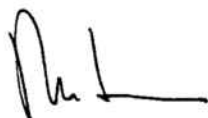


La Lògica L_{aa} i els Models Finitament Determinats.

Pilar Dellunde i Clavé

Treball de recerca dirigit pel Dr. Ramon Jansana.
Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència.
Universitat de Barcelona. Febrer del 1992.

Signatura del Director:



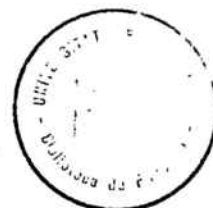
BIBLIOTECA DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA



0701859821



+



els arbres d'altura $\leq \omega$ i les següents estructures algebraiques: els grups abelians, els mòduls sobre un anell numerable i els cossos \mathbb{C} , \mathbb{R} i \mathbb{Q}_p . Algunes característiques importants d'aquests tipus de models són les següents: Tota teoria de Primer Ordre consistent i amb models infinits té un model finitament determinat de cardinalitat \aleph_1 ; tot model finitament determinat té una subestructura L_{aa} -elemental de cardinalitat $\leq \aleph_1$; sumes disjunctes i productes finits de models finitament determinats són finitament determinats, i sumes ordenades de models finitament determinats són finitament determinades, si tots els seus components són L_{aa} -equivalents. Trobem també resultats recents interessants, sobre aquest tipus de models, en relació amb la Teoria de l'Estabilitat. Per citar-ne algun, tenim que, si T és una teoria de Primer Ordre tal que tots els seus models són finitament determinats, T és una teoria estable⁵.

Aquest treball pretén presentar d'una manera sistemàtica les característiques bàsiques de la Lògica Estacionària. Per això, el treball recull resultats dispersos en diferents articles i en dóna una presentació unitària. En alguns d'aquests articles els resultats eren formulats sense prova o només amb un esbós. En aquest cas, he presentat amb detall les proves. El treball conté també resposta a algunes preguntes que han anat sorgint al llarg de la seva elaboració. Exposo a continuació el contingut dels diferents capítols en què he dividit el treball, i indicaré els articles més importants de referència de cadascun dels capítols. El capítol 1 és una introducció al filtre dels tancats i cofinals. És un capítol preliminar que serveix per familiaritzar-nos amb aquest filtre, a partir del qual es defineix el quantificador aa . Una bona introducció al filtre dels tancats i cofinals és l'article de W. Kueker *Countable approximations and Löwenheim-Skolem theorems*⁶, on podem trobar una caracterització d'aquest filtre en termes de jocs. En el capítol 2 exposo la sintaxi i la semàntica dels llenguatges de L_{aa} i dono algunes mostres del poder expressiu d'aquesta lògica. En el capítol 3 introdueixo un sistema axiomàtic per L_{aa} i provo alguns metateoremes importants d'aquest sistema. En els capítols del 4 al 6 es dóna la prova del Teorema de Completesa. Per als capítols del 2 al 6, l'article bàsic de referència és el de K. J. Barwise, M. Kaufmann i M. Makkai, *Stationary Logic*. En el capítol 7 mostro que L_{aa} és una extensió pròpia de $L(Q_1)$. L'article d'introducció a la lògica $L(Q_1)$ és l'article de H. J. Keisler *Logic with the quantifier "There exist uncountably many"*⁷. A més a més, en la tesi doctoral de M. Kaufmann, *Some results in stationary logic*, podem trobar la definició dels procediments de *back-and-forth* per aquesta lògica. En el capítol 8 provo que falla el Teorema d'Interpolació per L_{aa} . A l'article de J. A. Makowsky i S. Shelah *The theorems of Beth and Craig in abstract mo-*

⁵ Veure [13] pàgina 894.

⁶ Veure [11]

⁷ Veure [10]

del theory II. Compact Logics ⁸ podem trobar la referència d'aquesta prova. Finalment, en el capítol 9 es defineixen els models finitament determinats i, amb l'ajut de procediments de *back-and-forth* per a aquest tipus de models, es prova que l'ordre dels reals és finitament determinat i també ho són tots els ordinals. Per la definició de model finitament determinat i les seves propietats bàsiques es pot veure l'article de P. C. Eklof i A. H. Mekler *Stationary Logic of Finitely Determinate Structures* ⁹. Podem trobar una descripció dels procediments *back-and-forth* per a estructures finitament determinades a la tesi doctoral de M. Kaufmann. I per últim, podem trobar la prova que tot ordinal és finitament determinat, a l'article de D. G. Seese *Stationary Logic and ordinals* ¹⁰. Un cop exposat el contingut d'aquest treball, només em queda desitjar que sigui d'utilitat a totes aquelles persones que es vulguin introduir en l'estudi d'aquesta lògica i espero que la lectura d'aquest treball els pugui ajudar a descobrir la importància que té per a la Teoria de Models actual.

Bellaterra, 7 de febrer del 1992

⁸ Veure [12]

⁹ Veure [4]

¹⁰ Veure [14]

AGRAÏMENTS

En primer lloc vull donar les gràcies al director d'aquesta tesina, el professor Ramon Jansana, per la rigorositat i exigència personal amb què ha emprès la seva tasca, per totes les seves aportacions i correccions, tant al contingut com a la presentació del treball.

Vull agrair al professor Jörg Flum, de l'Albert-Ludwigs-Universität de Freiburg, la suggerència del tema del treball d'investigació i l'interès que hi ha mostrat en les seves diferents estades a Barcelona. També dono les gràcies a tots els altres membres del Seminari Permanent de Lògica de la Universitat de Barcelona, els professors Enrique Casanovas, Juan Carlos Martínez i Rafael Farré, per les aportacions que van fer durant la meva exposició del treball en el si del Seminari i pel seu interès continuat.

Finalment vull agrair a l'Anna M. Miralles la correcció del català, a en Roger Bosch les seves suggerències, i a tot el Departament de Filosofia de la Universitat Autònoma de Bellaterra el seu suport, tant de tipus personal com de tipus tècnic, durant tot el període de la seva elaboració.

0. Introducció.....	i
1. Preliminars. El filtre dels tancats i cofinals.....	2
2. Sintaxi i Semàntica dels llenguatges de L_{aa}	11
3. $S_{L_{aa}}$, un sistema deductiu axiomàtic per L_{aa}	17
4. Models Febles.	25
5. Teorema de Completesa per Models Febles.....	29
6. Teorema de Completesa per L_{aa}	36
7. $L_{aa} \neq L(Q_1)$	44
8. El Teorema d'Interpolació falla per L_{aa}	49
9. Models finitament determinats.	61
Apèndix I	75
Apèndix II	78
Apèndix III	82
Bibliografia.....	84

1. Preliminars. El filtre dels tancats i cofinals.

En aquest capítol, en primer lloc, introduïrem el filtre $\mathcal{F}(A)$ dels conjunts tancats i cofinals d'un conjunt A i provarem que $\mathcal{F}(A)$ és un filtre ω_1 -complet i normal i d'altres propietats bàsiques seves. En segon lloc donarem una caracterització de $\mathcal{F}(A)$ en termes de jocs. I finalment mostrarem la correspondència que hi ha entre el filtre dels conjunts tancats i cofinals de ω_1 i el filtre $\mathcal{F}(A)$ d'un conjunt A de cardinalitat ω_1 .

1.1. Definició. Si A és un conjunt i $X \subseteq P_{\omega_1}(A)$ ¹ diem que:

1. X és *cofinal* sii² per tot $t \in P_{\omega_1}(A)$, hi ha $r \in X$ tal que $t \subseteq r$.
2. X és *tancat* sii per tota cadena (respecte a la inclusió), $\langle r_n : n \in \omega \rangle$, numerable d'elements de X , $\cup_{n \in \omega} r_n \in X$.

1.2. Definició. Diem que \mathcal{F} és un *filtre (propi)* sobre un conjunt S sii \mathcal{F} és una col.lecció de subconjunts de S tal que:

- i) $S \in \mathcal{F}$.
- ii) Si $X \in \mathcal{F}$ i $Y \in \mathcal{F}$, llavors $X \cap Y \in \mathcal{F}$.
- iii) Si $X, Y \subseteq S$, $X \in \mathcal{F}$ i $X \subseteq Y$, llavors $Y \in \mathcal{F}$.
- iv) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

1.3. Definició. Donat un conjunt $A \neq \emptyset$, sigui $\mathcal{F}(A) = \{X \subseteq P_{\omega_1}(A) : X \text{ inclou un conjunt tancat i cofinal}\}$.

1.4. Lema. Per tot conjunt A , si $X, Y \subseteq P_{\omega_1}(A)$ són tancats i cofinals, llavors $X \cap Y$ és tancat i cofinal.

Prova: Siguin $X, Y \subseteq P_{\omega_1}(A)$ tancats i cofinals. i) $X \cap Y$ és tancat: Sigui $\langle r_n : n \in \omega \rangle$ una cadena numerable d'elements de $X \cap Y$, ho serà per tant de X i de Y . Així, donat que aquests conjunts són tancats, $\cup_{n \in \omega} r_n \in X$ i $\cup_{n \in \omega} r_n \in Y$, per tant $\cup_{n \in \omega} r_n \in X \cap Y$. ii) $X \cap Y$ és cofinal: Sigui $t \in P_{\omega_1}(A)$, construïm per recursió una cadena numerable d'elements de $P_{\omega_1}(A)$, $\langle r_n : n \in \omega \rangle$ que satisfà:

¹Notació: Direm que un conjunt X és numerable si $|X| < \omega_1$. I donat un conjunt A , $P_{\omega_1}(A) = \{X \subseteq A : X \text{ és numerable}\}$.

²Notació: A partir d'ara "sii" abreujarà "si i sols si".

$$r_0 = t$$

$$r_{n+1} = \begin{cases} \text{un element de } X \text{ que inclou } r_n, \text{ si } n \text{ és parell} \\ \text{un element de } Y \text{ que inclou } r_n, \text{ si } n \text{ és senar} \end{cases}$$

La successió $\langle r_n : n \in \omega \rangle$ està ben definida ja que, si n és un parell, per ser X cofinal i r_n un conjunt numerable, hi ha $x \in X$ tal que $r_n \subseteq x$. I si n és senar, per ser Y cofinal i r_n un conjunt numerable, hi ha $y \in Y$ tal que $r_n \subseteq y$. Així $\langle r_{2n+1} : n \in \omega \rangle$ és una cadena numerable d'elements de Y amb suprem $r = \bigcup_{n \in \omega} r_n$. I $\langle r_{2n} : 0 < n \in \omega \rangle$ és una cadena numerable d'elements de X que té també com a suprem r . Així per ser ambdós conjunts tancats $r \in X$ i $r \in Y$. Per tant tenim que $r \in X \cap Y$ i $t \subseteq r$. ■

1.5. Proposició. Per tot conjunt $A \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(A)$ és un filtre sobre $P_{\omega_1}(A)$.

Prova: i) $P_{\omega_1}(A) \in \mathcal{F}(A)$ perquè $P_{\omega_1}(A)$ és tancat i cofinal. ii) Si $X, Y \in \mathcal{F}(A)$, llavors $X \cap Y \in \mathcal{F}(A)$, pel lema 1.4. iii) Si $X \in \mathcal{F}(A)$, llavors inclou un tancat i cofinal. I per tant si $Y \subseteq P_{\omega_1}(A)$ i $X \subseteq Y$, llavors Y inclou també un tancat i cofinal. Així $Y \in \mathcal{F}(A)$. ■

1.6. Definició. Un filtre \mathcal{F} sobre un conjunt S és *principal* si hi ha $X \subseteq S$ tal que $\mathcal{F} = \{Y \subseteq S : X \subseteq Y\}$.

1.7. Proposició. Si A és un conjunt numerable no buit, $\mathcal{F}(A)$ és un filtre principal sobre $P_{\omega_1}(A)$ i $\mathcal{F}(A) = \{Y \in P_{\omega_1}(A) : \{A\} \subseteq Y\}$.

Prova: $\{A\}$ és tancat i cofinal, per tant $\{A\} \in \mathcal{F}(A)$. Així per tot $Y \subseteq P_{\omega_1}(A)$, si $\{A\} \subseteq Y$ llavors $Y \in \mathcal{F}(A)$, perquè $\mathcal{F}(A)$ és un filtre (per iii) de la definició 1.2.). Inversament, si $Y \in \mathcal{F}(A)$, $Y \cap \{A\} \neq \emptyset$, per ii) i iv) de la definició 1.2. Així $\{A\} \subseteq Y$. Per tant $\mathcal{F}(A) = \{Y \subseteq P_{\omega_1}(A) : \{A\} \subseteq Y\}$, i $\mathcal{F}(A)$ és un filtre principal. ■

1.8. Definició. Donat un conjunt S , diem que un filtre \mathcal{F} sobre S és κ -complet si per tota col.lecció $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $|\mathcal{C}| < \kappa$, $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{F}$.

1.9. Lema. Per tot conjunt A , si $\{X_n : n \in \omega\}$ és una col.lecció numerable de tancats i cofinals, la seva intersecció és tancat i cofinal.

Prova: Sigui $Y = \bigcap_{n \in \omega} X_n$. i) Y és cofinal: Si $t \in P_{\omega_1}(A)$, construïm per recursió una successió $\langle r_n : n \in \omega \rangle$ que satisfà: r_0 és un element de X_0 que inclou t (existeix perquè X_0 és cofinal) i suposant definit r_n , r_{n+1} és un element de $X_0 \cap \dots \cap X_{n+1}$ que inclou r_n (existeix perquè del Lema 1.4. se'n segueix que la intersecció d'un nombre finit de tancats i cofinals és tancat i cofinal).

Així construïda, per tot $n, m \in \omega$, si $n \leq m$, $r_m \in X_n$, així per ser cada X_n tancat $\bigcup_{m \geq n} r_m = \bigcup_{n \in \omega} r_n \in X_n$. Per tant tenim que $t \subseteq \bigcup_{n \in \omega} r_n$ i $\bigcup_{n \in \omega} r_n \in Y$. ii) Y és tancat: Si $\langle r_n : n \in \omega \rangle$ és una cadena numerable d'elements de Y , en particular ho és de cada X_n . Així per tot $n \in \omega$, per ser X_n tancat, $\bigcup_{n \in \omega} r_n \in X_n$. Per tant $\bigcup_{n \in \omega} r_n \in Y$. ■

1.10. Corol.lari. Donat un conjunt $A \neq \emptyset$, el filtre $\mathcal{F}(A)$ és ω_1 -complet.

1.11. Observació. Si A és un conjunt no numerable, $\mathcal{F}(A)$ no és un filtre principal.

Prova: Per tot $r \in P_{\omega_1}(A)$, per ser A no numerable, el conjunt $\{r' \in P_{\omega_1}(A) : r' - r \neq \emptyset\}$ és tancat i cofinal. Així per tot $r \in P_{\omega_1}(A)$, $\{r' \in P_{\omega_1}(A) : r' \neq r\}$, que inclou el conjunt $\{r' \in P_{\omega_1}(A) : r' - r \neq \emptyset\}$, pertany a $\mathcal{F}(A)$. Per tant $\bigcap \mathcal{F}(A) = \emptyset$, així $\mathcal{F}(A)$ no és un filtre principal (ja que si hi hagués $X \subseteq P_{\omega_1}(A)$, $X \neq \emptyset$ tal que $\mathcal{F}(A) = \{Y \subseteq P_{\omega_1}(A) : X \subseteq Y\}$, llavors com que $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}(A)$, $\bigcap \mathcal{F}(A) \neq \emptyset$). ■

1.12. Definició. Si A és conjunt i $\langle X_a : a \in A \rangle$ una col.lecció de subconjunts de $P_{\omega_1}(A)$, la intersecció diagonal de $\langle X_a : a \in A \rangle$, $\Delta_{a \in A} X_a$, és el conjunt $\{r \in P_{\omega_1}(A) : r \subseteq \bigcap_{a \in r} X_a\}$.

1.13. Definició. Donat un conjunt $A \neq \emptyset$, diem que un filtre \mathcal{F} sobre $P_{\omega_1}(A)$ és *normal* si està tancat sota interseccions diagonals.

1.14. Lema. Per tot conjunt A , si $\langle X_a : a \in A \rangle$ és una col.lecció de tancats i cofinals, llavors $\Delta_{a \in A} X_a$ és tancat i cofinal.

Prova: i) $\Delta_{a \in A} X_a$ és tancat: Sigui $\langle r_n : n \in \omega \rangle$ una cadena numerable d'elements de $\Delta_{a \in A} X_a$ i $r = \bigcup_{n \in \omega} r_n$. Suposem que $a \in r$, llavors hi ha $n \in \omega$ tal que $a \in r_n$, així per tot $m \geq n$ $a \in r_m$, per tant $r_m \in X_a$, doncs $r_m \in \Delta_{a \in A} X_a$. Així per ser X_a tancat, $\bigcup_{m \geq n} r_m = r \in X_a$. Llavors $r \subseteq \bigcap_{a \in r} X_a$ i així $r \in \Delta_{a \in A} X_a$. ii) $\Delta_{a \in A} X_a$ és cofinal: Si $t \in P_{\omega_1}(A)$, construïm per recursió una successió $\langle r_n : n \in \omega \rangle$ d'elements de $P_{\omega_1}(A)$ que satisfà: $r_0 = t$ i suposant definit r_n , r_{n+1} és un element de $\bigcap_{a \in r_n} X_a$ tal que $r_n \subseteq r_{n+1}$ (existeix un tal r_{n+1} perquè pel Lema 1.9., en ser r_n numerable i $\langle X_a : a \in A \rangle$ una col.lecció de tancats i cofinals, $\bigcap_{a \in r_n} X_a$ és un conjunt tancat i cofinal). Mostrem ara que si $r = \bigcup_{n \in \omega} r_n$, $r \in \bigcap_{a \in r} X_a$: Si $a \in r$, llavors hi ha $n \in \omega$ tal que $a \in r_n$. Per tant per definició de la successió $\langle r_n : n \in \omega \rangle$, per tot $m > n$ $r_m \in X_a$. Així $\langle r_m : m > n \rangle$ és una cadena numerable d'elements de X_a . Per tant com que X_a és tancat, $\bigcup_{m > n} r_m = r \in X_a$. Així $r \in \bigcap_{a \in r} X_a$ i $t \subseteq r$. ■

1.15. Corol.lari. Per tot conjunt $A \neq \emptyset$, el filtre $\mathcal{F}(A)$ és normal.

Observem que si $\langle X_a : a \in A \rangle$ és una col.lecció de tancats i cofinals, tal com hem definit la intersecció diagonal, $\bigcap_{a \in A} X_a \subseteq \Delta_{a \in A} X_a$. Però en general $\bigcap_{a \in A} X_a \neq \Delta_{a \in A} X_a$. Posem un exemple: Sigui A un conjunt no numerable. Considerem per cada $a \in A$, el conjunt

$X_a = \{t \in P_{\omega_1}(A) : a \in t\}$. Per tot $a \in A$, $X_a \in \mathcal{F}(A)$. Per tant, per ser A no numerable, $\bigcap_{a \in A} X_a = \emptyset$. Així $\bigcap_{a \in A} X_a \notin \mathcal{F}(A)$, però pel Corol.lari 1.15. tenim que $\Delta_{a \in A} X_a \in \mathcal{F}(A)$.

Observem també que, per un conjunt qualsevol A , si $\langle X_a : a \in A \rangle$ i $\langle Y_a : a \in A \rangle$ són col.leccions de tancats i cofinals tals que: per tot $a \in A$, $X_a \subseteq Y_a$; llavors per definició de intersecció diagonal, $\Delta_{a \in A} X_a \subseteq \Delta_{a \in A} Y_a$.

1.16. Definició. Sigui A un conjunt, diem que $Y \subseteq P_{\omega_1}(A)$ és *estacionari* sii per tot tancat i cofinal X , $X \cap Y \neq \emptyset$.

1.17. Observació. Per tot conjunt A , per tot $X, Y \subseteq P_{\omega_1}(A)$:

- i) Si Y és estacionari i X és tancat i cofinal, llavors $X \cap Y$ és estacionari.
- ii) Si X és tancat i cofinal, X és estacionari.
- iii) Si Y és estacionari, Y és cofinal.

Prova: i) Si Z és tancat i cofinal $Z \cap (X \cap Y) = (Z \cap X) \cap Y \neq \emptyset$ (ja que Y és estacionari i, pel Lema 1.4., $Z \cap X$ és tancat i cofinal). Per tant $X \cap Y$ és estacionari. ii) Pel Lema 1.4. la intersecció de dos tancats i cofinals no és buida, és un tancat i cofinal. Per tant si X és tancat i cofinal la intersecció de qualsevol tancat i cofinal amb X serà no buida, així X serà un conjunt estacionari. iii) Sigui $r \in P_{\omega_1}(A)$. Llavors el conjunt $X_r = \{r' \in P_{\omega_1}(A) : r \subseteq r'\}$ és tancat i cofinal. Així si Y és estacionari, $X_r \cap Y \neq \emptyset$. Per tant hi ha $r' \in Y$ tal que $r \subseteq r'$. Així Y és cofinal.

1.18. Lema. Donat un conjunt $A \neq \emptyset$, $X \in \mathcal{F}(A)$ sii X intersecta no vàcuament a tot conjunt estacionari.

Prova: D'una banda, per definició de conjunt estacionari, si $X \in \mathcal{F}(A)$, llavors X intersecta no vàcuament a tot conjunt estacionari. D'altra banda, si X intersecta no vàcuament a tot conjunt estacionari, llavors $P_{\omega_1}(A) - X$ no és estacionari. Si ho fos, $(P_{\omega_1}(A) - X) \cap X \neq \emptyset$. Per tant, hi ha un tancat i cofinal Y tal que $(P_{\omega_1}(A) - X) \cap Y = \emptyset$. Així $Y \subseteq X$. Llavors $X \in \mathcal{F}(A)$. ■

1.19. Corol.lari. Donat un conjunt $A \neq \emptyset$, Y és estacionari sii $P_{\omega_1}(A) - Y \notin \mathcal{F}(A)$.

1.20. Definició. Diem que un filtre \mathcal{F} sobre un conjunt S és un *ultrafiltre* sii per tot $X \subseteq S$, o $X \in \mathcal{F}$ o $S - X \in \mathcal{F}$.

1.21. Proposició. Si A és un conjunt no numerable i Y és estacionari, llavors hi ha una col.lecció no numerable de subconjunts estacionaris de Y disjunts dos a dos.

Prova: Per l'axioma d'elecció, escollim per cada $r \in P_{\omega_1}(A)$ una funció injectiva $f_r: r \rightarrow \omega$, i considerem per tot $a \in A$, per tot $n \in \omega$, el conjunt $X_{n,a} = \{r \in P_{\omega_1}(A) : f_r(a) = n\}$. Mostrem ara que, per tot $a \in A$, el conjunt $B_a = \bigcup_{n \in \omega} X_{n,a}$ és tancat i cofinal. Fixem $a \in A$, llavors: i) B_a és cofinal: Sigui $t \in P_{\omega_1}(A)$, llavors si $r = t \cup \{a\}$ i $n = f_r(a)$, tenim que $r \in X_{n,a}$ i per tant tenim $r \in B_a$ tal que $t \subseteq r$. ii) B_a és tancat: Sigui $\langle r_n : n \in \omega \rangle$ una cadena numerable d'elements de B_a , sigui $r = \bigcup_{n \in \omega} r_n$. Llavors $a \in r$ i si $k = f_r(a)$, $r \in X_{k,a} \subseteq B_a$. Per tant $r \in B_a$. Així donat que Y és estacionari, $Y \cap B_a$ és estacionari també, per l'Observació 1.17 i). A més a més, hi ha $n \in \omega$ tal que $X_{n,a} \cap Y$ és estacionari; altrament si per cada $n \in \omega$ hi hagués un tancat i cofinal C_n tal que $X_{n,a} \cap Y \cap C_n = \emptyset$, llavors $Y \cap B_a \cap (\bigcap_{n \in \omega} C_n) = \emptyset$. Absurd perquè $\bigcap_{n \in \omega} C_n$ és un tancat i cofinal (pel Lema 1.9). Així per tot $a \in A$ hi ha $n \in \omega$ tal que $Y \cap X_{n,a}$ és estacionari. Sigui n_a el nombre menor amb aquesta propietat. Considerem, per tot $n \in \omega$, el conjunt $D_n = \{a \in A : n_a = n\}$. Per algun $m \in \omega$, D_m és no numerable, doncs $\bigcup_{n \in \omega} D_n = A$ i A és un conjunt no numerable. Així $\{Y \cap X_{m,a} : a \in D_m\}$ és una col.lecció no numerable de subconjunts de Y estacionaris i els seus elements són disjunts dos a dos (fixem-nos que si $a \neq b$, $X_{n,a} \cap X_{n,b} = \emptyset$). ■

Observem que d'aquesta proposició se'n segueix que, si A és un conjunt no numerable, tot conjunt estacionari en A és no numerable. I per tant, tot conjunt tancat i cofinal en A és també no numerable. Però de la Proposició 1.21. se'n segueix un altre corol.lari que ens fa conèixer una característica important del filtre $\mathcal{F}(A)$: Sigui A un conjunt no numerable. Tenim que $P_{\omega_1}(A) \in \mathcal{F}(A)$. Llavors, per la Proposició 1.21., podem partir $P_{\omega_1}(A)$ en dos conjunt estacionaris, X i $Y = P_{\omega_1}(A) - X$. I per tant $X \notin \mathcal{F}(A)$ i $Y \notin \mathcal{F}(A)$. Així:

1.22. Corol.lari. Si A és un conjunt no numerable, $\mathcal{F}(A)$ no és un ultrafiltre.

Donem a continuació, amb l'ajut de jocs, un criteri per determinar per tot conjunt $A \neq \emptyset$, quan $X \subseteq P_{\omega_1}(A)$ pertany a $\mathcal{F}(A)$.

1.23. Definició. Si A és un conjunt no buit, sigui $G_X(A)$ el següent joc entre dos jugadors, I i II:

- i) $G_X(A)$ consta de ω moviments.
- ii) Al n èsim moviment tira primer I un element $a_n \in A$ i després tira II un element $b_n \in A$.
- iii) Si $\{a_n : n \in \omega\}$ és el conjunt de les tirades de I al final del joc i $\{b_n : n \in \omega\}$ les de II, guanya el jugador II si $\{a_n : n \in \omega\} \cup \{b_n : n \in \omega\} \in X$. Altrament guanya I.

1.24. Definició. Diem que f és una *funció finitària* en un conjunt A sii per algun $n \in \omega$, $f: A^{n+1} \rightarrow A$.

1.25. Definició. Diem que un conjunt $t \subseteq A$ està tancat sota una funció $f: A^{n+1} \rightarrow A$, si per tot $a_0 \dots a_n \in t$, $f(a_0 \dots a_n) \in t$.

1.26. Lema. Si \mathcal{R} és una família numerable de funcions finitàries en A , llavors el conjunt $T = \{t \in P_{\omega_1}(A) : t \text{ està tancat sota les funcions de } \mathcal{R}\}$ és tancat i cofinal en $P_{\omega_1}(A)$.

Prova: i) T és tancat: Si $\langle t_n : n \in \omega \rangle$ és una cadena d'elements de T , sigui $t = \bigcup_{n \in \omega} t_n$. Llavors si $a_0 \dots a_n \in t$, hi ha $n \in \omega$ tal que $a_0 \dots a_n \in t_n$, així com que $t_n \in T$, per tota $f \in \mathcal{R}$ $f(a_0 \dots a_n) \in t_n$. Per tant $f(a_0 \dots a_n) \in t$. Així t està tancat sota les funcions de \mathcal{R} , $t \in T$. ii) T és cofinal: Si $r \in P_{\omega_1}(A)$, sigui r' el conjunt resultant de tancar r sota les funcions de \mathcal{R} . Donat que \mathcal{R} és una família numerable de funcions finitàries, $r' \in P_{\omega_1}(A)$, així $r' \in T$ i $r \subseteq r'$. ■

Una estratègia per a un jugador, en un joc G qualsevol, és un conjunt d'instruccions que diuen al jugador com ha de tirar. Una estratègia per al jugador II en el joc $G_X(A)$ és una col.lecció de funcions $\mathcal{R} = \{f_n : n \in \omega\}$ tals que, per cada $n \in \omega$, f_n té per domini totes les possibles tirades de l'altre jugador en els n primers moviments. Diem que II està usant una estratègia \mathcal{R} , si en el n èsim moviment tira $f_n(a_0 \dots a_n)$, on $a_0 \dots a_n$ són les tirades de I en els n primers moviments. Diem que II té una estratègia guanyadora, \mathcal{R} , si sempre que II usa \mathcal{R} guanya.

1.27. Proposició. Per tot conjunt $A \neq \emptyset$, $X \subseteq P_{\omega_1}(A)$ pertany a $\mathcal{F}(A)$ sii el jugador II té una estratègia guanyadora pel joc $G_X(A)$, és a dir, sii:

(*) Hi ha una col.lecció $\mathcal{R} = \{f_n : n \in \omega\}$ de funcions tals que: per cada $n \in \omega$, $f_n : A^{n+1} \rightarrow A$ i per tota successió d'elements de A , $\langle a_n : n \in \omega \rangle$, $\{a_n : n \in \omega\} \cup \{f_n(a_0 \dots a_n) : n \in \omega\} \in X$.

Prova: \Leftarrow) Suposem (*) i considerem $T = \{t \in P_{\omega_1}(A) : t \text{ està tancat sota les funcions de } \mathcal{R}\}$. Pel Lema 1.26., T és tancat i cofinal. A més a més $T \subseteq X$. Suposem que $t \in T$. Sigui $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ una enumeració dels elements de t . Com que $t \in T$, t està tancat sota les funcions de \mathcal{R} . Així tenim que $t = t \cup \{f_n(a_0 \dots a_n) : a_0 \dots a_n \in t, n \in \omega\}$. I aquest darrer conjunt, per (*), pertany a X . Així $t \in X$. Per tant com que X inclou un tancat i cofinal, $X \in \mathcal{F}(A)$.

\Rightarrow) Suposem que $X \in \mathcal{F}(A)$. Sigui $Y \subseteq X$ tancat i cofinal. Considerem el conjunt $(\omega A) - \{\emptyset\}$ de totes les successions finites no nul·les d'elements de A ³. Definim per recursió sobre la relació ben fonamentada \subseteq en el conjunt $(\omega A) - \{\emptyset\}$, una col.lecció $\langle s_t : t \in (\omega A) - \{\emptyset\} \rangle$ d'elements de Y tal que:

i) Si $t \subseteq t'$, $s_t \subseteq s_{t'}$

³ Notació: $(\omega A) - \{\emptyset\} = \{t : n+1 \rightarrow A : n \in \omega\}$

ii) Si $t : n+1 \rightarrow A$, llavors $t(n) \in s_t$

Aquesta successió està ben definida, per cofinalitat de Y . Sigui $P = \{P_m : m \in \omega\}$ una partició de ω en ω conjunts de cardinalitat ω disjunts dos a dos i tals que: per tot $n, m \in \omega$, si $n \in P_m$ llavors $m \leq n$ ⁴. Per elecció fixem, per tot $m \in \omega$, per cada successió t de longitud m ⁵, una bijecció $g_t : P_m \rightarrow s_t$ ⁶. Definirem ara una col.lecció $\mathcal{R} = \{f_n : n \in \omega\}$ de funcions que satisfaran (*):

Per cada $n \in \omega$, $f_n : A^{n+1} \rightarrow A$ i per tot $a_0 \dots a_n \in A$, $f_n(a_0 \dots a_n) = g_{\langle a_0 \dots a_n \rangle}(n)$
(on P_m és l'únic conjunt de la partició tal que $n \in P_m$).

Verifiquem que la col.lecció \mathcal{R} satisfà (*): Sigui $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ una successió d'elements de A , tenim que per cada $n \in \omega$, $s_{\langle a_0 \dots a_n \rangle} \in Y$. Considerem $s = \bigcup_{n \in \omega} s_{\langle a_0 \dots a_n \rangle}$. Tenim que $s \in Y$, perquè Y és tancat. Veiem que $\{a_n : n \in \omega\} \cup \{f_n(a_0 \dots a_n) : n \in \omega\} = s$. D'una banda, per definició de la col.lecció \mathcal{R} , tenim que $\{f_n(a_0 \dots a_n) : n \in \omega\} \subseteq s$. I $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq s$, perquè per ii) de la definició de la col.lecció $\langle s_t : t \in (\omega A) - \{\emptyset\} \rangle$, per tot $n \in \omega$ $a_n \in s_{\langle a_0 \dots a_n \rangle}$, i així per tot $n \in \omega$ tenim que $a_n \in s$. Per tant $\{a_n : n \in \omega\} \cup \{f_n(a_0 \dots a_n) : n \in \omega\} \subseteq s$. D'altra banda, si $x \in s$ per algun $n \in \omega$, $x \in s_{\langle a_0 \dots a_n \rangle}$. Així per algun $y \in P_n$ $y \geq n$, $x = g_{\langle a_0 \dots a_n \rangle}(y)$. Llavors $x = f_y(a_0 \dots a_y)$ i per tant $x \in \{f_n(a_0 \dots a_n) : n \in \omega\}$. Així $s \subseteq \{a_n : n \in \omega\} \cup \{f_n(a_0 \dots a_n) : n \in \omega\}$. Tenim doncs que \mathcal{R} satisfà (*). ■

Finalment veiem la relació que hi ha, per un conjunt A de cardinalitat ω_1 , entre $\mathcal{F}(A)$ i el filtre dels tancats i cofinals de ω_1 ⁷, i entre $\mathcal{F}(A)$ i altres filtres normals sobre $P_{\omega_1}(A)$.

1.28. Definició. Sigui A un conjunt de cardinalitat ω_1 , diem que $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ és una *filtració* de A si:

- i) Per tot $\alpha < \omega_1$, $A_\alpha \in P_{\omega_1}(A)$ i $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$
- ii) $A = \bigcup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$

1.29. Observació. Si A és un conjunt de cardinalitat ω_1 , tota filtració de A és un conjunt tancat i cofinal.

1.30. Lema. Per tot conjunt A de cardinalitat ω_1 hi ha una filtració $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ de A .

⁴ Existeix una partició tal: Sigui $\langle p_m : m > 0 \rangle$ una enumeració dels nombres primers en ordre creixent, llavors sigui $P_m = \{p_m^n : n > 0\}$ per $m > 0$ i sigui $P_0 = \omega - \bigcup_{m > 0} P_m$.

⁵ Diem que una successió t té longitud m si $t : m+1 \rightarrow A$.

⁶ En cas que s_t sigui un conjunt finit, prenem g_t una funció sobre s_t .

⁷ Podem trobar la definició del filtre dels tancats i cofinals per un cardinal κ regular, no numerable, i la prova de les seves propietats bàsiques a [6], pp.52-61.

Prova: Sigui $\{a_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ una enumeració de A . Definim per recursió una successió $\langle A_\alpha: \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjunts numerables de A tal que:

- i) $A_0 = \emptyset$
- ii) $A_\alpha \cup \{a_\alpha\} \subseteq A_{\alpha+1}$
- iii) Si $\alpha < \omega_1$ és un ordinal límit, $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$

Llavors $\langle A_\alpha: \alpha < \omega_1 \rangle$ és una filtració de A . ■

1.31. Corol.lari. Si A és un conjunt de cardinalitat ω_1 , tot conjunt tancat i cofinal inclou una filtració de A .

Prova: Sigui X un tancat i cofinal i sigui $\langle A_\alpha: \alpha < \omega_1 \rangle$ una filtració de A (n'existeix una pel Lema 1.30.). Llavors reenumerant $X \cap \{A_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ obtenim una filtració de A . ■

1.32. Definició. Diem que $X \subseteq \omega_1$ és un conjunt *tancat* en ω_1 sii per tot $\lambda < \omega_1$, per tota successió creixent d'elements de X , $\langle \alpha_\mu: \mu < \lambda \rangle$ tenim que $\bigcup_{\mu < \lambda} \alpha_\mu \in X$.

1.33. Definició. Diem que $X \subseteq \omega_1$ és un conjunt *cofinal* en ω_1 sii per tot $\beta < \omega_1$, hi ha $\alpha \in X$ tal que $\beta \leq \alpha$.

1.34. Proposició. Sigui A un conjunt de cardinalitat ω_1 i $\langle A_\alpha: \alpha < \omega_1 \rangle$ una filtració de A . Llavors si $X \subseteq P_{\omega_1}(A)$, $X \in \mathcal{F}(A)$ sii $\{\alpha < \omega_1: A_\alpha \in X\}$ inclou un conjunt tancat i cofinal en ω_1 .

Prova: Suposem que $X \in \mathcal{F}(A)$. Sigui $X' = X \cap \{A_\alpha: \alpha < \omega_1\}$, X' és un conjunt tancat i cofinal. Sigui $Y = \{\alpha < \omega_1: A_\alpha \in X'\}$: i) Y és cofinal en ω_1 : Suposem que $\beta < \omega_1$, considerem A_β . Per ser X' cofinal, hi haurà $\alpha < \omega_1$ tal que $A_\beta \subseteq A_\alpha$ i $A_\alpha \in X'$. Per tant $\beta \leq \alpha$ i $\alpha \in Y$. ii) Y és tancat en ω_1 : Sigui $\lambda < \omega_1$ i $\langle \alpha_\mu: \mu < \lambda \rangle$ una successió creixent d'ordinals de Y . Sigui $\langle \beta_n: n \in \omega \rangle$ una successió creixent d'ordinals de Y inclosa en aquesta primera i tal que $\bigcup_{n < \omega} \beta_n = \bigcup_{\mu < \lambda} \alpha_\mu$. Considerem la cadena corresponent en X' , $\langle A_{\beta_n}: n < \omega \rangle$. Per ser X' un conjunt tancat, $\bigcup_{n < \omega} A_{\beta_n} \in X'$. Però per ser $\langle A_\alpha: \alpha < \omega_1 \rangle$ una filtració de A , $\bigcup_{n < \omega} A_{\beta_n} = A_{(\bigcup_{n < \omega} \beta_n)}$. Per tant $\bigcup_{n < \omega} \beta_n = \bigcup_{\mu < \lambda} \alpha_\mu \in Y$. Així tenim que el conjunt $\{\alpha < \omega_1: A_\alpha \in X\}$ inclou el conjunt Y , que és tancat i cofinal en ω_1 . Per un argument anàleg es mostra que si $\{\alpha < \omega_1: A_\alpha \in X\}$ inclou un conjunt tancat i cofinal en ω_1 , llavors $X \in \mathcal{F}(A)$. ■

1.35. Proposició. Si A és un conjunt de cardinalitat ω_1 i \mathcal{F} un filtre normal sobre $P_{\omega_1}(A)$ que satisfà:

- (*) Per tot $t \in P_{\omega_1}(A)$, $\{r \in P_{\omega_1}(A): t \subseteq r\} \in \mathcal{F}$.

Llavors:

- i) \mathcal{F} és un filtre ω_1 -complet.

ii) $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}$.

Prova: Suposem que A és un conjunt de cardinalitat ω_1 i \mathcal{F} un filtre normal sobre $P_{\omega_1}(A)$ que satisfà (*). i) Sigui $\{X_n: n \in \omega\}$ una col.lecció d'elements de \mathcal{F} . Mostrem que $\bigcap_{n \in \omega} X_n \in \mathcal{F}$. Sigui $\{a_\alpha: \alpha \in \omega_1\}$ una enumeració de A . Considerem la col.lecció d'elements de \mathcal{F} , $\langle Y_{a_\alpha}: \alpha \in \omega_1 \rangle$, definida a continuació: Per tot $n \in \omega$, $Y_{a_n} = X_n$ i per $\alpha \geq \omega$, $Y_{a_\alpha} = P_{\omega_1}(A)$. Per normalitat de \mathcal{F} , $\Delta_{\alpha \in \omega_1} Y_{a_\alpha}$, diguem-li Y , pertany a \mathcal{F} . I com que \mathcal{F} satisfà (*), el conjunt $Z = \{t \in P_{\omega_1}(A): \{a_n: n \in \omega\} \subseteq t\} \in \mathcal{F}$. Considerem $Y \cap Z$. Per ser \mathcal{F} un filtre, $Y \cap Z \in \mathcal{F}$. I com que $Y \cap Z \subseteq \bigcap_{n \in \omega} X_n$, $\bigcap_{n \in \omega} X_n \in \mathcal{F}$.

ii) Suposem que $X \in \mathcal{F}(A)$. Volem mostrar que $X \in \mathcal{F}$. Sigui C un tancat i cofinal inclòs en X . Sigui $\{a_\alpha: \alpha \in \omega_1\}$ una enumeració de A . Definim per recursió una filtració de A , $\langle A_\alpha: \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que: Per tot $\alpha < \omega_1$, $A_\alpha \in C$. Sigui A_0 un element de C que contingui a_0 (existeix un A_0 tal per cofinalitat de C). I suposant definit $A_\alpha \in C$, sigui $A_{\alpha+1}$ un element de C que inclogui $A_\alpha \cup \{a_{\alpha+1}\}$ (existeix un $A_{\alpha+1}$ tal per cofinalitat de C). I per α límit, suposant definits per cada $\beta < \alpha$, $A_\beta \in C$, sigui $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$. Observem que així definit, A_α pertanyerà a C perquè C és un conjunt tancat). Considerem ara, per cada $\alpha < \omega_1$, el conjunt $X_{a_\alpha} = \{t \in P_{\omega_1}(A): A_\alpha \subseteq t\}$. Com que \mathcal{F} satisfà (*), X_{a_α} pertanyerà a \mathcal{F} . I en ser \mathcal{F} normal, la intersecció diagonal $\Delta_{\alpha \in \omega_1} X_{a_\alpha}$, diguem-li Y , pertany a \mathcal{F} . Però resulta que $Y \subseteq C$, vegem-ho. Mostrem en primer lloc que si $t \in Y$, $t = \bigcup_{a_\alpha \in t} A_\alpha$. Suposem que $t \in Y$. Llavors per cada $a_\alpha \in t$, per definició de Y , $A_\alpha \subseteq t$. Així $\bigcup_{a_\alpha \in t} A_\alpha \subseteq t$. I d'altra banda, tal com hem definit la filtració, per cada $\alpha < \omega_1$, $a_\alpha \in A_\alpha$. Per tant $t \subseteq \bigcup_{a_\alpha \in t} A_\alpha$. Però com que la filtració és un conjunt tancat, sent t un conjunt numerable, $\bigcup_{a_\alpha \in t} A_\alpha$ és un element de la filtració i, per tant, de C . Així doncs, $t \in C$. Tenim que $Y \subseteq C$. I com que $Y \in \mathcal{F}$, per ser \mathcal{F} un filtre, $C \in \mathcal{F}$. Finalment com que C està inclòs en X , $X \in \mathcal{F}$.

Per tant, $\mathcal{F}(A)$ és el menor filtre normal sobre $P_{\omega_1}(A)$ que satisfà (*). ■

2. Sintaxi i Semàntica dels llenguatges de L_{aa} .

Introduïm ara la sintaxi i la semàntica dels llenguatges de L_{aa} i donem després alguns exemples que ens mostraran el poder expressiu d'aquesta lògica.

Fixat un tipus de semblança τ , si $L(\tau)$ és el llenguatge de la Lògica de Primer Ordre de tipus τ ; l'alfabet del llenguatge $L_{aa}(\tau)$ conté, en addició als símbols de l'alfabet de $L(\tau)$, un nombre infinit numerable de variables predicatives $s_0 \dots s_n \dots$ i el quantificador aa . Podem definir $L_{aa}(\tau)$ com el conjunt generat per les regles de formació de fórmules de la Lògica de Primer Ordre, juntament amb les següents:

- i) Si s és una variable predicativa i t és un terme del llenguatge $L(\tau)$, $s(t)$ és una fórmula de $L_{aa}(\tau)$.
- ii) Si ϕ és una fórmula de $L_{aa}(\tau)$ i s una variable predicativa, llavors $aa\phi$ és una fórmula de $L_{aa}(\tau)$.

Sigui per cada terme t de L , $\text{var}(t)$ el conjunt de les variables que ocorren en t . Definim $Ll(\phi)$, el conjunt de les variables lliures de ϕ , per inducció sobre la complexitat de ϕ , afegint a la definició usual en Lògica de Primer Ordre les següents clàusules:

- i) $Ll(s(t)) = \{s\} \cup \text{var}(t)$
- ii) $Ll(aa\phi) = Ll(\phi) - \{s\}$

Una sentència ϕ de $L_{aa}(\tau)$ és una fórmula d'aquest llenguatge tal que $Ll(\phi) = \emptyset$.

2.1. Definició. Donada una estructura A de tipus τ , per tot $k, m \in \omega$, si $a = a_0 \dots a_k$ és una successió d'elements de A , $r = r_0 \dots r_m$ una successió d'elements de $P_{\omega_1}(A)$ i $\phi(x_0 \dots x_k, s_0 \dots s_m) \in L_{aa}(\tau)$, definim $A \models_{L_{aa}} \phi[a, r]$ per inducció sobre la complexitat de ϕ , afegint a la definició usual en Lògica de Primer Ordre les següents clàusules:

- i) $A \models_{L_{aa}} s_i(x_j) [a, r]$ sii $a_j \in r_i$
- ii) $A \models_{L_{aa}} aa\phi(s)[a, r]$ sii $\{t \in P_{\omega_1}(A) : A \models_{L_{aa}} \phi[a, r, t]\} \in \mathcal{F}(A)$

Podríem expressar ii) d'una manera intuïtiva, encara que més imprecisa, dient que $A \models_{L_{aa}} \phi[a, r, t]$ per gairebé tot subconjunt numerable t de A .

2.2. Definició. Introduïm un nou quantificador, *stat*:

Per tota fórmula $\phi(s) \in L_{aa}(\tau)$, $\text{stats}\phi(s) \equiv_{\text{def}} \neg \text{aas} \neg \phi(s)$.

2.3. Lema. Per tota fórmula $\phi(s)$, $A \models \text{stats}\phi(s)$ ¹ sii $\{t \in P_{\omega_1}(A) : A \models \phi[t]\}$ és estacionari.

Prova: $A \models \text{stats}\phi(s)$ sii $A \models \neg \text{aas} \neg \phi(s)$ (per la Definició 2.2.)
 sii $\{t \in P_{\omega_1}(A) : A \models \neg \phi[t]\} \notin \mathcal{F}(A)$
 sii $\{t \in P_{\omega_1}(A) : A \models \phi[t]\}$ és estacionari (pel Corol.lari 1.19.) ■

2.4. Lema. Si A és un conjunt numerable, $A \models \text{aas}\phi(s)$ sii $A \models \phi[A]$.

Prova: $A \models \text{aas}\phi(s)$ sii $\{t \in P_{\omega_1}(A) : A \models \phi[t]\} \in \mathcal{F}(A)$
 sii $\{A\} \subseteq \{t \in P_{\omega_1}(A) : A \models \phi[t]\}$ (per la Proposició 1.7)
 sii $A \models \phi[A]$ ■

Veiem ara algunes mostres del poder expressiu de L_{aa} :

2.5. Observació. Sigui τ un tipus de semblança. Llavors per tota $\phi \in L_{aa}(\tau)$, podem expressar "Hi ha un nombre no numerable de x tals que $\phi(x)$ ". Ho fem mitjançant la sentència $\alpha = \text{aas} \exists x (x \notin s \wedge \phi(x))$ ², on s és una variable predicativa que no ocorre en ϕ .

Prova: Sigui A una estructura de tipus τ tal que $A \models \alpha$. Sigui $X = \{t \in P_{\omega_1}(A) : A \models \exists x (x \notin s \wedge \phi(x))[t]\}$ i $r = \{a \in A : A \models \phi[a]\}$. Suposem, buscant una contradicció, que r és numerable. Per cofinalitat de X , hi ha $m \in X$ tal que $r \subseteq m$. Absurd, perquè $m \in X$ i per tant hi ha $a' \in A$ tal que $A \models \phi[a']$ i $a' \notin m$. És a dir, hi ha $a' \in r - m$. Inversament si $A \models \neg \alpha$, llavors $X \notin \mathcal{F}(A)$. Per tant pel Lema 1.19, $P_{\omega_1}(A) - X$ és estacionari. Així hi ha $t \in P_{\omega_1}(A)$ tal que $A \models \neg \exists x (x \notin s \wedge \phi(x))[t]$. Per tant $r \subseteq t$. Així r és numerable. ■

2.6. Corol.lari. Podem definir a L_{aa} el quantificador "Qx" de la lògica $L(Q_I)$ ³

Prova: $Qx \equiv_{\text{def}} \text{aas} \exists x \notin s$.

¹ Notació: A partir d'ara farem servir \models enlloc de $\models_{L_{aa}}$, sempre que el context ho permeti.

² Notació: Introduïm $x \in s \equiv_{\text{def}} s(x)$ i $x \notin s \equiv_{\text{def}} \neg s(x)$. I $\exists x \in s \phi \equiv_{\text{def}} \exists x (s(x) \wedge \phi)$ i $\exists x \notin s \phi \equiv_{\text{def}} \exists x (\neg s(x) \wedge \phi)$.

³ $L(Q_I)$ és la lògica que afegeix al Llenguatge de Primer Ordre el quantificador "Qx" i l'interpreta com "Hi ha un nombre no numerable de x ". L'article bàsic d'introducció a $L(Q_I)$ és [10].

2.7. Corol.lari. El Teorema de Löwenheim-Skolem ascendent no val per L_{aa} .

Prova: Hi ha una sentència que no té models de cardinalitat major que ω : $\neg Qx(x \approx x)$. ■

2.8. Corol.lari. El Teorema de Löwenheim-Skolem descendent no val per L_{aa} .

Prova: Per tot conjunt de sentències T , en un llenguatge numerable $L_{aa}(\tau)$, tal que $Qx(x \approx x) \in T$, T no té models numerables. ■

2.9. Definició. Diem que una lògica L és κ -compacta (per un cardinal κ) sii per tot conjunt de sentències T d'un llenguatge L de la lògica L , que tingui cardinalitat menor o igual que κ , passa que: Si tot subconjunt finit de T té un model, llavors T té un model.

Veiem ara un altre corol.lari de l'Observació 2.5.:

2.10. Corol.lari. L_{aa} no és κ -compacta per cap cardinal $\kappa > \omega$.

Prova: Hi ha un conjunt T no numerable de sentències del llenguatge de tipus $\tau = \{c_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ (on per cada $\alpha \in \omega_1$, c_α és un símbol constant individual i per cada $\alpha < \beta < \omega_1$, $c_\alpha \neq c_\beta$) tal que tot subconjunt finit de T té un model, però T no té cap model. Prenem $T = \{\neg Qx(x \approx x)\} \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha < \beta < \omega_1\}$. ■

2.11. Observació. Podem expressar a L_{aa} "R té un nombre numerable de classes d'equivalència" mitjançant la sentència $\beta = aas \forall x \exists y (xRy \wedge y \in s) \wedge \sigma$ (on σ és la sentència de la Lògica de Primer Ordre que expressa "R és una relació d'equivalència").

Prova: Sigui $X = \{t \in P_{\omega_1}(A) : |A| = \forall x \exists y (xRy \wedge y \in s)[t]\}$. Suposem que $|A| = \beta$. Així $X \in \mathcal{F}(A)$. Però llavors, si R fos una relació d'equivalència en A amb un nombre no numerable de classes d'equivalència, $X = \emptyset$. Absurd, perquè per la definició de filtre (Definició 1.2. iv), $\emptyset \notin \mathcal{F}(A)$. Inversament, si R té un nombre numerable de classes d'equivalència, sigui r un conjunt que contingui un representant de cada classe. Així $r \in P_{\omega_1}(A)$ i el conjunt $Y = \{t \in P_{\omega_1}(A) : r \subseteq t\}$ és tancat i cofinal. Per tant com que $Y \subseteq X$, $X \in \mathcal{F}(A)$ i $|A| = \beta$. ■

2.12. Definició. Sigui κ un cardinal i $<$ un ordre lineal en un conjunt A , diem que $f: \kappa \rightarrow A$ és una *funció contínua* sii per tot ordinal límit $\alpha < \kappa$, si el $\text{Sup}\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$ existeix, llavors $f(\alpha) = \text{Sup}\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$. I diem que f és una *funció normal* sii f és una funció contínua i estrictament creixent.

2.13. Definició. Si κ és un cardinal i $<$ un ordre lineal en un conjunt A . Diem que $f: \kappa \rightarrow A$ és una *funció cofinal* sii per tot $a \in A$, hi ha $\alpha < \kappa$ tal que $a \leq f(\alpha)$.

2.14. Observació. La sentència $\gamma = \aleph_1 \wedge \exists x(x \notin s \wedge x \approx x) \wedge \aleph_1 \wedge \exists x \forall y(y < x \leftrightarrow y \in s) \wedge \sigma$ (on σ és la sentència de la Lògica de Primer Ordre que expressa " $<$ és un ordre lineal") és vertadera en una estructura linealment ordenada $A = (A, <)$ de cardinalitat ω_1 sii hi ha una funció normal cofinal de ω_1 en A i tot element de A té un nombre numerable de predecessors en l'ordre lineal $<$ ⁴.

Prova: Suposem que $A \models \gamma$ i A té cardinalitat ω_1 . Llavors el conjunt $X = \{t \in P_{\omega_1}(A) : A \models \exists x \forall y(y < x \leftrightarrow y \in s)[t]\}$ pertany a $\mathcal{F}(A)$. I si $a \in A$, per cofinalitat de X , hi ha $r \in X$ tal que $\{a\} \subseteq r$. Per tant, com que hi ha $a' \in A$ tal que $r = \text{Pred}_{<}(a')$ ⁵, tenim que $a < a'$ i $\text{Pred}_{<}(a) \subseteq \text{Pred}_{<}(a') \subseteq r$. Així a té un nombre numerable de predecessors en l'ordre $<$. Sigui $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ una filtració de A inclosa en X (n' existeix una pel Corol.lari 1.30., perquè A té cardinalitat ω_1). Per tant la funció $f: \omega_1 \rightarrow A$ així definida:

$$\text{Per tot } \alpha < \omega_1, f(\alpha) = a \text{ (on } A_\alpha = \text{Pred}_{<}(a))$$

és normal i cofinal perquè $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ és una filtració de A . Inversament, sigui $<$ un ordre lineal en A i sigui f una funció normal cofinal de ω_1 en A . Suposem que tot element de A té un nombre numerable de predecessors en l'ordre $<$. Llavors A té cardinalitat ω_1 . Així, per ser f una funció normal i cofinal $\langle \text{Pred}_{<}(f(\alpha)) : \alpha < \omega_1 \rangle$ és una filtració de A inclosa en X . Per tant $X \in \mathcal{F}(A)$ i $A \models \gamma$. ■

A $L(Q_1)$ es poden caracteritzar els anomenats ordres lineals ω_1 -like (ordres lineals no numerables tals que tot element de l'ordre té un nombre numerable de predecessors) mitjançant la sentència $\sigma \wedge Qx(x \approx x) \wedge \forall y \neg Qx(x < y)$ (on σ és la sentència de la Lògica de Primer Ordre que expressa " $<$ és un ordre lineal"). A L_{aa} podem caracteritzar els ordres lineals strongly ω_1 -like. Donem un exemple d'ordre lineal ω_1 -like que no sigui strongly ω_1 -like: Prenem ω_1 amb el seu ordre usual, i reemplaçem cada $\alpha < \omega_1$ per una còpia de $(\mathbb{Z}, <)$, els nombres enters amb el seu ordre usual. Diguem $A = (A, <)$ a l'ordre resultant. A és clarament un ordre lineal ω_1 -like, però no és un ordre lineal strongly ω_1 -like, mostrem-ho: Suposem, buscant una contradicció, que hi ha una funció cofinal i normal, h , de ω_1 en A . Prenem una successió numerable i estrictament creixent d'ordinals menors que ω_1 , $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$, tal que per cada $n \in \omega$ $\{a \in A : h(\alpha_n) < a < h(\alpha_{n+1})\}$ sigui un conjunt infinit (existeix una successió tal perquè h és cofinal

⁴ Aquest tipus d'ordre s'anomenen usualment "strongly ω_1 -like orders".

⁵ On per cada $a \in A$ $\text{Pred}_{<}(a) = \{x \in A : x < a\}$

en A i la cofinalitat de A és ω_1). Sigui $\beta = \bigcup_{n \in \omega} \alpha_n$. Tenim doncs que β és un ordinal límit. Per tant, per ser h una funció normal i per tal com hem definit la successió $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$, tenim que $h(\beta) = \text{Sup}\{h(\alpha) : \alpha \in \beta\} = \text{Sup}\{h(\alpha_n) : n \in \omega\}$. Però si a és l'element de A tal que $a = h(\beta)$, per tal com hem construït A , hi ha $b < a$ pertanyent a la mateixa còpia dels enters que a . Però llavors per tal com hem definit la successió $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$, per tot $n \in \omega$, $h(\alpha_n) < b$. Absurd perquè $a = \text{Sup}\{h(\alpha_n) : n \in \omega\}$. Per tant A no és un ordre lineal strongly ω_1 -like.

2.15. Observació. Podem expressar a L_{aa} "és un ordre lineal de cofinalitat ω sense darrer element" mitjançant la sentència $\rho = \text{aas} \forall x [\exists y \in s(x < y)] \wedge \sigma$ (on σ és la sentència de Primer ordre que expressa "és un ordre lineal sense darrer element").

Prova: Sigui $X = \{t \in P_{\omega_1}(A) : A|_t = \forall x [\exists y \in s(x < y)] [t]\}$. Suposem que $<$ és un ordre lineal en A sense darrer element i f és una funció cofinal de ω en A . Llavors si $r = \{f(n) : n \in \omega\}$, $Y = \{t \in P_{\omega_1}(A) : r \subseteq t\}$ és tancat i cofinal. Per tant com que $Y \subseteq X$, tenim que $X \in \mathcal{F}(A)$ i $A|_X = \rho$. Inversament, si $A|_X = \rho$, llavors $X \in \mathcal{F}(A)$. Així $X \neq \emptyset$. Sigui $t \in X$. Per ser $<$ un ordre lineal sense darrer element, t és infinit numerable. Prenem doncs una bijecció f de ω en t . Tenim que f és una funció cofinal de ω en A . Per tant $<$ és un ordre de cofinalitat ω . ■

$L(Q_{\aleph_0}^{cf})$ ⁶ és la lògica que afegeix el quantificador " $Q_{\aleph_0}^{cf} x, y$ " al Llenguatge de Primer

Ordre i que té la següent semàntica: Fixat un tipus de semblança τ , per tota estructura A de ti-

pus τ , per tota fórmula $\phi \in L(Q_{\aleph_0}^{cf})(\tau)$:

$A|_X = Q_{\aleph_0}^{cf} x, y \phi(x, y)$ sii $\{ \langle a, b \rangle : A|_X = \phi[a, b] \}$ és un ordre lineal sense darrer element i de cofinalitat ω en el conjunt $\{a \in A : \text{hi ha } b \in A \text{ tal que } A|_X = \phi[a, b]\}$.

2.16. Corol.lari. Podem definir a L_{aa} el quantificador " $Q_{\aleph_0}^{cf}$ " de la lògica $L(Q_{\aleph_0}^{cf})$.

Prova: Per l'Observació 2.15., podem definir: $Q_{\aleph_0}^{cf} x, y \phi(x, y) \equiv_{\text{def}} \text{aas} \forall x [\exists y \in s \phi(x, y)] \wedge \sigma$ (on σ és la sentència de la Lògica de Primer Ordre que expressa "El conjunt dels $\langle x, y \rangle$ tals que $\phi(x, y)$ és un ordre lineal sense darrer element"). ■

⁶ La lògica $L(Q_{\aleph_0}^{cf})$ va ser introduïda per S. Shelah en els articles [15] i [16].

2.17. Definició. Diem que un ordre lineal $A=(A,<)$ és dens sii A té, si més no, dos elements i si per tot $x,y \in A$ tals que $x<y$, hi ha $z \in A$ tal que $x<z<y$. Donat un ordre lineal $A=(A,<)$ diem que un subconjunt $B \subseteq A$ és *dens en A* sii per tot $x,y \in A$ tals que $x<y$, hi ha $z \in B$ tal que $x<z<y$. I diem que un ordre lineal $A=(A,<)$ és *separable* sii A té un subconjunt dens numerable.

2.18. Observació. Podem expressar a L_{aa} " $<$ és un ordre lineal dens separable" mitjançant la sentència $\rho = \forall x \forall y [x < y \rightarrow \exists z \in s(x < z < y)] \wedge \sigma$ (on σ és la sentència de Primer Ordre que expressa " $<$ és un ordre dens").

Prova: L'argument és anàleg al de la prova de 2.15. ■

Observem que aquesta sentència de L_{aa} no tindrà models en cardinalitats majors que la del continu.

3. $S_{L_{aa}}$ un sistema deductiu axiomàtic per L_{aa}

3.1. Definició. Donada una fórmula ϕ diem que ψ és una clausura quasi-universal de ϕ si ψ és obtinguda a partir de prefixar ϕ amb un nombre finit (possiblement zero) de quantificadors del tipus aa i \forall .

Donem ara un sistema deductiu axiomàtic per L_{aa} : $S_{L_{aa}}$. El seu conjunt d'axiomes, Λ , està format per les clausures quasi-universals de les fórmules de les següents formes:

- (PO) Els axiomes de la Lògica de Primer Ordre.¹
- A.0 $aas_i \phi(s_i) \leftrightarrow aas_j \phi(s_j)$
(on s_j no ocorre a $\phi(s_i)$, i $\phi(s_j)$ és el resultat de reemplaçar totes les ocurrences lliures de s_i per s_j)
- A.1 $\neg aas \exists x (x \neq x)$ ²
- A.2 $aas(x \in s)$
 $aas_i (s_j \subseteq s_i)$ (per $i \neq j$)³
- A.3 $aas \phi \wedge aas \psi \rightarrow aas(\phi \wedge \psi)$
- A.4 $aas(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (aas \phi \rightarrow aas \psi)$
- A.5 $\forall x aas \phi(x, s) \rightarrow aas \forall x \in s \phi(x, s)$
- A.6 $\phi \rightarrow aas \phi$ (on s no ocorre lliure en ϕ)

La seva única regla d'inferència és el *modus ponens*

Observem que els axiomes són correctes. Fixem-nos en particular:

A.1- Sigui A un model. Per ser $\mathcal{F}(A)$ un filtre, $\emptyset \notin \mathcal{F}(A)$ (Definició 1.2.iv)). Així, com que $\{t \in P_{\omega_1}(A) : A \models \perp[t]\} = \emptyset$, $A \models \neg aas \perp$.

A.2- Per tot model A , per tot $b \in A$, $\{t \in P_{\omega_1}(A) : \{b\} \subseteq t\} \in \mathcal{F}(A)$, així $A \models aas x \in s[b]$. I donat que per tot $t' \in P_{\omega_1}(A)$, $\{t \in P_{\omega_1}(A) : t' \subseteq t\} \in \mathcal{F}(A)$, llavors $A \models aas_i s_j \subseteq s_i[t']$.

¹ D'entre les diferents axiomatitzacions de la Lògica de Primer Ordre prenem la de [5], pàgina 104.

² Notació: Introduïm $\perp \equiv_{\text{def}} \exists x (x \neq x)$.

³ Notació: " $s_j \subseteq s_i$ " abreuja " $\forall x (s_j(x) \rightarrow s_i(x))$ "

A.3- Per tot model A , per tota successió $a=a_0...a_k$ d'elements de A i tota successió $r=r_0...r_m$ d'elements de $P_{\omega_1}(A)$, si $A|=aas\phi\wedge aas\psi[a,r]$, llavors $\{t\in P_{\omega_1}(A):A|=t\phi[a,r,t]\}\in\mathcal{F}(A)$ i $\{t\in P_{\omega_1}(A):A|=t\psi[a,r,t]\}\in\mathcal{F}(A)$. Donat que $\mathcal{F}(A)$ és un filtre (Proposició 1.5.), tenim que la intersecció d'aquests dos conjunts pertany a $\mathcal{F}(A)$. Així $\{t\in P_{\omega_1}(A):A|=t\phi\wedge\psi[a,r,t]\}\in\mathcal{F}(A)$. Per tant, $A|=aas(\phi\wedge\psi)[a,r]$. Així $A|=aas\phi\wedge aas\psi\rightarrow aas(\phi\wedge\psi)[a,r]$.

A.4- Per tot model A , per tota successió $a=a_0...a_k$ d'elements de A i tota successió $r=r_0...r_m$ d'elements de $P_{\omega_1}(A)$, si $A|=aas(\phi\rightarrow\psi)[a,r]$ i $A|=aas\phi[a,r]$, llavors $\{t\in P_{\omega_1}(A):A|=t\phi\rightarrow\psi[a,r,t]\}\in\mathcal{F}(A)$ i $\{t\in P_{\omega_1}(A):A|=t\phi[a,r,t]\}\in\mathcal{F}(A)$. Per tant, per ser $\mathcal{F}(A)$ un filtre, també hi pertany la seva intersecció, que està inclosa en $\{t\in P_{\omega_1}(A):A|=t\psi[a,r,t]\}$. Així aquest darrer conjunt, per ser $\mathcal{F}(A)$ un filtre, pertany a $\mathcal{F}(A)$. Així $A|=aas\psi[a,r]$. Llavors tenim que $A|=aas(\phi\rightarrow\psi)\rightarrow(aas\phi\rightarrow aas\psi)[a,r]$.

A.5- Per tot model A , per tota successió $a=a_0...a_k$ d'elements de A i tota successió $r=r_0...r_m$ d'elements de $P_{\omega_1}(A)$, si $A|=Vxaas\phi(x,s)[a,r]$, llavors per tot $b\in A$, el conjunt $X_b=\{t\in P_{\omega_1}(A):A|=t\phi[a,r,b,t]\}\in\mathcal{F}(A)$. Així, en ser $\mathcal{F}(A)$ un filtre normal (Corol.lari 1.15), tenim que $\Delta_b\in_A X_b\in\mathcal{F}(A)$. Per tant, $\{t\in P_{\omega_1}(A):t\in X_b, \text{ per tot } b\in t\}\in\mathcal{F}(A)$. Així $\{t\in P_{\omega_1}(A):A|=Vx\in s\phi(x)[a,r,t]\}\in\mathcal{F}(A)$. Tenim doncs que $A|=aasVx\in s\phi(x,s)[a,r]$. Per tant $A|=Vxaas\phi(x,s)\rightarrow aasVx\in s\phi(x,s)[a,r]$.

Ens ajudarà a entendre els axiomes del sistema deductiu recordar la Proposició 1.35., en la qual hem provat que si A és un conjunt de cardinalitat ω_1 , llavors $\mathcal{F}(A)$ és el menor filtre normal sobre $P_{\omega_1}(A)$ que satisfà: per tot $t\in P_{\omega_1}(A)$, $\{r\in P_{\omega_1}(A):t\subseteq r\}\in\mathcal{F}(A)$.

3.2. Definició. Diem que una fórmula ϕ és un teorema, i ho denotem per $\vdash_{L_{aa}}\phi$, si ϕ pertany al més petit conjunt que inclou Λ i està tancat sota *modus ponens*.

3.3. Observació. El conjunt dels teoremes està tancat sota clausura quasi-universal.

3.4. Definició. Si $\Sigma\cup\{\phi\}$ és un conjunt de fórmules, diem que ϕ és deduïble de Σ i ho denotem per $\Sigma\vdash_{L_{aa}}\phi$, si ϕ pertany al més petit conjunt que inclou Σ , Λ i està tancat sota *modus ponens*.

3.5. Definició. Una *deducció de ϕ a partir de Σ* és una seqüència $\langle\alpha_0... \alpha_n\rangle$ de fórmules tals que $\alpha_n=\phi$ i per cada $i\leq n$,

- (a) α_i és un axioma del càlcul deductiu, o
- (b) $\alpha_i\in\Sigma$, o

(c) per alguns j i k ($j, k < i$), α_i és obtinguda per *modus ponens* partir de α_j i α_k (on $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$).

3.6. Observació. Hi ha una deducció de ϕ a partir de Σ sii ϕ és deduïble de Σ .

3.7. Observació. Si $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \phi$, llavors $\Sigma \models_{L_{aa}} \phi$.

Prova: Per les observacions que segueixen a l'enunciat dels axiomes i el fet que el *modus ponens* preserva la satisfacibilitat. ■

Provem ara alguns metateoremes d'aquest sistema deductiu:

3.8. Lema. Donat un sistema deductiu axiomàtic S_L , el Teorema de la deducció (Si $\Sigma, \phi \vdash_L \psi$ llavors $\Sigma \vdash_L \phi \rightarrow \psi$) val si S_L satisfà les següents condicions:

- i) Té com esquemes d'axiomes $\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ i $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \beta) \rightarrow [(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \beta)]$
- ii) Té com a única regla d'inferència el *modus ponens*

Prova: Veure [17]. ■

3.9. Teorema de la Deducció. Si $\Sigma, \phi \vdash_{L_{aa}} \psi$, llavors $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \phi \rightarrow \psi$.

Prova: Corol.lari del Lema 3.8. ■

3.10. Corol.lari (Reducció a l'absurd). Si $\Sigma, \neg \phi \vdash_{L_{aa}} \psi \wedge \neg \psi$, llavors $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \phi$.

3.11. Teorema de aa-generalització. Si $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \phi(s)$ i s no ocorre lliure en Σ , llavors $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \text{aa}\phi(s)$.

Prova: Sigui s una variable predicativa que no ocorre lliure en Σ . Mostrarem per inducció que per tota $\phi(s)$, si $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \phi(s)$, llavors $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \text{aa}\phi(s)$. Per la Definició 3.4. n'hi ha prou amb mostrar que el conjunt $X = \{\phi(s) : \Sigma \vdash_{L_{aa}} \text{aa}\phi(s)\}$ inclou Σ, Λ , i està tancat sota *modus ponens*

(a) X inclou Λ : Si $\phi(s) \in \Lambda$, llavors $\text{aa}\phi(s) \in \Lambda$, doncs $\text{aa}\phi(s)$ és una clausura quasi-universal de $\phi(s)$. Així $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \text{aa}\phi(s)$ i per tant $\phi(s) \in X$.

(b) X inclou Σ : Si $\phi(s) \in \Sigma$, donat que s no ocorre lliure a Σ , $\phi(s) \rightarrow \text{aa}\phi(s) \in \Lambda$ (Axioma A.6) per tant per *modus ponens* $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \text{aa}\phi(s)$. Així $\phi(s) \in X$.

(c) X està tancat sota *modus ponens*: Suposem que $\phi(s)$ és obtinguda a partir de $\alpha(s)$ i de $\alpha(s) \rightarrow \phi(s)$ per *modus ponens* i $\alpha(s) \in X$ i $\alpha(s) \rightarrow \phi(s) \in X$. Llavors $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \text{aa}\alpha(s)$ i

$\Sigma \vdash_{L_{aa}} \text{aas}(\alpha(s) \rightarrow \phi(s))$. Per tant, per A.4, $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \text{aas}\alpha(s) \rightarrow \text{aas}\phi(s)$ i per *modus ponens* $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \text{aas}\phi(s)$. Així $\phi(s) \in X$. ■

3.12. Teorema de V-generalització. Si $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \phi(x)$ i x no ocorre lliure en Σ , llavors $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \forall x\phi(x)$.

Prova: Anàloga a la de 3.11. ■

3.13. Definició. Diem que un conjunt de fórmules Σ és *consistent*, si $\Sigma \not\vdash_{L_{aa}} \perp$

En els propers capítols provarem la completesa del sistema deductiu $S_{L_{aa}}$. Abans de fer-ho necessitem una sèrie de lemes previs:

3.14. Lema. Si $\vdash \phi(s) \rightarrow \psi(s)$ ⁴, llavors $\vdash \text{aas}\phi(s) \rightarrow \text{aas}\psi(s)$.

Prova: Suposem que $\vdash \phi(s) \rightarrow \psi(s)$
 llavors $\vdash \text{aas}(\phi(s) \rightarrow \psi(s))$ (per l'Observació 3.3.)
 llavors $\vdash \text{aas}\phi(s) \rightarrow \text{aas}\psi(s)$ (per A.4) ■

3.15. Lema. Si $\vdash \phi(s) \rightarrow \psi(s)$, llavors $\vdash \text{stats}\phi(s) \rightarrow \text{stats}\psi(s)$.

Prova: Suposem que $\vdash \phi(s) \rightarrow \psi(s)$
 llavors $\vdash \neg\psi(s) \rightarrow \neg\phi(s)$ (per Log. Prop.)
 llavors $\vdash \text{aas}\neg\psi(s) \rightarrow \text{aas}\neg\phi(s)$ (per Lema 3.14.)
 llavors $\vdash \neg\text{aas}\neg\phi(s) \rightarrow \neg\text{aas}\neg\psi(s)$ (per Log. Prop.)
 llavors $\vdash \text{stats}\phi(s) \rightarrow \text{stats}\psi(s)$ (per Definició 2.2.)
 ■

3.16. Lema. Si $\vdash \phi(s) \rightarrow \eta$, on s no ocorre lliure a η , llavors $\vdash \text{stats}\phi(s) \rightarrow \eta$.

Prova: Suposem que $\vdash \phi(s) \rightarrow \eta$, on s no ocorre lliure a η
 llavors $\vdash \text{stats}\phi(s) \rightarrow \text{stats}\eta$ (pel Lema 3.15.)
 llavors $\vdash \text{stats}\phi(s) \rightarrow \eta$ (per A.6 perquè s no ocorre lliure a η). ■

3.17. Lema. Si s no ocorre lliure a ϕ , llavors $\vdash \phi \leftrightarrow \text{aas}\phi$ i $\vdash \phi \leftrightarrow \text{stats}\phi$.

Prova: D'una banda tenim que $\vdash \phi \rightarrow \text{aas}\phi$, per A.6, doncs s no ocorre lliure a ϕ .
 I d'altra banda $\vdash \neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \perp)$ (per PO)
 llavors $\vdash \neg\phi \rightarrow \text{aas}(\phi \rightarrow \perp)$ (per A.6, doncs s no ocorre lliure a ϕ ni a \perp)

⁴ Notació: A partir d'ara farem servir \vdash enlloc de $\vdash_{L_{aa}}$ sempre que el context ho permeti.

llavors $\vdash \neg\phi \rightarrow (aas\phi \rightarrow aas\perp)$ (per A.4)
 llavors $\{\neg\phi, aas\phi\} \vdash aas\perp$ (per PO)
 però llavors $\{\neg\phi, aas\phi\} \vdash aas\perp \wedge \neg aas\perp$ (per A.1)
 així per Reducció a l'Absurd i el Teorema de la Deducció: $\vdash aas\phi \rightarrow \phi$
 Per tant $\vdash \phi \leftrightarrow aas\phi$.
 I fent el contrapositiu tenim que $\vdash \phi \leftrightarrow stats\phi$. ■

3.18. Lema. Sigui ϕ_1 una fórmula del tipus $stats_1 \dots stats_n \psi$, i sigui ϕ_2 $stats_1 \dots stats_n statr_1 \dots statr_k \exists y_1 \dots \exists y_k \psi$, on per tot i , r_i i y_i no ocorren lliures a ψ . Llavors $\vdash \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$.

Prova: Abreugem per "stats" la successió "stats₁...stats_n"; per "statr" la successió "statr₁...statr_k" i per "∃y" la successió "∃y₁...∃y_k". Com que per tot i , y_i no ocorre lliure a ψ , per PO, tenim: (1) $\vdash \psi \leftrightarrow \exists y \psi$

i com que r_k no ocorre lliure a ψ , pel Lema 3.17:

$$(2) \vdash \exists y \psi \leftrightarrow statr_k \exists y \psi$$

Si apliquem el Lema 3.17. $k-1$ vegades com que per tot i , r_i no ocorre lliure a ψ , obtenim per cada $i < k$:

$$\vdash statr_i \dots statr_k \exists y \psi \leftrightarrow statr_{(i-1)} \dots statr_k \exists y \psi$$

Així per Lògica Proposicional:

$$\vdash statr \exists y \psi \leftrightarrow statr_k \exists y \psi$$

I per Lògica Proposicional i (2):

$$\vdash statr \exists y \psi \leftrightarrow \exists y \psi$$

I per Lògica Proposicional i (1):

$$\vdash statr \exists y \psi \leftrightarrow \psi$$

Finalment, aplicant a aquest darrer resultat obtingut el Lema 3.15., n vegades, tenim que:

$$\vdash stats statr \exists y \psi \leftrightarrow stats \exists y \psi.$$

és a dir, $\vdash \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$. ■

A continuació podem veure, intuïtivament, que el següent teorema diu que la intersecció d'un conjunt tancat i cofinal amb un d'estacionari és un estacionari (com vam provar a l'Observació 1.17.i):

3.19. Lema. $\vdash aas\phi \wedge stats\psi \rightarrow stats(\phi \wedge \psi)$

Prova: $\{aas\phi \wedge stats\psi\} \cup \{\neg stats(\phi \wedge \psi)\} \vdash aas(\neg\phi \vee \neg\psi)$ (per Def. 2.2. i PO)

$\{aas\phi \wedge stats\psi\} \cup \{\neg stats(\phi \wedge \psi)\} \vdash aas(\phi \rightarrow \neg\psi)$ (per Log. Prop.)

$\{aas\phi \wedge stats\psi\} \cup \{\neg stats(\phi \wedge \psi)\} \vdash aas\phi \rightarrow aas\neg\psi$ (per A.4)

Així per *modus ponens* i Lògica Proposicional,

$\{aas\phi \wedge stats\psi\} \cup \{\neg stats(\phi \wedge \psi)\} \vdash aas\neg\psi$
 $\{aas\phi \wedge stats\psi\} \cup \{\neg stats(\phi \wedge \psi)\} \vdash aas\neg\psi \wedge \neg aas\neg\psi$ (per Definició 2.2.)
 Per tant, per reducció a l'absurd: $\vdash aas\phi \wedge stats\psi \rightarrow stats(\phi \wedge \psi)$. ■

3.20. Lema. Si s no ocorre lliure a ϕ , llavors $\vdash \phi \wedge stats\psi \rightarrow stats(\phi \wedge \psi)$.

Prova: Donat que s no ocorre lliure a ϕ , llavors $\vdash \phi \leftrightarrow aas\phi$ (Pel Lema 3.17.)
 així $\vdash \phi \wedge stats\psi \rightarrow aas\phi \wedge stats\psi$
 per tant $\vdash \phi \wedge stats\psi \rightarrow stats(\phi \wedge \psi)$ (Pel Lema 3.19.) ■

Fixem-nos que el següent teorema ens diu intuïtivament que tot conjunt tancat i cofinal és estacionari (recordem que ho vam provar a l'Observació 1.17.ii):

3.21. Lema. $\vdash aas\phi \rightarrow stats\phi$.

Prova: Tenim que $\{aas\phi, \neg stats\phi\} \vdash aas\phi \wedge aas\neg\phi$ (Per Definició 2.2.)
 així $\{aas\phi, \neg stats\phi\} \vdash aas(\phi \wedge \neg\phi)$ (Per A.3)
 per tant $\{aas\phi, \neg stats\phi\} \vdash aas\perp$
 però llavors $\{aas\phi, \neg stats\phi\} \vdash \perp$ (Per A.1)
 i per reducció a l'absurd, $\vdash aas\phi \rightarrow stats\phi$. ■

3.22. Lema. $\vdash \forall x aas\phi(x,s) \leftrightarrow aas\forall x \in s \phi(x,s)$.

Prova: D'una banda $\forall x aas\phi(x,s) \rightarrow aas\forall x \in s \phi(x,s)$ és A.5.
 D'altra banda $aas\forall x \in s \phi(x,s) \vdash aas\forall x \in s \phi(x,s) \wedge aasx \in s$ (Per A.2)
 així $aas\forall x \in s \phi(x,s) \vdash aas(\forall x \in s \phi(x,s) \wedge x \in s)$ (Per A.3)
 per tant $aas\forall x \in s \phi(x,s) \vdash aas\phi(x,s)$ (Per PO)
 Així, com que la variable x no ocorre lliure en $aas\forall x \in s \phi(x,s)$, pel teorema de \forall -generalització, tenim que $aas\forall x \in s \phi(x,s) \vdash \forall x aas\phi(x,s)$
 així $\vdash aas\forall x \in s \phi(x,s) \rightarrow \forall x aas\phi(x,s)$.
 Per tant, juntament amb A.5, obtenim $\vdash \forall x aas\phi(x,s) \leftrightarrow aas\forall x \in s \phi(x,s)$. ■

3.23. Lema. $\vdash \exists x_1 \dots x_k stats_1 \dots stats_n \phi \rightarrow stats_1 \dots stats_n \exists x_1 \dots x_k \phi$.

Prova: N'hi ha prou amb mostrar que $\vdash \exists x stats\phi \rightarrow stats\exists x \phi$.
 Tenim que $\vdash aas\forall x \neg\phi \rightarrow aas\forall x \in s \neg\phi$ (Per PO)
 per tant $\vdash aas\forall x \neg\phi \rightarrow \forall x aas\neg\phi$ (Pel Lema 3.22)
 així $\vdash aas\forall x \neg\phi \rightarrow \neg \exists x stats\phi$ (Per PO i Def .2.2.)
 Per tant $\vdash \exists x stats\phi \rightarrow \neg aas\forall x \neg\phi$ (Per PO)

I finalment $\vdash \exists x \text{stats} \phi \rightarrow \text{stats} \exists x \phi$ (Per Def. 2.2. i PO)

■

3.24. Lema. Si s no ocorre lliure a ϕ , llavors $\vdash \text{aas} \exists x \notin s \phi \leftrightarrow \text{stats} \exists x \notin s \phi$.

Prova: Tenim que $\vdash \text{aas} \exists x \notin s \phi \rightarrow \text{stats} \exists x \notin s \phi$, pel Lema 3.21. Considerem ara una variable s' que no ocorri en ϕ i que sigui diferent de s . Tenim que $\vdash \phi \subseteq s' \xrightarrow{5} \text{aas}(\phi \subseteq s')$, per A.6 perquè s no ocorre lliure a $\phi \subseteq s'$.

Per tant $\vdash \phi \subseteq s' \rightarrow \text{aas}(\phi \subseteq s') \wedge \text{aas}(s' \subseteq s)$ (Per A.2)

així $\vdash \phi \subseteq s' \rightarrow \text{aas}(\phi \subseteq s' \wedge s' \subseteq s)$ (Per A.3)

llavors $\vdash \phi \subseteq s' \rightarrow \text{aas}(\phi \subseteq s)$ (Per PO)

llavors $\vdash \text{stats}'(\phi \subseteq s') \rightarrow \text{aas}(\phi \subseteq s)$

(Pel Lema 3.16. perquè s' no ocorre lliure a $\text{aas}(\phi \subseteq s)$)

Per tant $\vdash \text{stats}(\phi \subseteq s) \rightarrow \text{aas}(\phi \subseteq s)$

(Per A.0 perquè s no ocorre a $\text{stats}'(\phi \subseteq s')$)

així $\vdash \text{stats} \neg(\phi \subseteq s) \rightarrow \text{aas} \neg(\phi \subseteq s)$

(Per Log Prop i Def. 2.2.)

és a dir: $\vdash \text{stat} \exists x \notin s \phi \rightarrow \text{aas} \exists x \notin s \phi$. (Per PO) ■

Podem donar ara una deducció en $S_{L_{aa}}$ de l'axioma 4 de Keisler: $\neg \exists x \forall y \phi(x,y) \wedge \neg \forall x \exists y \phi(x,y) \rightarrow \neg \forall y \exists x \phi(x,y)$ (Veure [7]). L'axioma ens diu intuïtivament que una unió numerable de conjunts numerables és numerable. Pel Lema 3.24., fixat un tipus de semblança τ , per tota $\phi \in L_{aa}(\tau)$ podem definir $\text{Qx}\phi \equiv_{\text{def}} \text{stats} \exists x \notin s \phi$, on s és una variable predicativa que no ocorre en ϕ . D'aquesta manera podem provar l'Axioma 4 de Keisler, així reformulat:

3.25. Lema. Sigui s una variable predicativa que no es troba lliure a ϕ , llavors

$\vdash \forall x \text{aas} \forall y [\phi(x,y) \rightarrow s(y)] \wedge \text{aas} \forall x [\exists y \phi(x,y) \rightarrow s(x)] \rightarrow \text{aas} \forall y [\exists x \phi(x,y) \rightarrow s(y)]$.

Prova: Diguem (1) a $\forall x \text{aas} \forall y [\phi(x,y) \rightarrow s(y)]$ i (2) a $\text{aas} \forall x [\exists y \phi(x,y) \rightarrow s(x)]$.

Tenim que (1) $\vdash \text{aas} \forall x \in s \forall y [\phi(x,y) \rightarrow s(y)]$ (Per A.5)

així $\{(1),(2)\} \vdash \text{aas} \forall x \in s \forall y [\phi(x,y) \rightarrow s(y)] \wedge (2)$

llavors per A.3, $\{(1),(2)\} \vdash \text{aas}(\forall x \in s \forall y [\phi(x,y) \rightarrow s(y)] \wedge \forall x [\exists y \phi(x,y) \rightarrow s(x)])$

per tant $\{(1),(2)\} \vdash \text{aas}(\forall y [\exists x \phi(x,y) \rightarrow s(y)])$ (Per PO)

Així $\vdash (1) \wedge (2) \rightarrow \text{aas} \forall y [\exists x \phi(x,y) \rightarrow s(y)]$. ■

⁵Notació: On " $\phi \subseteq s$ " abreuja la fórmula " $\forall x (\phi(x) \rightarrow s(x))$ ".

3.26. Lema. $\vdash_{aas} (\phi \wedge \psi) \rightarrow aas\phi$.

Prova: Tenim que $\vdash \phi \wedge \psi \rightarrow \phi$, així, donat que el conjunt de teoremes està tancat sota clausura quasi-universal, tenim que $\vdash_{aas} (\phi \wedge \psi \rightarrow \phi)$ i per A.4, que $\vdash_{aas} (\phi \wedge \psi) \rightarrow aas\phi$. ■

3.27. Lema. Si s_j és una variable predicativa que no ocorre en $\phi(s_i)$, llavors:

$$\vdash \forall x (s_i(x) \leftrightarrow s_j(x)) \rightarrow (\phi(s_i) \leftrightarrow \phi(s_j))$$
 ⁶

Prova: Ho mostrarem per inducció sobre la complexitat de ϕ . Els casos en què ϕ és atòmica, $\phi = \alpha \vee \beta$, $\phi = \neg \psi$ o $\phi = \forall y \psi(y)$ són senzills de provar. Considerem el cas $\phi = aas\psi(s_i, s)$. Sigui s_j una variable predicativa que no ocorre en $\phi(s_i)$. Si $s = s_i$, no hi ha res a mostrar. Sigui s una variable predicativa diferent de s_i . Suposem inductivament que

$$\vdash \forall x (s_i(x) \leftrightarrow s_j(x)) \rightarrow (\psi(s_i, s) \leftrightarrow \psi(s_j, s))$$

llavors per Lògica de Primer Ordre tenim que:

$$\vdash \forall x (s_i(x) \leftrightarrow s_j(x)) \rightarrow [(\psi(s_i, s) \rightarrow \psi(s_j, s)) \wedge (\psi(s_j, s) \rightarrow \psi(s_i, s))]$$

llavors, pel Teorema de aa-generalització, com que s no ocorre lliure a $\forall x (s_i(x) \leftrightarrow s_j(x))$,

$$\vdash \forall x (s_i(x) \leftrightarrow s_j(x)) \rightarrow aas[(\psi(s_i, s) \rightarrow \psi(s_j, s)) \wedge (\psi(s_j, s) \rightarrow \psi(s_i, s))]$$

llavors, pel Lema 3.26., $\vdash \forall x (s_i(x) \leftrightarrow s_j(x)) \rightarrow [aas(\psi(s_i, s) \rightarrow \psi(s_j, s)) \wedge aas(\psi(s_j, s) \rightarrow \psi(s_i, s))]$

llavors per A.4, $\vdash \forall x (s_i(x) \leftrightarrow s_j(x)) \rightarrow [aas\psi(s_i, s) \rightarrow aas\psi(s_j, s)] \wedge [aas\psi(s_j, s) \rightarrow aas\psi(s_i, s)]$

i així $\vdash \forall x (s_i(x) \leftrightarrow s_j(x)) \rightarrow [aas\psi(s_i, s) \leftrightarrow aas\psi(s_j, s)]$. ■

⁶ On $\phi(s_j)$ és obtinguda a partir de $\phi(s_i)$ reemplaçant totes les ocurrences lliures de la variable predicativa s_i per la variable predicativa s_j .

4. Models Febles.

En aquest capítol donarem la traducció d'un llenguatge de L_{aa} en un llenguatge de la Lògica de Primer Ordre. Aquesta, en algun sentit, reducció d'una lògica a una altra ens permetrà aplicar mètodes de Teoria de Models de la Lògica de Primer Ordre per provar el teorema de completesa de L_{aa} . En aquesta aplicació dels mètodes de la Teoria de Models farem ús d'un tipus especial d'estructures *two-sorted*, els models febles, que definirem també en aquest capítol. A partir d'ara parlarem únicament de tipus de semblança τ numerables i sense símbols funcionals.

4.1. Definició. Donat un tipus de semblança τ . Si $\phi \in L_{aa}(\tau)$, diem que ϕ és *lliure* si no té constants individuals i si cap variable té dues ocurrences lliures diferents en ella.

4.2. Observació. Tota sentència sense constants individuals és lliure.

4.3. Definició. Donades dues fórmules lliures ϕ i ψ de $L_{aa}(\tau)$ direm que $\phi \Delta \psi$ si l'una és obtinguda a partir de l'altra per una substitució de variables per variables.

4.4. Observació. La relació Δ és una relació d'equivalència en el conjunt de les fórmules lliures de $L_{aa}(\tau)$.

Fixem per cada classe d'equivalència un representant. Observem que tota fórmula ψ de $L_{aa}(\tau)$ pot ser obtinguda a partir d'alguna fórmula lliure ϕ per substitució de variables per termes. Així podem associar a ψ la classe d'equivalència $[\phi]_{\Delta}$, la classe de totes aquelles fórmules lliures de $L_{aa}(\tau)$ a partir de les quals podem obtenir ψ per substitució. Anomenarem al representant d'aquesta classe *l'esquelet de ψ* i el denotarem per ψ_0 . Podem donar ara una traducció de $L_{aa}(\tau)$ a un llenguatge L^* de la Lògica de Primer Ordre, amb dos tipus de variables, que anomenarem respectivament de primer i segon ordre. El tipus de semblança de L^* , τ^* , a més a més dels símbols de τ , té:

1) Per cada $\langle k, m \rangle \in \omega \times \omega$, $\langle k, m \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle$, un nombre infinit numerable de relators $k+m$ -aris (on k és el nombre de les variables de primer ordre i m el nombre de les variables de segon ordre).

2) Un nombre infinit numerable de constants proposicionals.

3) El relator binari \in .

Definim ara l'operació $*$ de traducció, inductivament:

$$(s(x))^* = x \in s \text{ i } (\phi)^* = \phi, \text{ per tota altra fórmula atòmica.}$$

$$(\phi \wedge \psi)^* = (\phi)^* \wedge (\psi)^*$$

$$(\neg \phi)^* = \neg(\phi)^*$$

$$(\forall x \phi)^* = \forall x(\phi)^*$$

Però $*$ no commutarà amb aa . Per donar la traducció, en aquest cas, primer associem a cada fórmula lliure $\phi \in L_{aa}(\tau)$ un símbol de τ^* - τ , diem-li R_ϕ , de manera que:

i) Per tota fórmula lliure $\psi \in L_{aa}(\tau)$, $\phi \Delta \psi$ sii $R_\phi = R_\psi$.

ii) Si ϕ té variables lliures (del tipus que siguin), i $x_1 \dots x_k, t_1 \dots t_m$ són les successions de variables lliures, de primer i de segon ordre respectivament, de ϕ (una de les dues successions pot ser \emptyset , però no totes dues), llavors R_ϕ és un relator $k+m$ -ari.

iii) Si ϕ és una sentència, llavors R_ϕ és una constant proposicional.

Definim ara $(aas\phi)^*$: $(aas\phi)^* = R_{(aas\phi)_o}(x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{n+k}/c_1 \dots c_n, y_1 \dots y_k) (t_1 \dots t_m/s_1 \dots s_m)$

on $(aas\phi)_o$ és l'esquelet de $aas\phi$; $x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{n+k}, t_1 \dots t_m$ són les variables lliures que ocorren en $(aas\phi)_o$ i $c_1 \dots c_n, y_1 \dots y_k, s_1 \dots s_m$ les constants individuals i variables lliures que ocorren en $aas\phi$ (on qualsevol d'elles pot estar repetida en la successió). En cas que $aas\phi$ no tingui variables lliures ni constants individuals, és a dir, en cas que la successió $c_1 \dots c_n, y_1 \dots y_k, s_1 \dots s_m$ sigui buida, $aas\phi$ serà una sentència. Llavors, per l'Observació 4.2. $aas\phi$ serà una fórmula lliure. Així $aas\phi \Delta (aas\phi)_o$ i per tant $(aas\phi)^* = R_{(aas\phi)_o} = R_{aas\phi}$ serà una constant proposicional. Observem que, així definida, $(aas\phi)^*$ té les mateixes variables lliures i constants individuals que $aas\phi$. A partir d'ara abreuarem per ϕ^* la fórmula $(\phi)^*$.

4.5. Observació. Si ψ és obtinguda a partir de ϕ per una substitució, llavors ψ^* és obtinguda per la mateixa substitució a partir de ϕ^* .

4.6. Observació. Per tota fórmula ϕ del llenguatge de primer ordre L de tipus τ , $\phi^* = \phi$.

4.7. Definició. Fixat τ , diem que A^* és un pre-model feble de $L_{aa}(\tau)$ sii A^* és una estructura *two-sorted* de tipus τ^* (on τ^* és el tipus abans descrit del llenguatge L^* al qual traduïm $L_{aa}(\tau)$), de la forma $A^*=(A, P, \in^{A^*}, R_{(aas\phi)_0}^{A^*})_{\phi \in L_{aa}(\tau)}$ on:

- i) A és una estructura de primer ordre de tipus τ .
- ii) P és un conjunt no buit.
- iii) $\in^{A^*} \subseteq A \times P$.
- iv) Per cada $\phi \in L_{aa}(\tau)$, $R_{(aas\phi)_0}^{A^*} \subseteq A^k \times P^m$.

Si $(aas\phi)_0$ no és una sentència, $R_{(aas\phi)_0}$ és un relator $k+m$ -ari, i ja hem descrit abans quina és la relació entre l'arietat de $R_{(aas\phi)_0}$ i el nombre de variables lliures de $(aas\phi)_0$. I si $(aas\phi)_0$ és una sentència, llavors $R_{(aas\phi)_0}$ és una constant proposicional i $R_{(aas\phi)_0}^{A^*}$ és o bé \emptyset o bé $\{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\}$.

4.8. Definició. Sigui τ un tipus de semblança. Si A^* és un pre-model feble de $L_{aa}(\tau)$, per tot $k, m \in \omega$, per tota $\phi(x_0 \dots x_k, s_0 \dots s_m) \in L_{aa}(\tau)$, per tota successió $a = a_0 \dots a_k$ d'elements de A i tota successió $r = r_0 \dots r_m$ d'elements de P , definim:

$$A^* \models_{L_{aa}} \phi[a, r] \text{ sii } A^* \models \phi^*[a, r]$$

On aquesta última és la noció de satisfacció de la Lògica de Primer Ordre *two-sorted*¹.

4.9. Definició. Fixat τ , diem que A^* és un model feble de $L_{aa}(\tau)$ sii:

- (1) A^* és un pre-model feble de $L_{aa}(\tau)$.
- (2) Per tot $k, m \in \omega$, per tot axioma $\phi(x_0 \dots x_k, s_0 \dots s_m)$ de $S_{L_{aa}}$ ², per tota successió $a = a_0 \dots a_k$ d'elements de A i tota successió $r = r_0 \dots r_m$ d'elements de P :
 $A^* \models_{L_{aa}} \phi[a, r]$.
- (3) Per tot $k, m \in \omega$, per tota $\phi(x_0 \dots x_k, s_0 \dots s_m) \in L_{aa}(\tau)$, per tota successió $a = a_0 \dots a_k$ d'elements de A i tota successió $r = r_0 \dots r_m$ d'elements de P , es compleix: Si per tot $t \in P$ $A^* \models_{L_{aa}} \phi[a, r, t]$, llavors $A^* \models_{L_{aa}} aas\phi[a, r]$.

D'una manera intuïtiva, si prenem P com una col.lecció de subconjunts numerables de A i \in^{A^*} com la relació usual de pertanyença entre conjunts, aquesta condició (3) ens diu que $P \in \mathcal{F}(A)$, ja que la intersecció de P amb tot conjunt estacionari és diferent del buit. Per veure-ho només ens

¹ Afegint a la definició usual de satisfacció en Primer Ordre: Si $R_{(aas\phi)_0}$ és una constant proposicional, $A^* \models R_{(aas\phi)_0}$ si i sols si $R_{(aas\phi)_0}^{A^*} = \emptyset$

² On $S_{L_{aa}}$ és el sistema axiomàtic deductiu definit al capítol 3.

cal recordar el Lema 1.18. i reformular (3) de la següent manera: Si $A^* \models_{L_{aa}} \text{stats} \phi[a, r]$, llavors hi ha $t \in P$ tal que $A^* \models_{L_{aa}} \phi[a, r, t]$.

4.10. Observació. Sigui τ un tipus de semblança. Per tot conjunt de sentències Σ del llenguatge $L_{aa}(\tau)$ i per tot model feble A^* de $L_{aa}(\tau)$: Si $A^* \models_{L_{aa}} \Sigma$ i $\Sigma \vdash_{L_{aa}} \phi$, llavors $A^* \models_{L_{aa}} \phi$.

Prova: Per la definició 4.9. de model feble de $L_{aa}(\tau)$ i l'Observació 3.6. ■

5. Teorema de Completesa per Models Febles.

En aquest capítol mostrarem el Teorema de Completesa pels Models Febles de L_{aa} , els models introduïts en el capítol anterior. Per a la prova d'aquest teorema farem servir el següent recurs tècnic: Introduïrem una extensió de L_{aa} , K_{aa} . Per cada tipus de semblança τ , si U és un conjunt de constants de segon ordre, sigui $K_{aa}(\tau \cup U)$ l'expansió de $L_{aa}(\tau)$ obtinguda per substitució (de variables de segon ordre per constants de U) a partir de les fórmules de $L_{aa}(\tau)$. Podem introduir la semàntica de K_{aa} , de manera natural, a partir de la semàntica de L_{aa} que vam donar en el capítol 2. Donem també un sistema deductiu axiomàtic per K_{aa} $S_{K_{aa}}$: Els seus axiomes els obtenim a partir dels axiomes de $S_{L_{aa}}$ per substitució (de variables de segon ordre per constants de U) i la seva única regla d'inferència és el *modus ponens*. Finalment podem definir també una traducció dels llenguatges de K_{aa} en llenguatges de Primer Ordre, d'una manera anàloga a com vam fer-ho per L_{aa} en el capítol 4. Un model feble de $K_{aa}(\tau \cup U)$ serà de la forma $(A^*, u^{A^*})_{u \in U}$, on A^* és un model feble de $L_{aa}(\tau)$ i per cada $u \in U$, u^{A^*} és un element de P , el segon domini del model A^* . I podem definir $\models_{K_{aa}}$ per models febles, anàlogament a com vam fer-ho pels models febles de L_{aa} a partir de la traducció establerta.

5.1. Definició. Fixat un tipus de semblança τ i un conjunt de constants de segon ordre U , diem que un conjunt T de sentències del llenguatge $K_{aa}(\tau \cup U)$ és *màximament consistent* si T és consistent i per tota sentència $\sigma \in K_{aa}(\tau \cup U)$, $\sigma \in T$ o $\neg\sigma \in T$.

5.2. Definició. Fixem un tipus de semblança τ i U un conjunt de constants de segon ordre. Si C i R són conjunts de constants (de primer i segon ordre, respectivament), diem que un conjunt T de sentències del llenguatge $K_{aa}(\tau \cup U)$ és *exemplificat en CUR* si

i) Per tota sentència de $K_{aa}(\tau \cup U)$ de la forma $\exists x\phi(x)$, hi ha $c \in C$ tal que

$$\vdash \exists x\phi(x) \rightarrow \phi(x/c).$$

ii) Per tota sentència de $K_{aa}(\tau \cup U)$ de la forma $\text{stats}\phi(s)$, hi ha $r \in R$ tal que

$$\vdash \text{stats}\phi(s) \rightarrow \phi(s/r).^1$$

¹ Per tota fórmula $\phi(x)$ de $K_{aa}(\tau \cup U)$, $\phi(x/c)$ és obtinguda a partir de $\phi(x)$ reemplaçant tota ocurrència lliure de x per la constant c . I per tota fórmula $\phi(s)$ de $K_{aa}(\tau \cup U)$, $\phi(s/r)$ és obtinguda a partir de $\phi(s)$ reemplaçant tota ocurrència lliure de s per la constant r .

Direm que T és *exemplificat* (en τU) sii hi ha subconjunts de τU , C i R , de constants de primer i segon ordre tals que T és exemplificat en CUR .

5.3. Definició. Fixat τU , diem que un model feble A^* de $K_{aa}(\tau U)$ és un *model canònic* sii per tota $a \in A$ hi ha una constant de primer ordre $c \in \tau$ tal que $c^{A^*} = a$, i per tot $t \in P$ hi ha una constant de segon ordre $u \in U$ tal que $u^{A^*} = t$.

5.4. Definició. Fixat τU , diem que un model feble A^* de $K_{aa}(\tau U)$ és un *model numerable* si els dominis A i P del model A^* són conjunts numerables.

A partir d'ara i al llarg de tot el capítol parlarem només de tipus de semblança τ numerables i sense símbols funcionals, i de conjunts numerables U de constants de segon ordre.

5.5. Proposició. Fixat τU , si T és un conjunt de sentències de $K_{aa}(\tau U)$ màximament consistent i exemplificat (en τU), llavors hi ha un model feble numerable de $K_{aa}(\tau U)$ que és un model canònic de T .

Prova: Suposem que T és un conjunt de sentències de $K_{aa}(\tau U)$ màximament consistent i exemplificat (en τU). Sigui $\{c_n : n \in \omega\}$ una enumeració del conjunt C de constants de primer ordre de τ i sigui $\{u_n : n \in \omega\}$ una enumeració del conjunt U . Establím la següent relació d'equivalència en el conjunt C : per tot $i, j \in \omega$, $c_i \Delta c_j$ sii $c_i \approx c_j \in T$. Construïm ara, a semblança de la construcció de Henkin per la Lògica de Primer Ordre, un model feble de T :

$$A^* = (A, P, \in^{A^*}, R_{(aas\phi)_o}^{A^*}, u^{A^*})_{\phi \in L_{aa}(\tau), u \in U}$$

i) Els dos dominis de A^* són: $A = \{[c_i]_\Delta : i \in \omega\}$ i $P = U$.

ii) Per cada $c \in C$, $c^{A^*} = [c]_\Delta$ i per cada $u \in U$, $u^{A^*} = u$.

iii) Per cada relator $S \in \tau$, $S^{A^*}([c_o]_\Delta \dots [c_k]_\Delta)$ sii $S(c_o \dots c_k) \in T$.

iv) Definim \in^{A^*} així: Per tot $u \in P$, tot $c \in C$, $[c]_\Delta \in^{A^*} u$ sii $u(c) \in T$.

v) Per tota fórmula $\phi \in L_{aa}(\tau)$: - Si $aas\phi$ no és una sentència,

$R_{(aas\phi)_o}^{A^*}([c_1]_\Delta \dots [c_k]_\Delta, u_1 \dots u_m)$ sii $(aas\phi)_o(c_1 \dots c_k, u_1 \dots u_m) \in T$.

- Si $aas\phi$ és una sentència, llavors $R_{(aas\phi)_o}^{A^*} = \emptyset$ sii $aas\phi \in T$.

Fixem-nos que els axiomes d'identitat de PO ens garanteixen que S^{A^*} , \in^{A^*} i $R_{(aas\phi)_o}^{A^*}$ han estat ben definits. Perquè per ser T un conjunt màximament consistent de sentèn-

cies de $K_{aa}(\tau \cup U)$, tots aquests axiomes d'identitat pertanyen a T . Tal com ha estat definit, A^* és un pre-model feble de $K_{aa}(\tau \cup U)$ canònic i numerable. Mostrem, amb l'ajut del següent lema, que A^* és un model feble de T :

5.6. Lema. Per tota fórmula $\phi(x_1 \dots x_k, s_1 \dots s_m)$ de $L_{aa}(\tau)$, per tota successió $[\bar{c}]_\Delta = [c_1]_\Delta \dots [c_k]_\Delta$ d'elements de A , per tota successió $\bar{u} = u_1 \dots u_m$ d'elements de P :

$$(\#) A^* \models_{K_{aa}} \phi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u}) \text{ sii } \phi(\bar{c}, \bar{u}) \in T.$$

Prova: Mostrem-ho per inducció sobre la complexitat de ϕ :

i) Si ϕ és atòmica, (#) se satisfà clarament per definició de A^* .

ii) Suposem que ϕ i ψ satisfan (#). Tenim que:

$$\begin{aligned} A^* \models_{K_{aa}} \neg \phi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u}) \text{ sii } A^* \not\models_{K_{aa}} \phi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u}) \\ \text{sii } \phi(\bar{c}, \bar{u}) \notin T \quad (\text{per supòsit inductiu}) \\ \text{sii } \neg \phi(\bar{c}, \bar{u}) \in T \quad (\text{per ser } T \text{ max. consistent}) \\ A^* \models_{K_{aa}} \phi \vee \psi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u}) \text{ sii } A^* \models_{K_{aa}} \phi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u}) \text{ o } A^* \models_{K_{aa}} \psi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u}) \\ \text{sii } \phi(\bar{c}, \bar{u}) \in T \text{ o } \psi(\bar{c}, \bar{u}) \in T \quad (\text{per sup. inductiu}) \\ \text{sii } \phi \vee \psi(\bar{c}, \bar{u}) \in T \quad (\text{per ser } T \text{ max. consistent}) \end{aligned}$$

iii) Suposem que $\phi(x)$ satisfà (#).

$$\begin{aligned} A^* \models_{K_{aa}} \exists x \phi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u}) \text{ sii } \text{Hi ha } a \in A \text{ tal que } A^* \models_{K_{aa}} \phi([\bar{c}]_\Delta, a, \bar{u}) \\ \text{sii } \text{Hi ha } d \in C \text{ tal que } [d]_\Delta = a \text{ i} \\ A^* \models_{K_{aa}} \phi([\bar{c}]_\Delta, [d]_\Delta, \bar{u}) \\ \text{sii } \phi(\bar{c}, d, \bar{u}) \in T \quad (\text{per supòsit inductiu}) \\ \text{sii } \exists x \phi(\bar{c}, \bar{u}) \in T \quad (\text{per ser } T \text{ max. con. i exem.}) \end{aligned}$$

iv) Suposem que ϕ és de la forma $aas\psi$. Recordem com obteniem $aas\psi$ a partir de $(aas\psi)_0$. Si $aas\psi$ és una sentència, $aas\psi = (aas\psi)_0$. Si $aas\psi$ no és una sentència i $x_1 \dots x_k$ són les seves variables lliures de primer ordre, $s_1 \dots s_m$ les seves variables lliures de segon ordre i $c_{k+1} \dots c_j$ les constants que ocorren en ella, llavors:

$$aas\psi = (aas\psi)_0(y_1 \dots y_j / x_1 \dots x_k, c_{k+1} \dots c_j) (s'_1 \dots s'_m / s_1 \dots s_m)$$

On $y_1 \dots y_j, s'_1 \dots s'_m$ són les variables lliures de $(aas\psi)_0$, de primer i segon ordre, respectivament. Llavors tenim que :

$$A^* \models_{K_{aa}} \text{aas}\psi[[c_1]_\Delta \dots [c_k]_\Delta, u_1 \dots u_m] \quad \text{sii}$$

$$A^* \models_{R_{(\text{aas}\phi)_0}} (x_1 \dots x_k, c_{k+1} \dots c_j, s_1 \dots s_m)[[c_1]_\Delta \dots [c_k]_\Delta, u_1 \dots u_m]$$

(ja que $(\text{aas}\psi)^* = R_{(\text{aas}\phi)_0} (x_1 \dots x_k, c_{k+1} \dots c_j, s_1 \dots s_m)$) sii

$$R_{(\text{aas}\phi)_0}^{A^*} ([c_1]_\Delta \dots [c_k]_\Delta, [c_{k+1}]_\Delta \dots [c_j]_\Delta, u_1 \dots u_m) \quad \text{sii}$$

$$(\text{aas}\psi)_0(c_1 \dots c_k, c_{k+1} \dots c_j, u_1 \dots u_m) \in T$$

(Per definició de $R_{(\text{aas}\phi)_0}^{A^*}$) sii

$$\text{aas}\psi(c_1 \dots c_k, u_1 \dots u_m) \in T$$

(Per tal com obtenim $\text{aas}\psi$ a partir de $(\text{aas}\psi)_0$) ■

Mostrem a partir d'aquest lema, com A^* és un model feble de T . Clarament, pel Lema 5.6., per tota sentència $\sigma \in T$, $A^* \models \sigma$. Hem vist abans que A^* és un pre-model feble, verifiquem ara les altres dues condicions per mostrar que és un model feble. En primer lloc, si $\phi(x_1 \dots x_k, s_1 \dots s_m)$ és un axioma de $S_{K_{aa}}$, per tota successió $\bar{c} = c_1 \dots c_k$ i per tota successió $\bar{u} = u_1 \dots u_m$, per ser T màximament consistent, $\phi(\bar{c}, \bar{u}) \in T$. Per tant, pel Lema 5.6., per tota successió $[\bar{c}]_\Delta = [c_1]_\Delta \dots [c_k]_\Delta$ d'elements de A i per tota successió $\bar{u} = u_1 \dots u_m$, d'elements de P : $A^* \models_{K_{aa}} \phi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u})$. En segon lloc, sigui $\phi(x_1 \dots x_k, s_1 \dots s_m, s)$ una fórmula de $K_{aa}(\tau \cup U)$, $[\bar{c}]_\Delta = [c_1]_\Delta \dots [c_k]_\Delta$ una successió d'elements de A i $\bar{u} = u_1 \dots u_m$ una successió d'elements de P tals que $A^* \models_{K_{aa}} \text{stats}\phi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u})$. Llavors, pel Lema 5.6., $\text{stats}\phi(\bar{c}, \bar{u}) \in T$. Per tant, com que T és un conjunt exemplificat (en $\tau \cup U$), hi ha $u' \in U$ tal que $\phi(\bar{c}, \bar{u}, u') \in T$. Així aplicant de nou el Lema 5.6., tenim que hi ha $u' \in P$ (en ser $P=U$) tal que $A^* \models_{K_{aa}} \phi([\bar{c}]_\Delta, \bar{u}, u')$. Per tant, A^* és un model feble numerable de $K_{aa}(\tau \cup U)$ i un model canònic de T . Així queda provada la Proposició 5.5. ■

5.7. Proposició. Fixat un tipus de semblança τ , si T és un conjunt consistent de sentències del llenguatge $L_{aa}(\tau)$, llavors T es pot estendre a un conjunt de sentències T' màximament consistent i exemplificat (en $\tau' \cup U$) (on $\tau \subseteq \tau'$ i U és un conjunt de constants de segon ordre).

Prova: Suposem que T és un conjunt de sentències $L_{aa}(\tau)$ consistent. Expandim el llenguatge $L_{aa}(\tau)$ afegint dos conjunts infinits numerables $C = \{c_n : n \in \omega\}$ i $U = \{u_n : n \in \omega\}$ de constants de primer i de segon ordre respectivament, que són conjunts disjunts entre si i de τ . Sigui $\tau' = \tau \cup C$. Sigui $\sigma_1 \dots \sigma_n \dots$ una enumeració de les sentències de $K_{aa}(\tau' \cup U)$. Definim per inducció, per cada $n \in \omega$, un nombre $k_n \in \omega$ i un conjunt finit de sentències de $K_{aa}(\tau' \cup U)$, T_n tals que :

- (1) Si $i < j \leq n$, llavors $T_i \subseteq T_j$.
- (2) Si c_i o u_i ocorren en una sentència de T_n , llavors $i \leq k_n$.
- (3) $T \cup T_n$ és consistent.

Sigui $k_0 = 0$ i $T_0 = \emptyset$. I suposant definits k_n i T_n que satisfan (1), (2) i (3), sigui $k_{n+1} = \max\{k_n, i: c_i \text{ o } u_i \text{ ocorren en } \sigma_{n+1}\} + 1$. I sigui T_{n+1} :

$$T_{n+1} = \begin{cases} \text{Cas i):} \\ = T_n \cup \{\neg \sigma_{n+1}\}, & \text{si } T_n \cup \{\sigma_{n+1}\} \text{ no és consistent amb } T \\ \\ \text{Cas ii)} \\ \text{a)} \\ = T_n \cup \{\sigma_{n+1}\}, & \text{si això és consistent amb } T \text{ i } \sigma_{n+1} \text{ no és de la forma} \\ & \exists x \psi(x) \text{ ni de la forma } \text{stats}\psi(s) \\ \\ \text{b)} \\ = T_n \cup \{\sigma_{n+1}, \psi(x/c_{k_{n+1}})\}, & \text{si } T_n \cup \{\sigma_{n+1}\} \text{ és consistent amb } T \text{ i } \sigma_{n+1} \text{ és de la} \\ & \text{forma } \exists x \psi(x) \\ \\ \text{c)} \\ = T_n \cup \{\sigma_{n+1}, \psi(s/u_{k_{n+1}})\}, & \text{si } T_n \cup \{\sigma_{n+1}\} \text{ és consistent amb } T \text{ i } \sigma_{n+1} \text{ és de la} \\ & \text{forma } \text{stats}\psi(s) \end{cases}$$

Tal i com han estat definits, T_{n+1} i k_{n+1} satisfan clarament (1) i (2). Provem que també satisfan (3). Pels casos i), ii) a) és clar. Mostrem-ho per separat pels altres dos casos, amb l'ajut dels següents lemes:

5.8. Lema. Si c és una constant de primer ordre que no ocorre en Σ i $\Sigma \vdash \phi(c)$, llavors hi ha una variable y , que no ocorre en ϕ , tal que $\Sigma \vdash \forall y \phi(c/y)$.

Prova: Suposem que c és una constant de primer ordre que no ocorre en Σ . Per l'anàleg a la definició 3.4. per K_{aa} , en tenim prou amb mostrar que el conjunt $X = \{\phi: \text{hi ha una variable } y, \text{ que no ocorre en } \phi, \text{ tal que } \Sigma \vdash \forall y \phi(c/y)\}$ inclou Σ , els axiomes de $S_{K_{aa}}$ i està tancat sota *modus ponens*. i) Sigui $\phi \in \Sigma$ i y una variable que no ocorri en ϕ . Com que c no ocorre en Σ , tenim que $\phi = \phi(c/y)$. Per tant, per Lògica de Primer Ordre, $\Sigma \vdash \forall y \phi(c/y)$. Així $\phi \in X$. ii) Sigui ϕ

un axioma de $S_{K_{aa}}$. Llavors, si y és una variable que no ocorre en ϕ , $\phi(c/y)$ és també un axioma de $S_{K_{aa}}$. Per tant, com que el conjunt dels axiomes de $S_{K_{aa}}$ està tancat sota clausura quasi-universal, $\forall y\phi(c/y)$ és també un axioma de $S_{K_{aa}}$. Per tant $\Sigma \vdash \forall y\phi(c/y)$. Així $\phi \in X$. iii) Si $\phi \in X$ i $\phi \rightarrow \psi \in X$, llavors hi ha una variable y que no ocorre en ϕ i una variable y' que no ocorre en $\phi \rightarrow \psi$, tals que $\Sigma \vdash \forall y\phi(c/y)$ i $\Sigma \vdash \forall y'(\phi \rightarrow \psi)(c/y')$. Com que y' no ocorre en ϕ , substituint tenim que $\Sigma \vdash \forall y'\phi(c/y')$. Així per Lògica de Primer Ordre, $\Sigma \vdash \forall y'[\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi)](c/y')$. Per tant $\Sigma \vdash \forall y'\psi(c/y')$. Així $\psi \in X$. X està doncs tancat sota *modus ponens*. ■

Observem que si hi ha una variable y , que no ocorre en ϕ , tal que $\Sigma \vdash \forall y\phi(c/y)$, llavors per tota variable $y' \neq y$, que no ocorre en ϕ , tindrem que $\Sigma \vdash \forall y'\phi(c/y')$. Perquè per Lògica de Primer Ordre, com que y' no ocorre en $\phi(c/y)$, $\vdash \forall y'\phi(c/y') \leftrightarrow \forall y\phi(c/y)$. Enunciem ara un altre corol.lari del Lema 5.8.:

5.9. Corol.lari. Si c és una constant de primer ordre que no ocorre en ϕ ni en Σ , i $\Sigma \cup \{\exists x\phi\}$ és consistent, llavors $\Sigma \cup \{\phi(x/c)\}$ també és consistent.

Així, en el cas ii) b), com que $T_n \cup \{\sigma_{n+1}\}$ és consistent amb T i $c_{k_{n+1}}$ no ocorre en $T \cup T_n \cup \{\sigma_{n+1}\}$ (per definició de k_{n+1}), pel Corol.lari 5.9., tenim que $T_n \cup \{\sigma_{n+1}, \psi(x/c_{k_{n+1}})\}$ també és consistent amb T . Per tant en aquest cas se satisfà (3).

5.10. Lema. Si u és una constant de segon ordre que no ocorre en Σ i $\Sigma \vdash \phi(u)$, llavors hi ha una variable s , que no ocorre en ϕ , tal que $\Sigma \vdash \text{aas}\phi(u/s)$.

Prova: Suposem que u és una constant de segon ordre que no ocorre en Σ . Per l'anàleg a la definició 3.4. per K_{aa} , en tenim prou amb mostrar que el conjunt $X = \{\phi: \text{Hi ha una variable } s, \text{ que no ocorre en } \phi, \text{ tal que } \Sigma \vdash \text{aas}\phi(u/s)\}$ inclou Σ , els axiomes de $S_{K_{aa}}$ i està tancat sota *modus ponens*. i) Sigui $\phi \in \Sigma$ i s una variable que no ocorre en ϕ . Com que u no ocorre en Σ , tenim que $\phi = \phi(u/s)$. Per tant, per A.6, $\Sigma \vdash \text{aas}\phi(u/s)$. Així $\phi \in X$. ii) Sigui ϕ un axioma de $S_{K_{aa}}$, llavors, si s és una variable que no ocorre en ϕ , $\phi(u/s)$ és també un axioma de $S_{K_{aa}}$. Per tant com que el conjunt dels axiomes de $S_{K_{aa}}$ està tancat sota clausura quasi-universal, $\text{aas}\phi(u/s)$ és també un axioma de $S_{K_{aa}}$. Per tant $\Sigma \vdash \text{aas}\phi(u/s)$. Així $\phi \in X$. iii) Si $\phi \in X$ i $\phi \rightarrow \psi \in X$, llavors hi ha una variable s que no ocorre en ϕ i una variable s' que no ocorre en $\phi \rightarrow \psi$, tals que $\Sigma \vdash \text{aas}\phi(u/s)$ i $\Sigma \vdash \text{aas}'(\phi \rightarrow \psi)(u/s')$. Com que s' no ocorre en ϕ , per A.0 tenim que $\Sigma \vdash \text{aas}'\phi(u/s')$. Així per A.3, $\Sigma \vdash \text{aas}'[\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi)](u/s')$. Per tant $\Sigma \vdash \text{aas}'\psi(u/s')$. Així $\psi \in X$. X està doncs tancat sota *modus ponens*. ■

Observem que si hi ha una variable s , que no ocorre en ϕ , tal que $\Sigma \vdash_{\text{aas}} \phi(u/s)$, llavors per tota variable $s' \neq s$, que no ocorre en ϕ , tindrem que $\Sigma \vdash_{\text{aas}} \phi(u/s')$. Perquè per A.0, com que s' no ocorre en $\phi(u/s)$, $\vdash_{\text{aas}} \phi(u/s') \leftrightarrow \text{aas} \phi(u/s)$. Enunciem ara un altre corol.lari del Lema 5.10.:

5.11. Corol.lari. Si u és una constant de segon ordre que no ocorre en ϕ ni en Σ , i $\Sigma \cup \{\text{stats} \phi\}$ és consistent, llavors $\Sigma \cup \{\phi(s/u)\}$ també és consistent.

Així, en el cas ii) c), com que $T_n \cup \{\sigma_{n+1}\}$ és consistent amb T i $u_{k_{n+1}}$ no ocorre en $T \cup T_n \cup \{\sigma_{n+1}\}$ (per definició de k_{n+1}), pel Corol.lari 5.11., tenim que $T_n \cup \{\sigma_{n+1}, \psi(s/u_{k_{n+1}})\}$ també és consistent amb T . Per tant en aquest cas se satisfà també (3). Considerem ara $T' = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Observem que per definició, per tot $n \in \omega$, T_n és un conjunt consistent. Per tant, com que $\{T_n : n \in \omega\}$ forma una cadena respecte la inclusió (clàusula (1) de la definició), T' serà també un conjunt consistent. A més a més, tal i com ha estat definit, per cada sentència $\sigma \in K_{\text{aa}}(\tau \cup U)$, $\sigma \in T'$ o $\neg \sigma \in T'$. Per tant T' és un conjunt màximament consistent. I per definició, T' és exemplificat (en $\tau \cup U$). Finalment, com que per tot $n \in \omega$, T_n és consistent amb T (clàusula (3) de la definició), T' serà també consistent amb T . Per tant, per ser T' màximament consistent, $T \subseteq T'$. Així T' és el conjunt de sentències buscat. Això conclou la prova de la Proposició 5.7. ■

5.12. Teorema de Completesa per Models Febles. Si τ és un tipus de semblança numerable i sense símbols funcionals i T és un conjunt de sentències de $L_{\text{aa}}(\tau)$ consistent, T té un model feble de $L_{\text{aa}}(\tau)$ numerable.

Prova: Suposem que T és un conjunt consistent de sentències de $L_{\text{aa}}(\tau)$. Per la proposició 5.7. podem estendre T a un conjunt de sentències T' màximament consistent i exemplificat (en $\tau \cup U$) (on $\tau \subseteq \tau'$ i U és un conjunt de constants de segon ordre). Sigui A^* un model feble de $K_{\text{aa}}(\tau \cup U)$ de T' numerable (existeix un model tal per la Proposició 5.5.). La reducció a τ de A^* és un model feble de $L_{\text{aa}}(\tau)$ de T numerable. ■

6. Teorema de Completesa per L_{aa} .

La proposició principal d'aquest capítol ens mostrarà que tot model feble pot ser extès a un altre model feble amb certes característiques interessants. Si T és un conjunt consistent de sentències d'un llenguatge de L_{aa} i A^* és un model feble numerable de T , aplicant ω_1 vegades aquesta proposició formarem una cadena de ω_1 models febles, a partir de A^* . La unió d'aquesta cadena serà un model feble que ens permetrà trobar un model estàndard de T .

6.1. Definició. Fixat un tipus de semblança τ , si A^* i B^* són models febles de $L_{aa}(\tau)$, direm que B^* és una $L_{aa}(\tau)$ -extensió de A^* , i ho denotarem per $A^* <_{L_{aa}} B^*$, sii $A^* \subset B^*$ (B^* és una subestructura de A^*) i per tota fórmula ϕ de $L_{aa}(\tau)$ amb paràmetres a $AUP_{A^*}^{-1}$, $A^* \models_{L_{aa}} \phi$ sii $B^* \models_{L_{aa}} \phi$.

6.2. Definició. Diem que $\langle A_\alpha^* : \alpha \in \lambda \rangle$ és una $L_{aa}(\tau)$ -cadena de models febles sii per tot $\alpha \in \beta$, $\beta \in \lambda$, tenim que $A_\alpha^* <_{L_{aa}} A_\beta^*$.

6.3. Observació. Si $\langle A_\alpha^* : \alpha \in \lambda \rangle$ és una $L_{aa}(\tau)$ -cadena de models febles i A^* és la seva unió, llavors tenim que: 1) Per tot $\alpha \in \lambda$, $A_\alpha^* <_{L_{aa}} A^*$.
2) A^* és un model feble.

Prova: 2) se'n segueix de 1). Provem 1): Fixem-nos que, per definició de la traducció $*$, el conjunt $X = \{\phi^* : \phi \in L_{aa}(\tau)\}$ és el menor conjunt que inclou $X_0 = \{\phi^* : \phi \in L_{aa}(\tau) \text{ i } \phi^* \text{ és una fórmula atòmica}\}$ i que està tancat sota \wedge , \neg i \exists . Per tant, per provar 1) en tenim prou amb mostrar que el conjunt $Y = \{\phi^* : \phi \in L_{aa}(\tau) \text{ i per tot } \alpha \in \lambda, A_\alpha^* \models \phi^* \text{ sii } A^* \models \phi^* \text{ (on } \phi^* \text{ pot tenir paràmetres a } AU P_{A_\alpha^*})\}$ inclou X_0 i està tancat sota \wedge , \neg i \exists . Mostrem-ho: i) Si $\phi^* \in X_0$ i $\alpha \in \lambda$, tenim que $A_\alpha^* \subset A^*$. Per tant $\phi^* \in Y$. ii) Mostrar que Y està tancat sota \wedge i \neg no presenta cap dificultat especial. iii) Suposem que $\phi^* \in Y$. Sigui $\alpha \in \lambda$.

Si $A_\alpha^* \models \exists x \phi^*$ llavors hi ha $a \in A_\alpha$ tal que $A_\alpha^* \models \phi^*[a]$
 llavors hi ha $a \in A_\alpha$ tal que $A^* \models \phi^*[a]$ (ja que $\phi^* \in Y$)
 llavors hi ha $a \in A$ tal que $A^* \models \phi^*[a]$ (perquè $A_\alpha \subseteq A$)
 llavors $A^* \models \exists x \phi^*$

¹ **Notació:** Donat un model feble A^* , a partir d'ara denotarem per " P_{A^*} " el segon domini de A^* , que fins ara havíem anomenat simplement P .

Si $A^* \models \exists x \phi^*$ llavors hi ha $a \in A$ tal que $A^* \models \phi^*[a]$
 llavors hi ha $\beta \in \lambda$, $\beta \geq \alpha$ tal que $a \in A_\beta$ i $A^* \models \phi^*[a]$ (per def. A^*)
 llavors hi ha $\beta \in \lambda$, $\beta \geq \alpha$ tal que $a \in A_\beta$ i $A_\beta^* \models \phi^*[a]$ (per $\phi^* \in Y$)
 llavors hi ha $\beta \in \lambda$, $\beta \geq \alpha$ tal que $A_\beta^* \models \exists x \phi^*$
 llavors $A_\alpha^* \models \exists x \phi^*$ (perquè $A_\alpha^* <_{L_{aa}} A_\beta^*$) ■

6.4. Definició. Sigui A^* un model feble numerable de $L_{aa}(\tau)$. Sigui $\text{stats}\phi$ una sentència de $L_{aa}(\tau)$ tal que $A^* \models_{L_{aa}} \text{stats}\phi$, diem que un model feble de $L_{aa}(\tau)$ numerable B^* és una *stats* ϕ - $L_{aa}(\tau)$ -extensió de A^* sii

i) $A^* <_{L_{aa}} B^*$

ii) Per algun $t \in P_{B^*}$, $\{b \in B : B^* \models_{L_{aa}} x \in s [b, t]\} = A$. Intuïtivament aquesta condició ens diu que A pertany a P_{B^*} . A partir d'ara identificarem t amb A , anomenarem A al conjunt que satisfarà aquesta condició.

iii) $B^* \models_{L_{aa}} \phi[A]$

iv) Per tota sentència $aas\psi$ tal que $A^* \models_{L_{aa}} aas\psi$, $B^* \models_{L_{aa}} \psi[A]$

v) Per tot $t \in P_{A^*}$, per tot $b \in B$: $B^* \models_{L_{aa}} x \in s [b, t]$ sii ($b \in A$ i $A^* \models_{L_{aa}} x \in s [b, t]$). Intuïtivament estem demanant per tot $t \in P_{A^*}$, que la seva extensió en B^* sigui la mateixa que la seva extensió en A^* . (Observem que aquesta condició v) se'n segueix de i-iv))

6.5. Proposició. Si A^* és un model feble de $L_{aa}(\tau)$ numerable i $\text{stats}\phi$ una sentència de $L_{aa}(\tau)$ $A^* \models_{L_{aa}} \text{stats}\phi$, llavors hi ha un model feble de $L_{aa}(\tau)$ numerable que és una *stats* ϕ - $L_{aa}(\tau)$ -extensió de A^* .

Prova: Sigui A^* un model feble de $L_{aa}(\tau)$ numerable i $\text{stats}\phi$ una sentència de $L_{aa}(\tau)$, tal que $A^* \models_{L_{aa}} \text{stats}\phi$. Sigui $\tau' = \tau \cup \{ \bar{a} : a \in A \}$ i $U = \{ \bar{t} : t \in P_{A^*} \} \cup \{ \bar{A} \}$. Considerem el model $A^*_o = (A^*, a, t)_{a \in A, t \in P_{A^*}}$. Sigui Z el conjunt de sentències següent:

$\{\psi(s/\bar{A}) : \psi \text{ és una sentència de } K_{aa}[\tau \cup (U - \{\bar{A}\})] \text{ i } A^*_o \models_{aas} \psi(s)\}$

Considerem ara el conjunt $T = Th(A^*_o) \cup \{\phi(s/\bar{A})\} \cup Z$.² Veurem ara com utilitzant proves anàlogues a les utilitzades en les Proposicions 5.5 i 5.7. trobarem un model feble de T que sigui una stats ϕ - $L_{aa}(\tau)$ -extensió de A^* . Però abans de construir aquest model donarem un criteri per determinar quan una sentència $\sigma(s/\bar{A})$ de $K_{aa}(\tau \cup U)$ serà consistent amb T , a partir del següent lema:

6.6. Lema. $T \vdash \sigma(s/\bar{A})$ sii $A^*_o \models_{aas} (\phi \rightarrow \sigma)$ ³.

Prova: \Leftarrow) Suposem que $A^*_o \models_{aas} (\phi \rightarrow \sigma)$, llavors tal com hem definit T , tenim que $\phi(s/\bar{A}) \rightarrow \sigma(s/\bar{A}) \in T$, per tant, donat que $\phi(s/\bar{A}) \in T$, $T \vdash \sigma(s/\bar{A})$.

\Rightarrow) Suposem que $T \vdash \sigma(s/\bar{A})$, llavors hi ha un nombre finit de sentències $\sigma_0(s/\bar{A}), \dots, \sigma_n(s/\bar{A})$ de Z tals que $Th(A^*_o) \cup \{\phi(s/\bar{A}), \sigma_0(s/\bar{A}), \dots, \sigma_n(s/\bar{A})\} \vdash \sigma(s/\bar{A})$. Sigui s una variable que no ocorre en σ . Substituint la constant \bar{A} per la variable s , tenim que $Th(A^*_o) \vdash \bigwedge_{i \leq n} \sigma_i \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma)$. Així, donat que \bar{A} no ocorre en $Th(A^*_o)$, pel Teorema de aageneralització $Th(A^*_o) \vdash_{aas} (\bigwedge_{i \leq n} \sigma_i \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma))$. Per tant, per A.4, $Th(A^*_o) \vdash_{aas} \bigwedge_{i \leq n} \sigma_i \rightarrow_{aas} (\phi \rightarrow \sigma)$. Llavors com que per cada $i \leq n$ $A^*_o \models_{aas} \sigma_i$ (ja que $\sigma_i(s/\bar{A}) \in Z$), per A.3 tenim que $A^*_o \models_{aas} \bigwedge_{i \leq n} \sigma_i$. Per tant $A^*_o \models_{aas} (\phi \rightarrow \sigma)$. ■

6.7. Corol.lari. $T \cup \{\sigma(s/\bar{A})\}$ és consistent sii $A^*_o \models_{stats} (\phi \wedge \sigma)$.

6.8. Observació. T és consistent.

Prova: A^*_o és un model feble, en ser-ho A^* . Així, $A^*_o \models_{aas} \neg \perp$, i pel Lema 3.19. i la Definició 2.2., com que $A^*_o \models_{stats} \phi$, llavors $A^*_o \models_{stats} (\phi \wedge \neg \perp)$. Per tant, pel Corol.lari 6.7., el conjunt T és consistent. ■

Expandim ara el llenguatge $K_{aa}(\tau \cup U)$ afegint dos conjunts numerables $C' = \{c_n : n \in \omega\}$ i $U' = \{u_n : n \in \omega\}$ de constants, de primer i de segon ordre respectivament, i disjunts entre si i de τ' . Sigui $\tau'' = \tau' \cup C'$ i $U'' = U \cup U'$. Sigui $\sigma_1 \dots \sigma_n \dots$ una enumeració de les sentències de $K_{aa}(\tau'' \cup U'')$. Definim per inducció, anàlogament a com ho vam fer en la prova de 5.7., per cada $n \in \omega$, un nombre $k_n \in \omega$ i un conjunt finit de sentències de $K_{aa}(\tau'' \cup U'')$, T_n tals que :

² On $Th(A^*_o)$ és el conjunt de totes les sentències de $K_{aa}[\tau \cup (U - \{\bar{A}\})]$ vertaderes en el model A^*_o .

³ On s és una variable que no ocorre ni en σ ni en ϕ .

- (1) Si $i < j \leq n$, llavors $T_i \subseteq T_j$.
- (2) Si c_i o u_i ocorren en una sentència de T_n , llavors $i \leq k_n$.
- (3) $T \cup T_n$ és consistent.

Sigui $k_0=0$ i $T_0=\emptyset$. I suposant definits k_n i T_n que satisfan (1), (2) i (3), sigui $k_{n+1}=\max\{k_n, i: c_i \text{ o } u_i \text{ ocorren en } \sigma_{n+1}\} + 1$. I per definir T_{n+1} , afegim la següent variant a la prova de 5.7.:
Sigui T°_{n+1} el següent conjunt:

$$T^{\circ}_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cas i):} \\ = T_n \cup \{\neg \sigma_{n+1}\}, \quad \text{si } T_n \cup \{\sigma_{n+1}\} \text{ no és consistent amb } T. \\ \\ \text{Cas ii)} \\ \text{a)} \\ = T_n \cup \{\sigma_{n+1}\}, \quad \text{si això és consistent amb } T \text{ i } \sigma_{n+1} \text{ no és de la forma } \exists x \psi(x) \\ \text{ni de la forma } \text{stats} \psi(s). \\ \\ \text{b)} \\ = T_n \cup \{\sigma_{n+1}, \psi(x/c_{k_{n+1}})\}, \text{ si } T_n \cup \{\sigma_{n+1}\} \text{ és consistent amb } T \text{ i } \sigma_{n+1} \text{ és de la forma} \\ \exists x \psi(x). \\ \\ \text{c)} \\ = T_n \cup \{\sigma_{n+1}, \psi(s/u_{k_{n+1}})\}, \text{ si } T_n \cup \{\sigma_{n+1}\} \text{ és consistent amb } T \text{ i } \sigma_{n+1} \text{ és de la forma} \\ \text{stats} \psi(s). \end{array} \right.$$

Llavors, si $\{a_n: n \in \omega\}$ és una enumeració de A , definim T_{n+1} de la següent manera:

$$T_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cas I)} \\ = T^{\circ}_{n+1} \cup \{c_{n+1} \approx \bar{a}\}, \quad \text{si això és consistent amb } T \text{ (on } a \in A \text{ és l'element de menor} \\ \text{índex en l'enumeració establerta, pel que això passa).} \\ \\ \text{Cas II)} \\ = T^{\circ}_{n+1} \cup \{\neg c_{n+1} \in \bar{A}\}, \text{ si no hi ha } a \in A \text{ tal que } T^{\circ}_{n+1} \cup \{c_{n+1} \approx \bar{a}\} \text{ sigui consistent} \\ \text{amb } T. \end{array} \right.$$

Clarament, tal i com han estat definits, satisfan (1) i (2) en ambdós casos i (3) en el cas I). Mostrem ara que també se satisfà (3) en el cas II). Suposem que no hi ha cap $a \in A$ tal que $T_{n+1}^0 \cup \{c_{n+1} \approx a\}$ sigui consistent amb T . Suposem també, buscant una contradicció, que $T_{n+1}^0 \cup \{\neg c_{n+1} \in \overline{A}\}$ no és consistent amb T . Llavors tenim que $T_{n+1}^0 \cup \{c_{n+1} \in \overline{A}\}$ és consistent amb T . Així si x és una variable que no ocorre en ϕ ni en cap sentència de T_{n+1}^0 , tenim que $\exists x(\wedge T_{n+1}^0 \wedge x \in \overline{A})(c_{n+1}/x)$ ⁴ és consistent amb T . Sigui s una variable que no ocorri en cap sentència de T_{n+1}^0 . Pel Criteri de Consistència per T (Corol.lari 6.7.), tenim que $A^*_o \models \text{stats}[\phi \wedge \exists x(\wedge T_{n+1}^0 \wedge x \in \overline{A})(c_{n+1}/x, \overline{A}/s)]$. Així com que x no ocorre en ϕ , $A^*_o \models \text{stats} \exists x \in s[\phi \wedge (\wedge T_{n+1}^0)(c_{n+1}/x, \overline{A}/s)]$. I com que A^*_o és un model feble, pel Lema 3.22. tenim que $A^*_o \models \exists x \text{stats}[\phi \wedge (\wedge T_{n+1}^0)(c_{n+1}/x, \overline{A}/s)]$. Així com que A^*_o és un model canònic, hi ha $a \in A$ tal que $A^*_o \models \text{stats}[\phi \wedge (\wedge T_{n+1}^0)(c_{n+1}/a, \overline{A}/s)]$. Per tant, altre cop pel Criteri de Consistència, $\wedge T_{n+1}^0(c_{n+1}/a)$ és consistent amb T . I així $T_{n+1}^0 \cup \{c_{n+1} \approx a\}$ és també consistent amb T . Perquè si no ho fos, com que c_{n+1} no ocorre en T , si x és una variable que no ocorre en cap sentència de T_{n+1}^0 , pel Lema 5.10., tindriem que $\exists x[\wedge T_{n+1}^0(c_{n+1}/x) \wedge x \approx a]$ no és consistent amb T . Però $T \vdash \wedge T_{n+1}^0(c_{n+1}/a) \rightarrow \exists x[\wedge T_{n+1}^0(c_{n+1}/x) \wedge x \approx a]$. Per tant $\wedge T_{n+1}^0(c_{n+1}/a)$ no seria tampoc consistent amb T . Absurd. Així hem arribat a que $T_{n+1}^0 \cup \{c_{n+1} \approx a\}$ és consistent amb T però això contradiu els nostres supòsits inicials. Com que hem arribat a una contradicció podem concloure que $T_{n+1}^0 \cup \{\neg c_{n+1} \in \overline{A}\}$ és consistent amb T i així que en el cas II) se satisfà també (3).

Considerem ara $T' = \cup_{n \in \omega} T_n$. Observem que per definició, per tot $n \in \omega$, T_n és un conjunt consistent. Per tant, com que $\{T_n : n \in \omega\}$ forma una cadena respecte la inclusió (clàusula (1) de la definició), T' serà també un conjunt consistent. A més a més, tal i com ha estat definit, per cada sentència $\sigma \in K_{aa}(\tau'' \cup U'')$, $\sigma \in T'$ o $\neg \sigma \in T'$. Per tant T' és un conjunt màximament consistent. I per definició, T' és exemplificat (en $\tau'' \cup U''$). Finalment, com que per tot $n \in \omega$, T_n és consistent amb T (clàusula (3) de la definició), T' serà també consistent amb T . Per tant, per ser T' màximament consistent, $T \subseteq T'$. Per Proposició 5.5. hi ha un model feble, C^* , de $K_{aa}(\tau'' \cup U'')$ numerable, model de T' canònic. Podem suposar que satisfà: per cada $a \in A$, $(\overline{a})^{C^*} = a$ i, per cada $t \in P_{A^*}$, $(\overline{t})^{C^*} = t$. Llavors la reducció de C^* a τ , diguem-li B^* , satisfà i-v) de la Definició 6.4. Verifiquem-ho:

i) $A^* <_{L_{aa}} B^*$ perquè C^* és un model de $\text{Th}(A^*_o)$.

⁴ Notació: $\wedge T_{n+1}^0$ és la conjunció de les sentències del conjunt finit T_{n+1}^0 .

ii) Per algun $t \in P_{B^*}$, $\{b \in B: B^* \models x \in s [b, t]\} = A$. Prenem $t = \overline{A}$ (fixem-nos que per elecció de C^* , \overline{A} és un element del domini de C^*). Mostrem que $\{b \in B: B^* \models x \in s [b, \overline{A}]\} = A$:

- | | | | |
|--|-----|---|--|
| $B^* \models x \in s [[c_n]_\Delta, \overline{A}]$ | sii | $C^* \models x \in s [[c_n]_\Delta, \overline{A}]$ | (per ser B^* la reducció de C^* a τ) |
| | sii | $c_n \in \overline{A} \in T$ | (per ser C^* un model canònic) |
| | sii | hi ha $a \in A$ tal que $c_n \approx \overline{a} \in T$ | (per definició de T) |
| | sii | hi ha $a \in A$ tal que $C^* \models x \approx y [a, [c_n]_\Delta]$ | (per ser C^* canònic) |
| | sii | $[c_n]_\Delta \in A$ | (perquè $a \in A$) |

iii) $B^* \models \phi[A]$, perquè $C^* \models \phi(\overline{A})$

iv) Per tota sentència $aas\psi$ tal que $A^* \models aas\psi$, $B^* \models \psi[A]$. Perquè per tota sentència tal, $C^* \models \psi(\overline{A})$. Així doncs, B^* és la stats ϕ - $L_{aa}(\tau)$ -extensió de A^* buscada. Podem així concloure la prova de la Proposició 6.5. ■

6.9. Teorema de Completesa per L_{aa} . Sigui τ un tipus de semblança numerable. Si T és un conjunt de sentències consistent de $L_{aa}(\tau)$, T té un model.

Prova: Com que la lògica L_{aa} permet eliminació de símbols funcionals ⁵, en tenim prou amb provar-ho per tipus de semblança τ sense símbols funcionals. Suposem, doncs, que τ és un tipus de semblança numerable i sense símbols funcionals. Sigui T un conjunt de sentències consistent de $L_{aa}(\tau)$. Pel Teorema 5.12, hi ha un model feble de $L_{aa}(\tau)$, A^* , numerable que és un model de T . Provarem ara que hi ha un model feble de $L_{aa}(\tau)$, B^* , tal que:

1) $A^* <_{L_{aa}} B^*$ i

2) Si $B^* = (B, P_{B^*}, \in^{B^*}, R_{(aas\phi)_0}^{B^*})_{\phi \in L_{aa}(\tau)}$, per tota fórmula $\phi \in L_{aa}(\tau)$ amb

paràmetres a $B \cup P_{B^*}$, $B \models_{L_{aa}} \phi$ si i sols si $B^* \models_{L_{aa}} \phi$.

Així, B serà el model estàndard de T buscat. Siguin C i U conjunts de constants de primer i de segon ordre respectivament, disjunts entre si i de τ , de cardinalitat ω_1 . Sigui $\tau' = \tau \cup C$. En el llenguatge ampliat $K_{aa}(\tau' \cup U)$ hi ha ω_1 sentències del tipus stats $\psi(s)$. Sigui S una partició de ω_1 en ω_1 conjunts estacionaris indexada en $I = \{\text{stats}\psi(s) : \psi(s) \in K_{aa}(\tau' \cup U)\}$, $S = \{S_i : i \in I\}$ i $\omega_1 = \cup S$. Construïm ara inductivament una $L_{aa}(\tau)$ -cadena de ω_1 models febles numerables, $\langle A_\alpha^* : \alpha \in \omega_1 \rangle$, i una cadena de ω_1 llenguatges que extenguin $L_{aa}(\tau)$, $\langle L_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$, tals que:

⁵ Veure Apèndix II.

- i) Per tot $\alpha \in \omega_1$, $L_\alpha \subseteq K_{aa}(\tau \cup U)$
- ii) Per tot $\alpha \in \omega_1$, A_α^* és la reducció a τ d'un model feble de L_α .

Sigui $L_0 = L_{aa}(\tau)$ i $A_0^* = A^*$. I suposant definits L_α , de tipus τ_α , que satisfà i) ii), llavors $L_{\alpha+1}$ és el llenguatge obtingut a partir de L_α donant a cada element de A_α i de $P_{A_\alpha^*}$ que no tinguen nom en τ_α , un nom de $(CUU)-\tau_\alpha$. Diguem $\tau_{\alpha+1}$ al seu tipus de semblança. I suposant definit A_α^* que satisfà i) ii), si A_α^* és el model $(A_\alpha^*, a, t)_{a \in A_\alpha, t \in P_{A_\alpha^*}}$ i ψ és l'única sentència de $K_{aa}(\tau \cup U)$ tal que α pertany al conjunt estacionari $S_{\text{stats}\psi(s)}$, llavors:

$$A_{\alpha+1}^* = \begin{cases} \text{Cas 1: Si } A_\alpha^* \models \text{stats}\psi(s) \\ = \text{la reducció a } \tau \text{ d'una stats}\psi(s)\text{-}L_{\alpha+1}\text{-extensió de } A_\alpha^* \text{ }^6 \\ \\ \text{Cas 2: Si } A_\alpha^* \not\models \text{stats}\psi(s) \text{ o bé } \text{stats}\psi(s) \notin L_{\alpha+1} \\ = A_\alpha^* \end{cases}$$

Per λ límit, $A_\lambda^* = \cup \{A_\alpha^* : \alpha \in \lambda\}$. Considerem ara el model $B^* = \cup \{A_\alpha^* : \alpha \in \omega_1\}$. Podem suposar que per cada $t \in P_{B^*}$, $t = \{b \in B : B^* \models_{L_{aa}} x \in s[b, t]\}$. Així per l'Observació 6.3., tenim que: 1) $A^* <_{L_{aa}} B^*$, perquè B^* és la unió d'una $L_{aa}(\tau)$ -cadena de $L_{aa}(\tau)$ -extensions de A^* . Mostrem ara per inducció que també satisfà 2): Si ϕ és atòmica, cal només considerar el cas $\phi = s(x)$. Donat que si $t \in P_{B^*}$, t és un conjunt numerable, perquè si α és el menor ordinal tal que $t \in P_{A_\alpha^*}$, llavors per v) de la Definició 6.4., l'extensió de t en A_α^* és la mateixa que l'extensió de t en B^* . Així: $B \models_{L_{aa}} s(x)[t, a]$, on $a \in B$, si i sols si $a \in t$, si i sols si $B^* \models_{L_{aa}} s(x)[t, a]$. Per $\phi = \alpha \vee \beta$, $\phi = \exists x \psi(x)$ i $\phi = \neg \psi$ la prova no presenta cap dificultat en especial.

Finalment, suposem inductivament que $\psi(s)$ satisfà 2). Sigui $\psi(x_1 \dots x_k, s_1 \dots s_m, s)$ una fórmula de $L_{aa}(\tau)$. Llavors, per tota successió $\bar{b} = b_1 \dots b_k$ d'elements de B i tota successió $\bar{r} = r_1 \dots r_m$ d'elements de $P_{\omega_1}(B)$, si $B \models_{L_{aa}} \psi(s)[\bar{b}, \bar{r}]$, el conjunt $Y = \{t \in P_{\omega_1}(B) : B \models_{L_{aa}} \psi(s)[\bar{b}, \bar{r}, t]\} \in \mathcal{F}(B)$. Sabem també que, per cada $\alpha \in \omega_1$, $A_\alpha^* \in P_{B^*}$ (per la Definició 6.4.) i amb això és senzill veure que per tal com hem definit la cadena $\langle A_\alpha^* : \alpha \in \omega_1 \rangle$, el conjunt $Z = \{A_\alpha^* : \alpha \in \omega_1\} \in \mathcal{F}(B)$. Sigui $W = Y \cap Z$, tenim que $W \in \mathcal{F}(B)$. Sigui $X = \{\alpha : A_\alpha^* \in W\}$, X inclou un conjunt tancat i cofinal en ω_1 , per la Proposició 1.34., perquè W inclou un tancat i cofinal en

⁶ Existeix una extensió tal per la Proposició 6.5.

$P_{\omega_1}(B)$. Suposem, buscant una contradicció, que $B^* \not\models_{L_{aa}} \text{aas}\psi(s)[\bar{b}, \bar{r}]$. Llavors $B^* \models_{L_{aa}} \text{stats}\neg\psi(s)[\bar{b}, \bar{r}]$. Així si considerem el menor α tal que els paràmetres de $\psi(s)$ ho són de A_α^* , sigui aquest β , i prenem la sentència $\text{stats}\neg\psi(s)(\bar{c}, \bar{j})$ ⁷. Llavors el conjunt $S = \{\alpha > \beta : \alpha \in S_{\text{stats}\neg\psi(s)(\bar{c}, \bar{j})}\}$ és estacionari en ω_1 . I per tot $\alpha \in S$, $B^* \models_{L_{aa}} \neg\psi[A_\alpha^*, \bar{b}, \bar{r}]$. Però donat que el conjunt estacionari S té intersecció no buida amb X , per algun α , $B \models_{L_{aa}} \psi[A_\alpha^*, \bar{b}, \bar{r}]$ i $B^* \models_{L_{aa}} \neg\psi[A_\alpha^*, \bar{b}, \bar{r}]$ contradint-se el supòsit inductiu. Absurd. Així: $B^* \models_{L_{aa}} \text{aas}\psi(s)[\bar{b}, \bar{r}]$. Inversament, suposem que $B \models_{L_{aa}} \text{aas}\psi(s)[\bar{b}, \bar{r}]$. Considerem el menor α tal que els paràmetres de $\psi(s)$ ho són de A_α^* , sigui aquest β . Llavors $A_\beta^* \models_{L_{aa}} \text{aas}\psi(s)[\bar{b}, \bar{r}]$. Així per tot $\alpha > \beta$, $A_{\alpha+1}^* \models_{L_{aa}} \psi(s)[A_\alpha^*, \bar{b}, \bar{r}]$ i per tant, tenim que $B^* \models_{L_{aa}} \psi(s)[A_\alpha^*, \bar{b}, \bar{r}]$. Així, per supòsit inductiu, per tot $\alpha > \beta$ $B \models_{L_{aa}} \psi(s)[A_\alpha^*, \bar{b}, \bar{r}]$. Per tant, com que $\{A_\alpha^* : \beta < \alpha\} \in \mathcal{F}(B)$, tenim que $B \models_{L_{aa}} \text{aas}\psi(s)[\bar{b}, \bar{r}]$. Així B^* satisfà 1) i 2). B és doncs el model estàndard de T buscat. ■

⁷ On $\psi(s)(\bar{c}, \bar{j})$ és la fórmula resultant de substituir les variables $x_1 \dots x_k$ de primer ordre i les variables $s_1 \dots s_m$ de segon ordre en $\psi(x_1 \dots x_k, s_1 \dots s_m, s)$, per les constants $\bar{c} = c_1 \dots c_k$ i $\bar{j} = j_1 \dots j_m$, de primer i segon ordre respectivament. I on per cada $i \leq k$, $c_i^{B^*} = b_i$ i per cada $i \leq m$, $j_i^{B^*} = r_i$.

7. $L_{aa} \not\equiv L(Q_1)$

7.1. Definició. Sigui L un sistema lògic ¹. Fixat un tipus de semblança τ , llavors si ψ és una sentència de $L(\tau)$,

$$\text{Mod}_L^\tau(\psi) = \{A: A \text{ és una estructura de tipus } \tau \text{ i } A \models_L \psi\}.$$

7.2. Definició. Si L i L' són dos sistemes lògics, diem que L' és una extensió de L i ho denotem per ($L \leq L'$) sii per tot tipus τ i tota sentència ψ de $L(\tau)$, hi ha una sentència ϕ de $L'(\tau)$ tal que:

$$\text{Mod}_L^\tau(\psi) = \text{Mod}_{L'}^\tau(\phi)$$

7.3. Observació. $L(Q_1) \leq L_{aa}$

Prova: Pel Corol.lari 2.6. ■

7.4. Definició. Donades dues estructures de tipus τ , A i B , diem que $A \equiv_{L(Q_1)} B$ sii A i B satisfan exactament les mateixes sentències de $L(Q_1)(\tau)$.

Donarem ara una caracterització purament algebraica de $\equiv_{L(Q_1)}$ per a estructures no numerables, a partir d'isomorfies parcials. Aquesta caracterització ens permetrà mostrar posteriorment que $L_{aa} \not\equiv L(Q_1)$.

7.5. Definició. Siguin A i B dues estructures no numerables de tipus τ finit i relacional, diem que $\langle I_n: n \in \omega \rangle$ és un sistema $L(Q_1)$ -back-and-forth de A en B si i sols si:

- (1) Per tot $n \in \omega$, I_n és una col.lecció no buida d'isomorfies parcials de A en B .
- (2) Per tot $f \in I_{n+1}$ i tot $a \in A$, hi ha $g \in I_n$ tal que $f \subseteq g$ i $a \in \text{dom}(g)$.
- (3) Per tot $f \in I_{n+1}$ i tot $b \in B$, hi ha $g \in I_n$ tal que $f \subseteq g$ i $b \in \text{rec}(g)$.
- (4) Per tot $f \in I_{n+1}$, és numerable el conjunt $\{a \in A: \{b \in B: f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in I_n\} \text{ és numerable}\}$
- (5) Per tot $f \in I_{n+1}$, és numerable el conjunt $\{b \in B: \{a \in A: f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in I_n\} \text{ és numerable}\}$

7.6. Definició. Fixat un tipus de semblança τ , si $\phi \in L(Q_1)(\tau)$ definim *el rang quantificacional* de ϕ , $qr(\phi)$, per inducció sobre la complexitat de ϕ :

¹Per la Definició de Sistema Lògic veure Apèndix II, nota 1.

$$\begin{aligned} \text{qr}(\phi) &= 0, \text{ si } \phi \text{ és atòmica.} \\ \text{qr}(\neg\phi) &= \text{qr}(\phi) \\ \text{qr}(\psi \vee \phi) &= \max(\text{qr}(\psi), \text{qr}(\phi)) \\ \text{qr}(\exists x\phi) &= \text{qr}(Qx\phi) = \text{qr}(\phi) + 1 \end{aligned}$$

7.7. Observació. Fixat un tipus de semblança τ , finit i relacional i fixada una successió de variables \bar{v} , per tot $n \in \omega$, hi ha (llevat de $L(Q_1)$ -equivalència) un nombre finit de fórmules de $L(Q_1)(\tau)$, que tenen lliures exactament les variables de \bar{v} i tenen rang quantificacional $\leq n$.

7.8. Definició. Fixem una successió de variables \bar{v} i un tipus de semblança τ finit i relacional. Si $\psi \in L(Q_1)(\tau)$ que té exactament les variables de \bar{v} lliures i $\text{qr}(\psi) \leq n$, diem que ψ és *n-completa en les variables de \bar{v}* , si per tota fórmula $\phi \in L(Q_1)(\tau)$ que té lliures exactament les variables de \bar{v} i $\text{qr}(\phi) \leq n$:

$$\models_{L(Q_1)} \psi(\bar{v}) \rightarrow \phi(\bar{v}) \quad \text{o} \quad \models_{L(Q_1)} \psi(\bar{v}) \rightarrow \neg\phi(\bar{v})$$

7.9. Observació. Fixat un tipus de semblança τ , finit i relacional, fixada una successió de variables \bar{v} , per tot $n \in \omega$, hi ha un conjunt finit de fórmules *n-completes* $\{\psi_j(\bar{v}) : j \in J\}$ en les variables de \bar{v} , on $J \neq \emptyset$, que satisfà: $\models_{L(Q_1)} \bigvee \{\psi_j(\bar{v}) : j \in J\}$.

Prova: Per l'Observació 7.7. i la Definició 7.8. ■

7.10. Definició. Fixat un tipus de semblança τ , finit i relacional, si A i B són estructures de tipus τ , direm que $A \equiv_{L(Q_1)}^n B$, si A i B satisfan exactament les mateixes sentències de $L(Q_1)(\tau)$ de rang quantificacional $\leq n$.

7.11. Proposició. Siguin A i B dues estructures no numerables de tipus τ finit i relacional, llavors: $A \equiv_{L(Q_1)} B$ sii hi ha un sistema *L(Q₁)-back-and-forth* de A en B .

Prova: \Rightarrow) Suposem $A \equiv_{L(Q_1)} B$. Considerem $\langle I_n : n \in \omega \rangle$, on per cada $n \in \omega$, I_n és la col.lecció d'isomorfies parcials finites de A en B així definida:

$$f \in I_n \Leftrightarrow (A, d(f)) \equiv_{L(Q_1)}^n (B, r(f)) \quad ^2$$

²Notació: "d(f)" és un abreujament per una successió formada pels elements del domini de la funció f , i "r(f)" és un abreujament per la successió que formen els elements del recorregut de la funció f corresponents a la successió d(f).

Veiem que $\langle I_n; n \in \omega \rangle$ satisfà les condicions (1)-(5):

(1) Donat que $A \equiv_{L(Q_1)} B$ - per supòsit - per tot $n \in \omega$ $A \equiv_{L(Q_1)} {}^n B$, així donat que \emptyset és una isomorfia parcial finita de A en B , $\emptyset \in I_n$ per tot $n \in \omega$. Per tant, per cada $n \in \omega$, I_n és una col.lecció no buida.

(2)-(3) Sigui $a \in A$ i $f \in I_{n+1}$ i $d(f) = a_0, \dots, a_r$. Fixem una successió de variables $\bar{v} = v_0, \dots, v_r$. Sigui $\psi(\bar{v}, x)$ una fórmula n -completa en les variables \bar{v}, x , i tal que $A \models \psi[d(f), a]$ (existeix una fórmula tal per l'Observació 7.9.). Llavors $A \models \exists x \psi(x)[d(f)]$. Així donat que $f \in I_{n+1}$, $(A, d(f)) \equiv_{L(Q_1)} {}^{n+1} (B, r(f))$ i així per ser $qr(\exists x \psi(x)) \leq n+1$, $B \models \exists x \psi(x)[r(f)]$. Per tant hi ha $b \in B$ tal que $B \models \psi(x)[r(f), b]$. Però llavors, per ser ψ n -completa $(A, d(f), a) \equiv_{L(Q_1)} {}^n (B, r(f), b)$. Així $f \cup \langle a, b \rangle \in I_n$. Per tant se satisfà (2) i raonant d'una manera anàloga s'obté (3).

(4) Sigui $f \in I_{n+1}$ i $d(f) = a_0, \dots, a_r$. Fixem una successió de variables $\bar{v} = v_0, \dots, v_r$. Sigui $\{\psi_j(\bar{v}, x); j \in J\}$ un conjunt finit de fórmules n -completes en les variables \bar{v}, x tal que $A \models \bigvee_{j \in J} \psi_j(\bar{v})$ (existeix un conjunt tal per l'Observació 7.9.). Considerem el conjunt $I = \{j \in J: A \models \exists x \psi_j[d(f)]\}$. Així per ser $J-I$ un conjunt finit, tenim que el conjunt $\{a \in A: A \models \neg \bigvee_{j \in I} \psi_j[d(f), a]\}$ és numerable. Mostrem ara que:

$$\{a \in A: \{b \in B: f \cup \langle a, b \rangle \in I_n\} \text{ és numerable}\} \subseteq \{a \in A: A \models \neg \bigvee_{j \in I} \psi_j[d(f), a]\}$$

I així, en ser aquest darrer conjunt numerable, també ho serà el primer i quedarà provat (4). Sigui $a \in A$ tal que $\{b \in B: f \cup \langle a, b \rangle \in I_n\}$ és numerable i suposem, buscant una contradicció, que hi ha $j \in I$ tal que $A \models \psi_j[d(f), a]$. Com que $A \models \exists x \psi_j[d(f)]$, perquè $j \in I$, llavors per ser $qr(\exists x \psi_j) \leq n+1$ i $f \in I_{n+1}$, $(A, d(f)) \equiv_{L(Q_1)} {}^{n+1} (B, r(f))$, per tant $B \models \exists x \psi_j(x)[r(f)]$. Així $\{b \in B: B \models \psi_j(x)[r(f), b]\}$ és no numerable. Però com que $A \models \psi_j[d(f), a]$ i ψ_j és n -completa,

$$\{b \in B: B \models \psi_j(x)[r(f), b]\} \subseteq \{b \in B: f \cup \langle a, b \rangle \in I_n\}.$$

Per tant $\{b \in B: f \cup \langle a, b \rangle \in I_n\}$ és també no numerable, però això contradia els nostres supòsits. Per tant $A \models \neg \bigvee_{j \in I} \psi_j[d(f), a]$. Haurem obtingut així el que volíem mostrar. D'una manera anàloga es prova (5). Així doncs, $\langle I_n; n \in \omega \rangle$ és un sistema $L(Q_1)$ -back-and-forth de A en B .

\Leftarrow) Inversament, suposem que hi ha un sistema $L(Q_1)$ -back-and-forth de A en B , $\langle I_n: n \in \omega \rangle$. Mostrem que $A \equiv_{L(Q_1)} B$. Provem per inducció sobre la complexitat de les fórmules, que per tota $\phi \in L(Q_1)(\tau)$:

(*) Si $qr(\phi) \leq n$ i $f \in I_n$, per tota successió \bar{c} d'elements del domini de f :

$$A \models \phi[\bar{c}] \Leftrightarrow B \models \phi[f(\bar{c})]^3$$

i) Els casos ϕ atòmica, $\phi = \psi \wedge \beta$, $\phi = \neg \psi$ i $\phi = \exists x \psi(x)$ no presenten cap dificultat especial.

ii) Sigui $\phi = Qx\psi(x)$ i $qr(Qx\psi) \leq n+1$. Així tenim que $qr(\psi) \leq n$. Suposem que (*) es compleix per ψ . Si $f \in I_{n+1}$ i \bar{c} és una successió qualsevol d'elements del domini de f tal que $A \models Qx\psi(x)[\bar{c}]$, llavors $\{a \in A: A \models \psi(x)[\bar{c}, a]\}$ és no numerable. Així per ser $\langle I_n: n \in \omega \rangle$ un sistema $L(Q_1)$ -back-and-forth de A en B : $\{a \in A: \{b \in B: f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in I_n\} \text{ és numerable}\}$ és un conjunt numerable. Per tant $\{a \in A: A \models \psi(x)[\bar{c}, a]\} \cap \{a \in A: \{b \in B: f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in I_n\} \text{ és no numerable}\}$ és un conjunt no buit. Prenem un element qualsevol, a_0 , d'aquest conjunt. Tenim que $A \models \psi(x)[\bar{c}, a_0]$. Llavors si $b \in B$ és tal que $f \cup \{ \langle a_0, b \rangle \} \in I_n$, com que $qr(\psi) \leq n$ i per supòsit inductiu ψ satisfà (*), $B \models \psi(x)[f(\bar{c}), b]$. Per tant el conjunt $\{b \in B: f \cup \{ \langle a_0, b \rangle \} \in I_n\} \subseteq \{b \in B: B \models \psi(x)[f(\bar{c}), b]\}$. Així, donat que el primer conjunt és no numerable (per l'elecció que hem fet de a_0), el darrer també ho és. Així $B \models Qx\psi(x)[f(\bar{c})]$. Anàlogament es prova que si $B \models Qx\psi(x)[f(\bar{c})]$, llavors $A \models Qx\psi(x)[\bar{c}]$. Així $Qx\psi(x)$ satisfà (*).

Per tant, com a cas particular de (*), com que per cada $n \in \omega$, $I_n \neq \emptyset$ tenim que: Per tota sentència $\sigma \in L(Q_1)(\tau)$, $A \models \sigma$ sii $B \models \sigma$. Així $A \equiv_{L(Q_1)} B$. ■

7.12. Proposició. $L_{aa} \not\equiv L(Q_1)$.

Prova: Podem expressar a L_{aa} que " E és una relació d'equivalència amb com a màxim \aleph_0 classes d'equivalència cadascuna no numerable" en un llenguatge de tipus $\tau = \{E\}$, on E és un símbol relacional binari, mitjançant la següent sentència: $aas \forall x \exists y (s(y) \wedge xEy) \wedge \forall xaas \exists y (xEy \wedge \neg s(y)) \wedge \sigma$ (on σ és la sentència de primer ordre que expressa " E és una relació d'equivalència"). En canvi això no ho podem expressar a $L(Q_1)$, mostrem-ho: Sigui $A = (A, E^A)$ una estructura de tipus τ , on E^A és una relació d'equivalència en A amb \aleph_0 classes d'equivalència, cadascuna no numerable. I sigui $B = (B, E^B)$ una estructura de tipus τ , on E^B és una relació d'equivalència en B amb un nombre no numerable de classes d'equivalència, cadascuna no numerable. Llavors $A \equiv_{L(Q_1)} B$. Considerem la col.lecció $\langle I_n: n \in \omega \rangle$ on per cada

³Notació: Si $\bar{c} = a_0 \dots a_k$, llavors $f(\bar{c}) = f(a_0) \dots f(a_k)$.

$n \in \omega$, I_n és el conjunt de totes les isomorfies parcials finites de A en B . Mostrem que és un sistema $L(Q_1)$ -back-and-forth de A en B :

(1) Per tot $a \in A$ i per tot $b \in B$, $\langle a, b \rangle$ és una isomorfia parcial finita de A en B . Així per tot $n \in \omega$, I_n és una col.lecció no buida.

(2)-(3) Sigui $f \in I_{n+1}$ i $a \in A$. Cas 0: Sigui $a \in d(f)$. En aquest cas no hi ha res a mostrar. Cas 1: Per tot $a' \in d(f)$, $\neg a E^A a'$. Llavors sigui $b \in B$, tal que $\neg b E^B b'$ per tot $b' \in r(f)$ (existeix un element tal, doncs E^B té un nombre infinit de classes d'equivalència i f és una isomorfia finita). Cas 2: Si hi ha $a' \in d(f)$ tal que $a E^A a'$ i $a \notin d(f)$, sigui $b \in B$ tal que $b E^B f(a')$, $b \notin r(f)$ (existeix un element tal perquè cada classe d'equivalència de E^B és infinita i f és una isomorfia finita). Així en tots tres casos $f \cup \langle a, b \rangle \in I_n$, és la isomorfia parcial finita buscada. Així queda demostrat (2). Anàlogament es procedeix per mostrar (3).

(4)-(5) Sigui $f \in I_{n+1}$, mostrem que per tot $a \in A$ tal que $a \notin d(f)$, el conjunt $\{b \in B: f \cup \langle a, b \rangle \in I_n\}$ és no numerable: Cas 1. Per tot $a' \in d(f)$, $\neg a E^A a'$. Llavors sigui $b \in B$, tal que $\neg b E^B b'$ per tot $b' \in r(f)$, considerem la classe d'equivalència de b , $[b]_{E^B}$ és no numerable. Així per un raonament anàleg al que hem fet per (2), per tot $x \in [b]_{E^B}$, $f \cup \langle a, x \rangle \in I_n$. Així $[b]_{E^B} \subseteq \{b \in B: f \cup \langle a, b \rangle \in I_n\}$. Per tant, com el primer conjunt és no numerable, també ho és el segon. Cas 2. Si hi ha $a' \in d(f)$ tal que $a E^A a'$, considerem $[f(a')]_{E^B - r(f)}$. Aquest conjunt és no numerable, ja que tota classe d'equivalència de E^B és infinita no numerable i f és una isomorfia finita. I per tot $x \in [f(a')]_{E^B - r(f)}$, per un raonament anàleg al que hem fet a (2), $f \cup \langle a, x \rangle \in I_n$. Així $[f(a')]_{E^B - r(f)} \subseteq \{b \in B: f \cup \langle a, b \rangle \in I_n\}$ i per tant, com que el primer conjunt és no numerable, també ho és el segon. Així, en tots dos casos, com que el domini de f és finit, el conjunt $\{a \in A: \{b \in B: f \cup \langle a, b \rangle \in I_n\} \text{ és numerable}\}$ és numerable. Queda així demostrat (4), i anàlogament es mostra (5).

Per tant $\langle I_n: n \in \omega \rangle$ és un sistema $L(Q_1)$ -back-and-forth de A en B . Així, per la Proposició 7.11., $A \equiv_{L(Q_1)} B$. ■

8. El Teorema d'Interpolació falla per L_{aa} .

En aquest capítol mostrarem que el Teorema d'Interpolació falla per L_{aa} . El Teorema d'Interpolació, per L_{aa} es pot enunciar de la següent manera: Si K^0 i K^1 són dues classes PC en L_{aa}^1 tals que $K^0 \cap K^1 = \emptyset$, llavors hi ha una classe K , EC en L_{aa}^2 , tal que $K^0 \subseteq K$ i $K \cap K^1 = \emptyset$. Al llarg del capítol definirem dues classes d'estructures K^0 i K^1 , PC en L_{aa} tals que $K^0 \cap K^1 = \emptyset$ i mostrarem, donant una caracterització de la $\equiv_{L_{aa}}$ a partir de jocs, que hi ha $A \in K^0$ i $B \in K^1$ tals que $A \equiv_{L_{aa}} B$. Així hauréu demostrat que no hi ha cap classe EC en L_{aa} tal que $K^0 \subseteq K$ i $K \cap K^1 = \emptyset$. Passem, a continuació, a definir aquest tipus d'estructures.

8.1. Definició. Diem que $T=(T, <)$ és un *arbre* sii $<$ és un ordre parcial en T tal que, per tot $x \in T$, $\text{Pred}_<(x) = \{y \in T : y < x\}$ està ben ordenat per $<$. Direm $\text{Alt}_T(x)$ al tipus de bon ordre de $\text{Pred}_<(x)$ i $\text{Nivell}_\alpha(T) = \{x \in T : \text{Alt}_T(x) = \alpha\}$. Definim $\text{Alt}(T)$ com el menor ordinal α tal que $\text{Nivell}_\alpha(T) = \emptyset$. I per cada $\alpha \in \text{Alt}(T)$, sigui $T_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \text{Nivell}_\beta(T)$. Finalment, direm que $a \in T$ és una *arrel* de l'arbre T sii $\text{Alt}_T(a) = 0$.

8.2. Definició. Diem que $T=(T, <)$ és un ω_1 -*arbre* sii T és un arbre i

- (1) $\text{Alt}(T) = \omega_1$
- (2) Per tot $\alpha \in \omega_1$, $|\text{Nivell}_\alpha(T)| < \omega_1$

8.3. Definició. Diem que $T=(T, <)$ és un ω_1 -*arbre normal* sii T és un ω_1 -arbre i

- (1) T té una única arrel
- (2) $\forall x \in T, \forall \alpha < \omega_1 (\text{Alt}_T(x) < \alpha \rightarrow \exists y \in \text{Nivell}_\alpha(T) x < y)$
- (3) $\forall x \in T$, x té \aleph_0 successors immediats en l'ordre $<$
- (4) $\forall \beta < \omega_1 [\beta \text{ és un ordinal límit} \rightarrow \forall x \forall y \in \text{Nivell}_\beta(T) (\text{Pred}_<(x) = \text{Pred}_<(y) \rightarrow x = y)]$

8.4. Definició. Si $T=(T, <)$ és un arbre,

- i) C és una *cadena* de T sii C és un subconjunt de T totalment ordenat per $<$.
- ii) A és una *anticadena* de T sii A és un subconjunt de T tal que:
per tot $x, y \in A$, $x \not< y$ i $y \not< x$.
- iii) B és una *branca* de T sii B és una cadena maximal.

¹ Veure la Definició 8.10.

² Veure la Definició 8.9.

8.5. Definició. Diem que $T=(T,<)$ és un ω_1 -arbre d'Aronszajn si T és un ω_1 -arbre tal que tota cadena de T té cardinalitat menor que ω_1 .

8.6. Definició. Diem que $T=(T,<)$ és un arbre especial si T és una unió numerable d'anticadenes.

8.7. Proposició. Hi ha un ω_1 -arbre d'Aronszajn normal especial.

Prova: Els elements del nostre arbre, T , són seqüències creixents de nombres racionals. Tot $x \in T$ serà del tipus $x = \langle r_\alpha : \alpha \in \beta \rangle$, per algun $\beta \in \omega_1$ (on per cada $\alpha \in \beta$, $r_\alpha \in \mathbb{Q}$)³. Podem veure aquestes seqüències com immersions $x: \beta \rightarrow \mathbb{Q}$. L'ordre que definim entre els elements de T és el següent: $x < y$ si $x \subseteq y$. Definim, per recursió, per cada $\alpha \in \omega_1$ el $\text{Nivell}_\alpha(T)$, un conjunt de seqüències creixents de nombres racionals amb les següents propietats:

- (1) Per tot $x \in \text{Nivell}_\alpha(T)$, $\alpha \neq 0$, $\text{sup}x$ és un nombre racional positiu⁴.
- (2) Per tot $x \in T_\alpha$, per tot $u, q \in \mathbb{Q}$ tals que $\text{sup}x < q < \text{sup}u$: Hi ha $y \in \text{Nivell}_\alpha(T)$ tal que $x < y$ i $u < \text{sup}y < q$.
- (3) Per tot $x \in \text{Nivell}_\alpha(T)$, $x: \alpha \rightarrow \mathbb{Q}$

Cas $\alpha=0$: Sigui $\text{Nivell}_0(T) = \{ \langle \rangle \}$ ⁵. Clarament satisfà (1), (2) i (3).

Cas $\alpha+1$: Suposem definit el $\text{Nivell}_\alpha(T)$ que satisfà (1), (2) i (3). Si $\alpha=0$, sigui $\text{Nivell}_{\alpha+1}(T) = \{ \langle r \rangle : r \text{ és un nombre racional positiu} \}$. I si $\alpha \neq 0$, $\text{Nivell}_{\alpha+1}(T) = \{ x^* \langle r \rangle : x \in \text{Nivell}_\alpha(T) \text{ i } r > \text{sup}x, r \text{ un nombre racional positiu} \}$ ⁶. Així definit, si $x \in \text{Nivell}_{\alpha+1}(T)$, $\text{sup}x \in \mathbb{Q}$. Per tant se satisfà (1). I si $x \in T_{\alpha+1}$ i $u, q \in \mathbb{Q}$ són tals que $\text{sup}x < q < \text{sup}u$; si $\alpha \neq 0$, escollim $r \in \mathbb{Q}$ tal que $u < q < \text{sup}u$. Així $\text{sup}x < q$ i per definició de $\text{Nivell}_{\alpha+1}(T)$, $x^* \langle r \rangle \in \text{Nivell}_{\alpha+1}(T)$. Sigui $y = x^* \langle r \rangle$, llavors $x < y$ i $u < \text{sup}y < \text{sup}u$. Si $\alpha=0$, podem seguir un raonament anàleg. Per tant se satisfà la condició (2). Finalment si $x \in \text{Nivell}_{\alpha+1}(T)$, si $\alpha=0$, per definició, $x: 1 \rightarrow \mathbb{Q}$. I si $\alpha \neq 0$, com que $x = y^* \langle r \rangle$, per algun $y \in \text{Nivell}_\alpha(T)$, per supòsit inductiu tenim que $y: \alpha \rightarrow \mathbb{Q}$. Per tant tenim que $x: \alpha+1 \rightarrow \mathbb{Q}$. Així $\text{Nivell}_{\alpha+1}(T)$ satisfà també (3).

Cas α límit: Suponem definit $\text{Nivell}_\beta(T)$ per tot $\beta \in \alpha$, que satisfà (1) i (2). Per definir el $\text{Nivell}_\alpha(T)$, en primer lloc, per cada $x \in T_\alpha$, per tot $u, q \in \mathbb{Q}$ tals que $\text{sup}x < q < \text{sup}u$, fixem dues successions estrictament creixents: una d'ordinals, $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$, tal que $\alpha = \bigcup_{n \in \omega} \alpha_n$ i si λ és el

³ Notació: $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, <_Q)$ és el conjunt dels nombres racionals amb el seu ordre usual.

⁴ Notació: Si $x = \langle r_\alpha : \alpha \in \beta \rangle$, "sup" és un abreujament pel suprem del conjunt $\{ r_\alpha : \alpha \in \beta \}$. Recordem que tot conjunt de nombres racionals té un suprem en $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, <_R)$, on \mathbb{R} és el conjunt dels nombres reals amb el seu ordre usual.

⁵ Notació: " $\langle \rangle$ " denota la successió buida.

⁶ Notació: $x^* \langle r \rangle$ és la concatenació de la seqüència x amb la seqüència $\langle r \rangle$.

menor ordinal tal que $x \in T_\lambda$, $\alpha_0 = \lambda$ (existeix una successió tal perquè α és límit i de cofinalitat ω); i una successió de nombres racionals, $\langle q_n : n \in \omega \rangle$, que tingui per límit un nombre racional q' , $u < Qq' < Qq$ i que $u < Qq_0$. I en segon lloc, a partir d'aquestes dues successions que hem fixat, definim per recursió una cadena de seqüències creixents de racionals $\langle y_n : n \in \omega \rangle$, que satisfaci:

- i) Per tot $n \in \omega$, $y_n \in \text{Nivell}_{\alpha_n}(T)$
- ii) Per tot $n \in \omega$, $q_{n-1} < Q \sup y_n < Qq_n$

Sigui $y_0 = x$. Clarament satisfà i) ii). I suposant definit y_n que satisfà i) ii), com que per supòsit $y_n \in \text{Nivell}_{\alpha_n}(T)$, $y_n \in T_{\alpha_{n+1}}$ (per ser $\alpha_n \in \alpha_{n+1}$). Així, com que $\alpha_{n+1} \in \alpha$ i, per supòsit inductiu, per tot $\beta \in \alpha$ el $\text{Nivell}_\beta(T)$ satisfà la condició (2), hi ha $y \in \text{Nivell}_{\alpha_{n+1}}(T)$ tal que $q_n < Q \sup y < Qq_{n+1}$ (ja que $\sup y_n < Qq_n < Qq_{n+1}$). Sigui y_{n+1} un tal y ; per tal com l'hem escollit, és senzill veure que y_{n+1} satisfà i) ii). Considerem ara $s_{x,q,u} = \bigcup_{n \in \omega} y_n$. Ara podem definir:

$$\text{Nivell}_\alpha(T) = \{s_{x,q,u} : x \in \text{Nivell}_\beta(T), \beta \in \alpha; u, q \in Q \text{ tals que } \sup x < Qu < Qq\}$$

Observem que el $\text{Nivell}_\alpha(T)$ satisfà (1): Per definició de la successió $\langle y_n : n \in \omega \rangle$, $\sup s_{x,q,u} = \sup \{q_n : n \in \omega\} = q'$. Per tant, $\sup s_{x,q,u} \in Q$. I satisfà (2): Suposem que $x \in T_\alpha$, llavors hi ha $\beta \in \alpha$ tal que $x \in \text{Nivell}_\beta(T)$. Si $u, q \in Q$ són tals que $\sup x < Qu < Qq$, llavors per definició de la successió $\langle y_n : n \in \omega \rangle$, $u < Q \sup s_{x,q,u} = q' < Qq$. I tenim que $x < s_{x,q,u}$ (perquè $y_0 = x$) i $s_{x,q,u} \in \text{Nivell}_\alpha(T)$, per definició de $\text{Nivell}_\alpha(T)$. Vegem com també satisfà (3): Si $y \in \text{Nivell}_\alpha(T)$, llavors hi ha $x \in T_\alpha$, i u, q racionals positius tals que $y = s_{x,q,u}$. Així, per alguna successió $\langle y_n : n \in \omega \rangle$, com la definida anteriorment, $y = \bigcup_{n \in \omega} y_n$. Però, per supòsit inductiu, per cada $n \in \omega$, $y_n : \alpha_n \rightarrow \mathbb{Q}$ i així, com que $\alpha = \bigcup_{n \in \omega} \alpha_n$, tenim que $y : \alpha \rightarrow \mathbb{Q}$.

Clarament l'arbre construït és un ω_1 -arbre normal. Vegem que és especial: Considerem per cada $q \in Q$ el següent conjunt $H_q = \{x \in T : q = \sup x\}$. Observem que H_q és una anticadena de T . I tal com hem definit T , $\bigcup_{q \in Q} H_q = T$. Per tant T és una unió numerable d'anticadenes. Vegem que és un ω_1 -arbre d'Aronszajn: Suposem que T tingués una cadena de cardinalitat ω_1 . Llavors, per definició de T , la gran unió d'aquesta cadena seria una immersió de ω_1 en \mathbb{Q} . Absurd. Per tant totes les cadenes de T tenen cardinalitat menor que ω_1 . ■

8.8. Proposició. Hi ha un ω_1 -arbre normal amb una branca de cardinalitat ω_1 .

Prova: Sigui $T^0 = (T^0, <_0)$ un arbre com el construït en la proposició anterior. Sigui T^1 la unió disjunta de ω_1 còpies de T^0 . Establim el següent ordre, $<_1$, entre els elements de T^1 : per cada $\alpha \in \omega_1$, per cada còpia \underline{T}^0_α de T^0 , l'ordre $<_1$ restringit a \underline{T}^0_α és $<_0$. I si $\alpha \in \beta \in \omega_1$, i a_α i a_β són les arrels de les còpies \underline{T}^0_α i \underline{T}^0_β , respectivament, llavors $a_\alpha <_1 a_\beta$. Així definit, $T^1 = (T^1, <_1)$ és

un ω_1 -arbre normal. Observem que, per definició de $\langle \cdot \rangle_1$, la successió $\langle a_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ de les arrels de les ω_1 còpies de T^0 , formen una branca de cardinalitat ω_1 . ■

8.9. Definició. Sigui L un sistema lògic ⁷. Fixat un tipus de semblança τ , diem que una classe K d'estructures de tipus τ és *una classe elemental en L* (o que K és una classe EC en L) sii hi ha una sentència de $L(\tau)$, ψ , tal que $K = \text{Mod}_L^\tau(\psi)$.

8.10. Definició. Si L és un sistema lògic i τ un tipus de semblança, diem que una classe K d'estructures de tipus τ és *una classe projectiva en L* (o que K és una classe PC en L) sii hi ha un tipus de semblança τ' , tal que $\tau \subseteq \tau'$ i una classe K' d'estructures de tipus τ' que és EC en L i $K = \{A/\tau : A \in K'\}$ ⁸.

Definirem a continuació dues classes d'estructures de tipus $\tau = \{<\}$ (on $<$ és un símbol relacional binari), K^0 i K^1 , que són PC en L_{aa} i $K^0 \cap K^1 = \emptyset$ i tals que no hi ha cap classe d'estructures de tipus $\tau = \{<\}$, K , que sigui EC en L_{aa} i tal que $K^0 \subseteq K$ i $K \cap K^1 = \emptyset$. Haurem mostrat així que falla el Teorema d'Interpolació per L_{aa} . Sigui σ la conjunció de les següents sentències de tipus $\tau_0 = \{<, B\}$ (on B és un símbol relacional unari):

- (1) La sentència de Lògica de Primer Ordre que expressa " $\{x : Bx\}$ està linealment ordenat per $<$ "
- (2) $\forall x(Bx)$ ⁹

I sigui β la conjunció de les següents sentències de tipus $\tau_1 = \{<, Q, \Delta, f\}$ (on Q és un símbol predicatiu, Δ un símbol relacional binari i f un símbol funcional unari):

- (3) La sentència de Lògica de Primer Ordre que expressa " Δ és un ordre dens en el conjunt dels x tals que Qx "
- (4) $\neg Qx(Qx)$
- (5) $\forall x(\exists y(f(y)=x) \rightarrow Qx)$
- (6) $\forall x \forall y(x < y \rightarrow f(x) \Delta f(y))$

Sigui $K^0 = \{A : A \text{ és una estructura de tipus } \tau_0 \text{ i } A \models_{L_{aa}} \sigma\}$ i $K^1 = \{A : A \text{ és una estructura de tipus } \tau_1 \text{ i } A \models_{L_{aa}} \beta\}$. Llavors, si $\tau = \tau_0 \cap \tau_1$ i $K^0 = \{A/\tau : A \in K^0\}$ i $K^1 = \{(A/\tau) : A \in K^1\}$, K^0 i K^1 són classes PC en L_{aa} i $K^0 \cap K^1 = \emptyset$. Mostrem ara que no hi ha cap classe d'estructures de tipus

⁷ Per una definició de Sistema Lògic, veure Apèndix II, nota 1.

⁸ Notació: A/τ és la reducció de l'estructura A , de tipus τ' , al tipus de semblança τ .

⁹ Recordem que $Qx \equiv_{\text{def}} \exists x \phi x$. (Veure Corol.lari 2.6.).

τ, K , que sigui EC en L_{aa} i tal que $K^0 \subseteq K$ i $K \cap K^1 = \emptyset$: Sigui T^0 un ω_1 -arbre d'Aronszajn normal especial i T^1 un ω_1 -arbre normal amb una branca de cardinalitat ω_1 , T^0 i T^1 construïts com els arbres de les Proposicions 8.7 i 8.8. Observem que $T^0 \in K^0$ i $T^1 \in K^1$. Donem ara una caracterització a partir de jocs de la L_{aa} -equivalència. Aplicant aquesta caracterització mostrarem que dos ω_1 -arbres normals són L_{aa} -equivalents. Així obtindrem el resultat que ens manca per finalitzar la prova que el Teorema d'Interpolació falla per L_{aa} : $T^0 \equiv_{L_{aa}} T^1$.

8.11. Definició. Sigui τ un tipus de semblança relacional i finit. Si A_0 i A_1 són dues estructures de tipus τ i F_0 i F_1 són, respectivament, el filtre dels tancats i cofinals en A_0 i en A_1 , definim per tot $n \in \omega$, $G_n(A_0, A_1)$, el següent joc entre dos jugadors, I i II:

i) $G_n(A_0, A_1)$ consta de n moviments.

ii) Per cada $k \leq n$, I escull $u \in \{0, 1\}$. A més a més I escull quin tipus de moviment és el k -èsim. Hi ha dos tipus de moviment en el joc: **Tipus a)**: En aquest tipus de moviment cada jugador tira una vegada. Un cop escollit $u \in \{0, 1\}$, el jugador I tira $a^u \in A_u$ i després II tira $a^{1-u} \in A_{1-u}$. El resultat del moviment és el parell $\{a^0, a^1\}$. **Tipus b)**: En aquest altre tipus de moviment cada jugador tira dues vegades. Un cop escollit $u \in \{0, 1\}$, en la primera tirada I tira $f^u \in F_u$ i després II tira $f^{1-u} \in F_{1-u}$ i, en la segona tirada, I tira $r^{1-u} \in f^{1-u}$ i després II tira $r^u \in f^u$. El resultat del moviment és el parell $\{r^0, r^1\}$.

iii) Direm que $p = (a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és el resultat del joc fins el moviment k , (on $k_1 + k_2 = k$, $k \leq n$) o bé que és la k -èsima posició del joc, quan hi hagi hagut k_1 moviments del tipus a) i a^0, a^1 siguin les successions d'elements de A_0 i A_1 respectivament, resultants d'aquests moviments; i hi hagi hagut k_2 moviments del tipus b) i r^0, r^1 siguin les successions d'elements de $P_{\omega_1}(A_0)$ i $P_{\omega_1}(A_1)$ respectivament, resultants d'aquests moviments. Observem que per cada moviment del tipus b), la successió resultant del moviment: r^0, r^1 , és diferent de la successió de tirades en aquest moviment: f^0, f^1, r^0, r^1 . Així, donada una posició $p = (a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ denotarem per w_p la successió de les tirades en els k primers moviments del joc fins que s'ha arribat a aquesta posició. Fixem-nos que, en general, w_p serà una successió diferent de la successió a^0, a^1, r^0, r^1 .

iv) Direm que $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és el resultat final del joc, si $k_1 + k_2 = n$.

Llavors, el jugador II guanya el joc $G_n(A_0, A_1)$ sii (1) La funció així definida: per tot $j \leq k_1$ $f(a^0_j) = a^1_j$, és una isomorfia parcial de A_0 en A_1 i (2) Per tot $j \leq k_1$, per tot $i \leq k_2$, $a^0_j \in s^0_i$ sii $a^1_j \in s^1_i$ ¹⁰. Altrament guanya I.

¹⁰ Notació: $\{a^0_j, a^1_j\}$ és el resultat del moviment j . I $\{s^0_i, s^1_i\}$ és el resultat del moviment i .

8.12. Definició. Si A_0 i A_1 són dues estructures de tipus τ relacional i finit i $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és la k -èsima posició del joc $G_n(A_0, A_1)$, diem que \mathcal{R} és una estratègia per al jugador II a partir de $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ en aquest joc si \mathcal{R} és una col·lecció de funcions $\mathcal{R} = \{f_{2i}: k < i \leq n\} \cup \{f_{2i+1}: k < i \leq n\}$ tals que: per tot $i > k$, $i \leq n$, f_{2i} té com a domini totes les possibles successions \mathbf{x}, \mathbf{y} , tals que: \mathbf{x} és una successió possible de tirades de I i II en els moviments entre el k -èsim i el i -èsim ¹¹ (recordem, no només dels resultats dels moviments); i a més a més, $y \in F_u$ o $y \in A_u$ on $u \in \{0, 1\}$. I per tot $y \in F_u$, $f_{2i}(\mathbf{x}, y) \in F_{1-u}$ i per tot $y \in A_u$, $f_{2i}(\mathbf{x}, y) \in A_{1-u}$. El recorregut de f_{2i} està doncs inclòs en $A_0 \cup A_1 \cup F_0 \cup F_1$. I per tot $i > k$, $i \leq n$, f_{2i+1} té com a domini totes les possibles successions $\mathbf{x}, \mathbf{y}, z$; on \mathbf{x} és una successió possible de tirades de I i II en els moviments entre el k -èsim i el i -èsim, $y \in F_u$ on $u \in \{0, 1\}$, i $z \in f_{2i}(\mathbf{x}, y)$. I el recorregut de f_{2i+1} està inclòs en $P_{\omega_1}(A_0) \cup P_{\omega_1}(A_1)$ ¹².

Direm que II usa una estratègia a partir de $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ en el joc $G_n(A_0, A_1)$ si per tot $i > k$, $i \leq n$, II tira $f_{2i}(\mathbf{x}, y)$, si \mathbf{x} és la successió de tirades de I i II en els moviments entre el k -èsim i el i -èsim, i y és la primera tirada de I en el moviment i -èsim. I si, a més a més, si el moviment és del tipus b), II tira $f_{2i+1}(\mathbf{x}, y, z)$, quan la segona tirada de I en el i -èsim moviment ha estat $z \in f_{2i}(\mathbf{x}, y)$. Direm que \mathcal{R} és una estratègia guanyadora per a II a partir de $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ si sempre que II usa \mathcal{R} a partir d'aquesta posició, II guanya ¹³. Si II té una estratègia guanyadora a partir d'una posició $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ direm que aquesta és una posició guanyadora per a II.

8.13. Definició. Fixat un tipus de semblança τ , si $\phi \in L_{aa}(\tau)$, definim el rang quantificacional de ϕ , $qr(\phi)$, per inducció sobre la complexitat de ϕ :

$$\begin{aligned} qr(\phi) &= 0, \text{ si } \phi \text{ és atòmica.} \\ qr(\neg\phi) &= qr(\phi) \\ qr(\psi \vee \phi) &= \max(qr(\psi), qr(\phi)) \\ qr(\exists x \phi(x)) &= qr(\phi(x)) + 1 \\ qr(aas\phi(s)) &= qr(\phi(s)) + 1 \end{aligned}$$

8.14. Definició. Sigui τ un tipus de semblança relacional i finit. Fixem dues successions de variables $\mathbf{x} = x_1 \dots x_{k_1}$, $\mathbf{s} = s_1 \dots s_{k_2}$, de primer i segon ordre respectivament. Per tot $n \in \omega$ i tot

¹¹ Observem que si $i = k + 1$, la successió \mathbf{x} és buida.

¹² Direm que \mathcal{R} és una estratègia per a II a partir de \emptyset , en aquest joc, si \mathcal{R} és una col·lecció de funcions $\mathcal{R} = \{f_{2i}: 0 \leq i \leq n\} \cup \{f_{2i+1}: 0 \leq i \leq n\}$ que satisfàn les propietats descrites en la Definició 8.12.

¹³ \mathcal{R} és una estratègia guanyadora per II a partir de \emptyset , si sempre que II usa \mathcal{R} des del principi, II guanya.

$k_1, k_2 \in \omega$ tals que $(k_1+k_2) \leq n$, sigui $\sum_{n, k_1, k_2} = \{\phi \in L_{aa}(\tau) : qr(\phi) \leq n - (k_1+k_2)\}$ i les seves variables lliures són exactament aquestes: $\overline{x}, \overline{s}$.

8.15. Observació. Fixat un tipus de semblança τ relacional i finit i variables $\overline{x}, \overline{s}$, per tot $n \in \omega$ i tot $k_1, k_2 \in \omega$ tals que $(k_1+k_2) \leq n$, \sum_{n, k_1, k_2} és finit llevat de L_{aa} -equivalència.

8.16. Definició. Fixat un tipus de semblança τ relacional i finit, variables $\overline{x}, \overline{s}$ i $n \in \omega$ i $k_1, k_2 \in \omega$ tals que $(k_1+k_2) \leq n$. Diem que una fórmula $\psi \in \sum_{n, k_1, k_2}$ és $n - (k_1+k_2)$ -completa si per tota fórmula $\phi \in \sum_{n, k_1, k_2}$:

$$\models_{L_{aa}} \psi \rightarrow \phi \quad \text{o} \quad \models_{L_{aa}} \psi \rightarrow \neg \phi$$

8.17. Observació. Fixat un tipus de semblança τ relacional i finit i variables $\overline{x}, \overline{s}$. Per tot $n \in \omega$ i tot $k_1, k_2 \in \omega$ tals que $(k_1+k_2) \leq n$, hi ha un conjunt finit de fórmules $n - (k_1+k_2)$ -completes $\{\psi_j(\overline{x}, \overline{s}) : j \in J\} \subseteq \sum_{n, k_1, k_2}$, on $J \neq \emptyset$, que satisfà: $\models_{L_{aa}} \bigvee \{\psi_j(\overline{x}, \overline{s}) : j \in J\}$.

Prova: Per l'Observació 8.15. i la Definició 8.16. ■

8.18. Lema. Fixat un tipus de semblança τ relacional i finit. Per tot $n, k_1, k_2 \in \omega$ tals que $(k_1+k_2) \leq n$, si A_0 i A_1 són dues estructures de tipus τ i $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és una posició guanyadora per al joc $G_n(A_0, A_1)$, llavors per qualsevol $\phi \in \sum_{n, k_1, k_2}$:

$$(*) \quad A_0 \models \phi[a^0, r^0] \quad \text{sii} \quad A_1 \models \phi[a^1, r^1]$$

Prova: Per inducció en $n - (k_1+k_2)$. i) Clarament se satisfà (*) per tota fórmula lliure de quantificadors perquè si $n - (k_1+k_2) = 0$, $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és alhora una posició guanyadora i el resultat final del joc guanyat per II. ii) Suposem inductivament que se satisfà per $n - (k_1+k_2) = m$. Sigui $n - (k_1+k_2) = m+1$. Suposem que $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és una posició guanyadora per al joc $G_n(A_0, A_1)$ i sigui \mathcal{R} una estratègia guanyadora a partir d'aquesta posició. Si $\phi \in \sum_{n, k_1, k_2}$ llavors ϕ és L_{aa} -equivalent a una combinació booleana de fórmules de \sum_{n, k_1, k_2} de la forma $\exists x \psi$ o de la forma $aas\psi$. Per tant, per provar que per ϕ se satisfà (*) en tenim prou amb contemplar els següents casos: Cas a): Sigui $\phi = \exists x \psi$, $\phi \in \sum_{n, k_1, k_2}$. Suposem que $A_0 \models \exists x \psi[a^0, r^0]$, llavors hi ha $b^0 \in A_0$ tal que $A_0 \models \psi[a^0, r^0, b^0]$. Si pensem en una possible continuació del joc $G_n(A_0, A_1)$ a partir de la posició $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$, en què el jugador I tira b_0 en el moviment $k+1$, i II respon tirant b_1 segons l'estratègia guanyadora \mathcal{R} , veurem que $(a^0, a^1, b^0, b^1, r^0, r^1)_{k_1+1, k_2}$ és una posició guanyadora. Ja que hem suposat que $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ ho és i per tal com hem escollit b_1 . Però $n - ((k_1+1)+k_2) = m$, així per

hipòtesi inductiva, com que $\psi \in \sum_{n,k_1+1,k_2}$ i $A_0 | = \psi[a^0, r^0, b^0]$, llavors $A_1 | = \psi[a^1, r^1, b^1]$. Per tant, $A_1 | = \exists x \psi[a^1, r^1]$. Anàlogament es mostra que si $A_1 | = \exists x \psi[a^1, r^1]$ llavors $A_0 | = \exists x \psi[a^0, r^0]$. Per tant en el cas a) se satisfà (*). **Cas b):** Sigui $\phi' = aas\psi$, $\phi \in \sum_{n,k_1,k_2}$. Suposem que $A_0 | = aas\psi[a^0, r^0]$ llavors $f_0 = \{t^0 \in P_{\omega_1}(A_0) : A_0 | = \phi[a^0, r^0, t^0]\} \in F_0$. Si pensem en una possible continuació del joc $G_n(A_0, A_1)$ a partir de la posició $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$, en què el jugador I tira f_0 en el moviment $k+1$, i II respon tirant f_1 segons l'estratègia guanyadora \mathcal{R} , veurem que per tot $t^1 \in f_1$, hi ha $t^0 \in f_0$ tal que $(a^0, a^1, r^0, r^1, t^0, t^1)_{k_1, k_2+1}$ és una posició guanyadora. Perquè hem suposat que $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és una posició guanyadora i per elecció de f_1 . Però $n - (k_1 + (k_2 + 1)) = m$, així per hipòtesi inductiva, com que $\psi \in \sum_{n, k_1, k_2+1}$ i $A_0 | = \psi[a^0, r^0, t^0]$, tenim que $A_1 | = \psi[a^1, r^1, t^1]$. Fins aquí hem mostrat doncs que per tot $t^1 \in f_1$ $A_1 | = \psi[a^1, r^1, t^1]$. Així $f_1 \subseteq \{t^1 \in P_{\omega_1}(A_1) : A_1 | = \phi[a^1, r^1, t^1]\}$ i com que $f_1 \in F_1$, aquest darrer conjunt que l'inclou també pertany a F_1 . Per tant $A_1 | = aas\psi[a^1, r^1]$. Anàlogament es mostra que si $A_1 | = aas\psi[a^1, r^1]$ llavors $A_0 | = aas\psi[a^0, r^0]$. Així en el cas b) se satisfà també (*). ■

8.19. Lema. Fixat un tipus de semblança τ relacional i finit. Per tot $n, k_1, k_2 \in \omega$, si A_0 i A_1 són dues estructures de tipus τ i $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és tal que per tot $\phi \in \sum_{n, k_1, k_2}$

$$(*) \quad A_0 | = \phi[a^0, r^0] \quad \text{sii} \quad A_1 | = \phi[a^1, r^1]$$

llavors $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és una posició guanyadora per al joc $G_n(A_0, A_1)$.

Prova: Per inducció en $n - (k_1 + k_2)$. Clarament se satisfà per $n - (k_1 + k_2) = 0$. Suposem inductivament que se satisfà per $n - (k_1 + k_2) = m$. Suposem que:

$$(\#) \quad n - (k_1 + k_2) = m + 1 \quad \text{i} \quad (a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2} \quad \text{és tal que per tot } \phi \in \sum_{n, k_1, k_2} \text{ se satisfà } (*)$$

Distingim els casos a) i b) per diferenciar els dos tipus de moviment: **Cas a):** Mostrarem ara que per tot $b^0 \in A_0$ hi ha $b^1 \in A_1$ tal que $(a^0, a^1, b^0, b^1, r^0, r^1)_{k_1+1, k_2}$ és una posició guanyadora: Suposem que $b^0 \in A_0$. Sigui ψ_{b^0} una fórmula $n - ((k_1 + 1) + k_2)$ -completa (en les variables $x_1 \dots x_{k_1+1}, s_1 \dots s_{k_2}$) tal que $A_0 | = \psi_{b^0}[a^0, r^0, b^0]$ (n'hi ha una per la Observació 8.17.). Així $A_0 | = \exists x \psi_{b^0}[a^0, r^0]$. Com que $\exists x \psi_{b^0} \in \sum_{n, k_1, k_2}$ pel supòsit (#), tenim que $A_1 | = \exists x \psi_{b^0}[a^1, r^1]$. Per tant hi ha $b^1 \in A_1$ tal que $A_1 | = \psi_{b^0}[a^1, r^1, b^1]$, llavors per elecció de ψ_{b^0} , per tota fórmula $\phi \in \sum_{n, k_1+1, k_2}$: $A_0 | = \phi[a^0, r^0, b^0]$ sii $A_1 | = \phi[a^1, r^1, b^1]$. Per tant, com que $n - ((k_1 + 1) + k_2) = m$, pel supòsit inductiu, $(a^0, a^1, b^0, b^1, r^0, r^1)_{k_1+1, k_2}$ és una posició guanyadora. Anàlogament es mostra que per tot $b^1 \in A_1$ hi ha $b^0 \in A_0$ tal que $(a^0, a^1, b^0, b^1, r^0, r^1)_{k_1+1, k_2}$ és una posició guanyadora. **Cas b):** Mostrarem ara que per tot $f_0 \in F_0$ hi ha $f_1 \in F_1$ tal que per tot $t^1 \in f_1$, hi ha $t^0 \in f_0$ tal que $(a^0, a^1, r^0, r^1, t^0, t^1)_{k_1, k_2+1}$ és una posició guanyadora: Suposem que $f_0 \in F_0$. Per tot $t^0 \in P_{\omega_1}(A_0)$ sigui ψ_{t^0} una fórmula $n - (k_1 + (k_2 + 1))$ -completa (en les variables $x_1 \dots x_{k_1}$,

$s_1 \dots s_{k_2+1}$) tal que $A_0 | = \psi_{t^0} [a^0, r^0, t^0]$ (existeix una fórmula tal per l'Observació 8.17.). Sigui $\psi_{f_0} = \bigvee \{ \psi_{t^0} : t^0 \in f_0 \}$ (observem que tal com hem definit ψ_{f_0} , tenim també que $\psi_{f_0} \in \sum_{n, k_1, k_2+1}$). Sigui $f_0' = \{ t^0 \in P_{\omega_1}(A_0) : A_0 | = \psi_{f_0} [a^0, r^0, t^0] \}$, com que $f_0 \subseteq f_0'$ i F_0 és un filtre sobre $P_{\omega_1}(A_0)$, $f_0' \in F_0$. Per tant $A_0 | = aas\psi_{f_0} [a^0, r^0]$. Així pel supòsit (#), com que $aas\psi_{f_0} \in \sum_{n, k_1, k_2}$, $A_1 | = aas\psi_{f_0} [a^1, r^1]$. Sigui $f_1 = \{ t^1 \in P_{\omega_1}(A_1) : A_1 | = \psi_{f_0} [a^0, r^0, t^1] \}$, tenim que $f_1 \in F_1$. Llavors per tot $t^1 \in f_1$, com que $A_1 | = \psi_{f_0} [a^0, r^0, t^1]$, per tal com hem escollit ψ_{f_0} hi ha $t^0 \in f_0$ tal que $A_1 | = \psi_{t^0} [a^0, r^0, t^1]$. Així per tota $\phi \in \sum_{n, k_1, k_2+1} : A_0 | = \phi [a^0, r^0, t^0]$ sii $A_1 | = \phi [a^1, r^1, t^1]$. Per tant, com que $n - (k_1 + (k_2 + 1)) = m$, pel supòsit inductiu, $(a^0, a^1, r^0, r^1, t^0, t^1)_{k_1, k_2+1}$ és una posició guanyadora. Anàlogament es mostra que per tot $f_1 \in F_1$ hi ha $f_0 \in F_0$ tal que per tot $t^0 \in f_0$, hi ha $t^1 \in f_1$ tal que $(a^0, a^1, r^0, r^1, t^0, t^1)_{k_1, k_2+1}$ és una posició guanyadora.

Recollint els resultats obtinguts en els casos a) i b) tenim, d'una banda, que per tot $b^0 \in A_0$ hi ha $b^1 \in A_1$ tal que $(a^0, a^1, b^0, b^1, r^0, r^1)_{k_1+1, k_2}$ és una posició guanyadora i que, per tot $b^1 \in A_1$ hi ha $b^0 \in A_0$ tal que $(a^0, a^1, b^0, b^1, r^0, r^1)_{k_1+1, k_2}$ és una posició guanyadora. I d'altra banda, que per tot $f_0 \in F_0$ hi ha $f_1 \in F_1$ tal que, per tot $t^1 \in f_1$ hi ha $t^0 \in f_0$ tal que $(a^0, a^1, r^0, r^1, t^0, t^1)_{k_1, k_2+1}$ és una posició guanyadora, i que per tot $f_1 \in F_1$ hi ha $f_0 \in F_0$ tal que per tot $t^0 \in f_0$, hi ha $t^1 \in f_1$ tal que $(a^0, a^1, r^0, r^1, t^0, t^1)_{k_1, k_2+1}$ és una posició guanyadora. Això ens permet concloure que $(a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és una posició guanyadora per al joc $G_n(A_0, A_1)$. ■

8.20. Proposició. Fixem un tipus de semblança τ relacional i finit. Si A_0 i A_1 són dues estructures de tipus τ , $A \equiv_{L_{aa}} B$ sii per tot $n \in \omega$ hi ha una estratègia guanyadora per al jugador II en el joc $G_n(A, B)$ a partir de la posició \emptyset .

Prova: Pels Lemes 8.18. i 8.19. ■

Apliquem ara aquesta caracterització per mostrar que dos ω_1 -arbres normals són L_{aa} -equivalents:

8.21. Lema. Siguin $T^0 = (T^0, <)$ i $T^1 = (T^1, <')$ dos ω_1 -arbres normals, llavors

- i) Per tot $\alpha < \omega_1$, hi ha una isomorfia $g: T^0_\alpha \rightarrow T^1_\alpha$.
- ii) Si $\alpha < \beta < \omega_1$ i $g: T^0_{\alpha+1} \rightarrow T^1_{\alpha+1}$ és una isomorfia, llavors hi ha una isomorfia $h: T^0_\beta \rightarrow T^1_\beta$ que extén g .

Prova: i) En primer lloc mostrarem que, si α és un ordinal límit, hi ha una isomorfia $g: T^0_\alpha \rightarrow T^1_\alpha$. Considerem el $\text{Nivell}_\alpha(T^0)$ i el $\text{Nivell}_\alpha(T^1)$, són numerables, sigui $a_0 \dots a_n \dots$ una enumeració del $\text{Nivell}_\alpha(T^0)$ i $b_0 \dots b_n \dots$ una enumeració del $\text{Nivell}_\alpha(T^1)$. Definirem per

recursió dues successions, $\langle c_n : n \in \omega \rangle$ d'elements del $\text{Nivell}_\alpha(T^0)$ i $\langle d_n : n \in \omega \rangle$ d'elements del $\text{Nivell}_\alpha(T^1)$, i una successió d'isomorfies parcials de T^0_α en T^1_α , $\langle h_n : n \in \omega \rangle$, tal que:

- (1) Per cada $n \in \omega$, si $E^0_n = \bigcup_{i \leq n} \text{Pred}\langle c_i \rangle$ i $E^1_n = \bigcup_{i \leq n} \text{Pred}\langle d_i \rangle$, llavors $h_n : E^0_n \rightarrow E^1_n$ és una isomorfia.
 (2) Per tot $n < m$, $h_n \subseteq h_m$.

Sigui $c_0 = a_0$ i $d_0 = b_0$. Donat que $\text{Pred}\langle a_0 \rangle$ i $\text{Pred}\langle b_0 \rangle$ estan ben ordenats i $\text{Alt}_{T^0}(a_0) = \alpha = \text{Alt}_{T^1}(b_0)$, sigui h_0 l'única isomorfia entre aquests dos bons ordres. I suposant definits c_n, d_n i h_n que satisfan (1) i (2): Si n és senar, sigui c_{n+1} l'element de menor índex en l'enumeració del $\text{Nivell}_\alpha(T^0)$ que no pertanyi a $\{c_0 \dots c_n\}$. I considerem ara el conjunt E^0_n , abans definit. Sigui $m \in T^0$ el mínim del conjunt $\text{Pred}\langle c_{n+1} \rangle - E^0_n$. Fixem-nos que si $m \in \text{Nivell}_\beta(T^0)$, β no és un ordinal límit, perquè l'arbre és normal. Així m té un predecessor immediat, diguem-li m' , $m' \in E^0_n$. Sigui doncs d_{n+1} l'element de menor índex en l'enumeració del $\text{Nivell}_\alpha(T^1)$ que no pertanyi a $\{d_0 \dots d_n\}$ i tal que:

- (1') $h_n(m') < d_{n+1}$
 (2') $E^1_n \cap \text{Pred}\langle d_{n+1} \rangle \cap \{x \in T^1 : h_n(m') < x\} = \emptyset$

Existeix un element tal: Prenem $l \notin E^1_n$, $l \in \text{Nivell}_\beta(T^1)$ i tal que $h_n(m') < l$ (existeix un l tal perquè $h_n(m')$ té \aleph_0 successors immediats, i el conjunt $E^1_n \cap \text{Nivell}_\beta(T^1)$, per cada $\beta < \omega_1$, és finit). Per ser T^1 normal, satisfà la condició (2) de la Definició 8.3. Així hi ha $y \in \text{Nivell}_\alpha(T^1)$ tal que $l < y$. Sigui d_{n+1} l'element de menor índex en l'enumeració del $\text{Nivell}_\alpha(T^1)$ que ho satisfà. d_{n+1} no pertanyi a $\{d_0 \dots d_n\}$ perquè hem escollit $l \notin E^1_n$. Així si f és la isomorfia entre $\text{Pred}\langle c_{n+1} \rangle \cap \{x \in T^0 : x > m'\}$ i $\text{Pred}\langle d_{n+1} \rangle \cap \{x \in T^1 : h_n(m') < x\}$, sigui $h_{n+1} = h_n \cup f$. Si n és parell, prenem d_{n+1} , l'element de menor índex en l'enumeració del $\text{Nivell}_\alpha(T^1)$, que no pertanyi a $\{d_0 \dots d_n\}$ i per un procediment anàleg a l'anterior escollim c_{n+1} i h_{n+1} . Sigui $g = \bigcup \{h_n : n \in \omega\}$, g és una isomorfia entre T^0_α i T^1_α . Clarament és una isomorfia parcial de T^0_α en T^1_α . I $\text{dom}(g) = T^0_\alpha$, ja que si $x \in T^0$, hi ha $y \in \text{Nivell}_\alpha(T^0)$ tal que $x < y$, per ser T^0 normal. Així per algun $n \in \omega$, $y = c_n$. Llavors $x \in \text{dom}(h_n)$. Per tant $x \in \text{dom}(g)$. Per un argument anàleg, per ser T^1 normal, es mostra que $\text{rec}(g) = T^1_\alpha$. Així queda demostrat que, si α és límit, hi ha una isomorfia $g : T^0_\alpha \rightarrow T^1_\alpha$. Suposem ara que α és un ordinal successor. Sigui $\beta > \alpha$, $\beta < \omega_1$ un ordinal límit i $h : T^0_\beta \rightarrow T^1_\beta$ una isomorfia, llavors h restringida a T^0_α és una isomorfia entre T^0_α i T^1_α . Així queda provat i) de la Proposició.

ii) Si $\alpha < \beta < \omega_1$ i $g : T^0_{\alpha+1} \rightarrow T^1_{\alpha+1}$ és una isomorfia, sigui $\lambda > \beta$, $\lambda < \omega_1$ un ordinal límit. Construïm una isomorfia $f : T^0_\lambda \rightarrow T^1_\lambda$ pel procediment descrit a la prova de i) però afegint-hi el

següent: a) A més a més de (1) i (2) demanem que la nostra successió d'isomorfies parcials satisfaci: (3) Per tot $n \in \omega$, h_n restringida a $T^{\circ}_{\alpha+1}$ està inclosa en g .

b) $c_0 = a_0$ i d_0 és l'element de menor índex en l'enumeració del $\text{Nivell}_\lambda(T^1)$ que satisfà que $\{g(x) : x \in T^{\circ}_{\alpha+1} \text{ i } x \in \text{Pred}<(c_0)\} \subseteq \text{Pred}<(d_0)$. Existeix un element tal: Prenem $g(x)$ tal que $x < c_0$ i $x \in \text{Nivell}_\alpha(T^0)$. Llavors per ser T^1 normal, hi ha $y > g(x)$ tal que $y \in \text{Nivell}_\lambda(T^1)$. Sigui d_0 l'element de menor índex que compleix aquesta propietat.

c) Si n és senar, sigui d_{n+1} l'element de menor índex en l'enumeració del $\text{Nivell}_\lambda(T^1)$, que no pertanyi a $\{d_0 \dots d_n\}$ i que satisfaci (1') i (2') i a més a més:

$$(3') \{g(x) : x \in T^{\circ}_{\alpha+1} \text{ i } x \in \text{Pred}<(c_{n+1})\} \subseteq \text{Pred}<(d_{n+1}).$$

Que existeix un element tal és clar si $m \in \text{Nivell}_\beta(T^0)$ i $\beta > \alpha$. I si $\beta \leq \alpha$, sigui $x \in \text{Nivell}_\alpha(T^0)$ tal que $x < c_{n+1}$ i $x \notin E^{\circ}_n$. Llavors com que $g(x) \in \text{Nivell}_\alpha(T^1)$ (perquè g és una isomorfia), per normalitat de T^1 , hi ha y tal que $g(x) < y$ i $y \in \text{Nivell}_\lambda(T^1)$. Sigui d_{n+1} l'element de menor índex en l'enumeració del $\text{Nivell}_\lambda(T^1)$ que compleix aquesta propietat. Si n és parell, posem una clàusula anàloga per c_{n+1} . Prenent, igual que en la prova de i), la restricció de $f = \cup \{h_n : n \in \omega\}$ a T°_β , h . Llavors h és una isomorfia, $h : T^{\circ}_\beta \rightarrow T^1_\beta$, que extén g . Així queda provat ii). ■

8.22. Proposició. Si $T^0 = (T^{\circ} <)$ i $T^1 = (T^1, <')$ són dos ω_1 -arbres normals, $T^0 \equiv_{L_{aa}} T^1$.

Prova: Per inducció mostrem que per tot $n \in \omega$:

- (1) Hi ha una estratègia pel joc $G_n(T^0, T^1)$ a partir del \emptyset , tal que per tot resultat final del joc $(a^{\circ}, a^1, r^{\circ}, r^1)_{k_1, k_2}$ ($k_1 + k_2 = n$) obtingut a partir de l'ús d'aquesta estratègia: Si α és el menor ordinal tal que T^u_α conté tots els elements de a^u i inclou els de r^u , on $u \in \{0, 1\}$, llavors hi ha una isomorfia $g_{\alpha+1} : T^{\circ}_{\alpha+1} \rightarrow T^1_{\alpha+1}$ tal que:
Per cada $j \leq k_1$ $g_{\alpha+1}(a^{\circ}_j) = a^1_j$, i per cada $i \leq k_2$ $g_{\alpha+1}(r^{\circ}_i) = r^1_i$.

Per la Proposició 8.20. això és suficient per mostrar que $T^0 \equiv_{L_{aa}} T^1$, perquè si una estratègia satisfà (1) és una estratègia guanyadora. Provem-ho: Cas $n=1$: Pel lema 8.21. podem fixar per cada $\gamma < \omega_1$, una isomorfia $g_{\gamma+1} : T^{\circ}_{\gamma+1} \rightarrow T^1_{\gamma+1}$. Observem que $S_u = \{T^u_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ és un conjunt tancat i cofinal en T^u . Definim ara una estratègia pel joc $G_1(T^0, T^1)$, diguem-li $\mathfrak{R} = \{h_1, h_2\}$: per cada $a^{\circ} \in T^{\circ}$, sigui $h_1(a^{\circ}) = g_{\alpha+1}(a^{\circ})$, on α és el menor ordinal tal que $a^{\circ} \in T^{\circ}_\alpha$. Per cada $a^1 \in T^1$, sigui $h_1(a^1) = g^{-1}_{\alpha+1}(a^1)$, on α és el menor ordinal tal que $a^1 \in T^1_\alpha$. I per cada $f^u \in F^u$, sigui $h_1(f^u) = \{T^{1-u}_\beta : T^u_\beta \in f^u \cap S^u\}$. Fixem-nos que $f^u \cap S^u \in F_u$ i per tant tenim que $h_1(f^u) \in F_{1-u}$. I per cada $T^{1-u}_\beta \in h_1(f^u)$, $h_2(f^u, h_1(f^u), T^{1-u}_\beta) = T^u_\beta$. Observem que la estratègia \mathfrak{R} , així definida,

satisfà la condició (1): Clarament si I fa un moviment del tipus a), per ser $g_{\alpha+1}$ una isomorfia. I si I fa un moviment del tipus b) perquè per tot $\beta \in \alpha$, si $g_{\alpha+1}: T^0_{\alpha+1} \rightarrow T^1_{\alpha+1}$ és una isomorfia, $g_{\alpha+1}[T^0_{\beta}] = T^1_{\beta}$. Cas n+1: Suposem que per n es compleix. Sigui $\mathcal{R} = \{f_{2i}: i \leq n\} \cup \{f_{2i+1}: i \leq n\}$ una estratègia que satisfà (1) pel joc $G_n(T^0, T^1)$. Pel Lema 8.21. fixem, per cada resultat final $p = (a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ del joc $G_n(T^0, T^1)$ obtingut a partir de l'ús de l'estratègia \mathcal{R} , una isomorfia $g_{p, \alpha+1}: T^0_{\alpha+1} \rightarrow T^1_{\alpha+1}$; i per cada $\beta > \alpha+1$, per cada resultat final p obtingut a partir de \mathcal{R} , una isomorfia $g'_{p, \beta+1}$ que extengui a $g_{p, \alpha+1}$. Considerem ara el joc $G_{n+1}(T^0, T^1)$ i sigui $\mathcal{R}' = \{f'_{2i}: i \leq n+1\} \cup \{f'_{2i+1}: i \leq n+1\}$ la estratègia definida a continuació: Per tot $i \leq n$, $f'_{2i} = f_{2i}$ i $f'_{2i+1} = f_{2i+1}$. I si $i = n+1$, $p = (a^0, a^1, r^0, r^1)_{k_1, k_2}$ és la n-èsima posició del joc $G_{n+1}(T^0, T^1)$, obtinguda a partir de l'estratègia \mathcal{R} i w_p és la successió de les tirades de I i II fins el moviment n+1 corresponents a p, definim:

Per tot $a^0 \in T^0$, $f'_{2i}(w_p, a^0) = g'_{p, \beta+1}(a^0)$, on β és el menor ordinal tal que $a^0 \in T^0_{\beta}$ i $g'_{p, \beta+1}$ extén la isomorfia $g_{p, \alpha+1}$ associada a p.
I per tot $a^1 \in T^1$, $f'_{2i}(w_p, a^1) = g^{-1}_{p, \beta+1}(a^1)$, on β és el menor ordinal tal que $a^1 \in T^1_{\beta}$ i $g'_{p, \beta+1}$ extén la isomorfia $g_{p, \alpha+1}$ associada a p.

Per tot $f^u \in F^u$, $f'_{2i}(w_p, f^u) = \{T^{1-u}_{\gamma}: T^u_{\gamma} \in f^u \cap S^u\}$.

I per tot $T^{1-u}_{\gamma} \in F'_{2i}(w_p, f^u)$, $f'_{2i+1}(w_p, f^u, f'_{2i}(w_p, f^u), T^{1-u}_{\gamma}) = T^u_{\gamma}$.

Així, si el moviment n+1 és del tipus a), per tal com hem definit $g'_{p, \beta+1}$ se satisfà (1). I si el moviment n+1 és del tipus b), per tota posició p obtinguda a partir de \mathcal{R} , per tot ordinal γ tal que I esculli T^{1-u}_{γ} , si considerem la isomorfia $g'_{p, \beta+1}: T^0_{\beta+1} \rightarrow T^1_{\beta+1}$, per un ordinal $\beta > \gamma$, tenim que $g'_{p, \beta+1}[T^0_{\gamma}] = T^1_{\gamma}$. Per tant, en aquest cas se satisfà també la condició (1). ■

9. Models finitament determinats.

9.1. Definició. Fixem un tipus de semblança τ . Sigui A una estructura de tipus τ . Fixat $n \in \omega$, diem que A és *finitament n-determinada* sii tota sentència de $L_{aa}(\tau)$ de rang quantificacional $\leq n$ de la forma $\overline{t} \forall \overline{x} [\text{stats} \psi(\overline{x}, \overline{t}, s) \rightarrow \text{aas} \psi(\overline{x}, \overline{t}, s)]$ ¹ és vertadera en A . I diem que A és *finitament determinada* sii per tot $n \in \omega$ A és finitament n -determinada.

9.2. Observació. Tota estructura numerable és finitament determinada.

Prova: Pel lema 2.4. ■

Posem un exemple d'estructura no finitament determinada. Partim ω_1 en dos conjunts estacionaris, E^{ω_1} i F^{ω_1} . Considerem l'estructura $(\omega_1, <, E^{\omega_1})$ i la fórmula $\exists y [\forall x (s(x) \leftrightarrow x < y) \wedge E(y)]$. Observem que $\{t \in P_{\omega_1}(\omega_1) : (\omega_1, <, E^{\omega_1}) \models \exists y [\forall x (s(x) \leftrightarrow x < y) \wedge E(y)] [t]\} = E^{\omega_1}$. Així tenim que $(\omega_1, <, E^{\omega_1}) \models \text{stats} \exists y [\forall x (s(x) \leftrightarrow x < y) \wedge E(y)]$, però en canvi $(\omega_1, <, E^{\omega_1}) \not\models \text{aas} \exists y [\forall x (s(x) \leftrightarrow x < y) \wedge E(y)]$. Per tant no és una estructura finitament determinada. Més endavant mostrarem que hi ha estructures no numerables que sí que ho són. Donarem ara un criteri purament algebraic de $\equiv_{L_{aa}}$ per estructures finitament determinades a partir d'isomorfies parcials.

9.3. Definició. Donades dues estructures de tipus τ finit i relacional, A i B , sigui $A * B = (A \times B) \cup (P_{\omega_1}(A) \times P_{\omega_1}(B))$. Llavors, fixat $n \in \omega$, diem que $(F_k : k \leq n)$ és un *sistema back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B sii:

- (1) Per cada $k \leq n$, cada $f \in F_k$, $f \subseteq A * B$.
- (2) Per tot $f \in F_0$, per tota $\phi \in L_{aa}(\tau)$ atòmica, per tota successió $\overline{c} = c_0, \dots, c_r$ d'elements del domini de f , $A \models \phi[\overline{c}]$ sii $B \models \phi[f(\overline{c})]$ ²
- (3) $\emptyset \in F_n$
- (4) Si $j < k$, $j, k \leq n$ i $f \in F_k$,
 - i) $\forall a \in A, \exists b \in B [f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j]$
 - ii) $\forall b \in B, \exists a \in A [f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j]$
 - iii) Hi ha tancats i cofinals $C \subseteq P_{\omega_1}(A)$, $D \subseteq P_{\omega_1}(B)$, tals que $\forall s \in C, \forall t \in D [f \cup \{ \langle s, t \rangle \} \in F_j]$

¹ Notació: \overline{t} i \overline{x} són successions finites qualssevol de variables de segon i de primer ordre, respectivament.

² Notació: $f(\overline{c})$ és la successió del recorregut de f , $f(c_0) \dots f(c_r)$.

9.4. Definició. Diem que $(F_k: k \in \omega)$ és un sistema *back-and-forth* L_{aa} -determinat de A en B sii per cada $n \in \omega$, $(F_k: k \leq n)$ és un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B .

9.5. Observació. Si per cada $n \in \omega$, $(F_{k,n}: k \leq n)$ és un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B , llavors si $G_k = \bigcup_{n \geq k} F_{k,n}$, $(G_k: k \in \omega)$ és un sistema *back-and-forth* L_{aa} -determinat de A en B .

9.6. Lema. A és finitament n -determinada sii (#) Per tot $r \in \omega$, si per tot $i \leq r$ $qr(\psi_i(s)) < n$ i $A \models aas(\psi_0 \vee \dots \vee \psi_r)$, llavors hi ha $i \leq r$ tal que $A \models aas\psi_i$.

Prova: \Rightarrow) Suposem que A és finitament n -determinada. Fixem $r \in \omega$. Suposem que per tot $i \leq r$ $qr(\psi_i(s)) < n$ i $A \models aas(\psi_0 \vee \dots \vee \psi_r)$. Si no hi hagués $i \leq r$ tal que $A \models aas\psi_i$, per tot $i \leq r$, $A \models stats\neg\psi_i$. Així com que per cada $i \leq r$, $qr(stats\neg\psi_i \rightarrow aas\neg\psi_i) \leq n$, per ser A finitament n -determinada, $A \models stats\neg\psi_i \rightarrow aas\neg\psi_i$. Per tant, per cada $i \leq r$, $A \models aas\neg\psi_i$. I així $A \models aas(\neg\psi_0 \wedge \dots \wedge \neg\psi_r)$. Absurd. Per tant hi ha $i \leq r$ tal que $A \models aas\psi_i$.

\Leftarrow) Suposem que A satisfà (#). Sigui $\sigma = aa \bar{t} \forall \bar{x} [stats\psi(\bar{x}, \bar{t}, s) \rightarrow aas\psi(\bar{x}, \bar{t}, s)]$ una sentència de $qr(\sigma) \leq n$. Siguin \bar{a} i \bar{r} successions qualssevol d'elements de A i de $P_{\omega_1}(A)$, respectivament. Si $A \models stats\psi[\bar{a}, \bar{r}]$, com que $A \models aas(\psi \vee \neg\psi)$, $A \models aas(\psi \vee \neg\psi)[\bar{a}, \bar{r}]$. I per ser $qr(\psi) < n$, per (#), $A \models aas\psi[\bar{a}, \bar{r}]$ o bé $A \models aas\neg\psi[\bar{a}, \bar{r}]$. Però com que $A \models stats\psi[\bar{a}, \bar{r}]$, tenim que $A \not\models aas\neg\psi[\bar{a}, \bar{r}]$. Per tant $A \models aas\psi[\bar{a}, \bar{r}]$. Així obtenim que $A \models \sigma$, A és doncs finitament n -determinada. ■

9.7. Lema. Si A és finitament n -determinada, per tot $k < n$, per tot $a \in A$, (A, a) és finitament k -determinada.

Prova: Suposem que A és una estructura finitament n -determinada de tipus τ . Fixem $k < n$. Sigui $a \in A$ i $\phi(y)$ una fórmula amb una única variable lliure, $qr(\phi(y)) \leq k$ de la forma $aa \bar{t} \forall \bar{x} [stats\psi(\bar{x}, \bar{t}, s) \rightarrow aas\psi(\bar{x}, \bar{t}, s)](y)$. Llavors per ser A finitament n -determinada, $A \models aa \bar{t} \forall \bar{x} \forall y [stats\psi(\bar{x}, \bar{t}, s) \rightarrow aas\psi(\bar{x}, \bar{t}, s)](y)$. Així, per Lògica de Primer Ordre i pel Lema 3.22., $A \models \forall y aa \bar{t} \forall \bar{x} [stats\psi(\bar{x}, \bar{t}, s) \rightarrow aas\psi(\bar{x}, \bar{t}, s)](y)$. Així en particular $A \models aa \bar{t} \forall \bar{x} [stats\psi(\bar{x}, \bar{t}, s) \rightarrow aas\psi(\bar{x}, \bar{t}, s)][a]$. Així doncs (A, a) és finitament k -determinada. ■

9.8. Corol.lari. Si A és una estructura finitament determinada, per tot $a \in A$, (A, a) és també una estructura finitament determinada.

9.9. Lema. Si $(F_k: k \leq n)$ és un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B . Llavors

I) Per tota $\phi(x_0, \dots, x_p, s_0, \dots, s_m) \in L_{aa}(\tau)$:

(*) Si $qr(\phi) \leq k \leq n$ i $f \in F_k$, llavors per tota successió $\bar{c} = c_0, \dots, c_p, t_0, \dots, t_m$ d'elements del domini de f , $A \models \phi[\bar{c}]$ sii $B \models \phi[f(\bar{c})]$.

II) A i B són estructures finitament n -determinades.

Prova: Suposem que $(F_k: k \leq n)$ és un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B .

I) Mostrem per inducció sobre la complexitat de les fórmules que per tota $\phi \in L_{aa}(\tau)$ se satisfà

(*): i) Si ϕ és atòmica, $qr(\phi) = 0$ per tant, per (2) de la Definició 9.3, ϕ satisfà (*).

ii) Suposem inductivament que ϕ i ψ satisfan (*). Si $qr(\phi \vee \psi) \leq k$ i $f \in F_k$,

$$\begin{array}{ll} A \models \phi \vee \psi[\bar{c}] & \text{sii} \\ & A \models \phi[\bar{c}] \text{ o } A \models \psi[\bar{c}] \\ & \text{sii} \\ & B \models \phi[f(\bar{c})] \text{ o } B \models \psi[f(\bar{c})] \end{array}$$

Per supòsit inductiu, ja que $qr(\phi) \leq k$ i $qr(\psi) \leq k$.

$$\text{sii} \quad B \models \phi \vee \psi[f(\bar{c})]$$

Si $qr(\neg\phi) \leq k$ i $f \in F_k$, $A \models \neg\phi[\bar{c}]$ sii

$$A \not\models \phi[\bar{c}]$$

sii

$$B \not\models \phi[f(\bar{c})]$$

Per supòsit inductiu, ja que $qr(\phi) = qr(\neg\phi) \leq k$.

sii

$$B \models \neg\phi[f(\bar{c})]$$

iii) Suposem que $\phi(x)$ satisfà (*). Sigui $qr(\exists x\phi(x)) \leq k+1 \leq n$. Si $f \in F_{k+1}$ i $A \models \exists x\phi(x)[\bar{c}]$,

llavors hi ha $a \in A$ tal que $A \models \phi(x)[\bar{c}, a]$. Sigui $b \in B$ tal que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_k$ (existeix un tal per

(4) i) de la Definició 9.3.). Llavors, com que $qr(\phi(x)) \leq k$, per supòsit inductiu $B \models \phi(x)[f(\bar{c}), b]$.

Per tant $B \models \exists x\phi(x)[f(\bar{c})]$. I anàlogament es mostra que si $B \models \exists x\phi(x)[f(\bar{c})]$, llavors

$A \models \exists x\phi(x)[\bar{c}]$, per (4) ii) de la Definició 9.3. iv) Suposem que $\phi(s)$ satisfà (*). Sigui

$qr(aas\phi(s)) \leq k+1 \leq n$. Suposem que $f \in F_{k+1}$ i $A \models aas\phi(s)[\bar{c}]$. Llavors

$X = \{ r \in P_{\omega_1}(A) : A \models \phi(s)[\bar{c}, r] \} \in \mathcal{F}(A)$. Siguin C i D tancats i cofinals $C \subseteq P_{\omega_1}(A)$, $D \subseteq P_{\omega_1}(B)$,

tals que $\forall s \in C, \forall t \in D [f \cup \{ \langle s, t \rangle \} \in F_k]$ (existeixen per (4) iii) de la Definició 9.3.).

Considerem $X \cap C$, sigui $r \in X \cap C$ (hi ha un element tal perquè la intersecció de dos elements de

$\mathcal{F}(A)$ és no buida, $\mathcal{F}(A)$ és un filtre propi). Tal com hem escollit r , $A \models \phi(s)[\bar{c}, r]$ i per tot $t \in D$

$[f \cup \{ \langle r, t \rangle \} \in F_k]$. Així, per supòsit inductiu, com que $qr(\phi(s)) \leq k$, tenim que per tot $t \in D$,

$B \models \phi(s)[f(\bar{c}), t]$. Per tant $B \models aas\phi(s)[f(\bar{c})]$. I anàlogament es mostra que si

$B \models aas\phi(s)[f(\bar{c})]$, llavors $A \models aas\phi(s)[\bar{c}]$, fent ús de nou de (4) iii) de la Definició 9.3.

II) Mostrem que per tot $r \in \omega$, si $\psi_0, \dots, \psi_r \in L_{aa}(\tau)$ i per tot $i \leq r$ $qr(\psi_i) = j < k \leq n$, $f \in F_k$ i

$A \models aas(\psi_0 \vee \dots \vee \psi_r)[\bar{c}]$, llavors hi ha $i \leq r$ tal que $A \models aas\psi_i[\bar{c}]$. D'això, pel Lema 9.6., se'n

segueix que A és finitament n -determinada. Siguin C i D tancats i cofinals $C \subseteq P_{\omega_1}(A)$,

$D \subseteq P_{\omega_1}(B)$, tals que $\forall m \in C, \forall t \in D [f \cup \{ \langle m, t \rangle \} \in F_j]$. Sigui $Y = \{ m \in P_{\omega_1}(A) : A \models \psi_0 \vee \dots \vee \psi_r [\bar{c}, m] \}$. Tenim que $Y \in \mathcal{F}(A)$. Prenem $m \in C \cap Y$ (existeix un element tal perquè la intersecció de dos tancats i cofinals no és buida). Així hi ha $i \leq r$ tal que $A \models \psi_i [\bar{c}, m]$. Però llavors, per (*), com que per cada $t \in D, f \cup \{ \langle m, t \rangle \} \in F_j$, tindrem que $B \models \psi_i [f(\bar{c}), t]$. Així $B \models aas\psi_i [f(\bar{c})]$. I altre cop per (*) tenim que $A \models aas\psi_i [\bar{c}]$, que és el que volíem mostrar. ■

9.10. Observació. Fixat un tipus de semblança τ , finit i relacional, fixada una successió de variables $\bar{v} = x_0, \dots, x_p, s_0, \dots, s_m$, per tot $n \in \omega$ hi ha (llevat de L_{aa} -equivalència) un nombre finit de fórmules de $L_{aa}(\tau)$, que tenen lliures exactament les variables de \bar{v} i tenen rang quantificacional $\leq n$.

9.11. Definició. Fixem una successió de variables \bar{v} i un tipus de semblança τ finit i relacional. Diem que una fórmula $\psi \in L_{aa}(\tau)$, que té lliures exactament les variables de \bar{v} i tal que $qr(\psi) \leq n$ és *n-completa en les variables de \bar{v}* , si per tota fórmula $\phi \in L_{aa}(\tau)$, que té lliures exactament les variables de \bar{v} i tal que $qr(\phi) \leq n$:

$$\models_{L_{aa}} \psi(\bar{v}) \rightarrow \phi(\bar{v}) \quad \text{o} \quad \models_{L_{aa}} \psi(\bar{v}) \rightarrow \neg \phi(\bar{v})$$

9.12. Observació. Fixat un tipus de semblança τ , finit i relacional, fixada una successió de variables \bar{v} , per tot $n \in \omega$, hi ha un conjunt finit de fórmules *n-completes* $\{ \psi_j(\bar{v}) : j \in J \}$ en les variables de \bar{v} , on $J \neq \emptyset$, que satisfà: $\models_{L_{aa}} \bigvee \{ \psi_j(\bar{v}) : j \in J \}$.

Prova: Per l'Observació 9.10. i la Definició 9.11. ■

9.13. Definició. Diem que $A \equiv_{L_{aa}}^n B$ sii per tota sentència σ tal que $qr(\sigma) \leq n$, $A \models \sigma$ sii $B \models \sigma$.

9.14. Lema. Si $A \equiv_{L_{aa}}^n B$ i les estructures A i B són finitament *n-determinades*, llavors hi ha un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n)-determinat de A en B .

Prova: Suposem que $A \equiv_{L_{aa}}^n B$ i que A i B són finitament *n-determinades*. La col.lecció $(F_k : k \leq n)$ que definirem a continuació, és un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n)-determinat de A en B :

$$\text{Per tot } k \leq n, f \in F_k \Leftrightarrow f \subseteq A * B, f \text{ és finita, } (A, d(f)) \equiv_{L_{aa}}^k (B, r(f)) \text{ }^3 \text{ i } (A, d(f)) \text{ i } (B, r(f)) \text{ són estructures finitament } k\text{-determinades.}$$

³ Notació: " $d(f)$ " és un abreujament per una successió qualsevol $c_0, \dots, c_p, t_0, \dots, t_m$ d'elements del domini de la funció f i " $r(f)$ " és un abreujament per la successió corresponent del recorregut de f , $f(c_0), \dots, f(c_p), f(t_0), \dots, f(t_m)$.

Clarament se satisfà (1). I si $f \in F_0$, llavors $(A, d(f)) \equiv_{L_{aa}^0} (B, r(f))$, per tant se satisfà (2). I per ser $A \equiv_{L_{aa}^n} B$, $\emptyset \in F_n$, així se satisfà també (3). Mostrem ara que $(F_k: k \leq n)$ satisfà (4): Sigui $j < k \leq n$ i $f \in F_k$. Suposem que $a \in A$, sigui $d(f) = a_0, \dots, a_p, t_0, \dots, t_m$. Fixem una successió de variables $x_0, \dots, x_p, s_0, \dots, s_m, x$. Sigui ϕ una fórmula j -completa en aquestes variables tal que $A \models \phi[d(f), a]$. Llavors $A \models \exists x \phi[d(f)]$. Així, com que $qr(\exists x \phi) \leq k$ i per ser $f \in F_k$, $(A, d(f)) \equiv_{L_{aa}^k} (B, r(f))$, tenim que $B \models \exists x \phi[r(f)]$. Així hi ha $b \in B$ tal que $B \models \phi[r(f), b]$. Però llavors, per ser ϕ una fórmula j -completa, b serà tal que $(A, d(f), a) \equiv_{L_{aa}^j} (B, r(f), b)$ i pel Lema 9.7., seran estructures j -determinades. Per tant $f \cup \langle a, b \rangle \in F_j$. D'una manera anàloga es mostra que $(F_k: k \leq n)$ satisfà (4) ii). I si $d(f) = a_0, \dots, a_p, t_0, \dots, t_m$, per mostrar que $(F_k: k \leq n)$ satisfà (4) iii), fixem una successió de variables $x_0, \dots, x_p, s_0, \dots, s_m, s$. Sigui $\{\psi_i: i \leq r\}$ un conjunt finit de fórmules j -completes en aquestes variables tals que $\models \psi_0 \vee \dots \vee \psi_r$. Llavors $A \models aas(\psi_0 \vee \dots \vee \psi_r)[d(f)]$. Així per ser $(A, d(f))$ finitament k -determinat i per ser cada $i \in I$, $qr(\psi_i) < k$, pel Lema 9.6., hi ha $i \in I$ tal que $A \models aas\psi_i[d(f)]$. Com que $f \in F_k$, $(A, d(f)) \equiv_{L_{aa}^k} (B, r(f))$, així com que $qr(aas\psi_i) \leq k$, tindrem que $B \models aas\psi_i[r(f)]$. Sigui $C = \{r \in P_{\omega_1}(A): A \models \psi_i([d(f), r])\}$ i $D = \{t \in P_{\omega_1}(B): B \models \psi_i[r(f), t]\}$. Tenim que $C \in \mathcal{F}(A)$ i $D \in \mathcal{F}(B)$. Així podem prendre $C' \subseteq C$ i $D' \subseteq D$, conjunts tancats i cofinals. Llavors, per tot $r \in C'$, per tot $t \in D'$, per ser ψ_i j -completa $(A, d(f), r) \equiv_{L_{aa}^j} (B, r(f), t)$.

Només ens queda per mostrar que ambdues són estructures finitament j -determinades. Sigui ϕ una fórmula, les variables lliures de la qual estan entre aquestes $x_0, \dots, x_p, s_0, \dots, s_m, s$; $qr(\phi) \leq j$ i és de la forma $aa \bar{t} \forall \bar{x} [\text{stats}'\psi(\bar{x}, \bar{t}, s') \rightarrow aas'\psi(\bar{x}, \bar{t}, s')]$. Volem mostrar que $A \models \phi[d(f), r]$. Tenim que $A \models aas\phi[d(f)]$, per ser $(A, d(f))$ finitament k -determinat i $qr(aas\phi) \leq k$. Així com que $A \models aas\psi_i[d(f)]$ (on ψ_i és la fórmula j -completa esmentada anteriorment), tenim que $A \models aas(\phi \wedge \psi_i)[d(f)]$. Per tant per ser ψ_i j -completa $A \models \psi_i \rightarrow \phi[d(f), r]$. Així com que $A \models \psi_i[d(f), r]$ tenim que $A \models \phi[d(f), r]$. Per tant $(A, d(f), r)$ és finitament j -determinada. I com que $(A, d(f), r) \equiv_{L_{aa}^j} (B, r(f), t)$, $(B, r(f), t)$ també és finitament j -determinada. Per tant $f \cup \langle r, t \rangle \in F_j$. Així se satisfà (4) iii). ■

9.15. Teorema. $A \equiv_{L_{aa}^n} B$ i les estructures A i B són finitament n -determinades sii hi ha un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B .

Prova: Pels Lemes 9.9 i 9.14. ■

9.16. Corol.lari. $A \equiv_{L_{aa}} B$ i A i B són finitament determinades sii hi ha un sistema *back-and-forth* L_{aa} -determinat de A en B .

Prova: Pel Teorema 9.15. i l'Observació 9.5. ■

9.17. Definició. Donades dues estructures A i B de tipus τ finit i relacional, diem que $(I_k: k \in \omega)$ és un L -sistema *back-and-forth*⁴ de A en B sii:

- (1') Per cada $k \in \omega$, I_k és una col.lecció d'isomorfies parcials de A en B .
- (2') Per cada $k \in \omega$, $\emptyset \in I_k$
- (3') Si $j < k$; $j, k \in \omega$ i $f \in I_k$,
 - i) $\forall a \in A, \exists b \in B [f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in I_j]$
 - ii) $\forall b \in B, \exists a \in A [f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in I_j]$

9.16. Proposició. Donades dues estructures A i B de tipus τ finit i relacional:

$A \equiv_L B$ sii hi ha un L -sistema *back-and-forth* de A en B .

Prova: Anàloga a la de 9.16. ■

9.17. Lema. Si A i B són estructures numerables de tipus τ finit i relacional i hi ha un L -sistema *back-and-forth* de A en B llavors hi ha un sistema *back-and-forth* L_{aa} -determinat de A en B .

Prova: Siguin A i B estructures numerables de tipus τ finit i relacional i sigui $(I_k: k \in \omega)$ un L -sistema *back-and-forth* de A en B . Per mostrar que hi ha un sistema *back-and-forth* L_{aa} -determinat de A en B , en tenim prou amb mostrar que, per cada $n \in \omega$ hi ha un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B . Fixem $n \in \omega$. Per cada $m \in \omega$, sigui $I'_m = \cup_{j \geq m} I_j$. Mostrem ara que la col.lecció $(F_k: k \leq n)$ que definirem a continuació, és un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B :

Per cada $k \leq n$, sigui $F_k = I'_k \cup \{ f \cup \{ \langle A, B \rangle \} : f \in I'_k \}$

Observem que, així definida, per tot $j, k \leq n$, si $j < k$, tenim que $F_k \subseteq F_j$. Mostrem que satisfà (1)-(4) de la Definició 9.3.: Clarament satisfà (1). I si $f \in F_0$, per tota fórmula $\phi \in L(\tau)$ atòmica, per (1') de la Definició 9.17. tenim que, per tota successió $\bar{c} = \langle c_0, \dots, c_r \rangle$ d'elements del domini de f , $A \models \phi[\bar{c}]$ sii $B \models \phi[f(\bar{c})]$. I si $\phi = s(x)$ per definició de F_0 , per tot $a \in A$, element del domini de f , es compleix trivialment que $A \models s(x)[a, A]$ i $B \models s(x)[f(a), B]$, per tant $A \models s(x)[a, A]$ sii $B \models s(x)[f(a), B]$. Així, $(F_k: k \leq n)$ satisfà (2). I per (2') de la Definició 9.17., $\emptyset \in I_n$, per tant $\emptyset \in F_n$. Així se satisfà també (3). Suposem ara que $j < k$; $j, k \leq n$ i $f \in F_k$. Sigui $a \in A$. Considerem $f' = f/A \times B$ ⁵. Per definició de F_k , tenim que $f' \in I'_k$. Així, per definició de I'_k , hi ha $m \geq k$ tal que $f' \in I_m$. Així, per (3') i) de la Definició 9.17, per ser $j < m$, hi ha $b \in B$ tal que $f' \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in I_j$. Així, per definició de I'_j , $f' \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in I'_j$. I per tant, per definició de F_j , $f' \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$.

⁴ On L és la Lògica de Primer Ordre. Podem trobar una caracterització d'aquest tipus de sistemes a [3].

⁵ On $f/A \times B = \{ \langle x, y \rangle \in f : x \in A \text{ i } y \in B \}$

Llavors si $f=f'$, tenim que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. I si $f \neq f'$, per definició de F_j , $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} = f' \cup \{ \langle a, b \rangle, \langle A, B \rangle \} \in F_j$, que és el que volíem mostrar. Per tant $(F_k: k \leq n)$ satisfà (4) i). Anàlogament es mostra que satisfà també (4) ii). Suposem que $j < k$; $j, k \leq n$ i $f \in F_k$. Per definició de F_k , $f \cup \{ \langle A, B \rangle \} \in F_k$. I com que $F_k \subseteq F_j$, tenim que $f \cup \{ \langle A, B \rangle \} \in F_j$. Així, sent A i B conjunts numerables, tenim que $\{A\}$ i $\{B\}$ són tancats i cofinals (en $P_{\omega_1}(A)$ i $P_{\omega_1}(B)$, respectivament) i satisfan:

$$\forall s \in \{A\}, \forall t \in \{B\} [f \cup \{ \langle s, t \rangle \} \in F_j]$$

Per tant $(F_k: k \leq n)$ satisfà també (4) iii). Així tenim que $(F_k: k \leq n)$ és un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B . ■

9.20. Proposició. Si A i B són estructures numerables de tipus τ finit i relacional:

$$A \equiv_L B \text{ sii } A \equiv_{L_{aa}} B$$

Prova: Aquest sentit del bicondicional (\Leftarrow) es dona perquè L_{aa} és una extensió de la Lògica de Primer Ordre. L'altre sentit del bicondicional és un corol.lari del Lema 9.19. ■

9.21. Proposició. Si A i B són estructures no numerables de tipus $\tau = \emptyset$, llavors $A \equiv_{L_{aa}} B$ i les estructures A i B són finitament determinades.

Prova: Suposem que A i B són estructures no numerables de tipus $\tau = \emptyset$. Per provar que $A \equiv_{L_{aa}} B$ i les estructures A i B són finitament determinades, en tenim prou amb mostrar que per cada $n \in \omega$, hi ha un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B . Fixem $n \in \omega$. Mostrarem que la col.lecció $(F_k: k \leq n)$, que definirem a continuació, és un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de A en B :

Per cada $k \leq n$, sigui $F_k = \{ g \cup \{ \langle r_0, t_0 \rangle, \dots, \langle r_m, t_m \rangle \} : m \in \omega, g \text{ és una funció parcial injectiva finita de } A \text{ en } B. \text{ Per cada } i \leq m, r_i \in P_{\omega_1}(A) \text{ i } t_i \in P_{\omega_1}(B) \text{ són conjunts infinits tals que: per tot } a \in \text{dom}g, a \in r_i \leftrightarrow g(a) \in t_i. \text{ Per cada } j < i \leq m, r_j \subset r_i, t_j \subset t_i, |r_i - r_j| = \aleph_0 \text{ i } |t_i - t_j| = \aleph_0 \}$ ⁶

Mostrem que $(F_k: k \leq n)$ satisfà (1)-(4) de la Definició 9.3.: Clarament satisfà (1). I si $f \in F_0$, per tota fórmula $\phi \in L(\tau)$ atòmica, per ser $f/A \times B$ una funció parcial injectiva finita de A en B , tenim que, per tota successió $\bar{c} = \langle c_0, \dots, c_r \rangle$ d'elements del domini de f , $A \models \phi[\bar{c}]$ sii $B \models \phi[f(\bar{c})]$. I si $\phi = s(x)$ per definició de F_0 , per tot $a \in A, r \in P_{\omega_1}(A), a, r \in \text{dom}f$, es compleix que $A \models s(x)[a, r]$

⁶ F_k és el conjunt de funcions f tals que $f/A \times B$ és una funció parcial injectiva finita de A en B , i tal que els elements de $f/(P_{\omega_1}(A) \times P_{\omega_1}(B))$ es poden ordenar en una successió que té les propietats que hem descrit.

sii $B|=s(x)[f(a), f(r)]$. Així $(F_k:k \leq n)$ satisfà (2). I per ser \emptyset una funció parcial injectiva finita de A en B , $\emptyset \in F_n$. Així se satisfà també (3).

Suposem que $j < k$; $j, k \leq n$ i $f \in F_k$, $f = g \cup \{ \langle r_0, t_0 \rangle, \dots, \langle r_m, t_m \rangle \}$. Sigui $a \in A$. Cas 1: $a \in \text{dom} f$, no hi ha res a mostrar, perquè per definició de F_j , $f \in F_j$. Cas 2: $a \notin \text{dom} f$ i $f \subseteq A \times B$, sigui $b \in B$ tal que $b \notin \text{rec} f$, existeix un element tal perquè $\text{rec} f$ és finit i B és no numerable. Llavors $f \cup \{ \langle a, b \rangle \}$ és una funció parcial injectiva finita de A en B . Per tant hem trobat $b \in B$ tal que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. Cas 3: $a \notin \text{dom} f$ i per tot $r \in P_{\omega_1}(A) \cap \text{dom} f$, $a \notin r$. Sigui $b \in B$ tal que per tot $t \in P_{\omega_1}(B) \cap \text{rec} f$, $b \notin t$, existeix un element tal perquè $\bigcup_{i \leq m} t_i$ és un conjunt numerable i B és no numerable. Així en aquest cas, per tal com hem definit F_j , tenim que hi ha $b \in B$ tal que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. Cas 4: $a \notin \text{dom} f$ i hi ha $r \in P_{\omega_1}(A) \cap \text{dom} f$ tal que $a \in r$. Sigui r_1 el menor conjunt tal (existeix un element tal perquè $\text{dom} f$ és un conjunt finit i els elements de $P_{\omega_1}(A) \cap \text{dom} f$ formen una cadena respecte la inclusió). Prenem $b \in B$ tal que per tot $j < i$, $b \in t_i - t_j$, $b \notin \text{rec} f$. Existeix un element tal perquè $|t_i - t_j| = \aleph_0$ i $\text{rec} f$ és un conjunt finit. Llavors, per definició de F_j , hem trobat $b \in B$ tal que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. Així hem mostrat per casos que $(F_k:k \leq n)$ satisfà (4) i). Anàlogament es prova que satisfà (4) ii).

Mostrem ara que satisfà (4) iii): Suposem que $j < k$; $j, k \leq n$ i $f \in F_k$, $f = g \cup \{ \langle r_0, t_0 \rangle, \dots, \langle r_m, t_m \rangle \}$. Sigui $X = \bigcup_{i \leq m} r_i \cup \text{dom} g$ i sigui $X' = \bigcup_{i \leq m} t_i \cup \text{rec} g$. Tenim que $A - X$ i $A - X'$ són conjunts no numerables. Siguin Y i Y' subconjunts infinits numerables de $A - X$ i $A - X'$, respectivament. Llavors els tancats i cofinals $C = \{ r \in P_{\omega_1}(A) : X \cup Y \subseteq r \}$ i $D = \{ t \in P_{\omega_1}(B) : X' \cup Y' \subseteq t \}$, per definició de F_j satisfan: $\forall r \in C, \forall t \in D [f \cup \{ \langle s, t \rangle \} \in F_j]$. Així tenim que $(F_k:k \leq n)$ és un sistema *back-and-forth* (L_{ab}, n) -determinat de A en B . ■

9.22. Proposició. $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, <)$ és una estructura finitament determinada.⁷

Prova: N'hi ha prou amb mostrar que, per cada $n \in \omega$, hi ha un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Fixem $n \in \omega$. Mostrarem que la col·lecció $(F_k:k \leq n)$ que definirem a continuació, és un sistema *back-and-forth* (L_{aa}, n) -determinat de \mathbb{R} en \mathbb{R} :

Per cada $k \leq n$, sigui $F_k = \{ g \cup \{ \langle r_0, t_0 \rangle, \dots, \langle r_m, t_m \rangle \} : m \in \omega, g \text{ és una isomorfia parcial finita de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R} \}$. Per cada $i \leq m$, $r_i, t_i \in P_{\omega_1}(\mathbb{R})$ són conjunts infinits tals que: per tot $a \in \text{dom} g$, $a \in r_i \leftrightarrow g(a) \in t_i$. Per cada $i \leq m$ $Q \subseteq r_i$ i $Q \subseteq t_i$ ⁸. Per cada $j < i \leq m$, $r_j \subseteq r_i$ i per tot $a < a' \in r_j$ hi ha $b \in r_i - r_j$ tal que $a < b < a'$. Per cada $j < i \leq m$, $t_j \subseteq t_i$ i per tot $a < a' \in t_j$ hi ha $b \in t_i - t_j$ tal que $a < b < a'$

⁷ \mathbb{R} és el conjunt dels nombres reals amb el seu ordre usual.

⁸ Q és el conjunt dels nombres racionals.

Mostrem que $(F_k:k \leq n)$ satisfà (1)-(4) de la Definició 9.3.: Clarament satisfà (1). I si $f \in F_0$, per tota fórmula $\phi \in \mathcal{L}(\tau)$ atòmica, per ser $f/R \times R$ una isomorfia parcial finita de \mathbb{R} en \mathbb{R} , tenim que, per tota successió $\bar{c} = c_0, \dots, c_r$ d'elements del domini de f , $\mathbb{R} \models \phi[\bar{c}]$ sii $\mathbb{R} \models \phi[f(\bar{c})]$. I si $\phi = s(x)$ per definició de F_0 , per tot $a \in R$, $r \in P_{\omega_1}(R)$, $a, r \in \text{dom}f$, es compleix que $\mathbb{R} \models s(x)[a, r]$ sii $\mathbb{R} \models s(x)[f(a), f(r)]$. Així $(F_k:k \leq n)$ satisfà (2). I per ser \emptyset una isomorfia parcial finita de \mathbb{R} en \mathbb{R} , $\emptyset \in F_n$. Així se satisfà també (3).

Suposem que $j < k$; $j, k \leq n$ i $f \in F_k$, $f = g \cup \{ \langle r_0, t_0 \rangle, \dots, \langle r_m, t_m \rangle \}$. Sigui $a \in R$. Cas 1: $a \in \text{dom}f$, no hi ha res a mostrar, perquè per definició de F_j , $f \in F_j$. Cas 2: $a \notin \text{dom}f$ i $f \subseteq R \times R$, ens cal contemplar els següents subcasos: i) Per tot $a' \in \text{dom}f$, $a < a'$. Com que el recf és un conjunt finit, prenem el mínim d'aquest conjunt, diguem-li b' . Llavors si $b \in R$ tal que $b < b'$ (existeix un element tal per ser \mathbb{R} un ordre sense extrems), tenim que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \}$ és una isomorfia parcial finita de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Per tant hi ha $b \in R$ tal que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. ii) Per tot $a' \in \text{dom}f$, $a > a'$. Com que el recf és un conjunt finit, prenem el màxim d'aquest conjunt, diguem-li b' . Llavors si $b \in R$ tal que $b > b'$ (existeix un element tal per ser \mathbb{R} un ordre sense extrems), tenim que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \}$ és una isomorfia parcial finita de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Per tant hi ha $b \in R$ tal que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. iii) Hi ha $a', a'' \in \text{dom}f$ tals que $a' < a < a''$. Com que el $\text{dom}f$ és un conjunt finit, hi ha $c, d \in \text{dom}f$ tals que per tot $a', a'' \in \text{dom}f$ tals que $a' < a < a''$: $a' \leq c < a < d \leq a''$. Llavors si $b \in R$ tal que $f(c) < b < f(d)$ (existeix un element tal perquè \mathbb{R} és un ordre dens), tenim que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \}$ és una isomorfia parcial finita de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Per tant hi ha $b \in R$ tal que $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$.

Cas3: $a \notin \text{dom}f$ i per tot $r \in P_{\omega_1}(R) \cap \text{dom}f$, $a \notin r$, contemplem els següents subcasos:

i) Per tot $a' \in \text{dom}f$, $a < a'$. Com que el recf és un conjunt finit, prenem el mínim d'aquest conjunt, diguem-li b' . Llavors si $b \in R$ tal que $b > b'$ i $b \notin \bigcup_{i \leq m} t_i$ (existeix un element tal perquè $|\{c \in R: c > b'\}| > \aleph_0$ i en canvi $\bigcup_{i \leq m} t_i$ és numerable), tenim que, per definició de F_j , $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. ii) Per tot $a' \in \text{dom}f$, $a > a'$. Com que el recf és un conjunt finit, prenem el màxim d'aquest conjunt, diguem-li b' . Llavors si $b \in R$ tal que $b > b'$ i $b \notin \bigcup_{i \leq m} t_i$ (existeix un element tal perquè $|\{c \in R: c < b'\}| > \aleph_0$ i en canvi $\bigcup_{i \leq m} t_i$ és numerable), tenim que, per definició de F_j , $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. iii) Hi ha $a', a'' \in \text{dom}f$ tals que $a' < a < a''$. Com que el $\text{dom}f$ és un conjunt finit, hi ha $c, d \in \text{dom}f$ tals que per tot $a', a'' \in \text{dom}f$ tals que $a' < a < a''$: $a' \leq c < a < d \leq a''$. Llavors si $b \in R$ tal que $f(c) < b < f(d)$ i $b \notin \bigcup_{i \leq m} t_i$ (existeix un element tal perquè $|\{x \in R: f(c) < x < f(d)\}| > \aleph_0$ i en canvi $\bigcup_{i \leq m} t_i$ és numerable), tenim que, per definició de F_j , $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$.

Cas 4: $a \notin \text{dom}f$ i hi ha $r \in P_{\omega_1}(R) \cap \text{dom}f$ tal que $a \in r$. Sigui r_1 el menor conjunt tal (existeix un tal perquè $\text{dom}f$ és un conjunt finit i els elements de $P_{\omega_1}(R) \cap \text{dom}f$ formen una

cadena respecte la inclusió). Contemplem de nou els subcasos següents: i) Per tot $a' \in \text{dom} f$, $a < a'$. Com que el $\text{rec} f$ és un conjunt finit, prenem el mínim d'aquest conjunt, diguem-li b' . Siguin $c, c' \in Q$ tals que $c < c' < b'$. Com que, per tot $j < i$, $Q \subseteq t_j$, per definició de F_k , hi ha $b \in B$ tal que $c < b < c'$ i per tot $j < i$, $b \in t_j$. Llavors tenim que, per definició de F_j , $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. ii) Per tot $a' \in \text{dom} f$, $a > a'$. Com que el $\text{rec} f$ és un conjunt finit, prenem el màxim d'aquest conjunt, diguem-li b' . Siguin $c, c' \in Q$ tals que $b' < c' < c$. Com que, per tot $j < i$, $Q \subseteq t_j$, per definició de F_k , hi ha $b \in B$ tal que $c' < b < c$ i per tot $j < i$, $b \in t_j$. Llavors tenim que, per definició de F_j , $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. iii) Hi ha $a', a'' \in \text{dom} f$ tals que $a' < a < a''$. Com que el $\text{dom} f$ és un conjunt finit, hi ha $c, d \in \text{dom} f$ tals que per tot $a', a'' \in \text{dom} f$ tals que $a' < a < a''$: $a' \leq c < a < d \leq a''$. Siguin $e, e' \in Q$ tals que $f(c) < e < e' < f(d)$. Com que, per tot $j < i$, $Q \subseteq t_j$, per definició de F_k , hi ha $b \in B$ tal que $e < b < e'$ i per tot $j < i$, $b \in t_j$. Llavors tenim que, per definició de F_j , $f \cup \{ \langle a, b \rangle \} \in F_j$. Així hem mostrat per casos que $(F_k: k \leq n)$ satisfà (4) i). Anàlogament es prova que satisfà (4) ii).

Mostrem ara que satisfà (4) iii): Suposem que $j < k$; $j, k \leq n$ i $f \in F_k$, $f = g \cup \{ \langle r_0, t_0 \rangle, \dots, \langle r_m, t_m \rangle \}$. Sigui $X = \cup_{i \leq m} r_i \cup \text{dom} g$ i sigui $X' = \cup_{i \leq m} t_i \cup \text{rec} g$. Sigui Y el conjunt resultant d'afegir a X , per cada $c, c' \in X$, un nombre irracional $i \notin X$, tal que $c < i < c'$ (podem fer-ho perquè el conjunt dels nombres irracionals és dens en \mathbb{R}). Anàlogament sigui Y' el conjunt resultant d'afegir a X' , per cada $c, c' \in X'$, un nombre irracional $i \notin X'$, tal que $c < i < c'$. Tenim que $Y, Y' \in P_{\omega_1}(\mathbb{R})$. Considerem ara els següents tancats i cofinals: $C = \{ r \in P_{\omega_1}(\mathbb{R}) : Y \subseteq r \}$ i $D = \{ t \in P_{\omega_1}(\mathbb{R}) : Y' \subseteq t \}$, per definició de F_j satisfan: $\forall r \in C, \forall t \in D [f \cup \{ \langle s, t \rangle \} \in F_j]$. Així tenim que $(F_k: k \leq n)$ és un sistema *back-and-forth* (L_{\aleph_n})-determinat de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Per tant \mathbb{R} és un model finitament determinat. ■

L'any 1978 M. Kaufmann, a la seva tesi doctoral *Some results in stationary logic*, mostra amb procediments de *back-and-forth* per estructures finitament determinades, els següents resultats sobre ordinals:

9.23. Proposició. Si α i β són ordinals finitament determinats, llavors $\alpha + \beta$ i $\alpha \cdot \beta$ són també ordinals finitament determinats.

Prova: Veure [8] pàgines 117-118. ■

9.24. Proposició. La classe X dels ordinals finitament determinats té les següents propietats:

- i) Si α és un ordinal tal que $\alpha \in X$, llavors per tot $\beta \in \alpha$, $\beta \in X$.
- ii) $\omega_1 \in X$.

Prova: Veure [8] pàgines 116-117. ■

Més endavant, l'any 1981, D.G.Seese, a l'article *Stationary Logic and Ordinals*, prova que tot ordinal és finitament determinat. Per concloure aquest capítol donarem aquesta prova. Enunciem primer un parell de resultats obtinguts per D.G.Seese en el seu article, també amb procediments *de back-and-forth* per estructures finitament determinades, i que són necessaris per a la prova que donarem a continuació:

9.25. Definició. Sigui A un ordre lineal. Si per cada $a \in A$, C_a és també un ordre lineal, diem *suma ordenada* a l'ordre lineal $\sum_A C_a$ que té per domini la unió disjunta $\cup_{a \in A} C_a$ i tal que $\langle \sum_A C_a = \cup_{a \in A} \langle C_a \cup \{ \langle c, d \rangle : \text{hi ha } a, b \in A \text{ tals que } a <^A b \text{ i } c \in C_a \text{ i } d \in C_b \} \rangle$.

9.26. Proposició. Fixem $n \in \omega$. Sigui A un ordre lineal finitament n -determinat. I per cada $a \in A$, sigui C_a també un ordre lineal finitament n -determinat. Suposem que per tot $a, b \in A$, $C_a \equiv_{L_{aa}^n} C_b$. Llavors, la suma ordenada $\sum_A C_a$, és un ordre lineal finitament n -determinat.

Prova: Veure [14] pàgines 116-120. ■

9.27. Proposició. Fixem $n \in \omega$. Sigui A un ordre lineal de cofinalitat ω amb primer element i amb la propietat que tota subestructura de A de la forma $([a, b], <^A)$, on $a, b \in A$, és finitament n -determinada. Llavors A és finitament n -determinat.

Prova: Veure [14] pàgina 120. ■

9.28. Teorema. Tots els ordinals són finitament determinats.

Prova: Suposem, buscant una contradicció, que hi ha un ordinal que no és finitament determinat. Sigui α el menor ordinal tal. Sigui $n \in \omega$ el menor natural tal que α no és finitament n -determinat. L'estructura $(\alpha, <)$ és un ordre lineal amb primer element. A més a més, per tot $\gamma, \beta \in \alpha$, la subestructura de $(\alpha, <)$, $I = ([\gamma, \beta], <)$ és finitament n -determinada. Mostrem-ho: Suposem el contrari, que hi ha $\gamma, \beta \in \alpha$ tals que $I = ([\gamma, \beta], <)$ no és finitament n -determinada. Llavors, per definició d'estructura finitament n -determinada, hi ha una sentència $\phi \in L_{aa}(\{<\})$ tal que $qr(\phi) \leq n$, $\phi = \forall x \exists y [\text{stats } \psi \rightarrow aax\psi]$ per alguna $\psi \in L_{aa}(\{<\})$ i $I \models \phi$. Ampliem el llenguatge afegint una constant γ . Tenim que $(I, \gamma) \models \phi$. Llavors, per la Proposició II.5. de l'Apèndix II:⁹

$$(\beta, <, \gamma) \models \phi^{x \geq \gamma}$$

Però llavors, per definició de $\phi^{x \geq \gamma}$ (Definició II.4. de l'Apèndix II):

⁹ $\phi^{x \geq \gamma}$ és la relativització de ϕ a $x \geq \gamma$.

$$(\beta, <, \gamma) \neq \text{aa } \overline{\forall x \geq \gamma} [\text{stats}\psi^{x \geq \gamma} \rightarrow \text{aas}\psi^{x \geq \gamma}]$$

Per tant, per Lògica de Primer Ordre, tenim que:

$$(\beta, <, \gamma) \neq \text{aa } \overline{\forall x} [\text{stats}\psi^{x \geq \gamma} \rightarrow \text{aas}\psi^{x \geq \gamma}]$$

Però observem que, per definició de $\phi^{x \geq \gamma}$, $qr(\psi) = qr(\psi^{x \geq \gamma})$. Per tant $(\beta, <, \gamma)$ no és finitament n-determinada. Però llavors, pel Lema 9.7., $(\beta, <)$ tampoc no és finitament n+1-determinada. Absurd, perquè hem suposat que tot ordinal menor que α era finitament determinat. Així per la Proposició 9.27. tenim que la cofinalitat de α no és ω .

α no és un ordinal successor. Perquè si $\alpha = \beta + 1$, per algun ordinal β , per tal com hem escollit α , els ordinals β i 1 serien finitament determinats. Per tant, per la Proposició 9.23., α també ho seria, contradint el nostre supòsit. Així doncs, la cofinalitat de α és més gran que ω . A més a més, α està tancat sota +. Suposem, buscant una contradicció, que hi hagués $\gamma, \beta \in \alpha$ tals que $\gamma + \beta \geq \alpha$. Per elecció de α , γ i β serien finitament n-determinats. Per tant, per la Proposició 9.23., l'ordinal $\gamma + \beta$ també ho seria. Llavors, per la Proposició 9.24. i), α seria també finitament n-determinat, contradint els nostre supòsit. Per tant α està tancat sota +. Considerem ara el següent subconjunt de α , $X = \{\beta < \alpha : \beta \text{ està tancat sota } +\}$. X és cofinal en $(\alpha, <)$. Mostrem-ho: Suposem que $\gamma < \alpha$. Considerem la funció $f_\gamma: \alpha \rightarrow \alpha$ que definim a continuació:

$$\text{Per tot } \lambda < \alpha, f_\gamma(\lambda) = \gamma + \lambda.$$

f_γ és una funció normal. Definim per recursió $h: \omega \rightarrow \alpha$ de la següent manera,

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(n+1) &= f_\gamma(h(n)) + 1 \end{aligned}$$

Sigui β la $\bigcup_{n \in \omega} h(n)$. Per definició de h , tenim que $\gamma < \beta$. A més a més, $\beta \in X$, doncs si $\delta, \delta' < \beta$, llavors $\delta + \delta' < \beta$. Provem-ho: Suposem que $\delta, \delta' < \beta$. Per definició de h , hi ha $k, k' \in \omega - \{0\}$ tals que $\delta < h(k)$ i $\delta' < h(k')$. Observem que, per definició de h , per cada $n \in \omega$: $h(n) = (\gamma \cdot n) + n$. Per tant:

$$\delta + \delta' < [(\gamma \cdot k) + k] + [(\gamma \cdot k') + k'] \leq [\gamma \cdot (k+k') + (k+k')] = h(k+k') \leq \beta.$$

Així per tot $\gamma < \alpha$, hi ha $\beta \in X$ tal que $\gamma < \beta$. X és doncs un conjunt cofinal en $(\alpha, <)$. Definim ara la següent relació d'equivalència, E , en X : Per tot $\gamma, \beta \in X$, $\gamma E \beta$ sii $(\gamma, <) \equiv_{Laa}^n (\beta, <)$. Per

l'Observació 9.10., hi ha (llevat de L_{aa} -equivalència) un nombre finit de sentències de $L_{aa}(\{<\})$ que tenen rang quantificacional $\leq n$. Per tant, la partició associada a E té només un nombre finit d'elements. Així hi ha una classe d'equivalència, diguem-li Y , d'aquesta partició, que és cofinal en $(\alpha, <)$. Altrament X no seria cofinal en $(\alpha, <)$. Sigui σ una sentència n -completa de $L_{aa}(\{<\})$ tal que per tot $\beta \in Y$, $(\beta, <)|=\sigma$. Per definició de X , per tot $\beta \in Y$, β està tancat sota $+$. Així per tot $\beta \in Y$, $(\alpha, <, +)|=\forall x' \forall y' (x' < y \wedge y' < y \rightarrow x' + y' < y)[\beta]$. I com que per tot $\beta \in Y$, $(\beta, <)|=\sigma$, per la Proposició II.5. de l'Apèndix II, per tot $\beta \in Y$: $(\alpha, <, +)|=\sigma^{z < y}[\beta]$. Així, afegint a aquests dos darrers resultats el fet que Y és un conjunt cofinal en $(\alpha, <)$ tenim que:

$$(\alpha, <, +)|=\forall x \exists y [x < y \wedge \sigma^{z < y} \wedge \forall x' \forall y' (x' < y \wedge y' < y \rightarrow x' + y' < y)]$$

Considerem ara $\text{Th}(\alpha, <, +)$ ¹⁰. Pel Teorema de Completesa per L_{aa} hi ha un model d'aquesta teoria, $C=(C, <^c, +^c)$, que té cardinalitat ω_1 . Llavors:

$$C|=\forall x \exists y [x < y \wedge \sigma^{z < y} \wedge \forall x' \forall y' (x' < y \wedge y' < y \rightarrow x' + y' < y)]$$

Així el conjunt $S=\{c \in C: (I_c, <^c) \text{ està tancat sota } +^c \text{ i } (I_c, <^c)|=\sigma\}$ ¹¹ és cofinal en C . En el llenguatge dels ordres lineals de la Lògica de Primer Ordre podem expressar que un ordre té un darrer element. Ho fem mitjançant la sentència $\phi=\exists x \forall y (y \leq x)$. I en el llenguatge dels ordres lineals de L_{aa} podem expressar que un ordre té cofinalitat ω . Podem fer-ho per mitjà de la sentència $\psi=\text{aas} \forall x \exists y (y \in s \wedge x \leq y)$ ¹². Així, per ser α un ordinal límit de cofinalitat major que ω , $(\alpha, <, +)|=\neg \phi \wedge \neg \psi$. Per tant, com que $C \equiv_{L_{aa}} (\alpha, <, +)$, tindrem que $C|=\neg \phi \wedge \neg \psi$. Així doncs, C és un ordre sense darrer element, de cofinalitat major que ω . Però llavors, com que la cardinalitat de C és ω_1 , la seva cofinalitat serà també ω_1 . Això ens permet prendre una successió $(s_\beta: \beta < \omega_1)$ d'elements de S estrictament creixent i cofinal en C . I així:

$$(C, <^c) \cong \sum_{(\omega_1, <)} ([s_\beta, s_{\beta+1}), <^c)$$

A més a més, per definició de S , per cada $\beta \in \omega_1$, $s_{\beta+1}$ està tancat sota $+$. Així per cada $\beta \in \omega_1$:

$$(I_{s_{\beta+1}}, <^c) \cong ([s_\beta, s_{\beta+1}), <^c)$$

Ja que la funció $h: I_{s_{\beta+1}} \rightarrow [s_\beta, s_{\beta+1})$ així definida: per tot $x \in I_{s_{\beta+1}}$ $h(x)=s_\beta +^c x$,

¹⁰ On $\text{Th}(\alpha, <, +)$ és el conjunt de totes les sentències del llenguatge de L_{aa} de tipus $\{<, +\}$ vertaderes en el model $(\alpha, <, +)$.

¹¹ On, per cada $c \in C$, $I_c = \{x \in C: x <^c c\}$

¹² Veure l'Observació 2.15.

és una isomorfia entre aquestes dues estructures. Per tant:

$$(C, <^c) \cong \sum_{(\omega_1, <)} (I_{s_\beta}, s_{\beta+1}), <^c) \cong \sum_{(\omega_1, <)} (I_{s_{\beta+1}}, <^c)$$

I per cada $\gamma, \beta \in \omega_1$, per definició de S , $(I_{s_{\gamma+1}}, <^c) \models \sigma$ i $(I_{s_{\beta+1}}, <^c) \models \sigma$. Per tant, per ser σ una sentència n -completa i com que per tot $\delta \in Y$, $(\delta, <) \models \sigma$, per tot $\gamma, \beta \in \omega_1$:

$$(I_{s_{\gamma+1}}, <^c) \equiv_{L_{aa}^n} (\delta, <) \equiv_{L_{aa}^n} (I_{s_{\beta+1}}, <^c)$$

Així, com que per tot $\delta \in Y$ $(\delta, <)$ és finitament n -determinat, per tot $\gamma, \beta \in \omega_1$ també ho seran $(I_{s_{\gamma+1}}, <^c)$ i $(I_{s_{\beta+1}}, <^c)$. Per tant, sent ω_1 un ordre lineal finitament n -determinat (Proposició 9.24.), per la Proposició 9.26., tenim que $\sum_{(\omega_1, <)} (I_{s_{\beta+1}}, <^c)$ és finitament n -determinat. Per tant $(C, <^c)$ és finitament n -determinat. Però com que $(C, <^c) \equiv_{L_{aa}} (\alpha, <)$, tindrem que $(\alpha, <)$ serà també finitament n -determinat. Absurd. Hem arribat a una contradicció. Podem concloure, doncs, el contrari del que havíem suposat: Tots els ordinals són finitament determinats. ■

Apèndix I

En aquest apèndix voldria presentar de manera sistemàtica, recollint alguns resultats anteriors, el comportament dels quantificadors introduïts, *aa* i *stat*, respecte els símbols lògics \wedge , \vee , \rightarrow , \exists , \forall :

\wedge : Tenim que:

- | | |
|--|---------------------------|
| (1) $\vdash \text{aas}(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \text{aas}\phi \wedge \text{aas}\psi$ | (Per A.3 i el Lema 3.26.) |
| (2) $\vdash \text{stats}(\phi \wedge \psi) \rightarrow \text{stats}\phi \wedge \text{stats}\psi$ | (Pel Lema 3.15.) |

Però en canvi $\not\vdash \text{stats}\phi \wedge \text{stats}\psi \rightarrow \text{stats}(\phi \wedge \psi)$. Mostrem-ho: Partim ω_1 en dos conjunts estacionaris, E^{ω_1} i F^{ω_1} . Considerem el model $\omega_1 = (\omega_1, \epsilon, E^{\omega_1}, F^{\omega_1})$. Si $\phi = \exists y [\forall x (s(x) \leftrightarrow x \in y) \wedge E(y)]$ i $\psi = \exists y [\forall x (s(x) \leftrightarrow x \in y) \wedge F(y)]$, tenim que $\omega_1 \models \text{stats}\phi \wedge \text{stats}\psi$, però $\omega_1 \not\models \text{stats}(\phi \wedge \psi)$.

\vee : Fent contrapositius als resultats obtinguts per \wedge obtenim:

- | | |
|--|---------------------------|
| (3) $\vdash \text{aas}\phi \vee \text{aas}\psi \rightarrow \text{aas}(\phi \vee \psi)$ | (Pel Lema 3.15.) |
| (4) $\vdash \text{stats}(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \text{stats}\phi \vee \text{stats}\psi$ | (Per A.3 i el Lema 3.26.) |

Però en canvi $\not\vdash \text{aas}(\phi \vee \psi) \rightarrow \text{aas}\phi \vee \text{aas}\psi$. Ens serveix com a contraexemple el mateix que en el cas \vee ens ha servit per mostrar que $\not\vdash \text{stats}\phi \wedge \text{stats}\psi \rightarrow \text{stats}(\phi \wedge \psi)$.

\rightarrow : Tenim els següents resultats:

- | | |
|--|-----------|
| (5) $\vdash \text{aas}(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\text{aas}\phi \rightarrow \text{aas}\psi)$ | (Per A.4) |
| (6) $\vdash (\text{stats}\phi \rightarrow \text{stats}\psi) \rightarrow \text{stats}(\phi \rightarrow \psi)$ | |

Prova:

$\vdash (\text{stats}\phi \rightarrow \text{stats}\psi) \rightarrow \neg \text{stats}\phi \vee \text{stats}\psi$	(Per Lògica Proposicional)
$\vdash (\text{stats}\phi \rightarrow \text{stats}\psi) \rightarrow \text{aas}\neg\phi \vee \text{stats}\psi$	(Definició 2.2.)
$\vdash (\text{stats}\phi \rightarrow \text{stats}\psi) \rightarrow \text{stats}\neg\phi \vee \text{stats}\psi$	(Lema 3.21.)
$\vdash (\text{stats}\phi \rightarrow \text{stats}\psi) \rightarrow \text{stats}(\neg\phi \vee \psi)$	(Per (4) d'aquest apèndix)
$\vdash (\text{stats}\phi \rightarrow \text{stats}\psi) \rightarrow \text{stats}(\phi \rightarrow \psi)$	(Per Lògica Proposicional) ■

Però en canvi $\not\vdash (aas\phi \rightarrow aas\psi) \rightarrow aas(\phi \rightarrow \psi)$. Ens serveix com a contraexemple el mateix que en el cas \vee ens ha servit per mostrar que $\not\vdash stats\phi \wedge stats\psi \rightarrow stats(\phi \wedge \psi)$. I tenim també que $\not\vdash stats(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (stats\phi \rightarrow stats\psi)$. Mostrem-ho: Partim ω_1 en dos conjunts estacionaris, E^{ω_1} i F^{ω_1} . Considerem el model $\omega_1' = (\omega_1, \epsilon, E^{\omega_1}, \omega)$. Si $\phi = \exists y[\forall x(s(x) \leftrightarrow x \in y) \wedge E(y)]$ i $\psi = \forall x(s(x) \leftrightarrow x \in \omega)$, tenim que $\omega_1' \models stats(\phi \rightarrow \psi)$ i $\omega_1' \models stats\phi$, però $\omega_1' \not\models stats\psi$.

\exists : Tenim que:

$$(7) \vdash \exists x aas\phi(x, s) \rightarrow aas\exists x\phi(x, s)$$

Prova: Sigui c una constant que no ocorre en $\phi(x, s)$, tenim que per Lògica de Primer Ordre, $\vdash \phi(c, s) \rightarrow \exists x\phi(x, s)$. Per tant pel Lema 3.14, $\vdash aas\phi(c, s) \rightarrow aas\exists x\phi(x, s)$. Així com que c no ocorre en $\phi(x, s)$, pel Lema 5.8. i el Teorema de la Deducció, $\vdash \exists x aas\phi(x, s) \rightarrow aas\exists x\phi(x, s)$. ■

$$(8) \vdash stats\exists x \in s\phi(x, s) \leftrightarrow \exists x stats\phi(x, s) \quad (\text{Contrapositiu del Lema 3.22.})$$

Però en canvi $\not\vdash aas\exists x\phi(x, s) \rightarrow \exists x aas\phi(x, s)$. Mostrem-ho: Sigui A una estructura no numerable qualsevol. Sigui $\phi(x, s) = \neg s(x)$. Llavors $A \models aas\exists x\phi(x, s)$, però $A \not\models \exists x aas\phi(x, s)$. I tenim que $\not\vdash stats\exists x\phi(x, s) \rightarrow \exists x stats\phi(x, s)$ i per mostrar-ho prenem també A no numerable i $\phi(x, s) = \neg s(x)$.

\forall : Tenim que:

$$(9) \vdash \forall x aas\phi(x, s) \leftrightarrow aas\forall x \in s\phi(x, s) \quad (\text{Pel Lema 3.22})$$

$$(10) \vdash stats\forall x\phi(x, s) \rightarrow \forall x stats\phi(x, s) \quad (\text{Contrapositiu a (7) d'aquest apèndix})$$

Però en canvi $\not\vdash \forall x aas\phi(x, s) \rightarrow aas\forall x\phi(x, s)$. Mostrem-ho: Sigui A una estructura no numerable qualsevol. Sigui $\phi(x, s) = s(x)$. Llavors $A \models \forall x aas\phi(x, s)$, però $A \not\models aas\forall x\phi(x, s)$. I tenim que $\not\vdash \forall x stats\phi(x, s) \rightarrow stats\forall x\phi(x, s)$ i, per mostrar-ho, podem prendre també A no numerable i $\phi(x, s) = s(x)$. Finalment tenim que $\not\vdash \forall x stats\phi(x, s) \rightarrow stats\forall x \in s\phi(x, s)$. Per mostrar-ho partim ω_1 en dos conjunts estacionaris, E^{ω_1} i F^{ω_1} . Considerem el model $\omega_1 = (\omega_1, \epsilon, E^{\omega_1}, F^{\omega_1})$. Si $\phi(x, s) = \exists y[\forall z(s(z) \leftrightarrow z \in y) \wedge E(y)] \leftrightarrow E(x)$. Així tenim que $\omega_1 \models \forall x stats\phi(x, s)$, però $\omega_1 \not\models stats\forall x \in s\phi(x, s)$.

Per últim veiem quin comportament tenen *aa* i *stat* entre ells. Tenim que, per $i \neq j$:

$$\begin{aligned} &\not\models_{aa;aa} \phi(s_i, s_j) \rightarrow aa;aa; \phi(s_i, s_j) \\ &\not\models_{stat;stat} \phi(s_i, s_j) \rightarrow stat;stat; \phi(s_i, s_j) \\ &\not\models_{stat;aa} \phi(s_i, s_j) \rightarrow aa;stat; \phi(s_i, s_j) \\ &\not\models_{aa;stat} \phi(s_i, s_j) \rightarrow stat;aa; \phi(s_i, s_j) \end{aligned}$$

Com a contraexemple, per les quatre, prenem una estructura **A** no numerable qualsevol i $\phi(s_i, s_j) = s_i \subseteq s_j$. ■

Apèndix II

En aquest apèndix mostrarem que L_{aa} és un sistema lògic ¹ regular.

II.1. Definició. Diem que un sistema lògic L és regular si té les següents propietats:

1. **Boole(L)** ("L està tancat sota connectives booleanes"):

a) Donat un tipus de semblança τ i una sentència $\sigma \in L(\tau)$, hi ha una sentència $\varphi \in L(\tau)$ tal que: Per tota estructura A de tipus τ , $A \models_L \varphi$ sii $A \neq_L \sigma$.

b) Donat un tipus de semblança τ i sentències σ i ϕ de $L(\tau)$, hi ha una sentència $\varphi \in L(\tau)$ tal que: Per tota estructura A de tipus τ , $A \models_L \varphi$ sii $A \models_L \sigma$ o $A \models_L \phi$.

2. **Rel(L)** ("L permet relativització"):

Sigui τ un tipus de semblança, σ una sentència de $L(\tau)$ i U un símbol predicatiu.

Llavors, per tota estructura A de tipus τ , per tot $U^A \subseteq A$ domini d'una subestructura U^A de A , hi ha una sentència φ de tipus $\tau \cup \{U\}$ tal que: $(A, U^A) \models_L \varphi$ sii $U^A \models_L \sigma$.

3. **Elim(L)** ("L permet eliminació de símbols funcionals i constants"):

Fixat un tipus de semblança τ , per tota sentència σ de $L(\tau)$, hi ha una sentència $\varphi \in L(\tau^r)$ ² tal que: Per tota estructura A de tipus τ , $A \models_L \varphi$ sii $A^r \models_L \sigma$.

El sistema lògic L_{aa} està clarament tancat sota connectives booleanes. I la prova que L_{aa} permet eliminació de símbols funcionals i constants, és anàloga a la prova que la Lògica de Primer Ordre té aquesta propietat i no presenta cap dificultat especial ³. Mostrem a continuació que L_{aa} permet relativització:

¹ Un sistema lògic L consta d'una funció L (que associa a cada tipus de semblança τ el conjunt de sentències de L de tipus τ) i d'una relació binària \models_L (que relaciona estructures i sentències del mateix tipus).

² **Notació:** τ^r és el tipus relacional associat a τ . El tipus τ^r , a més a més dels símbols relacionals de τ , consta d'un símbol relacional $n+1$ -ari, F , per cada símbol funcional n -ari $f \in \tau$. I d'un símbol relacional unari, C , per cada constant individual $c \in \tau$. I A^r és l'estructura de tipus τ^r associada a A : (1) El domini de A^r és A . (2) Per cada símbol relacional $P \in \tau$, $P^{A^r} = P^A$. (3) Per tot símbol funcional $f \in \tau$ n -ari, F^{A^r} és la relació associada a la funció f^A , és a dir: $F^{A^r} a_0 \dots a_{n-1} a_n$ sii $f^A a_0 \dots a_{n-1} = a_n$. (4) Per tota constant individual $c \in \tau$, C^{A^r} és la relació unària associada a l'element c^A , és a dir: $C^{A^r} a$ sii $c^A = a$.

³ Veure [3] Capítol VIII, pàgines 115-122.

II.2. Lema. Sigui A un conjunt qualsevol i $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$. Si $X \in \mathcal{F}(A)$, llavors el conjunt $\{s \cap B : s \in X\} \in \mathcal{F}(B)$.

Prova: Sigui A un conjunt qualsevol i $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$. Suposem que $X \in \mathcal{F}(A)$. Per la Proposició 1.27., hi ha una col.lecció $\mathcal{R} = \{f_n : n \in \omega\}$ que satisfà:

$$(*) \text{ Per cada } n \in \omega, f_n : A^{n+1} \rightarrow A \text{ i per tota successió d'elements de } A, \langle a_n : n \in \omega \rangle, \\ \{a_n : n \in \omega\} \cup \{f_n(a_0 \dots a_n) : n \in \omega\} \in X.$$

Considerem la col.lecció $\mathcal{R}' = \{f'_n : n \in \omega\}$ que definim a continuació: Per tot $n \in \omega$, $f'_n : B^{n+1} \rightarrow B$ i per tota successió d'elements de B , $b_0 \dots b_n$,

$$f'_n(b_0 \dots b_n) = \begin{cases} f_n(b_0 \dots b_n) & , \text{ si } f_n(b_0 \dots b_n) \in B \\ b_n & , \text{ altrament} \end{cases}$$

Si $T = \{t \in P_{\omega_1}(B) : t \text{ està tancat sota les funcions de } \mathcal{R}'\}$, com que \mathcal{R}' és una família numerable de funcions finitàries en B , pel Lema 1.26., T és un conjunt tancat i cofinal en $P_{\omega_1}(B)$. I $T \subseteq \{s \cap B : s \in X\}$, mostrem-ho: Suposem que $t \in T$. Sigui $\langle b_n : n \in \omega \rangle$ una enumeració dels elements de t . Com que la col.lecció \mathcal{R} té la propietat (*), el conjunt $s = t \cup \{f_n(b_0 \dots b_n) : b_0 \dots b_n \in t, n \in \omega\}$ pertany a X . I $s \cap B = t$, provem-ho: Clarament $t \subseteq s \cap B$. I si $y \in s \cap B$, per definició de s , o bé $y \in t$ i en aquest cas no hi ha res a mostrar, o bé $y = f_n(b_0 \dots b_n)$ per $b_0 \dots b_n \in t$. En aquest segon cas, com que $y \in B$, considerant ara la funció f'_n , per definició de f'_n , tenim que $f'_n(b_0 \dots b_n) = f_n(b_0 \dots b_n) = y$. I així, com que t està tancat sota les funcions de \mathcal{R}' , $y \in t$. Així tenim que $\{s \cap B : s \in X\}$ inclou un tancat i cofinal en $P_{\omega_1}(B)$, per tant $\{s \cap B : s \in X\} \in \mathcal{F}(B)$. ■

II.3. Lema. Sigui A un conjunt qualsevol i $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$. Si $Y \in \mathcal{F}(B)$, llavors el conjunt $Y' = \{r \in P_{\omega_1}(A) : r \cap B \in Y\} \in \mathcal{F}(A)$.

Prova: Suposem que A és un conjunt qualsevol, $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ i $Y \in \mathcal{F}(B)$. Sigui X un conjunt tancat i cofinal inclòs en Y . Mostrem que $X' = \{r \in P_{\omega_1}(A) : r \cap B \in X\}$ és un conjunt tancat i cofinal: i) X' és un conjunt tancat: Sigui $\langle r_n : n \in \omega \rangle$ una cadena numerable d'elements de X' . Llavors $\langle r_n \cap B : n \in \omega \rangle$ és una cadena d'elements de X . Així per ser X un conjunt tancat $\bigcup_{n \in \omega} (r_n \cap B) = (\bigcup_{n \in \omega} r_n) \cap B \in X$. Així per definició de X' , $\bigcup_{n \in \omega} r_n \in X'$. ii) X' és un conjunt cofinal: Suposem que $t \in P_{\omega_1}(A)$. Considerem $t \cap B$. Per ser X un conjunt cofinal hi ha $s \in X$ tal que $t \cap B \subseteq s$, llavors $(t \cup s) \cap B = s \in X$. Per tant, per definició de X' , $t \cup s \in X'$ i $t \subseteq t \cup s$. Així X' és un conjunt tancat i cofinal inclòs en $Y' = \{r \in P_{\omega_1}(A) : r \cap B \in Y\}$. Per tant $Y' \in \mathcal{F}(A)$. ■

II.4. Definició. Fixem un tipus de semblança τ . Sigui $\psi(y)$ una fórmula de $L_{aa}(\tau)$. Per tota fórmula $\phi \in L_{aa}(\tau)$, definim per inducció sobre la complexitat de ϕ , ϕ^ψ , la relativització de ϕ a ψ :

$$\begin{aligned} (s(x))^\psi &= s(x) \wedge \psi(x) & \text{i } \phi^\psi &= \phi, \text{ per tota altra fórmula atòmica.} \\ (\neg\phi)^\psi &= \neg\phi^\psi \\ (\phi \vee \varphi)^\psi &= \phi^\psi \vee \varphi^\psi \\ (\exists x\phi)^\psi &= \exists x(\psi(x) \wedge \phi^\psi) \\ (aas\phi)^\psi &= aas\phi^\psi. \end{aligned}$$

II.5. Proposició. Fixem un tipus de semblança τ . Sigui A una estructura de tipus τ , $\psi(y) \in L_{aa}(\tau)$ i $B = \{a \in A : A \models \psi[a]\}$ el domini d'una subestructura B de A . Llavors, per tota $\phi(x_0 \dots x_k, s_0 \dots s_m) \in L_{aa}$, per tota successió $a_0 \dots a_k$ d'elements de B , per tota successió $r_0 \dots r_m$ d'elements de $P_{\omega_1}(A)$:

$$(*) A \models \phi^\psi[a, r] \quad \text{sii} \quad B \models \phi[a, r \cap B]^4$$

Prova: Ho mostrarem per inducció sobre la complexitat de ϕ :

i) ϕ atòmica:

$$\begin{aligned} A \models s_i(x_j)^\psi[a, r] & \quad \text{sii} \quad A \models s_i(x_j) \wedge \psi(x_j)[a, r] & \quad \text{(per la Definició II.4.)} \\ & \quad \text{sii} \quad a_j \in r_i \text{ i } a_j \in B \\ & \quad \text{sii} \quad a_j \in r_i \cap B \\ & \quad \text{sii} \quad B \models s_i(x_j)[a, r \cap B] \end{aligned}$$

I per tota altra fórmula atòmica ϕ :

$$\begin{aligned} A \models \phi^\psi[a, r] & \quad \text{sii} \quad A \models \phi[a, r] & \quad \text{(per la Definició II.4.)} \\ & \quad \text{sii} \quad A \models \phi[a, r \cap B] & \quad \text{(perquè } \phi \text{ no té variables} \\ & & \quad \text{predicatives)} \\ & \quad \text{sii} \quad B \models \phi[a, r \cap B] & \quad \text{(perquè } B \subset A \text{)}^5 \end{aligned}$$

ii) Suposem inductivament que ϕ i φ satisfan (*), llavors:

$$\begin{aligned} A \models (\neg\phi)^\psi[a, r] & \quad \text{sii} \quad A \models \neg\phi^\psi[a, r] & \quad \text{(per la Definició II.4.)} \\ & \quad \text{sii} \quad A \not\models \phi^\psi[a, r] \\ & \quad \text{sii} \quad B \not\models \phi[a, r \cap B] & \quad \text{(per supòsit inductiu)} \\ & \quad \text{sii} \quad B \models \neg\phi[a, r \cap B] \end{aligned}$$

⁴ On a abreuja la successió $a_0 \dots a_k$, r abreuja la successió $r_0 \dots r_m$ i $r \cap B$ abreuja la successió $r_0 \cap B, \dots, r_m \cap B$.

⁵ B és una subestructura de A .

Apèndix III

En aquest apèndix considerarem un tipus especial de fórmules, $\phi(s)$, dels llenguatges de la lògica L_{aa} . Aquestes fórmules tenen la propietat que en tota estructura és vertadera la sentència $aaS\phi(s) \leftrightarrow stats\phi(s)$.

Fixat un tipus de semblança τ , sigui X el menor subconjunt de $L_{aa}(\tau)$ que inclou $\{\psi \in L_{aa}(\tau) : \psi \text{ és atòmica o } \psi = \neg\phi \text{ per alguna } \phi \in L_{aa}(\tau) \text{ atòmica}\}$ i que està tancat sota $\vee, \wedge, \exists x, \forall x$ (per cada variable x de primer ordre) i sota els quantificadors aaS i $stats$ (per cada variable s de segon ordre). Fixem-nos que $s(t)$ i $\neg s(t)$ són fórmules de X però en canvi $\neg\neg s(t)$ i $\neg\neg\neg s(t)$ no ho són perquè el conjunt X no està tancat sota negacions. Observem que, per la Definició 2.2. i per Lògica de Primer Ordre, per tota $\phi \in L_{aa}(\tau)$, hi ha $\psi \in X$ tal que $\models_{L_{aa}} \phi \leftrightarrow \psi$.

III.1. Definició. Diem que una variable predicativa s *ocorre només positivament* en $\psi \in X$ si no hi ha cap terme t , del llenguatge $L_{aa}(\tau)$, tal que $\neg s(t)$ ocorri en ψ .

III.2. Definició. Suposem que $\phi \in L_{aa}(\tau)$. Diem que una variable predicativa s *ocorre només positivament* en ϕ si hi ha $\psi \in X$ tal que $\models_{L_{aa}} \phi \leftrightarrow \psi$ i s ocorre només positivament en ψ .

III.3. Lema. Si s és una variable predicativa que ocorre només positivament en $\phi(s)$, per tota estructura A de tipus τ , per tot $t \in P_{\omega_1}(A)$: (*) Si $A \models_{L_{aa}} \phi[t]$, llavors per tot $t' \in P_{\omega_1}(A)$ tal que $t \subseteq t'$, $A \models_{L_{aa}} \phi[t']$.

Prova: En tenim prou amb mostrar que per tota fórmula $\psi \in X$, on s ocorre només positivament, es compleix (*). Podem mostrar-ho per inducció en X . La prova no presenta cap dificultat especial.

III.4. Proposició. Si s és una variable predicativa que ocorre només positivament en $\phi(s)$, per tota estructura A de tipus τ : $A \models_{L_{aa}} aas\phi(s)$ sii Hi ha $t \in P_{\omega_1}(A)$ tal que $A \models_{L_{aa}} \phi[t]$ sii $A \models_{L_{aa}} stats\phi(s)$.

Prova: D'una banda, tenim que: $A \models_{L_{aa}} aas\phi(s)$ sii Hi ha $t \in P_{\omega_1}(A)$ tal que $A \models_{L_{aa}} \phi[t]$. El condicional en el sentit \Leftarrow) es dona pel Lema III.3. i perquè $\{t' \in P_{\omega_1}(A) : t \subseteq t'\} \in \mathcal{F}(A)$. I el condicional en el sentit \Rightarrow) perquè $\emptyset \notin \mathcal{F}(A)$. D'altra banda, tenim que: Hi ha $t \in P_{\omega_1}(A)$ tal que $A \models_{L_{aa}} \phi[t]$ sii $A \models_{L_{aa}} stats\phi(s)$. El condicional en el sentit \Rightarrow) es dona pel Lema III.3. i perquè $\{t' \in P_{\omega_1}(A) : t \subseteq t'\}$ és estacionari. I el condicional en el sentit \Leftarrow) perquè \emptyset no és un conjunt estacionari. ■

III.5. Definició. Suposem que $\phi \in L_{aa}(\tau)$. Diem que una variable predicativa s *ocorre només negativament en ϕ* si s ocorre només positivament en $\neg\phi$.

III.6. Proposició. Per tota $\phi(s) \in L_{aa}(\tau)$, si s ocorre només negativament en $\phi(s)$, llavors per tota estructura A de tipus τ : $A \models_{L_{aa}} \text{stats}\phi(s)$ sii Per tot $t \in P_{\omega_1}(A)$, $A \models_{L_{aa}} \phi[t]$.

Prova: $A \models_{L_{aa}} \text{stats}\phi(s)$ sii $A \not\models_{L_{aa}} \text{aas}\neg\phi(s)$
 sii No hi ha $t \in P_{\omega_1}(A)$ tal que $A \models_{L_{aa}} \neg\phi[t]$
 (Per la Proposició III.4. i la Definició III.5.)
 sii Per tot $t \in P_{\omega_1}(A)$, $A \models_{L_{aa}} \phi[t]$. ■

III.7. Corol.lari. Per tota $\phi(s) \in L_{aa}(\tau)$, si s ocorre només negativament en $\phi(s)$, llavors per tota estructura A de tipus τ : $A \models_{L_{aa}} \text{stats}\phi(s)$ sii $A \models_{L_{aa}} \text{aas}\phi(s)$.

Prova: \Leftarrow) Pel Lema 3.21. \Rightarrow) Per la Proposició III.6. ■

BIBLIOGRAFIA

- [1]. Barwise, K.J., Kaufmann, M., Makkai, M.: *Stationary Logic*. Annals of Mathematical Logic 13, (1978) pp. 171-224.
- [2]. Barwise, K.J., Kaufmann, M., Makkai, M.: *A correction to "Stationary Logic"*. Annals of Mathematical Logic 20, (1981) pp. 231-232.
- [3]. Ebbinghaus, H.D., Flum, J., Thomas, W.: *Mathematical Logic*. Springer-Verlag. New York. (1984).
- [4]. Eklof, P.C.; Mekler, A.H.: *Stationary Logic of Finitely Determinate Structures*. Annals of Mathematical Logic 17, (1979) pp. 227-270.
- [5]. Enderton, H.B.: *A mathematical introduction to logic*. Academic Press. New York. (1972).
- [6]. Jech, T.: *Set Theory*. Academic Press. New York. (1978).
- [7]. Jech, T.J.: *Trees*. The Journal of Symbolic Logic, (1971) pp. 1-14.
- [8]. Kaufmann, M.: *Some results in stationary logic*. Ph.D. Dissertation. University of Wisconsin- Madison. (1978).
- [9]. Kaufmann, M.: *The quantifier "There exist uncountably many" and some of its relatives*. Al llibre: Barwise, J., Feferman, S. (editors): Model-theoretic logics. Berlin. Springer-Verlag. (1985). Capítol IV.
- [10]. Keisler, H.J.: *Logic with the quantifier "There exist uncountably many"*. Annals of Mathematical Logic 1, (1970) pp. 1-93.
- [11]. Kueker, W.: *Countable approximations and Löwenheim-Skolem theorems*. Annals of Mathematical Logic 11, (1977) pp. 57-103.

- [12]. Makowsky, J.A., Shelah, S.: *The theorems of Beth and Craig in abstract model theory II. Compact Logics*. Archive für Math. Logik 21, (1980) pp. 13-36.
- [13]. Mekler, A.H.: *Classification Theory and Stationary Logic*. Can. J. Math. XXXIX, No.4, (1987) pp. 893-907.
- [14]. Seese, D.G.: *Stationary Logic and ordinals*. Transactions of the American Mathematical Society 263, (1981) pp. 111-124.
- [15]. Shelah, S.: *Generalized quantifiers and compact logic*. Transactions of the American Mathematical Society 204, (1975) pp. 342-364.
- [16]. Shelah, S.: *On models with power-like orderings*. J. Symbolic Logic 37, (1972) pp. 247-267.
- [17]. Sundholm, G.: *Systems of Deduction*. Al llibre Gabbay, D., Guentner, F. (editors): *Handbook of Philosophical Logic, Vol I*. D. Reidel Publishing Company. (1983). Capítol 1.2.

