

llevando los valores de $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$, que se deducen del conocido de $\operatorname{tg} \alpha$ á la primera de las ecuaciones (2) teniendo presente que $\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}$, resulta después de algunas reducciones,

$$E = I \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{2\pi}{T} L - \frac{T}{2\pi C} \right)^2}$$

de donde

$$I = \frac{E}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{2\pi}{T} L - \frac{T}{2\pi C} \right)^2}}$$

Con estos valores de I y α , la expresión $i = I \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha \right)$ satisface á la ecuación diferencial.

Para tener la solución completa de la misma hay que añadir á la solución particular hallada, la general de la ecuación sin segundo miembro, á saber

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \rho \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (3)$$

Para resolverla puede seguirse el método de Euler que consiste en determinar dos integrales particulares de la misma. A este fin, se pone

$$i = e^{Kt} \quad (4)$$

siendo K una constante cuyo valor se determina substituyendo el valor anterior de i en la ecuación propuesta. Hecha la substitución se encuentra que, para que la fórmula (4) satisfaga á la ecuación diferencial (3) es necesario que K sea raíz de la ecuación

$$K L^2 + \rho K + \frac{1}{C} = 0$$

ó sea que K tenga uno de los dos valores

$$K = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2L}$$

los cuales, si $\rho^2 > \frac{4L}{C}$ serán reales y desiguales, si $\rho^2 = \frac{4L}{C}$ serán reales é iguales y si $\rho^2 < \frac{4L}{C}$ son imaginarios conjugados. En el primer caso los dos valores de K son negativos, y en el segundo iguales á $-\frac{\rho}{2L}$.

Por lo tanto, las soluciones completas correspondientes á los tres casos, son llamando λ_1 y λ_2 á dos constantes arbitrarias, y poniendo con objeto de abreviar la escritura

$$\frac{2\pi t}{T} = \theta; \quad \frac{2\pi t_0}{T} = \theta_0, \quad \frac{2\pi L}{T} = x_1, \quad \frac{T}{2\pi C} = x_2,$$

$$\tilde{\rho}_1 = \sqrt{\rho^2 - 4x_1x_2},$$

$$\tilde{\rho}_2 = \sqrt{4x_1x_2 - \rho^2},$$

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho^2 + (x_1 - x_2)^2},$$

las siguientes:

1.^{er} caso, $\rho^2 > 4x_1x_2$

$$i = \frac{E}{\tilde{\rho}} \sin(\theta - \theta_0 - \alpha) + \lambda_1 e^{\frac{-\rho + \tilde{\rho}_1}{2L}t} + \lambda_2 e^{\frac{-\rho - \tilde{\rho}_1}{2L}t}$$

2.^o caso, $\rho^2 = 4x_1x_2$

$$i = \frac{E}{\tilde{\rho}} \sin(\theta - \theta_0 - \alpha) + \lambda_1 e^{\frac{-\rho}{2L}t} + \lambda_2 t e^{\frac{-\rho}{2L}t}$$

3.^{er} caso, $\rho^2 < 4x_1x_2$

$$i = \frac{E}{\tilde{\rho}} \sin(\theta - \theta_0 - \alpha) + \lambda_1 e^{\frac{-\rho}{2L}t} \cos \frac{\tilde{\rho}_2}{2L}t + \lambda_2 e^{\frac{-\rho}{2L}t} \sin \frac{\tilde{\rho}_2}{2L}t \quad (5)$$

siendo en las tres fórmulas

$$\alpha = \arctg \frac{x_1 - x_2}{\rho}$$

Para determinar las constantes λ_1 y λ_2 hay que imponer al valor de i ciertas condiciones, como son, por ejemplo, que en el instante en que $t = t_1$, el valor de la intensidad así como la diferencia de potencial $\frac{\int i dt}{C}$ en las armaduras del condensador tienen valores conocidos de antemano, á los que llamaremos i_1 y e_1 . Estas dos condiciones permiten determinar λ_1 y λ_2 en función de i_1 y e_1 . Dejando al cuidado del lector el hacer las operaciones en los dos primeros casos, vamos á desarrollar el cálculo aplicable al tercer caso en que $\rho^2 < 4x_1x_2$ que es, acaso, el que se presta á discusiones de mayor aplicación práctica, pues la condición $\rho^2 < 4x_1x_2$ se cumple en los cables tanto aéreos como subterráneos.

Analíticamente, las condiciones de que para $t = t_1$, $i = i_1$ y $\frac{\int i dt}{C} = e_1$ se expresan mediante las dos ecuaciones siguientes:

$$i_1 = \frac{E}{\bar{\gamma}} \sin(\theta_1 - \theta_0 - \alpha) + \lambda_1 e^{\frac{-\rho}{2L} t_1} \cos \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 + \lambda_2 e^{\frac{-\rho}{2L} t_1} \sin \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1$$

$$e_1^{(1)} = -\frac{E x_2}{\bar{\gamma}} \cos(\theta_1 - \theta_0 - \alpha) - \frac{\lambda_1}{C} \frac{2L\rho}{\rho^2 + \bar{\gamma}_2^2} e^{\frac{-\rho}{2L} t_1} \left(\cos \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 + \frac{\bar{\gamma}_2}{\rho} \sin \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 \right)$$

$$- \frac{\lambda_2}{C} \frac{2L\rho}{\rho^2 + \bar{\gamma}_2^2} e^{\frac{-\rho}{2L} t_1} \left(\sin \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 - \frac{\bar{\gamma}_2}{\rho} \cos \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 \right)$$

eliminando entre estas ecuaciones y la (5) los valores de λ_1 y λ_2 se llega á la ecuación siguiente:

$$\left| \begin{array}{ccc} i - \frac{E}{\bar{\gamma}} \sin(\theta - \theta_0 - \alpha) & -e^{\frac{-\rho}{2L} t} \cos \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t & -e^{\frac{-\rho}{2L} t} \sin \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t \\ i_1 - \frac{E}{\bar{\gamma}} \sin(\theta_1 - \theta_0 - \alpha) & -e^{\frac{-\rho}{2L} t_1} \cos \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 & -e^{\frac{-\rho}{2L} t_1} \sin \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 \\ e + \frac{E x_2}{\bar{\gamma}} \cos(\theta_1 - \theta_0 - \alpha) & \frac{2x_1 x_2 \rho}{\rho^2 + \bar{\gamma}_2^2} e^{\frac{-\rho}{2L} t_1} \left(\cos \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 + \frac{\bar{\gamma}_2}{\rho} \sin \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 \right) & \frac{2x_1 x_2 \rho}{\rho^2 + \bar{\gamma}_2^2} e^{\frac{-\rho}{2L} t_1} \left(\sin \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 - \frac{\bar{\gamma}_2}{\rho} \cos \frac{\bar{\gamma}_2}{2L} t_1 \right) \end{array} \right| = 0 \quad (6)$$

En los cables destinados á transmisiones á elevado voltaje, x_2 es muy grande comparado con ρ y x_1 ; así es, que, aplicadas á los ca-

(1) He aquí como puede procederse para el cálculo de las integrales:

$$y_1 = \int e^{\alpha t} \cos \beta t dt \quad \text{é} \quad y_2 = \int e^{\alpha t} \sin \beta t dt$$

que se necesitan resolver para calcular $e_1 = \frac{\int i dt}{C}$

Integrando por partes,

$$y_1 = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha t} \sin \beta t dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha} y_2$$

$$y_2 = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin \beta t - \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha t} \cos \beta t dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin \beta t - \frac{\beta}{\alpha} y_1$$

De donde

$$y_1 = \frac{\alpha e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha} \sin \beta t); \quad y_2 = \frac{\alpha e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\sin \beta t - \frac{\beta}{\alpha} \cos \beta t)$$

Aplicadas al caso que estamos considerando, $\alpha = -\frac{\rho}{2L}$ y $\beta = \frac{\bar{\gamma}_2}{2L}$

bles de transmisión no se cometerá gran error, si en las fórmulas anteriores se hace caso omiso de ρ y x_1 delante de x_2 . Con estas simplificaciones $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $z_2 = 2\sqrt{x_1 x_2}$, $z = x_2$.

Propongámonos el estudio del valor de i á partir del momento $t_1 = 0$, en que se cierra el circuito precedentemente abierto.

Se tendrá que, para $t_1 = 0$, $i_1 = 0$ y $e_1 = 0$, luego, con las simplificaciones anteriores la ecuación (6) es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} i - \frac{E}{x_2} \cos(\theta - \theta_0) & -e^{\frac{-\rho}{2L}t} \cos \frac{\tilde{x}_2}{2L} t & -e^{\frac{-\rho}{2L}t} \sin \frac{\tilde{x}_2}{2L} t \\ -\frac{E}{x_2} \cos \theta_0 & -1 & 0 \\ -E \sin \theta_0 & \frac{\rho}{2} & -\sqrt{x_1 x_2} \end{vmatrix} = 0$$

ó lo que es igual, desarrollando la determinante según los elementos de la última columna,

$$e^{\frac{-\rho}{2L}t} \sin \frac{\tilde{x}_2}{2L} t \left[\frac{E\rho}{2x_2} \cos \theta_0 + E \sin \theta_0 \right] - \sqrt{x_1 x_2} \left[-\frac{Ee^{\frac{-\rho}{2L}t}}{x_2} \cos \theta_0 \cos \frac{\tilde{x}_2}{2L} t - i + \frac{E}{x_2} \cos(\theta - \theta_0) \right] = 0$$

De esta expresión se deduce

$$\begin{aligned} &= i \frac{E}{x_2} \cos(\theta - \theta_0) + e^{\frac{-\rho}{2L}t} \left[-\frac{E}{x_2} \cos \theta_0 \cos \frac{\tilde{x}_2}{2L} t \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{E\rho}{2x_2 \sqrt{x_1 x_2}} \cos \theta_0 - \frac{E}{\sqrt{x_1 x_2}} \sin \theta_0 \right] \sin \frac{\tilde{x}_2}{2L} t \right] \end{aligned} \quad (7)$$

este resultado demuestra que el valor de i se compone de dos partes una $\frac{E}{x_2} \cos(\theta - \theta_0)$ que representa una corriente análoga en la forma á la de la fuerza electromotriz sinusoidal que la ha originado, y otra parte periódica cuya amplitud decrece con el tiempo, y que acaba por hacerse insensible para valores algo considerables

del mismo. Los términos periódicos de esta segunda parte tienen el período T' definido por la igualdad.

$$\frac{2\pi}{T'} = \frac{\omega_2}{2L}$$

ó bien, ya que $z_2 = \sqrt{4x_1x_2}$; $x_1 = \frac{2\pi L}{T}$, y $x_2 = \frac{T}{2\pi C}$,

$$T' = 2\pi \sqrt{LC}$$

Lo que hemos considerado como segunda parte en el valor de i es como una perturbación al primer valor, perturbación originada por el cierre del circuito. ¿Cabe preguntar en qué condiciones es mínima? Y, suponiendo que no podemos modificar los valores de r , L , C y T de que depende, podemos precisar la pregunta, diciendo: ¿Para qué valores de t_0 la perturbación en el valor de la intensidad será mínima en un instante dado? Es decir, por lo que respecta á la intensidad, ¿cuándo será conveniente cerrar el circuito? Para resolver este problema basta hallar t_0 en la ecuación

$$\frac{d}{d\theta_0}(P) = 0$$

llamando P al factor de la exponencial

$$e^{\frac{-r}{2L}t}$$

en la fórmula (7) y tomar de las soluciones de la ecuación anterior la que hace mínimo á P , ó sea positiva á

$$\frac{d^2(P)}{d\theta_0^2}.$$

Teniendo en cuenta que x_2 es mucho mayor que x_1 en el caso que estamos considerando, la fórmula (7) puede escribirse aproximadamente:

$$i = \frac{E}{x_2} \cos(\theta - \theta_0) - e^{\frac{-r}{2L}t} \frac{E}{x_2} \cos \theta_0 \cos \frac{t}{\sqrt{CL}}$$

y en esta forma se reconoce que para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ó $\theta_0 = 3\frac{\pi}{2}$ que corresponden á valores de t_0 iguales á $\frac{T}{4}$ ó $3\frac{T}{4}$, la perturbación, no sólo

es mínima, sino que ni siquiera existe. En consecuencia, cerrando el circuito en el momento en que la fuerza electromotriz total pasa por el valor máximo en valor absoluto, la perturbación en la intensidad es nula.

Los valores máximos de la intensidad, ó de la fuerza electromotriz entre dos puntos, en el caso general de ser θ_0 cualquiera, ó en el particular, de tener un valor conocido, podrán hallarse determinando los valores del tiempo, que hacen máximas estas dos funciones. Se deduce del cálculo, que no son de temer grandes elevaciones de voltaje ni valores excesivos en la intensidad.

Sea en segundo lugar, el siguiente caso:

Supongamos que las dos armaduras del condensador están unidas por un conductor de resistencia despreciable. Y que en un instante dado $t = 0$, interrumpimos la comunicación entre las dos armaduras. La corriente, antes de la interrupción, vendrá dada por

$$i = \frac{E}{\tilde{\kappa}} \sin (\theta - \theta_0 - \alpha')$$

suponiendo que se ha alcanzado ya el régimen estacionario, ó sea que el tiempo que ha estado el condensador en corto circuito es suficientemente grande para que los términos perturbadores en el valor de i , afectados de una exponencial que actúa como función amortiguadora, tengan escasa ó ninguna importancia. El valor de z' es el de z en que x_2 es cero, esto es:

$$\tilde{\kappa}' = \sqrt{\rho^2 + x_1^2}$$

siendo

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{x_1}{\rho}$$

En el momento $t = 0$, $\theta = 0$, luego

$$i_1 = - \frac{E}{\tilde{\kappa}} \sin (\theta_0 + \alpha')$$

Además, en este instante en que las armaduras están unidas por un conductor de resistencia despreciable, su diferencia de potencial es cero, luego

$$e_1 = 0$$

Con estos datos, y mediante las simplificaciones usadas anteriormente, la ecuación 6 se convierte en la siguiente:

$$\left| \begin{array}{ccc} i - \frac{E}{x_2} \cos(\theta - \theta_0) & -e^{-\frac{\rho}{2L}t} \cos \frac{\tilde{\gamma}_2}{2L} t & -e^{-\frac{\rho}{2L}t} \sin \frac{\tilde{\gamma}_2}{2L} t \\ -\frac{E}{\tilde{\gamma}'} \sin(\theta_0 + \alpha') - \frac{E}{x_2} \cos \theta_0 & -1 & 0 \\ -E \sin \theta_0 & \frac{\rho}{2} & -\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} \end{array} \right| = 0$$

O bien desarrollando, según los elementos de la última columna:

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{\rho}{2L}t} \sin \frac{\tilde{\gamma}_2}{2L} t \left[E \sin \theta_0 - \frac{\rho}{2} \left(\frac{E}{\tilde{\gamma}'} \cos(\theta_0 + \alpha') - \frac{E}{x_2} \cos \theta_0 \right) \right] \\ & - \frac{\tilde{\gamma}_2}{2} \left[\frac{E}{x_2} \cos(\theta - \theta_0) - i + e^{-\frac{\rho}{2L}t} \cos \frac{\tilde{\gamma}_2}{2L} t \left(\frac{E}{\tilde{\gamma}'} \sin(\theta_0 + \alpha') + \frac{E}{x_2} \cos \theta_0 \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Como quiera que x_2 es muy grande comparado con z' , podemos simplificar la expresión anterior y quedamos sólo con los términos más influyentes, resultando:

$$i = \frac{E}{\tilde{\gamma}'} \sin(\theta_0 + \alpha') e^{-\frac{\rho}{2L}t} \cos \frac{\tilde{\gamma}_2}{2L} t$$

Si partimos de este valor de i para calcular la diferencia de potencial en la armadura del condensador,

$$\int \frac{idt}{C} = \frac{E}{\tilde{\gamma}'} \sin(\theta_0 + \alpha') \left[-\frac{\rho}{2} \cos \frac{\tilde{\gamma}_2}{2L} t + \frac{\tilde{\gamma}_2}{2} \sin \frac{\tilde{\gamma}_2}{2L} t \right] e^{-\frac{\rho}{2L}t}$$

ó bien dentro del orden de aproximación seguido hasta aquí,

$$\frac{1}{2} \frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}'} E \sin(\theta_0 + \alpha') \sin \frac{\tilde{\gamma}_2}{2L} t e^{-\frac{\rho}{2L}t}$$

De donde se deduce que la amplitud de la perturbación cuando es máxima, lo cual ocurre al ser $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha'$ es igual al producto de la amplitud de la fuerza electromotriz aplicada E , por

$$\frac{\sqrt{x_1 x_2}}{\sqrt{x_1^2 + \rho^2}},$$

cantidad que puede ser lo suficientemente grande para que corra peligro el dieléctrico que separa las dos armaduras. La condición $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha'$ indica que en el instante en que se rompe el corto circuito que existe entre las armaduras, la corriente $i = \frac{E}{x'}$ sen $(\theta - \theta_0 - \alpha')$ alcanza el valor máximo $\frac{E}{x'}$. Esta circunstancia debe evitarse, y de las consideraciones anteriores se deduce que el corto circuito debe abrirse en el momento en que la intensidad pasa por el valor cero, ó más exactamente por un valor próximo á cero el cual se determinará hallando el mínimo de $\int \frac{idt}{C}$ sin prescindir de los términos cuya amplitud contiene como factor x_2^{-1} .

De un modo análogo se demostraría que puede acarrear perturbaciones graves el abrir un circuito cuyo potencial es elevado, funcionando á plena carga.

El valor de i que resulta de resolver la ecuación diferencial de la pág. 338 se compone de una parte periódica análoga en la forma á la de e , á saber:

$$i = \frac{E}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{2\pi}{T}L - \frac{T}{2\pi C}\right)^2}} \text{ sen } \left(\frac{2\pi(t - t_0)}{T} - \alpha \right)$$

y de otra parte que se amortigua con el tiempo. Mientras no se advierta lo contrario, se considerarán valores del tiempo para los que la segunda parte tiene valores despreciables. A la diferencia

$$\frac{2\pi}{T}L - \frac{T}{2\pi C}$$

se le suele designar con el nombre de reactancia, y en estas conferencias la representaremos por la letra x . Al cuadrado de la reactancia, más el de la resistencia, lo representaremos abreviadamente por z^2 llamando á z *impedancia*. A α se le denomina ángulo de fase, y su valor es:

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{x}{\rho}$$

Si los catetos de un triángulo rectángulo representan respectivamente ρ , y x , la hipotenusa representa z fig. (2) y el ángulo de la hipotenusa con el cateto ρ es el ángulo de fase α .

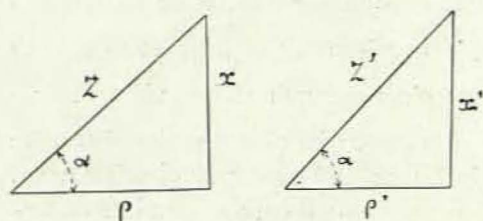


Fig. 2

Si suponemos $t_0 = 0$, el valor de i se puede poner en la forma:

$$i = \frac{E}{z} \cos \alpha \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{E}{z} \sin \alpha \cos \frac{2\pi t}{T}$$

y, como que $\cos \alpha = \frac{\rho}{z}$, $\sin \alpha = \frac{x}{z}$, se tendrá

$$i = E \frac{\rho}{z^2} \sin \frac{2\pi t}{T} - E \frac{x}{z^2} \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (8)$$

A la expresión $\frac{\rho}{z^2}$ se la denomina conductancia y en lo sucesivo será representada por ρ' ; y á la expresión $\frac{x}{z^2}$ se la denomina susceptancia, que representaremos abreviadamente por x' . Si se suman los cuadrados de la conductancia y la susceptancia se encuentra una expresión igual al cuadrado de la inversa de la impedancia, que se llama inductancia y será representada en lo sucesivo por z' . Así, se tiene

$$\rho'^2 + x'^2 = \frac{\rho^2 + x^2}{z^4} = \frac{z^2}{z^4} = \frac{1}{z^2} = z'^2$$

Si en la ecuación diferencial de la pág. 338 se substituye en vez de i su valor $I \sin \left(\frac{2\pi(t-t_0)}{T} - \alpha \right)$, se encuentra la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{T} E \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T} &= I \rho' \frac{2\pi}{T} \cos \left(\frac{2\pi(t-t_0)}{T} - \alpha \right) \\ -IL \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi(t-t_0)}{T} - \alpha \right) &+ \frac{I}{C} \sin \left(\frac{2\pi(t-t_0)}{T} - \alpha \right) \end{aligned}$$

Poniendo $\frac{2\pi(t-t_0)}{T} - \alpha = \frac{2\pi t'}{T}$ se tendrá

$$\frac{2\pi}{T} E \cos\left(\frac{2\pi t'}{T} + \alpha\right) = I\rho \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t'}{T} - I\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L - \frac{1}{C}\right] \sin \frac{2\pi t'}{T}$$

ó bien

$$E \cos\left(\frac{2\pi t'}{T} + \alpha\right) = I\rho \cos \frac{2\pi t'}{T} - Ix \sin \frac{2\pi t'}{T}$$

El primer miembro de esta fórmula es el valor de la fuerza electromotriz aplicada e , puesto que al pasar de t á t' sólo se ha corrido el origen del tiempo, con objeto de simplificar las fórmulas. Por lo tanto, prescindiendo de los índices, se puede escribir:

$$e = I\rho \cos \frac{2\pi t}{T} - Ix \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (9)$$

La fórmula 8, empleando las notaciones ρ' y x' se puede escribir análogamente:

$$i = E\rho' \sin \frac{2\pi t}{T} x - Ex' \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (10)$$

Las fórmulas (9) y (10) constituyen el fundamento de la representación gráfica de las corrientes alternas.

3. — Representación gráfica de las corrientes alternas

La función
$$i = I \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \alpha\right)$$

representa el valor de la proyección sobre un eje AB de un vector $OC = I$ que gira alrededor de O con velocidad angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Proyéctese, en efecto, el punto C sobre AB y se tendrá, con las notaciones de la figura (3).

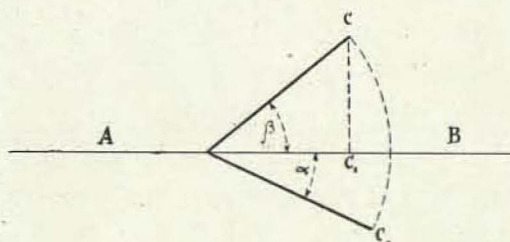


Fig. 3

$$OC_1 = OC \cos \beta$$

Supongamos que al empezar á contar el tiempo ocupa OC la posición OC_0 . El ángulo recorrido en el tiempo t , y que en la figura vale $\beta + \alpha$, es proporcional á t , siendo su valor $\frac{2\pi t}{T}$. En consecuencia

$$\beta + \alpha = \frac{2\pi t}{T}; \quad \beta = \frac{2\pi t}{T} - \alpha$$

Y, por lo tanto

$$OC_1 = I \cos \beta = I \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha \right)$$

De aquí se deduce

$$OC_1 = \mu$$

que es lo que queríamos demostrar.

Sea otra función

$$\mu' = I' \cos \frac{2\pi t}{T}$$

Representándola del mismo modo, el nuevo vector I' se halla sobre OB cuando $t = 0$, es decir, cuando se empieza á contar, porque para este valor del tiempo coincide en longitud con la de su proyección. Como el tiempo que dura la rotación alrededor de O , de los dos vectores I é I' considerados, es igual para los dos, el nuevo vector avanza siempre respecto del antiguo un ángulo α . Se dice, también, que el segundo retrasa, respecto del primero, el ángulo α , que se denomina *ángulo de fase* relativa.

En vez de usar de la representación anterior, en la que se supone móvil al vector y fijo al eje AB de referencia, puede usarse de otra análoga, en la que se suponen fijos los vectores y móvil el eje de referencia que se representa en las figuras subsiguientes por una recta dibujada de punto y trazo, provista de una flecha que indica el sentido de su rotación. En esta nueva representación, los vectores con los que coincide momentáneamente el eje de referencia, están adelantados respecto de los que coinciden después con el eje. Los valores instantáneos de las cantidades, cuyos valores máximos es-

tán representados por las amplitudes de los distintos vectores, se obtienen proyectándolos sobre el citado eje móvil.

Las funciones

$$y_1 = I_1 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$y_2 = I_2 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

estarán representadas por las proyecciones sobre la línea de referencia de dos vectores á ángulo recto. En efecto, la segunda función puede escribirse

$$y_2 = I_2 \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - 90^\circ \right)$$

y representa, por lo tanto, la proyección de un vector I_2 que ofrece respecto del vector I_1 un retraso de 90° .

En las dos funciones

$$y_3 = I_3 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$y_4 = -I_4 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

los vectores representativos ofrecen una diferencia de fase de 180° . En efecto, el valor de y_4 puede escribirse:

$$y_4 = I_4 \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - 180^\circ \right).$$

Por último, en las dos funciones

$$y_5 = I_5 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$y_6 = -I_6 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

el vector que representa la segunda adelanta 90° al vector que representa la primera. En efecto, puede escribirse

$$y_6 = I_6 \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + 90^\circ \right).$$

Con estos antecedentes vamos á describir una represen-

tación geométrica de que son susceptibles las cantidades que intervienen en las corrientes alternas.

Nos fijaremos primeramente en la fórmula 9. Expresa esta fórmula que el valor instantáneo e de la f , e , m (fuerza electro-motriz) total, es igual á la suma de los valores instantáneos de las funciones.

$$I \rho \cos \frac{2 \pi t}{T}$$

y

$$-I x \sin \frac{2 \pi t}{T}$$

Estas dos funciones pueden representarse por las proyecciones de dos vectores de longitudes $I \rho$ é $I x$, adelantado

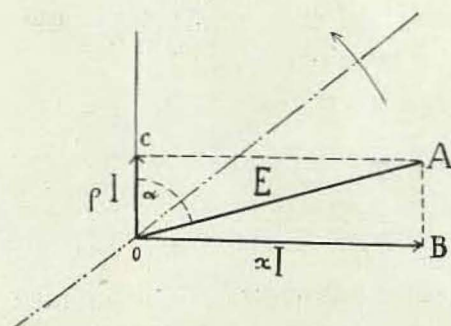


Fig. 4

el segundo respecto del primero de un ángulo de 90° , según lo que se acaba de decir (funciones y_5 é y_6). Pero la suma de las proyecciones de ρI y $x I$ es la proyección de la diagonal del rectángulo construido sobre aquéllas, y esta diagonal, que es el vector cuya proyección sobre la lí-

nea de referencia vale e , es igual al valor máximo de la fuerza electromotriz, es decir á E . El ángulo comprendido entre el vector ρI y el vector E es el ángulo de fase α . Se tiene, en efecto (fig. 4),

$$\frac{AC}{OC} = \frac{x}{\rho} = \operatorname{tg} \alpha$$

La fuerza electromotriz e adelanta á la intensidad i cuya dirección es la de ρI , si x , y por lo tanto α , es positiva; de otro modo, la e iría retrasada respecto á i .

De la definición de x se deduce que si es cero, también es cero α ; entonces dicese que hay resonancia entre la inducción y la capacidad. Cuando esto ocurre la intensidad se halla en fase con la f , e , m , total.

Considérese en segundo lugar la fórmula (10). Según ella, el valor instantáneo de i se obtiene proyectando sobre el eje de referencia y sumando luego los vectores $E \rho'$ y $E x'$, valores máximos de las funciones

$$E \rho' \sin \frac{2\pi t}{T} = E \rho' \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - 90^\circ \right)$$

y

$$- E x' \cos \frac{2\pi t}{T} = E x' \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - 180^\circ \right)$$

El primero de estos vectores adelanta 90° al segundo si (como en la fig. 5) se supone á x' positiva.

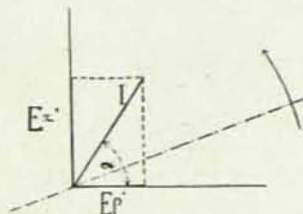


Fig. 5

IV. — Diagramas de Bedell

De las consideraciones anteriores se deducen los diagramas de Bedell.

PRIMER DIAGRAMA. — Hemos visto que la f , e , m , total puede representarse por la proyección de un vector E tal como OB en la fig. 6, siendo OB la diagonal de un rectángulo cuyos lados son $\rho I = OF$ y $x I = FB$; formando el primero OF un ángulo α (en retraso si x es positivo, en avance si es negativo) con el vector $E = OB$; y ofreciendo el segundo $x I$ un avance de 90° respecto del primero. Una vez construido el triángulo OFB para trazar el diagrama de Bedell se

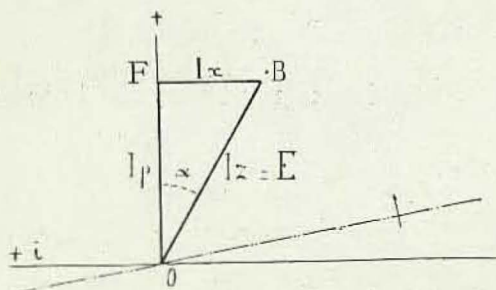


Fig. 6

procede como se indica á continuación.

Sobre OF se toma un segmento OD igual á I y por D se traza la perpendicular ADC á OD (figura 7). Sea el

valores de ρ adquirirá la intensidad distintos valores, figurados por las cuerdas de la circunferencia ODA que arrancan de O .

Si, en cambio, E y ρ son constantes, y x variable, el lugar geométrico de los puntos D para diferentes valores de x es la circunferencia de diámetro OC .

SEGUNDO DIAGRAMA.—Habiendo demostrado que la intensidad i puede representarse por la proyección de un vector I (fig. 8) siendo I la diagonal de un rectángulo cuyos lados son $E\rho'$ y Ex' , de los cuales el primero $E\rho'$ forma un ángulo α (en avance si x' es positiva y en retraso si es negativa) con el vector I , y ofreciendo el segundo Ex' un retraso de 90° respecto del primero, el triángulo OFB de la fig. 9 será tal que sus catetos podrán representar los vec-

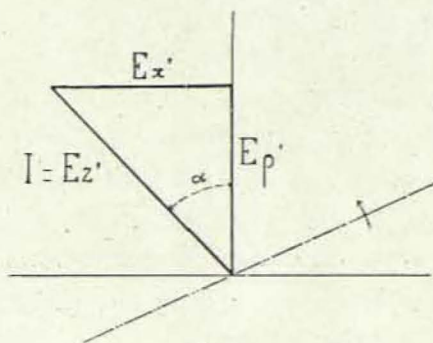


Fig. 8

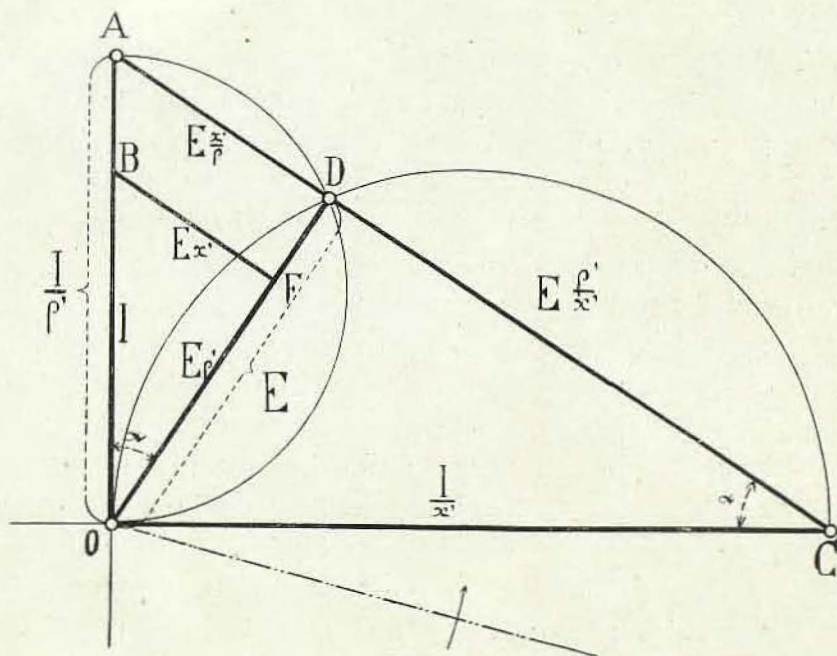


Fig. 9

tores $E\rho'$ y Ex' y su hipotenusa al vector I . Si sobre OF se toma $OD = E$ y por D se traza la perpendicular ADC á OD y luego las semicircunferencias ODC y ODA se habrá construido el segundo diagrama de Bedell (fig. 9). Los valores de los distintos segmentos son los que se indican en la figura y ello puede demostrarse fácilmente siguiendo un procedimiento análogo al seguido al tratar del primer diagrama. Podemos, en consecuencia, enunciar las dos siguientes propiedades: 1.^a Si en un circuito es constante I así como ρ' , el lugar geométrico de los puntos D es la circunferencia que tiene á OA por diámetro, y 2.^a Si en un circuito I y x' son constantes, el lugar geométrico de puntos D tales que OD represente en magnitud y dirección al vector E , es la circunferencia cuyo diámetro es OC .

V.—Representación por las imaginarias de las cantidades que se estudian en la teoría de las corrientes alternas.

Todo vector que une un punto P del plano á otro fijo O que se considera como origen, queda definido por las coordenadas x e y de P referidas, por ejemplo, á un sistema

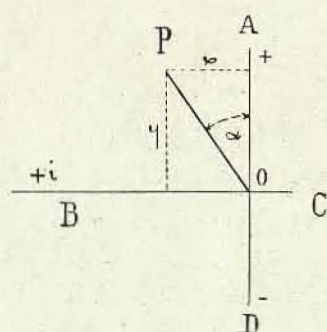


Fig. 10

cartesiano rectangular, pudiéndose representar simbólicamente por

$$x + i y$$

siendo

$$i = \sqrt{-1}.$$

En lo sucesivo nos valdremos para la representación simbólica de la disposición de la fig. 10. En ella las cantidades reales y positivas se toman según OA , las reales y negativas según OD , las imaginarias positivas según OB y las negativas según OC .

Toda expresión

$$x + i y$$

se puede escribir

$$u (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

ó bien

$$u e^{i \alpha}$$

siendo

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

Se recordará que á la cantidad u se la llama módulo y á α argumento.

Además, la suma de dos expresiones da la forma

$$x_1 + i y_1$$

$$x_2 + i y_2$$

es

$$x_1 + x_2 + i (y_1 + y_2) ;$$

y el nuevo vector, suma de los dos anteriores, tiene por proyecciones sobre los ejes, $x_1 + x_2$ é $y_1 + y_2$, es decir las de la diagonal del paralelógramo construído, tomando á los sumandos por lados adyacentes.

De la regla de sumar se deduce la de la resta. Así, pues, para restar de un vector oC ⁽¹⁾, otro oB , basta trazar por el extremo C del primero un vector BA , igual y contrario al segundo. La resta viene representada por la recta oA que une el origen o del primer vector con el punto A .

De las precedentes reglas de suma y resta se deducen las de la suma algébrica de un número cualquiera de vectores.

Para multiplicar dos expresiones

$$x_1 + i y_1$$

$$x_2 + i y_2$$

(1) La figura se deja al cuidado del lector.

es conveniente ponerlas en la forma

$$u_1 e^{i \alpha_1}$$

$$u_2 e^{i \alpha_2}$$

y se ve entonces inmediatamente que el producto es

$$u_1 u_2 e^{i (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

es decir, una expresión compleja cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los factores y cuyo argumento es la suma.

De esta regla se deduce la de la división. Así, pues, para dividir una expresión compleja por otra, basta dividir los módulos y restar los argumentos. El cociente es una expresión cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia entre el del dividendo y el del divisor.

Estas consideraciones y reglas tienen aplicación inmediata al estudio de las corrientes alternas. Sean dos ejes coordenados rectangulares (fig. 9). Representemos por el vector $I = OB$ la intensidad máxima de un circuito. El vector $OB = I$ se escribirá simbólicamente:

$$I$$

Si en el mismo diagrama se quiere representar la fuerza electromotriz, se observará que si x es positiva, la f, e, m , presenta un avance α respecto de la intensidad, y por lo tanto, la línea de referencia de tiempos marcada de punto y raya en la figura, ha de encontrar en su rotación alrededor de O á la dirección de E antes que á la de I . El valor de E se obtiene, por otra parte, como resultado de sumar dos vectores

$$I \rho$$

é

$$I x$$

perpendiculares entre sí (V. fig. 6). O de otro modo, multiplicando el vector I por el número complejo:

$$\rho - i x.$$

En efecto; el módulo de esta última cantidad es la impedancia

$$\sqrt{\rho^2 + x^2}$$

y el argumento es

$$- \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\rho} = -\alpha ;$$

De modo que para hacer la multiplicación, hay que multiplicar I por la impedancia y al nuevo vector girarlo de un ángulo $-\alpha$ es decir, de un ángulo α en sentido contrario al de rotación de la línea de referencia.

En la representación simbólica que venimos explicando la impedancia vendrá representada simbólicamente por

$$\rho - i x$$

á cuya expresión llamaremos en lo sucesivo z . La reactancia se halla expresada simbólicamente por

$$i x ,$$

y la fuerza electromotriz por

$$e = I z = I (\rho - i x)$$

Si el vector I , en vez de estar dirigido según el eje real formara con el mismo un ángulo β , se tendrfa

$$e = I (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) (\rho - i x) .$$

Viceversa, dado que sea E , dispuesto según el eje de cantidades reales, para hallar i , bastará dividir E por la impedancia:

$$i = \frac{E}{z} = \frac{E}{\rho - i x}$$

ó bien, si E forma un ángulo α con el eje de cantidades reales:

$$i = \frac{e}{z} = \frac{E (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{\rho - i x}$$

Para representar simbólicamente la admitancia se recordará que la intensidad puede obtenerse como resultado de la suma de dos vectores á ángulo recto, en fase el uno con la f , e , m , y cuyo módulo es $E\rho'$ y siendo el módulo del otro $E x'$. La fig. 8 representa esta composición para el caso de ser x' positiva.

Se tendrá, en consecuencia, por lo que se deduce del examen de la figura,

$$i = E (\rho' + i x')$$

Luego la admitancia se representa simbólicamente por

$$\rho' + i x'$$

Análogamente á lo hecho para la impedancia designaremos á esta expresión por z' .

Para que el método simbólico no pueda inducir á confusiones, será necesario acaso hacer una pequeña aclaración.

En el método simbólico se representa á una cantidad periódica sinusoidal

$$A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \theta \right) = A \cos \theta \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} + A \operatorname{sen} \theta \cos \frac{2\pi t}{T}$$

por

$$A \cos \theta + i A \operatorname{sen} \theta = A e^{i\theta}$$

y puede considerarse como un modo abreviado para no escribir á cada paso $\cos \frac{2\pi t}{T}$ y $\operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$, poniendo en vez del primero la unidad y en vez del segundo i .

La razón de ser del método simbólico está fundada en las siguientes consideraciones: Si se multiplica á una cantidad

$$A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \theta \right)$$

por un número S , y se resta de la fase de la cantidad resultante un ángulo α constante, se obtiene la nueva cantidad.

$$AS \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \theta - \alpha \right)$$

que se puede representar simbólicamente por

$$AS e^{i(\theta - \alpha)}$$

De modo que el resultado de las dos operaciones anteriores, se traduce en la expresión simbólica, como el resultado de multiplicar $A e^{i\theta}$ por $S e^{-i\alpha}$ ó sea por

$$S \cos \alpha - i S \sin \alpha.$$

De lo que acaba de decirse no se puede deducir que si se multiplican dos cantidades como

$$A_1 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \theta_1 \right)$$

$$A_2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \theta_2 \right)$$

el resultado puede expresarse simbólicamente por el producto de $A_1 e^{i\theta_1}$ por $A_2 e^{i\theta_2}$, ó sea por

$$A_1 A_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

En efecto,

$$A_1 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \theta_1 \right) A_2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \theta_2 \right) = A_1 A_2 \left[\cos \alpha - \cos \frac{2\pi t}{2} \right]$$

cuyo producto no es de la forma de los factores, ya que figura en él un término

$$A_1 A_2 \cos \frac{2\pi t}{2}$$

que representa una cantidad cuyo período $\frac{T}{2}$ es la mitad del período de las cantidades variables que se representan simbólicamente, y es, por tanto, de naturaleza diferente.

6. — Diagrama polar

Este diagrama, de mucho uso en la Técnica, consiste en lo siguiente: Sean dos círculos iguales y tangentes exteriormente. Con las notaciones de la figura 11,

$$OB = OP \operatorname{sen} \alpha$$

Si imaginamos que OB gira alrededor de O , con velocidad angular constante ω , se tendrá:

$$\alpha = \omega t$$

y por lo tanto,

$$OB = OP \operatorname{sen} \omega t$$

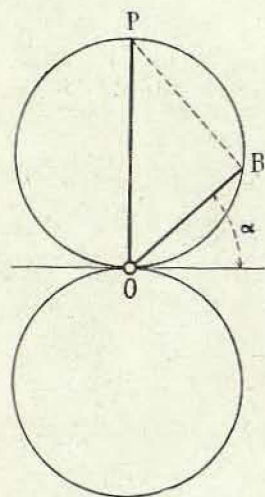


Fig. 11

En consecuencia, puede representarse una magnitud sinusoidal por el valor de la cuerda que, pasando constantemente por O está comprendida en uno de los dos círculos tangentes de diámetro OP . En esta representación debe tomarse la cuerda comprendida en el círculo superior para valores de α , comprendidos entre

$$2K\pi \text{ y } (2K+1)\pi$$

y la cuerda negativa comprendida en el círculo inferior para valores de α , comprendidos entre

$$(2K+1)\pi \text{ y } (2K+2)\pi$$

7. — Diferencias que presentan algunas de las cantidades estudiadas en lo que hace referencia á la fase

Se recordará que el flujo magnético que atraviesa una espira tiene por valor

$$\Phi = \Phi_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

y la fuerza electromotriz engendrada vale

$$e = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = E \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

De las expresiones de Φ y e se deduce que el vector que representa e atrasa 90° respecto del que represente Φ . Abreviadamente se suele decir que e presenta respecto de Φ un retraso de 90° .

La fuerza electromotriz de autoinducción

$$-L \frac{di}{dt}$$

se halla respecto de i en las mismas condiciones que e respecto de Φ . Luego la fuerza electromotriz de autoinducción atrasa 90° respecto de i .

En cambio, la relación entre la diferencia de potencial en los bornes del condensador, ó sea

$$- \int \frac{idt}{C}$$

se halla respecto de i en las mismas condiciones que Φ respecto de e , luego la citada diferencia de potencial adelanta á i de un ángulo de 90° .

Conferencia tercera

Estudio del circuito constituido por dos impedancias en serie y del correlativo

1. — Sobre algunas transformaciones geométricas

Nos proponemos en esta conferencia y en la siguiente, aplicar los diagramas de Bedell y las representaciones simbólicas á algunos ejemplos. Para facilitar la aplicación, recordaremos antes algunas transformaciones de figuras.

Considérese una curva en el plano cuya ecuación en coordenados polares sea (fig. 1),

$$u = f(\alpha)$$

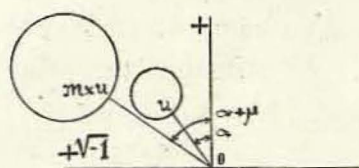


Fig. 1

Una de las transformaciones más usadas en el estudio de las corrientes alternas, es aquella que consiste en multiplicar los radios vectores de la curva anterior por

$$m e^{i\mu}$$

siendo m y μ constantes. La curva transformada c' se obtiene girando la curva primitiva c de un ángulo μ alrededor de O origen de coordenadas, y multiplicando luego los radios vectores de la curva así obtenida por m .

En la transformación llamada por radios vectores recíprocos, el radio vector u de la curva dada y el u' de la transformada satisfacen á la igualdad:

$$u u' = k$$

siendo k constante. En esta transformación se conservan los ángulos; es decir, el ángulo de dos ramas de una curva, de dos curvas, de una recta y una curva ó de dos rectas es igual al de sus transformadas.

La curva, cuya transformada es más interesante conocer, es la circunferencia. En general, es otra circunferencia á menos que la primera pase por el origen de transformación que es el punto O , en cuyo caso la transformada es una recta perpendicular al diámetro que pasa por O .

Recíprocamente, la transformada de una recta es una circunferencia que pasa por el origen, á menos que el origen sea un punto de la recta, en cuyo caso la transformada de la recta es ella misma.

Para determinar la circunferencia transformada de otra C_1 por radios vectores recíprocos ó por inversión como se suele llamar también, trácese el diámetro cuya prolongación pasa por el origen y hállese en él ó en su prolongación los puntos A' y B' conjugados de sus extremos A y B . El punto

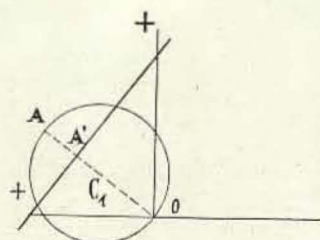


Fig. 2

medio de $A' B'$ es el centro de la circunferencia transformada, cuyo diámetro es $A' B'$. Cuando C_1 pasa por el origen (fig. 2), basta trazar el diámetro OA que pasa por O y hallar el punto inverso ó conjugado del A . Sea por ejemplo A' . La recta que, pasando por A' es perpendicular á

OA es la transformada que se busca.

Es de ver (fig. 3), que á un sentido determinado en el recorrido de una circunferencia dada, corresponde el opuesto al recorrer su inversa.

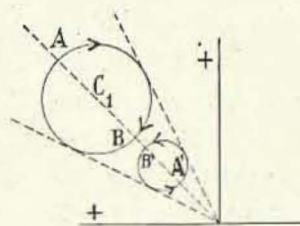


Fig. 3

En las consideraciones que preceden respecto de la inversión, hemos supuesto que el sistema de ejes de referencia era tal, que las coordenadas medidas en uno ú otro eje eran reales. Pero, si

uno de los ejes lo es de cantidades imaginarias puras, un radio vector cualquiera tiene por expresión

$$u e^{i\varphi}$$

y el de la curva inversa vendrá dado por

$$u e^{i\varphi} \times u' e^{i\varphi'} = k.$$

En lo sucesivo supondremos á k real. En esta hipótesis se tendrá, separando partes reales ó imaginarias de la última expresión literal,

$$\begin{aligned} u u' &= k, \\ \varphi + \varphi' &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, de las dos porciones en que el eje de cantidades reales divide al plano, una, contiene la curva dada, y la otra su transformada (fig. 4). A un movimiento que transporte OA sobre OB , corresponde en la figura inversa un movimiento en sentido opuesto, de OA' á OB' . Además, y al revés de lo que antes ocurría, un punto y su conjugado recorren las curvas respectivas en el mismo sentido.

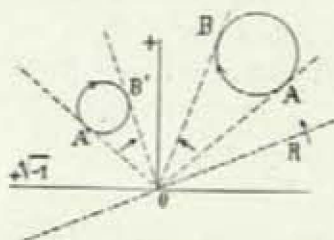


Fig. 4

Si por un giro alrededor del eje de cantidades reales, viniere á coincidir la porción del plano situada á la izquierda del eje real con la situada á la derecha se obtendría la fig. 5. Este giro permite economizar espacio y líneas en los diagramas. Pero de usarse, hay que tener presente lo que sigue: Si la línea de referencia es OR , el vector OB' de la fig. 4, por ejemplo, adelanta al vector OA' . En cambio, después del giro (fig. 5), OA' adelanta á OB' . Para no alterar el sentido de los adelantos ó retrasos en la fase, se convendrá en que después del giro, la línea de

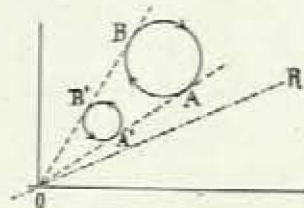


Fig. 5

referencia se mueve en sentido opuesto, es decir, en el sentido de las agujas de un reloj si antes se movía al revés.

A la constante k se la denomina potencia de inversión.

2. — Resolución gráfica de un problema ⁽¹⁾

Se dispone una distribución de fuerza en la que las máquinas receptoras son motores asincrónicos caracterizados por ser constante la susceptancia x'_2 de los mismos. Si en los extremos de la línea cuya resistencia óhmica es ρ_1 y cuya reactancia es x_1 actúa una diferencia de potencial sinusoidal cuya amplitud ó valor máximo E , es constante, se pregunta: ¿Cuál será el valor de la intensidad para diversos valores de la conductancia φ'_2 de las máquinas receptoras?

Sean (fig. 6) dos ejes rectangulares á los que se referirán las diversas cantidades, uno de ellos será el de cantidades reales y otro el de imaginarias puras. La impedancia de la línea vale simbólicamente

$$z_1 = \rho_1 - i x_1$$

viniendo representada en la fig. 6 por el vector OO_1 de valor absoluto S_1 .

La impedancia de todo el circuito será igual á la de la línea, más la de las máquinas receptoras que deduciremos del diagrama 2.º de Bedell en la forma que á continuación se indica. En el citado diagrama (fig. 7 de la C. anterior), todos los segmentos son proporcionales á I . El segmento OD vale, aplicando el diagrama á la máquina receptora, $E = Iz_2$. Por lo tanto, si I fuera igual á la unidad, OD sería el verdadero valor de z_2 . Y, como por otra parte, en la máquina receptora, x'_2 es constante, el lugar geométrico de los puntos D es el semicírculo ODC , cuyo diámetro, suponiendo $I = 1$ es $\frac{1}{x'_2}$.

(1) V. Arnold. Wechselstromtechnik, tomo 1, Leipzig, 1902.

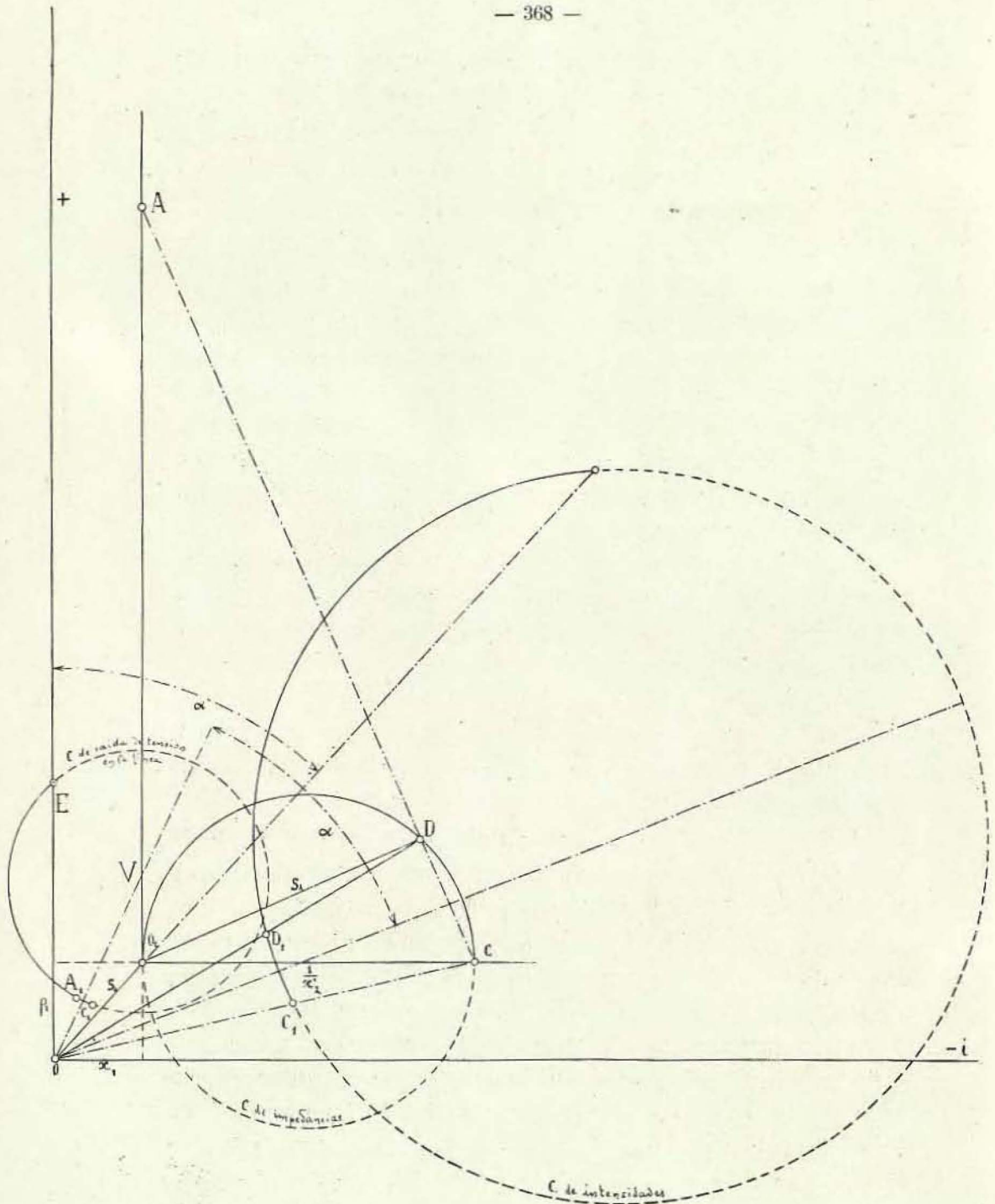


Fig. 6

En consecuencia, si por O_1 (fig. 6) se traza una recta $O_1 C$ paralela al eje imaginario, y se limita la porción $O_1 C = \frac{1}{x'_2}$, la circunferencia, cuyo diámetro es $O_1 C$, será el lugar geométrico de los extremos D de los radios vectores OD que representan la impedancia total $z_1 + z_2$.

Dado un valor de ρ_2 se hallará el correspondiente de z_2 tomando sobre $O_1 A$ perpendicular á $O_1 C$, un segmento $O_1 A = \frac{1}{\rho'_2}$; uniendo el extremo A de este segmento con el punto C y determinando el punto D de encuentro de AC con $O_1 DC$. El vector $O_1 D$ representa z_2 .

De este modo, y para cada valor de ρ'_2 se conoce la impedancia total del circuito. Para conocer la intensidad que lo atraviesa en cada caso, se podrá razonar como sigue. La curva inversa de la circunferencia $O_1 DC$, lugar geométrico de las impedancias, es otra circunferencia, que será el lugar geométrico de las admitancias, si la potencia de inversión es la unidad. Ahora bien, el producto de E por la admitancia es la intensidad. Luego obtenida la curva de admitancia bastará multiplicar por E sus radios vectores para obtener la curva lugar geométrico de intensidades.

Para obtener la curva de admitancias, bastará como se ha dicho, invertir la de impedancias con la potencia $+ 1$. Al invertir, la curva transformada aparecerá á la izquierda del eje real. Para tenerla á la derecha se puede utilizar el giro de que se ha hablado antes, con la circunstancia de cambiar el sentido de rotación de la línea de referencia, que será después del giro el de las agujas de un reloj. Obtenida así la curva de admitancias, basta multiplicar los radios vectores por E , como queda dicho, para obtener la curva de intensidades. Mas no es preciso, para obtener esta última, dibujar antes la de admitancias. Modificando la potencia de inversión, se puede obtener directamente de la curva de impedancias, la de intensidades. Bastará, en efecto, tomar para valor de la dicha potencia

$$1 \times E$$

Así resulta en la figura la curva de intensidades.

Para obtener la intensidad correspondiente al valor $O_1 D$ por ejemplo, de ε_2 , basta unir D con O , y el punto D_1 más próximo á O de los dos en que la recta OD encuentra al nuevo círculo, es tal que

$$OD_1 = I$$

y la proyección de OD_1 sobre la línea de referencia es igual al valor instantáneo i de la intensidad.

Una vez conocido el valor de la intensidad se puede calcular la pérdida de tensión en la línea. Importa, sin embargo, conocer antes la posición del vector que representa á la diferencia de potencial e en la estación generadora. Para esto, supóngase que es nula la impedancia de la máquina receptora, en cuyo caso la impedancia de todo el circuito es sólo la de la línea, es decir, ε_1 . Y, como en este caso el vector que representa la intensidad tiene la dirección de OO_1 , y como por otra parte, e , si x_1 es positivo ha de adelantar á la intensidad, el producto $\varepsilon_1 I$ se obtendrá haciendo girar al vector i de un ángulo.

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{x_1}{\rho_1}$$

en sentido opuesto al del giro de la línea de referencia ⁽¹⁾, y multiplicando luego el módulo I por el módulo de la impedancia, ó sea por

$$I \sqrt{\rho_1^2 + x_1^2}$$

Evidentemente el nuevo vector se halla confundido con el eje real.

En estado de carga, cuando la impedancia de las máquinas receptoras tiene un valor distinto de cero, la pérdida de tensión en línea será

$$I \varepsilon_1$$

(1) Se recordará que el sentido actual de giro de la línea de referencia es el de las agujas de un reloj.

y debe descontarse de e para obtener la diferencia de potencial en los bornes de las máquinas receptoras. El lugar geométrico de los vectores $i z_1$ se obtendrá multiplicando el lugar geométrico del vector i por la cantidad imaginaria z_1 , de lo que resulta que los vectores $i z_1$ adelantan á los vectores i de un ángulo

$$\alpha = \arctg \frac{x_1}{p_1}$$

El nuevo lugar geométrico es una circunferencia que pasa evidentemente por el extremo de e . El punto A_1 es el que corresponde al D_1 de la circunferencia de intensidades. Para hallar la diferencia de potencial en los bornes de la estación ó máquina receptora, hay que restar de e los radios vectores

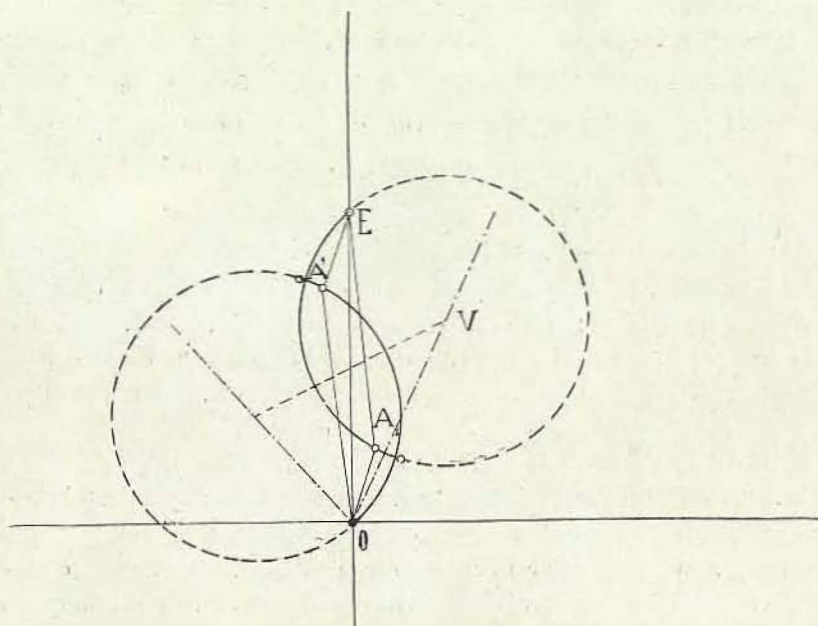


Fig. 7

de la nueva circunferencia como ya hemos dicho. Por ejemplo, $OE - OA_1 = A_1E = OA'$ (fig. 7). El lugar geométrico de los puntos A' , representado aparte en la fig. 7, es evidentemente otra circunferencia igual á la anterior, y cuyo centro

es el punto simétrico del centro V de la misma, respecto del punto medio de OE , circunstancia que resulta de ser $OAEA'$ un paralelógramo.

Un ejemplo práctico cuya ejecución dejamos al cuidado del lector, aclarará las construcciones que se acaban de explicar.

Sean

$$E = 2500 \text{ Volts}; \rho_1 = 0,2 \text{ ohms}; x_1 = 0,4 \text{ ohms}; x'_2 = 0,06 \text{ ohms}$$

«Tómense ⁽¹⁾ dos ejes coordenados rectangulares OA y OB . El OA dirigido, á partir de O hacia la parte superior del papel, y el OB á la izquierda de OA . El eje OA será el de cantidades reales y positivas, el OB el de imaginarias positivas. Sea OC la prolongación de OB hacia la derecha de OA . Sobre OC se tomará, á partir de O , una longitud OR igual á 4 mm. como representando los 0,4 ohms de reactancia x_1 . En la escala adoptada 1 ohm = 1 cm. En R se elevará una perpendicular á OC tomando sobre ella una longitud RR_1 igual á 2 mm. que representa á ρ_1 . Por R_1 se trazará una paralela á OC y se limitará en ella una porción $R_1R_2 = \frac{1}{x'_2} = \frac{1}{0,06} = 16,67 \text{ cm.}$, la cual será el diámetro de una circunferencia C_1 lugar geométrico de las impedancias.»

De éste, como es sabido, tomando la potencia de inversión igual á la unidad, se puede pasar á la circunferencia C_2 de admitancias. Ahora bien; si 1 cm. equivale á un ohm, 1 cm. será también el equivalente del mho, si 1 cm.² es la potencia de inversión. El ampère es igual producto del mho por el volt. La curva C_3 de ampères se obtendrá multiplicando la curva C_2 por 2,500. Y el número de ampères sería el de centímetros de los radios vectores de la curva C_3 , es decir, á cada cm. correspondería un ampère. En esta escala, las longitudes serían excesivamente grandes, por ejemplo, para 200 ampères se necesitarían 2 m. Así, pues, será conveniente reducir estas magnitudes á la décima parte, de modo que 10 ampères están representados por 1 cm.

De la curva C_1 se puede pasar á la de admitancias en la nueva escala con sólo tomar como potencia de inversión 0,1 cm.². Así diremos, 1 ohm se representa por 1 cm., 1 mho por 1 mm., 1 ampère también por 1 mm. Y directamente se puede pasar de la

(1) La parte constructiva va entre comillas.

curva C_1 de impedancias á la C_2 de intensidades, tomando como potencia de inversión $0,1 \times 2,500 \text{ cm.}^2 = 250 \text{ cm.}^2$. El número de milímetros de los radios vectores serán los ampères correspondientes.

« En consecuencia, trazada la circunferencia C_1 se invertirá tomando á O como centro de inversión, y 250 cm.^2 como potencia. La circunferencia resultante es tal, que los radios vectores á partir de O , medidos en mm. dan el valor de la intensidad en ampères. »

De la curva C_3 se pasa á la C_4 de pérdida de tensión en línea. Los radios vectores de C_4 representan volts y se obtienen multiplicando los de C_3 por el número de ohms á que equivale la impedancia de la línea. Luego un milímetro sobre el radio vector de C_4 representa un volt. « La circunferencia C_4 se obtiene girando al radio vector que une O con el centro O_1 de C_3 hacia la izquierda y de un ángulo φ dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,4}{0,2} = 2$$

ó sea

$$\alpha = 64^\circ$$

y situando en él el centro de la circunferencia á una distancia

$$00_1 \times \sqrt{0,2^2 \times 0,4^2} = 00_1 \times 0,424$$

siendo el radio del círculo igual al del círculo C_3 multiplicado por 0,424».

3. — Resolución simbólica del mismo problema

Al vector e lo imaginaremos dirigido según el eje de cantidades reales, así es que simbólicamente se representará por E . Al vector i se le designará por $u_1 + i u_2$ siendo u_1 y u_2 las componentes de su amplitud I sobre los ejes. Con estas notaciones, se tendrá evidentemente

$$E = \left[\rho_1 - i x_1 + \frac{1}{\rho_2' + i x_2'} \right] (u_1 + i u_2) \quad (1)$$

expresión que para cada valor de ρ_2' da los de u_1 y u_2 , de los cuales se deducen los de la amplitud

$$I = u_1^2 + u_2^2$$

y de la fase β de la intensidad, pues

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u_2}{u_1}$$

En efecto, la ecuación (1) puede descomponerse en sus partes real é imaginaria del modo que á continuación se indica llamando s'_2 al valor absoluto de la admitancia :

$$E = \left[\rho_1 - i x_1 + \frac{\rho'_2 - i x'_2}{\rho'^2_2 + x'^2_2} \right] (u_1 + i u_2) = \left(\rho_1 + \frac{x'_2}{s'_2} \right) u_1 + \left(x_1 + \frac{\rho'_2}{s'_2} \right) u_2 + i \left[\left(\rho_1 + \frac{x'_2}{s'_2} \right) u_2 - \left(x_1 + \frac{\rho'_2}{s'_2} \right) u_1 \right] ;$$

pudiéndose escribir, por lo tanto, como resultado de la igualdad de partes reales é imaginarias

$$E = \left(\rho_1 + \frac{x'_2}{s'_2} \right) u_1 + \left(x_1 + \frac{\rho'_2}{s'_2} \right) u_2$$

$$0 = \left(\rho_1 + \frac{x'_2}{s'_2} \right) u_2 - \left(x_1 + \frac{\rho'_2}{s'_2} \right) u_1$$

Llamando A al primer paréntesis y B al segundo, las dos ecuaciones anteriores pueden escribirse

$$E = A u_1 + B u_2$$

$$0 = B u_1 - A u_2$$

de las cuales se deduce

$$u_1 = \frac{A E}{A^2 + B^2}$$

$$u_2 = \frac{B E}{A^2 + B^2}$$

En consecuencia,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u_2}{u_1} = \frac{B}{A} = \frac{x_1 + \frac{\rho'_2}{s'_2}}{\rho_1 + \frac{x'_2}{s'_2}}$$

$$é \quad I^2 = u_2^2 + u_1^2 = \frac{E^2}{A^2 + B^2} = \frac{E^2}{\left[x_1 + \frac{\rho'_2}{s'_2} \right]^2 + \left[\rho_1 + \frac{x'_2}{s'_2} \right]^2}$$

prolónguese $AD = E_1$ hasta que por segunda vez encuentre á la circunferencia en C . Se tendrá

$$AD = AC - DC = \sqrt{AB^2 - BC^2} - DC = AB \left(1 - \left(\frac{BC}{AB} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - DC$$

En la práctica BC es pequeño comparado con AB . Desarrollando la potencia $\frac{1}{2}$ del binomio $1 - \frac{BC}{AB}$ en serie, según las potencias de $\frac{BC}{AB}$ y quedándonos sólo con los términos de segundo grado, queda

$$\frac{AD}{AB} = \frac{E_1}{E} = 1 - \frac{DC}{AB} - \frac{1}{2} \left(\frac{BC}{AB} \right)^2$$

de donde

$$\frac{p}{100} = \frac{E - E_1}{E} = \frac{DC}{AB} + \frac{1}{2} \left(\frac{BC}{AB} \right)^2$$

ó bien

$$p = \frac{DC}{\frac{AB}{100}} + \frac{1}{200} \left(\frac{BC}{\frac{AB}{100}} \right)^2$$

de donde se deduce que para conocer p bastará evaluar en la figura DC y BC unidades iguales á la centésima parte de AB , y llamando ξ y η á los resultados de la medida, calcular

$$\xi + \frac{\eta}{200} ;$$

el resultado es p .

Si los vectores se dispusieran conforme se indica en la fig. 9, la fórmula del tanto por ciento de pérdida relativa sería

$$p = -\xi + \frac{\eta}{200}$$

puesto que, en este caso $E_1 = AC + CD$. Por lo tanto, siempre que

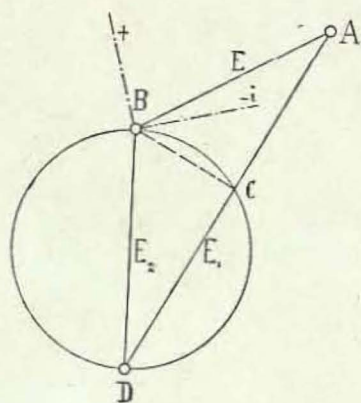


Fig. 9

el segundo punto C de intersección de E_1 con la circunferencia de diámetro E_2 esté fuera del segmento $AD = E_1$ debe tomarse el signo $+$ delante de ξ y el signo $-$ en caso contrario.

Prácticamente, para hallar p se procederá del siguiente modo. Se trazará una circunferencia cuyo diámetro sea

$$DB = \frac{E_2}{\frac{E_1}{100}}$$

y á partir del extremo D de este diámetro se trazará una recta que forme con él el ángulo que E_2 forma con E_1 . Podrán suceder dos cosas: que la recta salga fuera de la circunferencia ó lo contrario. En el primer caso se prolongará en sentido opuesto, limitándose en uno y otro caso en el segundo punto de intersección C con la citada circunferencia. La longitud de la cuerda interceptada representa $+\xi$ en el primer caso y $-\xi$ en el segundo. El segmento rectilíneo CB representa η en uno y otro caso.

El valor de la ganancia relativa g se puede obtener de un modo parecido. Basta, al efecto, repetir las construcciones anteriores partiendo de

$$DB = \frac{E_2}{\frac{E_1}{100}},$$

así es, que llamando ξ' y η' á los nuevos valores de DC y CB , se tiene

$$g = \xi' + \frac{\eta'}{200}$$

5. — Estudio del circuito constituido por dos impedancias en paralelo

Un circuito constituido por dos impedancias ABD y ACD en paralelo, como indica la figura 10, es, en cierto modo, correlativo del que se acaba de estudiar. En efecto:

la diferencia de potencial e anterior era la suma de e_1 y e_2 , aquí la intensidad total de línea i es la suma de las intensidades i_1 e i_2 en las ramas; allí

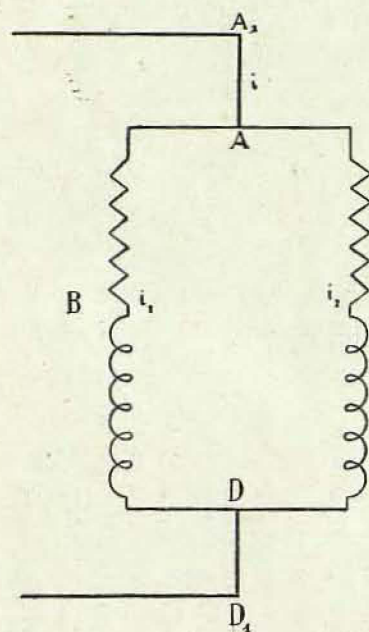


Fig. 10

era una sola la corriente que atravesaba el circuito, aquí es una la diferencia de potencial entre los extremos comunes de las dos impedancias; allí, y, como consecuencia de lo anterior, la impedancia total del circuito era la suma de las impedancias de la línea y de la máquina receptora, aquí ocurre lo mismo con las admitancias de las dos ramas, puesto que si son éstas κ'_1 y κ'_2 , se tendrá llamando e á la diferencia de potencial entre A y D .

$$i_1 = \kappa'_1 e$$

$$i_2 = \kappa'_2 e$$

de donde

$$i_1 + i_2 = i = (\kappa'_1 + \kappa'_2) e = \kappa' e$$

Interesa en muchos casos conocer el valor de la impedancia z equivalente al sistema de dos impedancias z_1 y z_2 en paralelo.

Evidentemente

$$\frac{1}{z} = \kappa' = \kappa'_1 + \kappa'_2 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

Gráficamente puede construirse z dadas z_1 y z_2 . A este efecto, supongamos que vectorialmente $z_1 = OA$ y $z_2 = OB$ (fig. 11). Las admitancias respectivas serán

$$\kappa'_1 = \frac{1}{OA} = OA_1$$

$$\kappa'_2 = \frac{1}{OB} = OB_1$$

ángulo α que forman OC_2 y s_2 , limitando sobre OC_1 un segmento OC cuyo extremo C es la intersección con OC_1 de una recta trazada por el extremo de s_1 y formando con ella el mismo ángulo β que s_1 forma con la diagonal OC_2 .

El circuito constituido por dos impedancias en paralelo, se presta á un estudio análogo al de dos en serie, con las diferencias que introduce la correlatividad que antes se ha puesto de manifiesto. Así, por ejemplo, el problema resuelto gráfica y simbólicamente, tiene al que se enuncia á continuación por correlativo. Una corriente de intensidad constante se destina á alimentar dos impedancias en paralelo. En una de ellas es constante la reactancia y variable la resistencia, en la otra, son constantes ambas, viniendo dadas por los valores conocidos de la conductancia y de la susceptancia. Se pide el valor de la intensidad que atravesará cada una de las ramas, así como la diferencia de potencial en sus extremos comunes para diferentes valores de la resistencia variable. Para resolver este problema podrá procederse de un modo correlativo á cómo se resolvió el anterior, debiendo emplearse en la resolución gráfica el primer diagrama de Bedell. Dejamos que el lector se ejercite en la resolución de este problema, así como de los que se enuncian al final de la Conferencia.

Las nociones de pérdida y ganancia de tensión en línea tienen sus equivalentes, á saber:

$$p' = \frac{i - i_2}{i} \times 100$$

y

$$g' = \frac{i - i_2}{i_2} \times 100$$

y son susceptibles de representaciones gráficas análogas á las de p y g .

Prácticamente el circuito de que nos estamos ocupando hace referencia al caso de una máquina receptora con la

excitación ó mecanismo regulador en paralelo sobre la impedancia principal de la misma y los valores de p' y g' hacen referencia á la pérdida ó ganancia porcentual relativa que absorbe la excitación ó regulación.

6. — Ejercicios

1.º Existe una diferencia de potencial constante en los extremos de una línea, la cual está caracterizada por su resistencia y reactancia constantes. Se pide la intensidad y pérdida porcentual de tensión cuando la máquina receptora, constituida por una impedancia en serie con la línea, trabaja en distintos estados de carga, sabiendo que con independencia de éstos, la corriente ofrece un retraso φ constante respecto de la fuerza electromotriz que actúa en los bornes de la máquina receptora. (El círculo C_1 del primer problema se convierte, en este caso, en una recta inclinada de su ángulo φ sobre el eje real). Resolver el problema correlativo para el caso de dos impedancias en paralelo.

2.º En los bornes de una máquina receptora hay una diferencia de potencial e_2 constante, siendo constante la resistencia eléctrica de la máquina y variable su reactancia. Se pide la fuerza electromotriz en los bornes de la línea de alimentación, sabiendo los valores de la resistencia y de la reactancia de la misma.

Para resolver este problema simbólicamente, hay que calcular la intensidad en función de la reactancia variable, y luego multiplicarlo por la impedancia de la línea para tener la diferencia de potencial perdida en la misma. La intensidad es evidentemente el cociente de e_2 por la impedancia de la máquina receptora.

3.º Resolver el mismo problema anterior, pero suponiendo que en vez de ser constante la resistencia y variable la reactancia, la máquina receptora tiene constante la susceptancia y variable la conductancia. (Aplicar el primer diagrama de Bedell).

4.º Construir gráficamente la impedancia equivalente á otras varias dispuestas en paralelo.

Conferencia cuarta

Estudio analítico y gráfico de un circuito constituido por una impedancia en serie con el sistema de dos en paralelo

1. — Estudio analítico

EN la mayor parte de las aplicaciones del circuito de la fig. 1, una de las impedancias, la (2), por ejemplo, es variable, según cierta ley, y se trata de ver cómo ha de variar la impedancia (3), para que, permaneciendo invariable la amplitud E de la diferencia de potencial e , cuales-

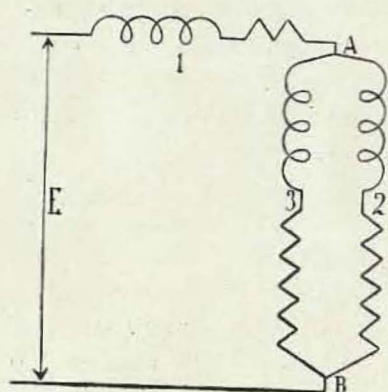


Fig. 1

quiera que sean las variaciones de (2) y de (3) se mantenga constante la amplitud E_2 de la diferencia de potencial e_2 entre A y B .

Ejemplo: Supongamos que la impedancia (2) sea tal, que su susceptancia sea constante, pudiendo variar la conductancia. La resolución simbólica del problema que consiste en hallar una relación entre ρ'_2 y ε_3 es la que se indica á continuación, en la que la impedancia, equivalente al sistema de (2) y (3), se ha representado por ε_{23} . Se tiene evidentemente:

$$e_2 = i_1 \varepsilon_{23} = i_1 \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}}$$

$$i_1 = \frac{e - e_2}{\varepsilon_1}$$

Mediante estas dos ecuaciones, se pueden determinar i_1 y z_3 . Como quiera que de e_2 sólo es variable la fase, intervienen en las fórmulas anteriores, cada una de las cuales se desdobra al separar las partes reales de las imaginarias las siguientes incógnitas:

La fase ε_2 de e_2 .

La amplitud y fase de i_1 .

La reactancia de z_3 , y

La resistencia de z_3 .

En totalidad, el número de variables es 5, siendo 4 el de ecuaciones. Hay, por consecuencia, indeterminación que desaparece introduciendo una nueva condición, que puede ser, por ejemplo,

$$\rho_3 = 0$$

disponiéndose entonces de cuatro ecuaciones para determinar cuatro incógnitas, y mediante las cuales pueden expresarse tres de ellas en función de ρ'_2 . He aquí el pormenor del cálculo. Eliminando i_1 se tiene:

$$e_2 = \frac{e - e_2}{\tilde{\kappa}_1} \frac{1}{\frac{-1}{i x_2} + \frac{1}{\tilde{\kappa}_2}}$$

ó bien

$$e_2 \tilde{\kappa}_1 \left[\frac{1}{\tilde{\kappa}_2} - \frac{1}{i x_2} \right] = e - e_2$$

Suponiendo que la fase de e es cero, y poniendo en vez de e y e_2 sus valores simbólicos, quedará:

$$E_2 [\cos \varepsilon_2 + i \sin \varepsilon_2] [\rho_1 - i x_1] \left[\rho'_2 + i x'_2 + \frac{i}{x_3} \right] = E - E_2 [\cos \varepsilon_2 + i \sin \varepsilon_2]$$

Separando en esta ecuación las partes reales de las imaginarias, se desdobra, á saber:

$$E_2 \left[(\rho_1 \cos \varepsilon_2 + x_1 \sin \varepsilon_2) \rho'_2 - (\rho_1 \sin \varepsilon_2 - x_1 \cos \varepsilon_2) \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right) \right] = E - E_2 \cos \varepsilon_2$$

$$E_2 \left[(\rho_1 \sin \varepsilon_2 - x_1 \cos \varepsilon_2) \rho'_2 + (\rho_1 \cos \varepsilon_2 + x_1 \sin \varepsilon_2) \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right) \right] = -E_2 \sin \varepsilon_2$$

las cuales pueden escribirse de este modo:

$$E_2 \cos \varepsilon_2 \left[\rho_1 \rho'_2 + x_1 \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right) + 1 \right] + E_2 \sin \varepsilon_2 \left[x_1 \rho'_2 - \rho_1 \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right) \right] = E$$

$$E_2 \cos \varepsilon_2 \left[-x_1 \rho'_2 + \rho_1 \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right) \right] + E_2 \sin \varepsilon_2 \left[\rho_1 \rho'_2 + x_1 \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right) + 1 \right] = 0$$

que son de la forma

$$\begin{aligned} A \cos \varepsilon + B \sin \varepsilon &= E \\ -B \cos \varepsilon + A \sin \varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema, se podrá escribir

$$\begin{aligned} A &= M \cos \alpha \\ B &= M \sin \alpha \end{aligned}$$

con lo cual se reduce al siguiente

$$\begin{aligned} M \cos (\varepsilon - \alpha) &= E \\ M \sin (\varepsilon - \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

De la última se deduce, si $M \neq 0$,

$$\varepsilon = \alpha$$

y en este caso, la primera da

$$M = E$$

Como quiera que $M = \sqrt{A^2 + B^2}$, se tendrá

$$E = E_2 \sqrt{\left[\rho'_2 + x_1 \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right) + 1 \right]^2 + \left[x_1 \rho'_2 - \rho_1 \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right) \right]^2}$$

ó bien

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{E_2} \right)^2 &= \rho_2'^2 (\rho_1^2 + x_1^2) + (\rho_1^2 + x_1^2) \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right)^2 + 1 \\ &\quad + 2 \rho_1 \rho'_2 + 2 x_1 \left(x'_2 + \frac{1}{x_3} \right) \end{aligned}$$

Esta es la relación que liga á ρ'_2 y x_3 entre sí, la cual, suponiendo á ρ'_2 y x_3 coordenadas rectangulares de una curva, representa una elipse.

Los valores de las demás variables en función de ρ'_2 se hallan sin dificultad siguiendo el procedimiento ya indicado.

cida cuando se conoce la de e_2 . Si x_3 es negativa, que es el caso de estar constituida la reactancia por una capacidad,

$$\varphi_3 = -90^\circ$$

y la corriente i_3 adelanta 90° á e_2 (V. fig. 2). (Se recordará que en la figura á que nos referimos el sentido actual de la línea de referencia, es el de las agujas de un reloj).

La diferencia vectorial entre e y e_2 representará la diferencia de potencial perdida en línea, la cual vale

$$e_1 = e - e_2 = i_1 z_1$$

De aquí se deduce el valor de i_1 , á saber

$$i_1 = \frac{e - e_2}{z_1}$$

de modo que basta dividir vectorialmente $e - e_2$ por z_1 , para lo cual, si el ángulo de fase de z_1 es negativo, y vale, verbigracia $-\alpha$, habrá que girar al vector $e - e_2$ de un ángulo α en sentido de las agujas de un reloj, dividiendo luego su módulo por el de z_1 .

Así, pues, partiendo de un valor cualquiera OB' de la diferencia e_2 de potencial, y cuyo módulo sea E_2 , la figura 2 indica como se halla el de $e - e_2 = OA - OB' = B'A$ correspondiente, y de éste, se pasa al de I_1 mediante las operaciones dichas. Así resulta del valor arbitrario OB' el correspondiente de i_1 en módulo y fase. Ahora bien, i_1 se puede considerar como suma de dos vectores i_2 é i_3 . Del primero se sabe que su extremo está en una paralela (p) á $OB = E_2$ y á una distancia x'_2 de la misma (la paralela (p) no se halla representada en la figura 2), y del vector que representa i_3 se conoce su dirección. Con estos datos resulta fácil hallar los valores de i_2 é i_3 ; en efecto, basta por el extremo de i_1 trazar una paralela á i_3 hasta que encuentre á la paralela (p) en un punto que será precisamente el extremo de i_2 .

El valor de I_3 se halla determinado á su vez por la longitud del segmento de recta que se acaba de trazar. Cono-

cido el valor de I_3 , para determinar la reactancia x_3 , se podrá utilizar la fórmula:

$$x_3 = - \frac{E_2}{I_3}$$

Al mismo tiempo, se viene en conocimiento de la ρ'_2 de la máquina receptora correspondiente al valor OB' elegido para e_2 , pues la proyección octogonal de i_2 sobre OB' vale precisamente $E \rho'_2$, y basta por lo tanto, dividir el valor de la citada proyección por E_2 para hallar ρ'_2 .

Partiendo de otros radios análogos á OB' se pueden calcular por el procedimiento anterior los valores correspondientes de ρ'_2 y x_3 con los cuales se puede construir gráficamente la curva que los relaciona, y con ello está el problema resuelto.

3. — Estudio del circuito, teniendo en cuenta las perturbaciones que se originan al abrirlo ó cerrarlo

Para el estudio de estas perturbaciones hay que acudir á las soluciones completas de las ecuaciones diferenciales, de las cuales la representación simbólica sólo atiende á los términos no amortiguados.

Las leyes de Kirchhoff aplicadas al circuito, darán el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con las notaciones de la figura 1.

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ e_2 &= \rho_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = \rho_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt \\ e &= \rho_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + e_1 \end{aligned}$$

Eliminando i_1 y diferenciando con objeto de hacer desaparecer el signo $\int$ queda

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{1}{C_2} i_2 &= \rho_3 \frac{di_3}{dt} + L_3 \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{1}{C_3} i_3 = \frac{de_2}{dt} \\ \rho_1 \frac{di_2}{dt} + \rho_1 \frac{di_3}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_1 \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{1}{C_1} i_2 + \frac{1}{C_1} i_3 &= \frac{de}{dt} - \frac{de_1}{dt} \end{aligned}$$

Multiplicando por 2 la última y añadiendo á ella sucesivamente las dos igualdades en que se puede descomponer la primera, igualando el primero y el segundo miembros al tercero, se tiene :

$$\begin{aligned} (2 \rho_1 + \rho_2) \frac{di_1}{dt} + (2 L_1 + L_2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i_1 \\ + (2 \rho_1 + \rho_2) \frac{di_2}{dt} + (2 L_1 + L_2) \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i_2 = \frac{de}{dt} \quad (a) \end{aligned}$$

Esta ecuación junto con

$$\rho_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1} i_1 = \rho_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{1}{C_2} i_2 \quad (b)$$

constituyen un sistema de dos ecuaciones, del que se podrán deducir los valores de i_1 é i_2 en función de t .

Para resolver el sistema se puede escribir

$$\begin{aligned} i_1 &= i'_1 + A_1 e^{-Kt} \\ i_2 &= i'_2 + A_2 e^{-Kt} \end{aligned}$$

siendo i'_1 é i'_2 soluciones particulares de la forma

$$\begin{aligned} i'_1 &= I_1 \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \alpha_1 \right) \\ i'_2 &= I_2 \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \alpha_2 \right) \end{aligned}$$

en el supuesto de ser

$$e = E \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - B \right) ;$$

y satisfaciendo $A_1 e^{-Kt}$ y $A_2 e^{-Kt}$ á la ecuación (b) y á la (a) sin segundo miembro.

La determinación de los valores de I_1 , I_2 , α_1 y α_2 es análoga á la empleada en el caso de dos impedancias en serie, pudiendo utilizarse el método simbólico.

Para hallar los valores de K , que convienen á las soluciones de (b) y (a) sin segundo miembro, se substituirá en ellas en á vez de i_1 é i_2 los valores $A_1 e^{-Kt}$ y $A_2 e^{-Kt}$ resultando

$$e^{-Kt} \left[A_1 \left(L_1 K^2 - \rho_1 K + \frac{1}{C_1} \right) - A_2 \left[L_2 K^2 - \rho_2 K + \frac{1}{C_2} \right] \right] = 0 \quad (c)$$

$$e^{-Kt} \left[A_2 \left[(2L_1 + L_2) K^2 - (2\rho_1 + \rho_2) K + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right] \right. \\ \left. + A_3 \left[(2L_1 + L_2) K^2 - (2\rho_1 + \rho_2) K + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right] \right] = 0 \quad (d)$$

Dividendo estas ecuaciones por e^{-Kt} y eliminando A_2 y A_3 , queda la siguiente ecuación para K : (1)

$$\begin{vmatrix} L_2 K^2 - \rho_2 K + \frac{1}{C_2} & -L_3 K^2 + \rho_3 K - \frac{1}{C_3} \\ (2L_1 + L_2) K^2 - (2\rho_1 + \rho_2) K + m & (2L_1 + L_2) K^2 - (2\rho_1 + \rho_2) K + n \end{vmatrix} = 0$$

siendo

$$m = \frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

y

$$n = \frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_3};$$

ecuación de cuarto grado que dará para K cuatro valores, los cuales podrán ser todos reales, dos reales y dos imaginarios conjugados ó todos imaginarios, siendo dos de ellos conjugados de los otros dos.

(1) Cuando se tiene un sistema de ecuaciones homogéneas en número igual al de incógnitas, por ejemplo:

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ a'x + b'y &= 0 \end{aligned}$$

se necesita la condición

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

para que sea resoluble: Y si se cumple, los valores de las incógnitas son proporcionales á los determinantes menores de los elementos de una fila en (1). Así, pues, se puede escribir

$$x = \lambda_1 b \quad y = \lambda_1 a$$

En las ecuaciones (e) y (d) A_2 y A_3 juegan el papel de x é y en los dos anteriores. Luego

$$A_2 = \lambda_1 \left(-L_3 K^2 + \rho_3 K - \frac{1}{C_3} \right)$$

$$A_3 = \lambda_1 \left(L_2 K^2 - \rho_2 K + \frac{1}{C_2} \right)$$

Ahora bien, dada la forma lineal de las ecuaciones diferenciales (a) y (b), la suma de un número cualquiera de soluciones es también una solución. Y, sumando las cuatro soluciones correspondientes á los cuatro valores que puede tener K se halla la solución general con cuatro constantes $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ y λ_4 .

Resuelta esta ecuación, se tendrá, llamando K_1, K_2, K_3 y K_4 á las cuatro raíces, supuestas reales y desiguales.

$$\begin{aligned} i_3 - i_3' &= \lambda_1 \left(L_2 K_1^2 - \rho_2 K_1 + \frac{1}{C_2} \right) e^{-K_1 t} + \\ &\quad \lambda_2 \left(L_2 K_2^2 - \rho_2 K_2 + \frac{1}{C_2} \right) e^{-K_2 t} + \\ &\quad \lambda_3 \left(L_2 K_3^2 - \rho_2 K_3 + \frac{1}{C_2} \right) e^{-K_3 t} + \\ &\quad \lambda_4 \left(L_2 K_4^2 - \rho_2 K_4 + \frac{1}{C_2} \right) e^{-K_4 t} \\ i_2' - i_2 &= \lambda_1 \left(L_3 K_1^2 - \rho_3 K_1 + \frac{1}{C_3} \right) e^{-K_1 t} + \\ &\quad \lambda_2 \left(L_3 K_2^2 - \rho_3 K_2 + \frac{1}{C_3} \right) e^{-K_2 t} + \\ &\quad \lambda_3 \left(L_3 K_3^2 - \rho_3 K_3 + \frac{1}{C_3} \right) e^{-K_3 t} + \\ &\quad \lambda_4 \left(L_3 K_4^2 - \rho_3 K_4 + \frac{1}{C_3} \right) e^{-K_4 t} \end{aligned}$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 constantes arbitrarias, cuyo valor se deduce de las condiciones límites que pueden ser, por ejemplo, que al tiempo $t=0$, las intensidades i_1, i_2 é i_3 tengan valores dados de antemano, así como la diferencia de potencial en los bornes de un condensador.

Si las raíces de la ecuación en K fueran reales, y algunas de ellas iguales, por ejemplo; $K_2 = K_3 = K_4$, debieran escribirse en vez de λ_3 y λ_4 ,

$$\lambda_3 t \text{ y } \lambda_4 t^2;$$

y si fueran dos de ellas imaginarias conjugadas por ejemplo $-K_3 = \alpha + i\beta$, $-K_4 = \alpha - i\beta$, en vez de $e^{-K_3 t}$ y $e^{-K_4 t}$ se pondría $e^{\alpha t} \cos \beta t$ y $e^{\alpha t} \sin \beta t$ respectivamente. En el caso de raíces imaginarias múltiples, por ejemplo $-K_1 = -K_2 = \alpha + i\beta$, $-K_3 = -K_4 = \alpha - i\beta$ se pondrán en vez de $e^{-K_1 t}$, $e^{-K_2 t}$, $e^{-K_3 t}$ y $e^{-K_4 t}$ los siguientes valores:

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad t e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{y} \quad t e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Las fórmulas que acabamos de obtener tienen mucho interés en los estudios de electrotecnia moderna. En muchos casos, la ecuación en K es de grado inferior al cuarto. Consideraremos brevemente alguno, usando ya de las fórmulas anteriores ya de otras análogas más sencillas, deducidas por planteo directo, siguiendo la misma marcha ó más simplificada que se siguió en el planteo de las ecuaciones diferenciales (a) y (b) que se refieren al caso completo correspondiente al circuito de la fig. 1.

Si la corriente es continua, la fuerza electromotriz e , en vez de tener constante tan sólo la amplitud E , será constante en todo valor del tiempo. Ahora bien, si en un circuito como en el de la figura 1, servido por una fuerza electromotriz constante, viniere á variar bruscamente la fuerza electromotriz, resistencia, susceptancia, etc., de las ramas del circuito, antes de alcanzar las nuevas intensidades sus valores de régimen, variarían entre el valor inicial correspondiente al régimen antiguo, antes de la alteración de la dicha f , e , m , impedancia, etc., y el correspondiente al nuevo régimen. El modo de ser de esta variación, que puede ser considerable, es de gran interés, y para conocerle precisa proceder planteando el problema en la forma dicha.

Antes de entrar en el pormenor de un ejemplo, advertiremos, siguiendo á Steinmetz ⁽¹⁾ que aun tratándose de régimen no sinusoidal llamaremos reactancia á $2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}$ siendo f una frecuencia tipo, por ejemplo, la que corresponde á 60 ciclos por segundo.

Sea un circuito de la forma de la fig. 1 en que $e = E = 600$ volts, $p_1 = 24$ ohms, $p_2 = 1$ id., $p_3 = 1,000$ id., $x_1 = 4$ id. $x_2 = 40$ id. y $x_3 = 40$ id. En este circuito la corriente continua de régimen en las ramas (2) y (3) deducida, mediante las leyes de Kirchhoff, valdrá respectivamente:

$$i'_2 = 23,9$$

$$i'_3 = 0,0239$$

Supongamos que, en un momento dado, la fuerza electromotriz viniere á variar de un 10 por 100, es decir, pasara del valor 600 al valor 540. Los valores de las nuevas intensidades de régimen, serán:

$$i''_2 = 21,6$$

$$i''_3 = 0,0216$$

(1) *Transient Phenomena*, New York, 1909.

Ahora bien, ¿ cómo varían las intensidades i_2 é i_3 al pasar de los valores antiguos á los nuevos? El planteo del problema será, en este período variable, el siguiente (leyes de Kirchhoff):

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ e_2 &= \rho_2 + i_3 L_3 \frac{di_3}{dt} = \rho_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} \\ e &= \rho_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + e_2 \end{aligned}$$

ó bien con las notaciones convenidas, y poniendo $2 \pi f t = \theta$,

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ e_2 &= \rho_2 i_3 + x_3 \frac{di_3}{d\theta} \\ e_2 &= \rho_3 i_3 + x_3 \frac{di_3}{d\theta} \\ e &= \rho_1 i_1 + x_1 \frac{di_1}{d\theta} + e_2 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deduce que, poniendo en la última, en vez de i_1 su igual $i_2 + i_3$ multiplicándolo por 2 y escribiendo en vez de $2 e_2$ el resultado de sumar la segunda y la tercera,

$$\begin{aligned} 2 e &= (2 \rho_1 + \rho_2) i_2 + (2 \rho_1 + \rho_3) i_3 + (2 x_1 + x_2) \frac{di_2}{d\theta} \\ &\quad + (2 x_1 + x_3) \frac{di_3}{d\theta} \end{aligned}$$

Esta ecuación, junto con la que se obtiene restando la segunda y la tercera:

$$\rho_2 i_2 - \rho_3 i_3 + x_2 \frac{di_2}{d\theta} - x_3 \frac{di_3}{d\theta} = 0$$

constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales simultáneas de los que se podrán obtener los valores i_2 é i_3 . Poniendo:

$$\begin{aligned} i_2 &= i''_2 + A_2 e^{-K\theta} \\ i_3 &= i''_3 + A_3 e^{-K\theta} \end{aligned}$$

y substituyendo, en las ecuaciones anteriores, se podrán éstas descomponer en las cuatro siguientes:

$$\begin{aligned} \rho_2 i''_2 - \rho_3 i''_3 &= 0 \\ (2\rho_1 + \rho_2) i''_2 + (2\rho_1 + \rho_3) i''_3 &= 2e \\ A_2 (\rho_2 - Kx_2) - A_3 (\rho_3 - Kx_3) &= 0 \\ A_2 [(2\rho_1 + x_2) - K(2x_1 + x_3)] + \\ A_3 [(2\rho_1 + x_3) - K(2x_1 + x_2)] &= 0 \end{aligned}$$

de las cuales las dos primeras dan los valores de la intensidad en el régimen permanente, á saber, los valores 21,6 y 0,0216 ampères, y las dos últimas los valores de la parte variable. Como éstas son homogéneas en A_2 y A_3 para que sean compatibles se necesita que el determinante del sistema sea nulo, es decir, que K vendrá determinado por la ecuación de segundo grado:

$$(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) K^2 - [\rho_1 (x_2 + x_3) + \rho_2 (x_1 + x_3) + \rho_3 (x_1 + x_2)] K + (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3) = 0$$

Si K_1 y K_2 son las dos raíces, los valores de A_2 y A_3 serán proporcionales respectivamente á $\rho_2 - Kx_2$ y $\rho_3 - Kx_3$ respectivamente. Llamando λ_1 á la constante de proporcionalidad, para $K = K_1$ y λ_2 para $K = K_2$ la solución completa será

$$\begin{aligned} i_2 &= i''_2 + \lambda_1 (\rho_2 - K_1 x_2) e^{-K_1 t} + \lambda_2 (\rho_2 - K_2 x_2) e^{-K_2 t} \\ i_3 &= i''_3 + \lambda_1 (\rho_3 - K_1 x_3) e^{-K_1 t} + \lambda_2 (\rho_3 - K_2 x_3) e^{-K_2 t} \end{aligned}$$

En estas ecuaciones quedan aún por determinar las constantes λ , lo cual, en nuestro caso, se logrará atendiendo á que, inicialmente, es decir, para $t=0=0$, los valores de i_2 é i_3 son conocidos. Y se tendrán las dos ecuaciones de condición, substituyendo valores y observando que en el ejemplo $K_1 = 0,832$ y $K_2 = 23,1$:

$$\begin{aligned} 23,9 &= 21,6 + \lambda_1 966,72 e^{-0,832 t} + \lambda_2 26 e^{-23,1 t} \\ 0,0239 &= 0,216 - \lambda_1 32,28 e^{-0,832 t} - \lambda_2 923 e^{-23,1 t} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deducen los valores de λ_1 y λ_2 y llevados á los de i_2 é i_3 se tiene

$$\begin{aligned} i_2 &= 21,6 + 2,407 e^{-0,832 t} - 0,007 e^{-23,1 t} \\ i_3 &= 0,0216 - 0,0806 e^{-0,832 t} + 0,0830 e^{-23,1 t} \end{aligned}$$

Estas fórmulas nos dan el modo como varían las intensidades al pasar de uno á otro régimen. Si se quiere conocer como varía e_2 se observará que

$$e_2 = \rho_2 i_2 + x_2 \frac{di_2}{dt}$$

y substituyendo valores se llega á

$$e_2 = 21,6 - 77,9 e^{-0,832 t} + 6,2 e^{-23,1 t} \quad (e)$$

Si una vez en el régimen viniere e á alcanzar otra vez el valor primitivo 600 volts, la variación de e_2 vendría dada por

$$e_2 = 24 + 77,9 e^{-0,832 t} - 6,2 e^{-23,1 t} \quad (f)$$

De estas dos fórmulas (e) y (f) se deducen interesantes consecuencias. Supongamos que el conductor de resistencia ρ_2 y reactancia x_2 sea un voltmetro, y el conductor de constantes ρ_2 y x_2 un motor en serie en una instalación de tracción eléctrica á 600 volts. El voltaje indicado por el voltmetro en el régimen permanente de 600 volts es de 24 volts, en el régimen permanente de 540 es de 21'6. Pero al pasar de un régimen á otro, el voltmetro lejos de pasar gradualmente de 24 á 21'64 y viceversa después, pasa bruscamente de 24 á 50 volts, luego pasa gradualmente á marcar 21'6 y al volver e á su valor de 600 volts, pasa bruscamente de 21'6 á más de 90 para bajar luego gradualmente hasta 24. Estas variaciones en la diferencia de potencial á que está sujeto el voltmetro pueden deteriorarle si en el momento de variar bruscamente la fuerza electromotriz, se halla en derivación sobre un conductor en que predomine la reactancia de autoinducción sobre la resistencia, comparado con el voltmetro.

Puede demostrarse con las fórmulas anteriores, que siempre que se tenga un conductor (2) de autoinducción bastante grande comparada con la resistencia y en derivación con él un conductor (3) en que ocurra lo contrario, toda variación en el circuito principal (1) que haga variar la corriente originará una variación mucho mayor en el conductor (3) que en el (2). Esta circunstancia se expresa prácticamente diciendo que la autoinducción de (2) «repele» ó «escupe» las variaciones de la corriente, que se manifiestan acen tuadas en (3). Esta manera de ser de los circuitos que estamos considerando es aprovechada en los relays, v. g., de la lámpara de arco.

Siempre que se trata de instalar un aparato que á la menor variación de una corriente (i_1) haga funcionar tal ó cual órgano advertidor, regulador, etc., se hará bien en disponer en serie en (1) una autoinducción y shuntarla con un conductor (3) que generalmente es el hilo de un electroimán el cual sea el órgano primordial del relais.

El efecto de una capacidad es contrario al de autoinducción. Si un conductor se shunta con una capacidad ésta «aspira» ó transmite las variaciones de la corriente principal. Así, si se quiere instalar un receptor y se le quiere independiente de las fluctuaciones de la corriente principal (1) se le shuntará una capacidad, entendiéndose que cuanto más rápidas sean las fluctuaciones de la corriente (1) más al abrigo estará de ellos el aparato. El lector podrá ejercitarse en la resolución de ejemplos análogos á los 4.º y 5.º que siguen para familiarizarse con el modo de obrar de la autoinducción y la capacidad colocados en derivación respecto de las variaciones de la corriente principal.

4. — Ejercicios

1. Hallar analítica y gráficamente la reactancia de regularización en una máquina receptora en la que es constante la diferencia de fase entre la diferencia de potencial en los bornes y la corriente que la atraviesa, sabiendo que en la estación generadora existe entre los bornes una diferencia de potencial constante.

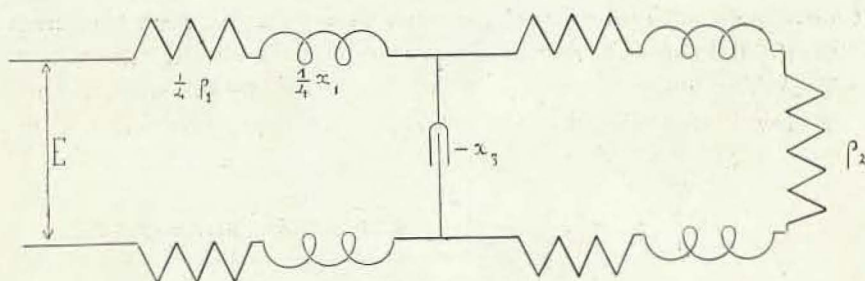


Fig. 3

2. El circuito de la figura 3, representa una distribución en que la línea tiene una resistencia ρ_1 y reactancia x_1 y capacidad derivada distribuida uniformemente á lo largo de la misma. Esta capacidad la imaginaremos substituida por un condensador de reactancia $-x_3$ intercalado en la forma que la figura 3 indica. Se

pide la relación que debe existir entre x_1 y ρ_2 suponiendo que E es constante así como la diferencia de potencial en los bornes de ρ_2 .

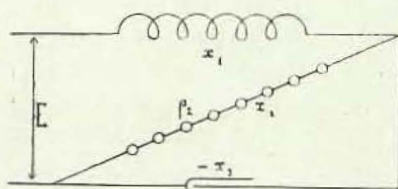


Fig. 4

3. Demostrar que con las notaciones de las figuras 4 y 5, suponiendo $x_1 = -x_3$ la intensidad de la corriente que atraviesa las lámparas de resistencia total ρ_2 y reactancia total x_2 es constante cualesquiera que sea ρ_1 , es decir, cualquiera que sea el número de

las lámparas, siendo E constante (Boucherot).

4. Hallar gráficamente la curva que representa en función del tiempo las variaciones de las intensidades i_2 é i_3 en el circuito de la figura 1, en que $e = 200$ volts, $\rho_2 = 20$, $x_1 = 20$, $\rho_2 = 100$, $x_2 = 5$, $\rho_3 = 1$, $x_3 = 500$ ohms, y la resistencia ρ_1 pasa bruscamente del valor 20 al valor 5 para alcanzar después el valor 30 y volver al 20.

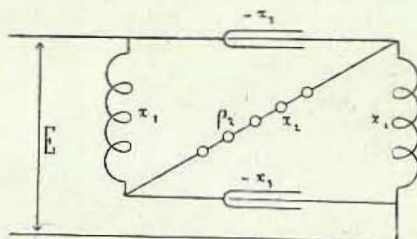


Fig. 5

5. Representar gráficamente la relación entre la intensidad i_2 y el tiempo en el circuito de la figura 1 en que en la rama 2 hay sólo una capacidad cuya reactancia referida á una frecuencia de 60 periodos por segundo vale 10 ohms. El conductor 1 y el 3 son los mismos que antes. La ecuación en K es, en este caso, de tercer grado. Las condiciones iniciales para $\theta = 0$ podrán ser los valores de las intensidades i_2 , i_3 y el de e_2 .

Conferencia quinta

Potencia y rendimiento de las corrientes alternas sinusoidales

1. — Potencia de una corriente sinusoidal

LA potencia P de una corriente de intensidad i salvando la diferencia de potencial e , vale:

$$P = e i$$

Si la fuerza electromotriz, así como la intensidad son sinusoidales,

$$P = E \sin \frac{2\pi t}{T} \times I \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha \right)$$

El valor de P es función del tiempo. Comúnmente se da como definición de potencia el valor medio de P en un período T ó semiperíodo $\frac{T}{2}$. Así, pues, llamando π á este valor medio, que en lo sucesivo llamaremos simplemente potencia,

$$\pi = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E I \sin \frac{2\pi t}{T} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha \right) dt \quad (1)$$

Ahora bien, recordando que

$$\cos (a - b) - \cos (a + b) = 2 \sin a \sin b$$

y por tanto, que

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)] \quad (2)$$

se tendrá aplicando esta fórmula á (1)

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{2}{T} EI \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \left[\cos \alpha - \cos \left[\frac{4\pi t}{T} - \alpha \right] \right] dt = \frac{EI}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \alpha dt \\ &\quad - \frac{EI}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{4\pi t}{T} - \alpha \right) dt = \frac{EI}{2} \cos \alpha .\end{aligned}$$

Si se escribe

$$\frac{E}{\sqrt{2}} = \dot{E}$$

$$\frac{I}{\sqrt{2}} = \dot{I}$$

se tendrá

$$\pi = \dot{E} \dot{I} \cos \alpha$$

A $\dot{E}$ é $\dot{I}$ se les denomina fuerza electromotriz é intensidad « eficaces », y tienen gran importancia por ser los valores que en general evalúan los aparatos destinados á la medida de fuerzas electromotrices ó intensidades.

Traducida la fórmula $\pi = \dot{E} \dot{I} \cos \alpha$ al lenguaje vulgar dice : « la potencia es igual al producto de la fuerza electromotriz eficaz, por la intensidad eficaz, por el coseno del ángulo de fase relativa ». A este coseno se la denomina « factor de potencia ».

La pérdida, por efecto Joule se refiere análogamente á un semiperíodo. Vale:

$$\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 \rho dt = \frac{2}{T} I^2 \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi t}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} \rho dt$$

Empleando la misma fórmula (2), la integral anterior se puede transformar en la siguiente :

$$\frac{2}{T} I^2 \rho \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{4\pi t}{T} \right] dt = \frac{I^2 \rho}{2} = \dot{I}^2 \rho$$

2. — Representación gráfica

Se representa π por un vector de amplitud $\dot{E} \dot{I}$ formando con el eje de cantidades reales un ángulo α (fig. 1). De este modo, su proyección sobre este eje es el verdadero valor de π , llamándose por este motivo á la proyección potencia real, mientras se llama potencia imaginaria á la proyección $\dot{E} \dot{I} \sin \alpha$ sobre el eje de cantidades imaginarias puras.

Las potencias real ó imaginaria pueden considerarse como productos de $\dot{E}$ por la componente $\dot{I} \cos \alpha$ ó $\dot{I} \sin \alpha$ de la intensidad eficaz en la dirección de $\dot{E}$. En la técnica se da el nombre de intensidad de potencia real ó energética á $\dot{I} \cos \alpha$, é intensidad de potencia imaginaria ó no energética á $\dot{I} \sin \alpha$.

El vector potencia tal y cómo se ha representado, puede considerarse como el resultado de multiplicar $\dot{E}$ por un vector $\dot{I}$ simétrico de $\dot{I}$ respecto del eje de cantidades reales. En efecto, recordando la regla para multiplicar dos cantidades imaginarias, si α_1 y $-\alpha_2$ son los argumentos de los factores, $\alpha_1 - \alpha_2$ será el del producto, el cual estará representado por un vector de módulo $\dot{E} \dot{I}$ formando con el eje real un ángulo $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.

La representación gráfica que antecede es convencional, y no debe inducir á creer que la potencia instantánea P es la proyección de π sobre la línea de referencia.

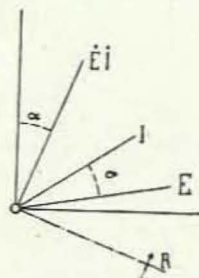


Fig. 1

