



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teoria de control clàssica per
sistemes dinàmics continus

Autor: Anna Real Casals

Director: Dr. Arturo Vieiro Yanes

Realitzat a: Departament
de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de gener de 2020

Abstract

The main objective of this study is the analysis of the behavior of continuous dynamic systems. The key to this study is the control, a variable that drives the system to achieve a fixed final state. Controllability, observability and stability are aspects that affect the choice of an adequate control. Attention has been focused on two types of control.

The first one is the PID control, which is focused on feedback to produce a proportional, derivative and integral adjustment on the system, hence its name. This control has been implemented for the classical pendulum under the action of the gravitational force and without friction.

The other one is the optimal control. The objective of this control for the dynamic system is to optimize a functional. The conditions have been studied to ensure that a control is an optimal control in different situations.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és l'estudi del comportament dels sistemes dinàmics continus. La base d'aquest estudi és el control, una variable que provoca l'assoliment per part del sistema d'un estat final fixat. La controlabilitat, l'observabilitat i l'estabilitat són aspectes que influeixen a l'hora d'escollir un control adequat. S'ha centrat l'atenció en dos tipus de control.

El primer és el control PID, que es basa en la retroalimentació per produir una correcció proporcional, derivada i integral sobre el sistema, d'aquí el seu nom. S'ha implementat aquest control pel pèndol clàssic sota l'acció de la força gravitatòria i sense fregament.

El segon és el control òptim. L'objectiu d'aquest control aplicat al sistema dinàmic és optimitzar un funcional. S'han estudiat les condicions per garantir que un control és un control òptim en diferents situacions.

Agraïments

M'agradaria agrair especialment al meu tutor Arturo Vieiro la seva predisposició, entusiasme, motivació i suport que m'ha donat. Ha sigut un gran tutor implicat fins al final. Vull agrair també a l'Eloi Puertas la seva col·laboració i ajuda en la supervisió d'alguns aspectes del treball. Finalment, voldria acabar donant les gràcies a la meva família per animar-me sempre i al Joan, que ha significat un gran suport per mi durant tot el grau.

Continguts

1	Introducció	iv
2	Sistemes dinàmics de control	1
2.1	Tipus de Control	2
3	Control PID	4
3.1	El pèndol: estabilització de l'equilibri inestable amb un control PID	4
3.2	Il·lustracions numèriques	8
4	Controlabilitat, Estabilitat i Observabilitat	11
4.1	Controlabilitat	11
4.1.1	Controlabilitat sota limitacions de control	16
4.2	Observabilitat	19
4.3	Estabilitat	21
4.3.1	Estabilitat en sentit de Lyapunov	27
4.3.2	Controlabilitat no lineal	28
5	Teoria de control òptim	30
5.1	Control de temps òptim	31
5.1.1	Principi de bang-bang	32
5.1.2	Principi del màxim de Pontryagin	37
5.1.3	Exemple: Oscil·lador harmònic esmorteït	40
5.2	Maximització de l'n-èsima component de l'estat final	42
6	Conclusions	48
A	Estabilitat en sentit de Lyapunov	49
B	Codi desenvolupat: Control PID	50
	Referències	54

1 Introducció

Aquest treball presenta un recull de resultats de l'anomenada teoria de control clàssica. S'aprofundirà en l'estudi del comportament dels sistemes dinàmics continus i es veurà el paper d'aquests en l'àmbit de l'enginyeria i la física. S'il·lustraran alguns conceptes amb petits exemples i/o aplicacions de la teoria. Es centrarà l'atenció en els sistemes dinàmics amb evolució temporal contínua, definits per una equació diferencial ordinària.

L'any 1696 Johann Bernoulli va proposar el problema següent: donats dos punts A i B en un pla vertical, quina és la corba que minimitza el temps que triga una massa puntual en anar de A a B si aquesta es mou sota l'acció de la força gravitacional? Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli i l'Hôpital van contribuir en la resolució d'aquest problema i van demostrar que la corba solució es tractava d'un arc de cicloide entre A i B, l'anomenada braquistòcrona. Aquest resultat va comportar l'inici del càlcul variacional. Es pot considerar, des d'una perspectiva històrica, que la teoria de control, i en concret l'anomenat control òptim, és una continuació del càlcul variacional.

El treball està estructurat en cinc seccions i dos annexes. La primera secció (2) és una introducció a la teoria de control. Es fa referència a conceptes bàsics d'equacions diferencials i es presenta el context de la teoria de control, juntament amb la classificació dels controls en oberts o tancats.

En la secció 3 es presenta el control PID, un sistema de control que calcula la desviació entre un valor mesurat i un valor desitjat, i aplica la correcció corresponent sobre el sistema per poder reconduir la seva trajectòria. La correcció conté una part proporcional, derivativa i integral. Aquest control s'implementa pel pèndol clàssic amb l'objectiu d'estabilitzar-lo en la seva posició vertical. Posteriorment, s'il·lustren i es discuteixen els resultats obtinguts de la simulació del pèndol, en funció dels diferents valors que adopten les constants de proporcionalitat, derivació i integració.

Centrant l'atenció en el problema de la braquistòcrona, es poden descriure les tres propietats qualitatives dels sistemes de control que conformen la secció 4. Aquestes són la controlabilitat, l'observabilitat i l'estabilitat. La controlabilitat permet que el sistema que descriu la corba, assoleixi B dins d'un interval de temps concret. Més generalment, donat un estat inicial del sistema, aquest ha de poder assolir qualsevol altre estat dins de l'interval de temps. En la secció 4.1 es tracta el cas per sistemes lineals amb i sense limitacions de control. El cas no lineal es discuteix en la secció 4.3.2 ja que es necessiten resultats previs que es donen en l'estudi de l'estabilitat no lineal. L'observabilitat permet determinar qualsevol estat del sistema en un temps concret únicament a partir de les sortides del controlador. Finalment, l'estabilitat reconduïx la trajectòria de la massa si aquesta es desvia a causa d'una pertorbació o bé per un error en les variables del sistema. Per tant, evita que es produeixin oscil·lacions en el sistema, provocant que les variables assoleixin el valor que els hi correspon. L'estabilitat no lineal es tracta en el sentit de *Lyapunov*.

La secció 5 es centra en el control òptim, un tipus de control que s'usa per optimitzar el control triat segons algun criteri en sistemes que evolucionen en el temps. S'hi enuncia *el principi de Pontryagin*, el qual es pot considerar com una generalització del càlcul variacional. En base a aquest principi es demostra l'existència del control òptim. En concret, es tracten dos casos particulars. El primer cas és el control de temps òptim on s'enuncia també *el principi de bang-bang*, útil per la caracterització dels controls òptims. A més, s'aplica per l'oscil·lador harmònic esmorteït. El problema de la braquistòcrona n'és un altre exemple. El segon cas és la maximització de l'n-èssima component de l'estat final.

Per últim la secció 6 està dedicada a les conclusions, per donar un recull dels aspectes i resultats més importants del treball.

En els annexes s'incorporen resultats necessaris per les definicions i demostracions de la secció 4.3.1 de *Lyapunov* i es presenta el codi utilitzat en la simulació del pèndol i l'oscil·lador harmònic, per tal de representar les seves trajectòries.

2 Sistemes dinàmics de control

La teoria de control estudia els anomenats sistemes dinàmics de control. L'objectiu és desenvolupar un model de control que controli aquests sistemes i/o permeti arribar a un estat del sistema concret. És a dir, donat un sistema de control dinàmic n -dimensional regit per una sèrie de paràmetres de control $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m$, $m, k > 0$, es tracta de fer evolucionar aquest sistema des d'un estat inicial a un estat final, prefixats, mitjançant els controls. Ara bé, cadascun dels controls provoca un canvi en la llei d'evolució del sistema. Per tant, hem de trobar el control que fa òptim el funcionament. Fixat l'estat final del sistema, aquells controls que aconseguen dur el sistema a aquest estat s'anomenen controls admissibles. Designarem per \mathcal{U} la classe de controls admissibles.

Un sistema dinàmic de control es defineix com el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (S)$$

on $u : [t_0, \infty) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ compacte, és la funció de control contínua a trossos, que per $0 < t_1 < t_2 < t_3 \dots$ pren els valors u_1, \dots, u_k , $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $(t_0, x_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ obert i $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ és la llei del procés de classe C^0 respecte t i C^1 respecte x, u . L'equació $\dot{x} = f(t, x, u)$ s'anomena equació diferencial ordinària.

Sota certes condicions es pot garantir existència i unicitat de solucions del problema de Cauchy. Cal mencionar que les condicions típiques (hipòtesis del teorema de Picard) no apliquen en general a sistemes de control, ja que el control no és una variable contínua sinó contínua a trossos. Hi ha resultats (hipòtesis de Caratheodory) que permeten garantir existència i unicitat en contextos més generals que apliquen a aquests sistemes. En aquest treball suposarem l'existència i unicitat de solució del problema de Cauchy associat al sistema dinàmic de control considerat.

Recordem alguns conceptes de la teoria d'equacions diferencials.

Una equació diferencial ordinària és autònoma quan no depèn de t , de fet, suposant suficient regularitat respecte (t, x, u) podem reduir una equació diferencial ordinària no autònoma a una autònoma. Com que l'equació diferencial depèn també d'una variable de control, primer definim un canvi de variable $z = (x, u)$ per tal que l'equació només depengui de t i x , i tenim

$$\dot{z} = (\dot{x}, \dot{u}) = (f(t, x, u), 0) = F(t, z).$$

Ara definim un nou canvi $y = (t, z)$ i aleshores

$$\dot{y} = (\dot{t}, \dot{z}) = (1, F(t, z)) = H(y),$$

que és l'equació diferencial autònoma de la qual parlàvem.

La solució del problema de Cauchy (S) és una corba

$$\varphi : I(t_0, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t_0, x_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

que compleix

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, u) \text{ i } \varphi(t_0) = x_0,$$

on $I(t_0, x_0)$ és l'interval de definició maximal de la solució del problema de Cauchy (S), que depèn dels controls (el control el suposem fixat). Sabem de l'assignatura (d'Equacions diferencials) que un problema de Cauchy té un interval de definició que pot ser finit, però a nosaltres ens interessen solucions definides a tot \mathbb{R} . Volem que el control mantingui la solució del problema (S) acotada (altrament el control serà no admissible), la qual cosa garanteix que l'interval de definició és $I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$. Això és conseqüència del Teorema d'aproximació a la frontera, vegi's per exemple [8].

2.1 Tipus de Control

En la teoria de control es distingeixen dos tipus de control:

Control obert: En aquest tipus de control no hi ha retroalimentació. El valor de la variable d'entrada del controlador es determina segons un model específic que defineix l'evolució del sistema en el temps. Per tant, els controladors d'aquest tipus de sistemes no poden modificar la seva entrada, ni el procés, a partir de les dades que s'obtenen. Com a conseqüència del seu baix cost, és útil en sistemes on és poc probable que les condicions variïn o es coneix una certa relació entre elles, ja que el control obert no permet modificar el comportament en presència de perturbacions.

Control tancat: Es basa en la retroalimentació per controlar l'estat i les sortides del sistema. L'entrada del sistema té un efecte sobre la sortida del sistema, de tal manera que mesurant la sortida amb uns sensors i processant-los al controlador podem controlar l'error que es produeix entre l'estat del sistema i l'estat desitjat, per així modificar l'entrada adequadament. Requereix, per tant, monitoritzar l'evolució de l'estat del sistema al llarg del temps. La manera concreta com es produeix aquesta retroalimentació l'explicarem més endavant.

Un sistema de control tancat es sol representar per diagrames funcionals com el que es representa a la figura 1, veure, per exemple, el curs de Coursera "Control of Mobile Robots" <https://www.coursera.org/learn/mobile-robot#syllabus>.

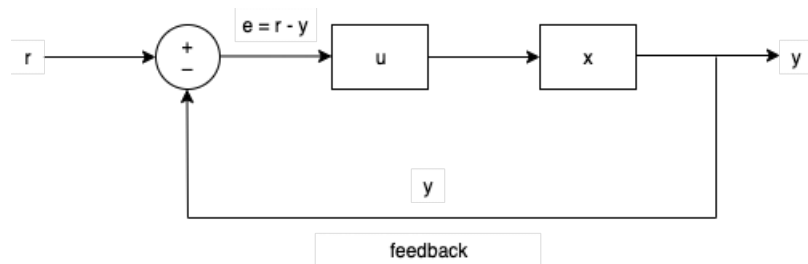


Figura 1: Esquema d'un sistema de control tancat.

Les parts que componen el diagrama de la figura 1 són:

- *Estat* (x): Representa el valor del sistema en l'instant t .
- *Referència* (r): Valor desitjat del sistema (estat final).
- *Entrada* (u): Senyal de control.
- *Sortida* (y): Valor mesurable del sistema. És el que anomenarem valor observat quan parlarem d'observabilitat.
- *Error* (e): Diferència entre el valor mesurat i el desitjat.
- *Feedback*: Retroalimentació del sistema, que s'usa en els sistemes de control tancat, dels quals en parlarem posteriorment.

En un sistema n -dimensional les dimensions d'aquestes variables són $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y, r, e \in \mathbb{R}^r$ on $m, n > 1$ i $r < n$.

3 Control PID

Per tal d'explicar què s'entén per retroalimentació, presentem en aquesta secció l'anomenat control PID que és un dels tipus de control de retroalimentació més comú en, per exemple, àmbits industrials i de robòtica. Es tracta d'un control que dona estabilitat, seguiment i robustesa al procés.

El control PID (*proportional-integral-derivative feedback*) com bé diu el seu nom, està compost per tres termes:

- Proporcional (P): Contribueix a l'estabilitat del sistema. Reajusta la variable de control del sistema de manera proporcional a l'error comès. La constant de proporcionalitat K_P tendeix a minimitzar l'error, és a dir, si l'error augmenta, la constant també augmentarà. Per contra, comporta que augmenti la velocitat de resposta, i per tant, podem acabar tenint un sistema que provoqui oscil·lacions fora de control.
- Derivatiu (D): És proporcional a la variació de l'error. La constant de derivació K_D evita que es produeixin oscil·lacions disminuint la velocitat del sistema a mesura que s'aproxima a la referència desitjada. Dóna robustesa al sistema, ja que fa que el control reaccioni de manera més contundent als canvis en el terme d'error. Per contra, provoca una major debilitat del control enfront a pertorbacions.
- Integral (I): Té en compte tot l'error acumulat al llarg de la història de la trajectòria per dificultar l'acció de les pertorbacions. D'aquesta manera s'aconsegueix reduir l'error del sistema. Com a desavantatge, la constant d'integració K_I provoca que torni a augmentar la velocitat del sistema i per tant, que es torni a generar una certa inestabilitat.

Il·lustrarem a continuació, l'efecte dels termes d'un control PID en un sistema dinàmic concret: el pèndol clàssic.

3.1 El pèndol: estabilització de l'equilibri inestable amb un control PID

Els resultats d'aquesta secció estan basats en la referència [7].

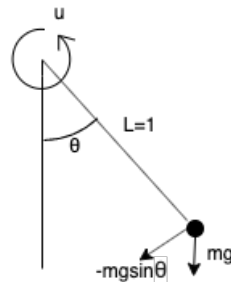


Figura 2: Representació esquemàtica d'un pèndol sota l'acció gravitacional.

El moviment del pèndol clàssic sota l'acció de la força gravitatòria i sense fregament, veure la figura 2, ve determinat per l'equació

$$m\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0.$$

Si normalitzem g aleshores tenim

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta, \tag{3.1}$$

i si fem el canvi $x = \theta$ i $y = \dot{\theta}$, ens queda el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}.$$

Tenim així un sistema mecànic natural, amb una integral primera H suma de l'energia cinètica (forma quadràtica de les velocitats) i potencial, donada per

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x.$$

La descripció del retrat de fase d'aquest sistema es pot obtenir a partir de l'estudi del potencial $V(x) = -\cos x$. El representem usant el software Pplane <https://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html> a la figura 3. Si definim l'angle θ com l'angle que forma el pèndol

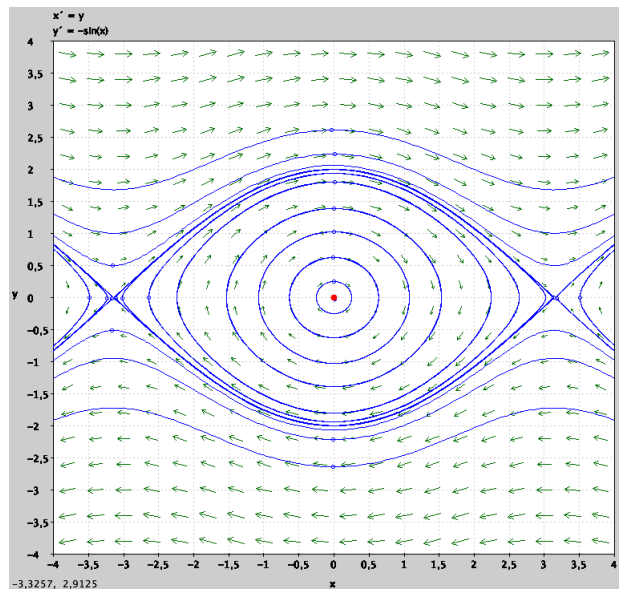


Figura 3: Retrat de fase del pèndol sense control.

respecte l'origen en sentit antihorari. El retrat de fase il·lustra l'evolució del pèndol en el pla $(\theta, \dot{\theta})$. Les òrbites es poden classificar en les descrites a continuació:

- El pèndol es troba a $\theta = \pi \pmod{2\pi}$ en els punts de sella (hiperbòlica). És a dir, en la posició d'equilibri inestable.
- Les òrbites que passen per un punt de la forma $x = 0$ i $y > 2$ es corresponen a moviments de rotació.

- Les òrbites que envolten l'origen, el punt d'equilibri estable, es corresponen a moviments de llibració. Quan la velocitat angular és negativa el pèndol passa de formar un angle θ amb la vertical a formar un angle $-\theta$ (amb $|\theta| \approx \pi$). Quan la velocitat angular és positiva passa el contrari (aquí $|\theta| \approx 0$).

L'objectiu del problema és estabilitzar la posició d'equilibri inestable $\theta = \pi$, afegint un control $u \in \mathbb{R}$, de manera que l'equació del moviment és

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta + u. \quad (3.2)$$

Observem que aquest sistema és no lineal, per tant, si el linealitzem prop de $\theta = \pi$, com

$$\sin \theta = \sin \pi + \cos \pi(\theta - \pi) + O((\theta - \pi)^2) = -(\theta - \pi) + O((\theta - \pi)^3),$$

i introduïm $\varphi := \theta - \pi$, l'equació (3.2) es transforma en l'equació lineal

$$\ddot{\varphi} = \varphi + u.$$

El següent pas és saber com dissenyem el control u . Hem de tenir en compte que quan $\varphi = \theta - \pi > 0$ el pèndol s'ha de moure cap a la dreta per arribar al punt d'equilibri i al contrari, quan $\varphi < 0$, s'ha de moure cap a l'esquerra. Dissenyem doncs un control proporcional a la posició del pèndol

$$u = -K_P \varphi \quad \text{on } K_P > 0,$$

que supleixi la necessitat esmentada. Substituint el nou control u al sistema lineal, obtenim el sistema tancat

$$\ddot{\varphi} = \varphi - K_P \varphi = (1 - K_P)\varphi.$$

Anem a estudiar el caràcter lineal del punt fix (l'origen) del sistema dependent del paràmetre K_P . Sigui $z = (\varphi, \dot{\varphi})$, aleshores el sistema dóna lloc al problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - K_P & 0 \end{pmatrix} z \\ z(0) = (\varphi(0), \dot{\varphi}(0)) = z_0 \end{cases}.$$

El polinomi característic de la matriu del sistema és

$$p(\lambda) = \lambda^2 + K_P - 1, \quad \text{que implica } \lambda = \pm\sqrt{1 - K_P}.$$

Si $K_P = 1$ tenim un valor propi $\lambda = 0$ doble, que ens indica que l'origen és un punt parabòlic. El sistema ara és

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}.$$

Per tant, $y = 0$ és una recta de punts fixos, en concret l'origen és un punt fix. Les solucions del problema de Cauchy en aquest cas no s'aproximen mai a $\varphi = 0$, ja que les rectes $y = c$, $c \in \mathbb{R}$, són isoclines horitzontals, veure figura 12.

Si $K_P < 1$ tenim dos valors propis reals diferents $\lambda = \pm\sqrt{1 - K_P}$, és a dir, l'origen és un punt hiperbòlic, concretament un punt de sella. En aquest cas totes les solucions del problema de Cauchy divergeixen cap a $\pm\infty$, tret de les solucions amb condicions inicials sobre la varietat estable del sistema, veure figura 13. Però com que es tracta d'un sistema lineal tenim que es compleix $W^s(0) \equiv E^s(0)$, on $E^s(0)$ és el subespai lineal propi de valor propi negatiu. D'aquesta manera, donat el vector propi $(1, -2\sqrt{1 - K_P})$ de valor propi $\lambda = -\sqrt{1 - K_P}$, les solucions sobre la varietat estable $E^s(0)$ són aquelles amb condicions inicials $(\varphi(0), \dot{\varphi}(0))$ que compleixen la relació

$$\dot{\varphi}(0) = -2\sqrt{1 - K_P}\varphi(0).$$

Aquestes solucions provoquen que el pèndol s'allunyi de la vertical quan es troba suficientment aprop. Aquest efecte del pèndol el podem justificar agafant $\varphi(0)$ petit i $\dot{\varphi}(0) = 0$, ja que llavors es té $\ddot{\varphi}(0) > 0$ i per tant, existeix $[0, \tilde{t})$ amb \tilde{t} suficientment petit, tal que $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$ augmenten.

Si $K_P > 1$ aleshores tenim dos valors propis complexos diferents $\lambda = \pm i\sqrt{K_P - 1}$, els quals són purament imaginaris. Per tant, l'origen és un punt el·líptic, concretament un centre. Així doncs, totes les solucions tenen un caràcter oscil·latori, veure figura 14. Quan el pèndol s'apropa cada vegada més al punt d'equilibri es continua produint una petita oscil·lació, ja que el control continua empenyent el pèndol fins que sobrepassa la vertical.

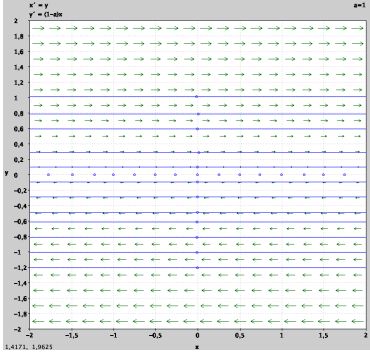


Figura 4: $K_P = 1$.

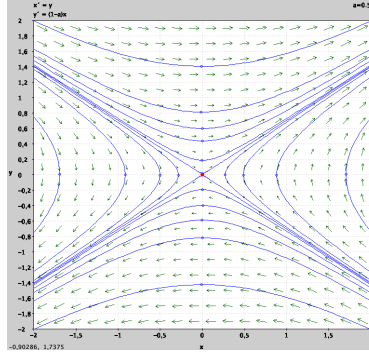


Figura 5: $K_P < 1$.

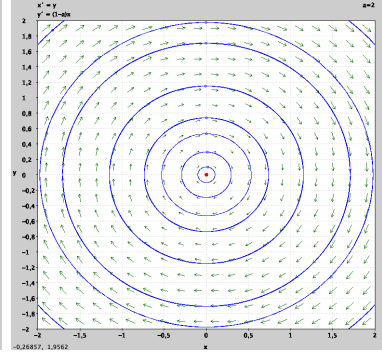


Figura 6: $K_P > 1$.

Arribem a la conclusió que un control proporcional no permet garantir l'aproximació del pèndol cap a la vertical. El cas més favorable és el de $K_P > 1$. Podem millorar el seu comportament afegint un terme diferencial al control, que actui com a fricció penalitzant la velocitat que agafa el pèndol en l'oscil·lació. Obtenim així un nou control definit de la següent manera

$$u = -K_P\varphi - K_D\dot{\varphi} \quad \text{on } K_P > 1, K_D > 0.$$

Tornem a substituir el nou control en el sistema lineal i obtenim

$$\ddot{\varphi} = (1 - K_P)\varphi - K_D\dot{\varphi},$$

que si denotem com abans $z = (\varphi, \dot{\varphi})$, ens proporciona el problema de Cauchy lineal

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - K_P & -K_D \end{pmatrix} z \\ z(0) = (\varphi(0), \dot{\varphi}(0)) = z_0 \end{cases} .$$

El seu polinomi característic és

$$p(\lambda) = \lambda^2 + K_D\lambda + K_P - 1, \quad \text{que implica } \lambda = \frac{-K_D \pm \sqrt{K_D^2 - 4(K_P - 1)}}{2}.$$

Com que els valors propis tenen part real negativa, les solucions convergeixen cap a zero. Algunes d'elles poden fer-ho amb oscil·lacions. Per evitar-les necessitem

$$K_D^2 > 4(K_P - 1), \quad \text{ja que aleshores } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Tot aquest estudi lineal del sistema el podem generalitzar localment al sistema no lineal gràcies al teorema de Hartman-Grobman, que el podem trobar a [8]. Recordem que aquest teorema ens diu que la dinàmica al voltant d'un punt d'equilibri hiperbòlic és topològicament conjugada (localment) a la dinàmica lineal.

Fins ara hem construït un control PD, però no hem tingut en compte que poden actuar pertorbacions (externes o internes) sobre el sistema. Arribats en aquest punt, un control PD no és suficient. Necessitem introduir el terme integral al control per tal que reculli l'error en el temps provocat per les pertorbacions. Obtenim així un control PID que té la següent forma

$$u = -K_P\varphi - K_D\dot{\varphi} - K_I \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \quad \text{amb } K_P > 1, K_D > 0 \text{ i } K_I > 0.$$

A continuació veurem que la definició d'aquest control, per diferents valors de K_P , K_D i K_I ens serveix per estabilitzar el pèndol en la posició $\theta = \pi$ tal com s'ha explicat.

3.2 Il·lustracions numèriques

Aquesta secció presenta una discussió dels resultats obtinguts a partir de la simulació del pèndol clàssic. Es pot veure el codi utilitzat en l'annex B. Per simplicitat, pel sistema no lineal s'ha fet servir el mètode d'Euler amb pas constant, on a cada pas es corregeix el control. Sigui $\varphi(t)$ la solució del sistema, ens centrarem en el comportament del sistema lineal amb condicions inicials $\varphi(0) = 0.1$, $\dot{\varphi} = 0.01$ i $\varphi(0) = 0.5$, $\dot{\varphi}(0) = 0.01$. Establirem una tolerància igual a 10^{-12} tal que si l'error es troba per sota, considerarem que el sistema convergeix, és a dir, que la solució està estabilitzada.

Siguin $K_P > 1$, $K_D > 0$ i $K_I > 0$ les constants de proporcionalitat, derivació i integració, començarem analitzant el cas sense pertorbacions sobre el sistema.

Com hem vist en la secció 3.1, es poden donar dos casos. En el primer cas les constants K_I i K_D compleixen $K_D^2 > 4(K_P - 1)$, i per tant, les solucions convergeixen cap a 0

sense oscil·lacions. Per $K_P = 100$, $K_D = 20$ i $\varphi(0) = 0.1$ tenim que la solució del sistema convergeix a 0 en un temps aproximat de 3 segons, en canvi ho fa en un temps de 13 segons si li apliquem la part integral amb $K_I = 105$. Si $K_P = 8$, $K_D = 6$ la solució convergeix en un temps de 14.2 segons, en canvi no hi ha cap valor de K_I pel qual la solució acabi convergint. En les gràfiques 7 i 8 es pot veure com evoluciona la solució del sistema en funció del temps pels casos anteriors. Per $\varphi(0) = 0.5$ el comportament és el mateix, però el sistema convergeix en un interval de temps més gran.

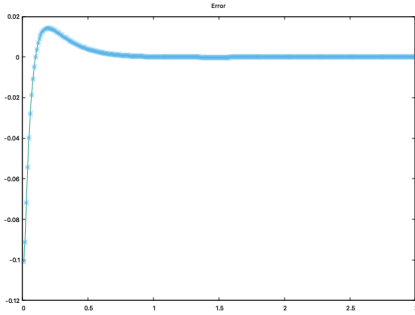


Figura 7: $K_P = 100$, $K_D = 20$.

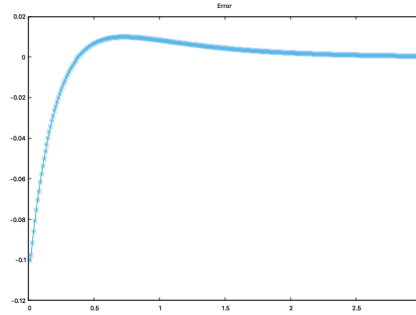


Figura 8: $K_P = 8$, $K_D = 6$.

El segon cas és el de les solucions que convergeixen amb oscil·lacions al voltant del punt inestable del sistema. La gràfica 9 mostra el seu comportament per $K_P = 50$ i $K_D = 6$. El temps que tarda la solució en assolir el punt d'equilibri és aquí 6.4 segons, en canvi si afegim $K_I = 60$ augmenta a 13.9 segons. En la gràfica 10 es pot apreciar la diferència quan apliquem el terme integral al control.

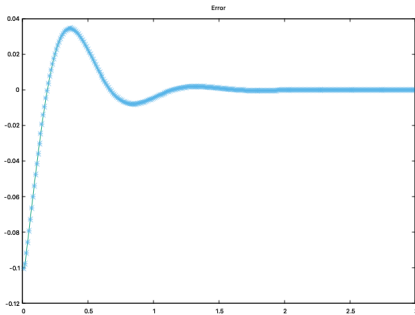


Figura 9: $K_P = 50$, $K_D = 6$.

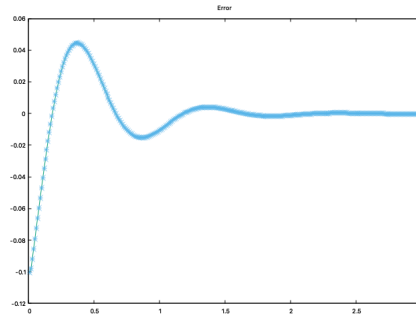


Figura 10: $K_P = 50$, $K_D = 6$, $K_I = 60$.

La gràfica 11 mostra un altre exemple de solució oscil·latòria, tot i que no s'aprecia tant bé l'oscil·lació, ja que les seves constants $K_P = 12$ i $K_D = 5$ prenen valors que quasi compleixen la inequació de les solucions no oscil·latòries.

Veiem doncs que si no actuen perturbacions sobre el sistema, el control PD és millor que el control PID, ja que les solucions convergeixen cap a 0 més ràpidament.

Considerem ara el sistema sotmès a una perturbació. Analitzarem l'efecte d'una pertor-

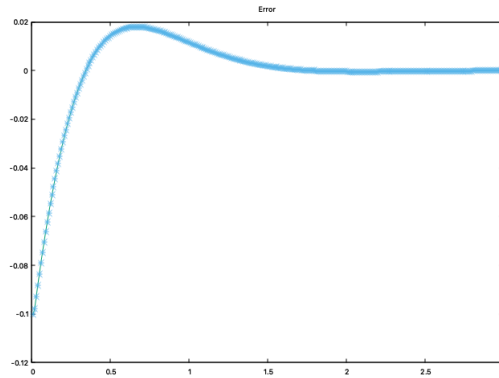


Figura 11: $K_P = 12$, $K_D = 5$.

bació fixa p que actua sobre el sistema de la manera següent:

$$\ddot{\varphi} = \varphi + u + p,$$

on u és el control PID.

Per tal d'il·lustrar el comportament triem $p = 2$, $\varphi(0) = 0.5$ i $K_P = 50$ i estudiem els casos en els que $K_D = 6$, $K_D = 10$ i $K_D = 12$. Aleshores, veurem per quins valors de K_I el sistema és estabilitzable. Les gràfiques següents representen t com a funció de K_I , on els punts al temps t corresponen als valors $46 \leq K_I \leq 104$, $K_I \in \mathbb{N}$.

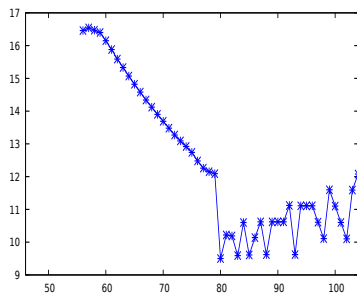


Figura 12: $K_D = 6$.

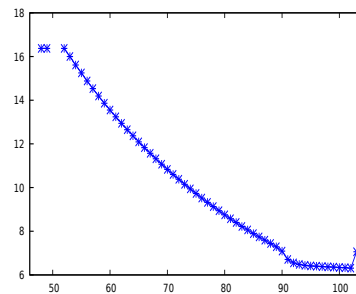


Figura 13: $K_D = 10$.

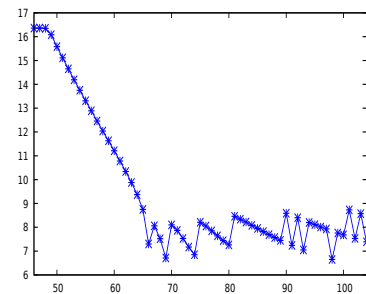


Figura 14: $K_D = 12$.

Es pot apreciar que el sistema és estabilitzable per diferents valors de les constants, però no per qualsevol. En concret, per $K_P = 50$, $K_D > 22$ i K_I prenent qualsevol valor, la solució no s'arriba a estabilitzar. Es pot observar a més, que hi ha certs valors que provoquen que el sistema assoleixi el punt inestable en un temps menor, la qual cosa ens porta a formular-nos la pregunta següent: existeixen valors de K_P , K_D i K_I , pels quals el pèndol s'estabilitza en el seu punt d'equilibri inestable en un temps mínim? Ho veurem més endavant en la secció 5.1.

4 Controlabilitat, Estabilitat i Observabilitat

4.1 Controlabilitat

Considerem l'exemple del pèndol linealitzat al voltant del punt d'equilibri inestable. Com ja hem vist en la secció 3.1, l'objectiu és dur la solució del sistema al punt d'equilibri inestable en temps finit. Aquest fet ens porta a introduir el concepte de controlabilitat. Els resultats que es presenten en aquesta secció es poden trobar en les referències [1], [3] i [5].

Estudiarem primer el cas lineal i després farem una generalització al cas no lineal.

Comencem considerant el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x \end{cases}, \quad (S_1)$$

on $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ són funcions contínues definides de \mathbb{R} a $\mathbb{R}^{n \times n}$, de \mathbb{R} a $\mathbb{R}^{n \times m}$ i de \mathbb{R} a $\mathbb{R}^{r \times n}$ respectivament, $u \in \mathcal{U}$ és una funció de control contínua a trossos, on \mathcal{U} és la classe de controls admissibles, $x \in \mathbb{R}^n$ és l'estat del sistema i $y \in \mathbb{R}^r$ és l'observable del sistema, és a dir, el que podem mesurar.

El sistema (S_1) és completament controlable (ho denotarem per *c.c* d'aquí en endavant) si per qualsevol instant inicial t_0 i qualsevol condició inicial $x(t_0) = x_0$ i final x_f , existeix $t_1 > t_0$ i existeix $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ tals que $x(t_1) = x_f$, és a dir, podem anar de qualsevol estat inicial a qualsevol estat final, mitjançant un control admissible en temps finit. Al parell (A, B) se l'anomena parell controlable.

Si considerem el pèndol amb un control PID adequat definit en la secció anterior, i la seva posició com l'observable, tenim un sistema com (S_1) independent del temps, on $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Acabarem veient que aquest sistema és controlable.

En el cas d'un sistema que no sigui *c.c*, existeixen alguns estats finals que no es poden assolir a través de cap control.

Fixats t_0 i t_1 , es defineix la matriu de controlabilitat simètrica

$$U(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_0, \tau) d\tau \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

que és independent del problema de Cauchy i de x_f , on $\Phi(t_0, \tau) = M(t_0)M^{-1}(\tau)$ és l'operador de transició de τ a t_0 , i M és la matriu fonamental principal del sistema $\dot{x} = Ax$, és a dir, les columnes de M són solucions del sistema i $M(t_0) = Id$

El següent teorema justifica el fet que anomenem a $U(t_0, t_1)$ matriu de controlabilitat.

Teorema 4.1. *Considerem donats un estat inicial x_0 , un estat final x_f , i un interval de temps $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Si existeix un vector $\beta \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$U(t_0, t_1)\beta = x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f,$$

aleshores el control definit com

$$u(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\beta, \quad \text{per } t_0 \leq t \leq t_1,$$

transfereix el sistema (S_1) des de $x(t_0) = x_0$ a $x(t_1) = x_f$. De fet, l'invers també és cert.

Demostració: $\Phi(t_0, t_1)$ és l'operador de transició del sistema $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, i com que $A(t)$ i $B(t)$ són contínues, podem utilitzar la fórmula de variació de constants pel sistema (S_1) amb $t = t_1$ i tenim

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \Phi(t_1, t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau] \\ &= \Phi(t_1, t_0)[x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)\beta d\tau] = \Phi(t_1, t_0)[x_0 - U(t_0, t_1)\beta] \\ &= \Phi(t_1, t_0)[x_0 - (x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f)] = \Phi(t_1, t_0)\Phi(t_0, t_1)x_f = x_f. \quad \square \end{aligned}$$

Corol·lari 4.1. *El cas particular en què $U(t_0, t_1)$ és regular, el control $u(t)$ és*

$$u(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)U^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f].$$

Demostració: Si $U(t_0, t_1)$ és no singular, aleshores existeix $U^{-1}(t_0, t_1)$ i, per tant,

$$\beta = U^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f].$$

Si substituïm β a la fórmula de $u(t)$ del teorema anterior obtenim

$$u(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)U^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f]. \quad \square$$

Com a conseqüència de la condició d'aquest corol·lari obtenim el següent teorema:

Teorema 4.2. *El sistema S_1 és c.c si i només si la matriu de controlabilitat $U(t_0, t_1)$ és regular.*

Demostració: La implicació d'esquerra a dreta és quasi directa. Assumint $U(t_0, t_1)$ regular, aleshores pel corol·lari 4.1, existeix $u(t)$ tal que

$$u(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)U^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f],$$

que ja hem vist que transfereix $x(t_0) = x_0$ a $x(t_1) = x_f$. Per l'altra implicació assumim (S_1) c.c i volem veure que $U(t_0, t_1)$ és no singular. Començarem suposant que és singular i arribarem a contradicció.

La forma quadràtica associada a la matriu de controlabilitat $U(t_0, t_1)$ aplicada al vector $\alpha \in \mathbb{R}^n$ és

$$\alpha^T U \alpha = \int_{t_0}^{t_1} \alpha^T \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)\alpha d\tau, \quad \text{per } t_0 \leq \tau \leq t_1.$$

Designem $\theta(\tau, t_0) := B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)\alpha$, i per tant

$$\alpha^T U \alpha = \int_{t_0}^{t_1} \theta^T(\tau, t_0) \theta(\tau, t_0) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|\theta\|_e^2 d\tau \geq 0.$$

Veiem així que $U(t_0, t_1)$ és semidefinida positiva. Suposem ara que existeix $\hat{\alpha} \neq 0$ tal que $\hat{\alpha}^T U(t_0, t_1) \hat{\alpha} = 0$. Aleshores per $\alpha = \hat{\alpha}$ tenim $\theta = \hat{\theta}$ i

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\hat{\theta}\|_e^2 d\tau = 0, \quad \text{si i només si } \hat{\theta}(\tau, t_0) \equiv 0. \quad (1)$$

D'altra banda, com que per hipòtesi (S_1) és *c.c.*, en particular, existeix un control $v(t)$ tal que si $x(t_0) = \hat{\alpha}$, aleshores $x(t_1) = 0$. Apliquem variació de constants per $t = t_1$ amb aquestes condicions i obtenim

$$0 = \Phi(t_1, t_0) [\hat{\alpha} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) v(\tau) d\tau], \quad \text{que implica } \hat{\alpha} = - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) v(\tau) d\tau.$$

Considerem ara $\|\hat{\alpha}\|_e^2 = \hat{\alpha}^T \hat{\alpha}$, aleshores per tenim

$$\|\hat{\alpha}\|_e^2 = - \int_{t_0}^{t_1} v^T(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_0, \tau) \hat{\alpha} d\tau = - \int_{t_0}^{t_1} v^T(\tau) \theta^T(\tau, t_0) d\tau \stackrel{(1)}{=} 0,$$

que implica $\hat{\alpha} = 0$.

Hem arribat a la contradicció que buscàvem, per tant $U(t_0, t_1)$ és semidefinida positiva i no singular. \square

Aquest teorema ens mostra que la controlabilitat de (S_1) no depèn de la matriu $C(t)$ que determina l'observable del sistema, com és natural. Pel cas concret d'un sistema autònom, podem considerar que $t_0 = 0$ en la definició de controlabilitat, i per tant, el segon teorema es reescriu com el següent.

Teorema 4.3. *El sistema de coeficients constants $\dot{x} = Ax + Bu$ és c.c si i només si*

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times nm},$$

té rang n .

Demostració: Comencem assumint que el sistema és *c.c* i volem veure que $\text{rang}(U) = n$. Suposarem que $\text{rang}(U) < n$ i arribarem a contradicció. Si $\text{rang}(U) < n$ aleshores existeix un vector $q \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$q^T U = 0 \iff q^T B = q^T AB = q^T A^2B = \dots = q^T A^{n-1}B = 0. \quad (1)$$

Sigui $u(t)$ el control que transfereix $x(0) = x_0$ a $x(t_1) = 0$, utilitzant la fórmula de variació de constants per $t = t_1$ amb $M(t) = e^{-At}$ matriu fonamental del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$, tenim

$$0 = x(t_1) = M[x_0 + \int_0^{t_1} M^{-1}(\tau) Bu(\tau) d\tau], \quad \text{que implica } x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Pel teorema de *Cayley-Hamilton* (veure [3]), podem escriure $e^{-A\tau}$ com un polinomi $r(A)$ de grau com a molt $n-1$

$$e^{-A\tau} = r(A) = r_0I + r_1A + \dots + r_{n-1}A^{n-1}.$$

Per tant, podem reescriure (2) com

$$x_0 = - \int_0^{t_1} (r_0I + r_1A + \dots + r_{n-1}A^{n-1})Bu(\tau)d\tau.$$

Aleshores si multipliquem pel vector q a cada banda de la igualtat obtenim

$$\begin{aligned} qx_0 &= - \int_0^{t_1} q(r_0I + r_1A + \dots + r_{n-1}A^{n-1})Bu(\tau)d\tau = \\ &= - \int_0^{t_1} (r_0qB + r_1qAB + \dots + r_{n-1}qA^{n-1}B)u(\tau)d\tau \stackrel{(1)}{=} 0. \end{aligned}$$

Acabem de veure que $qx_0 = 0$, i per tant $q = 0$, ja que el sistema és *c.c* i l'equació s'ha de complir per qualsevol x_0 . Arribem així a contradicció, i queda demostrat que $\text{rang}(U)=n$.

Per la implicació contrària, assumim $\text{rang}(U)=n$ i hem de veure que per qualsevol x_0 , existeix $u(\tau)$ amb $0 \leq \tau \leq t_1$ tal que aquest control transfereix el sistema des de $x(0) = x_0$ a $x(t_1) = 0$.

Sigui

$$u(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)U^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f],$$

el control que transfereix el sistema S_1 des de $x(t_0) = x_0$ a $x(t_1) = x_f$. Aleshores, pel sistema autònom amb $t_0 = 0$ i $x_f = 0$, tenim que $\Phi^T(t_0, t) = \Phi^T(0, t) = (M^{-1})^T(t) = e^{-A^T t}$, $U(t_0, t_1) = U(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}BB^T e^{-A^T\tau}d\tau := N^{-1}$ i per tant, el control anterior és ara

$$u(\tau) = -B^T e^{-A^T\tau}N^{-1}x_0,$$

que ja sabem que transfereix el sistema des de $x(0) = x_0$ a $x(t_1) = 0$. \square

Per tant, per veure que el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ és *c.c*, demostrar que $\text{rang}(U) = n$ és equivalent a demostrar que U és una matriu no singular. De fet, en alguns llibres anomenen a la matriu U , matriu de controlabilitat del sistema de coeficients constants.

Exemple. Basant-nos en el teorema 4.3 podem comprovar que el pèndol és controlable. En el sistema del pèndol tenim que $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, vegi's (S_1), aleshores com $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, tenim

$$U = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

i per tant, $\text{rang}(U) = 2$, és a dir, el pèndol és controlable.

Proposició 4.1. *Sigui $u(t)$ el control definit en el corol·lari 4.1 i $\hat{u}(t)$ un altre control que transfereix $x(t_0) = x_0$ a $x(t_1) = x_f$, aleshores per $\hat{u} \neq u$ es compleix*

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\hat{u}(\tau)\|_e^2 d\tau > \int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|_e^2 d\tau.$$

Demostració: Com que tant \hat{u} com u transfereixen $x(t_0) = x_0$ a $x(t_1) = x_f$ compleixen

$$x_f = \Phi(t_1, t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau],$$

$$x_f = \Phi(t_1, t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)\hat{u}(\tau)d\tau].$$

Aleshores,

$$\Phi(t_1, t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau] = \Phi(t_1, t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)\hat{u}(\tau)d\tau],$$

que implica

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)\hat{u}(\tau)d\tau,$$

i per tant,

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)[\hat{u}(\tau) - u(\tau)]d\tau = 0.$$

Si multipliquem a l'esquerra de la igualtat per $[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f]^T [U^{-1}(t_0, t_1)]^T$ obtenim

$$\int_{t_0}^{t_1} [x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_f]^T [U^{-1}(t_0, t_1)]^T \Phi(t_0, \tau)B(\tau)[\hat{u}(\tau) - u(\tau)]d\tau = 0,$$

que per la definició del control u aquesta integral és

$$\int_{t_0}^{t_1} u^T(\tau)[u(\tau) - \hat{u}(\tau)]d\tau = 0,$$

que implica

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|_e^2 d\tau = \int_{t_0}^{t_1} u^T(\tau)\hat{u}(\tau)d\tau. \quad (1)$$

Per tant, suposant $\hat{u} \neq u$ tenim

$$\int_{t_0}^{t_1} (u - \hat{u})^T (u - \hat{u})d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|u - \hat{u}\|_e^2 d\tau = \int_{t_0}^{t_1} (\|\hat{u}\|_e^2 + \|u\|_e^2 - 2u^T \hat{u})d\tau \stackrel{(1)}{=} \int_{t_0}^{t_1} (\|\hat{u}\|_e^2 - \|u\|_e^2)d\tau.$$

És a dir,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\hat{u}(\tau)\|_e^2 d\tau = \int_{t_0}^{t_1} (\|u\|_e^2 - \|u + \hat{u}\|_e^2)d\tau > \int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|_e^2 d\tau. \quad \square$$

El teorema 4.3 ens dóna una condició sobre el rang de U per la qual el sistema de coeficients constants és controlable. Però aquests tipus de sistemes es poden controlar en subespais més petits que descriurem a continuació.

Definició 4.1. Sigui D_c el subespai de \mathbb{R}^n generat per les columnes de U . Definirem D_c com el subespai controlable de \mathbb{R}^n del sistema controlat $\dot{x} = Ax + Bu$.

Lema 4.1. D_c és invariant per A , és a dir, $A(D_c) \subset D_c$.

Demostració: Volem veure que si tenim $\xi \in D_c$ aleshores $A\xi \in D_c$. Si $\xi \in D_c$, ha de ser combinació lineal de les columnes de U ,

$$\xi = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B w^k \quad \text{per algun } \{w^k, k = 0, 1, \dots, n-1\} \subset \mathbb{R}^m,$$

per tant,

$$A\xi = \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} B w^k.$$

Pel teorema de Cayley-Hamilton sabem que

$$A^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k \quad \text{per } \{a_k, k = 0, 1, \dots, n-1\} \text{ família de constants.}$$

Aleshores,

$$A^n B w^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k B w^k \tag{1}$$

Si descomponem $A\xi$ com a suma de dos termes tenim

$$A\xi = \sum_{k=0}^{n-2} A^{k+1} B w^k + A^n B w^{n-1}.$$

Ara si apliquem (1) la igualtat anterior es transforma en

$$\begin{aligned} A\xi &= \sum_{k=0}^{n-2} A^{k+1} B w^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k B w^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B w^{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k B w^{n-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k B (w^{k-1} + a_k w^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B v^k, \end{aligned}$$

on $v^k := w^{k-1} + a_k w^{n-1}$. Tenim doncs que $A\xi$ és una combinació lineal de les columnes de U i per tant, $A\xi \in D_c$. □

En concret $\dim(D_c) < n$, per tant, si U no té rang n , podem trobar un subespai D_c de \mathbb{R}^n tal que qualsevol estat que pertanyi a D_c es pot assolir a partir de qualsevol altre estat que també hi pertanyi, usant un control $u \in \mathcal{U}$ adequat.

En el cas de sistemes lineals no autònoms també pot existir un subespai on el sistema sigui controlable, però no el podem definir explícitament ja que es tracta de subespais més complexes els quals no estudiarem en aquest treball, i que poden ser diferents en cada cas.

4.1.1 Controlabilitat sota limitacions de control

Fins ara no hem suposat cap mena de restricció en el control, però en aplicacions concretes en el camp de l'enginyeria o la física, és necessari considerar-les.

Considerem el sistema $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $u \in \mathcal{U}$, on \mathcal{U} denota el conjunt de funcions de temps mesurables que prenen valors en el conjunt no buit $U \subset \mathbb{R}^m$. Normalment U serà un conjunt compacte, la mida del qual, en les aplicacions, ve determinada per les condicions físiques (p.ex. per la potència del motor que activa el control).

Definició 4.2. Donats $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $U \subset \mathbb{R}^m$ compacte, definim el conjunt accessible

$$\mathcal{A}(t_1, t_0, x_0, U) \equiv \left\{ \delta \in \mathbb{R}^n : \delta = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, u \in \mathcal{U} \right\},$$

com el conjunt d'estats que pot assolir el sistema donat x_0 , l'interval de definició $[t_0, t_1]$ i la restricció de control U .

Gràcies a l'especificació d'aquest nou conjunt \mathcal{U} , podem fer un estudi més específic de la controlabilitat dels sistemes lineals al voltant del zero, l'origen del sistema.

Definició 4.3. El sistema és U nul controlable en (t_0, x_0) si, donat l'estat inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, i el temps $t_0 \in \mathbb{R}$, existeix $u \in \mathcal{U}$ tal que $x(t_0, u) = x_0$ i $x(t, u) = 0$ per algun $t \geq t_0$, és a dir,

$$0 \in \mathcal{A}(t, t_0, x_0, U) \quad \text{per algun } t \geq t_0 \text{ finit.}$$

Les condicions de U nul controlabilitat permeten que existeixi un control que garanteixi que les solucions del sistema en l'interval $[t_0, t_1]$ s'aproximin a l'origen en temps finit.

Definició 4.4. El sistema és localment U nul controlable en t_0 si existeix un entorn obert N de l'origen tal que el sistema és U nul controlable en (t_0, x_0) per a cada $x_0 \in N$. Es diu que és globalment U nul controlable a t_0 si $N = \mathbb{R}^n$.

Els punts x_0 pels quals el sistema és U nul controlable en l'interval $[t_0, t_1]$ són aquells continguts en el conjunt $\mathcal{C}(t_0, t_1, U)$ que es defineix com

$$\mathcal{C}(t_0, t_1, U) \equiv \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -\Phi(t_1, t_0)x_0 = \int_{t_1}^{t_0} \Phi(t_1, t)B(t)u(t)dt, u \in \mathcal{U} \right\},$$

el qual anomenarem conjunt de controlabilitat nul·la.

Per a cada $t_1 > t_0$ tenim un conjunt de controlabilitat nul·la diferent, la unió de tots aquests conjunts ens dóna el domini de controlabilitat nul·la en temps finit a t_0 , que es defineix com

$$\mathcal{C}(t_0, U) \equiv \bigcup_{\infty > t_1 > t_0} \mathcal{C}(t_0, t_1, U).$$

Si considerem ara el sistema autònom $S : \dot{x} = Ax + Bu$, sigui $\delta = t_1 - t_0$ la diferència de temps, els conjunts d'accessibilitat i controlabilitat nul·la es transformen en

$$\mathcal{A}(t_1, t_0, x_0, U) = \mathcal{A}(\delta, x_0, U), \quad \mathcal{C}(t_0, t_1, U) = \mathcal{C}(\delta, U).$$

Aleshores per $U \subset \mathbb{R}^m$ no buit que contingui l'origen podem definir

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\infty > \delta \geq 0} \mathcal{A}(\delta, 0, U), \quad \mathcal{C} = \bigcup_{\infty > \delta \geq 0} \mathcal{C}(\delta, U).$$

Lema 4.2. *Sigui $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunt compacte no buit, considerem el sistema*

$$\begin{cases} \dot{z} = -Az + Bu \\ z(0) = 0 \end{cases}, \quad (S_-)$$

amb $u \in \mathcal{U}$ i denotem per \mathcal{A}_- el corresponent conjunt accessible. Aleshores $\mathcal{C} = \mathcal{A}_-$.

Demostració: Per qualsevol $\delta \in (0, \infty)$ notem que el conjunt de controlabilitat nul·la de S definit per

$$\mathcal{C}(\delta, U) \equiv \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 = - \int_0^\delta e^{-\delta A} B u(\tau) d\tau, u \in \mathcal{U} \right\},$$

i el conjunt d'accessibilitat de S_- definit per

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_-(\delta, 0, U) &\equiv \left\{ x_1 \in \mathbb{R}^n : x_1 = - \int_0^\delta e^{-(\delta-\tau)A} B u(\tau) d\tau, u \in \mathcal{U} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \in \mathbb{R}^n : x_1 = \int_0^\delta e^{-\tau A} B u(\delta - \tau) d\tau, u \in \mathcal{U} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \in \mathbb{R}^n : x_1 = \int_0^\delta e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau, v \in \mathcal{U} \right\}, \end{aligned}$$

coincideixen per $\delta \in (0, \infty)$. Conseqüentment tenim

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\infty > \delta \geq 0} \mathcal{C}(\delta, U) = \bigcup_{\infty > \delta \geq 0} \mathcal{A}_-(\delta, 0, U) = \mathcal{A}_-. \quad \square$$

Tenim doncs que d'un sistema lineal autònom S nul controlable, podem obtenir un altre sistema lineal autònom S_- , el conjunt accessible del qual és el domini de controlabilitat nul·la de S per algun control $u \in \mathcal{U}$.

Concretament, el següent teorema ens mostra que S pot ser globalment nul controlable, relacionant aquesta característica amb el cas que el mateix sistema sigui completament controlable, sempre sota les noves restriccions de control.

Teorema 4.4. *Considerem el sistema S amb $u \in \mathcal{U}$, on $U \subset \mathbb{R}^m$ és un compacte no buit que conté l'origen al seu interior. Suposem que S és c.c amb $U = \mathbb{R}^m$ i que els valors propis de A tenen part real negativa. Aleshores el domini de controlabilitat nul·la és $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$, és a dir, el sistema és globalment nul controlable.*

Demostració: Sigui $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un element qualsevol. Com que per hipòtesi tots els valors propis de A tenen part real negativa, si agafem el control $u \equiv 0$ ens queda que el sistema $\dot{x} = Ax$ és asimptòticament estable, és a dir, l'estat del sistema s'apropa a l'origen. Per tant, un cop l'estat entra en el domini de controlabilitat nul·la \mathcal{C} , podem escollir un control no nul que dirigeixi el sistema cap a l'origen en temps finit. A més, com que \mathcal{C} és un obert, el temps per arribar a \mathcal{C} amb $u \equiv 0$ també és finit. Així doncs, existeix un control que dirigeix el sistema des de l'estat inicial x_0 cap a l'origen en temps finit. Per tant, $x_0 \in \mathcal{C}$ i com que hem triat $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrari, tenim que $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. \square

La controlabilitat no lineal la veurem en la secció 4.3.2 ja que necessitem alguns resultats previs sobre l'estabilitat de sistemes no lineals.

4.2 Observabilitat

Considerem el problema de Cauchy associat a (S_1) amb condició inicial $x(t_0) = x_0$. Sigui $[t_0, t_1]$ l'interval de definició, i $t_+ \in (t_0, t_1)$ tal que $x(t_+) = x(t_0) + \rho$ on $\rho \in \mathbb{R}^n$, és a dir, el sistema està sotmès a una pertorbació inicial. L'objectiu és veure si es possible determinar ρ amb el coneixement de la sortida del sistema $y(t) = C(t)x(t)$ per $t \in [t_0, t_1]$. Els resultats que aquí es presenten es basen en les referències [3] i [5].

Per $t > t_0$ la solució del sistema s'escriu

$$x(t) = \Phi(t, t_0)(x(t_0) + \rho) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Aleshores la sortida és

$$y(t) = \mu(t) + C(t)\Phi(t, t_0)\rho,$$

on $\mu(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$ és conegut.

L'error $(e(t))$ és $C(t)\Phi(t, t_0)\rho$, per tant podem calcular $e(t)$ com

$$e(t) = y(t) - \mu(t) = C(t)\phi(t, t_0)\rho,$$

Veiem doncs, que l'objectiu es pot redefinir a determinar únicament ρ a partir de l'error $e(t)$ per $t \in (t_0, t_1]$, ja que $y(t)$ i $\mu(t)$ són coneguts.

Direm que el sistema (S_1) és completament observable (*c.o*) si per qualsevol t_0 , $x(t_0) = x_0$, existeix $t_1 > t_0$ finit, tal que amb el coneixement de $y(t)$ per $t_0 \leq t \leq t_1$, és suficient per determinar l'impacte ρ que passa al temps t_+ de manera única. De fet, en el cas de no considerar l'efecte de pertorbacions, s'ha de poder determinar de manera única la condició inicial x_0 a partir de $u(t)$ i $y(t)$. Al parell (A, C) se l'anomena parell observable.

Seguint amb el mateix esquema que la secció anterior, es defineix la matriu d'observabilitat simètrica com

$$V(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t_0)d\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Teorema 4.5. *El sistema S_1 és c.o si i només si la matriu d'observabilitat $V(t_0, t_1)$ és no singular.*

Demostració: Sabem que $y(t) = C(t)x(t)$ per $t_0 \leq t \leq t_1$ i que la solució $x(t)$ s'escriu

$$x(t) = \Phi(t, t_0)[x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau] = \Phi(t, t_0)x_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

és a dir, la solució és una funció afí de x_0 . Per tant, podem considerar que $u(t) \equiv 0$ al llarg de l'interval $[t_0, t_1]$ sense perdre generalitat.

Sigui aleshores $y(t) = C(t)x(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0$, si multipliquem als dos costats de la igualtat per $\Phi^T(t, t_0)C^T(t)$ tenim

$$\Phi^T(t, t_0)C^T(t)y(t) = \Phi^T(t, t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t, t_0)x_0,$$

que implica

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) y(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) x_0 d\tau = V(t_0, t_1) x_0.$$

Apliquem la hipòtesi que $V(t_0, t_1)$ és no singular, i pel teorema de la funció inversa existeix $V^{-1}(t_0, t_1)$ única tal que x_0 queda definida de manera única de la forma següent:

$$x_0 = V^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) y(\tau) d\tau.$$

Per contra, si assumim S_1 c.o., hem de veure que $V(t_0, t_1)$ és no singular. Començarem suposant que és singular i arribarem a contradicció.

Considerem un vector $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, aleshores

$$\begin{aligned} \alpha^T V \alpha &= \int_{t_0}^{t_1} \alpha^T \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) \alpha d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [C(\tau) \Phi(\tau, t_0) \alpha]^T [C(\tau) \Phi(\tau, t_0) \alpha] d\tau \geq 0. \end{aligned}$$

Tenim doncs que $V(t_0, t_1)$ és semidefinida positiva. Suposem ara que $V(t_0, t_1)$ és singular, és a dir, que existeix $\hat{\alpha}$ tal que $\hat{\alpha}^T V \alpha = 0$. Aleshores, $C(\tau) \Phi(\tau, t_0) \hat{\alpha} \equiv 0$ per $t_0 \leq \tau \leq t_1$, que implica $y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x_0 = 0$. Per tant, no podem determinar x_0 a partir de $y(t)$ ja que $y(t) \equiv 0$ per $t_0 \leq t \leq t_1$, i això es contradia amb la hipòtesi. Queda demostrat que $V(t_0, t_1)$ és semidefinida positiva i no singular. \square

D'aquest teorema i el seu equivalent en el cas de la controlabilitat se'n dedueix l'anomenat teorema de dualitat següent.

Teorema 4.6. *El sistema (S_1) és c.c si i només si el sistema dual*

$$\begin{cases} \dot{x} = -A^T(t)x + C^T(t)u \\ y = B^T(t)x \end{cases},$$

és c.o.

Demostració: Per definició la matriu de controlabilitat del sistema (S_1) és

$$U(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_0, \tau) d\tau,$$

i la matriu d'observabilitat del sistema dual és

$$V(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) B(\tau) B^T(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau.$$

Com que Φ és l'operador de transició del sistema $\dot{x} = A(t)x$ en el cas del sistema (S_1) i de $\dot{x} = -A^T(t)x$ en el cas del sistema dual, tenim que les matrius $U(t_0, t_1)$ i $V(t_0, t_1)$ coincideixen.

Aleshores, si suposem (S_1) c.c tenim que $U(t_0, t_1)$ és no singular, que implica que $V(t_0, t_1)$ és no singular, i per tant el sistema dual és c.o. Al revés, si suposem que el sistema dual és c.o tenim que $V(t_0, t_1)$ és no singular, que implica que $U(t_0, t_1)$ és no singular i per tant (S_1) és c.c. \square

En el cas de les matrius amb elements complexos, les matrius transposades del sistema dual es canviarien per la matriu de transposició conjugada.

Corol·lari 4.2. *Quan A, B, C són independents del temps, el sistema (S_1) és c.o si i només si $\text{rang}(V) = n$ on*

$$V = [C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{nr \times n}.$$

La seva demostració ens la dóna directament el teorema de dualitat.

Exemple. Aquest teorema ens serveix per demostrar que el pèndol és observable. En el sistema del pèndol tenim que $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, vegi's (S_1) , aleshores com $CA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, tenim

$$V = \begin{pmatrix} C & CA \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_{2 \times 2},$$

i per tant, $\text{rang}(U) = 2$, és a dir, el pèndol és observable.

4.3 Estabilitat

Seguint amb l'exemple del pèndol tractat en la secció 3.1, considerem el control PD sense la part integral

$$\hat{u} = -K_P \varphi - K_D \dot{\varphi} \quad \text{on } K_P > 1, K_D > 0,$$

Si $x(t) = (\varphi, \dot{\varphi})$ podem escriure el control com

$$\hat{u}(t) = (-K_P, -K_D) \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = (-K_P, -K_D)x(t) := Fx(t).$$

Si ho substituïm al sistema lineal autònom $\dot{x} = Ax + Bu$ tenim

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x,$$

Recordem que en el cas particular del pèndol A i B són

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, per trobar unes constants K_P i K_D adequades per tal que les solucions del sistema anterior convergeixin cap a zero i ho facin sense oscil·lar, hem de trobar un vector K de manera que els valors propis de $A + BK$ tinguin part real negativa, és a dir que les solucions tinguin un comportament asimptòtic. A la matriu $A + BK$ se l'anomena matriu d'estabilitat, on F és una matriu quan el control u no és un escalar.

Aquest raonament previ és el que es coneix com el problema d'assignació de pols o valors propis. Per tal de definir el teorema que resumeix aquest problema, hem de mostrar primer dos resultats per sistemes lineals amb coeficients constants.

Els resultats que es presenten en aquesta secció es poden trobar en les referències [1] i [3].

Definició 4.5. El sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ a \mathbb{R}^n és estabilitzable per un control lineal, si existeix $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de manera que amb $u = Kx$ (feedback lineal), el sistema tancat $\dot{x} = (A + BK)x$ és estable, és a dir, $(A + BK)$ és una matriu d'estabilitat.

Nota. $\dot{x} = (A + BK)x$ és estable si l'origen és un punt fix linealment estable.

Teorema 4.7. Si el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ a \mathbb{R}^n és c.c, aleshores existeix $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de manera que el sistema amb $u = Kx$ és asimptòticament estable, és a dir, $(A + BK)$ és una matriu d'estabilitat.

Demostració: Si el sistema és c.c, aleshores el parell (A, B) és controlable i pel teorema de dualitat el parell $(-A^T, B)$ és c.o. Aleshores la matriu es defineix com

$$V = \int_0^t (e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau}) d\tau, \text{ per } t > 0,$$

que és una matriu simètrica i definida positiva.

Ara considerem el teorema A.2 de l'annex i volem arribar a veure que es compleix

$$-\Gamma = (A + BK)^T Y + Y(A + BK),$$

on Γ sigui una matriu real, simètrica i definida positiva, i Y sigui una solució real, simètrica i definida positiva.

Comencem calculant

$$AV + VA^T = - \int_0^t \frac{d}{d\tau} (e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau}) d\tau = -(B B^T + e^{-At} B B^T e^{-A^T t}),$$

que, sense considerar el signe negatiu, és una matriu real, simètrica i definida positiva. Per tant, podem definir $-\Gamma \equiv -(B B^T + e^{-At} B B^T e^{-A^T t})$.

Tenim doncs que es compleix

$$\begin{aligned} -\Gamma &= AV + VA^T - 2B B^T V^{-1} V = AV - B B^T V^{-1} V + VA^T - V(V^T)^{-1} B B^T \\ &= (A - B B^T V^{-1})V + V(A - B B^T V^{-1})^T. \end{aligned}$$

Aleshores si definim $K \equiv -B^T V^{-1}$ tenim

$$-\Gamma = (A + BK)V + V(A + BK)^T,$$

on tant Γ com V ja hem vist que són reals, simètriques i definides positives. Per tant, es compleix el teorema i $(A + BK)$ és matriu d'estabilitat per ser-ho $(A + BK)^T$. \square

Hem diferenciat un sistema lineal estable d'un sistema lineal asimptòticament estable, basant-nos en la relació entre la controlabilitat i l'estabilitat. Ara, un cop esmentat el teorema 4.7, veiem que se'n deriva el teorema de l'assignació de valors propis 4.8 del qual hem parlat.

Primer enunciarem un lema que ens serà útil per la demostració del teorema, del qual no en farem la demostració ja que no és important pels resultats posteriors.

Lema 4.3. *Sigui el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$. Si aquest sistema és c.c i les columnes de B són $b_1, b_2, \dots, b_m \neq 0$, aleshores existeixen matrius k_i , $i = 1, \dots, m$ reals tals que el sistema*

$$\dot{x} = (A + Bk_i)x + b_i u,$$

és c.c

Teorema 4.8. *Considerem el sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$, i suposem que és c.c. Aleshores existeix $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de manera que els valors propis de la matriu $(A + BK)$ del sistema tancat amb $u = Kx$ és el conjunt*

$$\Lambda_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C},$$

on els valors propis λ_i que no són purs apareixen amb parelles conjugades.

Demostració: Començarem demostrant el cas $m = 1$, per tant el control es defineix com $u = k'x$ on k' és un vector de \mathbb{R}^n . Com que el sistema és c.c aleshores existeix una transformació no singular $w = Tx$, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ es transforma en la forma canònica

$$\dot{w} = Cw + du, \quad d \in \mathbb{R}^n, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

on

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{pmatrix},$$

$$w = [w_1, w_2, \dots, w_n] \quad \text{i} \quad d = [0, 0, \dots, 0, 1],$$

per k_i , $i = 1, \dots, n$ definits com els coeficients del polinomi característic de A , és a dir,

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \cdots + k_n.$$

Que és una conseqüència directa del teorema 3.4 de la referència [3].

Aleshores si definim el control lineal $u = lw$, $l \in \mathbb{R}$, on $l = [l_n, l_{n-1}, \dots, l_1]$, $l_i = k_i - \gamma_i$ per $i = 1, \dots, n$, tenim que la matriu del sistema tancat és $C + dl$, i té la mateixa forma que C , amb la última columna igual al vector $-\gamma = -[\gamma_n, \gamma_{n-1}, \dots, \gamma_1]$, que són els coeficients del polinomi característic de la matriu $A + bk'$.

Amb el nou control i la definició de w tenim que

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax + blw = Ax + blTx = (A + blT)x, \text{ texti,}$$

$$\dot{w} = Cw + du \Leftrightarrow T\dot{x} = CTx + dlTx = (CT + dlT)x \Leftrightarrow \dot{x} = T^{-1}(C + dl)Tx.$$

Per tant, $C + dl = T(A + blT)T^{-1}$, i com que per hipòtesi tenim $u = k'x$, en segueix que $k' = lT$.

Ara el que volem és que els valors propis del sistema siguin els que formen el conjunt

$$\Lambda_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C},$$

i com que el polinomi característic s'escriu com

$$\det(\lambda I - (A + bk')) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i),$$

escollim $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tal que es compleix

$$\lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i).$$

Pel cas $m \geq 1$, com que el sistema per hipòtesi és *c.c* i a més les columnes de B són $b_1, b_2, \dots, b_m \neq 0$, pel lema 4.3 existeixen matrius K_i , $i = 1, \dots, m$ reals tals que el sistema $\dot{x} = (A + BK_i)x + b_i u$ és *c.c*. Considerem doncs, la matriu K_1 i definim la matriu $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ amb un vector k a la primera fila i les altres files nul·les.

Aleshores, si agafem el control

$$u = (K_1 + K)x,$$

el sistema tancat és

$$\dot{x} = (A + BK_1)x + BKx = (A + BK_1)x + b_1 kx,$$

Per tant, aquest sistema és *c.c*, i per la demostració del cas $m = 1$ podem escollir K tal que les arrels del polinomi característic de $A + BK_1 + b_1 k$ siguin el conjunt Λ_n . \square

Teorema 4.9. *Si en el sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$ tenim l'observable*

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}^{r \times n}.$$

Aleshores, si el sistema és c.o., existeix una matriu real L tal que les arrels del polinomi característic de la matriu $A + LC$ són el conjunt Λ_n .

Demostració: Si el sistema és *c.o.*, és a dir, el parell $[A, C]$ és *c.o.*, aleshores pel teorema de dualitat el parell $[-A^T, C^T]$ és *c.c.*, però com que la controlabilitat no depèn del temps, el parell $[A^T, -C^T]$ també és *c.c.* Pel teorema 4.7 existeix una matriu $L \in \mathbb{R}^{n \times r}$ i per tant, $-L^T \in \mathbb{R}^{r \times n}$, tal que $A^T + C^T L^T = (A + LC)^T$ és una matriu d'estabilitat, en concret

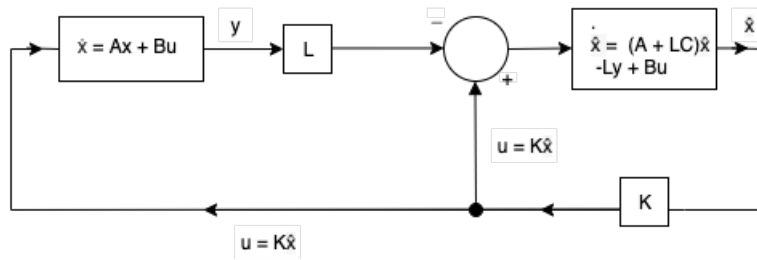


Figura 15: Diagrama funcional del sistema de control a partir d'un observable y .

$A + LC$ també, ja que el polinomi característic d'una matriu i la seva transposada és el mateix. Pel teorema d'assignació de valors propis, els valors propis de la matriu $A + LC$ són el conjunt Λ_n com volíem veure. \square

Estabilitzar el sistema a partir del coneixement dels estats no sempre és possible. En situacions pràctiques si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ moltes vegades pot ser complicat mesurar totes les x_i . En general tindrem el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad (S^*)$$

del teorema anterior, d'on en podrem mesurar la sortida (y). Considerem aleshores el control $u = Ky$ on $K \in \mathbb{R}^{m \times r}$.

Assumim que el sistema és *c.o.*, i pel teorema 4.9 tenim que existeix una matriu $L \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tal que la matriu $A + LC$ és una matriu d'estabilitat i per tant, les arrels del conjunt Λ_n tenen part real negativa. Per definició si $A + LC$ és matriu d'estabilitat aleshores el sistema $\dot{x} = (A + LC)x$ és estable.

Segui \hat{x} el valor estimat basat en l'observació de y , si definim $x_d = x - \hat{x}$, tenim

$$\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = (A + LC)(x - \hat{x}).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \dot{x} - (A + LC)(x - \hat{x}) = Ax + Bu - Ax - LCx + A\hat{x} + LC\hat{x} = A\hat{x} + Bu - Ly + LC\hat{x} \\ &= A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y). \end{aligned}$$

Hem arribat a un sistema en el qual la sortida és \hat{x} i la podem calcular a partir de $y = Cx$ i el nou control $u = K\hat{x}$. A la figura 15 es representa el diagrama funcional corresponent.

L'esquema de la figura 15 segueix l'algorisme següent:

1. Quan $t = t_0$ tenim x_0, u_0, y_0 , i $\hat{x}_0 = x_0$.
2. Mesurem y_1 per $t = t_1$.

3. Estimem \hat{x}_1 que és la solució per $t = t_1$ de

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + LC)\hat{x} + Ly_1 + Bx_0 \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}.$$

4. Calculem el nou control $u = K\hat{x}_1$.

5. Evolucionem el sistema a

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu_1 \\ \hat{x}(1) = x_1 \end{cases}.$$

6. Mesurem y_2 per $t = t_2$.

7. Tornem al pas (3).

El teorema següent descriu les condicions necessàries perquè el sistema S^* sigui estabilitzable a partir de la informació que ens donen els seus valors de sortida. Gràcies a la definició del nou sistema amb el control $u = K\hat{x}$.

Teorema 4.10. *Si el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ és estabilitzable i a més (S^*) és c.o, aleshores existeixen matrius $K \in \mathbb{R}^{m \times r}$ i $L \in \mathbb{R}^{n \times r}$ de manera que el sistema (S^*) juntament amb l'observador*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y), \quad u = K\hat{x},$$

és estabilitzable.

Demostració: Si substituïm $u = K\hat{x}$ al sistema (S^*) i a $\hat{\dot{x}}$, obtenim el sistema d'ordre $2n$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = Ax + BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + LC(\hat{x} - y) = A\hat{x} + BK\hat{x} + L(C\hat{x} - Cx) \end{cases},$$

que en forma matricial és

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A + BK + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}.$$

Considerem ara la matriu involutiva ($2n \times 2n$)

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \quad \text{on } J^{-1} = J, \quad JJ = I_{2n \times 2n}.$$

Aleshores si apliquem la transformació similar $J\tilde{A}J^{-1}$ a la matriu \tilde{A} tenim

$$J\tilde{A}J^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A + BK + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix}.$$

Veiem que $J\tilde{A}J^{-1}$ és una matriu triangular superior, i per tant, els seus valors propis venen donats pels valors propis dels blocs de la diagonal, és a dir, pels valors propis de les

matrius $A + BK$ i $A + LC$. Com que el sistema S^* és estabilitzable, per definició $A + BK$ és una matriu d'estabilitat, i $A + LC$ també ja que per hipòtesis S^* és *c.o.*

Per tant, com que $Re(eig(A+BK)) < 0$ i $Re(eig(A+LC)) < 0$, aleshores $Re(eig(J\tilde{A}J^{-1})) < 0$, i com que els valors propis són invariants per transformacions similars, $Re(eig(\tilde{A})) < 0$, és a dir, \tilde{A} és matriu d'estabilitat i el sistema d'ordre $2n$ és estabilitzable. \square

Exemple. Considerem el sistema $\dot{x} = u$ amb l'observable $y = x_1$. Aquest sistema es pot escriure com

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Cx. \end{aligned}$$

El sistema és controlable i observable però no és estabilitzable pel control $u = Ky$ on $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Per tant, pel teorema anterior existeixen matrius $K = [k_1, k_2] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ i $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ tals que les matrius $(A + BK)$ i $(A + LC)$ són matrius d'estabilitat.

Ara com que el sistema és controlable pel teorema 4.8 podem assignar els valors propis desitjats per la matriu $(A + BK)$. Siguin $-1, -2$ aquests valors propis, aleshores tenim que $k_1 = -2, k_2 = -3$. D'altra banda si agafem -3 i -4 com a valors propis de la matriu $(A + LC)$, tenim que $l_1 = -7, l_2 = -12$.

Per tant, el nou sistema és

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 7 & 0 & -7 & 1 \\ 12 & 0 & -14 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix},$$

on la transformació similar

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{bmatrix},$$

té valors propis $-1, -2, -3, -4$ i per tant la matriu del sistema també.

4.3.1 Estabilitat en sentit de Lyapunov

Fins ara hem estudiat l'estabilitat per sistemes lineals de control autònoms. Però aquest és un cas molt concret de sistemes. Per tal d'estudiar l'estabilitat més generalment, que englobi tant sistemes lineals com no lineals hem de considerar l'estabilitat en sentit de Lyapunov, sistema no lineal de control, autònom.

Considerem el camp vectorial no lineal de control, invariant pel temps a \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = X(x, u), \tag{Q}$$

on $X : W \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$.

Definició 4.6. Direm que el camp (Q) és contínuament (localment o globalment) estabilitzable a $x_0 \in W \subset \mathbb{R}^n$ obert, si existeix un control continu $u = k(x)$ tal que x_0 és un punt (localment o globalment) asimptòticament estable del camp $\dot{x} = X(x, k(x))$.

Signi $V : D \subset W \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ obert de \mathbb{R}^n , una funció de Lyapunov de classe C^1 , definida positiva. Vegi's la definició A.3 de l'apèndix. Notem que, en general, no és senzill trobar una funció de Lyapunov per un camp concret (i pot, fins i tot, no existir). Definirem ara la funció de Lyapunov per un sistema de control.

Definició 4.7. Una funció de Lyapunov de control, es una funció de Lyapunov V tal que per qualsevol $x \in D \setminus \{x_0\}$ existeix un control $u \in \mathcal{U}$ de manera que

$$\dot{V}(x, u) = \nabla V(x) f(x, u) < 0.$$

Ara el teorema d'Artin, vegi's [2], ens diu:

Teorema 4.11. *La funció de Lyapunov de control V existeix si, i només si, el camp (Q) és (localment o globalment) estabilitzable.*

Aquest teorema és conseqüència del teorema A.1, ja que la funció de control de Lyapunov V considerada és estricta i, per tant, pel segon mètode de Lyapunov (teorema A.1), x_0 és asimptòticament estable pel camp (Q), és a dir, el camp és estabilitzable.

En particular el camp serà globalment estabilitzable en x_0 , quan es compleixi que $V(x) \rightarrow \infty$ quan $|x| \rightarrow \infty$.

4.3.2 Controlabilitat no lineal

En aquesta secció l'objectiu és trobar les condicions necessàries per a que un sistema no lineal autònom sigui globalment nul controlable. Per simplicitat, ens centrarem en sistemes no lineals autònoms, ja que la controlabilitat (igual que l'observabilitat i l'estabilitat) de sistemes no lineals no autònoms és més complicada (i no es considerarà en aquest treball).

Considerem el sistema no lineal autònom a \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{S_N}$$

on $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}$, on \mathcal{U} denota la classe de controls admissibles definits en $[0, \infty)$ que prenen valors en $U \subset \mathbb{R}^m$ compacte, i f funció de classe C^1 tal que $f(0, 0) = 0$.

El sistema de control linealitzat en $(0, 0)$ és el sistema lineal de control

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

on $A = D_x f(0, 0)$ i $B = D_u f(0, 0)$.

Abans d'estudiar la controlabilitat global nul·la del sistema no lineal, enunciarem un lema que deriva directament de la linealització del sistema, el qual ens donarà les condicions necessàries per tal que el sistema sigui localment nul controlable.

Lema 4.4. *Suposem les hipòtesis anteriors i que $0 \in \text{int}(U)$. Aleshores si el parell (A, B) és controlable, el sistema (S_N) és localment nul controlable.*

Amb l'ajut d'aquest lema podem definir ara el teorema que ens dóna les condicions de controlabilitat global nul·la per sistemes no lineals.

Teorema 4.12. *Considerem el sistema (S_N) i suposem, a més, que*

- a) $0 \in \text{int}(U)$,
- b) el parell (A, B) és controlable, on $A = D_x f(0, 0)$ i $B = D_u f(0, 0)$,
- c) existeix una aplicació $v : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ de classe C^1 tal que el sistema amb $u = v(x)$ és globalment asimptòticament estable.

Aleshores el sistema és globalment nul controlable.

Demostració: Del fet que f sigui classe C^1 i de les condicions a) i b), pel lema 4.4, el sistema és localment nul controlable. És a dir, per algun $t_1 \geq t_0$, existeix un control $u^* \in \mathcal{U}$ tal que per qualsevol $x_0 \in N \subset \mathbb{R}^n$, on N denota el domini de controlabilitat local nul·la de l'origen a $t_1 > 0$, tenim que si $x^*(t, x_0)$ és la solució del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u^*) \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

es compleix $x^*(t_1, x_0) = 0$.

Per tal que el sistema sigui globalment nul controlable ens falta veure que $N = \mathbb{R}^n$. Per la condició c) podem aplicar la definició A.1 i tenim que per qualsevol $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existeix $t_0 > 0$ tal que la solució $x(t, x_0)$ per $t \geq t_0$ del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, v(x)) \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

compleix $x(t, x_0) \in \mathbb{R}^n$ i a més per la definició A.2, $x(t, x_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Per tant, la solució $x(t, x_0)$ pertany a N si t és suficientment gran la qual cosa implica que $x_0 \in N$. Així $N = \mathbb{R}^n$. \square

5 Teoria de control òptim

En aquesta secció discutirem el problema d'optimització següent: Donat un sistema dinàmic de control volem trobar el “millor” control que porti el sistema des d'un estat a qualsevol altre. A aquest control li direm control òptim.

Les discussions que aquí es presenten es poden torbar en les referències [5] i [6].

L'adjectiu “millor” fa referència a que el control escollit optimitzarà alguna propietat que volem del sistema, per exemple, que minimitzi el temps d'evolució entre dos estats, que minimitzi una funció de cost al evolucionar, que maximitzi alguna component d'entre tots els estats accessibles a temps T fixat, etc. Aquesta propietat s'expressarà en termes d'un funcional que volem maximitzar/minimitzar.

Anem a plantejar les condicions necessàries per al problema general d'optimització.

Considerem el problema de Cauchy (S) definit en la secció 1

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

on $t \in [t_0, t_1]$, $t_1 > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, i $u \in \mathcal{U}$ és el control, una funció contínua a trossos definida en $[t_0, \infty)$ i amb valors en el conjunt $U \subset \mathbb{R}^m$ compacte. Recordem que \mathcal{U} denota la classe de controls admissibles.

Volem trobar $u \in \mathcal{U}$ tal que es minimitzi ó maximitzi el funcional

$$J(u) = \psi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(\tau), u(\tau))d\tau, \quad (5.1)$$

on ψ i L són funcions escalars contínues, i amb les primeres derivades parcials contínues. A la funció L se l'anomena Lagrangiana.

Si definim ara $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ com un vector de multiplicadors de Lagrange, podem construir el Hamiltonià H definit per tot $t \in [t_0, t_1]$ com

$$H(t, x, u, \lambda) = \lambda^T(t)f(t, x, u) + L(t, x, u). \quad (5.2)$$

Aleshores un control $u \in \mathcal{U}$ serà òptim, i el designarem per u^* , si compleix el *Principi de Pontryagin* que enunciaré a continuació.

Podríem plantejar un problema de càlcul variacional per resoldre el problema de control òptim. Per exemple, quan $\psi \sim 0$, podem plantejar les equacions d'Euler-Lagrange per minimitzar l'acció que defineix el Lagrangiana L . El problema és que no tenim la diferenciabilitat adequada ja que per plantejar el problema variacional calen controls continus, i s'obtenen solucions $x(t)$ de classe C^1 . En el nostre context, tenim controls continus a trossos i busquem solucions contínues. Així, podem entendre que el *principi del màxim de Pontryagin* substitueix a la condició d'Euler-Lagrange dels problemes variacionals per sistemes de control òptim, proporcionant condicions necessàries que han de verificar les

funcions extremals. En aquest sentit la teoria de control òptim es una generalització del càlcul variacional com s'afirmà a 1.

El principi del màxim de Pontryagin

Sigui H el hamiltonià definit en (5.2). Aleshores si existeix un control òptim u^* s'ha de complir:

- a) $H(t, x, u^*, \lambda) \geq H(t, x, u, \lambda)$, per a tot $t \in [t_0, t_1]$ i tot $u \in \mathcal{U}$, on λ és el multiplicador de Lagrange.
- b) $\psi_{t_1}(x(t_1)) + H(t_1) = 0$.
- c) $\dot{\lambda}^T(t) = -H_x(t, x, u^*, \lambda) = -\lambda^T(t)f_x(t, x, u^*) + L_x(t, x, u^*)$.
- d) $\dot{\lambda}(t_1) = \psi_x(x(t_1))$.

La quarta condició només s'aplica quan t_1 no està fixat.

El *principi del màxim de Pontryagin* és cert per sistemes que compleixen les anomenades P-condicions. Hi ha moltes generalitzacions del *principi del màxim de Pontryagin* en diferents contextos, però, per exemple és suficient que:

- 1) f sigui contínua respecte als seus arguments i Lipschitz respecte x per tot control $u(t)$ admissible i per tot t .
- 2) ψ i L siguin contínues i amb derivades respecte x contínues.

Sota les P-condicions anteriors, la teoria d'equacions diferencials garanteix existència i unicitat de solucions $x(t)$ contínues a trossos del problema de Cauchy.

En aquest treball hem enunciat la versió anterior del principi, que és la que s'utilitzarà en l'explicació dels dos casos particulars dels capítols 5.1 i 5.2, on es presentarà també la seva demostració adaptada a cada cas. Aquests dos casos tracten sistemes lineals. El cas no lineal no l'analitzarem, ja que es basa en demostrar el *principi de Pontryagin* per sistemes no lineals.

5.1 Control de temps òptim

Centrarem la nostra atenció en estudiar els sistemes lineals de control pels quals donat un estat final, existeix un control òptim $u^* \in \mathcal{U}$ que condueix el nostre sistema des de l'estat inicial cap a aquest estat en el menor temps possible.

Els resultats que es presenten en aquesta secció es poden trobar a la referència [4].

Considerarem el context següent. Sigui

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

el problema de Cauchy que defineix el procés, on $u \in \mathcal{U}$ és el control, i compleix $|u_i| \leq 1$ per $i = 1, 2, \dots, m$, $b(t)$ és un vector definit a \mathbb{R}^n continu a trossos en $[t_0, \infty)$ i $A(t)$ i $B(t)$ són funcions matricials definides a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ respectivament, analítiques i contínues a trossos en $[t_0, \infty)$.

La solució del problema de Cauchy ve donada per la fórmula de variació de constants, que la podem trobar en la referència [8], com

$$x(t; u) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)(B(\tau)u(\tau) + b(\tau))ds,$$

on $\Phi(t)$ és la matriu fonamental principal del sistema $\dot{x} = A(t)x$ tal que $\Phi(t_0) = I$.

Aleshores el conjunt accessible definit en la secció 4.1.1 és aquí

$$\mathcal{A}(t) = \{x(t; u) : u \in \mathcal{U}\}.$$

L'estat final fixat el qual volem assolir, pertanyerà a un conjunt compacte $G(t)$ per $t \geq t_0$ que l'anomenarem meta o objectiu. Suposarem que $x_0 \notin G(t_0)$.

Per tant, si existeix algun $t^* > t_0$ tal que

$$\mathcal{A}(t^*) \cap G(t^*) \neq \phi,$$

aleshores existirà algun control $u \in \mathcal{U}$ que dirigirà el sistema des de x_0 a $G(t^*)$ en l'instant t^* , és a dir, $x(t^*, u) \in G(t^*)$. Si aquest t^* és tal que per a tot $t_0 \leq t < t^*$ és té

$$\mathcal{A}(t) \cap G(t) = \phi,$$

és a dir, amb cap altre control admissible s'assoleix abans l'estat final, direm que $u = u^*$ és un control de temps òptim.

5.1.1 Principi de bang-bang

Considerarem un tipus concret de controls, anomenats controls *bang-bang*.

Definició 5.1. Un control $u \in \mathcal{U}$ s'anomena control *bang-bang* si per qualsevol $t \geq t_0$ i per $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tenim $|u_i(t)| = 1$, on

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)).$$

Al conjunt

$$\mathcal{U}_0 = \{U \in \mathcal{U} : \forall s \in [t_0, \infty), i = 1, 2, \dots, m, |u_i(s)| = 1\},$$

l'anomenarem conjunt de controls *bang-bang*.

El següent resultat afirma que el conjunt accessible és igual al conjunt accessible per controls de tipus *bang-bang*.

Sigui ρ , una mètrica definida en la família \mathcal{F} de conjunts compactes de \mathbb{R}^n . Per $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ es defineix ρ com

$$\rho(K_1, K_2) = \inf\{\epsilon > 0 : K_{1\epsilon} \supset K_2, K_{2\epsilon} \supset K_1\},$$

on, per $i = 1, 2$

$$K_{i\epsilon} = \cup\{B(x, \epsilon) : x \in K_i\}.$$

Teorema 5.1. (*Principi de bang-bang*)

Dins del context indicat, el conjunt accessible $\mathcal{A}(t)$ per $t \geq t_0$ és compacte, convex i varia contínuament amb el temps, és a dir, la funció $\mathcal{A} : t \in [t_0, \infty) \rightarrow \mathcal{A}(t) \in \mathcal{F}$, és contínua en la mètrica ρ definida en \mathcal{F} .

Si definim $\mathcal{A}_0 = \{x(t; u) : u \in \mathcal{U}_0\}$, aleshores

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(t).$$

Abans de demostrar el *principi de bang-bang* haurem de veure dos lemes previs que seran útils per la demostració.

Lema 5.1. Considerem $g : [t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció analítica a trossos en $[t_0, t]$, \mathcal{V} el conjunt de funcions de $[t_0, t]$ a $[-1, 1]$ contínues a trossos i no oscil·lants, i

$$\mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{V} : \forall s \in [t_0, t], |v(s)| = 1\}.$$

Sigui

$$E = \left\{ \int_{t_0}^t g(s)v(s)ds : v \in \mathcal{V} \right\}, \quad i \quad E_0 = \left\{ \int_{t_0}^t g(s)v(s)ds : v \in \mathcal{V}_0 \right\},$$

aleshores

$$E = E_0,$$

i aquest conjunt és compacte i convex.

Demostració: Sigui \mathcal{A} la família de totes les unions finites d'interval·ls de $[t_0, t]$.

Veurem primer que E_0 és un conjunt compacte i convex. Considerem

$$R = \left\{ \int_P g(s)ds : P \in \mathcal{A} \right\}.$$

Aleshores com que g és analítica a trossos tenim que g és no oscil·lant i pel teorema de Lyapunov 9.2.1 de la referència [4], resulta que R és compacte i convex. Sigui ara

$$v_P(s) = 2\chi_P(s) - 1 \quad \text{per } P \in \mathcal{A}, \tag{1}$$

on χ_P és la funció característica. Aleshores $v_P(s) \in \mathcal{V}_0$. Recíprocament tot $v \in \mathcal{V}_0$ pot expressar-se d'aquesta manera.

Per tant, sigui

$$\bar{g} = \int_{t_0}^t g(s)ds,$$

tenim $E_0 = 2R - \bar{g}$. Això és cert, ja que sigui $\alpha \in E_0$, aleshores existeix $v \in \mathcal{V}_0$ tal que $\alpha = \int_{t_0}^t g(s)v(s)ds$ i per tant també existeix $P \in \mathcal{A}$ tal que $v(s) = v_P(s)$ complint (1) i així

$$\alpha = \int_{t_0}^t g(s)v_P(s)ds = \int_P g(s)v_P(s)ds + \int_{[t_0, t] - P} g(s)v_P(s)ds = \int_P g(s)ds - \int_{[t_0, t] - P} g(s)ds$$

$$= \int_P g(s)ds + \int_P g(s)ds - \int_P g(s)ds - \int_{[t_0, t] - P} g(s)ds = 2 \int_P g(s)ds - \int_{t_0}^t g(s)ds \in 2R - \bar{g}.$$

Aleshores, com que ja hem vist que R és compacte i convex, tenim que E_0 també és compacte i convex.

Per veure ara que $E = E_0$, considerem $z \in E$, és a dir,

$$z = \int_{t_0}^t g(s)v(s)ds \text{ per algun } v \in \mathcal{V},$$

i volem veure que existeix una successió $\{z_h\} \subset E_0$ tal que $z_h \rightarrow z$. Així $z \in E_0$ i per tant, com $E_0 \subset E$ tindrem $E = E_0$.

Definim

1) $w(s) = \frac{1}{2}(v(s) + 1)$, on $0 \leq w(s) \leq 1$, ja que $v(s)$ compleix (1) per algun $P \in \mathcal{A}$.

2) $\bar{z} = \frac{1}{2}(z + \bar{g})$, que implica

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^t g(s)v(s)ds + \int_{t_0}^t g(s)ds \right) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t g(s)(v(s) + 1)ds = \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds.$$

3) $\bar{z}_h = \sum_{j=1}^h \frac{j}{h} \int_{E_j} g(s)ds$, essent $E_j = \left\{ s \in [t_0, t] : \frac{j-1}{h} < w(s) \leq \frac{j}{h} \right\}$ una partició de $[0, 1]$, ja que els conjunts E_j són disjunts.

Aleshores, per $h > 0$ fixat,

$$\begin{aligned} |\bar{z} - \bar{z}_h| &= \left| \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds - \sum_{j=1}^h \frac{j}{h} \int_{E_j} g(s)ds \right| = \left| \sum_{j=1}^h \frac{j}{h} \int_{E_j} w(s)g(s)ds - \sum_{j=1}^h \frac{j}{h} \int_{E_j} g(s)ds \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^h \int_{E_j} \left(\frac{j}{h} - w(s) \right) g(s)ds \right|, \end{aligned}$$

i com $-w(s) \leq \frac{1-j}{h}$, tenim $\frac{j}{h} - w(s) \leq \frac{1}{h}$ i aleshores

$$|\bar{z} - \bar{z}_h| \leq \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \int_{E_j} |g(s)|ds.$$

Per tant, $\bar{z}_h \rightarrow \bar{z}$ quan $h \rightarrow \infty$.

Si definim ara

$$F_j = \bigcup_{i=j}^h E_i,$$

com que els E_i són disjunts i F_j és una família d'unions finites d'interval·ls de $[t_0, t]$, resulta

$$\bar{z}_h = \sum_{j=1}^h \frac{j}{h} \int_{E_j} g(s)ds = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \int_{F_j} g(s)ds \in R.$$

Per tant, com $\bar{z}_h \in R$ aleshores sigui $z_h := 2\bar{z}_h - \bar{g} \in 2R - \bar{g} = E_0$ tenim que com $\bar{z}_h \rightarrow \bar{z}$, aleshores quan $h \rightarrow \infty$,

$$z_h \rightarrow 2\bar{z}_h - \bar{g} = 2\left(\frac{1}{2}(z + \bar{g})\right) - \bar{g} = z + \bar{g} - \bar{g} = z.$$

Tal com hem definit z_h , com que hem vist que E_0 és compacte i $z_h \rightarrow z$, veiem que $z \in E_0$. □

Lema 5.2. *Considerem $Y(s)$ una funció matricial $n \times n$ definida en $[t_0, t]$, analítica a trossos, \mathcal{V} el conjunt de funcions vectorials m -dimensionals contínues a trossos en $[t_0, t]$ amb valors en U , no oscil·lants, i*

$$\mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{V} : \forall s \in [t_0, t], \forall i = 1, 2, \dots, m, |v_i(s)| = 1\}.$$

Sigui

$$K = \left\{ \int_{t_0}^t Y(s)v(s)ds : v \in \mathcal{V} \right\}, \quad i \quad K_0 = \left\{ \int_{t_0}^t Y(s)v(s)ds : v \in \mathcal{V}_0 \right\}.$$

Aleshores,

$$K = K_0,$$

i aquest conjunt és compacte i convex.

Demostració: Sigui $Y(s) = (y^1(s), \dots, y^m(s))$, on per $j = 1, 2, \dots, m$ els y^j són vectors columna, aleshores

$$K^j = \left\{ \int_{t_0}^t y^j(s)u_j(s)ds : u \in \mathcal{V} \right\},$$

$$K_0^j = \left\{ \int_{t_0}^t y^j(s)u_j(s)ds : u \in \mathcal{V}_0 \right\},$$

amb $u = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_m)$. Com que $y^j(s)$ és analítica a trossos en $[t_0, t_1]$ ($Y(s)$ és analítica a trossos en $[t_0, t]$), aleshores pel lema 5.1 tenim $K^j = K_0^j$ i aquest conjunt és compacte i convex. Però volem veure $K = K_0$.

Definim

$$z := \int_{t_0}^t Y(s)u(s)ds = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t y^j(s)u_j(s)ds.$$

Aleshores com $u \in \mathcal{V}_0$, pel lema 5.1 existeix $v = (v_1, \dots, v_j, \dots, v_m) \in \mathcal{V}_0$ tal que $u_j = v_j = 2\chi_P(s) - 1$ i per tant, per cada j , z queda definida com

$$z = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t y^j(s)v_j(s)ds = \int_{t_0}^t Y(s)v(s)ds \in K_0,$$

i com que

$$K_0 = \sum_{j=1}^m K_0^j \text{ és compacte i convex,}$$

tenim

1) $K_0 = K$.

2) K_0 és compacte i convex. □

Ara ja podem demostrar el *principi de bang-bang*.

Demostració: (Principi de bang-bang)

- $K(t) = K_0(t)$ és conseqüència directa del lema 5.2.

- $K(t)$ és compacte i convex per conseqüència del lema 5.2.

- Falta demostrar la continuïtat.

Per fer-ho volem veure que sigui $t_2 \in [t_0, \infty)$ aleshores donat $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $|t_3 - t_2| \leq \delta$ amb $t_3 \in [t_0, \infty)$ aleshores

$$\rho(K(t_3), K(t_2)) \leq \epsilon.$$

Que $\rho(K(t_3), K(t_2)) \leq \epsilon$ significa que:

a) per qualsevol $x(t_3; u)$ de $K(t_3)$, existeix $x(t_2, \tilde{u}) \in K(t_2)$ tal que

$$|x(t_3; u) - x(t_2, \tilde{u})| \leq \epsilon, \quad u, \tilde{u} \in \mathcal{U}.$$

b) per qualsevol $x(t_2; \bar{u})$ de $K(t_2)$, existeix $x(t_3, \hat{u}) \in K(t_3)$ tal que

$$|x(t_2; \bar{u}) - x(t_3, \hat{u})| \leq \epsilon, \quad \bar{u}, \hat{u} \in \mathcal{U}.$$

Demostrem a) suposant $t_3 > t_2$, per b) és el mateix procediment.

Per la fórmula de variació de constants tenim

$$\begin{aligned} x(t_3; u) - x(t_2, \tilde{u}) &= \left(\Phi(t_3)x_0 + \Phi(t_3) \int_{t_0}^{t_3} \Phi^{-1}(\tau)[B(\tau)u(\tau) + b(\tau)]d\tau \right) \\ &\quad - \left(\Phi(t_2)x_0 + \Phi(t_2) \int_{t_0}^{t_2} \Phi^{-1}(\tau)[B(\tau)\tilde{u}(\tau) + b(\tau)]d\tau \right) \\ &= (\Phi(t_3) - \Phi(t_2))x_0 + \Phi(t_3) \int_{t_0}^{t_2} \Phi^{-1}(\tau)[B(\tau)u(\tau) + b(\tau)]d\tau \\ &\quad - \Phi(t_2) \int_{t_0}^{t_2} \Phi^{-1}(\tau)[B(\tau)\tilde{u}(\tau) + b(\tau)]d\tau + \Phi(t_3) \int_{t_2}^{t_3} \Phi^{-1}(\tau)[B(\tau)u(\tau) + b(\tau)]d\tau. \end{aligned}$$

Si agafem $\tilde{u} = u$ en $[t_0, t_2]$ ens queda

$$\begin{aligned} |x(t_3; u) - x(t_2, \tilde{u})| &\leq |\Phi(t_3) - \Phi(t_2)|x_0 + |\Phi(t_3) - \Phi(t_2)| \int_{t_0}^{t_2} |\Phi^{-1}(\tau)||B(\tau)u(\tau) + b(\tau)|d\tau \\ &\quad + |\Phi(t_3)| \int_{t_2}^{t_3} |\Phi^{-1}(\tau)||B(\tau)u(\tau) + b(\tau)|d\tau. \end{aligned}$$

Com que Φ i Φ^{-1} són funcions contínues, u pren valors en un conjunt compacte U , i $B(s)$ i $b(s)$ són contínues a trossos, tenim

$$|x(t_3; u) - x(t_2, \tilde{u})| \leq \epsilon,$$

i per tant,

$$\rho(K(t_3), K(t_2)) \leq \epsilon. \quad \square$$

De la igualtat $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(t)$ en resulten els dos corollaris següents.

Corol·lari 5.1. *Si existeix un control $u_0^* \in \mathcal{U}_0$ que és òptim, aleshores u_0^* també és òptim entre tots els controls $u \in \mathcal{U}$.*

Corol·lari 5.2. *Si existeix un control òptim $u^* \in \mathcal{U}$, aleshores existeix un control bang-bang $u_0^* \in \mathcal{U}_0$ que també és òptim.*

Podem per tant, reduir-nos a considerar controls de temps òptim dins del conjunt de controls de tipus *bang-bang*.

5.1.2 Principi del màxim de Pontryagin

Sota les condicions del problema plantejat a l'inici de la secció definirem primer un teorema que ens demostra l'existència del control òptim donat $\mathcal{A}(t) \cap G(t) \neq \phi$ per $t \geq t_0$. Una condició necessària que deriva de la definició de control òptim que hem descrit anteriorment.

Teorema 5.2. *Suposem que existeix $t \geq t_0$ tal que $\mathcal{A}(t) \cap G(t) \neq \phi$. Aleshores existeix un control òptim u^* i es verifica*

$$x(t^*; u^*) \in \partial\mathcal{A}(t^*),$$

on $t^* = \inf\{t : \mathcal{A}(t) \cap G(t) \neq \phi\}$.

Demostració:

Que existeixi $u^* \in \mathcal{U}$ és directe del fet que $K(s)$ i $G(s)$ siguin funcions contínues de $[t_0, \infty)$ a \mathcal{F} amb la mètrica ρ definida en el capítol 5.2. Falta veure que $x(t^*, u^*) \in \partial K(t^*)$.

Sigui t^* el temps definit en l'enunciat del teorema, aleshores

$$K(t^*) \cap G(t^*) \neq \phi.$$

Sigui $p \in K(t^*) \cap G(t^*)$, aleshores existeix $u^* \in \mathcal{U}$ tal que

$$x(t^*; u^*) = p \in K(t^*) \cap G(t^*).$$

Per la definició de control òptim donada pel problema que estem tractant, està clar que u^* és control de temps òptim i que aquest temps òptim és t^* .

Com que volem que $p = x(t^*; u^*) \in \partial K(t^*)$, ho demostrarem per absurd suposant que $p \notin \partial K(t^*)$. Aleshores $p \in \text{int}(K(t^*))$.

Sigui $2r$ la distància $d(p, \partial K(t^*))$ tenim que

$$\rho(K(s), \{p\}) = \rho(\partial K(s), \{p\}) \geq 2r > 0.$$

Aquesta igualtat la sabem per topologia; donat dos conjunts P i Q compactes i convexes, aleshores $\rho(P, Q) = \rho(\partial P, \partial P)$.

Ara per continuïtat de $K(s)$, existeix $\eta > 0$ tal que si $t \in [t^* - \eta, t^*]$ tenim que

$$\rho(K(s), \{p\}) > r \text{ implica } B(p, r) \subset K(t).$$

D'altra banda, $p \in G(t^*)$ i $G(s)$ varia contínuament amb s . Per tant, existeix algun $t_1 \in [t^* - \eta, t^*]$ tal que

$$B(p, r) \cap G(t_1) \neq \phi.$$

Això és cert ja que per continuïtat de G tenim

$$\rho(G(t), G(t^*)) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow t^*. \quad (1)$$

Per tant, si

$$B(p, r) \cap G(t_1) = \phi \text{ per a tot } t \in [t^* - \eta, t^*],$$

aleshores com p a més pertany a $G(t^*)$ tindriem

$$\rho(G(t), G(t^*)) \geq r \text{ per a tot } t \in [t^* - \eta, t^*],$$

que es contradia amb (1).

Continuant amb la demostració, ara tenim

$$K(t_1) \cap G(t_1) \neq \phi,$$

que contradia la definició de t^* com a temps mínim, ja que $t_1 \leq t^*$, i per tant, $x(t^*; u^*) \in \partial K(t^*)$. \square

Aquest teorema a part de provar l'existència del control òptim, ens demostra que un control òptim és necessàriament extremal, és a dir, tal com diu l'enunciat del teorema, que per $t \geq t_0$ es verifica $x(t; u) \in \partial \mathcal{A}(t)$ per $u \in \mathcal{U}$. Aleshores formulant el teorema 5.3, que és un cas concret del *principi del màxim de Pontryagin* enunciat en el teorema 5, tindrem una caracterització dels controls extremals.

Pel cas que estem tractant tenim

$$J(u) = \int_{t_0}^t d\tau = t - t_0,$$

que es correspon al temps que tarda el sistema en arribar a la posició final.

Per tant,

$$\begin{aligned} H(t, x, u^*, \lambda) &= \lambda^T f(x, t, u^*) + L = \lambda^T (Ax + Bu + b) + 1, \\ \dot{\lambda}^T &= -\lambda^T f_x(t, x, u^*) - L_x(t, x, u^*) = -\lambda^T A, \text{ que implica } \dot{\lambda} = -A^T \lambda. \end{aligned}$$

Teorema 5.3. *Un control u^* és extremal en $[t_0, t^*]$ si, i només si, existeix una funció vectorial n -dimensional $\lambda(t)$ no idènticament nul·la i amb derivada en $[t_0, t^*]$ tal que*

- a) $\dot{\lambda}(t) = -A^T(t)\lambda(t)$;
- b) per a tot $t \in [t_0, t^*]$ es verifica

$$(\lambda(t), B(t)u^*(t)) = \max\{(\lambda(t), B(t)u) : u \in \mathcal{U}\}.$$

Demostració: Primer farem la implicació d'esquerra a dreta, per tant, comencem suposant que $u^* \in \mathcal{U}$ és extremal i per tant, $x(t^*; u^*) \in \partial K(t^*)$.

Com que hem vist que $K(t^*)$ és convex i compacte aleshores existeix un hiperplà π de suport de $K(t^*)$ en $x(t^*; u^*)$, és a dir, existeix $\lambda(t^*)$ vector unitari normal a π , exterior a $K(t^*)$ en $x(t^*; u^*)$, tal que

$$\pi : (\xi - x(t^*; u^*), \lambda(t^*)) = 0.$$

I els punts de $K(t^*)$ estan al semiplà afí determinat per π d'equació

$$(\xi - x(t^*; u^*), \lambda(t^*)) \leq 0. \quad (1)$$

Definim la funció

$$\lambda(t) = \Phi^{T-1}(t)\Phi^T(t^*)\lambda(t^*),$$

que està ben definida ja que per $t = t^*$ l'equació és certa.

Per tant,

$$\dot{\lambda}(t) = (\Phi^{T-1})'(t)\Phi^T(t^*)\lambda(t^*) = -A^T(t)\Phi^{T-1}(t)\Phi^T(t^*)\lambda(t^*) = -A^T(t)\lambda(t),$$

ja que $(\dot{\Phi}^{T-1}) = -A^T(t)\Phi^{T-1}$ partint de la derivació respecte t de la igualtat $\Phi^T\Phi^{T-1} = Id$ i tenint en compte que $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$. Així hem provat a).

Ara, per provar b) ho farem per reducció a l'absurd. Suposem que existeix algun $t_1 \in [t_0, t^*)$ tal que

$$(\lambda(t_1), B(t_1)u^*(t_1)) < \max\{(\lambda(t_1), B(t_1)u) : u \in \mathcal{U}\}.$$

Aleshores per continuïtat de s en tot un cert interval de $[t_0, t^*]$ tenim

$$(\lambda(s), B(s)u^*(s)) < \max\{(\lambda(s), B(s)u) : u \in \mathcal{U}\}.$$

Definim ara una funció \bar{u} de $[t_0, t^*]$ a U tal que

$$(\lambda(s), B(s)\bar{u}(s)) = \max\{(\lambda(s), B(s)u) : u \in \mathcal{U}\}. \quad (2)$$

Aquesta funció \bar{u} és també un control admissible, ja que triem $\bar{u}(s)$ de manera que per cada $s \in [t_0, t^*)$ agafem el vector $\bar{u}(s)$ amb direcció igual a la de $B^T(s)\lambda(s)$ i de mòdul màxim possible amb la restricció de que $\bar{u}(s)$ pren valors en U . En el cas que $B^T(s)\lambda(s)$ sigui 0 aleshores $\bar{u}(s)$ s'elegeix arbitràriament respectant la continuïtat a trossos.

Aleshores per variació de constants tenim

$$\begin{aligned} (\lambda(t^*), x(t^*; \bar{u})) &= \left(\lambda(t^*), \Phi(t^*)x_0 + \Phi(t^*) \int_{t_0}^{t^*} \Phi^{-1}(\tau)[B(\tau)\bar{u}(\tau) + b(\tau)]d\tau \right) \\ &\stackrel{(2)}{>} \left(\lambda(t^*), \Phi(t^*)x_0 + \Phi(t^*) \int_{t_0}^{t^*} \Phi^{-1}(\tau)[B(\tau)u^*(\tau) + b(\tau)]d\tau \right) = (\lambda(t^*), x(t^*; u^*)). \end{aligned} \quad (3)$$

Per tant,

$$(\lambda(t^*), x(t^*; \bar{u})) - (\lambda(t^*), x(t^*; u^*)) > 0,$$

si i només si,

$$(\lambda(t^*), x(t^*; \bar{u}) - x(t^*; u^*)) > 0,$$

que implica juntament amb (1) que $x(t^*; u^*) \notin K(t^*)$, amb contradicció amb la hipòtesi, per tant s'ha de complir b).

Anem a fer ara la demostració d'esquerra a dreta per reducció a l'absurd. Considerem a) i b) i suposem que $x(t^*; u^*) \in \text{int}(K(t^*))$.

Sigui $x(t^*; \bar{u})$ un altre punt de $K(t^*)$ tal que

$$(\lambda(t^*), x(t^*; u^*) - x(t^*; \bar{u})) < 0,$$

això és cert perquè existeix una bola $B((x(t^*), u^*), r) \subset K(t^*)$ per $r > 0$.

Per als controls u^* i \bar{u} es verifica segons la hipòtesi b) que

$$(\lambda(t), B(t)u^*(t)) \geq (\lambda(t), B(t)\bar{u}(t)) \text{ per a tot } t \in [t_0, t^*),$$

aleshores per (3) tenim

$$(\lambda(t^*), x(t^*; u^*)) \geq (\lambda(t^*), x(t^*; \bar{u})),$$

i per tant,

$$(\lambda(t^*), x(t^*; u^*) - x(t^*; \bar{u})) \geq 0,$$

que és la contradicció que buscàvem. \square

Si relacionem el control de temps òptim amb l'exemple del pèndol de la secció 3.1, veiem que el problema del pèndol es pot precisar en trobar unes constants K_P , K_D i K_I que dirigeixin el pèndol cap a assolir el seu punt d'equilibri inestable en un temps mínim.

5.1.3 Exemple: Oscil·lador harmònic esmorteït

Tractarem el problema de temps òptim següent, descrit en [4]: es tracta d'assolir des de l'origen de l'oscil·lador harmònic esmorteït, un punt p amb temps mínim. El moviment de l'oscil·lador harmònic esmorteït ve determinat per l'equació $\ddot{x} = -x + u$, on x és la posició respecte el punt de repòs, i u és la força "d'amortiment", a la que imposem la restricció $|u| \leq 1$. Per tant, $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}$. Notem que l'equació de l'oscil·lador harmònic es correspon amb la linealització del pèndol al voltant del punt d'equilibri estable. L'equació es pot escriure

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Suposem que existeix $u \in \mathcal{U}$ que dirigeix el procés des de l'origen en $t = 0$ al punt p per a $t = t_1$, és a dir, $x(0; u) = 0$, $x(t_1, u) = p$.

El conjunt meta en aquest problema és $G(t) = p$ per $t \geq 0$. Per tant, $\mathcal{A} \cap G(T) \neq \emptyset$ i pel teorema 5.2, existeix $u^* \in \mathcal{U}$ control de temps òptim t^* . Aleshores pel corol·lari 5.2,

existeix u_0^* control bang-bang òptim. Ara pel teorema 5.3, existeix $\lambda(t) \neq 0$ complint les condicions a) i b) del teorema.

Sigui A la matriu definida anteriorment, la condició a) és

$$\dot{\lambda} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda,$$

i per tant la solució $\lambda(t)$ té la forma

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix},$$

on els paràmetres c_1 i c_2 compleixen $c_1^2 + c_2^2 = 1$, ja que en la demostració del teorema hem vist que $|\lambda(t^*)| = 1$. Aleshores la condició b) és

$$(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)u_0^*(t) = \max\{(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)u : |u| \leq 1\}.$$

Per tant, podem definir el control continu a trossos u_0^* de la manera següent:

$$u_0^*(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } (-c_1 \sin t + c_2 \cos t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } (-c_1 \sin t + c_2 \cos t) < 0 \end{cases}.$$

El sistema queda ara descrit per

$$S^+ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 1 \end{cases}, \quad S^- \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 1 \end{cases},$$

que per $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ paràmetres arbitraris i aplicant el mètode de variació de constants, les solucions general pels sistemes S^+ i S^- són

$$\begin{cases} x(t) - 1 = \alpha \sin t + \beta \cos t \\ y = -\beta \sin t + \alpha \cos t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t) + 1 = \gamma \sin t + \delta \cos t \\ y = -\delta \sin t + \gamma \cos t \end{cases}$$

Les corbes corresponents a la solució de S^+ en el pla xy són $(x-1)^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2$, és a dir, circumferències de centre $(0, 1)$ i radi $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Les corbes corresponents a la solució de S^- en el pla xy són $(x+1)^2 + y^2 = \gamma^2 + \delta^2$, és a dir, circumferències de centre $(-1, 0)$ i radi $\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$.

Com $c_1^2 + c_2^2 = 1$, existeix ω , $0 \leq \omega < 2\pi$ tal que $-c_1 \sin t + c_2 \cos t = \sin(t + \omega) = \cos w \sin t + \sin w \cos t$. Les trajectòries bang-bang s'obtenen, per ω fixat, com es descriu a continuació. Un cop fixat ω , si $\sin w \geq 0$ partim de l'origen per la trajectòria de S^+ que passa per l'origen en el sentit creixent del temps fins que $\sin(t + \omega) = 0$. Aleshores ens trobem en un punt de canvi de control i seguim per la trajectòria de S^- que passa per aquest punt fins que de nou $\sin(t + \omega) = 0$, on tornem a canviar a la trajectòria de S^+ i així successivament. El cas per $\sin w < 0$ és anàleg. La figura 16 representa la trajectòria per $\omega = \pi/3$, obtinguda amb el codi adjunt a l'annex B.

Es pot observar que l'interval de temps en el que es recorre una mateixa corba solució de S^+ o S^- és π , per tant els punts de canvi són simètrics respecte l'anterior elegint un centre adequat.

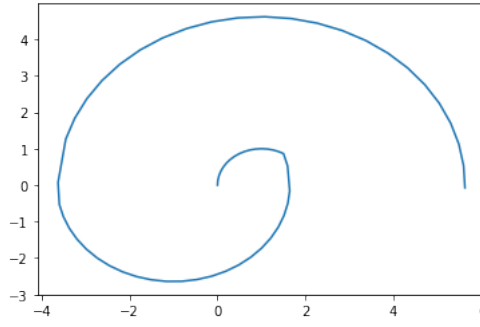


Figura 16: Trajectòria de l'oscil·lador harmònic per $w = \pi/3$.

5.2 Maximització de l'n-èsima component de l'estat final

Abans de definir el problema d'optimització, concretarem les condicions sobre les quals estarà definit el procés que estudiarem.

Com en la secció 5.1, els resultats estan basats en la referència [4].

Sigui

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

l'equació que defineix el sistema, on $t \in [0, 1]$, $u(t) \in \mathcal{U}$ és el control definit en $[0, 1]$, $x(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una funció contínua en $[0, 1]$ amb derivada contínua a trossos en $[0, 1] - t_0, t_1, \dots, t_k$ i f és una funció de $(t, \xi, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times U$ a \mathbb{R}^n que satisfà:

Existeix un conjunt finit t_0, t_1, \dots, t_k de punts de $[0, 1]$ amb

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1,$$

i amb una família de funcions f_i , $i = 1, \dots, k$ definides cada una en $[t_{i-1}, t_i] \times \mathbb{R}^n \times U$ amb valors en \mathbb{R}^n tal que les primeres i segones derivades respecte ξ són contínues en $[t_{i-1}, t_i] \times \mathbb{R}^n \times U$ respecte (t, ξ, u) . A més, la funció f coincideix amb f_i en $(t_{i-1}, t_i) \times \mathbb{R}^n \times U$ i amb f_j , o bé amb f_{j+1} , en $\{f_j\} \times \mathbb{R}^n \times U$.

Per a $u \in \mathcal{U}$, designarem per $c(u)$ l'obert de $(0, 1)$ que resulta de treure els punts de discontinuïtat de u i els de $f(t, \xi, u)$ respecte t . I designarem també per $x(t; u)$ la única solució del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

Definim el conjunt

$$S = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 = s_1, \xi_2 = s_2, \dots, \xi_r = s_r\},$$

per r fixat, tal que $1 \leq r \leq n - 1$, inclòs en \mathbb{R}^n .

Per últim, es defineix el conjunt accessible com

$$\mathcal{A}(t) = \{x(t; u) \in \mathbb{R}^n : u \in \mathcal{U}\}.$$

El problema, sota el context definit anteriorment, consisteix en trobar, si és possible, un control admissible $u \in \mathcal{U}$, tal que $x(1; u) \in S$ i a més per qualsevol altre control $v \in \mathcal{U}$ que verifiqui $x(1; v) \in S$ es compleixi $x(1; u) \geq x(1; v)$. Aquest control u coincidirà amb el control òptim u^* .

Aleshores, en aquest problema

$$J(u) = \psi(x(1)) = x_n(1; u),$$

que implica

$$H(t, x, u^*, \lambda) = \lambda^T f(x, t, u^*) + L = f(x, t, u^*)\lambda.$$

Per tant, el *principi del màxim de Pontryagin* s'enuncia com en el teorema següent.

Teorema 5.4. *Definim la funció H de $(t, \xi, u, \lambda) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de la següent manera:*

$$H(t, \xi, u^*, \lambda) = (f(t, \xi, u), \lambda).$$

Aleshores, si u^ és un control òptim, existeix una funció $\lambda(t)$ de $[0, 1]$ a \mathbb{R}^n contínua en $[0, 1]$, i amb derivada contínua a trossos en $c(u^*)$ i no idènticament nul·la tal que*

- 1) $H(t, x(t; u^*), u^*(t), \lambda(t)) \geq H(t, x(t; u^*), u, \lambda(t))$ per a cada $t \in c(u^*)$ i cada $u \in \mathcal{U}$.
- 2) $\dot{\lambda}(t) = -H_x(t, x(t; u^*), u^*(t), \lambda(t))$ per cada $t \in c(u^*)$.
- 3) $\lambda_i(1) = 0$ per a cada $i = r + 1, \dots, n - 1$.
- 4) $\lambda_n(1) \geq 0$.

Demostració: Demostrarem primer el teorema per la funció $\dot{x} = f(t, u)$ independent de x . Així doncs podem definir la trajectòria

$$x(t; u) = \int_0^t f(s, u(s)) ds.$$

Suposem que u^* és un control òptim. Sigui S^+ el conjunt de punts de S amb coordenada n -èssima estrictament major que $x_n(1; u^*)$, és a dir,

$$S^+ = \{\xi \in S : \xi_n(1; u^*)\}.$$

Com que $x_n(1; u^*) < \infty$, S^+ no és buit. A més, S^+ és convex.

Anem a veure que el conjunt $\mathcal{A}(1)$ també és convex. Sigui $a, b \in \mathcal{A}(1)$ tals que

$$a = \int_J f(s, u_a(s)) ds, \quad b = \int_J f(s, u_b(s)) ds,$$

essent $J = [0, 1]$. Considerem el conjunt

$$L = \left\{ \int_J [f(s, u_a(s))\chi_E(s) + f(s, u_b(s))\chi_{J-E}(s)] ds : E \in \mathcal{H} \right\},$$

on \mathcal{H} és la família de subconjunts de J unió finita d'intervals (oberts, tancats, semioberts i possiblement degenerats en un punt o en el buit).

Aleshores, si $E = J$ tenim $a \in L$ i si $E = \phi$ tenim $b \in L$. Si per a $E \in \mathcal{H}$ definim la funció

$$u_E(s) = \begin{cases} u_a(s) & \text{si } s \in E \\ u_b(s) & \text{si } s \in J - E \end{cases},$$

com que $u_a, u_b \in \mathcal{U}$ tenim $u_E \in \mathcal{U}$, i L és

$$L = \int_J f(s, u_E(s)) ds = \int_0^1 f(s, u_E(s)) ds = x(1; u_E) \in \mathcal{A}(1).$$

que també es pot escriure com

$$L = \int_J f(s, u_E(s)) ds = \int_J f(s, u_b(s)) ds + \int_E [f(s, u_a(s)) - f(s, u_b(s))] ds.$$

Pel teorema de Lyapunov 9.2.1 de la referència [4], es verifica que el conjunt

$$\left\{ \int_E [f(s, u_a(s)) - f(s, u_b(s))] ds : E \in \mathcal{H} \right\},$$

és convex, per tant $L \in \mathcal{A}$ és convex. D'aquesta manera el segment $c = \mu a + (1 - \mu)b$ amb $\mu \in [0, 1]$, que uneix $a \in L$ i $b \in L$, és de L per ser L convex i per tant també ho és de \mathcal{A} , la qual cosa implica que $K(1)$ és convex.

Com que $\mathcal{A}(1)$ són totes les solucions del tipus $x(1; u)$ amb $u \in \mathcal{U}$, i u^* és control òptim, aleshores $x(1; u^*) > x(1; u)$ que és la condició contrària a la del conjunt S^+ , per tant és clar que

$$\mathcal{A}(1) \cap S^+ = \phi,$$

que implica que $\mathcal{A}(1)$ i S^+ són convexos disjunts. Aleshores existeix un hiperplà P que els separa. Conseqüentment, existeix un vector unitari λ , normal al hiperplà, i un número h que és la distància de l'origen a P tals que

- a) $(\xi, \lambda) \leq h$ per a cada $\xi \in \mathcal{A}(1)$.
- b) $(\xi, \lambda) \geq h$ per a cada $\xi \in \overline{S^+}$

A més, observem que

$$x(1; u^*) \in \overline{S^+} \cap K(1),$$

així doncs,

- a) $(\xi, \lambda) \leq (x(1; u^*), \lambda)$ per a cada $\xi \in \mathcal{A}(1)$.
- b) $(\xi, \lambda) \geq (x(1; u^*), \lambda)$ per a cada $\xi \in \overline{S^+}$.

A continuació veurem que les condicions 1), 2), 3), 4) del teorema es verifiquen per $\lambda(t) \equiv \lambda$.

1) Volem veure que $f(t, u^*(t), \lambda) > f(t, u, \lambda)$. Comencem suposant el contrari i arribarem a contradicció.

Suposem que existeix $t \in c(u^*)$ i $u \in \mathcal{U}$ tals que

$$f(t, u^*, \lambda) < f(t, u, \lambda).$$

Com que $c(u^*)$ és un obert, existeix $\eta > 0$, $\epsilon > 0$ tals que $[t - \epsilon, t + \epsilon] \subset c(u^*)$ i per qualsevol $s \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$ es verifica

$$f(s, u^*, \lambda) < f(s, u, \lambda) - \eta.$$

Si definim ara un nou control

$$\bar{u}(s) = \begin{cases} u^*(s) & \text{si } s \in [0, 1] - (t - \epsilon, t + \epsilon) \\ u & \text{si } s \in [t - \epsilon, t + \epsilon] \end{cases},$$

obtenim aplicant la desigualtat triangular,

$$\left(\int_0^1 f(s, \bar{u}(s)) ds, \lambda \right) \geq \left(\int_0^1 f(s, u(s)) ds, \lambda \right) + 2\epsilon\eta.$$

Per tant,

$$(x(1; \bar{u}), \lambda) \geq (x(1; u^*), \lambda) + 2\epsilon\eta,$$

que contradiu la relació següent demostrada anteriorment.

$$(\xi, \lambda) \leq (x(1; u^*), \lambda) \text{ per a cada } \xi \in \mathcal{A}(1).$$

2) És trivial, ja que $\dot{\lambda} = 0$ i la funció $f(t, u)$ no depèn de x .

3) Sigui e_i , $i = r + 1, \dots, n - 1$ un vector unitari en la direcció positiva de l'eix Ox_i , tenim

$$x(1; u^*) + e_i \in \overline{S^+}, \quad x(1; u^*) - e_i \in \overline{S^+}.$$

Per tant, aplicant la segona relació b), es compleix

$$\text{a) } (x(1; u^*) + e_i, \lambda) \geq (x(1; u^*), \lambda).$$

$$\text{b) } (x(1; u^*) - e_i, \lambda) \geq (x(1; u^*), \lambda).$$

Aleshores veiem que $(e_i, \lambda) = 0$, que implica $\lambda_i = 0$ per $i = r + 1, \dots, n - 1$.

4) Considerant el vector e_i de 3) veiem igualment que per $i = n$ es compleix

$$x(1; u^*) + e_n \in \overline{S^+}.$$

Per tant, igual que en 3) tenim

$$(x(1; u^*) + e_n, \lambda) \geq (x(1; u^*), \lambda),$$

que és el mateix que

$$(e_n, \lambda) = \lambda_n \geq 0.$$

Demostrem ara el cas en què $\dot{x} = A(t)x + \omega(t, u)$, on $x(0) = 0$, $A(t)$ és una funció matricial $n \times n$ contínua a trossos en $[0, 1]$ i $\omega(t, u)$ és contínua a trossos respecte u i contínua a trossos respecte t .

Podem reduir la demostració al cas $\dot{x} = f(t, u)$ de la manera següent:

Sigui $\Phi(t)$ la matriu fonamental de l'equació $\dot{y} = A(t)y$ amb $\Phi(1) = I$, és a dir, $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$.

Fent el canvi $x(t) = \Phi(t)z(t)$, tenim que

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)z(t) + \Phi(t)\dot{z}(t) = A(t)\Phi(t)z(t) + \Phi(t)\dot{z}(t) = A(t)\Phi(t)z(t) + w(t, u(t)),$$

que implica $\Phi(t)\dot{z}(t) = w(t, u(t))$. Per tant,

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t)w(t, u(t)),$$

és una equació del tipus ja estudiat.

Com que sabem $x(0) = 0$ i $\Phi(1) = Id$, utilitzant l'equació anterior tenim $z(0) = 0$ i $z(1) = x(1)$.

Per tant, u^* és el control òptim de

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + \omega(t, u) \\ x(0) = 0 \end{cases},$$

si i només si, u^* és el control òptim de

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t)w(t, u(t)) \\ z(0) = 0 \end{cases}.$$

Segons el cas ja estudiat, si u^* és control òptim, si definim $\lambda(t) \equiv \lambda$, per un cert vector unitari es verifiquen les condicions 1), 2), 3), 4) del teorema.

1) Pel cas anterior es compleix

$$(\Phi^{-1}(t)\omega(t, u^*(t)), \lambda) \geq (\Phi^{-1}(t)\omega(t, u), \lambda),$$

que aplicat al problema actual, sigui Φ^T la transposada de Φ tenim

$$(A(t)x(t; u^*) + \omega(t, u^*), \Phi^{T-1}(t)\lambda) \geq (A(t)x(t; u) + \omega(t, u), \Phi^{T-1}(t)\lambda).$$

Si definim $\bar{\lambda}(t) = \Phi^{T-1}(t)\lambda$, aleshores ja hem demostrat 1).

2) Per la definició anterior de $\bar{\lambda}(t)$ tenim

$$\dot{\bar{\lambda}}(t) = (\dot{\Phi}^{T-1}(t))\lambda$$

Si derivem ara la igualtat $\Phi^T(t)\Phi^{T-1}(t) = Id$ respecte t, aleshores

$$\dot{\Phi}^{T-1}(t) = \Phi^{T-1}(t)\dot{\Phi}^T(t)\Phi^{T-1}(t)\lambda,$$

i per tant,

$$\dot{\bar{\lambda}}(t) = (\dot{\Phi}^{T-1}(t))\lambda = \Phi^{T-1}(t)\dot{\Phi}^T(t)\Phi^{T-1}(t)\lambda = -A^T(t)\Phi^{T-1}(t)\lambda = -A^T(t)\bar{\lambda}(t).$$

Ara volem veure l'expressió de $H_x(t, x(t; u^*), u^*(t), \bar{\lambda}(t))$. Sigui

$$H_x(t, \xi, u, \lambda) = (A(t)\xi + \omega(t, u), \lambda) = (A(t)\xi, \lambda) + (\omega(t, u), \lambda) = (\xi, A^T(t)\lambda) + (\omega(t, u), \lambda).$$

Aleshores,

$$-H_x(t, x(t; u^*), u^*(t), \bar{\lambda}(t)) = -A^T(t)\bar{\lambda}(t).$$

Per tant, tenim que $\dot{\bar{\lambda}}(t)$ coincideix amb $-H_x(t, x(t; u^*), u^*(t), \bar{\lambda}(t))$ i així veiem 2).

3) i 4) S'obtenen directament del fet que $\Phi(1) = Id$, ja que aleshores $\bar{\lambda}(1) = \lambda$. I ja hem vist en l'altre cas que λ compleix aquestes propietats. \square

La proposició següent afirma que un control òptim és extremal, com ja havíem afirmat en el problema del capítol 5.1.

Proposició 5.1. *Si u^* és control òptim, aleshores per a tot $t \in [0, 1]$ es verifica*

$$x(t; u^*) \in \partial\mathcal{A}(t).$$

Demostració: Si existeix $u^* \in \mathcal{U}$ control òptim, aleshores $x(1; u^*)$ pertany a $K(1)$ i a S , per tant,

$$K(1) \cap S \neq \emptyset.$$

Primer veurem que $x(1; u^*) \in \partial\mathcal{A}(1)$. Suposem que no, és a dir, $x(1; u^*) \in \text{int}(\mathcal{A}(1))$, aleshores existeix $\bar{u} \in \mathcal{U}$ tal que

$$x(1; \bar{u}) \in S \text{ i } x_n(1; \bar{u}) > x_n(1; u^*),$$

i per tant u^* no és òptim, la qual cosa és una contradicció.

Anem a veure ara $x(t; u^*) \in \partial\mathcal{A}(t)$ per qualsevol $t \in [0, 1]$. Suposarem també que no és cert, és a dir, existeix algun $t_1 \in [0, 1)$ tal que $x(t_1; u^*) \in \text{int}(\mathcal{A}(1))$.

Així per un $r_1 > 0$, tenim

$$B(x(t_1; u^*), r_1) \subset \mathcal{A}(t_1).$$

Considerarem el problema de Cauchy per $y \in \mathbb{R}^n$ fix en $[t_1, 1]$ següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u^*) \\ x(1) = x(1; u^*) + y \end{cases}.$$

Aleshores existeix una solució $x_y(t)$ que depèn contínuament de y .

A més, és clar que $x_0(t) = x(t; u^*)$. Per tant, existeix $r_2 > 0$ tal que si $|y| \leq r_2$ tenim

$$x_y(t_1) \in B(x(t_1; u^*), r_1) \subset \mathcal{A}(t_1).$$

Segui $x_y(t_1) = x(t_1; \bar{u})$ amb $\bar{u} \in \mathcal{U}$. Definim un nou control admissible

$$u^{**}(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) & \text{si } 0 < t \leq t_1 \\ u^*(t) & \text{si } t_1 < t \leq 1 \end{cases}.$$

Aleshores $x(1; u^{**}) = x(1; u^*) + y$, que implica $x(1; u^{**}) > x(1; u^*)$, i per tant,

$$x(1; u^*) \in \text{int}(\mathcal{A}(1)).$$

Però això ja hem vist que no pot ser, així doncs, és necessari que $x(1; u^*) \in \partial\mathcal{A}(1)$ per $t \in [0, 1]$. \square

6 Conclusions

En aquest treball hem vist que els sistemes de control continu amb un control PID es poden estabilitzar en l'estat final prefixat si es trien els paràmetres adequats. Aquest control pertany a un conjunt admissible, acotat segons el problema que tractem. S'han discutit també les propietats de controlabilitat, observabilitat i estabilitat emfatitzant al llarg del treball les seves relacions. L'estudi de l'estabilitat i controlabilitat per sistemes no lineals s'ha presentat des del punt de vista de la teoria de l'estabilitat de Lyapunov. L'exemple del pèndol ens ha servit per anar reflectint tots aquests conceptes i poder-ne programar una visualització.

En l'exposició del control òptim, s'ha emfatitzat el fet que és una continuació del càlcul variacional, sota condicions de diferenciabilitat menys restrictives, com havíem enunciat en la introducció. Així, s'ha presentat el principi de Pontryagin i s'han discutit les seves aplicacions en el marc de la teoria de control. A més, hem observat que el control PID i el control òptim no són independents un de l'altre, ja que si aconseguim trobar unes constants tals que el control PID faci que el sistema assoleixi l'estat final en un temps mínim, aquest control és de temps òptim i per tant extremal. L'existència d'un control òptim ens dona el principi de bang-bang.

A Estabilitat en sentit de Lyapunov

Sigui l'equació diferencial

$$\dot{x} = X(x),$$

on $x \in \mathbb{R}^n$, $X : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ és un camp vectorial C^r , $r \geq 1$ amb $W \subset \mathbb{R}^n$ obert i $x_0 \in W$ tal que $X(x_0) = 0$, és a dir, x_0 punt fix de X .

Definició A.1. Es diu que x_0 és estable en sentit de Lyapunov si per qualsevol $W_0 \subset W$ entorn de x_0 , existeix $W_1 \subset W$ entorn de x_0 tal que per qualsevol $x_1 \in W_1$ es compleix

$$I_+(x_1) = [0, +\infty),$$

$$\varphi(t, x_1) \in W_0 \text{ per qualsevol } t \geq 0,$$

on I_+ és el semi-interval positiu de definició de la solució maximal del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(0) = x_1 \end{cases}$$

Definició A.2. Es diu que x_0 és asimptòticament estable si és estable Lyapunov i per qualsevol $x_1 \in W_1$, $\varphi(t, x_1) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_0$.

Definició A.3. Una funció de Lyapunov per al punt fix x_0 és una funció

$$F : U_0 \subset W \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in U_0 \text{ obert de } \mathbb{R}^n,$$

de classe C^1 tal que

i) $F(x_0) = 0$, $F(x) > 0$, per qualsevol $x \neq x_0$, $x \in U_0$.

ii) $\dot{F}(x) \leq 0$ per qualsevol $x \in U_0$.

$\dot{F}(x) = \frac{d}{dt}F(x) = DF(x)\dot{x} = \langle \nabla F(x), X(x) \rangle$ és la derivada orbital.

Si a més

iii) $\dot{F}(x) < 0$ per qualsevol $x \in U_0 \setminus \{x_0\}$,

aleshores es diu que la funció de Lyapunov és estricta.

Teorema A.1. (Segon mètode de Lyapunov)

Sigui $x_0 \in W$ un punt fix de $X : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ camp vectorial C^r . Suposem que existeix una funció de Lyapunov

$$F : U_0 \subset W \rightarrow \mathbb{R}, \quad C^1 \quad x_0 \in U_0 \text{ obert de } \mathbb{R}^n,$$

aleshores x_0 és estable en sentit de Lyapunov.

Si a més, F és una funció de Lyapunov estricta, aleshores x_0 és asimptòticament estable.

En el cas concret d'un sistema lineal autònom $\dot{x} = Ax$, A matriu $n \times n$ i $x \in \mathbb{R}^n$, tenim a més, el resultat següent.

Teorema A.2. *El sistema $\dot{x} = Ax$, és asimptòticament estable respecte $x_0 = 0$ si, i només si, l'equació algebraica*

$$-\Gamma = A'Y + YA,$$

anomenada equació de Lyapunov, té una solució Y real, simètrica i definida positiva, per alguna matriu Γ simètrica i definida positiva.

B Codi desenvolupat: Control PID

S'inclou a continuació el codi (en Python 3) que s'ha fet servir per les simulacions del control PID del problema de control que consisteix en aturar el pèndol en la posició d'equilibri inestable, veure discussió en la secció 3.2. També s'inclou el codi que s'ha fet servir per descriure les trajectòries de l'oscil·lador harmònic esmorteït en la secció 5.1.3.

Codi pel sistema lineal i no lineal del pèndol sense pertorbacions:

```

1 import math
2 import numpy as np
3
4 # FUNCIONS -----
5
6 def func_int(integral, error, dt):
7     return (integral + error*dt)
8
9 def func_deriv(error, error_inicial, dt):
10    return ((error - error_inicial)/dt)
11
12 # Solucio explicita del sistema linealitzat
13 def sol(t, t_0, x_0, y_0, u):
14     s_t = math.sinh(t)
15     s_0 = math.sinh(t_0)
16     c_t = math.cosh(t)
17     c_0 = math.cosh(t_0)
18
19     # Calcul de phi
20     a_0 = c_t*c_0 - s_t*s_0
21     a_0 = a_0*x_0
22     b_0 = -c_t*s_0 + s_t*c_0
23     b_0 = b_0*y_0
24     d_0 = -c_t*c_t + s_t*s_t + c_t*c_0 - s_t*s_0
25     d_0 = d_0*u
26
27     # Calcul de phi punt
28     a_1 = s_t*c_0 - c_t*s_0
29     a_1 = a_1*x_0
30     b_1 = -s_t*s_0 + c_t*c_0
31     b_1 = b_1*y_0
32     d_1 = -s_t*c_t + c_t*s_t + s_t*c_0 - c_t*s_0
33     d_1 = d_1*u
34
35     x = a_0 + b_0 + d_0
36     y = a_1 + b_1 + d_1

```

```

37
38     return(x, y)
39
40 # Solucio explicita del sistema no lineal
41 def sol_euler(x_0, y_0, h, u):
42     # Una iteracio d'Euler
43     x = x_0+h*y_0
44     y = y_0+h*(-math.sin(x_0) + u)
45
46     return (x, y)
47
48 # Control PID
49 def simulacio(x_0, y_0, t_0, h, epsilon, Kp, Kd, Ki):
50     t = t_0 + h
51     dt = h
52     integral = 0
53     error_inicial = 0
54     u_0 = Kp*x_0 + Kd*y_0
55     solucio_x, solucio_y = sol_euler(x_0, y_0, h, u_0)
56     #solucio_x, solucio_y = sol(t, t_0, x_0, y_0, u_0)
57     error = - solucio_x
58
59     dades = []
60     dades.append((t, solucio_x, solucio_y, error))
61
62     while abs(error)>epsilon:
63         x_0, y_0 = solucio_x, solucio_y
64
65         if(Ki != 0):
66             integral = func_int(integral, error, dt)
67             derivada = func_deriv(error, error_inicial, dt)
68             control = Kp*error + Ki*integral + Kd*derivada
69             t = t + h
70
71             solucio_x, solucio_y = sol_euler(x_0, y_0, h, control)
72             #solucio_x, solucio_y = sol(t, t-h, x_0, y_0, control)
73
74             error_inicial = error
75             error = - solucio_x
76
77             dades.append((t, solucio_x, solucio_y, error))
78
79     with open('fitxer_dades.txt', 'w') as fh:
80         for t, x, y, e in dades:
81             fh.write('{}\n'.format(t, x, y, e))
82
83     fh.close()
84
85     data = np.loadtxt('fitxer_dades.txt')
86
87 # EXECUCIO -----
88
89 simulacio(x_0,y_0,t_0,h,epsilon,Kp,Kd,Ki)

```

Codi pel sistema lineal i no lineal del pèndol amb una pertorbació fixada. El codi és el mateix que l'anterior amb dos petits canvis, per això només es mostraran les parts del codi on s'han fet els canvis.

```

1 # Canvi solucio explicita del sistema no linealitzat
2 def sol(t, t_0, x_0, y_0, u, per) # per es la pertorbacio
3     d_0 = d_0*(u+per)
4     d_1 = d_1*(u+per)
5
6     return(x, y)
7
8 # Canvi solucio explicita sistema no lineal
9 def sol_euler(x_0, y_0, h, u, per):
10     y = y_0+h*(-math.sin(x_0) + u + per)
11
12     return (x, y)

```

Codi que descriu la trajectòria de l'oscil·lador harmònic esmorteït amb un control bang-bang.

```

1 import math
2 import numpy as np
3 import random
4
5 # FUNCIONS -----
6
7 def sol(t, t_0, x_0, y_0, u):
8     s_t = math.sin(t)
9     s_0 = math.sin(t_0)
10    c_t = math.cos(t)
11    c_0 = math.cos(t_0)
12
13    a_0 = c_t*c_0 + s_t*s_0
14    a_0 *= x_0
15    b_0 = -c_t*s_0 + s_t*c_0
16    b_0 *= y_0
17    d_0 = c_t*c_t + s_t*s_t - c_t*c_0 + s_t*s_0
18    d_0 *= u
19
20    a_1 = -s_t*c_0 + c_t*s_0
21    a_1 *= x_0
22    b_1 = s_t*s_0 + c_t*c_0
23    b_1 *= y_0
24    d_1 = -s_t*c_t + c_t*s_t + s_t*c_0 - c_t*s_0
25    d_1 *= u
26
27    x = a_0 + b_0 + d_0
28    y = a_1 + b_1 + d_1
29
30    return(x, y)
31
32 def main(x, y, t, h, w):
33     k = 0
34     x_0 = 0
35     y_0 = 0
36     s = 0
37     dades = []
38
39     while k<65:

```

```

40     dades.append((t, x, y))
41     if(math.sin(w+t)>1e-12):
42         control = 1
43         x, y = sol(s+h, 0, x_0, y_0, control)
44     elif(math.sin(w+t)<-1e-12):
45         control = -1
46         x, y = sol(s+h, 0, x_0, y_0, control)
47     else:
48         x_0, y_0 = sol(s, 0, x_0, y_0, control)
49         s = h
50         x, y = sol(s, 0, x_0, y_0, control*-1)
51
52     t += h
53     s += h
54     k += 1
55
56     with open('fitxer_dades.txt', 'w') as fh:
57         for t, x, y in dades:
58             fh.write('{}_{ }\n'.format(t, x, y))
59
60     fh.close()
61
62     data = np.loadtxt('fitxer_dades.txt')
63
64     plt.plot(data[:,1], data[:,2])
65     plt.show()
66
67     # PARAMETRES I EXECUCIO -----
68
69     h = math.pi/24
70     t_0 = 0
71     x_0, y_0 = 0, 0
72     w=math.pi/3
73
74     main(x_0,y_0,t_0,h,w)

```

Referències

- [1] N. U. Ahmed. *Elements of finite-dimensional systems and control theory*, volume 37 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Longman Scientific & Technical, Harlow; John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [2] A. Bacciotti and L. Rosier. *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. Communications and Control Engineering. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [3] S. Barnett and R. G. Cameron. *Introduction to mathematical control theory*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1985.
- [4] M. de Guzmán. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Alhambra, Madrid, 1975. Teoría de estabilidad y control. [Theory of stability and control].
- [5] L. Evans. An introduction to mathematical optimal control theory version 0.2. 02 2013.
- [6] A. Lewis. The maximum principle of pontryagin in control and in optimal control. 01 2006.
- [7] E. D. Sontag. *Mathematical control theory*, volume 6 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998. Deterministic finite-dimensional systems.
- [8] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.