el criteri M de Weierstrass i el teorema de convergència uniforme i continuïtat arribem a la conclusió desitjada.

L'aplicació $f \mapsto \hat{f}(m)$ és un isomorfisme isomètric d'espais vectorials. Clarament l'aplicació és lineal i injectiva. A més és exhaustiva ja que donada $a_m \in l^1(\mathbb{Z}^n)$, la sèrie $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{im \cdot x}$ és absolutament convergent, i denotant per g la seva suma, tenim que $a_m = \hat{g}(m)$. També és una isometria, ja que $\|f\|_W = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_m|$ i $\|a_m\|_1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_m|$. Això prova que W és un espai de Banach.

Si $f, g \in W$ tenim que,

$$f(x)g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{im \cdot x} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} b_m e^{im \cdot x} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k b_{m-k} \right) e^{im \cdot x}.$$

A més, intercanviant l'ordre de sumació

$$\|fg\| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k b_{m-k} \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_k| |b_{m-k}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |b_{m-k}| = \|f\| \|g\|.$$

Això prova que el producte està ben definit i que la norma satisfà la desigualtat (2.4).

Clarament $1 \in W$, ja que $1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{im \cdot x}$ per a $a_m = \delta_{m0}$. A més, $\|1\| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\delta_{m0}| = 1$.

Per cada x , l'avaluació $f \mapsto f(x)$ és un homomorfisme complex de W . La hipòtesi sobre la funció donada f és que cap avaluació s'anul·la. Si podem provar que W no té cap altre homomorfisme complex, la part (c) del teorema (3.15) implicarà que f és invertible en A , que és exactament la conclusió desitjada.

Per a $r = 1, \dots, n$, sigui $g_r(x) = e^{ix_r}$, on x_r és la r -èssima coordenada de x . Aleshores g_r i $\frac{1}{g_r}$ pertanyen a W i tenen norma 1. En efecte,

$$g_r(x) = e^{ix_r} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{im \cdot x},$$

amb

$$a_m = \begin{cases} 1, & \text{si } m = (0, \dots, \overset{r}{1}, \dots, 0), \\ 0, & \text{en cas contrari} \end{cases},$$

i

$$\frac{1}{g_r}(x) = e^{-(ix_r)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{im \cdot x},$$

amb

$$a_m = \begin{cases} 1, & \text{si } m = (0, \dots, \overset{r}{-1}, \dots, 0). \\ 0, & \text{en cas contrari} \end{cases}.$$

Si $h \in \Delta$, per la part (c) del teorema (2.17) tenim que

$$|h(g_r)| \leq 1 \quad \text{i} \quad \left| \frac{1}{h(g_r)} \right| = \left| h\left(\frac{1}{g_r}\right) \right| \leq 1,$$

on la darrera desigualtat implica que $|h(g_r)| \geq 1$, i per tant $|h(g_r)| = 1$. Per tant existeixen nombres reals $y_r \in [0, 2\pi]$ tals que

$$(3.7) \quad h(g_r) = \exp(iy_r) = g_r(y), \quad \text{per a } 1 \leq r \leq n,$$

on $y = (y_1, \dots, y_n)$. Si P és un polinomi trigonomètric (que vol dir, per definició, que P és una combinació lineal finita de productes de potències enteres de les funcions g_r i $\frac{1}{g_r}$), aleshores (3.7) implica

$$(3.8) \quad h(P) = P(y),$$

per ser h lineal i multiplicativa. Com h és contínua en A (teorema (2.17)) i com el conjunt de tots els polinomis trigonomètrics és dens en A , (3.8) implica que $h(f) = f(y)$ per tot $f \in W$. En efecte, és clar que els polinomis trigonomètrics són elements de W , i per tant la seva adherència està inclosa en W . A més, és clar de la definició de la norma, que la successió de polinomis trigonomètrics $P_N(x) = \sum_{m \in [-N, N]^n} a_m e^{im \cdot x}$ convergeix a f . Això

prova que W està inclòs en l'adherència del conjunt de tots els polinomis trigonomètrics, i per tant que aquests són densos en W . Com per (3.8), $h(P_N) = P_N(y)$, aleshores

$$f(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} h(P_N) = h(\lim_{N \rightarrow \infty} P_N) = h(f),$$

on hem fet servir la continuïtat de h .

Per tant h és l'avaluació en y , i això conclou la demostració. $\square$

3.2 Transformada de Gelfand

En aquesta subsecció dotarem Δ d'una topologia compacta de Hausdorff. L'estudi de les àlgebres de Banach commutatives quedarà aleshores reduït en gran mesura a l'estudi d'àlgebres de funcions complexes contínues sobre Δ , amb la suma i la multiplicació definides punt a punt.

Definicions 3.18. *Sigui Δ el conjunt de tots els homomorfismes complexos d'una àlgebra de Banach commutativa A . La fórmula*

$$\hat{x}(h) = h(x), \quad \forall h \in \Delta$$

*assigna a cada $x \in A$ una funció $\hat{x} : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$. Anomenem $\hat{x}$ la **transformada de Gelfand** de x .*

*Sigui $\hat{A}$ el conjunt de totes les $\hat{x}$, per a $x \in A$. La **topologia de Gelfand** de Δ és la topologia inicial induïda per $\hat{A}$, és a dir, és la topologia menys fina que fa contínua $\hat{x}$, per tot $x \in A$. Aleshores òbviament $\hat{A} \subseteq \mathcal{C}(\Delta)$, àlgebra de totes les funcions complexes contínues sobre Δ . A més, una base d'entorns de $h_0 \in \Delta$ ve donada per la col·lecció de conjunts*

$$\mathcal{U}(h_0, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \{h \in \Delta : |h(x_i) - h_0(x_i)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

on $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n$ són elements arbitraris de A .

*Com existeix una correspondència bijectiva entre els ideals maximals de A i els elements de Δ (teorema (3.15)), Δ , dotat amb la seva topologia de Gelfand, s'anomena usualment l'**espai d'ideals maximals** de A .*

El terme "transformada de Gelfand" s'usa també per a l'aplicació exhaustiva $x \mapsto \hat{x}$ de A en $\hat{A}$.

*El **radical** de A , denotat per $\text{rad}(A)$, és la intersecció de tots els ideals maximals de A . Si $\text{rad}(A) = \{0\}$, es diu que A és **semisimple**.*

Teorema 3.19. *Sigui Δ l'espai d'ideals maximals d'una àlgebra de Banach commutativa A . Aleshores se satisfan les propietats següents:*

- (a) Δ és un espai de Hausdorff compacte.
- (b) La transformada de Gelfand és un epimorfisme de A en una subàlgebra $\hat{A}$ de $\mathcal{C}(\Delta)$, que té per nucli $\text{rad}(A)$. La transformada de Gelfand és doncs un isomorfisme si, i només si, A és semisimple.
- (c) Per cada $x \in A$, la imatge de $\hat{x}$ és l'espectre de $\sigma(x)$. Així doncs

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|,$$

on $\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)|$, i $x \in \text{rad}(A)$ si, i només si, $\rho(x) = 0$.

Demostració. Provarem primer les parts (b) i (c).

(b) Sigui $x \in A$, $y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ i $h \in \Delta$. Aleshores,

$$(\alpha x)^\wedge(h) = h(\alpha x) = \alpha h(x) = \alpha \hat{x}(h),$$

$$(x + y)^\wedge(h) = h(x + y) = h(x) + h(y) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = (\hat{x} + \hat{y})(h).$$

Per tant la transformada de Gelfand és lineal. A més,

$$(xy)^\wedge(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = (\hat{x}\hat{y})(h),$$

i $\hat{x}\hat{e} = \hat{x}$, ja que

$$(\hat{x}\hat{e})(h) = \hat{x}(h)\hat{e}(h) = h(x)h(e) = h(x) \cdot 1 = h(x) = \hat{x}(h).$$

Així doncs hem vist que la transformada de Gelfand és multiplicativa i envia la unitat de A a la unitat de $\hat{A}$. Per tant $x \mapsto \hat{x}$ és un homomorfisme. Que és exhaustiu és evident de la definició de $\hat{A}$.

Anem a veure quin és el nucli de l'aplicació. El zero de $\hat{A}$ és $\hat{0}(h) = h(0) = 0$ per tot $h \in \Delta$, ja que $(\hat{x} + \hat{0})(h) = \hat{x}(h) + \hat{0}(h) = \hat{x}(h) + 0 = \hat{x}(h)$. Per tant, x és del nucli si $x \mapsto \hat{0}$. Així doncs els elements $x \in A$ del nucli satisfan $h(x) = 0$ per tot $h \in \Delta$, és a dir, $x \in \ker(h)$ per tot $h \in \Delta$, de manera que $x \in \bigcap_{h \in \Delta} \ker(h)$. Pel teorema (3.15) aquesta és la intersecció de tots els ideals maximals de A , és a dir, $\text{rad}(A)$.

(c) Si λ està en la imatge de $\hat{x}$, aleshores $\lambda = \hat{x}(h) = h(x)$ per algun $h \in \Delta$. Per la part (d) del teorema (3.15), això succeeix si, i només si, $\lambda \in \sigma(x)$.

Amb el que acabem de veure, clarament $\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \rho(x) \leq \|x\|$. A més $x \in \text{rad}(A)$ si, i només si, $\rho(x) = 0$. En efecte,

$$\begin{aligned} x \in \text{rad}(A) &\iff x \in \bigcap_{h \in \Delta} \ker(h) \iff h(x) = 0, \forall h \in \Delta \iff \hat{x}(h) = 0, \forall h \in \Delta \iff \\ &|\hat{x}(h)| = 0, \forall h \in \Delta \iff 0 = \|\hat{x}\|_\infty = \rho(x). \end{aligned}$$

(a) Sigui A^* l'espai dual de A (considerat com un espai de Banach, és a dir, considerant només les formes lineals contínues), i sigui $K = \{\Lambda \in A^* : \|\Lambda\|_{A^*} \leq 1\}$, és a dir, la bola unitat tancada en la topologia de la norma de A^* . Pel teorema de Banach-Alaoglu (veure, per exemple el teorema 3.15 de [17]), K és feblement*-compacte. Per la part (c) del teorema (2.17), $\Delta \subseteq K$. En efecte, si $h \in \Delta$, aleshores $|h(x)| \leq 1$ per tot $x \in A$ tal que $\|x\|_A \leq 1$ si, i només si, $\|h\|_{A^*} \leq 1$. És clar que la topologia de Gelfand de Δ , és la restricció a Δ de la topologia feble* de A^* (per recordar la definició d'aquesta topologia veure, per exemple, la secció 3.14 de [17]). Per tant, n'hi ha prou amb demostrar que Δ és un subconjunt feblement*-tancat de A^* . Anem a veure que $\overline{\Delta} \subseteq \Delta$. Sigui Λ_0 un element de l'adherència feble* de Δ . Com $\overline{\Delta} \subseteq A^*$, aleshores $\Lambda_0 : A \rightarrow \mathbb{C}$ i és lineal. Hem de provar que

$$(3.9) \quad \Lambda_0(xy) = \Lambda_0 x \Lambda_0 y, \quad \forall x, y \in A,$$

i

$$(3.10) \quad \Lambda_0 e = 1.$$

(Observis que (3.10) és necessària. Si no Λ_0 podria ser l'homomorfisme nul, que no pertany a Δ).

Fixem $x \in A$, $y \in A$, $\varepsilon > 0$. Definim

$$W = \{\Lambda \in A^* : |\Lambda z_i - \Lambda_0 z_i| < \varepsilon \text{ per } 1 \leq i \leq 4\},$$

on $z_1 = e$, $z_2 = x$, $z_3 = y$ i $z_4 = xy$. Aleshores W és un entorn feble* de Λ_0 que conté per tant un $h \in \Delta$. En efecte, pel que fa a la primera afirmació, $\Lambda_0 \in W$ i $W = \bigcap_{i=1}^4 f_{z_i}^{-1}(B_\varepsilon(\Lambda_0 z_i))$, que és la intersecció finita d'antiimatges d'oberts de $\mathbb{C}$ per aplicacions contínues ($f_{z_i} : A^* \rightarrow \mathbb{C}$ definides per $\Lambda \mapsto \Lambda z_i$) i per tant és feblement*-obert. Com tot obert és entorn de qualsevol dels seus punts queda provada la primera afirmació. Per a comprovar la segona afirmació, com $\Lambda_0 \in \overline{\Delta}$, per tot U feblement*-obert tal que $\Lambda_0 \in U$, $U \cap \Delta \neq \emptyset$, aleshores com W és feblement*-obert i $\Lambda_0 \in W$, $W \cap \Delta \neq \emptyset$, de manera que existeix $h \in \Delta$ tal que $h \in W$.

Per aquest h ,

$$|1 - \Lambda_0 e| = |h(e) - \Lambda_0 e| < \varepsilon,$$

que dona (3.10), i

$$\begin{aligned} \Lambda_0(xy) - \Lambda_0(x)\Lambda_0(y) &= [\Lambda_0(xy) - h(xy)] + [h(x)h(y) - \Lambda_0(x)\Lambda_0(y)] = \\ &= [\Lambda_0(xy) - h(xy)] + [h(y) - \Lambda_0 y]h(x) + [h(x) - \Lambda_0 x]\Lambda_0 y, \end{aligned}$$

(on hem fet servir que per la part (c) provada abans, $|h(x)| \leq \|x\|$), que dona

$$|\Lambda_0(xy) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y| < (1 + \|x\| + |\Lambda_0 y|)\varepsilon,$$

que implica (3.9).

Ens queda veure que Δ és de Hausdorff. Cal veure que per tot $h, g \in \Delta$ amb $h \neq g$ existeixen U, V oberts amb la topologia de Gelfand tals que $h \in U$, $g \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. Vegem-ho. Si $h \neq g$, aleshores existeix $x \in A$ tal que $h(x) \neq g(x)$. Com $\mathbb{C}$ és de Hausdorff existeixen W_1, W_2 oberts de $\mathbb{C}$ tals que $h(x) \in W_1$, $g(x) \in W_2$ i $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Per tant, $h \in \hat{x}^{-1}(W_1)$ ja que $\hat{x}(h) = h(x) \in W_1$, i $g \in \hat{x}^{-1}(W_2)$ ja que $\hat{x}(g) = g(x) \in W_2$. Com $\hat{x}^{-1}(W_1)$ i $\hat{x}^{-1}(W_2)$ són oberts de Δ ja que són l'antiimatge d'un obert per una aplicació contínua i $\hat{x}^{-1}(W_1) \cap \hat{x}^{-1}(W_2) = \emptyset$, obtenim la conclusió desitjada. En efecte, si $f \in \hat{x}^{-1}(W_1) \cap \hat{x}^{-1}(W_2)$, aleshores $\hat{x}(f) = f(x) \in W_1$ i $\hat{x}(f) = f(x) \in W_2$, de manera que $f(x) \in W_1 \cap W_2$, que és una contradicció donat que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. $\square$

Anem ara a identificar l'espai d'ideals maximals per a algunes àlgebres de Banach commutatives concretes.

Recordem abans la següent definició.

Definició 3.20. *Un conjunt de funcions S , d'un conjunt A en un conjunt B , es diu que separa els punts de A si per tot $x, y \in A$, $x \neq y$, existeix una funció $f \in S$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Exemple 3.21. Sigui X un espai de Hausdorff compacte i sigui $A = \mathcal{C}(X)$ amb la norma del suprem. Per cada $x \in X$, $h_x : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $f \mapsto f(x)$ és un homomorfisme complex. Considerem l'aplicació $\varphi : x \mapsto h_x$ de X en Δ . Com $\mathcal{C}(X)$ separa punts en X (pel lema d'Urysohn (veure Lemma B.28 de [20])), $x \neq y$ implica $h_x \neq h_y$. Així doncs $x \mapsto h_x$ és injectiva.

Ara vegem que també és exhaustiva. Hem de veure que per tot $h \in \Delta$ existeix un $x \in X$ tal que $h = h_x$. Si això fos fals, existiria un ideal maximal M en $\mathcal{C}(X)$ que

contindria, per cada $p \in X$, una funció f tal que $f(p) \neq 0$. Anem a comprovar aquesta afirmació. Volem veure la següent implicació,

$$\exists h \in \Delta : \forall p \in X, h \neq h_p \implies \forall p \in X \exists f \in \ker(h) : f(p) \neq 0.$$

La provarem per contradicció. Suposem que

$$\exists h \in \Delta : \forall p \in X, h \neq h_p \text{ i } \exists q \in X : \forall f \in \ker(h), f(q) = 0.$$

Com fixat un $p \in X$, $\ker(h_p) = \{f \in \mathcal{C}(X) : h_p(f) = f(p) = 0\}$, aleshores com per tota $f \in \ker(h)$, $f(q) = 0$, tenim que $f \in \ker(h_q)$. Tenim doncs que $\ker(h) \subseteq \ker(h_q)$ que per la maximalitat dels ideals implica que $\ker(h) = \ker(h_q)$. Per tant la correspondència bijectiva entre ideals maximals i homomorfismes complexos implica que existeix $q \in X$ tal que $h = h_q$, contradient la hipòtesi.

Un cop vist això, la compacitat de X implicaria aleshores que M hauria de contenir un nombre finit de funcions $f_1, \dots, f_n$ sent com a mínim una d'elles no nul·la en cada punt de X . En efecte, com per tot $p \in X$ existeix $g \in \ker(h)$ tal que $g(p) \neq 0$ i g és contínua, aleshores existeix E entorn obert de $p \in X$ tal que per tot $q \in E$, $g(q) \neq 0$. Així doncs

$$X = \bigcup_{p \in X} E_p \implies X = E_{p_1} \cup \dots \cup E_{p_n},$$

on hem fet servir la compacitat de X . Sigui $q \in X$, aleshores existeix $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $q \in E_{p_i}$, de manera que $f_i(q) \neq 0$. Per tant $\ker(h)$ conté un nombre finit de funcions $f_1, \dots, f_n$ tals que per tot $p \in X$ existeix $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f_i(p) \neq 0$, arribant a la conclusió desitjada.

Posem $g = f_1 \bar{f}_1 + \dots + f_n \bar{f}_n$. Aleshores $g \in M$, ja que $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \in \mathcal{C}(X)$ i M és un ideal. A més, $g > 0$ en cada punt de X , i per tant g és invertible en $\mathcal{C}(X)$. Però els ideals propis no contenen elements invertibles. Hem arribat doncs a una contradicció.

L'aplicació $\varphi : x \mapsto h_x$ és a més contínua.

En efecte, tenim que $\{\hat{f}^{-1}(U) : U \text{ és obert a } \mathbb{C}\}_{f \in \mathcal{C}(X)}$ és una subbase de Δ . Així doncs, φ és contínua si, i només si, $\varphi^{-1}(\hat{f}^{-1}(U))$ és obert a X . Tenim que,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\hat{f}^{-1}(U)) &= \{x \in X : \varphi(x) \in \hat{f}^{-1}(U)\} = \{x \in X : h_x \in \hat{f}^{-1}(U)\} = \\ &= \{x \in X : \hat{f}(h_x) \in U\} = \{x \in X : h_x(f) \in U\} = \{x \in X : f(x) \in U\} = f^{-1}(U), \end{aligned}$$

que és l'antiimatge d'un obert de $\mathbb{C}$ per una aplicació contínua i per tant obert a X . Queda provada doncs la continuïtat de φ .

Sabem que si Y és compacte i Z de Hausdorff, aleshores tota aplicació $f : Y \rightarrow Z$ bijectiva i contínua és un homeomorfisme. Com φ és bijectiva i contínua, X és compacte i Δ de Hausdorff, concloem que φ és un homeomorfisme.

Així doncs, recollint tot el que hem provat fins ara tenim que φ és un homeomorfisme sobre la imatge de X en Δ . Podem doncs identificar Δ amb X mitjançant φ .

Aquesta identificació també és correcta si s'expressa en termes de les dues topologies involucrades. La topologia de Gelfand γ de X (aquí ja identificat amb Δ) és la topologia inicial induïda per $\mathcal{C}(X)$, i és, per tant menys fina que la topologia original τ ; però γ és una topologia Hausdorff, i per tant $\gamma = \tau$. Hem usat que si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ són topologies en un conjunt X , si τ_1 és una topologia Hausdorff i si τ_2 és compacta, aleshores $\tau_1 = \tau_2$ i el fet que per tot $f \in \mathcal{C}(X)$, $\hat{f}(h_x) = f(x)$ per tot $x \in X$, de manera que $\mathcal{C}(X) = \widehat{\mathcal{C}(X)}$.

En conclusió, X “és” l’espai d’ideals maximals de $\mathcal{C}(X)$, i la transformada de Gelfand és l’aplicació identitat sobre $\mathcal{C}(X)$.

Exemple 3.22. Sigui W l’àlgebra de Wiener, ja presentada en el teorema (3.17). En la demostració d’aquest resultat vam veure que els homomorfismes complexos de W són les avaluacions en els punts de $\mathbb{R}^n$. Així doncs els ideals maximals són de la forma $M_x = \{f \in W : f(x) = 0\}$, amb $x \in \mathbb{R}^n$. Recordant que més precisament en la demostració del teorema (3.17) vam veure que tot $h \in \Delta$ era l’avaluació en un $y \in [0, 2\pi]^n$, tenim que els ideals maximals són de fet de la forma $M_x = \{f \in W : f(x) = 0\}$, amb $x \in \mathbb{T}^n$, identificant $\mathbb{T}^n$ amb $[0, 2\pi]^n$ (on considerem 0 i 2π identificats). Essencialment els mateixos arguments fets servir en l’exemple previ (recordant que $W \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$) demostren que $x \mapsto h_x$ és un homeomorfisme de $\mathbb{T}^n$ en Δ , on com en l’exemple previ h_x és l’avaluació puntual. En aquest cas, pels mateixos arguments que en l’exemple previ, també tenim que la transformada de Gelfand és l’aplicació identitat en W i que la topologia natural en $\mathbb{T}^n$ coincideix amb la topologia de Gelfand induïda per W .

Exemple 3.23. Sigui A una àlgebra de Banach commutativa amb un *conjunt finit de generadors* $x_1, \dots, x_n$. Això vol dir que $x_i \in A$ per a $1 \leq i \leq n$ i que el conjunt de tots els polinomis en $x_1, \dots, x_n$ és dens en A .

Definim l’aplicació $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{C}^n$ per

$$\phi(h) = (\hat{x}_1(h), \dots, \hat{x}_n(h)), \quad \forall h \in \Delta.$$

Aleshores ϕ és un homeomorfisme de Δ en un conjunt compacte $K \subseteq \mathbb{C}^n$. En efecte, com $\hat{A} \subseteq \mathcal{C}(\Delta)$, totes les components de ϕ són contínues, i per tant ϕ és contínua. Si $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, aleshores $h_1(x_i) = h_2(x_i)$ per tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Per tant, en tractar-se d’homomorfismes complexos, $h_1(P) = h_2(P)$, on P és un polinomi en $x_1, \dots, x_n$. Com aquests polinomis són densos en A ,

$$h_1(y) = h_1(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_1(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_2(P_n) = h_2(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n) = h_2(y), \quad \forall y \in A,$$

on hem fet servir la continuïtat de h_1 i h_2 . Així doncs $h_1 = h_2$, que prova la injectivitat de ϕ .

A més ϕ és tancada ja que si $T \subseteq \Delta$ és tancat, aleshores T és compacte (per ser tancat dins d’un compacte), de manera que $\phi(T)$ és compacte (per ser la imatge d’un compacte per una aplicació contínua), i per tant $\phi(T)$ és tancat (ja que $\mathbb{C}^n$ té la propietat de Heine-Borel). Així doncs ϕ és un homeomorfisme sobre la imatge. El compacte de $\mathbb{C}^n$ abans esmentat és doncs $K = \phi(\Delta)$.

Podem ara transferir $\hat{A}$ des de Δ fins a K i considerar K com l’espai d’ideals maximals de A . Per precisar això definim

$$\psi(x) = \hat{x} \circ \phi^{-1}, \quad \forall x \in A.$$

Així doncs, $\psi(x) : K \xrightarrow{\phi^{-1}} \Delta \xrightarrow{\hat{x}} \mathbb{C}$. Aleshores ψ és un homomorfisme exhaustiu (isomorfisme si A és semisimple) de A en una subàlgebra $\psi(A)$ de $\mathcal{C}(K)$, ja que $\hat{x}$ és un homomorfisme.

Es comprova fàcilment que

$$\psi(x_i)(z) = z_i \quad \text{si } z = (z_1, \dots, z_n) \in K.$$

En efecte,

$$\psi(x_i)(z) = (\hat{x}_i \circ \phi^{-1})(z) = \hat{x}_i(h) = h(x_i) = z_i,$$

on hem fet servir que ϕ és exhaustiva sobre K i per tant donat $z = (z_1, \dots, z_n) \in K$ existeix $h \in \Delta$ tal que $\phi(h) = z$, és a dir, $z = (\hat{x}_1(h), \dots, \hat{x}_n(h)) = (h(x_1), \dots, h(x_n))$.

Per tant,

$$\psi(P(x_1, \dots, x_n))(z) = P(z), \quad \forall z \in K$$

per tot polinomi P en n variables.

A més ψ és contínua. En efecte, es compleix que

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall y \in A, \|x - y\|_A < \delta \implies \|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty < \varepsilon,$$

ja que

$$\begin{aligned} \|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty &= \|(\hat{x} \circ \phi^{-1}) - (\hat{y} \circ \phi^{-1})\|_\infty = \sup_{z \in K} |(\hat{x} \circ \phi^{-1})(z) - (\hat{y} \circ \phi^{-1})(z)| = \\ &= \sup_{h \in \Delta} |h(x) - h(y)|, \end{aligned}$$

i com tot $h \in \Delta$ és continu, per tot $h \in \Delta$ si $\|x - y\|_A < \delta$, aleshores $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$, de manera que $\sup_{h \in \Delta} |h(x) - h(y)| < \varepsilon$, arribant doncs a la conclusió desitjada.

D'aquests darrers dos fets en resulta que *tot element de $\psi(A)$ és límit uniforme de polinomis sobre K* . En efecte,

$$\psi(x)(z) = \psi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_1, \dots, x_n)\right)(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(P_n(x_1, \dots, x_n))(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z), \quad \forall z \in K.$$

Els conjunts $K \subseteq \mathbb{C}^n$ que sorgeixen d'aquesta manera com a espais d'ideals maximals tenen una propietat coneguda com a **convexitat polinòmica**:

Si $w \in \mathbb{C}^n$ i $w \notin K$, existeix un polinomi P tal que $|P(z)| \leq 1$ per tot $z \in K$, però $|P(w)| > 1$.

Per tal de provar aquest fet, suposem que no existeix un tal polinomi, és a dir, que donat $w \in \mathbb{C}^n \setminus K$, tot P polinomi tal que $|P(z)| \leq 1$ per tot $z \in K$, verifica que $|P(w)| \leq 1$. Així doncs, d'una banda $|P(w)| \leq 1 = \sup_{z \in K} |P(z)|$. D'altra banda,

$$\begin{aligned} \|P(x_1, \dots, x_n)\|_A &\geq \|\hat{P}(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_{h \in \Delta} |\hat{P}(x_1, \dots, x_n)| = \sup_{h \in \Delta} |P(h(x_1), \dots, h(x_n))| = \\ &= \sup_{h \in \Delta} |P(\phi(h))| = \sup_{z \in K} |P(z)|, \end{aligned}$$

on hem usat la propietat de decreixement de la norma de la transformada de Gelfand (veure (c) de (3.19)). Així doncs,

$$|P(w)| \leq \|P(x_1, \dots, x_n)\|_A.$$

Ara donat $w \in \mathbb{C}^n \setminus K$ considerem l'avaluació puntual en w de tot polinomi $P \in A$, és a dir, $w \mapsto P(w)$. Sabem que els polinomis són densos en A , això és, que per tot $x \in A$ existeix $P_n \rightarrow x$. Això ens permet estendre l'aplicació $w \mapsto P(w)$ a tot A prenent la successió $P_n \rightarrow x$ i definint $h : A \rightarrow \mathbb{C}$ per $x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(w)$. Ens cal ara veure que h està ben definida. D'una banda el límit que apareix en la definició existeix, ja que $P_n(w)$ és una successió de Cauchy. En efecte, $|P_n(w) - P_m(w)| = |(P_n - P_m)(w)| \leq \|P_n - P_m\|_A$,

i com $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ és convergent en A , aleshores és de Cauchy en A i això ens permet d'obtenir la conclusió desitjada.

A més h és acotat i per tant continu en A . En efecte, tenim que

$$|h(x)| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(w) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(w)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(x_1, \dots, x_n)\|_A = \|x\|.$$

Notem que ens cal la continuïtat que acabem de demostrar per veure que l'aplicació està ben definida, ja que en cas de no ser-ho podria passar que

$$h(y) = h(\lim_{n \rightarrow \infty} P_m) \neq \lim_{m \rightarrow \infty} h(P_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_m(w)$$

per algun $y \in A$.

Notem que podria passar que hi hagués més d'una successió de polinomis que convergís cap a x . És clar que això no afecta la definició de h , donat que si $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_m = x$, aleshores clarament

$$\begin{aligned} h(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n) &= h(\lim_{m \rightarrow \infty} Q_m) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} h(P_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} h(Q_m) \iff \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(w) = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_m(w), \end{aligned}$$

on hem fet servir que h sobre els polinomis actua com l'avaluació puntual.

De la continuïtat de la suma, el producte per escalar i la multiplicació resulta clar que h és un homomorfisme complex de A .

A més es compleix que $\phi(h) = w$, ja que $\phi(h) = (h(x_1), \dots, h(x_n))$ i $h(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i(w) = x_i(w) = w_i$ per tot $1 \leq i \leq n$, donat que x_i és un polinomi.

Però aleshores $w \in K$, arribant a una contradicció. Això acaba la demostració.

Exemple 3.24. Aquest exemple mostra que la transformada de Gelfand és una generalització de la transformada de Fourier, com a mínim en el context de L^1 .

Sigui A , l'àlgebra unitària $\mathcal{L}$, tal com vam descriure en l'exemple (2.10). Recordem que els elements de A són de la forma $f + \alpha\delta$, on $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ i $\delta = \delta_0$ és la mesura de Dirac a $\mathbb{R}^n$. A més la multiplicació en A és la convolució:

$$(f + \alpha\delta) * (g + \beta\delta) = (f * g + \beta f + \alpha g) + (\alpha\beta)\delta.$$

Per cada $t \in \mathbb{R}^n$, la fórmula

$$(3.11) \quad h_t(f + \alpha\delta) = \hat{f}(t) + \alpha$$

defineix un homomorfisme complex de A , on $\hat{f}$ és la transformada de Fourier de f . En efecte, fent servir la linealitat de la transformada de Fourier obtenim la linealitat de h_t simplement aplicant-ne la definició. És clar que $h_t(\delta) = 1$. Pel que fa a la multiplicativitat, l'obtenim recordant que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$. En efecte,

$$\begin{aligned} h_t((f * g + \beta f + \alpha g) + (\alpha\beta)\delta) &= (f * g + \beta f + \alpha g)^\wedge(t) + \alpha\beta = \\ &= \hat{f}(t)\hat{g}(t) + \beta\hat{f}(t) + \alpha\hat{g}(t) + \alpha\beta = h_t(f + \alpha\delta)h_t(g + \beta\delta). \end{aligned}$$

A més,

$$(3.12) \quad h_\infty(f + \alpha\delta) = \alpha$$

també defineix un homomorfisme complex, com és clar de la definició.

Anem a veure que l'aplicació $h : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \Delta$ definida per $t \mapsto \begin{cases} h_t, & \text{si } t \in \mathbb{R}^n \\ h_\infty, & \text{si } t = \infty \end{cases}$ és un homeomorfisme entre $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ amb la topologia de la compactificació d'Alexandroff, τ , i Δ amb la topologia de Gelfand, γ , és a dir, que com a espais topològics $(\mathbb{R}^n)^* = \Delta$.

Ja hem provat abans que h està ben definit, ja que $h_t, h_\infty \in \Delta$. Suposem que $h_{t_1} = h_{t_2}$ per a $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^n$. Aleshores $h_{t_1}(f + \alpha\delta) = h_{t_2}(f + \alpha\delta)$ si, i només si, $\hat{f}(t_1) = \hat{f}(t_2)$, que implica $t_1 = t_2$ ja que la transformada de Fourier és injectiva.

Ens queda per provar que tot $h \in \Delta$ és de la forma (3.11) o (3.12), és a dir, l'exhaustivitat. Si $h(f) = 0$ per tot $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aleshores

$$h(f + \alpha\delta) = h(f) + \alpha h(\delta) = \alpha h(\delta) = \alpha = h_\infty.$$

Si $h(f) \neq 0$ per algun $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aleshores $h(f) = \int f\beta dm_n$, per algun $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Com $h(f * g) = h(f)h(g)$, es pot demostrar que β coincideix gairebé per tot punt amb una funció contínua b que satisfà

$$(3.13) \quad b(x + y) = b(x)b(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Finalment, tota solució acotada de (3.13) és de la forma

$$b(x) = e^{-ix \cdot t}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

per algun $t \in \mathbb{R}^n$. Així doncs $h(f) = \hat{f}(t)$, i per tant h és de la forma (3.11). D'aquest darrer cas només n'hem esbossat una prova. Per al cas $n = 1$ els detalls que completen l'esbós es poden trobar a la secció 9.22 de [16]. El cas $n > 1$ és bastant semblant.

Ens falta només comprovar la igualtat entre les topologies. Sabem que la transformada de Gelfand dels elements de $L^1(\mathbb{R}^n)$ és de la forma $\widehat{f + \alpha\delta} : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $h_t \mapsto \hat{f}(t) + \alpha$ i $h_\infty \mapsto \alpha$. Anem a veure que és una aplicació contínua amb la topologia de la compactificació d'Alexandroff (identificant Δ amb $(\mathbb{R}^n)^*$ via h). D'una banda tenim que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_t(f + \alpha\delta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{f}(t) + \alpha = \alpha = h_\infty(f + \alpha\delta),$$

on hem fet servir que pel lema de Riemann-Lebesgue $\hat{f}(t) \rightarrow 0$ quan $|t| \rightarrow \infty$ per tot $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. D'altra banda ens cal veure que $t \mapsto \hat{f}(t) + \alpha$ és contínua. Això és cert ja que $t \mapsto \hat{f}(t)$ és contínua (veure, per exemple el teorema 7.5 de [17]). Així doncs, $\hat{A} \subseteq \mathcal{C}(\Delta)$. Tanmateix la topologia de Gelfand és la menys fina que fa continus els elements de $\hat{A}$. Així doncs $\gamma \subseteq \tau$. Com γ és de Hausdorff i τ és compacta, aleshores $\gamma = \tau$.

3.3 El teorema de Gelfand-Naimark

En aquesta subsecció demostrarem un teorema de classificació d'un cert tipus d'àlgebres de Banach. Abans però ens cal introduir algunes nocions.

Definició 3.25. Una aplicació $x \mapsto x^*$ d'una àlgebra complexa (no necessàriament commutativa) A en A s'anomena **involució** sobre A si satisfà les següents quatre propietats:

$$(3.14) \quad (x + y)^* = x^* + y^*.$$

$$(3.15) \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*.$$

$$(3.16) \quad (xy)^* = y^* x^*.$$

$$(3.17) \quad x^{**} = x.$$

Dit d'una altra manera, una involució és un antiautomorfisme semilineal per conjugació de període 2.

Cada $x \in A$ tal que $x = x^*$ s'anomena **hermític** o **autoadjunt**.

Observació 3.26. Notem que (3.17) implica que tota involució és la seva pròpia inversa, i per tant bijectiva.

Exemple 3.27. L'aplicació $f \mapsto \bar{f}$ és una involució sobre $\mathcal{C}(X)$.

Vegem ara algunes propietats bàsiques de les involucions.

Teorema 3.28. Si A és una àlgebra de Banach amb una involució, i si $x \in A$, aleshores

- (a) $x + x^*$, $i(x - x^*)$ i xx^* són hermítics.
- (b) x té una representació única $x = u + iv$, amb $u \in A$, $v \in A$ i u i v hermítics.
- (c) La unitat e és hermítica.
- (d) x és invertible en A si, i només si, x^* és invertible. En aquest cas $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.
- (e) $\lambda \in \sigma(x)$ si, i només si, $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

Demostració. (a) Tenim que

$$(x + x^*)^* = x^* + x^{**} = x^* + x = x + x^*,$$

$$[i(x - x^*)]^* = \bar{i}[x^* + (-x^*)^*] = -i(x^* - x^{**}) = i(x - x^*),$$

i

$$(xx^*)^* = x^{**}x^* = xx^*.$$

(b) Si $2u = x + x^*$, $2v = i(x^* - x)$, aleshores $x = u + iv$ és una representació com en (b). Això prova l'existència. Suposem que $x = u' + iv'$ n'és una altra representació. Posem $w = v' - v$. Aleshores tan w com iw són hermítics, de manera que

$$iw = (iw)^* = -iw^* = -iw.$$

Per tant, $2iw = 0$, de manera que $w = 0$, d'on obtenim la unicitat.

(c) Com $e^* = ee^*$, (a) implica que e^* és hermític. Aleshores $(e^*)^* = e^*$ de manera que $e = e^*$.

(d) Per a veure la implicació cap a la dreta, si $x \in G(A)$, $(x^{-1})^* x^* = (xx^{-1})^* = e^* = e$ i $x^*(x^{-1})^* = (x^{-1}x)^* = e^* = e$, per tant $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

Per a veure la implicació cap a l'esquerra, si $x^* \in G(A)$, $x^*(x^*)^{-1} = e$, per tant $[(x^*)^{-1}]^* x^{**} = e$ si, i només si, $[(x^*)^{-1}]^* x = e$, i $(x^*)^{-1} x^* = e$, per tant $x[(x^*)^{-1}]^* = e$. Així doncs, $x \in G(A)$.

(e) La part (e) resulta d'aplicar (d) a $x - \lambda e$ en comptes de x . En efecte, $x - \lambda e \in G(A)$ si, i només si, $x^* - \bar{\lambda} e \in G(A)$. $\square$

Definició 3.29. Una àlgebra de Banach A amb una involució $x \mapsto x^*$ que satisfà

$$(3.18) \quad \|xx^*\| = \|x\|^2$$

per tot $x \in A$ s'anomena **C^* -àlgebra**.

Observació 3.30. Com $\|x^2\| = \|xx^*\| \leq \|x\|\|x^*\|$, aleshores $\|x\| \leq \|x^*\|$ i per tant també $\|x^*\| \leq \|xx^*\| = \|x\|$. Així doncs,

$$(3.19) \quad \|x^*\| = \|x\|$$

en tota C^* -àlgebra, és a dir, la involució és una isometria. També es verifica que

$$(3.20) \quad \|xx^*\| = \|x\|\|x^*\|,$$

simplement perquè $\|xx^*\| = \|x\|^2 = \|x\|\|x^*\|$.

Recíprocament, (3.19) i (3.20) impliquen (3.18). En efecte, això se segueix del fet que suposant (3.19) i (3.20) tenim que $\|xx^*\| = \|x\|\|x^*\| = \|x\|\|x\| = \|x\|^2$.

Ara ja podem enunciar i demostrar el teorema que dona nom a aquesta subsecció. Abans però recordem el resultat següent, una demostració del qual es pot trobar, per exemple, en el teorema 7.33 de [15]:

Teorema 3.31 (Stone-Weierstrass). *Sigui $\mathcal{A}$ una àlgebra autoadjunta de funcions complexes contínues sobre un conjunt compacte K , tal que $\mathcal{A}$ separa els punts de K i $\mathcal{A}$ no s'anul·la en cap punt de K . Aleshores $\mathcal{A}$ és densa en $\mathcal{C}(K)$.*

Recordem que $\mathcal{A}$ és autoadjunta si, i només si, per tota $f \in \mathcal{A}$, $\bar{f} \in \mathcal{A}$, i que $\mathcal{A}$ no s'anul·la en cap punt de K si, i només si, per tot $x \in K$ existeix $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq 0$.

Teorema 3.32 (Teorema de Gelfand-Naimark). *Sigui A una C^* -àlgebra commutativa i unitària amb espai d'ideals maximals Δ . Aleshores la transformada de Gelfand és un isomorfisme isomètric de A en $\mathcal{C}(\Delta)$, amb la propietat addicional que*

$$h(x^*) = \overline{h(x)}, \quad \forall x \in A, \forall h \in \Delta,$$

o, de manera equivalent

$$(3.21) \quad (x^*)^\wedge = \bar{\hat{x}}, \quad \forall x \in A.$$

En particular, x és hermític si, i només si, $\hat{x}$ és una funció a valors reals.

La interpretació de (3.21) és que la transformada de Gelfand trasllada la involució donada sobre A a la involució natural sobre $\mathcal{C}(\Delta)$, que és la conjugació. Els isomorfismes que conserven d'aquesta manera les involucions se solen anomenar **isomorfismes***.

Demostració. Suposem que $u \in A$, $u = u^*$ i $h \in \Delta$. Hem de provar que $h(u)$ és real. Posem $z = u + ite$, on $t \in \mathbb{R}$. Si $h(u) = \alpha + i\beta$, amb α i β reals, aleshores

$$h(z) = \alpha + i(\beta + t) \quad \text{i} \quad zz^* = u^2 + t^2e$$

de manera que

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(z)|^2 \leq \|z\|^2 = \|zz^*\| \leq \|u\|^2 + t^2,$$

on hem fet servir que $\|\hat{z}\|_\infty \leq \|z\|$, o bé

$$(3.22) \quad \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per (3.22), $\beta = 0$. En efecte, si $\beta \neq 0$ existeix $t \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t > \|u\|^2$ (simplement prenent $t > \frac{\|u\|^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2\beta}$). Per tant $h(u)$ és real.

Si $x \in A$, aleshores $x = u + iv$, amb $u = u^*$ i $v = v^*$. Per tant $x^* = u^* - iv^* = u - iv$. Donat que $\hat{u}(h) = h(u)$ i $\hat{v}(h) = h(v)$, tenim que $\hat{u}$ i $\hat{v}$ són reals, de manera que queda provat (3.21). En efecte,

$$(x^*)^\wedge = (u - iv)^\wedge = \hat{u} - i\hat{v} = \overline{\hat{u} + i\hat{v}} = \overline{\hat{x}}, \quad \forall x \in A.$$

Per tant $\overline{\hat{x}} \in \hat{A}$, de manera que $\hat{A}$ és tancada respecte de la conjugació complexa (auto-adjunta).

A més, $\hat{A}$ separa els punts de Δ ja que per tot $h_1, h_2 \in \Delta$, $h_1 \neq h_2$, existeix $\hat{x} \in \hat{A}$ tal que $\hat{x}(h_1) \neq \hat{x}(h_2)$, donat que existeix $x \in A$ tal que $h_1(x) \neq h_2(x)$ justament perquè $h_1 \neq h_2$.

També es compleix que $\hat{A}$ no s'anul·la en cap punt de Δ ja que per tot $h \in \Delta$ existeix $\hat{x} \in \hat{A}$ tal que $\hat{x}(h) = h(x) \neq 0$. Si això fos fals tindríem que existiria $h \in \Delta$ tal que per tot $\hat{x} \in \hat{A}$, $\hat{x}(h) = h(x) = 0$, i per tant h seria l'aplicació idènticament nul·la, que és una contradicció ja que aquesta no pertany a Δ .

Pel teorema de Stone-Weierstrass (3.31), $\hat{A}$ és aleshores densa en $\mathcal{C}(\Delta)$ ($\overline{\hat{A}} = \mathcal{C}(\Delta)$).

Si $x \in A$ i $y = xx^*$, aleshores $y = y^*$, per tant $\|y^2\| = \|y\|^2$. Per inducció sobre n resulta que

$$(3.23) \quad \|y^m\| = \|y\|^m \text{ per a } m = 2^n.$$

En efecte, hem de veure que $\|y^{2^n}\| = \|y\|^{2^n}$ implica $\|y^{2^{n+1}}\| = \|y\|^{2^{n+1}}$. Com $\|y^{2^n}\| = \|y\|^{2^n}$, aleshores

$$\|y^{2^{n+1}}\| = \|y^{2^n} y^{2^n}\| = \|y^{2^n} (y^{2^n})^*\| = \|y^{2^n}\|^2 = (\|y\|^{2^n})^2 = \|y\|^{2^{n+1}},$$

on hem fet servir que si $y = y^*$ aleshores $y^n = (y^n)^*$ per a $n = 2, 3, \dots$. En efecte, si $y^{n-1} = (y^{n-1})^*$, aleshores $y^n = (y^n)^*$, ja que

$$y^n = y^{n-1}y = (y^{n-1})^*y = (y^*y^{n-1})^* = (yy^{n-1})^* = (y^n)^*.$$

Això prova (3.23).

Per tant, prenent arrel n -èssima en (3.23) i fent $m \rightarrow \infty$, resulta que $\|\hat{y}\|_\infty = \rho(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|y^m\|^{\frac{1}{m}} = \|y\|$, on hem utilitzat la fórmula del radi espectral i la part (c) del teorema (3.19). Com $y = xx^*$, (3.21) implica que $\hat{y} = |\hat{x}|^2$. En efecte, $\hat{y} = (y^*)^\wedge = \overline{\hat{y}}$, on

$$\overline{\hat{y}(h)} = \overline{h(y)} = \overline{h(xx^*)} = \overline{h(x)} \overline{h(x^*)} = \overline{h(x)} h(x) = |h(x)|^2 = |\hat{x}(h)|^2, \quad \forall h \in \Delta.$$

Per tant,

$$\|\hat{x}\|_\infty^2 = \left(\sup_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)| \right)^2 = \sup_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)|^2 = \|\hat{x}\|_\infty^2 = \|\hat{y}\|_\infty = \|y\| = \|xx^*\| = \|x\|^2,$$

és a dir, $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$. Per tant $x \mapsto \hat{x}$ és una isometria. Com la completesa d'espais mètrics es preserva per isometries i A és complet, aleshores $\hat{A}$ és un espai de Banach i per tant tancat en $\mathcal{C}(\Delta)$. Com ja hem vist que $\hat{A}$ és densa en $\mathcal{C}(\Delta)$, concloem que $\hat{A} = \mathcal{C}(\Delta)$. Com ja havíem provat que $x \mapsto \hat{x}$ és un homomorfisme exhaustiu de A en $\hat{A}$ (teorema (3.19)), això conclou la demostració. $\square$

Observació 3.33. La moral d'aquest teorema és que des d'un punt de vista abstracte només hi ha una C^* -àlgebra commutativa i unitària: $\mathcal{C}(K)$ amb K un cert compacte de Hausdorff.

3.3.1 Connexions amb el càlcul simbòlic

El següent teorema, que és un cas particular del teorema de Gelfand-Naimark, ens permet establir una connexió amb el càlcul simbòlic densevolupat prèviament.

Teorema 3.34. *Si A és una C^* -àlgebra commutativa que conté un element x tal que els polinomis en x i x^* són densos en A , aleshores la fórmula*

$$(\Psi f)^\wedge = f \circ \hat{x}$$

defineix un isomorfisme isomètric Ψ de $\mathcal{C}(\sigma(x))$ en A que satisfà

$$(3.24) \quad \Psi \bar{f} = (\Psi f)^*$$

per cada $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. A més, si $f(\lambda) = \lambda$ en $\sigma(x)$, aleshores $\Psi f = x$.

Demostració. Sigui Δ l'espai d'ideals maximals de A . Aleshores $\hat{x}$ és una funció contínua en Δ que té $\sigma(x)$ per imatge. Siguin $h_1 \in \Delta$, $h_2 \in \Delta$, i suposem que $\hat{x}(h_1) = \hat{x}(h_2)$, és a dir, $h_1(x) = h_2(x)$. El teorema de Gelfand-Naimark implica aleshores que $h_1(x^*) = h_2(x^*)$. Si P és un polinomi qualsevol en dues variables, resulta que

$$h_1(P(x, x^*)) = h_2(P(x, x^*)),$$

ja que h_1 i h_2 són homomorfismes. Per hipòtesi, els elements de la forma $P(x, x^*)$ són densos en A . La continuïtat de h_1 i h_2 implica que $h_1(y) = h_2(y)$ per tot $y \in A$. En efecte,

$$\begin{aligned} h_1(y) &= h_1\left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, x^*)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_1\left(P_n(x, x^*)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_2\left(P_n(x, x^*)\right) = \\ &= h_2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, x^*)\right) = h_2(y), \quad \forall y \in A. \end{aligned}$$

Consegüentment, $h_1 = h_2$. Hem provat doncs que $\hat{x}$ és injectiva. Com Δ és compacte de Hausdorff, $\hat{x}$ és un homeomorfisme de Δ en $\sigma(x)$. En efecte, sigui S un tancat de Δ . Com Δ és de Hausdorff, aleshores S és compacte. A més $\hat{x}(S)$ és també compacte per ser la imatge d'un compacte per una aplicació contínua, i per tant com $\hat{x}(S) \subseteq \mathbb{C}$, $\hat{x}(S)$ és tancat. Com $\hat{x}$ és contínua, injectiva i tancada, aleshores $\hat{x}$ és un homeomorfisme sobre la imatge, és a dir, un homeomorfisme de Δ en $\sigma(x)$. Per tant l'aplicació $\varphi : \mathcal{C}(\sigma(x)) \rightarrow \mathcal{C}(\Delta)$, definida per $f \mapsto f \circ \hat{x}$ és un isomorfisme isomètric que preserva la conjugació complexa. És clar que preserva la conjugació complexa, ja que $\varphi(\bar{f}) = \bar{f} \circ \hat{x} = \overline{f \circ \hat{x}} = \overline{\varphi(f)}$. És un homomorfisme ja que,

$$\begin{aligned} \varphi(f+g)(h) &= [(f+g) \circ \hat{x}](h) = (f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = \\ &= (f \circ \hat{x})(h) + (g \circ \hat{x})(h) = \varphi(f)(h) + \varphi(g)(h), \end{aligned}$$

$$\varphi(\lambda f)(h) = [(\lambda f) \circ \hat{x}](h) = (\lambda f)(h(x)) = \lambda f(h(x)) = \lambda(f \circ \hat{x})(h) = \lambda \varphi(f)(h),$$

$$\begin{aligned}\varphi(fg)(h) &= [(fg) \circ \hat{x}](h) = (fg)(h(x)) = f(h(x))g(h(x)) = (f \circ \hat{x})(h)(g \circ \hat{x})(h) = \\ &= \varphi(f)(h)\varphi(g)(h),\end{aligned}$$

per tot $h \in \Delta$, per tot $f, g \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ i per tot $\lambda \in \mathbb{C}$. És una isometria, ja que $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |f(\lambda)|$ i $\|f \circ \hat{x}\|_\infty = \sup_{h \in \Delta} |f(h(x))|$ coincideixen, ja que per tot $\lambda \in \sigma(x)$ existeix $h \in \Delta$ tal que $h(x) = \lambda$. És exhaustiva, ja que donada $g \in \mathcal{C}(\Delta)$, prenem $f = g \circ \hat{x}^{-1} \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ (g i $\hat{x}^{-1}$ són contínues). Aleshores $\varphi(f) = \varphi(g \circ \hat{x}^{-1}) = (g \circ \hat{x}^{-1}) \circ \hat{x} = g$.

Tota $f \circ \hat{x}$ és pel teorema de Gelfand-Naimark la transformada de Gelfand d'un únic element de A que denotem per Ψf i que satisfà $\|\Psi f\|_A = \|f \circ \hat{x}\|_\infty = \|f\|_\infty$. Per tant $\Psi : \mathcal{C}(\sigma(x)) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}(\Delta) \xrightarrow{\Gamma^{-1}} A$, definida per $f \mapsto f \circ \hat{x} \mapsto \Psi f$, on per Γ^{-1} denotem la inversa de la transformada de Gelfand. És a dir, $\Psi = \Gamma^{-1} \circ \varphi$, amb Γ^{-1} un isomorfisme isomètric i φ un altre isomorfisme isomètric, de manera que Ψ és un isomorfisme isomètric.

L'afirmació (3.24) resulta de la fórmula (3.21) del teorema de Gelfand-Naimark. En efecte,

$$(\Psi \bar{f})^\wedge = \bar{f} \circ \hat{x} = \overline{f \circ \hat{x}} = \overline{(\Psi f)^\wedge} = [(\Psi f)^*]^\wedge,$$

on hem usat que $(\bar{f} \circ \hat{x})(h) = \bar{f}(h(x)) = \overline{f(h(x))} = \overline{(f \circ \hat{x})(h)}$. Per tant, la injectivitat de la transformada de Gelfand ens dona que $\Psi f = (\Psi f)^*$.

Si $f(\lambda) = \lambda$, aleshores $f \circ \hat{x} = \hat{x}$ donat que $(f \circ \hat{x})(h) = f(h(x)) = h(x) = \hat{x}(h)$ per tot $h \in \Delta$. Per tant, $(\Psi f)^\wedge = \hat{x}$ i la injectivitat de la transformada de Gelfand ens dona que $\Psi f = x$. $\square$

Observació 3.35. En la situació descrita en el teorema (3.34), té perfectament sentit escriure $f(x)$ per l'element de A que té per transformada de Gelfand $f \circ \hat{x}$. Aquesta notació s'utilitza freqüentment. Això estén el càlcul simbòlic (per aquestes àlgebres particulars) a funcions contínues arbitràries sobre l'espectre de x , tant si són holomorfs com si no ho són.

3.3.2 El teorema de Gelfand-Naimark en el cas no unitari

En aquesta subsecció anem a demostrar un resultat anàleg al teorema de Gelfand-Naimark (3.32) en el cas commutatiu i no unitari.

Primer anem a reformular per al cas no unitari un resultat que ja havíem vist en el cas unitari.

Teorema 3.36. *Segui A una àlgebra de Banach commutativa i no unitària i sigui Δ el seu espai d'ideals maximals. Aleshores Δ és un espai localment compacte, però no compacte, de Hausdorff.*

Demostració. Denotem per 0 l'homomorfisme idènticament nul, que no pertany a Δ . Fent servir el mateix argument que vam usar en la demostració de la part (a) del teorema (3.19) per a veure que en el cas unitari $\overline{\Delta} = \Delta$, però ometent la condició (3.10), veiem que en el cas no unitari $\overline{\Delta \cup \{0\}} = \overline{\Delta} \cup \{0\} = \Delta \cup \{0\}$, on hem utilitzat que $\Delta \cup \{0\}$ és de Hausdorff (mateix argument que en la part (a) del teorema (3.19)), i per tant $\{0\}$ és tancat. Per tant $\Delta \cup \{0\}$ és feblement*-compacte. Podem escriure $\Delta = (\Delta \cup \{0\}) \setminus \{0\}$. Així doncs, Δ és obert a $\Delta \cup \{0\}$ per ser el complementari d'un tancat. A més, pel fet de ser compacte, $\Delta \cup \{0\}$ és localment compacte. Per tant tenim que Δ és localment compacte (per ser obert dins d'un espai localment compacte). A més és clar que Δ no és compacte, per haver-se obtingut traient un punt del compacte $\Delta \cup \{0\}$. $\square$

L'anàleg del teorema de Gelfand-Naimark en el cas no unitari l'obtidrem dotant d'unitat la C^* -àlgebra no unitària, aplicant el teorema de Gelfand-Naimark a la unitarització i finalment restringint-nos a la C^* -àlgebra no unitària de partida.

Lema 3.37. *Sigui A una àlgebra de Banach amb involució $x \mapsto x^*$ tal que $\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$ per tot $x \in A$. Aleshores A és una C^* -àlgebra.*

Demostració. Tenim que $\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$ per tot $x \in A$. Per tant, $\|x\| \leq \|x^*\|$ per tot $x \in A$. Com $x^* \in A$, aleshores $\|x^*\|^2 \leq \|xx^*\| \leq \|x\|\|x^*\|$. Per tant, $\|x^*\| \leq \|x\|$ per tot $x \in A$. Ajuntant les dues desigualtats, hem provat que $\|x\| = \|x^*\|$ per tot $x \in A$. Així doncs, $\|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$, de manera que usant la desigualtat de la hipòtesi arribem a $\|x\|^2 = \|x^*x\|$ per tot $x \in A$. Això prova que A és una C^* -àlgebra. $\square$

Proposició 3.38. *Sigui A una C^* -àlgebra commutativa i no unitària, i per cada $x \in A$ sigui L_x l'operador lineal en A definit per $y \mapsto xy$. Sigui B el conjunt de tots els operadors en A de la forma $\lambda I + L_x$, amb $\lambda \in \mathbb{C}$ i $x \in A$. Aleshores B és una C^* -àlgebra commutativa i unitària amb la norma usual d'operadors i amb $(\lambda I + L_x)^* = \bar{\lambda}I + L_{x^*}$ per involució. A més, $x \mapsto L_x$ és un isomorfisme* isomètric de A en un ideal tancat de B de codimensió 1.*

Demostració. Comencem comprovant que $B \subseteq \mathcal{L}(A)$, és a dir, que els operadors en B són lineals i continus. Sabem que $\lambda I \in \mathcal{L}(A)$ i $L_x \in \mathcal{L}(A)$ (és l'operador de multiplicació per l'esquerra, que ja vam veure que és lineal i continu en la demostració del teorema (2.5)). Per tant com $\mathcal{L}(A)$ és tancada per la suma, $\lambda I + L_x \in \mathcal{L}(A)$.

Vegem ara que de fet B és una subàlgebra complexa unitària de $\mathcal{L}(A)$. És tancada per la suma, ja que $(\lambda I + L_x) + (\mu I + L_y) = (\lambda + \mu)I + L_{x+y} \in B$. També és tancada pel producte per escalar, ja que $\mu(\lambda I + L_x) = (\mu\lambda)I + L_{\mu x} \in B$. Finalment, és tancada per la multiplicació, ja que $(\lambda I + L_x) \circ (\mu I + L_y) = (\lambda\mu)I + L_{\lambda y + \mu x + xy} \in B$. Notem que aleshores B és commutativa si A és commutativa. A més $I = 1I + L_0 \in B$.

Considerem ara l'àlgebra de Banach unitària A_1 (veure la proposició (2.3)). El que acabem de provar en el paràgraf anterior demostra que l'aplicació $\lambda I + L_x \mapsto (x, \lambda)$ de B en A_1 és un isomorfisme.

A més com la norma usual d'operadors és una norma submultiplicativa en $\mathcal{L}(A)$ i $B \subseteq \mathcal{L}(A)$, també ho és en B i $\|I\| = 1$.

L'àlgebra B és tancada en $\mathcal{L}(A)$, i per tant B és una àlgebra de Banach. En efecte, suposem que $T \in \mathcal{L}(A)$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ i $T_n \rightarrow T$. Tenim que $T_n = \lambda_n I + L_{x_n}$. A més sabem que $A \subseteq A_1$. Clarament amb la mateixa definició $T_n : A_1 \rightarrow A_1$ i $T_n \in \mathcal{L}(A_1)$, és a dir, podem considerar-los com a operadors lineals i continus en A_1 . Aleshores

$$T_n(y) = \lambda_n y + x_n y = (\lambda_n e + x_n)y = T_n(e)y, \quad \forall y \in A_1.$$

Quan $n \rightarrow \infty$, $T_n(y) \rightarrow T(y)$ i $T_n(e) = T(e)$. Com la multiplicació és contínua (en particular per l'esquerra), $T_n(e)y \rightarrow T(e)y$. Posem $z = T(e) \in A_1$. Aleshores,

$$T(y) = T(e)y = zy = L_z(y), \quad \forall y \in A_1.$$

Per tant, $T = L_z \in \mathcal{L}(A_1)$. Recordem ara que els elements de A_1 són de la forma (x, α) amb $x \in A$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Així doncs

$$L_z(a) = za = (x, \alpha)(a, 0) = (xa + \alpha a, 0) \longleftrightarrow xa + \alpha a = (\alpha I + L_x)(a), \quad \forall a \in A,$$

on com $(xa + \alpha a, 0) \in J$ (la notació és la de la proposició (2.3)) hem usat l'isomorfisme entre J i A per passar a A . Per tant, $L_z|_A = \alpha I + L_x$, de manera que $T|_A = \alpha I + L_x \in B$.

A més $(\lambda I + L_x)^* = \bar{\lambda} I + L_x^* \in B$ és una involució en B . En efecte, de la definició és clar que $[(\lambda I + L_x) + (\mu I + L_y)]^* = (\lambda I + L_x)^* + (\mu I + L_y)^*$, $[\alpha(\lambda I + L_x)]^* = \bar{\alpha}(\lambda I + L_x)^*$, $[(\lambda I + L_x) \circ (\mu I + L_y)]^* = (\mu I + L_y)^* \circ (\lambda I + L_x)^*$ i $[\lambda I + L_x]^{**} = \lambda I + L_x$.

Ara veurem que es compleix que $\|\lambda I + L_x\|^2 \leq \|(\bar{\lambda} I + L_x^*) \circ (\lambda I + L_x)\|$ i per tant pel lema (3.37) tindrem que B és una C^* -àlgebra. Per definició $\|\lambda I + L_x\|^2 = \sup_{\|a\|_A=1} \{\|\lambda a + xa\|_A^2\}$. Per tant, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $a \in A$ tal que $\|a\|_A = 1$ de manera que $\|(\lambda e + x)a\|_A^2 > \|\lambda I + L_x\|^2 - \varepsilon$, on hem considerat $e \in A_1$. Així doncs,

$$\begin{aligned} \|\lambda I + L_x\|^2 &\leq \varepsilon + \|(\lambda e + x)a\|_A^2 = \varepsilon + \|a^*(\bar{\lambda} e + x^*)(\lambda e + x)a\|_A \leq \\ &\leq \varepsilon + \|a^*\|_A \|(\bar{\lambda} e + x^*)(\lambda e + x)a\| = \varepsilon + \|(\bar{\lambda} e + x^*)(\lambda e + x)a\| = \\ &= \varepsilon + \|(\bar{\lambda} I + L_x^*) \circ (\lambda I + L_x(a))\|_A \leq \varepsilon + \|(\bar{\lambda} I + L_x^*) \circ (\lambda I + L_x)\|, \end{aligned}$$

on hem fet servir que $\|a^*\|_A = \|a\|_A = 1$ i el fet que $\|(\bar{\lambda} I + L_x^*) \circ (\lambda I + L_x)\| := \sup_{\|a\|_A=1} \|(\bar{\lambda} e + x^*)(\lambda e + x)a\|$. Prenent el límit $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenim el resultat desitjat.

Ens manca veure que l'aplicació $\phi : A \rightarrow \phi(A) \subseteq B$ definida per $x \mapsto L_x$ és un isomorfisme* isomètric de A en un ideal tancat de B de codimensió 1. És clar que $(x, 0) \mapsto L_x$ és un isomorfisme entre J i $\phi(A)$. Així doncs $A \cong \phi(A)$.

És clar que $\phi(A)$ és un ideal de B . A més, ja vam veure que el conjunt de tots els L_x és tancat en el teorema (2.5).

És una isometria. En efecte, tenim que per tot $a \in A$, $\|L_x(a)\|_A = \|xa\|_A \leq \|x\|_A \|a\|_A$, de manera que $\|L_x\| \leq \|x\|_A$. D'altra banda,

$$\|x\|_A^2 = \|xx^*\|_A = \|L_x(x^*)\|_A \leq \|L_x\| \|x^*\|_A = \|L_x\| \|x\|_A \implies \|x\|_A \leq \|L_x\|.$$

Així doncs, $\|x\|_A = \|L_x\|$.

A més $\phi(x^*) = \phi(x)^*$, ja que $\phi(x^*) = L_{x^*} = (L_x)^* = \phi(x)^*$. Això prova que ϕ és un isomorfisme*.

És clar que $\phi(A)$ té codimensió 1. En efecte,

$$\text{codim}(\phi(A)) = \dim(B/\phi(A)) = \dim(A_1/J) = 1,$$

on la darrera igualtat ja va ser provada en la proposició (2.3). $\square$

Observació 3.39. En el que segueix serà molt important saber quina és la relació entre Δ_A i Δ_B .

Com $\psi(e) = 1$ per tot $\psi \in \Delta_B$, cada $\varphi \in \Delta_A$ té una única extensió $\tilde{\varphi} \in \Delta_B$ definida per

$$\tilde{\varphi}(x + \lambda e) = \varphi(x) + \lambda, \quad \forall x \in A, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sigui $\tilde{\Delta}_A = \{\tilde{\varphi} : \varphi \in \Delta_A\}$. A més, sigui φ_∞ l'homomorfisme de B en $\mathbb{C}$ amb nucli A , és a dir, $\varphi_\infty(x + \lambda e) = \lambda$. Aleshores

$$\Delta_B = \tilde{\Delta}_A \cup \{\varphi_\infty\}.$$

En efecte, si $\psi \in \Delta_B$ i $\psi \neq \varphi_\infty$, aleshores $\psi|_A \in \Delta_A$ i per tant $\psi = \widetilde{\psi|_A}$. Identificant Δ_A amb $\tilde{\Delta}_A \subseteq \Delta_B$ sempre pensarem Δ_A com a subconjunt de Δ_B . En aquest sentit, $\Delta_B = \Delta_A \cup \{\varphi_\infty\}$.

A més es pot comprovar que $\Delta_B = \Delta_A \cup \{\varphi_\infty\}$ és la compactificació d'Alexandroff de Δ_A (veure, per exemple, el teorema 2.2.3 de [9]).

Observació 3.40. Denotem per $\mathcal{U}_A$ i $\mathcal{U}_B$ les bases d'entorns com en la definició (3.18) en Δ_A i Δ_B , respectivament. Aleshores, per a $\varphi \in \Delta_A$, $\varepsilon > 0$ i un subconjunt finit F de A tenim que

$$\mathcal{U}_B(\varphi, F, \varepsilon) = \begin{cases} \mathcal{U}_A(\varphi, F, \varepsilon) \cup \{\varphi_\infty\} & \text{si } |\varphi(x)| < \varepsilon \text{ per tot } x \in F, \\ \mathcal{U}_A(\varphi, F, \varepsilon) & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Fent servir que la topologia d'un espai vectorial topològic queda completament determinada per qualsevol base d'entorns (veure, per exemple, la secció 1.7 de [17]), se segueix que la topologia de Gelfand de Δ_A coincideix amb la restricció de la topologia de Gelfand de Δ_B .

Definició 3.41. Sigui X un espai topològic localment compacte. Diem que una funció $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ s'**anul·la a l'infinit** si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $K \subseteq X$ compacte tal que per tot $x \notin K$, $|f(x)| < \varepsilon$, o equivalentment, si per tot $\varepsilon > 0$, $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ és compacte.

Denotem per $\mathcal{C}_0(X)$ el conjunt de les funcions complexes contínues definides en X que s'anul·len a l'infinit.

Observació 3.42. Notem que si x_0 és un punt en un compacte de Hausdorff X hi ha un isomorfisme natural $\{f \in \mathcal{C}(X) : f(x_0) = 0\} \cong \mathcal{C}_0(X \setminus \{x_0\})$, donat per $f \mapsto f|_{X \setminus \{x_0\}}$, on estem considerant X com la compactificació d'Alexandroff de $X \setminus \{x_0\}$ donada per la inclusió.

Teorema 3.43. Sigui A una C^* -àlgebra commutativa i no unitària i sigui B la seva unitarització. Aleshores la restricció de la transformada de Gelfand $\Gamma : B \rightarrow \mathcal{C}(\Delta_B)$ a A és un isomorfisme* isomètric entre A i $\mathcal{C}_0(\Delta_A)$.

Demostració. Sigui $\varphi_\infty \in \Delta_B$ com en l'observació (3.39), i considerem A identificat amb $\phi(A)$ (veure la proposició (3.38)), de manera que $A \subseteq B$. Si $a \in A$, aleshores $\hat{a}(\varphi_\infty) = \varphi_\infty(a) = 0$ per definició de φ_∞ . Així doncs

$$\Gamma(a) = \hat{a} \in \{f \in \mathcal{C}(\Delta_B) : f(\varphi_\infty) = 0\} \cong \mathcal{C}_0(\Delta_B \setminus \{\varphi_\infty\}) = \mathcal{C}_0(\Delta_A),$$

on la darrera igualtat surt del que vam veure en l'observació (3.39). Per tant $\Gamma(A) \subseteq \mathcal{C}_0(\Delta_A)$. A més tenim que clarament $\Gamma|_A : A \rightarrow \mathcal{C}_0(\Delta_A)$ és un homomorfisme* isomètric, ja que per restricció hereta aquestes propietats de Γ . Ens manca veure'n l'exhaustivitat. Tenim que

$$(3.25) \quad \Gamma(A) \subseteq \mathcal{C}_0(\Delta_A) \subsetneq \mathcal{C}(\Delta_B),$$

on la darrera inclusió és estricta ja que, per exemple, la funció constant igual a 1 pertany a $\mathcal{C}(\Delta_B)$ però no pertany a $\mathcal{C}_0(\Delta_A)$ (prenent $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\{\varphi \in \Delta_A : 1 \geq \frac{1}{2}\} = \Delta_A$, que no és compacte).

Vegem que $\Gamma(A)$ és un ideal propi de $\mathcal{C}(\Delta_B)$. Per tot $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \Gamma(A)$, $\widehat{a_1 + a_2} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \in \Gamma(A)$. A més, per tot $\alpha \in \mathbb{C}$ i per tot $\hat{a}_1 \in \Gamma(A)$, $\alpha \hat{a}_1 = \widehat{\alpha a_1} \in \Gamma(A)$. Finalment per tot $\hat{a} \in \Gamma(A)$ i per tot $\hat{b} \in \mathcal{C}(\Delta_B) = \Gamma(B)$, $(\hat{a}\hat{b})(h) = \hat{a}(h)\hat{b}(h) = h(a)h(b) = h(ab) = \widehat{ab}(h)$, per tot $h \in \Delta_B$. Per tant $\hat{a}\hat{b} = \widehat{ab} \in \Gamma(A)$. Hem usat que $ab \in A$ ja que A és (isomorf a) un ideal de B . Que és propi és clar de (3.25).

Vegem que $\Gamma(A)$ és maximal. Pel teorema d'isomorfia aplicat a $\Gamma|_A : A \rightarrow \mathcal{C}_0(\Delta_A)$ tenim que $\Gamma(A) \cong A/\{0\} \cong A$, on hem fet servir que $\ker(\Gamma|_A) = \{0\}$ ja que $\Gamma|_A$ és injectiva. Així doncs $\text{codim}(\Gamma(A)) = \text{dim}(\mathcal{C}(\Delta_B)/\Gamma(A)) = \text{dim}(B/A) = \text{dim}(\mathbb{C}) = 1$. Per tant el mateix argument que ja vam fer servir en la demostració de la part (b) del teorema (3.15) ens permet concloure que $\Gamma(A)$ és maximal.

Ara hem de veure que $\mathcal{C}_0(\Delta_A)$ és un ideal propi de $\mathcal{C}(\Delta_B)$. Si $f, g \in \mathcal{C}_0(\Delta_A)$, aleshores

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists K_1 \subseteq \Delta_A \text{ compacte} : \forall \varphi \notin K_1, |f(\varphi)| < \varepsilon_1, \text{ i} \\ \forall \varepsilon_2 > 0 \exists K_2 \subseteq \Delta_A \text{ compacte} : \forall \varphi \notin K_2, |g(\varphi)| < \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Prenem $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ i $K = K_1 \cup K_2 \subseteq \Delta_A$ compacte i tenim que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \subseteq \Delta_A \text{ compacte} : \forall \varphi \notin K, |f(\varphi) + g(\varphi)| < \varepsilon.$$

Així doncs, $f + g \in \mathcal{C}_0(\Delta_A)$.

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ i $f \in \mathcal{C}_0(\Delta_A)$, aleshores $\alpha f \in \mathcal{C}_0(\Delta_A)$. En efecte, es verifica que per tot $\varepsilon > 0$, $\{\varphi \in \Delta_A : |\alpha f(\varphi)| \geq \varepsilon\} \subseteq \Delta_B$ és compacte per ser tancat dins d'un compacte, ja que $\{\varphi \in \Delta_A : |\alpha f(\varphi)| < \varepsilon\} = (\alpha f)^{-1}(B_\varepsilon(0))$, que és obert en Δ_B . Hem fet ús del fet que $f \in \mathcal{C}(\Delta_B)$.

Si $f \in \mathcal{C}_0(\Delta_A)$ i $g \in \mathcal{C}(\Delta_B)$, aleshores $fg \in \mathcal{C}_0(\Delta_A)$. En efecte, es verifica que per tot $\varepsilon > 0$, $\{\varphi \in \Delta_A : |f(\varphi)g(\varphi)| \geq \varepsilon\} \subseteq \Delta_B$ és compacte per ser tancat dins d'un compacte, ja que $\{\varphi \in \Delta_A : |f(\varphi)g(\varphi)| < \varepsilon\} = (fg)^{-1}(B_\varepsilon(0))$, que és obert en Δ_B . De nou hem fet ús del fet que $f \in \mathcal{C}(\Delta_B)$.

Com $\Gamma(A) \subseteq \mathcal{C}_0(\Delta_A)$, la maximalitat de $\Gamma(A)$ implica que $\Gamma(A) = \mathcal{C}_0(\Delta_A)$, d'on se segueix l'exhaustivitat. $\square$

Exemple 3.44. Considerem l'àlgebra de Banach commutativa i no unitària $L^1(\mathbb{R})$ (veure els exemples (2.10) i (3.24)). La podem dotar de la involució $f \mapsto \bar{f}$. No obstant, no es tracta d'una C^* -àlgebra. En efecte, prenent $f \in L^1(\mathbb{R})$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1, & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

es comprova fàcilment que $\|f * \bar{f}\|_1 \neq \|f\|_1^2$.

En aquest cas la transformada de Gelfand $f \mapsto \hat{f}$ de $L^1(\mathbb{R})$ a $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, que és simplement la transformada de Fourier, és un isomorfisme* que no és isomètric. En efecte, es pot comprovar que la successió de funcions $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, definida per

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-(1 + ni)t^2),$$

$t \in \mathbb{R}$, satisfà que $\|f_n\|_1 = 1$ per tot $n \in \mathbb{N}$, però $\|\hat{f}_n\|_\infty \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$. Per a veure-ho resulta útil la fórmula $\int_{\mathbb{R}} \exp(-ist - zt^2) dt = (\frac{\pi}{z})^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{s^2}{4z})$, que és vàlida per tot $s \in \mathbb{R}$ i per tot $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(z) > 0$.

Això posa de manifest que en el teorema (3.43) la hipòtesi que la norma satisfaci (3.18) és necessària.

4 Conclusions

Una de les conclusions més rellevants que es poden extreure d'aquest treball és que les àlgebres de Banach proveeixen un marc abstracte que unifica les propietats de molts exemples concrets provinents de diferents àrees de l'anàlisi matemàtica. Entre aquests exemples se'n troben alguns que ja havia abordat en algunes assignatures del grau, com ara les funcions contínues sobre un compacte, que van ser estudiades a l'assignatura d'anàlisi matemàtica, i els operadors en un espai de Hilbert, que foren estudiats en el curs d'anàlisi real i funcional.

Hem pogut constatar al llarg del treball que en el desenvolupament de la teoria de les àlgebres de Banach la interacció entre àlgebra, anàlisi i topologia és constant. Per exemple hem pogut demostrar un resultat de l'anàlisi de Fourier (veure el teorema (3.17)) fent ús de tècniques provinents de les àlgebres de Banach.

Com a continuació d'aquest treball es podria abordar la demostració del teorema de Gelfand-Naimark en el cas no commutatiu (veure, per exemple, el teorema 12.41 de [17]). També es podria estendre cap als dominis de la teoria espectral, donat que es pot demostrar una certa versió del teorema espectral (veure, per exemple, el teorema 12.22 de [17]) fent ús del teorema de Gelfand-Naimark (3.32). Finalment, podria ser interessant estudiar les connexions de la teoria de les C^* -àlgebres amb la mecànica quàntica (veure, per exemple, [14] i [19]).

Referències

- [1] Ambrose, W.: *Structure theorems for a special class of Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 364–386.
- [2] Arveson, W.: *An invitation to C^* -algebras*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [3] Arveson, W.: *A short course on spectral theory*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [4] Bachman, G.; Narici, L.: *Functional analysis*, Dover Publications, 2000.
- [5] Cerdà, J.: *Linear functional analysis*, Graduate Studies in Mathematics **116**, Amer. Math. Soc., Providence, 2010.
- [6] Doran, R.S.; Belfi, B.A.: *Characterizations of C^* -algebras; The Gelfand-Naimark theorems*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1986.
- [7] Gelfand, I. M.: *Normierte Ringe*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) **51** (1941), 3–24.
- [8] Gelfand, I. M.; Raikov, D. A.; Shilov, G. E.: *Les anneaux normés commutatifs*, Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1964.
- [9] Kaniuth, E.: *A course in commutative Banach algebras*, Springer-Verlag, New York, 2009.
- [10] Katznelson, Y.: *An introduction to harmonic analysis*, Dover Publications, New York, 1976.
- [11] Loomis, L.H.: *An introduction to abstract harmonic analysis*, D. Van Nostrand Co., Princeton, N.J., 1953.
- [12] Murphy, G.J.: *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, 1990.
- [13] Nagumo, M.: *Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen*, Japan J. Math. **13**, (1936), 61–80.
- [14] Moretti, V.: *Spectral Theory and Quantum Mechanics*, 2a edició, Springer International Publishing, 2017.
- [15] Rudin, W.: *Principles of mathematical analysis*, 3a edició, McGraw-Hill Book Co., 1976.
- [16] Rudin, W.: *Real and complex analysis*, 3a edició, McGraw-Hill Book Co., 1987.
- [17] Rudin, W.: *Functional analysis*, 2a edició, McGraw-Hill Book Co., 1991.
- [18] Runde, V.: Why Banach algebras?,
[arXiv:1206.1366v2 \[math.HO\]](https://arxiv.org/abs/1206.1366v2), juny de 2012.
- [19] Teschl, G.: *Mathematical Methods in Quantum Mechanics; With Applications to Schrödinger Operators*, 2a edició, Graduate Studies in Mathematics **157**, Amer. Math. Soc., Providence, 2014.
- [20] Teschl, G.: *Topics in linear and nonlinear functional analysis*, Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, (pendent de publicació).