



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Anàlisi i predicció de sèries
temporals financeres:
introducció als models GARCH

Autor: Alex Cañas Gomez

Director: Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2025

Abstract

The main purpose of this thesis is to present ARCH/GARCH model theory, which is especially relevant in time series analysis, particularly in financial time series. The key aspect is volatility, which refers to fluctuations in prices over a period of time. Unfortunately, these fluctuations tend not to be the same for every period. Mathematically, volatility can be associated with heteroscedasticity, meaning non-constant variance over time. Standard stochastic process theory will be discussed, as well as the models that preceded ARCH/-GARCH, including their shortfalls. Lastly, the main properties, along with the estimation of parameters and forecasting, will be discussed. The R software will be used to analyze two financial time series.

Resum

L'objectiu d'aquest treball és presentar la teoria dels models ARCH/GARCH, molt importants en l'anàlisi de sèries temporals, especialment en aquelles de tipus econòmic. La principal característica d'aquestes és la volatilitat, és a dir, la fluctuació de preus en un període de temps. El problema és que aquesta no acostuma a ser la mateixa per tot instant t . En termes matemàtics, es pot relacionar amb l'heteroscedasticitat: variància no constant al llarg del temps. Es parlarà de la teoria més bàsica de processos estocàstics, dels models predecessors dels ARCH/GARCH i els seus dèficits, i, finalment, es tractaran les propietats, l'estimació dels valors dels models i la predicció de valors futurs. Amb aquestes eines s'analitzaran dues sèries temporals financeres amb el software estadístic R.

Agraïments

En primer lloc, vull donar les gràcies al meu tutor, el Dr. Josep Vives, qui m'ha aconsellat i guiat al llarg d'aquest projecte. Sense les seves indicacions i suggeriments, aquest treball no hauria sortit endavant com ho ha fet.

També vull agrair a la meva família, especialment als meus pares, perquè han confiat en mi incondicionalment i m'han animat sempre que he dubtat de mi mateix, no només al llarg d'aquest grau, sinó durant tota la vida.

Gràcies a la universitat per permetre'm conèixer amics que m'emportaré tota la vida: a la Clàudia i al Josep, per fer-nos una pinya des del primer dia i afrontar tot el que ens esperava junts, a l'Eloy i al Julian, que van aparèixer poc després i no han marxat des d'aleshores, a la Marina, a la Júlia i al Pau, sense els quals les hores i hores d'estudi haurien sigut molt més tedioses, i perquè han sigut la millor companyia que podria haver demanat. A tots, gràcies per encomanar-me de la vostra alegria.

Finalment, al Mario. Aquesta carrera, i la meva vida, haurien estat molt diferents si no ens haguéssim conegut. Dono gràcies a aquella classe de Mètodes Numèrics per presentar-me a la persona amb qui ho vull compartir tot. Tinc moltes ganes de veure què té preparat per nosaltres el futur. I gràcies també al Tobi.

Índex

1	Introducció	1
2	Conceptes previs	3
2.1	Sèries temporals	3
2.2	Processos estocàstics	3
2.2.1	Estacionarietat	3
2.2.2	Exemples de processos estocàstics	5
3	Models de sèries temporals	6
3.1	Processos ARMA	6
3.1.1	Model AR(p)	6
3.1.2	Model MA(q)	7
3.1.3	Model ARMA(p,q)	7
3.1.4	Model ARIMA(p,d,q)	9
4	Models ARCH	10
4.1	Sèries financeres i Stylized facts	10
4.2	Construcció del model ARCH	11
4.2.1	Propietats	12
4.3	Generalització del model: GARCH	15
4.3.1	Propietats	16
4.4	Test per buscar efectes ARCH	18
5	Estimació i predicció	19
5.1	Estimació	19
5.1.1	Estimació de $ARCH(p)$	19
5.1.2	Estimació de $GARCH(p, q)$	21
5.2	Predicció	22
6	Procés d'ajustament d'una sèrie temporal	25
6.1	Identificació i selecció	25
6.1.1	Funció d'autocorrelació	25
6.1.2	Funció d'autocorrelació parcial	26
6.1.3	Test de Dickey-Fuller	27
6.1.4	Test de Ljung-Box	28
6.1.5	Test de Shapiro-Wilk	29
6.1.6	Test del gràfic Q-Q	29
6.2	Estimació dels paràmetres del model i aplicació de tests	29

6.2.1	Test Akaike Information Criterion (AIC)	30
6.2.2	Test Bayesian Information Criterion (BIC)	30
6.3	Anàlisi de resultats i Forecasting	30
7	Estudi pràctic	32
7.1	Preu d'accions del Banc d'Amèrica	32
7.2	Preu de la divisa EUR/CHZ	42
8	Conclusions	47
A	Apèndix 1	49
B	Apèndix 2	53

1. INTRODUCCIÓ

Fa ja bastants anys, en començar a interessar-me pel món de les finances i l'economia, vaig fer-me una pregunta aparentment ingènua, tot i que estic segur de no haver estat l'únic: hi ha la possibilitat d'inventar una fórmula màgica per predir el valor d'una acció i poder guanyar diners sense cap mena de risc? Amb el pas dels anys, i especialment degut a començar a aprendre matemàtiques, la qüestió que em plantejo ha anat canviant. Ja no es tracta d'estimar com d'impossible és inventar aquesta fórmula per conèixer el valor exacte de l'acció, sinó que ara em pregunto: puc construir un ventall de possibilitats sobre les quals poder escollir la millor decisió en cada cas? I, en ser possible, com de petit es pot fer aquest? Un plantejament tan simple obre la porta a una gran varietat de camps dins de les matemàtiques. Aquest treball és un intent de centrar-se en un d'ells: l'anàlisi de sèries temporals financeres. La principal característica d'aquesta branca de les sèries temporals respecte de les estàndard és l'elevada volatilitat. Les diferències de valors en determinats períodes de temps poden arribar a ser abismals, de manera que tractar la sèrie com si aquest fenomen fos menyspreable pot ser molt perjudicial per a l'estudi de dades.

El projecte

En termes matemàtics, aquesta volatilitat variable en el temps es tradueix en heteroscedasticitat, una característica en què la variància no és constant al llarg del temps, i és determinada pel període en què estem analitzant les nostres dades. L'objectiu d'aquest projecte serà, per tant, assentar les bases de models econòmètrics que permetin incorporar aquesta qualitat a les estimacions. Al llarg del treball ens referirem a un procés heteroscedàstic com aquell que satisfà

$$\mathbb{V}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$$

Estructura de la Memòria

La memòria està dividida en dos blocs: per una banda, l'estudi teòric, i després una aplicació pràctica.

El marc teòric comprèn tot l'explicat entre els capítols 2 i 6. Al llarg del capítol 2 introduïm els conceptes més bàsics de la teoria de processos estocàstics i sèries temporals, necessaris per entendre la resta del contingut. Posteriorment, al capítol 3 s'expliquen breument els models econòmètrics de sèries temporals previs a l'aparició dels ARCH, sent aquests la base dels models futurs. A continuació, al capítol 4, es parla de la principal problemàtica dels models anteriors en tractar sèries temporals financeres i s'introdueixen alguns dels trets més freqüents d'aquestes, anomenats *stylized facts*. Un cop fet, s'introdueixen els models ARCH, es presenten les seves propietats més essencials, i es repeteix

l'estructura per als models GARCH. Abans d'acabar, s'explica com funciona el mètode dels multiplicadors de Lagrange per detectar si l'heteroscedasticitat és present, fet que es coneix com a efecte ARCH. Al següent capítol es tracten l'estimació dels paràmetres dels models i s'introdueixen les bases de la predicció de valors futurs a partir de la informació present. Al darrer capítol teòric, es presenten les eines que es faran servir a la part pràctica per realitzar un estudi de dades financeres.

A la segona part, i últim capítol del treball, es posen en pràctica tots els conceptes estudiats per treballar amb dues sèries temporals financeres bastant diferents: el valor de cotització d'una acció del Banc d'Amèrica i el valor de la divisa Euro/Franc Suís, o EUR/CHF.

2. CONCEPTES PREVIS

2.1 Sèries temporals

Anomenarem sèrie temporal a qualsevol col·lecció de dades indexades pel temps t . En aquest treball farem servir sèries definides a temps discret, més concretament, en intervals periòdics siguin dies, setmanes, mesos o anys, però també podem trobar-nos amb sèries de temps continu, en les quals les dades es recullen de manera contínua en un interval $[a, b]$.

Expressem una sèrie temporal amb la forma $\{x_i; i = 0, 1, \dots, n\}$. Cada dada x_i pot ser unidimensional, en el cas de ser una dada escalar, o multidimensional, on $x = (x_t^1, \dots, x_t^n)$ representa un vector.

2.2 Processos estocàstics

Un procés estocàstic és una família de variables aleatòries $\{X_t; t \in \mathbb{T}\}$ indexades per un conjunt \mathbb{T} que denota el temps i definida en un espai de probabilitats (Ω, \mathcal{F}, P) . Com en aquest treball estudiarem processos estocàstics a temps discret, el nostre espai de temps serà $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ o \mathbb{Z} . Una sèrie temporal és la realització d'un procés estocàstic.

Al llarg del treball denotarem l'esperança d'una variable per $\mathbb{E}(X_t)$, la variància per $\mathbb{V}(X_t)$ i la covariància per $\mathbb{C}(X_t, X_s)$.

2.2.1 Estacionarietat

Donat que el nostre objectiu és predir comportaments futurs a partir d'un conjunt de dades, ens serà molt útil determinar quan una sèrie temporal presenta una certa regularitat, és a dir, observar patrons de comportament que es mantenen fixos al llarg del temps.

Definició 2.1. *Diem que un procés estocàstic és de segon ordre si satisfà $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ per tot $t \in \mathbb{T}$.*

Aquesta condició ens permet garantir que la variància està ben definida i és finita, ja que $|\mathbb{E}(X_t)| \leq \mathbb{E}(|X_t|) \leq (\mathbb{E}(X_t^2))^{1/2} < \infty$, de manera que $\mathbb{V}(X_t) := \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}(X_t)^2 < \infty$. Al llarg de tot el treball suposarem que tot procés és de segon ordre.

Definició 2.2. *Donat un procés estocàstic $\{X_t; t \in \mathbb{T}\}$ tal que $\mathbb{V}(X_t) < \infty$ per tot $t \in T$, definim la funció d'autocovariància $\gamma_x(\cdot, \cdot)$ com*

$$\gamma_x(r, s) = \mathbb{C}(X_r, X_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}(X_r))(X_s - \mathbb{E}(X_s))] \quad r, s \in T$$

Definició 2.3. *Diem que un procés $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ és estacionari, o dèbilment estacionari, si és un procés de segon ordre i se satisfà:*

- $\mathbb{E}(X_t) = \mu \quad \forall t \in \mathbb{Z}$, és a dir, l'esperança no varia al llarg del temps.

$$\bullet \gamma_x(r, s) = \gamma_x(r + t, s + t) \quad \forall r, s, t \in \mathbb{Z}$$

Si el procés estocàstic és estacionari, aleshores se satisfà $\gamma_x(r, s) = \gamma_x(r - s, 0)$ per tot $r, s \in \mathbb{Z}$. Això ens permetrà definir la funció d'autocovariància en termes d'una sola variable, tal que

$$\gamma_x(l) \equiv \gamma_x(l, 0) = \mathbb{C}(X_{t+l}, X_t), \quad \forall t, l \in \mathbb{Z}$$

Amb aquesta nova notació, la funció d'autocorrelació serà determinada pel valor en el "lag" l , que fa referència a la distància entre qualsevol parell de punts en què tenim informació. En la nostra notació, $l = r - s \in \mathbb{Z}$. Com que la covariància depèn únicament de la distància entre dues variables, si tenim $l = 0$, aleshores $\gamma(0) = \mathbb{V}(X_k)$ per tot $k \geq 1$.

Definició 2.4. Donat un procés estocàstic $\{X_t; t \in \mathbb{T}\}$, definim la funció d'autocorrelació com

$$\rho(l) = \text{Corr}(X_{t+l}, X_t) := \frac{\mathbb{C}(X_{t+l}, X_t)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_{t+l})}\sqrt{\mathbb{V}(X_t)}} = \frac{\mathbb{C}(X_{t+l}, X_t)}{(\sqrt{\mathbb{V}(X_t)})^2} = \frac{\mathbb{C}(X_{t+l}, X_t)}{\mathbb{V}(X_t)} = \frac{\gamma(l)}{\gamma(0)}$$

Proposició 2.5. Les funcions d'autocovariància i autocorrelació satisfan les següents propietats:

1. $\gamma(l) = \gamma(-l), \quad \forall l \in \mathbb{Z}$
2. $\gamma(0) \geq 0$
3. $|\gamma(l)| \leq \gamma(0), \quad \forall l \in \mathbb{Z}$
4. $\rho(l) = \rho(-l), \quad \forall l \in \mathbb{Z}$

Demostració.

1. Fent servir la definició de la funció d'autocovariància tenim

$$\begin{aligned} \gamma(l) &= \gamma(t + l - t) = \mathbb{E}[(X_{t+l} - \mathbb{E}(X_{t+l}))(X_t - \mathbb{E}(X_t))] \\ &= \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t+l} - \mathbb{E}(X_{t+l}))] = \gamma(t - (t + l)) = \gamma(-l) \end{aligned}$$

2. És immediat del fet que $\mathbb{V}(X_t) \geq 0$
3. Farem servir la desigualtat de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} |\mathbb{C}(X_t, X_{t+l})| &= |\mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t+l} - \mathbb{E}(X_{t+l}))]| \\ &\leq \mathbb{E}[|X_t - \mathbb{E}(X_t)||X_{t+l} - \mathbb{E}(X_{t+l})|] \\ &\leq (\mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))^2])^{1/2} (\mathbb{E}[(X_{t+l} - \mathbb{E}(X_{t+l}))^2])^{1/2} \\ &= \mathbb{V}(X_t)^{1/2} \mathbb{V}(X_{t+l})^{1/2} \end{aligned}$$

La primera desigualtat és certa a partir de la desigualtat de Jensen i la segona a partir de la desigualtat de Cauchy. Fent servir ara que $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(X_{t+h}) = \gamma(0)$, obtenim $|\mathbb{C}(X_t, X_{t+l})| \leq \sqrt{\gamma(0)} \cdot \sqrt{\gamma(0)} = \gamma(0)$

4. És immediat de la definició de $\rho(l)$ i de les propietats 1 i 2. \square

Definició 2.6. Diem que un procés estocàstic $\{X_t; t \in Z\}$ és estrictament estacionari si per qualsevol conjunt d'enters k_1, \dots, k_n i $l \in Z$, els vectors (X_1, \dots, X_k) i $(X_{k_1+l}, \dots, X_{k_n+l})$ tenen la mateixa llei.

Definició 2.7. Sigui X una variable aleatòria amb $\mathbb{E}(X) = \mu$ i $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$, definim la curtosi, o quart moment, com el grau d'apuntalament d'una distribució de probabilitat. El calculem

$$\kappa = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right] = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^4]}{(\mathbb{E}[(X - \mu)^2])^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

on μ_4 és el quart moment centrat i σ és la desviació estàndard.

Determinem la curtosi en funció de si és més gran o més petita que la d'una distribució normal, que té valor 3 i anomenem curtosi mesocúrtica. En cas que $\kappa < 3$, diem que és platicúrtica, i aquesta denota menys valors atípics, però més dispersos. D'altra banda, si $\kappa > 3$, diem que és leptocúrtica, de manera que hi ha més valors concentrats en el centre, però alhora hi ha cues més pesades, és a dir, més valors extrems en comparació amb una distribució normal.

2.2.2 Exemples de processos estocàstics

- Soroll I.I.D: Diem que una sèrie temporal $\{X_k; k \geq 1\}$ és un soroll I.I.D si les variables aleatòries són independents i idènticament distribuïdes (I.I.D) amb mitjana μ i variància σ^2 . És el model que es fa servir quan ens trobem amb sèries temporals completament aleatòries.
- Passeig aleatori: Sigui $\{X_k; k \geq 1\}$ un soroll I.I.D, diem que la sèrie $\{S_k; k \geq 1\}$ definida com $S_k := X_1 + \dots + X_k$, $k \geq 1$ és un passeig aleatori. La podem reescriure com $S_k = S_{k-1} + X_k$.
- Soroll Blanc: Diem que una sèrie temporal $\{X_k; k \geq 1\}$ és un soroll blanc si totes les variables tenen esperança μ , variància σ^2 i no estan correlacionades linealment, és a dir, $\mathbb{C}(X_i, X_j) = 0$, per tot $i \neq j$. L'expressem com $\{X_t\} \sim WN(\mu, \sigma^2)$. El soroll blanc i el soroll I.I.D són exemples de processos estacionaris. En cas que prenguem un soroll blanc centrat, escriurem $\{X_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$
- Soroll Blanc Gaussià: Diem que una sèrie temporal és un soroll blanc gaussià si $\{X_t\} \sim WN(\mu, \sigma^2)$ i qualsevol vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ té llei normal. L'expressem com $\{X_t\} \sim GWN(\mu, \sigma^2)$. Si centrem la sèrie, escrivim $\{X_t\} \sim GWN(0, \sigma^2)$. El soroll blanc gaussià és un exemple de soroll I.I.D, ja que les condicions de gaussianitat i incorrelació alhora impliquen independència.

3. MODELS DE SÈRIES TEMPORALS

Com ja hem mencionat, l'objectiu del nostre treball és estudiar la volatilitat de les sèries temporals. Abans de fer-ho, però, serà necessari conèixer els models més bàsics que, amb el pas dels anys, acabaran evolucionant en versions més sofisticades i que ens ajudaran en la nostra tasca.

En aquest capítol analitzarem els models AR i MA, presentats entre la dècada dels 20 i els 30. En primer lloc, l'estadístic anglès George Udny Yule publica, el 1927, el seu *paper* "On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers", en què es parla per primer cop d'un procés autoregressiu, en particular del model $AR(2)$, i, deu anys més tard, el rus Eugen Slutsky presenta el seu *paper* "The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes", assentant les bases del model MA. Per analitzar aquests, farem servir dues condicions que mantenen el correcte funcionament dels models: l'estacionarietat, ja definida, i la invertibilitat.

Definició 3.1. *Diem que un polinomi $\phi(x)$ és invertible si existeix una sèrie $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i x^i$ tal que $\phi(x) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i x^i = 1$ i amb $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.*

Una de les maneres més ràpides de comprovar la invertibilitat serà fent servir el següent teorema.

Teorema 3.2. *Sigui $\Phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p, z \in \mathbb{C}$. $\Phi_p(z)$ és invertible \iff totes les arrels del polinomi estan fora del cercle unitat, és a dir, $\{z : \Phi(z) = 0\} \subset \{z : |z| > 1\}$*

En comptes de demostrar aquest teorema per un cas genèric, ens centrarem en el cas aplicat a model ARMA, que veurem a continuació a la definició 3.5. Els detalls del teorema, però, es poden trobar a [2].

3.1 Processos ARMA

3.1.1 Model AR(p)

Definició 3.3. *Siguin $t, t-1, t-2, \dots, t-p$ temps equidistants i $\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t-1}, \dots, \tilde{X}_{t-p}$ els seus respectius valors en un procés estocàstic. Sigui $X_t = \tilde{X}_t - \mu$, per tot $t \in \mathbb{Z}$, el valor de la desviació de \tilde{X}_t respecte de la seva mitjana. Definim un procés autoregressiu d'ordre p i centrat, que denotem per $AR(p)$, com un procés estacionari i de forma*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

on els ϕ_i són paràmetres del model i ϵ_t és una variable de soroll blanc.

Aquesta definició es pot reescriure com $\Phi_p(B)X_t = \epsilon_t, t \in \mathbb{Z}$, on

- B es coneix com a operador de desplaçament enrere, o *backward shift operator*, que satisfà $BX_t = X_{t-1}$. Això implica $B^m X_t = X_{t-m}$.

- $\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ és l'operador autoregressiu.

Els processos autoregressius poden ser estacionaris o no. Per tal de garantir la condició, serà necessari que l'operador autoregressiu tingui totes les arrels de $\Phi_p(B)$ fora del cercle de radi 1. En el cas $p = 1$, aquesta condició es redueix a $|\phi_1| < 1$.

Per tal de trobar els coeficients ϕ_1, \dots, ϕ_p podem fer servir diversos mètodes. Un dels més emprats és el de les equacions de Yule-Walker, que ens permeten determinar els ϕ_i a partir d'un sistema d'equacions lineals que fan servir les funcions d'autocorrelació. El plantejament i resolució d'aquest mètode, però, queda fora dels objectius del treball.

3.1.2 Model MA(q)

Definició 3.4. *Sigui $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un soroll blanc. Definim un procés de mitjana mòbil d'ordre q , que denotem per $MA(q)$, com el model de la forma*

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

on els θ_i són els paràmetres del model.

A diferència del model AR, en el model MA construïm el valor en l'instant t a partir dels errors en els q instants anteriors. Equivalentment, podem definir el model com $X_t = \Theta_q(B)\epsilon_t$, on

$$\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$$

Com el model MA es construeix a partir dels errors $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, que són estacionaris per definició, la condició d'estacionarietat està garantida. D'altra banda, per tal de garantir la condició d'invertibilitat, ens caldrà que totes les arrels del polinomi $\Theta_q(B)$ estiguin fora del cercle de radi 1.

3.1.3 Model ARMA(p,q)

Els 50 anys posteriors al plantejament d'aquests models, matemàtics i estadístics van continuar estudiant el comportament de les sèries temporals. El 1951, Peter Whittle va presentar la seva tesi, *Hypothesis testing in time series analysis*, en la qual parla d'un nou model que uneix els dos anteriors, però no és fins a l'any 1970, quan George Box i Gwilym Jenkins publiquen el seu llibre "*Time Series Analysis: Forecasting and Control*" [1], que el model es popularitza i es planteja el mètode de construcció del model ARMA, conegut com el mètode de Box-Jenkins.

Definició 3.5. *Siguin $p, q \in \mathbb{N}$ fixats, $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un procés i $\Phi_p(\cdot), \Theta_q(\cdot)$ dos polinomis invertibles de graus p i q , respectivament, i sense arrels en comú. Diem que un model ARMA(p, q) és aquell model que satisfà l'equació*

$$\Phi_p(B)X_t = \Theta_q(B)\epsilon_t$$

Si no fem servir els polinomis Φ_p i Θ_q , podem donar l'expressió a partir de les definicions anteriors dels models AR i MA, tal que

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

Demostrarem la condició d'invertibilitat vista a 3.2 aplicada al cas del model ARMA. Construïm primer la definició 3.1 sobre els polinomis del model per després demostrar el teorema.

Definició 3.6. *Sigui $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un procés tal que satisfà l'equació $\Phi_p(B)X_t = \Theta_q(B)\epsilon_t$, amb $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$. Diem que $\{X_t\}$ és invertible si existeix una sèrie de constants $\{\pi_i\}$ amb $\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty$ i tal que $\epsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i}$, per $i = 0, \dots, n$.*

Teorema 3.7. *Sigui $\{X_t\}$ un procés que satisfà l'equació d'un model ARMA(p,q). Considerem els polinomis Φ_p i Θ_q sense arrels en comú. Aleshores, $\{X_t\}$ és invertible $\iff \{z : \Theta(z) = 0\} \subset \{|z| \leq 1\}$ és buit.*

Demostració. Determinem els coeficients π_i de la definició anterior com

$$\pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i = \frac{\Phi(z)}{\Theta(z)}, \quad |z| \leq 1$$

Suposem primer $\Theta(z) \neq 0$ per $|z| \leq 1$, podem expressar $\frac{1}{\Theta(z)}$ com una sèrie de la forma

$$\frac{1}{\Theta(z)} = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i z^i = \eta(z), \quad |z| < 1 + \epsilon, \epsilon > 0$$

Aplicant l'operador B sobre η i fent-lo servir sobre l'equació polinomial del model ARMA, podem reescriure aquesta com $\eta(B)\Phi(B)X_t = \eta(B)\Theta(B)\epsilon_t = \epsilon_t$. En aquest punt, es requereixen arguments bastant més tècnics per assegurar que podem transformar l'expressió que hem obtingut en l'equació $\epsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i}$, precisament sent aquesta la definició de polinomi invertible donada a 3.5. Simplificant molt, és necessari veure que l'estacionarietat i la funció d'autocovariància mantenen les seves propietats quan treballem amb sèries de tipus $\psi(B)X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i X_{t-i}$. Si assumim la invertibilitat de $\{X_t\}$, aleshores podem escriure $\Phi(B)\epsilon_t = \pi(B)\Phi(B)X_t = \pi(B)\Theta(B)\epsilon_t$. Definint ara $\xi(z) = \pi(z)\Theta(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i z^i$ amb $|z| \leq 1$, podem reescriure la nostra igualtat com

$$\sum_{i=0}^p \theta_i \epsilon_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \epsilon_{t-i}$$

Multiplicant a banda i banda per ϵ_{t-k} i aplicant esperances, obtenim $\xi_k = \theta_k$, amb $k = 0, \dots, p$, i $k = 0$ per $k > p$. Aleshores, $\Phi(z) = \xi(z) = \pi(z)\Theta(z)$ amb $|z| \leq 1$. Per hipòtesi, els polinomis Φ i Θ no tenen arrels en comú, i com $|\pi(z)| < \infty$ per $|z| \leq 1$, necessàriament $\Theta(z)$ no pot ser zero en $|z| \leq 1$. \square

3.1.4 Model ARIMA(p,d,q)

Sempre que treballem amb sèries temporals intentem garantir la condició d'estacionarietat. Quan aquesta no se satisfà, les eines que hem vist prèviament deixen de tenir eficàcia. Tot i que els motius de no estacionarietat són diversos, els més freqüents són la tendència, una progressió constant dels valors al llarg del temps, i l'estacionalitat, un patró que es repeteix de manera periòdica al llarg del temps. Per solucionar-ho, sorgeixen els models *Autoregressive Integrated Moving Average*, o ARIMA, i *Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average*, o SARIMA. Aquest darrer no ens interessa gaire, ja que els processos econòmics que estudiarem no presenten estacionalitat. Centrem-nos en el primer. La nova component del model $ARIMA(p, d, q)$ fa referència al número de vegades que 'diferenciem' per tornar el nostre model estacionari. Diferenciar consisteix a restar al valor actual de la sèrie un número d de termes anteriors. En cas que fem una diferenciació de primer ordre, donat un valor actual X_t , tindríem $X'_t = X_t - X_{t-1}$. El procés X'_t és, doncs, el procés X_t diferenciat d vegades, i X_t és el procés X'_t integrat d vegades. D'aquí surt la I del nom. Repetim el procés tants cops com sigui necessari fins a obtenir un procés estacionari.

Definició 3.8. *Diem que $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ és un model $ARIMA(p, d, q)$ amb $p, d, q \in \mathbb{N}$ si $X'_t = (Id - B)^d X_t$ és un model $ARMA(p, q)$, on el procés X'_t és el procés X_t diferenciat d vegades. En termes dels operadors autoregressius i de mitjana mòbil podem reescriure com*

$$\Phi_p(B)(Id - B)^d X_t = \Theta_q(B)\epsilon_t$$

4. MODELS ARCH

Els models econòmics existents a la dècada dels setanta assumeixen que els seus residus es comporten com soroll blanc. Si aquests són centrats, l'única estructura que queda per treballar és la variància, i, en ser un valor constant, no aporta més informació útil. Aquesta variància constant rep el nom d'homoscedasticitat. En la realitat, però, molts models econòmics, en especial sèries financeres, presenten heteroscedasticitat. L'incorrecte tractament d'aquesta condició suposa grans problemes en la fiabilitat dels resultats dels models ARMA, ja que aquests es basen en una estructura lineal, de manera que no poden captar dinàmiques fora d'aquesta. Era necessari, doncs, el plantejament d'un nou model que tingués en compte els períodes de volatilitat i calma al llarg del temps.

El 1982, l'economista Robert Engle publica "*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation.*" [5], i presenta un model capaç de discernir períodes en funció de la volatilitat, assentant la base del model ARCH.

4.1 Sèries financeres i Stylized facts

Abans de començar a parlar dels ARCH, tractarem breument les sèries financeres. En primer lloc, la mesura més freqüent en tractar aquest tipus de sèries és la del retorn, en particular el retorn simple. Calculem un retorn simple, és a dir, respecte del període anterior, com

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

on P_t i P_{t-1} fan referència als preus en els períodes t i $t - 1$, respectivament. D'aquesta manera, podem expressar el percentatge de benefici/pèrdua que ens aporta l'actiu. El principal benefici de fer servir retorns és que ens permeten obtenir una sèrie estacionària molt fàcilment.

D'altra banda, intentar reflectir totes les característiques d'un mercat financer en constant canvi pot resultar un exercici complex. Per tal de facilitar la feina, s'acostuma a analitzar possibles patrons en comú, per poder classificar la informació de manera adient. En fer-ho, s'estudien les regularitats estadístiques, més conegudes com a *stylized facts*, trets representatius d'aquestes sèries i que acostumen a repetir-se. Comentarem breument els més importants:

- Manca d'estacionarietat: les sèries de preus acostumen a presentar una tendència, entrant en conflicte amb la condició d'estacionarietat. Els retorns, en canvi, corregeixen la condició. També ens permeten veure amb més facilitat els 'pics', indicadors de volatilitat.
- Manca d'autocorrelació lineal: l'autocorrelació dels retorns acostuma a ser insignificant quan s'estudia a escala lineal. En canvi, quan s'estudien els quadrats, aquesta

és molt més forta. L'autocorrelació dels quadrats acostuma a decreïxer de manera gradual.

- Cues pesades: la impredictibilitat en els mercats financers afavoreix la presència de valors extrems: una sobtada pujada o la caiguda en picat del preu d'una acció causa valors molt allunyats de les tendències originals de la sèrie. Més endavant comprovarem aquesta característica de manera numèrica.
- Efecte *leverage*: l'impacte de les variacions de preu és asimètrica en funció de si és positiva o negativa. Quan cauen els preus, la volatilitat incrementa més respecte quan aquests puguen.
- *Volatility clustering*: fa referència a l'acumulació de valors extrems. Gràficament, es veuen aglomeracions de valors molt alts seguits de períodes molt més estables.

4.2 Construcció del model ARCH

La clau del model ARCH, i la principal diferència amb els models ARMA, està en poder treballar amb variància condicionada no constant al llarg del temps. El model ARMA és homoscedàstic, és a dir, $\mathbb{V}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2$ per qualsevol instant de temps, i on \mathcal{F}_{t-1} fa referència a tota la informació coneguda fins a l'instant $t - 1$. Ara, $\sigma_t^2 = \mathbb{V}(X_t|\mathcal{F}_{t-1})$ sí que depèn del temps. Aquest fet es coneix com a heteroscedasticitat condicionada.

Definició 4.1. *Un procés $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ és un ARCH(p) si és un procés estacionari, causal i de segon ordre que satisfà:*

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \epsilon_t, & t \in \mathbb{Z} \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2, & \alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \geq 1 \end{cases}$$

on $\epsilon_t \sim GWN(0, 1)$ i els α_i són els paràmetres del model.

Anem a comprovar que el model és autoregressiu i amb heteroscedasticitat condicional.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}(X_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) - \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1})^2 = \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) - \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1})^2 \\ &= \sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) - \sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1})^2 = \sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2) - \sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t)^2 = \sigma_t^2 \end{aligned}$$

on hem fet servir que σ_t^2 és \mathcal{F}_{t-1} -mesurable per construcció i, com $\epsilon_t \sim GWN(0, 1)$, és independent de \mathcal{F}_{t-1} i $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$, $\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = 1$. La variància condicionada, per tant, coincideix amb l'esperança condicionada del quadrat del procés, que hem vist que no és constant. Per això anomenem al model heteroscedàstic.

D'altra banda, com $\mathbb{E}(X_{t-i}^2|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{V}(X_{t-i}|\mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-i}^2$, donat que X_{t-i}^2 és coneguda

en l'instant $t - 1$, podem escriure, per tot $i \geq 1$, la igualtat

$$\mathbb{V}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbb{V}(X_{t-i} | \mathcal{F}_{t-1})$$

de manera que podem assegurar que la variància condicional és autoregressiva.

4.2.1 Propietats

Per tal d'estudiar algunes de les propietats d'aquest model, treballarem amb $ARCH(1)$, evitant fer servir expressions més extenses del necessari. Les equacions són

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \epsilon_t, & t \in \mathbb{Z} \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 & \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0 \end{cases}$$

Observem que de l'expressió de σ_t^2 podem deduir que un valor gran en la sèrie suposarà una variància condicional igual de gran, i de la mateixa manera a l'inrevés. A partir d'aquesta idea és d'on podem raonar el *volatility clustering*: intervals de temps en què la volatilitat és alta causaran uns valors de la sèrie igual d'elevats, i afectaran els valors posteriors. Aquest efecte, però, anirà desapareixent amb el pas del temps.

Proposició 4.2. *L'esperança no condicionada de X_t val 0.*

Demostració. Aplicant la llei d'esperances iterades sobre $\mathbb{E}(X_t)$ tenim

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(\sigma_t \mathbb{E}(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(\sigma_t \mathbb{E}(\epsilon_t)) = \mathbb{E}(\sigma_t \cdot 0) = 0. \quad \square$$

Proposició 4.3. *X_t i X_{t-l} no estan correlacionats per cap lag $l > 0$.*

Demostració. Comprovarem que el coeficient de correlació és 0, és a dir,

$$\mathbb{E}(X_t X_{t-l}) - \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-l}) = 0$$

Acabem de veure que $\mathbb{E}(X_t) = 0$, de manera que només ens queda estudiar la primera part. Fent servir les mateixes propietats que abans, tenim

$$\mathbb{E}(X_t X_{t-l}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t X_{t-l} | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(X_{t-l} \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(X_{t-l} \cdot 0) = 0 \quad \square$$

Teorema 4.4. *Donats $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_1 \in [0, 1)$, el procés*

$$X_t = \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_0 \alpha_1^l \epsilon_t^2 \dots \epsilon_{t-l}^2}$$

és estrictament estacionari i satisfà les equacions del model $ARCH(1)$

Demostració. Primer de tot, l'estacionarietat estricta del procés és garantida per construcció: la llei dels $\epsilon_t^2 \cdots \epsilon_{t-l}^2$ depèn de l però és la mateixa per tot t , de manera que l'esperança i la variància de X_t seran constants per tot t . En particular, X_t és estacionari. Treballarem amb el quadrat del procés X_t^2 . Observem primer que $\mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(\sigma_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$, ho veurem en més detall a la següent proposició. A partir del quadrat del procés tenim

$$\begin{aligned} X_t^2 &= \sigma_t^2 \epsilon_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2) \epsilon_t^2 \\ &= \alpha_0 \epsilon_t^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \epsilon_{t-1}^2 \epsilon_t^2 \\ &= \alpha_0 \epsilon_t^2 + \alpha_1 (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-2}^2) \epsilon_{t-1}^2 \epsilon_t^2 \\ &= \alpha_0 \epsilon_t^2 + \alpha_0 \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 \epsilon_t^2 + \alpha_1^2 X_{t-2}^2 \epsilon_{t-1}^2 \epsilon_t^2 \\ &= \dots \\ &= \alpha_0 \sum_{l=0}^n \alpha_1^l \epsilon_t^2 \cdots \epsilon_{t-l}^2 + \alpha_1^{n+1} \epsilon_t^2 \cdots \epsilon_{t-n}^2 X_{t-n-1}^2 \end{aligned}$$

Demostrarem que el segon terme de la suma tendeix a 0. Si calculem l'esperança d'aquest tenim

$$\mathbb{E}(\alpha_1^{n+1} \epsilon_t^2 \cdots \epsilon_{t-n}^2 X_{t-n-1}^2) = \alpha_1^{n+1} \prod_{l=0}^n \mathbb{E}(\epsilon_{t-l}^2) \mathbb{E}(X_{t-n-1}^2) = \alpha_1^{n+1} \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

on hem fet servir que, en ser $\epsilon_t \sim GWN(0, 1)$, les variables són independents i la variància, igual a l'esperança al quadrat, és 1, a més de fer servir l'estacionarietat pel darrer terme. Ara, aquesta sèrie convergeix a 0 quan $n \rightarrow \infty$ si, i només si, $\alpha_1 < 1$. Aquesta condició garanteix la convergència de la sèrie $\sum_{l=0}^n \alpha_0 \alpha_1^l \epsilon_t^2 \cdots \epsilon_{t-l}^2$, de manera que se satisfà la igualtat $\sigma_t^2 \epsilon_t^2 = X_t^2$, tal i com volíem veure. \square

Proposició 4.5. *La variància no condicionada σ_a^2 és constant per a tot temps t , i té valor $\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$.*

Demostració. Fent servir que el nostre procés és estacionari, tenim

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \mathbb{V}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - (\mathbb{E}(X_t))^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) - 0 \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_a^2 \end{aligned}$$

Reagrupant, $\alpha_0 = \sigma_a^2(1 - \alpha_1)$, i aïllant la variància obtenim:

$$\sigma_a^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \quad \square$$

La condició per garantir l'existència de la variància no condicionada és, doncs, $\alpha_1 < 1$, i en el cas generalitzat serà $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < 1$. També podem veure, a partir de la definició de σ_t^2 , que no podem tenir $\alpha_1 < 0$, ja que, si $|\alpha_1| > \alpha_0$ i és negatiu, en un període en què X_{t-1}^2 sigui gran, podríem tenir un valor de variància negatiu, que no té sentit. Econòmicament, tampoc és consistent: no té sentit que un retorn amb un valor gran redueixi la volatilitat. L'efecte que genera és precisament l'oposat.

Teorema 4.6. *El procés $\{X_t^2\}$ segueix el comportament d'un model $AR(1)$.*

Demostració.

$$\begin{aligned} X_t^2 &= X_t^2 + \sigma_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \sigma_t^2 \epsilon_t^2 + \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \sigma_t^2 (\epsilon_t^2 - 1) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + v_t \end{aligned}$$

Aquesta expressió té la forma d'un model $AR(1)$ si demostrem que $v_t = \sigma_t^2 (\epsilon_t^2 - 1)$ és una variable de soroll blanc centrat. Ens caldrà veure que l'esperança val 0, la variància és finita i constant i, donat un lag $l > 0$, dos instants diferents no estan correlacionats. Primer de tot

$$\mathbb{E}(v_t) = \mathbb{E}(\sigma_t^2 (\epsilon_t^2 - 1)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\sigma_t^2 (\epsilon_t^2 - 1) | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(\sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2 - 1)) = 0$$

ja que $\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = 1$ i σ_t^2 és \mathcal{F}_{t-1} -mesurable. Mirant la covariància tenim

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(v_t, v_{t-l}) &= \mathbb{E}(v_t v_{t-l}) - \mathbb{E}(v_t) \mathbb{E}(v_{t-l}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(v_t v_{t-l} | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(v_{t-l} \mathbb{E}(v_t | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= \mathbb{E}(v_{t-l} \mathbb{E}(\sigma_t^2 (\epsilon_t^2 - 1) | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(v_{t-l} \sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2 - 1)) = 0 \end{aligned}$$

on hem fet servir el mateix argument que en el cas anterior. Per últim, estudiem la variància

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(v_t) &= \mathbb{E}(v_t^2) - (\mathbb{E}(v_t))^2 = \mathbb{E}(v_t^2) = \mathbb{E}(\sigma_t^4 (\epsilon_t^2 - 1)^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\sigma_t^4 (\epsilon_t^2 - 1)^2 | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^4) \mathbb{E}((\epsilon_t^2 - 1)^2) = \mathbb{E}(\sigma_t^4) (3 - 1) = 2\mathbb{E}(\sigma_t^4) \end{aligned}$$

on hem fet servir que $\mathbb{E}((\epsilon_t^2 - 1)^2) = \mathbb{E}(\epsilon_t^4) - 2\mathbb{E}(\epsilon_t^2) + 1 = \mathbb{E}(\epsilon_t^4) - 1$ i aplicant que $\mathbb{E}(\epsilon_t^4) = 3$ en ser el valor de la curtosi d'una $N(0, 1)$. La variància és constant perquè $\mathbb{E}(\sigma_t^4)$ ho és, ja que $\mathbb{E}(X_t^4) = \mathbb{E}(\sigma_t^4 \epsilon_t^4) = \mathbb{E}(\sigma_t^4) \cdot 3$, i com X és estrictament estacionari, $\mathbb{E}(X_t^4)$ és constant, de manera que $\mathbb{E}(\sigma_t^4)$ ha de ser-ho també. \square

Per tal d'estudiar la distribució de les dades, investigarem el comportament de les cues de X_t . Per fer-ho, examinarem el quart moment $\mu_4 = \mathbb{E}(X_t^4)$ per determinar la curtosi.

Proposició 4.7. *El procés X_t segueix una distribució leptocúrtica, i la curtosi pren valor*

$$\kappa = \frac{3(1 - \alpha_1^2)}{(1 - 3\alpha_1^2)}.$$

Demostració. El valor de la curtosi és

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))^4]}{(\mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))^2])^2} = \frac{\mathbb{E}(X_t^4)}{(\mathbb{E}(X_t^2))^2}$$

ja que hem demostrat que el valor de l'esperança no condicionada del procés és 0. Abans hem vist que $\mathbb{E}(X_t^4) = 3 \cdot \mathbb{E}(\sigma_t^4)$, així que només ens queda calcular $\mathbb{E}(\sigma_t^4)$. A partir de la definició de σ_t^2 del model $ARCH(1)$, podem escriure

$$\mathbb{E}(\sigma_t^4) = \mathbb{E}[(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2] = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \mathbb{E}(X_{t-1}^4) + 2\alpha_0 \alpha_1 \mathbb{E}(X_{t-1}^2)$$

Fent servir que $\mathbb{E}(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$ i $\mathbb{E}(X_t^4) = \mathbb{E}(X_{t-1}^4)$ per l'estacionarietat, si resollem la igualtat per $\mathbb{E}(X_t^4)$ obtenim

$$\mathbb{E}(X_t^4) = \mathbb{E}(\sigma_t^4 \epsilon_t^4) = 3 \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \mathbb{E}(X_{t-1}^4) + 2\alpha_0\alpha_1 \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \right) = 3 \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \mathbb{E}(X_t^4) + \frac{2\alpha_0^2\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right)$$

Aïllant el terme $\mathbb{E}(X_t^4)$ ens queda

$$\mu_4 = \mathbb{E}(X_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)} = \frac{3\alpha_0^2(1 - \alpha_1^2)}{(1 - \alpha_1)^2(1 - 3\alpha_1^2)}$$

on μ_4 és el quart moment centrat. Com sabem que $\mu_4 > 0$ i $\alpha_1 < 1$, s'ha de satisfer $0 < \alpha_1 < 1/\sqrt{3}$ per tal que el moment existeixi i sigui finit. Per últim, calculant la curtosi obtenim

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}(X_t^4)}{(\mathbb{E}(X_t^2))^2} = \frac{\frac{3\alpha_0^2(1 - \alpha_1^2)}{(1 - \alpha_1)^2(1 - 3\alpha_1^2)}}{\frac{\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2}} = \frac{3(1 - \alpha_1^2)}{(1 - 3\alpha_1^2)} > 3$$

ja que $1 - \alpha_1^2 > 1 - 3\alpha_1^2$. Així doncs, podem assegurar que la distribució és leptocúrtica, de manera que observarem unes cues més llargues, és a dir, trobarem un major nombre de valors atípics en la nostra informació. \square

4.3 Generalització del model: GARCH

Tot i que la implantació del model ARCH va suposar una revolució en el camp de sèries financeres, quan es modelitzen sèries en què la volatilitat es prolonga en el temps, es requereix un ordre p molt elevat per captar el comportament de manera acurada. Això dificulta molt l'estimació dels paràmetres. El 1986, l'estadístic danès Tim Bollerslev soluciona aquest problema presentant un model en què s'explica la variància condicionada a partir de dues variables, que es coneix com a *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, o *GARCH*(p, q).

Definició 4.8. Un procés $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ és un *GARCH*(p, q) si satisfà les equacions

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \epsilon_t, & t \in \mathbb{Z} \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, & \alpha_0 > 0, \alpha_i, \beta_j \geq 0 \quad \forall i, j \geq 1 \end{cases}$$

on mantenim la hipòtesi $\epsilon_t \sim \text{GWN}(0, 1)$.

De manera similar al que hem vist amb el model ARMA, ara expliquem la volatilitat no només en termes dels quadrats dels valors anteriors, sinó també de la pròpia volatilitat dels darrers períodes.

D'altra banda, tal com passava amb el cas ARCH, es pot demostrar que un procés *GARCH*(p, q) és estrictament estacionari si $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. La demostració es

pot trobar a [6], pàgines 22-26. Aquesta condició ens permetrà explicar certes propietats que satisfà el model, i que ens seran útils per l'anàlisi de dades.

4.3.1 Propietats

De manera anàloga a les propietats pel model $ARCH(1)$, estudiarem les adaptacions al cas del model generalitzat. Estudiem el cas més senzill per facilitar la notació.

Proposició 4.9 (Propietats d'un $GARCH(1,1)$).

1. El procés $\{X_t^2\}$ segueix el comportament d'un model $ARMA(1, 1)$.
2. Sota les condicions $\alpha_0 > 0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0$ i $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, la variància no condicionada és $\sigma_a^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}$.
3. Sota la condició $(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1$, el quart moment de X_t és finit, i la curtosi té valor $\kappa = \frac{3(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3$, pel que també se segueix una distribució leptocúrtica.

Demostració. Per la primera propietat, seguirem les idees del cas ARCH. Partim de l'expressió $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$, sumem un terme $w_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ a ambdues bandes que podem reexpressar com $\sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 (\epsilon_t^2 - 1)$ i fem servir que $w_{t-1} = X_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2 \rightarrow \sigma_{t-1}^2 = X_{t-1}^2 - w_{t-1}$. Reordenem

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 + w_t &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + w_t \\ \sigma_t^2 + X_t^2 - \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + w_t \\ X_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + w_t \\ X_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 (X_{t-1}^2 - w_{t-1}) + w_t \\ X_t^2 &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) X_{t-1}^2 - \beta_1 w_{t-1} + w_t \end{aligned}$$

Aquesta expressió és la d'un model $ARMA(1, 1)$ si demostrem que w_t és un soroll blanc, però w_t és igual al v_t que hem fet servir pel cas $ARCH(1)$, que ja hem vist que ho era. L'estacionarietat del procés X_t ens garanteix que w_t sigui un soroll blanc, és a dir, l'esperança és 0, la variància és constant, i els valors no estan correlacionats.

Analitzem ara la variància no condicionada per explicitar el valor. Hem vist que podem reescriure el nostre model com un $ARMA(1, 1)$ tal que

$$X_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) X_{t-1}^2 - \beta_1 w_{t-1} + w_t$$

Prentem l'esperança a ambdues bandes de la igualtat

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^2) &= \mathbb{E}(\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) X_{t-1}^2 - \beta_1 w_{t-1} + w_t) \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \mathbb{E}(X_{t-1}^2) - \beta_1 \mathbb{E}(w_{t-1}) + \mathbb{E}(w_t) \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \mathbb{E}(X_{t-1}^2) \end{aligned}$$

on fem servir que $\mathbb{E}(w_t) = \mathbb{E}(w_{t-1}) = 0$. Fent servir l'estacionarietat del procés, $\mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(X_{t-1}^2)$, de manera que, aïllant, ens queda

$$\mathbb{E}(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}$$

Estudiem, per últim, la curtosi. Recordem que volem calcular $\frac{\mathbb{E}(X_t^4)}{(\mathbb{E}(X_t^2))^2}$ ja que treballem amb un procés centrat. Per una banda,

$$\mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(\sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2)) = \mathbb{E}(\sigma_t^2) \quad (4.3.1)$$

Acabem de veure quin és aquest valor, de manera que ja tenim una part. Per estudiar el numerador, fem servir el mateix raonament que en el cas de ARCH, de manera que ens queda $\mathbb{E}(X_t^4) = \mathbb{E}(\sigma_t^4 \epsilon_t^4) = 3\mathbb{E}(\sigma_t^4)$. Calculem aquesta esperança a partir de la definició de σ_t^2

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sigma_t^4) &= \mathbb{E}((\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^2) \\ &= \mathbb{E}(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 X_{t-1}^4 + 2\alpha_0 \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1^2 \sigma_{t-1}^4 + 2\alpha_0 \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + 2\alpha_1 \beta_1 X_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \mathbb{E}(X_{t-1}^4) + 2\alpha_0 \alpha_1 \mathbb{E}(X_{t-1}^2) + \beta_1^2 \mathbb{E}(\sigma_{t-1}^4) + 2\alpha_0 \beta_1 \mathbb{E}(\sigma_{t-1}^2) + 2\alpha_1 \beta_1 \mathbb{E}(X_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2) \end{aligned}$$

Fent servir l'equació (4.3.1), la igualtat $\mathbb{E}(X_t^4) = 3\mathbb{E}(\sigma_t^4)$, l'estacionarietat del procés X_t , i aplicant la igualtat

$$\mathbb{E}(X_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2) = \mathbb{E}(\sigma_{t-1}^4 \epsilon_{t-1}^2) = \mathbb{E}(\sigma_{t-1}^4)$$

podem resoldre l'equació sobre $\mathbb{E}(\sigma_t^4)$, de manera que obtenim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sigma_t^4)[1 - 3\alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1] &= \alpha_0^2 + \frac{2\alpha_0^2\alpha_1}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} + \frac{2\alpha_0^2\beta_1}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \\ &= \frac{\alpha_0^2(1 - (\alpha_1 + \beta_1)) + 2\alpha_0^2(\alpha_1 + \beta_1)}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \\ &= \frac{\alpha_0^2(1 + (\alpha_1 + \beta_1))}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \end{aligned}$$

Agrupant-ho tot, calculem la curtosi

$$\begin{aligned} \kappa &= 3 \frac{\frac{\alpha_0^2(1+(\alpha_1+\beta_1))}{(1-(\alpha_1+\beta_1))(1-3\alpha_1^2-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1)}}{\frac{\alpha_0^2}{(1-(\alpha_1+\beta_1))^2}} = 3 \frac{(1 + (\alpha_1 + \beta_1))(1 - (\alpha_1 + \beta_1))}{1 - 3\alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1} \\ &= 3 \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - ((\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2)} > 3 \end{aligned}$$

□

4.4 Test per buscar efectes ARCH

Un cop hem formalitzat la teoria dels models ARCH, és immediat preguntar-se: com puc saber si el meu conjunt de dades presenta heteroscedasticitat? Engle va abordar aquesta mateixa qüestió en presentar el model, i va construir un test per analitzar el que es coneix com a presència d'efecte ARCH. Uns anys més tard, McLeod i Li (1983) presenten una versió més formalitzada. Aquest test és vàlid per qualsevol model lineal, de manera que estudiarem un cas genèric.

Considerem, doncs, un model de la forma $y_t = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \epsilon_t$, on els β_i són els coeficients del model, x_i són les variables independents, y_i la variable dependent i ϵ_t una variable de soroll blanc centrada, és a dir, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_t^2)$. La construcció del test té per hipòtesi nul·la la condició d'homoscedasticitat sobre l'error, mentre que l'alternativa serà que satisfaci l'equació d'un model ARCH.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_t^2 = \alpha_0 = \sigma^2 \\ H_1 : \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \epsilon_{t-p}^2 \end{cases}$$

Sota la hipòtesi nul·la, el nostre model és apte per estimar mitjançant el mètode de mínims quadrats (OLS), de manera que podem aplicar un test que faci servir multiplicadors de Lagrange per treballar sobre els residus del model, $\hat{\epsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$. Per aplicar el test, necessitem construir una regressió amb OLS sobre els quadrats dels residus.

$$\hat{\epsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\epsilon}_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \hat{\epsilon}_{t-p}^2$$

Si no hi ha efecte ARCH, tots els α_i , per $i \geq 1$ hauran de ser 0, de manera que la variància serà constant. Si això passa, la regressió tindrà poca capacitat per explicar les dades, de manera que tindrem un coeficient de determinació R^2 baix. Engle demostra que, sota la condició d'homoscedasticitat, es té la convergència $T \cdot R^2 \sim \chi_p^2$, amb T el nombre d'observacions i p l'ordre del model. Si obtenim que l'estadístic és més gran que $\chi_{p,1-\alpha}^2$, rebutgem H_0 i podem garantir que hi ha heteroscedasticitat, de manera que almenys un dels $\alpha_i, i \geq 1$ són no nuls. Serà necessari, doncs, fer servir un model capaç de tractar l'heteroscedasticitat.

5. ESTIMACIÓ I PREDICCIÓ

Aquest capítol pretén respondre una de les qüestions més importants de l'estudi de sèries temporals: donat un conjunt de dades observades $\{X_1, \dots, X_n\}$, som capaços de predir correctament el valor X_{n+1} ?

Abans de fer-ho, però, serà necessari el plantejament de l'equació o equacions que millor s'ajusten a les nostres dades. Per fer-ho, estudiarem el mètode de pseudo màxima versemblança, una versió una mica menys precisa que el mètode de màxima versemblança estàndard, però, com moltes vegades no es pot treballar amb tota la informació disponible ni es pot explicar en termes d'una distribució coneguda, serà el més efectiu. Analtzarem l'estimació dels models ARCH i GARCH per paràmetres p i q arbitraris, però farem el cas $p = 1 = q$ en detall per tal d'evitar una càrrega de notació.

5.1 Estimació

5.1.1 Estimació de $ARCH(p)$

En l'estimació de models ARCH partim de la hipòtesi de normalitat, és a dir, suposar que la densitat que segueix el procés és la d'una normal, condició que, tot i que sembli molt restrictiva d'entrada, diversos papers, per exemple "Pseudo Maximum Likelihood Methods: Theory"[9] de Christian Goriéroux i altres, donen condicions de regularitat sota les quals podem assegurar que la distribució amb què es treballa per construir l'estimador no és rellevant.

Considerem, per tant, un model $ARCH(1)$ de la forma

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \epsilon_t, & \epsilon_t \sim GWN(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2, & \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0 \end{cases}$$

L'estimació es farà maximitzant els paràmetres α_0 i α_1 . Assumirem la condició de normalitat sobre la densitat condicionada, de manera que escriurem $f_{\alpha_0, \alpha_1}(X)$, amb $X = (X_1, \dots, X_n)$. Si calculem la funció de versemblança sobre X_1 obtenim

$$L(X_1; \alpha_0, \alpha_1) = \prod_{t=2}^n f_{\alpha_0, \alpha_1}(X_t | X_{t-1}) = \prod_{t=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

Aplicant el logaritme a la funció i separant els termes

$$\begin{aligned} \log L(X_1; \alpha_0, \alpha_1) &= -\frac{n-1}{2} \log(2\pi) - \frac{n-1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{X_t^2}{\sigma_t^2} \\ &= -\frac{n-1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\log(\sigma_t^2) + \frac{X_t^2}{\sigma_t^2} \right) \end{aligned}$$

Per tal de procedir amb el mètode, necessitarem derivar respecte de tots dos paràmetres. Per facilitar els càlculs, reemplaçem σ_t^2 per la seva expressió en termes de α_0 i α_1

$$\log L(X_1; \alpha_0, \alpha_1) = -\frac{n-1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\log(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2) + \frac{X_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2} \right)$$

Un cop fet el canvi, comencem amb les derivades

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \alpha_0} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2} - \frac{X_t^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\frac{1}{\sigma_t^2} - \frac{X_t^2}{\sigma_t^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{1}{\sigma_t^2} \left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \\ \frac{\partial \log L}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\frac{X_{t-1}^2}{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2} - \frac{X_t^2 X_{t-1}^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n X_{t-1}^2 \left(\frac{1}{\sigma_t^2} - \frac{X_t^2}{\sigma_t^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{X_{t-1}^2}{\sigma_t^2} \left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

Per tal de trobar els estimadors, és necessari igualar les derivades a 0 i resoldre, però, com el càlcul resulta difícil, recorrerem a les segones derivades.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha_0^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(-\frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2} + \frac{2X_t^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^3} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(-\frac{1}{\sigma_t^4} + \frac{2X_t^2}{\sigma_t^6} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{1}{\sigma_t^4} \left(\frac{2X_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha_1^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n X_{t-1}^2 \left(-\frac{X_{t-1}^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2} + \frac{2X_t^2 X_{t-1}^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^3} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n X_{t-1}^4 \left(-\frac{1}{\sigma_t^4} + \frac{2X_t^2}{\sigma_t^6} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{X_{t-1}^4}{\sigma_t^4} \left(\frac{2X_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha_0 \alpha_1} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(-\frac{X_{t-1}^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2} + \frac{2X_t^2 X_{t-1}^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^3} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n X_{t-1}^2 \left(-\frac{1}{\sigma_t^4} + \frac{2X_t^2}{\sigma_t^6} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{X_{t-1}^2}{\sigma_t^4} \left(\frac{2X_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

Les condicions de primer ordre són $\sum_{t=2}^n \frac{\partial \log L}{\partial \alpha_0} = 0 = \sum_{t=2}^n \frac{\partial \log L}{\partial \alpha_1}$. Sabem també que, com $\mathbb{E}\left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2}\right) = \mathbb{E}(\epsilon_t^2) = 1$, podem calcular

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha_0^2}\right) = \mathbb{E}\left(-\frac{1}{2\sigma_t^4}\right) \mathbb{E}\left(\frac{2X_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right) = \mathbb{E}\left(-\frac{1}{2\sigma_t^4}\right) \mathbb{E}(1) = -\frac{1}{2} \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma_t^4}\right)$$

on l'esperança de σ_t^{-4} queda estimada pel valor $\frac{1}{(n-1) \sum_{t=2}^n (\sigma_t^2)^2}$, de manera que l'estimador té la forma

$$\hat{\mathbb{E}}\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha_0^2}\right) = -\frac{1}{2(n-1)} \sum_{t=2}^n \left(\frac{1}{\sigma_t^4}\right)$$

Amb un procés anàleg, l'estimador per α_1 és de la forma

$$\hat{\mathbb{E}} \left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha_1^2} \right) = -\frac{1}{2(n-1)} \sum_{t=2}^n \left(\frac{X_{t-1}^4}{\sigma_t^4} \right)$$

Si escrivim $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1)$ el vector amb els estimadors, i assumint certes condicions tècniques, els estimadors de màxima versemblança segueixen una distribució normal de manera que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, J^{-1} I J^{-1})$$

amb

$$I = \mathbb{E} \left(\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta^\top} \right)$$

$$J = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right)$$

Quan la distribució de ϵ_t segueix una normal, aleshores $I = J$ i la matriu de covariàncies se simplifica a J^{-1} , l'invers de la Informació de Fisher. D'altra banda, si la distribució és leptocúrtica, l'estimador serà consistent però no eficient.

Pel cas general $ARCH(p)$, el procés és similar amb el nou vector de paràmetres $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$. La dificultat que ens trobem amb la maximització d'aquests és que ara estem buscant la solució d'un problema d'optimització no lineal. A la pràctica, la resolució s'acostuma a fer de manera numèrica.

5.1.2 Estimació de $GARCH(p, q)$

Partim d'un model $GARCH(1, 1)$ que satisfà les equacions

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \epsilon_t, & \epsilon_t \sim GWN(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, & \alpha_0 > 0, \quad \alpha_1, \beta_1 \geq 0 \end{cases}$$

El procediment que seguirem serà anàleg al cas de $ARCH$. El nostre vector de paràmetres és $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$. Les derivades primeres i segones respecte de α_0 i α_1 són les mateixes que hem vist abans, i només ens farà falta calcular les derivades parcials respecte de β_1 . Expressem la funció de versemblança i calculem les derivades

$$\log L(X_1; \alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = -\frac{n-1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\log(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2) + \frac{X_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2} \right)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\frac{\sigma_{t-1}^2}{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2} - \frac{X_t^2 \sigma_{t-1}^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{\sigma_{t-1}^2}{\sigma_t^2} \left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_1^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(-\frac{\sigma_{t-1}^4}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^2} + \frac{2X_t^2 \sigma_{t-1}^4}{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^3} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \frac{\sigma_{t-1}^4}{\sigma_t^4} \left(\frac{2X_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right)\end{aligned}$$

Les condicions de primer ordre són les mateixes que les del cas *ARCH*, tot afegint la condició per β_1 , però ara la matriu Hessiana és més llarga de calcular. Per simplificar, podem escriure la matriu de segones derivades en termes de $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ de la forma

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta \partial \theta^\top} = \frac{1}{2\sigma_t^4} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta^\top} - \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial^2 \sigma_t^2(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} - \frac{X_t^2}{\sigma_t^6} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta^\top} + \frac{X_t^2}{2\sigma_t^4} \frac{\partial^2 \sigma_t^2(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top}$$

Un cop més, sota la mateixa condició que abans per ϵ_t , i assumint estacionarietat estricta per X_t , l'estimador és consistent i $I = J$, i, en cas que la curtosi sigui finita, tenim $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_{p+q-1}(0, J^{-1})$, on N_{p+q-1} és una normal multivariant i J^{-1} és la inversa de la matriu d'Informació de Fisher.

És important ressaltar l'eficiència d'aquest procés. Tot i que el mètode de mínims quadrats sigui l'opció més senzilla en la majoria dels casos per estudiar sèries temporals, quan treballem amb heteroscedasticitat, aquest falla. És per això que es pot fer servir el mètode de mínims quadrats generalitzat, que sí que té en compte la variància no constant. Tal com passa amb el mètode de màxima versemblança, no tenir tota la informació de la sèrie disponible per treballar pot suposar problemes greus si es fan estimacions incorrectes. Aquesta és la raó perquè es fa servir el mètode de pseudo mínims quadrats generalitzat. Cal ressaltar, però, que tal i com es pot veure a [8], pàgina 54, es prova que el mètode de mínims quadrats és menys eficient que el que hem estudiat, comprovant que la variància del mètode de versemblança és menor que la dels mínims quadrats. D'altra banda, a [7] s'explica per què no és eficient estimar el model *GARCH* a partir de la seva representació com un model *ARMA*, tal com hem vist que podem fer a la proposició 4.9.

5.2 Predicció

Un cop som capaços de construir el model que millor s'ajusta a les nostres dades, ja ens podem plantejar la possibilitat d'intentar predir els valors futurs de la sèrie. Assolir aquest objectiu satisfactòriament pot permetre, en el cas de sèries financeres com els preus d'accions, gestionar de manera òptima la nostra cartera i maximitzar beneficis.

L'estratègia més comuna en la predicció de dades es basa en la predicció multi-stage, o predicció iterada. En aquesta, donat un model estimat amb dades fins a temps t , es prediu el valor del temps $t+1$ i s'afegeix al model com si fos un valor més observat. Aquest procés es repeteix de manera iterativa fins a assolir el valor $t+h$ desitjat. El principal problema d'aquest plantejament és que fer servir prediccions per trobar valors més enllà pot ser susceptible a una acumulació d'errors molt greu. Un error de predicció en els primers

passos del procés es propaga ràpidament en les prediccions futures, de manera que els resultats poden acabar molt esbiaixats. Tot i això, estudiarem la predicció per un nombre qualsevol de passos endavant.

Com l'objectiu és conèixer valors tan llunyans com sigui possible, ens centrarem a predir els valors per temps $n + h$ amb $h \geq 2$. El cas $h = 1$ es pot trobar a [10]. Considerem una sèrie temporal $\{X_t\}$ amb mitjana 0 i estrictament estacionària. Sigui \mathcal{F}_n el conjunt de dades observades fins a temps n , és a dir $\mathcal{F}_n = \{X_t, 1 \leq t \leq n\}$, el predictor òptim de X_{n+h}^2 basat en \mathcal{F}_n és la mitjana condicionada de la forma

$$\widehat{X_{n+h}^2} = \mathbb{E}(X_{n+h}^2 | \mathcal{F}_n)$$

Donat un model $ARCH(p)$ de forma

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \epsilon_t, & \epsilon_t \sim GWN(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2, & \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \geq 1 \end{cases}$$

El cas $h = 2$ serà la nostra base. Expressem X_{n+1} i X_{n+2} en termes de l'expressió del model ARCH

$$X_{n+1} = \sqrt{\sigma_{n+1}^2} \epsilon_{n+1}, \quad \text{amb } \sigma_{n+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_n^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p+1}^2$$

$$X_{n+2} = \sqrt{\sigma_{n+2}^2} \epsilon_{n+2}, \quad \text{amb } \sigma_{n+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n+1}^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p+2}^2$$

Podem reescriure X_{n+1} com una funció en termes de les observacions passades i del terme d'error desconegut ϵ_{t+1} , de manera que

$$X_{n+1} = \epsilon_{n+1} \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_n^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p+1}^2} = f_1(X_n, \dots, X_{n-p+1}; \epsilon_{n+1})$$

Repetint el procés per X_{n+2} , però fent servir l'expressió que hem trobat per X_{n+1} , obtenim

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= \epsilon_{n+2} \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n+1}^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p+2}^2} \\ &= \epsilon_{n+2} \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{n+1}^2 (\alpha_0 + \alpha_1 X_n^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p+1}^2) + \alpha_2 X_n^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p+2}^2} \\ &= f_2(X_n, \dots, X_{n-p+1}; \epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+2}) \end{aligned}$$

Aquest procés es pot estendre per tants h com vulguem expressant el valor X_{n+h} com una funció en termes de les observacions $\{X_1, \dots, X_n\}$ i els termes futurs $\{\epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{n+h}\}$, obtenint $X_{n+h} = f_h(X_1, \dots, X_n; \epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_{n+h})$. Com \mathcal{F}_n és conegut, podem ometre aquests termes, de manera que el predictor en l'instant $n + h$ quedarà com una funció de forma

$$X_{n+h} = f_h(\epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_{n+h}), \quad h \geq 1 \quad (5.2.1)$$

Sigui ara el quadrat de la funció f_h^2 , a partir de la suposició $\{\epsilon_t\} \sim GWN(0, 1)$, la distribució condicionada $F_{f_h^2}$ es pot derivar per obtenir f_h^2 . Per tant, el predictor òptim de X_{n+h}^2 es calcula fàcilment a partir de $F_{f_h^2}$.

$$\widehat{X_{n+1}^2} = \mathbb{E}[\epsilon_{n+1}^2 (\alpha_0 + \alpha_1 X_n + \dots + \alpha_p X_{n-p+1}^2) | \mathcal{F}_n] = \alpha_0 + \alpha_1 X_n^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p+1}^2$$

$$\widehat{X_{n+2}^2} = \mathbb{E}[\epsilon_{n+2}^2(\alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{n+1}^2 \epsilon_{n+1}^2 + \alpha_2 X_n^2 \dots + \alpha_p X_{n-p+2}^2) | \mathcal{F}_n] = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{n+1}^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p+2}^2$$

A partir de la condició $\mathbb{E}(\epsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = 1 = \mathbb{E}(\epsilon_{n+2}^2 | \mathcal{F}_n)$, podem escriure $\widehat{X_{n+1}^2} = f_1^2(\epsilon_{n+1}^2 = 1)$ i $\widehat{X_{n+2}^2} = f_2^2(\epsilon_{n+1}^2 = 1, \epsilon_{n+2}^2 = 1)$. Aquesta funció es pot generalitzar per tot $n + h$.

Si els termes d'error $\{\epsilon_{n+h}, h \geq 1\}$ segueixen una densitat coneguda, denotant F_ϵ la seva distribució, es poden generar els valors $\{\epsilon_{n+1}^*, \dots, \epsilon_{n+h}^*\}$ a partir de simulacions de Monte Carlo, i aplicant-los a l'equació (5.2.1) podem obtenir un valor estimat X_{n+h}^* . Repetint aquest procés un número arbitrari de vegades M , podem obtenir els valors estimats $\{X_{n+h}^{(1)}, \dots, X_{n+h}^{(M)}\}$ i calcular el predictor òptim a partir de la mitjana del conjunt $\{X_{n+h}^{2(1)}, \dots, X_{n+h}^{2(M)}\}$.

Aquests resultats han sigut una simplificació dels casos més generalitzats. Les explicacions tècniques i els exemples més complexos, com el cas en què es desconeix la distribució dels termes d'error, s'allunyen dels objectius del treball, però es poden trobar a [4].

6. PROCÉS D'AJUSTAMENT D'UNA SÈRIE TEMPORAL

Davant el marc teòric observat fins al moment, és immediat preguntar-se: quin és el model que s'ajustarà millor a la informació? Com puc aconseguir les prediccions òptimes? Aquest serà el darrer capítol abans de passar a l'estudi d'un cas real. Definirem i explicarem totes les eines necessàries per a una correcta anàlisi de sèries temporals. Per ajudar a facilitar la tasca, Box i Jenkins van proposar al seu llibre un procediment per poder discernir entre els paràmetres i estimadors òptims. Es coneix com el mètode de Box-Jenkins.

Cal remarcar que la simplificació del model que es faci servir és clau per poder dur a terme l'estudi: un model amb massa paràmetres i variables pot comportar molts errors i acabar esbiaixant els resultats, a més de la possible elevada dificultat a l'hora de fer l'estimació de tots els paràmetres, així que serà important trobar l'equilibri entre un model relativament senzill i capaç de donar resposta a totes les nostres preguntes.

Per tal d'abordar aquest procés, seguirem els tres passos del mètode de Box-Jenkins, però amb modificacions per poder tractar els models ARCH.

6.1 Identificació i selecció

En aquesta primera fase, l'objectiu és fer l'anàlisi més superficial de les nostres dades. Les principals eines que farem servir seran les funcions d'autocorrelació i autocorrelació parcial. També estudiarem característiques bàsiques de la sèrie temporal per veure amb quin tipus d'informació estem tractant, aplicarem tests per assegurar-nos i farem correccions sobre les dades si fos necessari.

6.1.1 Funció d'autocorrelació

Recuperant la definició 2.4 del capítol 2, la funció d'autocorrelació (ACF en anglès) ens indica la dependència que té el valor de la sèrie en el temps t respecte dels k valors anteriors, és a dir, donat X_t , amb quina intensitat depèn el valor respecte de $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k}$. Representar gràficament la funció d'autocorrelació és una eina senzilla per poder trobar ràpidament els elements sobre els quals la nostra variable basa principalment el seu valor.

A [1] es demostra com, donat un model $ARMA(p, q)$ estacionari de la forma $\Phi_p(B)X_t = \theta_q(B)\epsilon_t$, la funció d'autocorrelació satisfà

$$\Phi_p(B)\rho_k = 0, \quad k > q$$

Gràcies a aquest resultat, podem tenir una primera intuïció de l'ordre de model $MA(q)$ de manera visual. És necessari contrastar aquesta suposició amb tests. A [1] també es menciona que, donat un model estacionari en què cap de les arrels és propera a la frontera del cercle unitat, la funció d'autocorrelació decreix ràpidament per un nombre moderat de

lags. En cas contrari, el decreixement de la ACF és molt més lent i lineal. Donada aquesta situació, és convenient tractar el nostre procés com a no estacionari, i caldrà aplicar criteris de correcció, per exemple aplicant diferenciació.

Exemple 6.1. Partim d'un model $MA(1)$ de forma $X_t = \epsilon_t - 0.7\epsilon_{t-1}$ generat amb dades aleatòries.

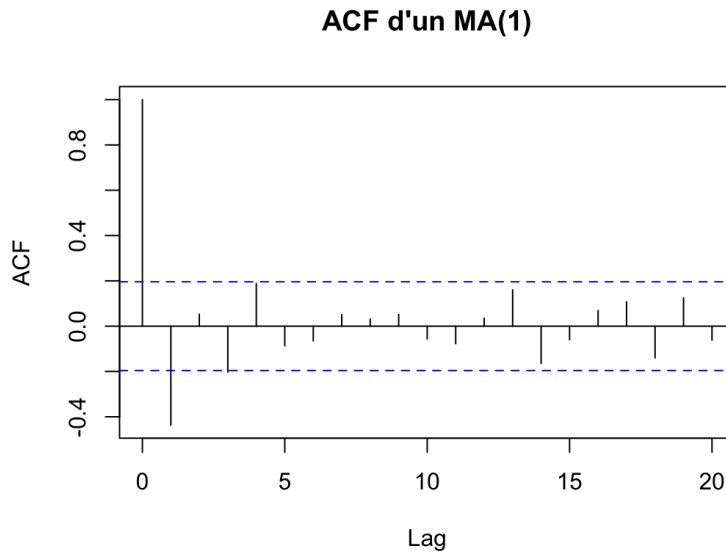


Figura 6.1: ACF d'un model $MA(1)$

Per tal de determinar la correlació, farem servir la línia de punts blava, que ens indica el nivell de significació. En aquest cas és del 95%. Tot valor que es trobi per sobre d'aquest serà significatiu al 5%, així que el tindrem en compte. El lag 0 fa referència a la correlació del valor actual amb ell mateix. En conseqüència, sempre és 1. Observem al gràfic que només hi ha un valor significatiu, el corresponent al lag 1, de manera que és lògic concloure que l'ordre del model MA serà 1.

6.1.2 Funció d'autocorrelació parcial

A diferència de la ACF, ara ens centrem en la dependència que té el valor en temps t respecte d'un lag concret, sense tenir en compte tots els valors entremig. Si estudiem, per exemple, la relació entre el temps t i un lag k , analitzem la dependència directa del valor de X_t sobre X_{t-k} , eliminant la influència dels valors $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$. Hi ha diversos mètodes per calcular la funció d'autocorrelació parcial (PACF en anglès), però ens centrarem en el mètode recursiu anomenat algoritme de Durbin-Levinson, que segueix les fórmules

$$\begin{cases} \phi_{1,1} = \rho(1) \\ \phi_{n,n} = \frac{\rho(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \phi_{n-1,k} \cdot \rho(n-k)}{1 - \sum_{k=1}^{n-1} \phi_{n-1,k} \cdot \rho(k)} \end{cases}$$

on $\phi_{n,k} = \phi_{n-1,k} - \phi_{n,n} \cdot \phi_{n-1,n-k}$ per $1 \leq k \leq n-1$ i on $\rho(n)$ és la funció d'autocorrelació. En la representació gràfica de la PACF podem intuir l'ordre de la funció $AR(p)$, on p serà el número de lags significatius. La idea darrere d'aquest criteri surt de les pròpies definicions de PACF i la construcció del model AR: sabem que un $AR(p)$ és de la forma $X_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \epsilon_t$, on el valor actual depèn dels p valors anteriors. La PACF mesura quin és el darrer lag amb informació rellevant per al valor actual.

Exemple 6.2. Partim d'un model $AR(2)$ de forma $X_t = 0.4X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + \epsilon_t$, generat amb dades aleatòries.

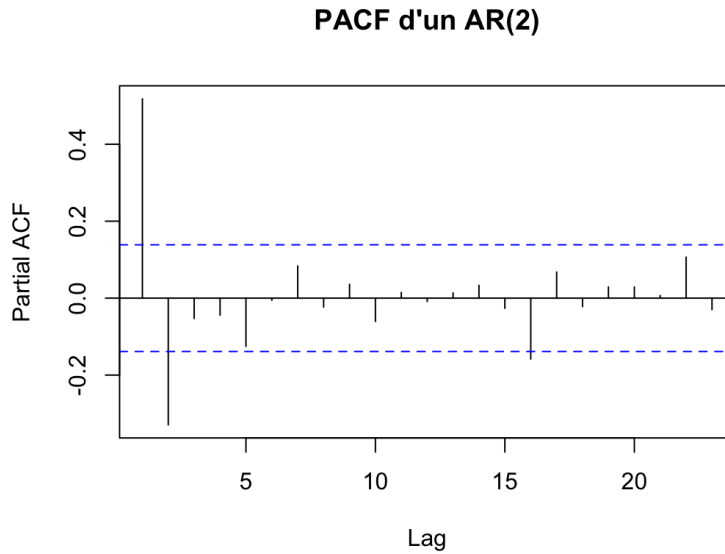


Figura 6.2: PACF d'un model $AR(2)$

En aquesta gràfica es comença directament pel lag 1. Observem dos lags amb nivell de significació del 5%, el primer i el segon, així que es confirma que l'ordre del model és 2. Podríem argumentar que el lag 16 també és significatiu, però, donat que la diferència amb els altres dos és massa gran, no el tindrem en compte. En tot cas, i per tal d'assegurar-se, es poden aplicar tests per veure l'eficiència del model estimat.

6.1.3 Test de Dickey-Fuller

Durant tot el treball hem parlat de la condició d'estacionarietat, clau per poder modelitzar correctament les nostres dades. Un model ARIMA que no satisfaci aquesta condició presentarà greus problemes de fiabilitat, per la qual cosa serà imprescindible poder garantir-la. Hem vist que la funció d'autocorrelació ens pot donar una intuïció, però per tal d'assegurar-nos, farem servir el test de Dickey-Fuller, que té per objectiu estudiar la presència d'arrels de la unitat en la sèrie. Farem el cas més senzill, suposarem un model $AR(1)$ de la forma $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t$, amb $|\phi_1| \leq 1$ i ϵ_t un soroll blanc. L'objectiu és poder

discernir el cas en què $\phi_1 = 1$ dels casos $\phi_1 < 1$, on el procés sí és estacionari. Reescrivim el model restant a ambdues bandes X_{t-1}

$$X_t - X_{t-1} = (\phi_1 - 1)X_{t-1} + \epsilon_t$$

Fent servir el *backward shift operator* B i anomenant $\rho = \phi_1 - 1$, tenim l'expressió

$$(Id - B)X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t$$

Ara, la hipòtesi nul·la serà $H_0 : \rho = 0$, de manera que no hi haurà estacionarietat i el procés és un passeig aleatori, i $H_1 : \rho < 0$, garantint estacionarietat. Les hipòtesis es poden expressar també en funció de la condició d'arrel de la unitat, on la nul·la implica presència d'una arrel unitària, i l'alternativa implica que l'arrel es troba fora de $|z| = 1$. Aquest test fa servir l'estadístic de Dickey-Fuller. Sota la hipòtesi nul·la, l'estadístic té la forma

$$\hat{\rho} = DF_n = n \frac{\sum_{i=1}^n X_{i-1}(X_i - X_{i-1})}{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2}$$

El valor crític del test al 5% és de -1.94 , de manera que, si el nostre estadístic és més petit, rebutgem la hipòtesi nul·la i assegurem que el procés és estacionari. Aquest test es pot generalitzar per un procés $ARMA(p, q)$ i la demostració es pot trobar a [11], on es compara l'estadístic amb un valor crític al 5% de -2.86 . El test es coneix com a *Augmented Dickey-Fuller test*, o ADF.

6.1.4 Test de Ljung-Box

L'objectiu de la construcció d'un model adient és poder predir valors futurs, però quan les dades passades no ens donen informació per determinar el que passarà, no tenim res a modelitzar. És per això que és imprescindible comprovar si la nostra sèrie temporal segueix el comportament d'un soroll I.I.D, ja que, en cas de fer-ho, el nostre estudi haurà acabat. Per tal de fer aquesta comprovació, farem servir el test de Ljung-Box, amb les hipòtesis

$$\begin{cases} H_0 : \text{Les dades es distribueixen de manera independent} \\ H_1 : \text{Les dades presenten algun tipus de correlació} \end{cases}$$

El test es basa en l'estadístic

$$Q_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}^2(k)}{n-k}$$

on n és el número total d'observacions, $\hat{\rho}(k)$ és la funció d'autocorrelació i h és el número de lags respecte dels quals estudiem si hi ha correlació. Sota la hipòtesi inicial, $Q_{LB} \sim \chi_{h-p-q}^2$, amb p i q els ordres del model. Prenent un nivell α , normalment 0.05, en cas que $Q_{LB} > \chi_{1-\alpha, h-p-q}^2$, rebutgem la hipòtesi nul·la i assegurem que les dades presenten correlació.

Tot i ser menys acurat, una manera ràpida de comprovar si la nostra mostra segueix la d'un soroll I.I.D és a partir de la ACF: es considera que si més del 5% dels lags presenten significació, no podem assegurar que la mostra sigui un soroll I.I.D. En canvi, si tots es troben per sota del nivell de significació, podem garantir-ho i acabar l'estudi.

6.1.5 Test de Shapiro-Wilk

La hipòtesi de soroll blanc Gaussià per certes components dels models ARCH és una de les més importants a satisfer. Per poder contrastar-la, farem servir el test de Shapiro-Wilk, que té per hipòtesi nul·la que els valors de la mostra segueixen una distribució normal. Calculem l'estadístic del test

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

on els $x_{(i)}$ són els valors ordenats de manera creixent, \bar{x} és la mitjana de la mostra i els a_i són coeficients calculats a partir d'una mostra normal teòrica fent servir la mitjana i variància, i que es calculen en funció del número de dades amb què treballem. Podem trobar aquests valors ja calculats a <https://real-statistics.com/statistics-tables/shapiro-wilk-table/>, per exemple. Un cop tenim W calculat, necessitem trobar el seu p-value associat, buscant també a les taules que es poden trobar a l'enllaç anterior. Quan l'hem trobat, es compara amb el nivell de significació desitjat, normalment $\alpha = 0.05$. En cas que el p-value sigui superior, acceptem la hipòtesi nul·la i assegurem que la distribució és normal. El cas contrari només ens especifica que la distribució no és normal, però no ens dona cap més informació.

6.1.6 Test del gràfic Q-Q

Un mètode gràfic amb el qual comprovar si les nostres dades segueixen una distribució coneguda és el test del gràfic Q-Q. L'objectiu és analitzar si la distribució de les nostres dades s'assimila a alguna que sapiguem. En el nostre cas serà útil comparar la distribució de la mostra amb la d'una normal. Posarem a l'eix Y els valors observats de manera creixent, i a l'eix X els de la normal. Si els punts (x, y) es disposen de manera semblant a una recta, podem concloure que la nostra mostra segueix una distribució normal.

6.2 Estimació dels paràmetres del model i aplicació de tests

Un cop hem dut a terme l'anàlisi més significativa de les dades, intentarem explicar aquestes en termes d'un model el més acurat possible. A partir de les opcions que hem vist, i mitjançant les funcions ACF i PACF, podem fer-nos una idea de quins serien els ordres que millor s'ajusten a les dades. Abans d'escollir el millor model, caldrà tenir en compte si un

ARIMA és capaç d'interpretar correctament totes les dades. Per comprovar-ho, estudiem l'heteroscedasticitat, tal com hem vist a la secció 4.4. En funció dels resultats, caldrà tenir en consideració si hem de fer servir la família de models ARCH. En la pràctica, l'elecció dels models es basa en l'aplicació de tests en els quals obtenim una puntuació, i escollim aquell que obtingui una millor "score". En els tests que estudiarem, les més petites. Així doncs, el procés de selecció es fa a força bruta.

6.2.1 Test Akaike Information Criterion (AIC)

El test AIC ens permet obtenir una puntuació en funció dels elements que componen el model, és a dir, és una eina per quantificar la qualitat del model. Segueix la fórmula

$$AIC = 2k - 2 \ln(\hat{L})$$

on k fa referència a la suma de tots els paràmetres emprats i \hat{L} és l'estimador de màxima versemblança. A partir de l'expressió, i tenint en compte que volem minimitzar el valor del test, es premia un número reduït de paràmetres i la capacitat de l'estimador d'ajustar les dades de la millor manera possible. El sobreajustament de les dades donat per fer servir un elevat número de paràmetres afectarà molt negativament a l'score, de manera que serà necessari trobar un equilibri. També cal destacar que el test només és útil quan comparem l'score amb altres casos, de manera que serà necessari aplicar-lo a diferents opcions de models.

6.2.2 Test Bayesian Information Criterion (BIC)

El funcionament d'aquest test és molt similar al de l'AIC. Segueix la fórmula

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(\hat{L})$$

A diferència del cas anterior, ara es té en consideració la mida de la mostra amb què treballem, i pondera el pes respecte del nombre de paràmetres que escollim. Així doncs, el BIC penalitza amb molta més força el "overfitting".

6.3 Anàlisi de resultats i Forecasting

Havent fet tot l'estudi tècnic de la informació, és necessari que ens assegurem que els resultats compleixin les condicions requerides. Analitzarem els residus que s'obtinguin del model, i comprovarem que aquests ja no aporten més informació significativa, de manera que haurem d'estudiar si es tracten o no de soroll blanc. També comprovarem si el model teòric construït és capaç de captar els períodes més volàtils de la sèrie. Caldrà fer èmfasi, per tant, en la volatilitat en els períodes més explosius. És important destacar que els models ARCH no són perfectes, de manera que un ajustament de les dades del 100% és

gairebé impossible d'assolir, però l'objectiu serà minimitzar les mostres que es quedin fora del nostre abast.

Un cop fet, només ens quedarà intentar predir possibles valors futurs de la sèrie. Les estimacions seran en períodes curts de temps per evitar un excés d'error en els resultats. Normalment, aquests es donen en forma de gràfic, en el qual assenyalem un valor estimat i sobre el qual estimem una regió la més acurada i petita possible en què s'hauria de trobar el nostre valor. Per veure si el resultat és òptim, és recomanable fer proves amb valors ja coneguts i comparar els resultats teòrics amb els reals. També és important dir que, depenent del cas que estudiem, la predicció pot no ser tan rellevant, de manera que tenir un model acurat de cara als futurs esdeveniments pot ser suficient.

7. ESTUDI PRÀCTIC

Per concloure aquest treball, farem servir tota la teoria matemàtica i computacional que hem anat estudiant per tal de modelitzar, de la manera més acurada possible, dues sèries financeres. Per tal de fer-ho, farem servir el software estadístic R , que ens facilitarà tots els càlculs i procediments necessaris de manera automàtica per a una correcta avaluació de les nostres dades. Seguirem els passos del capítol anterior i anirem extraient tota la informació possible de la mostra amb què treballarem.

7.1 Preu d'accions del Banc d'Amèrica

La primera sèrie que estudiarem serà el preu de cotització en borsa del Banc d'Amèrica (BAC) dels darrers deu anys. Primer de tot, tota la informació que farem servir al llarg de l'estudi ha estat extreta de la pàgina <https://es.finance.yahoo.com/quote/BAC/>. Extraient les dades i passant-les al software R , observem que la informació ens ve donada de la següent manera

	BAC.Open	BAC.High	BAC.Low	BAC.Close	BAC.Volume
2015-03-20	15.70	15.93	15.64	15.84	99867700
2015-03-23	15.82	15.88	15.72	15.72	73773500
2015-03-24	15.73	15.80	15.61	15.61	77011000
2015-03-25	15.63	15.65	15.40	15.41	88541500

	BAC.Open	BAC.High	BAC.Low	BAC.Close	BAC.Volume
2025-03-14	40.26	41.02	40.17	40.89	35979900
2025-03-17	40.92	41.77	40.59	41.44	37242800
2025-03-18	41.72	41.83	41.29	41.65	37644500
2025-03-19	41.72	42.70	41.30	42.21	42471100

Figura 7.1: Dades del BAC entre el 20 de març del 2015 i el 19 de març del 2025

A la taula se'ns mostren, a les columnes, els cinc valors més útils a conèixer: els preus d'obertura, el màxim, mínim, preus de tancament i nombre d'accions en el dia, respectivament. Aquesta és una petita mostra de les primeres i darreres quatre mostres de les 2515 observacions amb què treballarem. Tot i que la resta de paràmetres són interessants d'estudiar, al llarg de l'estudi ens centrarem en el preu de tancament, en dòlars, de cada dia, i serà el que considerarem com a observació en cada instant de temps, que correspondrà a un dia. Centrant-nos en aquest, analitzem algunes de les estadístiques més significatives.

	Mínim	Màxim	Mitjana	Mediana	Desv. típica	Curtosi
Tancaments	11.16	49.38	29.51589	29.3	8.89359	2.37479

Taula 7.1: Estadístiques dels tancaments de BAC

Veiem com els preus de tancament oscil·len entre els 11,16\$ i els 49,38\$ per acció, el valor mitjà és de 29,51\$, molt proper a la mediana, i amb una desviació típica de gairebé 9 i

una curtosi per sota de la d'una distribució normal.

Abans d'endinsar-nos en tota una anàlisi tècnica al voltant d'aquestes dades, és imprescindible recordar una de les condicions més essencials per aplicar els models estudiats: l'estacionarietat. Anem a fer primer un estudi superficial a partir de la gràfica dels preus de tancament.

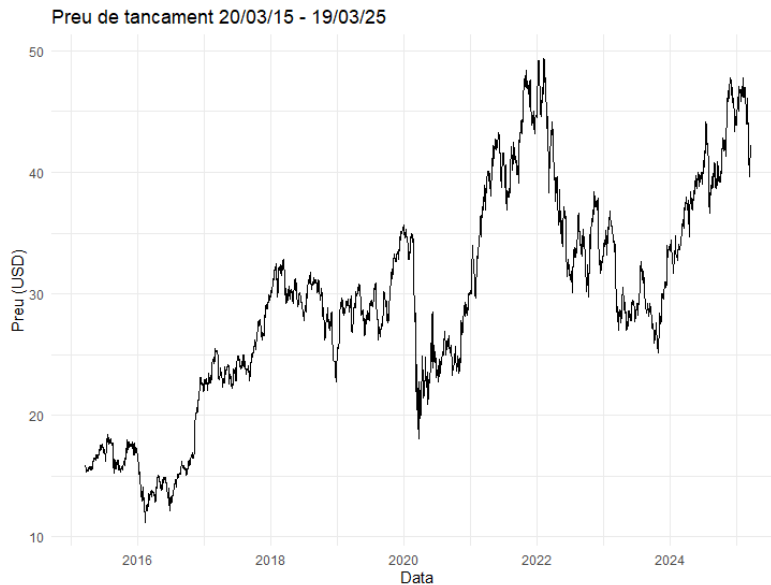


Figura 7.2: Gràfic dels preus de tancament de BAC

Podem observar, a grans trets, una relativa tendència ascendent dels preus al llarg dels deu anys, però són més que evidents les caigudes abruptes, en especial els anys 2020 i 2022, i en una menor mesura, el 2016. Posem en context la situació mundial econòmica i les repercussions sobre el banc en aquests tres períodes:

- Just abans d'acabar el 2015, el preu del barril de petroli es trobava en baixada per tercer any consecutiu, especialment aquest últim any, on estava sent més dràstica. Aquesta situació va comportar seriosos problemes en les empreses d'energia dels Estats Units: la demanda de petroli a escala mundial s'havia reduït, fent baixar els preus, i les petites i mitjanes empreses del país van patir una sobreabundància del cru que s'extreia al país. Els anys anteriors, els Estats Units estaven en un període de forta expansió, i els bancs van proporcionar molts crèdits per fomentar l'economia. En no poder vendre el seu producte, el risc d'impagaments es va convertir en realitat, i els accionistes van creure que aquesta situació causaria pèrdues gegants als bancs, de manera que van decidir vendre les seves accions. El febrer del 2016 és quan el preu de l'acció assoleix el seu mínim històric. Tot i la caiguda, al final de l'any el preu va pujar fins a un 30%, principalment per l'estabilització i, més tard, augment en el preu del petroli.

- La situació derivada de la Covid-19 va ser la causant d'una nova caiguda dràstica de preus. Un cop més, la baixada extrema del preu del petroli, principalment causada perquè aquest no era necessari per al transport, va tornar a causar greus problemes a les empreses energètiques, tot just com havia passat només feia quatre anys. A més, els preus de tota mena d'accions van començar a desplomar-se davant una situació d'incertesa sense precedents. Una nova onada de possibles impagaments, sumat a la reducció de les taxes d'interès als Estats Units al gairebé 0%, una de les principals fonts d'ingressos del banc, van ajuntar-se provocant un enfonsament del preu.
- Per últim, la darrera caiguda de preus, entre el 2022 i finals del 2023, va ser provocada principalment per la inflació. La guerra entre Rússia i Ucraïna va ser un dels factors més importants: els preus de molts aliments, tals com el blat, del qual Ucraïna n'és gran exportadora i el gas natural, molt abundant a Rússia, van generar una forta inflació que va afectar a tot el planeta. Per compensar la situació, els Estats Units van pujar els tipus d'interès, que es trobaven en mínims històrics per la Covid i molts bons (*bonds*) comprats pel país, entre altres actius financers, van perdre molt valor. A més, va començar una tendència general per part dels inversors a centrar els seus diners en el sector tecnològic, i es va començar a deixar de banda aquells actius més "tradicionals", principalment perquè encara persistia la por per possibilitat d'impagaments.

Aquestes caigudes, en conjunt amb les seves corresponents recuperacions, són un indicador més que evident de la possible manca d'estacionalitat de la sèrie. Per tal d'assegurar-nos, podem aplicar el test de Dickey-Fuller a la nostra sèrie.

```

Augmented Dickey-Fuller Test

data: tancament$BAC.Close
Dickey-Fuller = -2.6773, Lag order = 13, p-value = 0.2916
alternative hypothesis: stationary

```

Figura 7.3: Test ADF sobre la sèrie de tancaments de BAC

Podem observar com el p-value obtingut és de 0.2916, molt per sobre del 0.05 necessari per rebutjar la hipòtesi nul·la. Confirmem, per tant, la nostra sospita i assegurem que la sèrie no és estacionària.

Per arreglar aquesta situació, és necessari fer una transformació de les dades. Com hem comentat prèviament, en aquesta i la majoria de les sèries temporals financeres, l'eina que es farà servir és transformar els nostres preus de tancament en retorns. En el nostre cas, calculant els retorns simples diaris en tindrem prou. Recordem que aquest es calcula com $r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$. Un cop fet, passem a observar la representació gràfica de la nova sèrie.

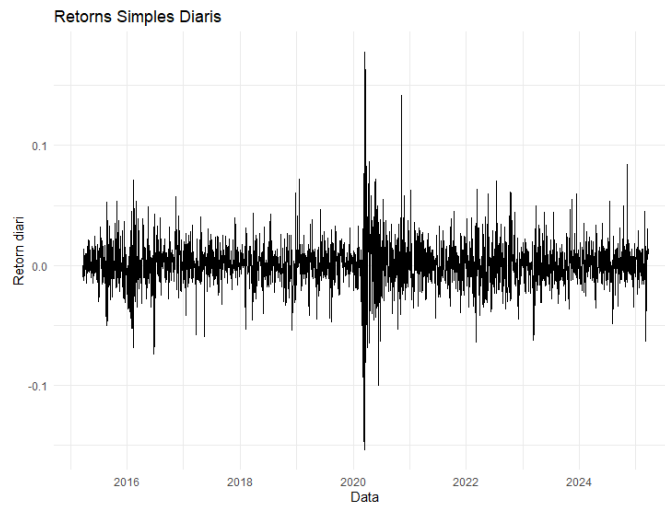


Figura 7.4: Gràfic dels retorns simples diaris de BAC

Aplicant ara el test de Dickey-Fuller obtenim un p-value menor a 0.01, de manera que ja tenim estacionarietat. Calculem també algunes de les dades estadístiques més significatives.

	Mínim	Màxim	Mitjana	Mediana	Desv. típica	Curtosi
Retorns	-0.15397	0.17796	0.00058	0.00029	0.01958	13.00978

Taula 7.2: Estadístiques dels retorns simples de BAC

Podem veure, primer de tot, una mitjana molt propera a 0, però que no considerarem nul·la, uns valors de màxim i mínim que corresponen a la gran pertorbació que podem veure a sobre de l'any 2020, una desviació de gairebé 0.02 i una curtosi molt superior a 3. També ens serà útil estudiar l'histograma dels retorns.

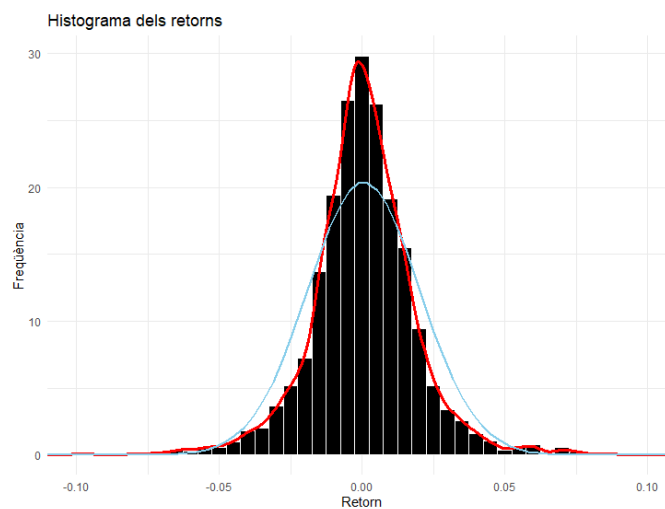


Figura 7.5: Histograma dels retorns

La línia blava fa referència a una distribució $N(0, 1)$ i la vermella a la qual millor s'ajusta per les nostres dades. Observem com hi ha una major concentració de valors al voltant de la mitjana i la presència de cues relativament pesades. Sabem que hi ha valors extrems perquè es plasmen perfectament a la gràfica dels retorns, de manera que és normal que es presentin també a l'histograma. La curtosi de 13 és consistent amb la gràfica leptocúrtica. Estudem ara la gràfica dels retorns quadrats.

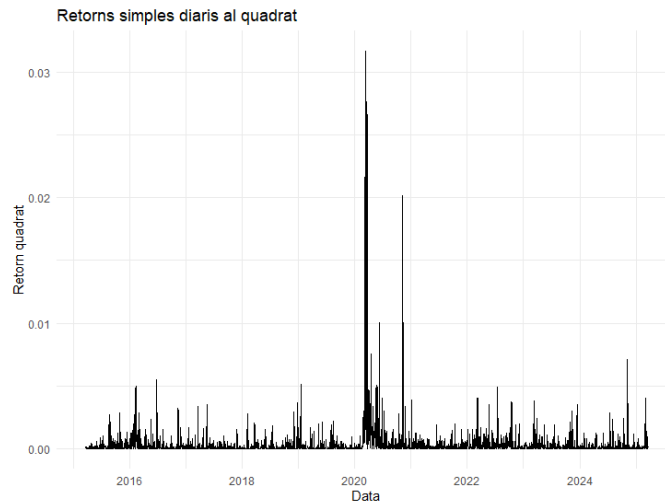


Figura 7.6: Gràfic dels retorns al quadrat simples diaris de BAC

La figura ens permet confirmar l'efecte del *volatility clustering*: en moments de calma en què els preus no varien excessivament, la volatilitat es manté constant i no s'eleva gairebé res. En canvi, en períodes extrems, especialment en caigudes fortes de preus, es produeixen pics molt importants en la volatilitat, i aquests s'agrupen, tal com podem apreciar. Aquest és un bon indicador d'heteroscedasticitat. Podem veure també, de manera més que evident, el fortíssim efecte que va tenir la COVID-19 en el preu de les accions.

Comencem ara amb l'estudi en profunditat de les dades. La gràfica de la sèrie de retorns 7.4 serà la clau per explicar i contextualitzar molts dels conceptes que hem estudiat al llarg del treball. Per tot instant de temps, cada retorn es pot expressar com la suma del valor de la mitjana més un terme de pertorbació, que acostumem a anomenar *shock* o residu. Matemàticament, ho podem expressar com $r_t = \mu_t + \eta_t$. A partir d'aquesta idea, si identifiquem correctament l'estructura de la mitjana i del residu, el nostre retorn quedarà completament determinat. Analitzem primer les funcions d'autocorrelació i autocorrelació parcial dels retorns de la sèrie.

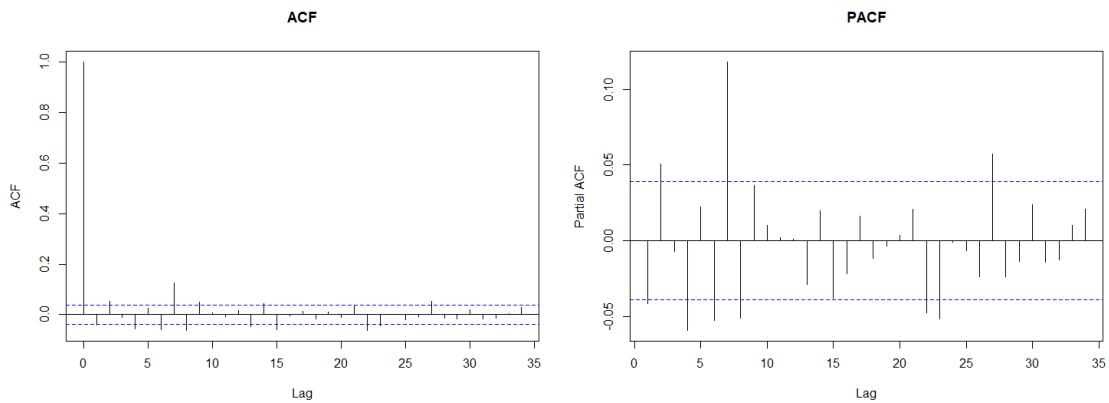


Figura 7.7: Funcions d'autocorrelació i autocorrelació parcial dels retorns de BAC

Observem que ambdues funcions presenten una gran quantitat de lags significatius, un indicador clar de la presència de components autoregressives al model. En la nostra definició del retorn, però, on cap aquesta component? La resposta és a la mitjana. Al llarg del treball hem parlat d'un model ARCH/GARCH com aquella sèrie que sembla un soroll blanc però amb heteroscedasticitat. Les gràfiques que acabem de veure indiquen un comportament que s'allunya molt de l'esperat per un soroll blanc, ja que hi ha clars signes de correlació lineal entre les variables. Per tant, la primera qüestió a tractar és modelitzar aquestes dades tenint en compte aquest fet. Per fer-ho, un model ARMA serà necessari. Aquesta unió entre una component ARMA i una component GARCH dona lloc a un model mixt anomenat ARMA-GARCH. És per això que el primer que mirem és com modelitzar la component ARIMA. El software R s'encarregarà de fer aquesta selecció automàticament. Fent servir la funció `auto.arima` sobre les nostres dades de retorns, obtenim que el millor model per ajustar les dades és un $ARIMA(0,0,2)=MA(2)$, amb els següents coeficients

```
ARIMA(0,0,2) with non-zero mean
Coefficients:
      ma1      ma2      mean
-0.0379  0.0574  6e-04
s.e.    0.0199  0.0209  4e-04

sigma^2 = 0.0003818: log likelihood = 6330.18
AIC=-12652.36  AICc=-12652.34  BIC=-12629.04
```

Figura 7.8: Millor estimació de les dades de BAC amb un model ARIMA

Un cop construït el model ARIMA base, la qüestió immediata és comprovar si hi ha cap estructura més amagada a les nostres dades. Analitzarem les funcions ACF i PACF dels retorns al quadrat per tenir una primera intuïció.

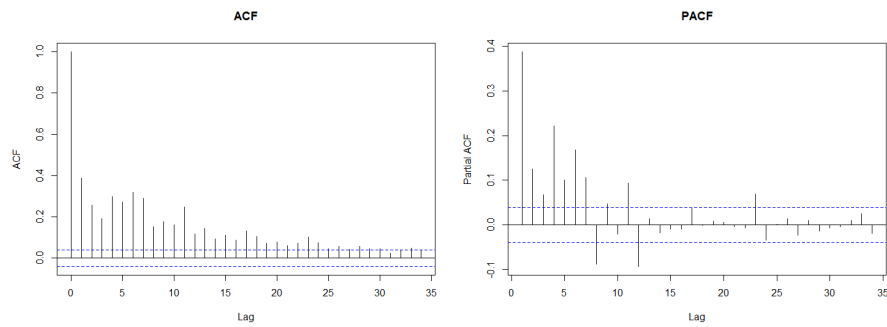


Figura 7.9: Funcions ACF i PACF dels retorns al quadrat de BAC

Com podem veure tenim, a la ACF, un decreixement gradual de lags significatius, i, a la PACF, s'observa com els primers 10 lags aproximadament també tenen significació. Aquest és l'indicador d'un possible comportament anormal amb la volatilitat. En fer els quadrats, estem estudiant el comportament de la variància de la sèrie, i els lags de la ACF ens estan indicant que molt probablement tindrem una variància no constant al llarg del temps. La manera més fàcil de comprovar aquesta hipòtesi és analitzant els residus. Si el model fos un simple ARIMA, els residus s'haurien de comportar com un soroll blanc, de manera que no hauríem de ser capaços de trobar correlació. Analitzant les funcions d'autocorrelació dels residus i residus al quadrat, però, observem que aquest no és el cas.

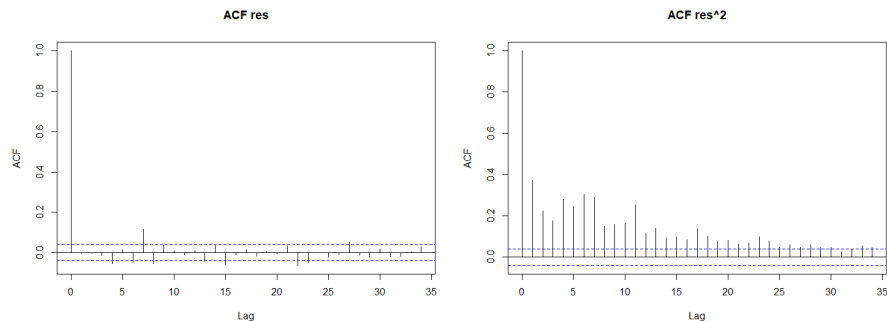


Figura 7.10: Funcions d'autocorrelació dels residus i quadrats dels residus

En primer lloc, la ACF dels residus presenta lags significatius, generant inconsistència amb la hipòtesi de soroll blanc. A més, que s'observi un decreixement gradual dels residus al quadrat ens indica que la variància no és constant, ja que depèn dels valors passats. Tot plegat, és evident rebutjar la hipòtesi de soroll blanc. Confirmem les nostres sospites aplicant el test dels multiplicadors de Lagrange sobre els residus.

```
ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
data: residu.arima
Chi-squared = 631.11, df = 12, p-value < 2.2e-16
```

Figura 7.11: Test ARCH-LM sobre els residus del model ARIMA

Com el p-value és 0, rebutgem la hipòtesi nul·la i afirmem que els residus presenten heteroscedasticitat, de manera que ens caldrà aplicar un model ARCH. Per construir el nostre model ARMA-GARCH, farem servir el paquet de R anomenat **fGarch**, on implementarem una funció que s'anomena **garchFit**, i en la qual ajustarem les nostres dades a partir de la hipòtesi que una part del model s'ajusta a un MA(2). Fent diverses proves amb les combinacions de valors per p i q, es pot veure que els models ARCH(p) no són prou consistents per captar tota la informació necessària, ja que els residus del model continuen presentant heteroscedasticitat i correlació. Per intentar arreglar-ho, serà necessari fer servir models GARCH. Després de procedir a estimar amb combinacions de paràmetres, el resultat que millor ajusta les nostres dades, basant-nos en els criteris AIC i BIC, i per la significació dels estimadors, és el model ARMA(0,2)-GARCH(1,1). Els paràmetres òptims són els següents

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	7.367e-04	2.988e-04	2.466	0.01367
ma1	2.433e-02	2.061e-02	1.180	0.23790
ma2	8.457e-03	2.058e-02	0.411	0.68111
omega	2.035e-05	6.403e-06	3.178	0.00148
alpha1	1.159e-01	2.426e-02	4.777	1.78e-06
beta1	8.290e-01	3.757e-02	22.066	< 2e-16

Figura 7.12: Paràmetres del model ARMA(0,2)-GARCH(1,1)

Els paràmetres de la part MA, corresponents als θ_i , són diferents dels donats abans perquè ara es considera el conjunt de dades de manera global i hi ha una millor estimació en general. Observem que la condició d'estacionarietat $\alpha_1 + \beta_1 = 0.9449 < 1$ se satisfà, ω fa referència al nostre paràmetre α_0 . El nostre model, per tant, és de la forma

$$\begin{cases} X_t = \mu + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \epsilon_t \\ \epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \eta_t \sim GWN(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

Analitzem els residus per comprovar que són un soroll blanc i no presenten heteroscedasticitat.

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi^2	435.3400192	0.0000000
Shapiro-wilk Test	R	W	0.9828341	0.0000000
Ljung-Box Test	R	Q(10)	12.3247636	0.2639091
Ljung-Box Test	R	Q(15)	16.5607085	0.3457958
Ljung-Box Test	R	Q(20)	16.9031446	0.6592536
Ljung-Box Test	R^2	Q(10)	11.9030802	0.2915954
Ljung-Box Test	R^2	Q(15)	14.4436649	0.4921812
Ljung-Box Test	R^2	Q(20)	15.7120472	0.7343200
LM Arch Test	R	TR^2	12.7408227	0.3881569

Figura 7.13: Tests sobre els residus del model

Els tests de Ljung-Box per diversos lags tant als residus com als residus al quadrat tenen

un p-value molt superior a 0.05, de manera que ens quedem amb la hipòtesi nul·la, és a dir, no estan correlacionats. El test dels multiplicadors de Lagrange també obté un p-value superior al 5%, així que no hi ha heteroscedasticitat. Per últim, el test de Shapiro-Wilk ens diu que hem de rebutjar H_0 , és a dir, no podem garantir la condició de normalitat. Aquest resultat és conseqüència del fet que provenim d'unes dades amb una curtosi elevada, i els residus no estan estandarditzats, de manera que mai s'assemblaran a una distribució normal. Si estandarditzem manualment i construïm un Q-Q-plot, el resultat és el desitjat.

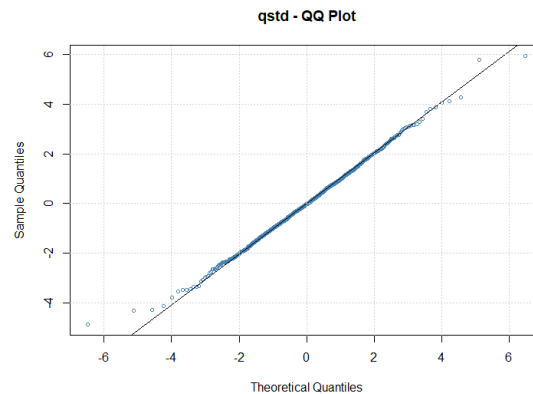


Figura 7.14: Q-Q-plot dels residus estandarditzats del model

Un cop realitzat tot aquest estudi, comprovarem com de bé s'ajusten les dades estimades als retorns reals. Construïm, sobre una mateixa gràfica, els valors reals dels retorns, i, a sobre, els valors de la component ARIMA μ_t i uns factors $\pm 2\sigma_t$

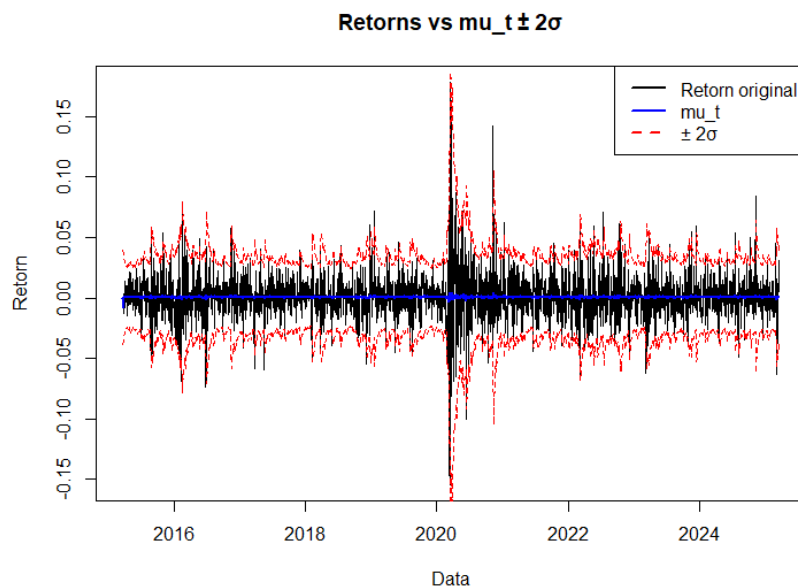


Figura 7.15: Ajustament de les dades a partir del model ARMA-GARCH

Podem veure que el model és capaç de captar amb bastant exactitud els pics de volatilitat presents a la sèrie, tot i que hi ha algun petit desajustament. En general, però, són molt acurats. Podem considerar, doncs, que és un bon model.

Per acabar l'estudi d'aquestes dades, mirarem de predir els cinc retorns futurs a la darrera data del model. Com els caps de setmana no es registren valors, els següents cinc dies després de la darrera data seran el 20, 21, 24, 25 i 26 de març. Fent servir la funció **predict** de R, hem calculat una predicció dels següents 5 valors de la sèrie amb un interval de confiança del 95%. La funció ens retorna el valor esperat, la desviació estàndard i un terme d'error. A continuació, hem calculat els retorns reals dels dies, i hem fet un gràfic comparatiu entre els valors i les estimacions. És important destacar que una predicció de molts dies endavant pot acumular errors de càlcul molt ràpidament. Davant la incertesa dels mercats, és recomanable no basar una estratègia financera en un càlcul que pot arribar a ser molt esbiaixat.

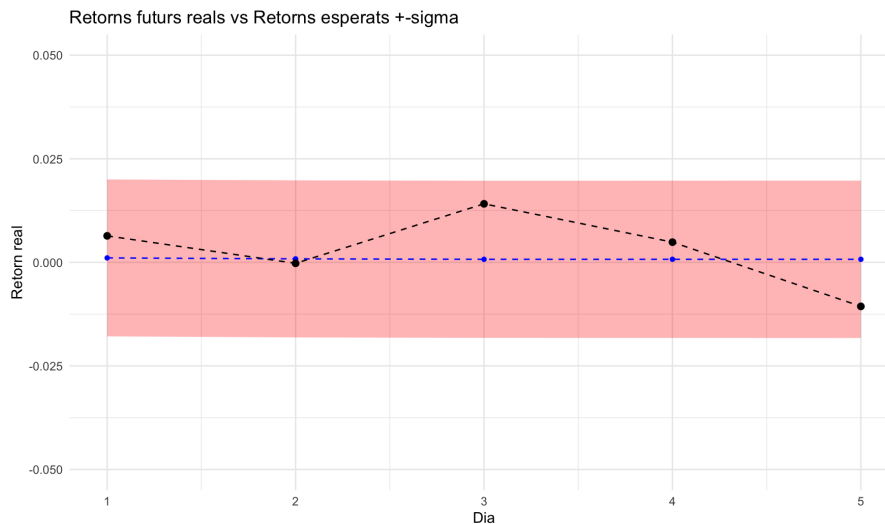


Figura 7.16: Retorns futurs de la sèrie vs Retorns estimats

Al gràfic podem apreciar, en blau, el valor esperat per cadascun dels dies, en vermell, la franja de $\pm\sigma_t$ al voltant de l'estimació i, en negre, els valors reals dels retorns. Com podem comprovar, el nostre model ha fet una predicció acurada i ha mantingut els valors reals dins d'un interval prou petit per a considerar-lo significatiu. Recordem que, tal com es veu al gràfic de retorns simples 7.4, les oscil·lacions més comunes es mouen entre els valors ± 0.08 , és a dir, entre uns retorns del 8%. En la nostra predicció, estem estimant els valors en marges no superiors al 2.5%. És important destacar que aquesta es fa sobre uns extrems $\pm\sigma_t$. En cas d'haver volgut dibuixar un interval de confiança del 95%, és a dir, amb unes franges vermelles $\pm 1.96\sigma_t$, els valors es trobarien entre uns marges d'aproximadament ± 0.035 . La diferència no és excessivament gran, però basar una estratègia financera en un interval no tan ajustat pot no ser ideal, de manera que es recomana trobar un equilibri.

7.2 Preu de la divisa EUR/CHZ

El següent i darrer objecte d'estudi del treball serà la taxa de canvi EUR/CHZ, és a dir, el valor, en francs suïssos, d'un euro. Històricament, s'ha considerat el franc suís com una moneda 'refugi' davant de períodes d'incertesa política i econòmica. Podem considerar, fins i tot, un símil entre la moneda i el preu de l'or, que, en una escala major, actua de la mateixa manera. Entendre la política econòmica darrere de les variacions d'aquest canvi de moneda és una tasca molt complexa. No tan sols s'allunya de l'objectiu del treball, sinó que requereix experts en teoria macroeconòmica. El que sí que podem fer és analitzar la volatilitat en els valors: tot i no conèixer tots els motius de les fluctuacions, una anàlisi matemàtica ens pot permetre prendre decisions si, per exemple, tenim una cartera en què operem amb diverses divises. Analitzarem les dades al llarg del mateix interval que en el cas anterior. Comencem mirant l'històric del valor.



Figura 7.17: Preus EUR/CHF entre el 20 de març del 2015 i el 19 de març del 2025

Observem una tendència general a la baixa a partir de mitjans del 2018. La recta vermella ens indica el punt en què el preu de les dues monedes és el mateix. També podem comprovar com, els darrers anys, l'euro té menys valor que el franc suís. Aquest fet té conseqüències en la política monetària d'Europa i Suïssa. En síntesi, un franc suís fort respecte de l'euro afavoreix les importacions per Suïssa, ja que comprar amb la seva moneda surt més barat. D'altra banda, les exportacions es reduiran, donat que els països exteriors han de pagar més pels productes suïssos, de manera que es pot veure afectada la producció del país. Analitzem les estadístiques més significatives.

	Mínim	Màxim	Mitjana	Mediana	Desv. típica	Curtosi
Tancaments	0.92730	1.19933	1.05886	1.07622	0.06768	2.13071

Taula 7.3: Estadístiques dels tancaments del preu EUR/CHF

Els valors es troben en una franja molt menor que en l'exemple anterior, però comprovem que hi ha gairebé 0.3 francs de diferència entre els valors màxim i mínim. El valor mitjà és proper a la mediana, i la curtosi no supera la d'una normal. Ara estudiarem els retorns i retorns quadrats a partir dels preus de tancament per aconseguir una sèrie estacionària.

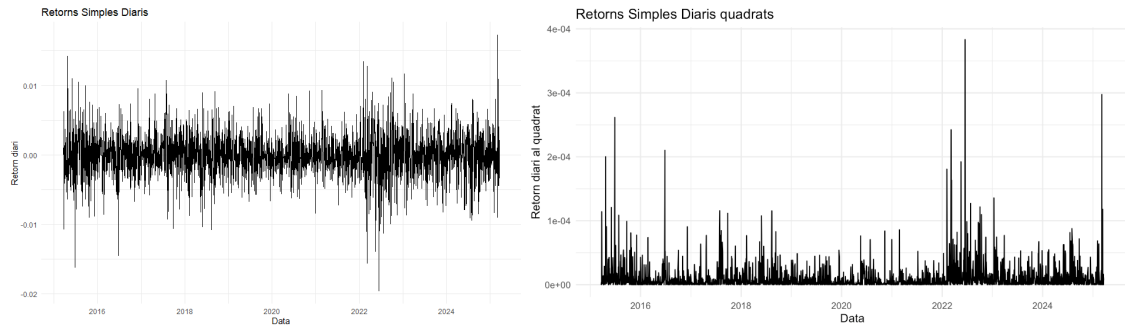


Figura 7.18: Retorns simples i quadrats dels preus EUR/CHF

Podem apreciar com certs valors difereixen força de la majoria, per exemple a finals del 2015, o durant el 2022, però tots oscil·len entre un 1% i un -3%, consistent amb el *clustering* que apreciem a la segona gràfica. Tenim un primer indicador d'heteroscedasticitat. També podem calcular la curtosi, i obtenim un valor de 5.26648, de manera que presenciem una distribució leptocúrtica. Per veure si el comportament és de soroll blanc, analitzem les funcions ACF i PACF dels retorns i retorns quadrats.

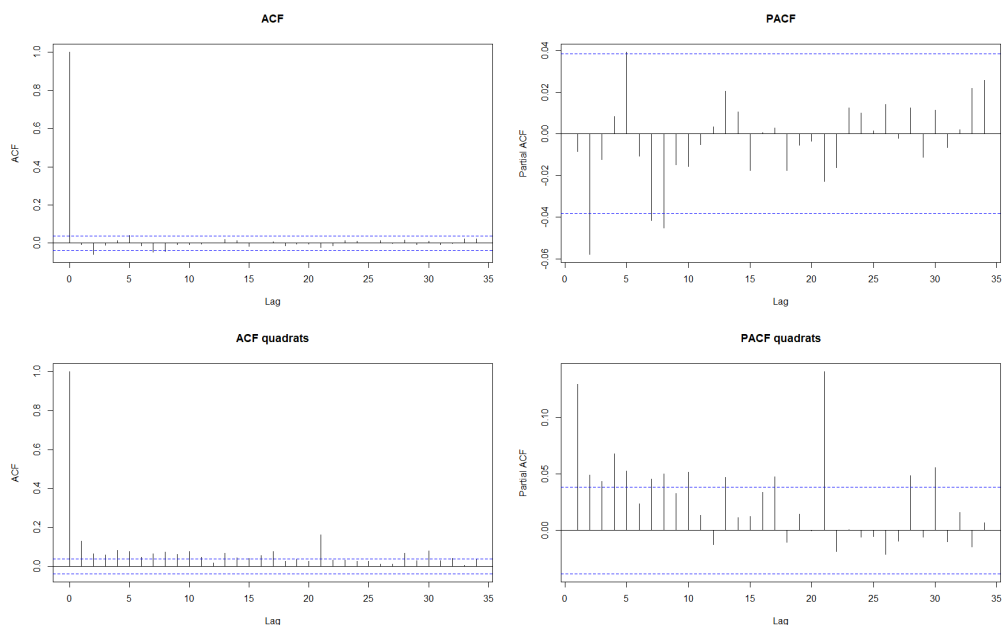


Figura 7.19: Funcions ACF i PACF dels retorns i retorns quadrats

Observem dependència respecte dels valors passats tant en els retorns com en els seus

quadrats, de manera que rebutgem el soroll blanc. Aplicant el test dels multiplicadors de Lagrange obtenim una Chi-Quadrat de 96.969, amb p-value corresponent gairebé 0, de manera que rebutgem H_0 i confirmem la presència d'heteroscedasticitat. Com hem vist que hi ha mostres d'autocorrelació en els retorns simples, haurem de tornar a fer servir un model mixt ARMA-GARCH. Aplicant la funció `auto.arima`, el millor model per ajustar les dades serà un ARMA(2,2). Sabem que aquest no capta l'heteroscedasticitat, però ens assegurem mirant les funcions ACF i PACF dels residus i residus quadrats i passem, un cop més, el test per buscar efectes ARCH.

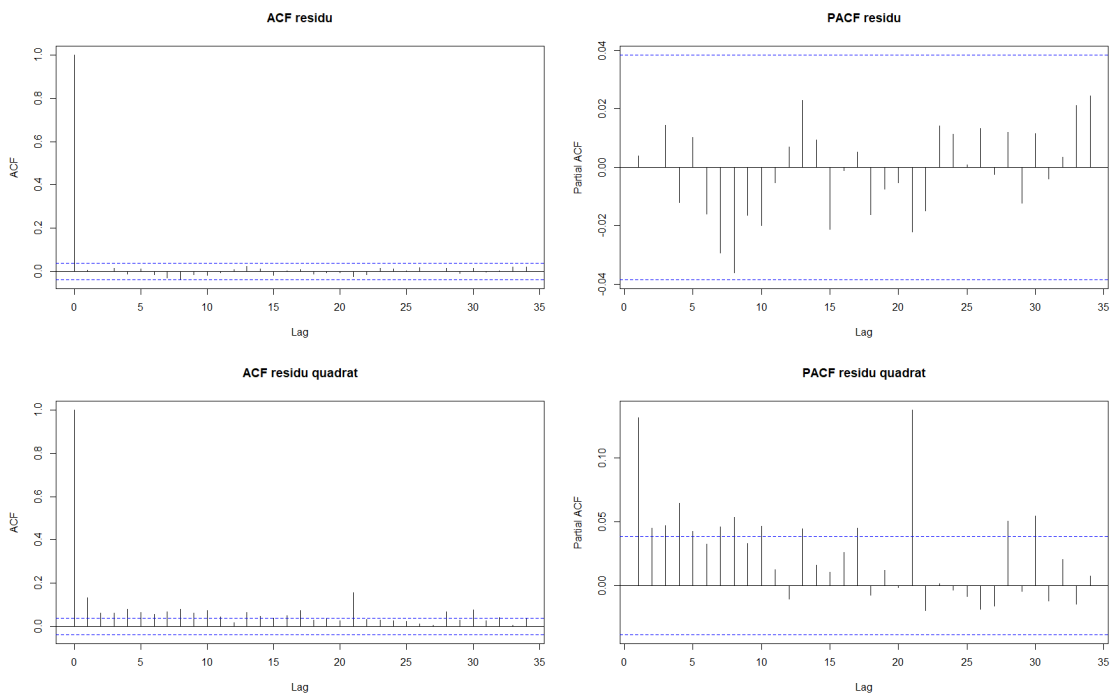


Figura 7.20: Funcions ACF i PACF dels residus i residus quadrats

Les gràfiques confirmen les nostres sospites, i són consistents amb els resultats del test de Ljung-Box: en aplicar-lo sobre els residus, el test passa correctament, indicant que ja no hi ha correlació, mentre que, en fer-ho sobre els quadrats, es presenta correlació significativa. A més, les gràfiques sobre els quadrats indiquen que la variància no és constant, ja que depèn dels valors passats. Passant pel test dels multiplicadors de Lagrange, aquesta correlació es confirma com a heteroscedasticitat. Serà necessari, per tant, aplicar un model adient. Després de proves, els models GARCH(1,2) i GARCH(1,1) donaven els millors resultats, amb criteris AIC i BIC bastant iguals. Ens decantem per GARCH(1,2) perquè l'estimació amb l'opció GARCH(1,1) estava molt a prop de no satisfer l'estacionarietat a causa del valor dels paràmetres propers a 1.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)			Statistic	p-Value
mu	-5.457e-05	4.867e-05	-1.121	0.26217	Jarque-Bera Test	R	Chi^2	411.9787153 0.0000000
ar1	5.709e-01	2.343e-01	2.436	0.01484	Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9832981 0.0000000
ar2	-5.501e-01	1.573e-01	-3.498	0.00047	Ljung-Box Test	R	Q(10)	12.2002488 0.2718782
ma1	-6.209e-01	2.401e-01	-2.586	0.00972	Ljung-Box Test	R	Q(15)	16.3718868 0.3577755
ma2	5.133e-01	1.715e-01	2.994	0.00276	Ljung-Box Test	R	Q(20)	16.7403209 0.6697656
omega	2.430e-07	1.118e-07	2.173	0.02976	Ljung-Box Test	R^2	Q(10)	7.9527794 0.6334495
alpha1	7.660e-02	1.730e-02	4.428	9.52e-06	Ljung-Box Test	R^2	Q(15)	10.5084141 0.7866005
beta1	3.797e-01	2.358e-01	1.610	0.10734	Ljung-Box Test	R^2	Q(20)	11.8560481 0.9209416
beta2	5.225e-01	2.292e-01	2.279	0.02265	LM Arch Test	R	TR^2	9.0282312 0.7005172

Figura 7.21: Model ARMA-GARCH òptim i anàlisi de residus

La condició d'estacionarietat $\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = 0.9788 < 1$ se satisfà. El coeficient β_2 no és tan significatiu com la resta, però és millor opció que l'altre cas. El model resultant és de la forma

$$\begin{cases} X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \epsilon_t \\ \epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \eta_t \sim GWN(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 \end{cases}$$

D'altra banda, observem que es passen els tests de multiplicadors de Lagrange i Ljung-Box per ambdós residus i residus al quadrat, de manera que la hipòtesi de soroll blanc és forta. Un cop més, el test de Shapiro-Wilk falla, però comprovem, amb un Q-Q-plot dels residus estandarditzats, que s'arregla el problema. Algun valor extrem no s'ajusta del tot a la gràfica, però és prou acurat per confirmar que es tracta de soroll blanc gaussià.

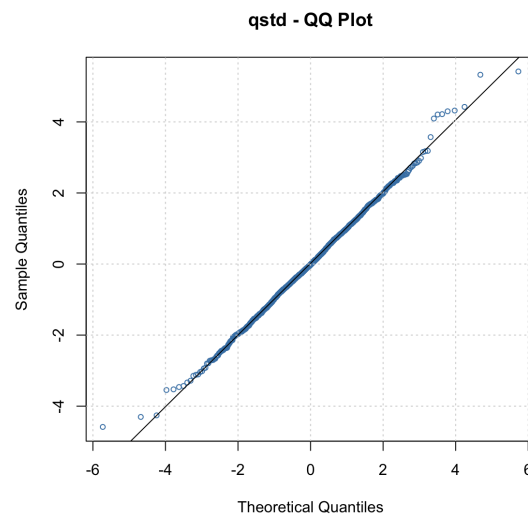


Figura 7.22: Q-Q-plot sobre els residus estandarditzats

Un cop construït el model, comprovarem si les nostres dades estimades s'ajusten correctament als retorns i a la volatilitat present. Analtzarem el valor esperat i construirem un interval de dues vegades la desviació estàndard per comparar.

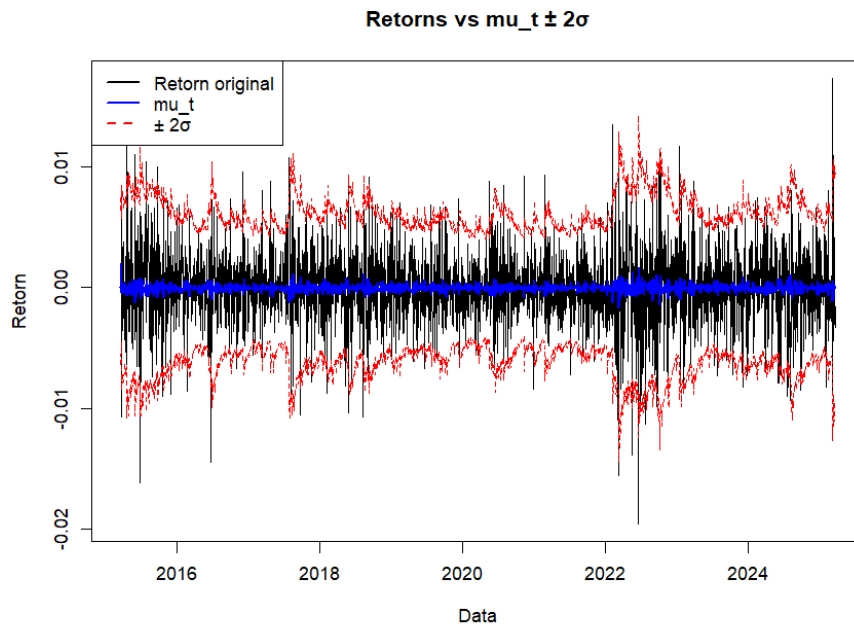


Figura 7.23: Ajustament de dades a partir del model ARMA-GARCH

Podem observar com l'ajustament no és tan exacte com ho era en l'exemple anterior. Val a dir que l'escala de la mostra és molt menor a la del cas del preu del banc. Abans, les oscil·lacions de preus anaven entre el -0.15 i el $+0.18$, aproximadament. En l'estudi actual, aquestes es mouen en un marge deu vegades inferior, de manera que qualsevol error es fa més evident. També cal tenir en compte que un model perfecte mai serà possible, sempre hi haurà termes que es desajustin de les nostres estimacions, però no per això hem de menysprear les conclusions que hi podem extreure.

Parlem, finalment, de la predicció. A diferència del preu de l'acció, estimar el valor futur de la taxa de canvi no és tan interessant, principalment perquè la variació en el preu és tan petita que no té tantes conseqüències a nivell immediat. És més útil tenir disponible un model per a poder estar preparats en el moment immediat en què es produeixin fluctuacions, i prendre les decisions més adients.

8. CONCLUSIONS

Amb el pas dels anys hem presenciat com l'economia global ha patit una transformació i estem sent testimonis de com s'encamina cap a una era marcada per la tecnologia i la globalització. Aquest fet, però, posa en evidència la necessitat d'eines per combatre la incertesa dels dies en què vivim. Aquest projecte és una introducció a una d'elles: la mesura de la volatilitat.

Per una banda, s'han explicat conceptes essencials de l'anàlisi estocàstica i de sèries temporals; també s'han tractat alguns dels principals models econòmics, amb un èmfasi en els seus defectes a l'hora de tractar sèries financeres. L'heteroscedasticitat ha estat el nucli principal del projecte, fent necessària la construcció de nous models capaços de tractar aquesta característica. També s'han explicat diverses eines que permeten una anàlisi en profunditat de qualsevol sèrie temporal relacionada amb mercats financers, i la possibilitat de predir situacions futures. En darrer lloc, s'han aplicat aquests coneixements per estudiar dos casos reals que, tot i pertànyer a la família de sèries financeres, són força diferents.

Val a dir que hem de ser conscients de les limitacions que presenten els models ARCH: situacions tan extremes com la crisi causada per la bombolla immobiliària del 2008 impossibiliten una modelització prou acurada per a fer-la servir. En contraposició, existeixen versions dels models per situacions molt específiques, i cada cop es desenvolupen modificacions per dur a terme tasques amb molta precisió. L'estudi d'aquests seria recomanable per una major comprensió de la matèria i, especialment, per una anàlisi de les dades més eficaç.

Confiam que aquest treball hagi servit al lector per aprendre les nocions bàsiques de sèries temporals financeres, el seu tractament i modelització, i deixem la porta oberta a qualsevol per prosseguir amb la recerca d'aquest camp en constant evolució.

Bibliografia

- [1] George EP Box et al. *Time series analysis: forecasting and control*. John Wiley & Sons, 2015.
- [2] Peter J Brockwell i Richard A Davis. *Time series: theory and methods*. Springer science & business media, 1991.
- [3] Rama Cont. “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”. A: *Quantitative finance* 1.2 (2001), pàg. 223.
- [4] Jie Chen i Dimitris N Politis. “Optimal multi-step-ahead prediction of ARCH/-GARCH models and NoVaS transformation”. A: *Econometrics* 7.3 (2019).
- [5] Robert F Engle. “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation”. A: *Econometrica: Journal of the econometric society* (1982), pàg. 987 - 1007.
- [6] Christian Francq i Jean-Michel Zakoian. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. John Wiley & Sons, 2019.
- [7] Jürgen Franke, Wolfgang Karl Härdle i Christian M Hafner. *Statistics of financial markets*. Vol. 2. Springer, 2004.
- [8] Christian Gouriéroux. *ARCH models and financial applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] Christian Gouriéroux, Alain Monfort i Alain Trognon. “Pseudo maximum likelihood methods: Theory”. A: *Econometrica: journal of the Econometric Society* (1984), pàg. 681 - 700.
- [10] Dimitris N Politis. “Model-free versus model-based volatility prediction”. A: *Journal of Financial Econometrics* 5.3 (2007), pàg. 358 - 359.
- [11] Said E Said i David A Dickey. “Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order”. A: *Biometrika* 71.3 (1984), pàg. 599 - 607.
- [12] Robert H Shumway, David S Stoffer i David S Stoffer. *Time series analysis and its applications*. Vol. 3. Springer, 2000.
- [13] Josep Vives. *Classical Analysis of Time Series*. unpublished, 2024.
- [14] Josep Vives. *Teoria de processos estocásticos*. Apunts de l’assignatura, 2023.

A. APÈNDIX 1

```
1
2 # Comandes per l'estudi de la sèrie del Banc d'Amèrica
3
4 # Paquets que farem servir
5
6 install.packages("quantmod")
7 install.packages("ggplot2")
8 install.packages("moments")
9 install.packages("FinTS")
10 install.packages("fGarch")
11 install.packages("forecast")
12 install.packages("tseries")
13 install.packages("rugarch")
14 library(quantmod); library(ggplot2); library(moments);
15 library(FinTS); library(fGarch); library(forecast);
16 library(tseries); library(rugarch)
17
18
19 # Dades entre 2015 i 2025
20 # Extracció de les dades de Yahoo Finance
21
22 start_date <- as.Date("2015-03-20")
23 end_date <- as.Date("2025-03-20")
24 getSymbols("BAC", src = "yahoo", from = start_date, to = end_date)
25 BAC <- BAC[, !colnames(BAC) %in% c("BAC.Adjusted")]
26 bac_df <- data.frame(Date = index(BAC), coredata(BAC))
27
28 # Gràfic dels preus de tancament
29
30 ggplot(bac_df, aes(x = Date, y = BAC.Close)) +
31   geom_line(color = "black") +
32   labs(title = "Preus de tancament",
33        x = "Data", y = "Preu (USD)") +
34   theme_minimal()
35
36 # Càlcul i gràfic dels retorns simples
37
38 tancament <- Cl(BAC)
39 return <- dailyReturn(tancament, type="arithmetic")
40 return_df <- data.frame(Date = index(return), Return = coredata(return))
41
42 ggplot(return_df, aes(x = Date, y = daily.returns)) +
43   geom_line(color = "black") +
```

```

44 labs(title = "Returns Simples Diaris",
45       x = "Data", y = "Retorn diari") +
46 theme_minimal()
47
48
49 # Càlcul de les estadístiques principals de la mostra
50
51 retorn2_df <- data.frame( Date = retorn_df$Date, Return2 =
52   ↪ retorn_df$daily.returns^2)
53 ret <- retorn_df$daily.returns # Extracció del valor del retorn
54 ret2 <- retorn2_df$Return2
55
56 minim <- min(ret, na.rm = TRUE)
57 maxim <- max(ret, na.rm = TRUE)
58 mitjana <- mean(ret, na.rm = TRUE)
59 mediana <- median(ret, na.rm = TRUE)
60 desviacio <- sd(ret, na.rm = TRUE)
61 curtosi <- kurtosis(ret, na.rm = TRUE)
62 mini <- min(BAC$BAC.Close, na.rm = TRUE)
63 maxi <- max(BAC$BAC.Close, na.rm = TRUE)
64 mitj <- mean(BAC$BAC.Close, na.rm = TRUE)
65 medi <- median(BAC$BAC.Close, na.rm = TRUE)
66 desv <- sd(BAC$BAC.Close, na.rm = TRUE)
67 curt <- kurtosis(BAC$BAC.Close, na.rm = TRUE)
68 table_stats <- data.frame(Estadístic = c("Mínim", "Màxim",
69   "Mitjana", "Mediana", "Desv. Típica", "Curtosi"),
70   Valor = round(c(minim, maxim, mitjana, mediana, desviacio, curtosi), 6))
71
72 # Gràfic de les funcions ACF i PACF
73
74 acf(retorn_df$daily.returns,
75     main = "ACF",
76     na.action = na.omit)
77 pacf(retorn_df$daily.returns,
78     main = "PACF",
79     na.action = na.omit)
80
81 acf(retorn2_df$Return2,
82     main = "ACF",
83     na.action = na.omit)
84 pacf(retorn2_df$Return2,
85     main = "PACF",
86     na.action = na.omit)
87
88

```

```

89 # Tests per analitzar les dades
90
91 # Test ADF
92 adf.test(retorn_df$daily.returns) # Estacionarietat
93
94 # Construcció del millor model ARIMA per les dades
95
96 comp.arima <- auto.arima(retorn_df$daily.returns, seasonal = FALSE)
97 show(comp.arima)
98
99 # Estudiem si els residus encara ens donen informació important
100 # Mirem si es comporten com a soroll blanc i si presenten heteroscedasticitat
101
102 residu.arima <- residuals(comp.arima)
103
104 acf(residu.arima, main = "ACF res")
105 acf(residu.arima^2, main = "ACF res^2")
106 ArchTest(residu.arima)
107
108 # Construïrem un model ARMA+GARCH fent servir que el millor ARMA era ARMA(0,2)
  ↪ i farem proves per diversos p,q per GARCH
109 # Aquest codi integra directament el model ARMA-GARCH mencionat
110
111 # Model que millor ajusta les dades
112
113 model2.garch <- garchFit(~arma(0,2) + garch(1, 1), data =
  ↪ retorn_df$daily.returns, cond.dist = "std", trace = FALSE)
114 summary(model2.garch)
115 show(model2.garch)
116 plot(model2.garch) # Ens permet fer gràfics de la informació, per exemple el
  ↪ Q-Q-plot dels residus estandarditzats
117
118 # Construcció del gràfic dels valors estimats +- 2sd i comparació amb els
  ↪ retorns de la mostra
119
120 mitjana2 <- fitted(model2.garch)
121 volatilitat2 <- volatility(model2.garch)
122 superior2 <- mitjana + 2*volatilitat2
123 inferior2 <- mitjana - 2*volatilitat2
124
125 plot(retorn_df$Date ,retorn_df$daily.returns, type = "l", col = "black", lwd =
  ↪ 1.5,
126       main = "Retorns vs mu_t ± 2σ",
127       ylab = "Return", xlab = "Data")
128 lines(retorn_df$Date, mitjana2, col = "blue", lwd = 2)
129 lines(retorn_df$Date, superior2, col = "red", lty = 2)

```



```

130 lines(retorn_df$Date, inferior2, col = "red", lty = 2)
131 legend("topright", legend = c("Retorn original", "mu_t", " $\pm 2\sigma$ "),
132       col = c("black", "blue", "red"), lty = c(1,1,2), lwd = 2)
133
134 # Predicció de valors futurs
135
136 prediccio_5 <- predict(model2.garch, n.ahead = 5, conf = 0.95)
137 prediccio.sigma <- as.numeric(prediccio_5$standardDeviation)
138
139 # Un cop tenim els valors estimats, prenem els retorns reals de la sèrie
140 start_date2 <- as.Date("2025-03-19")
141 end_date2 <- as.Date("2025-03-27")
142 getSymbols("BAC", src = "yahoo", from = start_date2, to = end_date2)
143 bac2_df <- data.frame(Date = index(BAC), coredata(BAC))
144 tancament <- Cl(BAC)
145 retorn_futur <- dailyReturn(tancament, type="arithmetic")
146 retorn_futur_df <- data.frame(Return = coredata(retorn_futur))
147 retorn_futur_df <- retorn_futur_df[retorn_futur_df$daily.returns != 0, ]
148 retorn_futur_df <- data.frame(Return = coredata(retorn_futur_df))
149
150 # Comparació i gràfic
151 comparacio <- data.frame( dies = 1:5,
152   real = retorn_futur_df$Return,
153   predicted = as.numeric(prediccio_5$meanForecast),
154   adalt = as.numeric(prediccio_5$meanForecast) +
155     ↪ as.numeric(prediccio_5$standardDeviation),
156   abaix = as.numeric(prediccio_5$meanForecast) -
157     ↪ as.numeric(prediccio_5$standardDeviation)
158 )
159
160 ggplot(comparacio, aes(x = dies)) +
161   geom_ribbon(aes(ymin = abaix, ymax = adalt), fill = "red", alpha = 0.3) +
162   geom_line(aes(y = predicted), color = "blue", size = 1.2) +
163   geom_point(aes(y = real), color = "black", size = 2) +
164   geom_line(aes(y = real), color = "black", linetype = "dashed") +
165   labs(title = "Retorns futurs reals vs Retorns esperats +- sigma",
166     x = "Dia", y = "Retorn real") +
167   ylim(-0.05, 0.05) +
168   theme_minimal()

```

B. APÈNDIX 2

```
1 # Comandes per l'estudi de la sèrie de la divisa Euro/Franc Suís
2
3 install.packages("quantmod")
4 install.packages("ggplot2")
5 install.packages("moments")
6 install.packages("FinTS")
7 install.packages("fGarch")
8 install.packages("forecast")
9 install.packages("tseries")
10 install.packages("rugarch")
11 library(quantmod); library(ggplot2); library(moments);
12 library(FinTS); library(fGarch); library(forecast);
13 library(tseries); library(rugarch)
14
15 # Extracció de dades
16
17 start_date <- as.Date("2015-03-20")
18 end_date <- as.Date("2025-03-20")
19 getSymbols("EURCHF=X", src = "yahoo", from = start_date, to = end_date)
20 eur_chf <- `EURCHF=X`
21 eur_chf <- eur_chf[, !colnames(eur_chf) %in% c("EURCHF=X.Volume")]
22 eur_chf <- eur_chf[, !colnames(eur_chf) %in% c("EURCHF=X.Adjusted")]
23 eur_chf_df <- data.frame(Date = index(eur_chf), coredata(eur_chf))
24 eur_chf_df <- na.omit(eur_chf_df)
25
26 ggplot(eur_chf_df, aes(x = Date, y = EURCHF.X.Close)) +
27   geom_line(color = "black") +
28   geom_hline(yintercept = 1, color = "red", linetype = "solid", size = 1) +
29   labs(title = "Preus EUR/CHF",
30        x = "Data", y = "Preu (CHF)") +
31   theme_minimal()
32
33 minim <- min(eur_chf_df$EURCHF.X.Close, na.rm = TRUE)
34 maxim <- max(eur_chf_df$EURCHF.X.Close, na.rm = TRUE)
35 mitjana <- mean(eur_chf_df$EURCHF.X.Close, na.rm = TRUE)
36 mediana <- median(eur_chf_df$EURCHF.X.Close, na.rm = TRUE)
37 desviacio <- sd(eur_chf_df$EURCHF.X.Close, na.rm = TRUE)
38 curtosi <- kurtosis(eur_chf_df$EURCHF.X.Close, na.rm = TRUE)
39 table_stats <- data.frame(Estadístic = c("Mínim", "Màxim",
40    "Mitjana", "Mediana", "Desv. Típica", "Curtosi"),
41    valor = round(c(minim, maxim, mitjana, mediana, desviacio, curtosi), 6))
42 print(table_stats)
43
```

```

44 tancamentE<- Cl(eur_chf)
45 retornE <- dailyReturn(tancamentE, type="arithmetic")
46 retornE_df <- data.frame(Date = index(retornE), Return = coredata(retornE))
47
48 ggplot(retornE_df, aes(x = Date, y = daily.returns)) +
49   geom_line(color = "black") +
50   labs(title = "Retorns Simples Diaris",
51        x = "Data", y = "Retorn diari") +
52   theme_minimal()
53
54 minim <- min(retornE_df$daily.returns, na.rm = TRUE)
55 maxim <- max(retornE_df$daily.returns, na.rm = TRUE)
56 mitjana <- mean(retornE_df$daily.returns)
57 mediana <- median(retornE_df$daily.returns, na.rm = TRUE)
58 desviacio <- sd(retornE_df$daily.returns, na.rm = TRUE)
59 curtosi <- kurtosis(retornE_df$daily.returns, na.rm = TRUE)
60 table_stats <- data.frame(Estadístic = c("Mínim", "Màxim",
61    "Mitjana", "Mediana", "Desv. Típica", "Curtosi"),
62    valor = round(c(minim, maxim, mitjana, mediana, desviacio, curtosi), 6))
63 print(table_stats)
64
65
66 adf.test(eur_chf_df$EURCHF.X.Close) # sèrie normal no estacionària
67 adf.test(retornE_df$daily.returns) # retorns estacionaris
68
69
70 acf(retornE_df$daily.returns, main = "ACF")
71 pacf(retornE_df$daily.returns, main = "PACF")
72 acf(retornE_df$daily.returns^2, main = "ACF quadrats")
73 pacf(retornE_df$daily.returns^2, main = "PACF quadrats")
74
75 ArchTest(retornE_df$daily.returns)
76
77 # A la ACF i PACF observem retorns significatius, això vol dir que part de les
78 # nostres dades es poden explicar a partir de valors passats, és a dir, una
79   ↪ autoregressió
80 # Podem estimar un ARIMA per la mitjana, i analitzar els residus
81 # Possible model ARMA-GARCH de la forma  $r_t = \mu_t + X_t$  on  $X_t$  es el que sera
82   ↪ la nostra component GARCH i  $\mu_t$  sera un ARMA
83
84 # Busquem el millor model ARIMA a partir de la funció auto.arima
85
86 comp.arimaE <- auto.arima(retornE_df$daily.returns, seasonal = FALSE)
87 show(comp.arimaE)
88
89 # Analitzem els residus que ens quedin

```

```

88
89 residu.arimaE <- residuals(comp.arimaE)
90 acf(residu.arimaE, main = "ACF residu")
91 acf(residu.arimaE^2, main = "ACF residu quadrat")
92 pacf(residu.arimaE, main = "PACF residu")
93 pacf(residu.arimaE^2, main = "PACF residu quadrat")
94
95 Box.test(residu.arimaE, lag = 5, type = "Ljung-Box")
96 Box.test(residu.arimaE^2, lag = 5, type = "Ljung-Box")
97
98 # Tenen estructura de soroll blanc, no tenen correlació lineal, però els
  ↪ quadrats sí que ho estan
99 # Apliquem el test ARCH-LM per confirmar l'heteroscedasticitat.
100
101 ArchTest(residu.arimaE)
102
103 # Efectivament, hi ha efecte, de manera que modelitzem el millor possible
104 # Buscarem diverses opcions en funció de p i q i els criteris AIC i BIC
105 # COnstruïrem un model ARMA+GARCH fent servir que el millor ARMA era ARMA(2,2)
  ↪ i farem proves per diversos p,q per GARCH
106
107 model2.garch <- garchFit(~arma(2,2) + garch(1, 2), data =
  ↪ retornE_df$daily.returns, cond.dist = "std", trace = FALSE) # Model
  ↪ ARMA-GARCH
108 summary(model2.garch) # Paràmetres i informació
109 plot(model2.garch)
110
111
112 # Fem un gràfic per veure els nostres retorns originals a sobre de les
  ↪ simulacions fetes pel model
113
114 mitjana <- fitted(model2.garch)
115 volatilitat <- volatility(model2.garch)
116 superior <- mitjana + 2*volatilitat
117 inferior <- mitjana - 2*volatilitat
118
119 plot(retornE_df$Date ,retornE_df$daily.returns, type = "l", col = "black", lwd
  ↪ = 1.5,
120       main = "Retorns vs  $\mu_t \pm 2\sigma$ ",
121       ylab = "Retorn", xlab = "Data")
122 lines(retornE_df$Date, mitjana, col = "blue", lwd = 2)
123 lines(retornE_df$Date, superior, col = "red", lty = 2)
124 lines(retornE_df$Date, inferior, col = "red", lty = 2)
125 legend("topleft", legend = c("Retorn original", " $\mu_t$ ", " $\pm 2\sigma$ "),
126       col = c("black", "blue", "red"), lty = c(1,1,2),

```