UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL TEOREMA DE COMPLETESA DE LA LÒGICA INFINITVALORADA DE ŁUKASIEWICZ

Autora: Mar Santiago Aiguadé

Director: Dr. Joan Gispert Brasó
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 15 de gener de 2026

Agraïments

Vull expressar el meu més sincer agraïment al meu tutor, el Dr. Joan Gispert, per la seva proposta i, sobretot, pel seguiment constant, els consells i la guia durant tots aquests mesos.

També vull agrair profundament als meus amics, tant a les amistats que he forjat durant el grau com a les que tenen una més llarga trajectòria, per la seva comprensió, el seu suport incondicional i la seva companyia.

Finalment, però no per això menys important, vull dedicar un especial agraïment a la meva família, que ha estat present des del primer moment, donant-me suport en els moments difícils i celebrant les petites victòries, sent una font de força i inspiració durant tot aquest procés.

Abstract

This thesis presents a proof of the completeness theorem of the infinite-valued Łukasiewicz calculus, undertaking a more general formulation known as the finite completeness theorem.

To this end, we introduce the Łukasiewicz many-valued propositional logics and the axiomatization of the infinite-valued case. We then develop the necessary algebraic background by studying MV-algebras, Wajsberg algebras, and ordered abelian groups. Finally, using the tools introduced throughout the thesis, we prove the completeness theorem of the infinite-valued Łukasiewicz calculus, discuss some proof strategies proposed by different authors, and analyze the failure of the strong completeness theorem.

Resum

En aquest treball es presenta una demostració del teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz, abordant una formulació més general coneguda com el teorema de completesa finitària.

Amb aquest objectiu, s'introdueixen les lògiques semàntiques de Łukasiewicz així com l'axiomatització de la lògica infinitvalorada. A continuació, es desenvolupa el marc teòric algebraic necessari mitjançant l'estudi de les MV-àlgebres, les àlgebres de Wajsberg i els grups abelians ordenats. Finalment, a partir de les eines presentades anteriorment, es demostra el teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz, es discuteixen les estratègies de demostració emprades per diversos autors i s'argumenta la no validesa del teorema de completesa fort.

Resumen

En este trabajo se presenta una demostración del teorema de completud de la lógica infinitovaluada de Łukasiewicz, llevando a cabo una formulación más general conocida como el teorema de completud finitaria.

Con este objetivo, se introducen las lógicas semánticas de Łukasiewicz y la axiomatización de la lógica infinitovaluada. A continuación, se desarrolla el marco teórico algebraico necesario mediante el estudio de las MV-álgebras, las álgebras de Wajsberg y los grupos abelianos ordenados. Finalmente, a partir de las herramientas presentadas anteriormente, se demuestra el teorema de completud de la lógica infinitovaluada de Łukasiewicz, se discuten las estrategias de demostración propuestas por diversos autores y se argumenta la no validez del teorema de completud fuerte.

2020 Mathematics Subject Classification. 03B50, 03G25, 06D35, 06F20

Índex

Introducció

La lògica clàssica té les seves arrels en el pensament grec antic, especialment en l'obra d'Aristòtil (384-322 aC), considerat tradicionalment el pare de la lògica formal. En la seva contribució més destacada, una col·lecció de textos coneguts sota el nom d'*Organon*, Aristòtil sistematitza les regles del raonament lògic mitjançant els sil·logismes, una forma de raonament deductiu que permet derivar veritats específiques a partir de premisses generals. Aquest sistema, avui conegut com a lògica aristotèlica, es fonamenta en una sèrie de principis bàsics que constitueixen el requisit previ de tota argumentació racional. Entre aquests principis destaca el principi de no-contradicció, segons el qual és impossible que una proposició sigui vertadera i falsa alhora.

Paral·lelament, es desenvolupa una segona tradició lògica dins l'escola estoica, fundada al voltant del 300 aC. A diferència de la lògica aristotèlica, els estoics centren la seva atenció en les proposicions i les seves connexions mitjançant formes primitives de conjunció i disjunció, defensant el principi del terç exclòs, d'acord amb el qual tota proposició és o bé vertadera o bé la seva negació és vertadera. Tot i que aquesta lògica tampoc no disposava d'una formalització rigorosa en el sentit modern, és considerada avui un precedent directe de la lògica proposicional.

La lògica aristotèlica va dominar el pensament occidental durant segles, i els seus principis han estat tradicionalment considerats lleis fonamentals del raonament formal. Tanmateix, al segle XIX es produeix una transformació profunda amb el naixement de la lògica matemàtica moderna. El punt d'inflexió és l'obra de Gottlob Frege (1848-1925), on s'introdueix la lògica de predicats i s'estableix una notació formal capaç d'expressar amb precisió relacions i propietats, superant així les limitacions de la lògica aristotèlica tradicional. Aquest nou enfocament formal va ser consolidat posteriorment per les contribucions de Bertrand Russell (1872-1970) i d'Alfred North Whitehead (1861-1947), on s'estableixen les bases de la lògica moderna.

En aquest nou marc formal es desenvolupa també el primer sistema rigorós de lògica proposicional. Les proposicions es combinen mitjançant connectors lògics com la conjunció ($\wedge$), la disjunció ($\vee$), la implicació ($\rightarrow$) i la negació ($\neg$); de manera que el valor de veritat d'una proposició composta depèn únicament dels valors de veritat de les proposicions que la componen. Aquesta dependència queda caracteritzada mitjançant les taules de veritat, l'ús de les quals es remunta als treballs de Charles S. Peirce (1839-1914). En la seva formulació contemporània, és habitual representar els dos valors de veritat amb 0 i 1, corresponents al valor fals i vertader, respectivament; de manera que les taules de veritat de la lògica clàssica es poden escriure com segueix:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\neg$	
0	1
1	0

Malgrat la seva llarga tradició i el seu èxit formal, la lògica clàssica ha estat objecte de qüestionament en determinats contextos filosòfics. Un exemple paradigmàtic és el dels enunciats sobre futurs contingents, com ara "Demà hi haurà una batalla naval", ja que, en el moment present de l'afirmació, sembla problemàtic atribuir a aquest tipus de proposicions un valor de veritat determinat. En efecte, fer-ho implicaria assumir-ne la necessitat o la impossibilitat, entrant en conflicte amb la seva contingència.

Tot i que aquesta dificultat ja va ser formulada en l'antiguitat per Aristòtil, no va ser abordada de manera significativa fins al segle XIV, quan Guillem d'Ockham (1287-1349) va reprendre el problema, sense arribar a una solució formalitzada. De manera similar, al segle XIX, figures com Hugh MacColl (1831-1909) i Charles Peirce (1839-1914) es qüestionen el principi de bivalència, introduint distincions entre els estats de veritat: certament vertader, probablement vertader, probablement fals i certament fals. Aquestes qüestions van obrir el camí per al naixement de les lògiques no clàssiques, desenvolupades al llarg del segle XX.

En aquest context, Polònia va jugar un paper especialment rellevant, convertint-se, durant el període d'entreguerres, en la capital de la lògica matemàtica. Concretament, en el marc de l'escola de Lvov-Varsòvia, fundada per Kazimierz Twardowski (1866-1938), figures com Jan Łukasiewicz (1878-1956) i Alfred Tarski (1901-1983) van contribuir decisivament tant al desenvolupament de la lògica clàssica com a la creació de noves formes de lògica no clàssica.

En particular, motivat tant pel problema dels futurs contingents com per una postura crítica envers el determinisme, Jan Łukasiewicz introdueix l'any 1920 la lògica trivalorada. Amb aquesta finalitat, proposa un tercer valor de veritat interpretat com a possibilitat, refusant el principi de bivalència i buscant una modelització dels raonaments que no es poden reduir a certesa absoluta. Aquesta proposta suposa una ruptura amb la lògica clàssica, ja que trenca el principi del terç exclòs. Tot i això, en manté el sistema formal, descrivint-la mitjançant l'ús de taules de veritat per a les connectives de la negació i la implicació. El nou valor de veritat, sovint representat per $\frac{1}{2}$, s'introdueix com una extensió natural seguint les taules clàssiques de la següent manera:

$\neg$	
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Immediatament, aquesta idea va ser generalitzada als sistemes $n-$valorats i, finalment, a les lògiques infinitvalorades de Łukasiewicz, $Ł_{\aleph_0}$ i $Ł_{\aleph_1}$, en les quals els valors de veritat es poden entendre com graus de possibilitat. Ara bé, el mateix Łukasiewicz va sostenir amb posterioritat que, des d'un punt de vista filosòfic, només el sistema trivalorat i l'infinitvalorat $Ł_{\aleph_1}$ tenen una rellevància especial: o bé no es distingeixen graus dins del possible, o bé se n'admet una gradació contínua, de manera anàloga a la teoria de la probabilitat.

Amb el pas del temps, però, Łukasiewicz va anar adoptant una actitud cada vegada més formalista envers la lògica, desvinculant-la progressivament de les motivacions filosòfiques originals. Concebia la lògica com una eina formal per deduir conclusions a partir de premisses donades i atorgava especial importància a la simplicitat i elegància dels sistemes axiomàtics, deixant de banda l'explicació intuïtiva darrere d'aquests. Així, l'axiomatització de les lògiques multivalorades esdevé un objectiu fonamental i Łukasiewicz arriba a formular conjectures per als casos trivalorat i infinitvalorat.

La conjectura d'axiomatització de la lògica trivalorada de Łukasiewicz va ser demostrada l'any 1931 per Mordchaj Wajsberg a [Waj31]. Ara bé, pel que fa a la lògica infinitvalorada, no és fins a finals de la dècada de 1950 que s'obté una demostració completa de la corresponent axiomatització. D'una banda, l'any 1958, Alan Rose i J. Barkley Rosser a [RR58] i, d'altra banda, l'any 1959, C. C. Chang a [Cha59], publiquen de manera independent demostracions del teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz.

L'objectiu principal d'aquest treball és presentar una demostració detallada del teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz, així com desenvolupar tot el marc teòric necessari per a la formulació del problema i la seva resolució. Tot i que s'ha procurat introduir i definir tots els conceptes utilitzats al llarg del treball, posant especial èmfasi en el rigor formal, es pressuposa que el lector disposa d'un cert coneixement previ de matemàtiques i està familiaritzat amb els procediments habituals de demostració, propis d'un estudiant de grau.

El treball s'estructura en quatre capítols, organitzats de la següent manera:

- Al llarg del primer capítol s'introdueixen les lògiques de Łukasiewicz, amb especial atenció al cas infinitvalorat $Ł_{\aleph_1}$. A més, s'hi presenta el corresponent sistema d'axiomatització i se'n formalitza la seva validesa. Aquest capítol busca establir una base sòlida per a l'estudi de les lògiques multivalorades que permeti abordar els posteriors desenvolupaments. Les referències principals d'aquest capítol són [Got01] i [Gis24].

- El segon capítol està dedicat a l'estudi de les MV-àlgebres, seguint principalment la referència original de C. C. Chang [Cha58a] i la posterior proposta de [FRT84]. El capítol es tanca amb la demostració de resultats preliminars que constitueixen una primera aproximació al teorema de completesa anteriorment formulat. Com a font addicional, també s'ha fet servir la referència [CDM00].

- En el tercer capítol s'introdueixen els grups abelians ordenats, abordant el marc teòric necessari per a la demostració final. Tot i que el contingut es basa en les idees proposades a [Cha59], s'adopta una via alternativa seguint les referències [CDM00] i [Há98].

- En el quart capítol es culmina l'objectiu principal del treball amb la demostració detallada del teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz, considerant un nombre finit de premisses. La present demostració segueix el fil inicial de l'argument original de C. C. Chang, [Cha59], tot incorporant resultats posteriors que permeten la simplificació d'alguns arguments, principalment, els presentats a [CDM00] i [Há98]. Finalment, es comenten els arguments de les demostracions de C. C. Chang, [Cha59], i D. Mundici, [Mun58], [CDM00]; i s'analitzen els límits de la completesa, demostrant la fallida de la completesa forta i la distinció entre les lògiques $Ł_{\aleph_0}$ i $Ł_{\aleph_1}$, seguint els resultats exposats a [Wó73].

A més de les referències principals mencionades, per a la redacció de la introducció s'han consultat [Wol95], [McC67], [Res69]; i les definicions d'àlgebra universal s'han extret de [BS81].

Capítol 1

Lògiques de Łukasiewicz

Al llarg d'aquest capítol es formalitzen les lògiques de Łukasiewicz, introduint-les tant des del punt de vista semàntic (secció 1.1) com des del punt de vista sintàctic (secció 1.2). En primer lloc, s'introdueix el llenguatge formal i es defineixen els conceptes bàsics de lògica proposicional que serviran de base per a la formalització de les lògiques multivalorades de Łukasieiwcz. A continuació, d'una banda, s'estudia la noció de veritat i de validesa i, de l'altra, es presenta l'axiomatització de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz mitjançant un sistema formal de deducció. L'objectiu d'aquestes dues primeres seccions és introduir breument els conceptes bàsics de la lògica multivalorada de Łukasiewicz. El lector interessat a aprofundir en aquestes nocions pot consultar, entre d'altres, la referència [Got01]. Finalment, a la secció 1.3 s'enuncia i es formula el teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz, que constitueix l'objecte central d'aquest treball.

1.1 Llenguatge formal i semàntica

El llenguatge formal considerat és conegut com a **llenguatge proposicional** i està format per un conjunt no buit de variables proposicionals $X = \{x, y, z, \ldots\}$, un conjunt de símbols lògics $\{\wedge, \vee, \to, \neg\}$ i un conjunt de delimitadors $\{(,)\}$.

En aquest llenguatge, les fórmules són expressions formades a partir d'aquest conjunt de variables proposicionals combinades amb els símbols lògics, que actuen com a connectives. Tanmateix, prendrem com a úniques connectives primitives $\{\to, \neg\}$, i definirem

$$\varphi \vee \psi := ((\varphi \to \psi) \to \psi);$$

$$\varphi \wedge \psi := (\neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))).$$

Definició 1.1.1. Definim el conjunt de **proposicions** amb variables a X, denotat per $\boldsymbol{Prop(X)}$, com el conjunt de totes les fórmules que es poden obtenir aplicant un nombre finit de vegades les següents regles:

(i) Per tot $x \in X$, $x \in Prop(X)$;

(ii) Si $\varphi \in Prop(X)$, aleshores $(\neg\varphi) \in Prop(X)$;

(iii) Si $\varphi, \psi \in Prop(X)$, aleshores $(\varphi \to \psi) \in Prop(X)$.

Com és habitual, per agilitzar la lectura, eliminarem els parèntesis exteriors. A més, establim un criteri de prioritat per a les connectives, on la negació $\neg$ tindrà la màxima prioritat. Així, la fórmula $\neg x \to y$ s'ha de llegir com $(\neg x) \to y$, i no com $\neg(x \to y)$.

Definició 1.1.2. Sigui $\varphi \in Prop(X)$. Definim recursivament el conjunt de **subfórmules de φ**, denotat per $\boldsymbol{Sb(\varphi)}$, com segueix:

(i) Si $\varphi \in X$, aleshores $Sb(\varphi) = \{\varphi\}$;

(ii) Si $\varphi = \neg\psi$ per una certa proposició $\psi \in Prop(X)$, aleshores $Sb(\varphi) = Sb(\psi) \cup \{\varphi\}$;

(iii) Si $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ per certes proposicions $\psi_1, \psi_2 \in Prop(X)$, aleshores $Sb(\varphi) = Sb(\psi_1) \cup Sb(\psi_2) \cup \{\varphi\}$.

Degut a la naturalesa recursiva del conjunt de proposicions $Prop(X)$, per demostrar que totes les proposicions tenen una certa propietat, s'utilitza el *principi d'inducció*. Per fer-ho, és suficient comprovar que

1. Tota variable proposicional té la propietat.
2. Si $\varphi \in Prop(X)$ té la propietat, aleshores $\neg\varphi$ també té la propietat.
3. Si $\varphi, \psi \in Prop(X)$ tenen la propietat, aleshores $\varphi \to \psi$ també la té.

Ara, per assignar un valor de veritat a cada proposició, cal determinar com actuen les connectives sobre els diferents valors de veritat. En el cas de la lògica infinitvalorada $\text{Ł}_{\aleph_1}$, els valors de veritat corresponen a l'interval $[0,1] = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq 1\}$. Per tant, la definició d'interpretació en aquest sistema no pot ser expressada mitjançant taules de veritat, sinó que s'expressa a través d'àlgebres.

Definició 1.1.3. Un **llenguatge algebraic** és un conjunt $\mathscr{F}$ de símbols funcionals tal que a cada element f de $\mathscr{F}$ se li assigna un nombre $n \in \mathbb{N}$, anomenat **arietat** de f.

Sigui $\mathscr{F}$ un llenguatge algebraic. Una **àlgebra** $\mathcal{A}$ de tipus $\mathscr{F}$ és un parell ordenat $\langle A, F\rangle$, on A és un conjunt no buit i F és una família d'operacions sobre A, indexades pel llenguatge $\mathscr{F}$ de manera que a cada símbol funcional $f \in \mathscr{F}$ d'arietat n li correspon una operació n-ària $f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$.

Considerem l'àlgebra $\mathbf{Ł} := \langle [0,1], \to^{Ł}, \neg^{Ł}, 1^{Ł}\rangle$, on $1^{Ł}$ és una constant definida per $1^{Ł} = 1$ i $\to^{Ł}$, $\neg^{Ł}$ són, respectivament, les operacions binària i unària definides, per tot $a, b \in [0,1]$, per

$$a \to^{Ł} b = \min\{1, 1 - a + b\}; \qquad \neg^{Ł} a = 1 - a.$$

A més, a partir d'aquestes dues operacions, definim, per tot $a, b \in [0,1]$, les operacions binàries

$$a \vee^{Ł} b := (a \to^{Ł} b) \to^{Ł} b; \qquad a \wedge^{Ł} b := \neg^{Ł}((\neg^{Ł} a) \vee^{Ł} (\neg^{Ł} b)).$$

Observació 1.1.4. Amb les definicions anteriors, per tot $a, b \in [0,1]$, es compleix que $a \vee^{Ł} b = \max\{a, b\}$ i $a \wedge^{Ł} b = \min\{a, b\}$. En efecte,

$$a \vee^{Ł} b = (a \to^{Ł} b) \to^{Ł} b = \min\{1, 1 - \min\{1, 1 - a + b\} + b\} = \min\{1, \max\{0, a - b\} + b\} =$$
$$= \min\{1, \max\{b, a\}\} = \max\{a, b\};$$

$$a \wedge^{Ł} b = \neg^{Ł}((\neg^{Ł} a) \vee^{Ł} (\neg^{Ł} b)) = 1 - \max\{1 - a, 1 - b\} = \min\{1 - (1 - a), 1 - (1 - b)\} =$$
$$= \min\{a, b\}.$$

Definició 1.1.5. Una **$[0,1]-$interpretació** és una aplicació $I : Prop(X) \longrightarrow [0,1]$ tal que, per tota $\varphi, \psi \in Prop(X)$, es compleixen

(i) $I(\neg\varphi) = \neg^{\text{Ł}} I(\varphi)$;

(ii) $I(\varphi \to \psi) = I(\varphi) \to^{\text{Ł}} I(\psi)$.

A partir d'aquesta definició, per simplificar notació, denotarem de manera indistingida les connectives $\neg, \to, \wedge, \vee$ i les corresponents operacions $\neg^{\text{Ł}}, \to^{\text{Ł}}, \wedge^{\text{Ł}}, \vee^{\text{Ł}}$.

El següent resultat demostra que, degut a que $Prop(X)$ està lliurement construït a partir de les variables proposicionals i les connectives, tota interpretació queda unívocament determinada per la interpretació de les variables proposicionals.

Proposició 1.1.6. Sigui $\varphi \in Prop(X)$ i siguin I_1, I_2 dues $[0,1]-$interpretacions. Si I_1 i I_2 assignen els mateixos valors a les variables proposicionals de φ, aleshores $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$.

Demostració. Suposem que I_1 i I_2 són dues interpretacions com les de l'enunciat. Procedim per inducció sobre la construcció de φ per demostrar que $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$.

Si $\varphi = x \in X$, el resultat es compleix per hipòtesi.

Si $\varphi = \neg\psi$ i suposem, per hipòtesi inductiva, que $I_1(\psi) = I_2(\psi)$, aleshores

$$I_1(\varphi) = I_1(\neg\psi) = \neg I_1(\psi) = \neg I_2(\psi) = I_2(\neg\psi) = I_2(\varphi).$$

Finalment, si $\varphi = \psi \to \chi$ i, per hipòtesi inductiva, es compleix que $I_1(\psi) = I_2(\psi)$ i $I_1(\chi) = I_2(\chi)$, llavors

$$I_1(\varphi) = I_1(\psi \to \chi) = I_1(\psi) \to I_1(\chi) = I_2(\psi) \to I_2(\chi) = I_2(\psi \to \chi) = I_2(\varphi).$$

□

Com a conseqüència d'aquest resultat, és habitual anomenar $\boldsymbol{X_\varphi} \coloneqq Sb(\varphi) \cap X$ el conjunt de variables proposicionals que apareixen a φ. A més, es posa $\boldsymbol{\varphi(x_1, \ldots, x_n)}$ quan $X_\varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i, donada I una $[0,1]-$interpretació qualsevol, es denota $\boldsymbol{I_{a_1,\ldots,a_n}}$ per indicar que $I(x_1) = a_1, \ldots, I(x_n) = a_n$.

Definició 1.1.7. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. Diem que φ és **conseqüència lògica** de Σ en $[0,1]$ i escrivim $\boldsymbol{\Sigma \models_{[0,1]} \varphi}$ si per tota $[0,1]-$interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.

Proposició 1.1.8. Sigui $\Sigma \cup \Delta \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. Es compleixen les següents propietats:

1. $\varphi \models_{[0,1]} \varphi$ *(axioma);*
2. Si $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$ i $\Sigma \subseteq \Delta$, aleshores $\Delta \models_{[0,1]} \varphi$ *(monotonia);*
3. Si $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$ i $\Delta \models_{[0,1]} \psi$ per tot $\psi \in \Sigma$, aleshores $\Delta \models_{[0,1]} \varphi$ *(tall).*

Demostració.

1. És immediat per definició.

2. Suposem que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$ i sigui I una $[0,1]-$interpretació tal que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Delta$. En particular, també es compleix $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$, ja que $\Sigma \subseteq \Delta$. Per tant, com que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$, necessàriament es compleix que $I(\varphi) = 1$.

3. Suposem que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$ i que $\Delta \models_{[0,1]} \psi$ per tot $\psi \in \Sigma$. Sigui I una $[0,1]-$interpretació tal que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Delta$. Això implica que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$, ja que $\Delta \models_{[0,1]} \psi$ per tot $\psi \in \Sigma$. Ara, fent servir la hipòtesi $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$, es conclou que $I(\varphi) = 1$, com volíem veure.

□

Seguint aquesta línia, les definicions de les lògiques $n-$valorades Ł_n i de la lògica infinitvalorada $\text{Ł}_{\aleph_0}$ es poden obtenir restringint l'univers de valors de l'àlgebra Ł a $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ i $\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$, respectivament. Més generalment:

Definició 1.1.9. Sigui $\mathscr{F}$ un llenguatge algebraic i siguin $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ i $\mathcal{B} = \langle B, F\rangle$ dues àlgebres de tipus $\mathscr{F}$. Diem que $\mathcal{B}$ és una **subàlgebra** de $\mathcal{A}$ si $B \subseteq A$ i per cada símbol funcional $f \in \mathscr{F}$, l'operació $f^{\mathcal{B}}$ és la restricció de l'operació $f^{\mathcal{A}}$ al conjunt B.

Exemple 1.1.10. Les següents àlgebres són subàlgebres de l'àlgebra $\text{Ł} = \langle [0,1], \to, \neg, 1\rangle$:

1. $\langle [0,1] \cap \mathbb{Q}, \to, \neg, 1\rangle$;

2. $\langle \{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}, \to, \neg, 1\rangle$, per $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Definició 1.1.11. Sigui $\langle S, \to, \neg, 1\rangle$ una subàlgebra de l'àlgebra $\text{Ł} = \langle [0,1], \to, \neg, 1\rangle$. Una aplicació $I : Prop(X) \longrightarrow S$ és una $\boldsymbol{S-}$**interpretació** si, per tota $\varphi, \psi \in Prop(X)$, es compleixen les propietats de la definició 1.1.5.

Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. Es diu que $\boldsymbol{\Sigma \models_S \varphi}$ si per tota $S-$interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$, aleshores $I(\varphi) = 1$.

Observació 1.1.12. Prenent $S = \{0,1\}$ i $S = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ és fàcil comprovar que les definicions anteriors corresponen a les taules de veritat de la lògica clàssica i la lògica Ł_3, respectivament.

Proposició 1.1.13. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. Es compleixen

1. Si $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$, aleshores $\Sigma \models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi$;

2. Si $\Sigma \models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi$, aleshores $\Sigma \models_{\text{Ł}_n} \varphi$ per tot $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$;

3. Siguin $n, k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tals que $k|n$. Si $\Sigma \models_{\text{Ł}_{n+1}} \varphi$, aleshores $\Sigma \models_{\text{Ł}_{k+1}} \varphi$.

Demostració. Veurem el primer cas i la resta es demostren anàlogament.

1. Suposem que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$ i considerem $I : Prop(X) \longrightarrow [0,1]\cap\mathbb{Q}$ una $\text{Ł}_{\aleph_0}-$interpretació tal que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$. Cal veure que, amb aquestes hipòtesis, $I(\varphi) = 1$.

   Tenint en compte que $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq [0,1]$ i la definició de $\text{Ł}_{\aleph_0}-$interpretació, podem considerar $I : X \longrightarrow [0,1]$ de manera que I sigui una $[0,1]-$interpretació. Per tant, com que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$ i $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$, necessàriament $I(\varphi) = 1$. □

Definició 1.1.14. Sigui $\varphi \in Prop(X)$. Diem que φ és una $\boldsymbol{[0,1]-}$**tautologia** i ho denotem per $\models_{\mathbf{[0,1]}} \boldsymbol{\varphi}$, si φ és conseqüència lògica de $\emptyset$. És a dir, si per a tota $[0,1]-$interpretació I es compleix que $I(\varphi) = 1$. Denotem per $\boldsymbol{Taut}_{\mathbf{[0,1]}}$ el conjunt de les $[0,1]-$tautologies.

Anàlogament, diem que φ és una $\boldsymbol{S-}$**tautologia** si per a tota $S-$interpretació I es compleix que $I(\varphi) = 1$. El conjunt de les S-tautologies el denotem per $\boldsymbol{Taut}_{\boldsymbol{S}}$.

Observació 1.1.15. Per indicar que una proposició φ no és una tautologia o no és conseqüència lògica d'un cert conjunt de proposicions Σ, farem servir la mateixa notació amb el símbol $\not\models$.

Definició 1.1.16. Sigui $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in Prop(X)$. Definim la **interpretació de $\boldsymbol{\varphi}$ en $\boldsymbol{[0,1]}$** com la funció $\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{[0,1]}} : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ que assigna a cada $(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$ el valor de la $[0,1]-$interpretació $I_{a_1,\ldots,a_n}(\varphi)$.

Corol·lari 1.1.17. Es compleix que $\models_{[0,1]} \varphi$ si, i només si, $\varphi^{[0,1]} \equiv 1$.

Demostració. La demostració és conseqüència directa de la Proposició 1.1.6. □

Observació 1.1.18. Sigui $\varphi \in Prop(X)$. Com que φ està construïda recursivament a partir de les variables proposicionals i de les connectives $\neg$ i $\to$, la interpretació de φ en $[0,1]$ és una composició de les projeccions sobre les interpretacions de les variables proposicionals i de les funcions definides per les operacions de l'àlgebra $[0,1]$. Concretament, $\varphi^{[0,1]}$ és una composició de

- les projeccions $\Gamma_i : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$, definides per

$$\Gamma_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i \quad \text{per tot } i \in \{1, \ldots, n\};$$

- la funció de negació $f_\neg : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, definida per

$$f_\neg(a) = \neg a = 1 - a;$$

- la funció d'implicació $f_\to : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, definida per

$$f_\to(a, b) = a \to b = \min\{1, 1 - a + b\}.$$

Com que les funcions Γ_i, $f_\neg$ i $f_\to$ són contínues, es dedueix que la composició que defineix $\varphi^{[0,1]}$ també és contínua. La demostració formal de la continuïtat de $\varphi^{[0,1]}$ es farà per inducció sobre la construcció de φ i es presentarà en la secció 4.3.

Procedim ara a la definició per una subàlgebra S qualsevol:

Definició 1.1.19. Sigui $\langle S, \to, \neg, 1\rangle$ una subàlgebra de Ł i sigui $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in Prop(X)$. Definim la **interpretació de $\boldsymbol{\varphi}$ en $\boldsymbol{S}$** com la restricció $\varphi^{[0,1]}_{\restriction S}$, és a dir, com la funció $\boldsymbol{\varphi}^{\boldsymbol{S}} : S^n \longrightarrow S$ que assigna a cada $(a_1, \ldots, a_n) \in S^n$ el valor de la $S-$interpretació $I_{a_1,\ldots,a_n}(\varphi)$.

Teorema 1.1.20. Donada $\varphi \in Prop(X)$, són equivalents

1. $\models_{[0,1]} \varphi$; 2. $\models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi$; 3. $\models_{\mathrm{Ł}_n} \varphi$, per tot $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Demostració. La implicació dreta de l'equivalència $\models_{[0,1]} \varphi$ si, i només si, $\models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi$, s'obté de la Proposició 1.1.13, prenent $\Sigma = \emptyset$.

Recíprocament, suposem que $\models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi$. És a dir, suposem que

$$\varphi^{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(a_1, \ldots, a_n) = 1 \quad \text{per tot } a_1, \ldots, a_n \in [0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

Observem que demostrar $\models_{[0,1]} \varphi$ equival a comprovar que

$$\varphi^{[0,1]}(a_1, \ldots, a_n) = 1 \quad \text{per tot } a_1, \ldots, a_n \in [0,1].$$

Sigui $\{(\alpha_m^1, \ldots, \alpha_m^n)\}_{m\in\mathbb{N}}$ una successió complint:

(i) $(\alpha_m^1, \ldots, \alpha_m^n) \in ([0,1] \cap \mathbb{Q})^n$, per tot $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{m\to\infty} \{(\alpha_m^1, \ldots, \alpha_m^n)\}_m = (a_1, \ldots, a_n)$.

Sabem que $\varphi^{[0,1]}$ és contínua, per tant, necessàriament es compleix que

$$\lim_{m\to\infty} \varphi^{[0,1]}(\alpha_m^1, \ldots, \alpha_m^n) = \varphi^{[0,1]}(a_1, \ldots, a_n).$$

A més, tenint en compte que $\alpha_m^i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$ i tot $m \in \mathbb{N}$, també tenim que

$$\varphi^{[0,1]}(\alpha_m^1, \ldots, \alpha_m^n) = \varphi^{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(\alpha_m^1, \ldots, \alpha_m^n).$$

Ajuntant les dues igualtats i fent servir la hipòtesi, obtenim el resultat:

$$\varphi^{[0,1]}(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{m\to\infty} \varphi^{[0,1]}(\alpha_m^1, \ldots, \alpha_m^n) = \lim_{m\to\infty} \varphi^{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(\alpha_m^1, \ldots, \alpha_m^n) = \lim_{m\to\infty} 1 = 1.$$

Procedim amb la demostració de l'equivalència $\models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi$ si, i només si, $\models_{\mathrm{Ł}_n} \varphi$ per tot $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

La implicació dreta torna a ser directa prenent $\Sigma = \emptyset$ a la Proposició 1.1.13.

L'altra implicació la demostrem per reducció a l'absurd. Suposem que $\models_{\mathrm{Ł}_n} \varphi$ per tot $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ i suposem que $\not\models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi$. Això implica l'existència d'una interpretació I en $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ tal que $I(\varphi) \neq 1$.

Suposant, sense pèrdua de generalitat, que $X_\varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$, posem

$$I(x_1) = \frac{a_1}{b_1}, \ \ldots, \ I(x_n) = \frac{a_n}{b_n}.$$

Sigui $b = b_1 \ldots b_n$, aleshores $I(x_1) = \dfrac{a_1 b_2 \ldots b_n}{b}, \ \ldots, \ I(x_n) = \dfrac{a_n b_1 \ldots b_{n-1}}{b}$.

Així, I és una $\mathrm{Ł}_{b+1}-$interpretació complint $I(\varphi) \neq 1$, fet que implica que $\not\models_{\mathrm{Ł}_{b+1}} \varphi$ i porta a contradicció amb la hipòtesi $\models_{\mathrm{Ł}_n} \varphi$ per tot $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. □

Corol·lari 1.1.21. Es compleixen les següents igualtats de conjunts:

$$Taut_{[0,1]} = Taut_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}} Taut_{\mathrm{Ł}_n}.$$

Demostració. La demostració és directa a partir de la definició 1.1.14 i les equivalències del Teorema 1.1.20. □

1.2 Sintaxi

A la secció anterior hem conclòs que les lògiques $\text{Ł}_{\aleph_0}$ i $\text{Ł}_{\aleph_1}$ tenen les mateixes tautologies. Aquesta igualtat explica per què Łukasiewicz va proposar un únic càlcul infinitvalorat amb la intenció que fos complet respecte a les tautologies de $\text{Ł}_{\aleph_0}$ i de $\text{Ł}_{\aleph_1}$.

L'objectiu d'aquesta secció és presentar aquest càlcul, així com els conceptes de deducció i teorema sintàctic. Cal destacar que també es poden definir càlculs $n-$valorats, tot i que aquests no seran objecte d'estudi d'aquest treball.

El **càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz Ł_∞** és un càlcul tipus Hilbert, és a dir, un sistema de deducció definit mitjançant axiomes i regles d'inferència. Tal com hem fet en la secció anterior, considerem el sistema reduït de connectives $\{\neg, \to\}$, tenint en compte que les connectives $\wedge$ i $\vee$ són definibles a partir d'aquestes dues. Així, els **axiomes del càlcul Ł_∞** són

Ł$_1$ $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

Ł$_2$ $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$;

Ł$_3$ $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$;

Ł$_4$ $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.

La regla d'inferència d'aquest càlcul és la regla **Modus Ponens**, que permet deduir ψ a partir de φ i $\varphi \to \psi$:

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

Definició 1.2.1. Sigui $\Sigma \subseteq Prop(X)$. Una **deducció amb premisses en Σ** és una successió finita $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$ on, per cada $1 \leq i \leq n$, la proposició φ_i compleix una de les següents condicions:

(i) $\varphi_i \in \Sigma$;

(ii) φ_i és una instància d'axioma;

(iii) φ_i s'obté per Modus Ponens d'anteriors.

Definició 1.2.2. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. Diem que **$\varphi$ és deduïble de Σ**, i escrivim $\Sigma \vdash_{\text{Ł}_\infty} \varphi$, si existeix una deducció $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ amb premisses en Σ tal que $\varphi_n = \varphi$. A més, definim el conjunt de proposicions que es dedueixen de Σ com

$$\boldsymbol{Ded(\Sigma)} = \{\varphi \in Prop(X) \mid \Sigma \vdash_{\text{Ł}_\infty} \varphi\}.$$

Definició 1.2.3. Sigui $\varphi \in Prop(X)$. Diem que φ és un **teorema** del càlcul Ł_∞ si $\vdash_{\text{Ł}_\infty} \varphi$. Equivalentment, si $\varphi \in Ded(\emptyset)$.

Originalment, el càlcul proposat per Łukasiewicz incloïa un cinquè axioma

Ł$_5$ $((\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to \varphi)$.

Tanmateix, posteriorment es va demostrar que aquest axioma es pot deduir a partir de $\{\text{Ł}_1, \text{Ł}_2, \text{Ł}_3, \text{Ł}_4\}$, permetent així simplificar el sistema d'axiomes del càlcul original, limitant-lo als quatre axiomes que hem presentat. La deducció de l'axioma Ł_5 a partir de les premisses $\{\text{Ł}_1, \text{Ł}_2, \text{Ł}_3, \text{Ł}_4\}$ es desenvolupa a [Cha58b], seguint la notació de [RR58].

1.3 Coherència i completesa

Com ja s'ha esmentat, l'objectiu final d'aquest treball és demostrar el teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz. Un cop definides les lògiques de Łukasiewicz, especialment les lògiques semàntiques $Ł_{\aleph_0}$, $Ł_{\aleph_1}$ i el càlcul infinitvalorat $Ł_\infty$, l'objectiu d'aquesta secció és formalitzar el resultat principal d'aquest treball.

Recordem que, a la primera secció, hem vist que $Taut_{[0,1]} = Taut_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$. A partir d'ara, denotem aquest conjunt per $\boldsymbol{Taut_\infty}$. Així, per provar l'equivalència entre les tautologies semàntiques i els teoremes del càlcul, cal comprovar que $Taut_\infty = Ded(\emptyset)$, o equivalentment, demostrar que per tota $\varphi \in Prop(X)$ es compleix que

$$\models_{[0,1]} \varphi \text{ si, i només si, } \vdash_{Ł_\infty} \varphi.$$

Comencem amb la necessitat de l'equivalència.

Lema 1.3.1. Per tota $\varphi, \psi \in Prop(X)$, es compleix que $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models_{[0,1]} \psi$.

Demostració. Sigui I una $[0,1]-$interpretació tal que $I(\varphi) = I(\varphi \to \psi) = 1$. Cal demostrar que $I(\psi) = 1$. En efecte,

$$1 = I(\varphi \to \psi) = \min\{1, 1 - I(\varphi) + I(\psi)\} = \min\{1, 1 - 1 + I(\psi)\} = \min\{1, I(\psi)\} = I(\psi).$$

□

Lema 1.3.2. Els axiomes $Ł_1 - Ł_4$ són $[0,1]-$tautologies.

Demostració. Sigui I una $[0,1]-$interpretació qualsevol i siguin $\varphi, \psi \in Prop(X)$. Demostrem que l'axioma $Ł_1$ és una $[0,1]-$tautologia, comprovant que $I(\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)) = 1$:

$I(\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)) = I(\psi_1) \to (I(\psi_2) \to I(\psi_1)) = \min\{1, 1 - I(\psi_1) + (I(\psi_2) \to I(\psi_1))\} =$
$= \min\{1, 1 - I(\psi_1) + \min\{1, 1 - I(\psi_2) + I(\psi_1)\}\} = \min\{1, \min\{2 - I(\psi_1), 2 - I(\psi_2)\}\} =$
$= \min\{1, 2 - I(\psi_1), 2 - I(\psi_2)\} = 1,$

on la darrera igualtat s'obté del fet que $I(\psi_1), I(\psi_2) \in [0,1]$.

La comprovació per la resta d'axiomes es fa de manera anàloga. □

Teorema 1.3.3. (Teorema de coherència de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz).

Sigui $\varphi \in Prop(X)$. Si $\vdash_{Ł_\infty} \varphi$, aleshores $\models_{[0,1]} \varphi$.

Demostració. Demostrem per inducció que, per tota $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ i per tota $\varphi \in Prop(X)$ tal que $\vdash_{Ł_\infty} \varphi$, si $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ és una deducció de φ, aleshores $\models_{[0,1]} \varphi_i$ per tota $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Si $n = 1$, φ_1 és necessàriament una instància d'axioma. Per tant, aplicant el Lema 1.3.2, obtenim que $\models_{[0,1]} \varphi$.

Suposem cert per n i vegem-ho per $n+1$. Sigui $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \rangle$ una deducció de $\varphi \in Prop(X)$. Per hipòtesi inductiva, com que $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ és una demostració d'una certa proposició $\varphi_n \in Prop(X)$, tenim que $\models_{[0,1]} \varphi_i$ per tota $i \leq n$. Considerem φ_{n+1} i distingim dos casos:

(a) Si φ_{n+1} és una instància d'axioma, la demostració és anàloga al cas $n = 1$.

(b) Si φ_{n+1} s'obté per Modus Ponens d'anteriors, existeixen $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tals que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_{n+1}$. Pel Lema 1.3.1, sabem que $\{\varphi_i, \varphi_j\} \models_{[0,1]} \varphi_{n+1}$. A més, per hipòtesi inductiva, es compleix que $\models_{[0,1]} \varphi_i$ i $\models_{[0,1]} \varphi_j$. Per tant, per la propietat de tall, concloem que $\models_{[0,1]} \varphi_{n+1}$.

Així doncs, si $\vdash_{\mathrm{L}_\infty} \varphi$ i $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ és una deducció de φ, hem demostrat que $\models_{[0,1]} \varphi_i$ per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$. Per tant, com que $\varphi_n = \varphi$, podem concloure que $\models_{[0,1]} \varphi$. □

La suficiència de l'equivalència és coneguda com a completesa:

Teorema 1.3.4. (Teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz).

Sigui $\varphi \in Prop(X)$. Si $\models_{[0,1]} \varphi$, aleshores $\vdash_{\mathrm{L}_\infty} \varphi$.

Observació 1.3.5. Com que $Taut_{[0,1]} = Taut_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$, els teoremes de coherència i completesa són equivalents si canviem $[0, 1]$ per $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

La demostració detallada d'aquest teorema és l'objectiu principal d'aquest treball. Per abordar-la, és necessari desenvolupar tot un marc teòric, que es presentarà en els següents dos capítols.

Capítol 2

MV-àlgebres

Les MV-àlgebres són un sistema algebraic desenvolupat per C. C. Chang amb l'objectiu de demostrar el teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz. Tal com s'esmenta en l'article original [Cha58a], aquest sistema té un rol similar al de les àlgebres de Boole en l'estudi de la completesa de la lògica clàssica bivalent, oferint una estructura algebraica per al desenvolupament de la demostració.

Comencem aquest capítol introduint conceptes i resultats bàsics sobre l'estructura de les MV-àlgebres (seccions 2.1 i 2.2). A continuació, demostrem el teorema de representació subdirecta (secció 2.3), que serà essencial per als passos posteriors. També introduïm breument les àlgebres de Wajsberg i la seva relació amb les MV-àlgebres (secció 2.4). Finalment, veiem com tot aquest marc teòric serveix per establir els primers resultats en la demostració del teorema de completesa (secció 2.5).

2.1 Definició i propietats bàsiques

Definició 2.1.1. Una **MV-àlgebra** és una àlgebra $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$, on A és un conjunt no buit, $\oplus$ és una operació binària, $\neg$ és una operació unària i 0 és una constant de A de manera que, per tot $x, y, z \in A$, es compleixen

(MV1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

(MV2) $x \oplus y = y \oplus x$;

(MV3) $x \oplus 0 = x$;

(MV4) $\neg\neg x = x$;

(MV5) $x \oplus \neg 0 = \neg 0$;

(MV6) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

A més, en cada MV-àlgebra, definim la constant $1 \coloneqq \neg 0$ i les operacions binàries:

$$x \odot y \coloneqq \neg(\neg x \oplus \neg y) \quad \text{i} \quad x \ominus y \coloneqq x \odot \neg y.$$

Aquesta definició coincideix amb la presentada a [CDM00], caracterizant-se per la seva concisió. En canvi, l'article original [Cha58a] proposa una definició equivalent però més detallada, on s'imposen condicions addicionals, deduïbles de les sis presentades.

Observació 2.1.2. Si prenem $A = \{0\}$, $\oplus$ una operació binària i $\neg$ una operació unària qualssevol, l'àlgebra $\langle\{0\}, \oplus, \neg, 0\rangle$ és una MV-àlgebra coneguda com la **MV-àlgebra trivial**. A més, una MV-àlgebra A és trivial si, i només si, $0 = 1$.

Proposició 2.1.3. Sigui $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$ una MV-àlgebra. Per tot $x, y \in A$ es compleixen

(MV7) $\neg 1 = 0$; **(MV9)** $x \oplus \neg x = 1$;

(MV8) $x \oplus y = \neg(\neg x \odot \neg y)$; **(MV10)** $x \ominus y = \neg(\neg x \oplus y)$.

Demostració. Les propietats $(MV7), (MV8)$ i $(MV10)$ són conseqüència directa de la condició $(MV4)$ i les definicions de les operacions $\odot$ i $\ominus$. Passem a demostrar $(MV9)$. Sigui $x \in A$, aleshores

$$1 = \neg 0 \underset{\text{(MV5)}}{=} \neg(\neg x \oplus \neg 0) \oplus \neg 0 \underset{\text{(MV6)}}{=} \neg(\neg\neg 0 \oplus x) \oplus x \underset{\text{(MV4)}}{=} \neg(0 \oplus x) \oplus x =$$

$$\underset{\text{(MV2)}}{=} \neg(x \oplus 0) \oplus x \underset{\text{(MV3)}}{=} \neg x \oplus x. \qquad \square$$

A continuació, presentem alguns exemples de MV-àlgebres, sent el primer d'ells especialment rellevant en el desenvolupament del treball.

Exemple 2.1.4.

1. L'àlgebra $\langle[0,1], \oplus, \neg, 0\rangle$, on $[0,1]$ denota l'interval $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ amb l'ordre habitual sobre $\mathbb{R}$, i les operacions estan definides per tot $x, y \in [0,1]$, per
$$x \oplus y = \min(x + y, 1); \quad \neg x = 1 - x.$$
2. L'àlgebra $\langle[0,1] \cap \mathbb{Q}, \oplus, \neg, 0\rangle$, on les operacions $\oplus$ i $\neg$ són les mateixes que en l'exemple anterior.
3. Per tot $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, les àlgebres $\langle\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}, \oplus, \neg, 0\rangle$, amb les operacions definides com els exemples anteriors.

Observació 2.1.5. Les MV-àlgebres definides en els punts 2 i 3 de l'exemple anterior són subàlgebres de la MV-àlgebra $\langle[0,1], \oplus, \neg, 0\rangle$, definida al punt 1.

Exemple 2.1.6. Considerem el grup abelià parcialment ordenat $\mathbb{Z} \overrightarrow{\times} \mathbb{Z}$ determinat pel producte cartesià $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i l'ordre lexicogràfic, $\leq_{lex}$, definit, per tot $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, per l'equivalència

$$(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2) \quad \text{si, i només si,} \quad x_1 \leq y_1 \quad \text{o bé} \quad x_1 = y_1 \ \text{ i } \ x_2 \leq y_2.$$

Denotem per $\Gamma(\mathbb{Z} \overrightarrow{\times} \mathbb{Z}, (1,0))$ l'àlgebra $\langle A, \oplus, \neg, (0,0)\rangle$, on

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (0,0) \leq_{lex} (x_1, x_2) \leq_{lex} (1,0)\},$$

i les operacions $\oplus$ i $\neg$ es defineixen, per tot $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A$, de la manera següent:

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = \min\{(1,0), (x_1 + y_1, x_2 + y_2)\}; \quad \neg(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2).$$

Amb aquestes definicions, $\Gamma(\mathbb{Z} \overrightarrow{\times} \mathbb{Z}, (1,0))$ és una MV-àlgebra.

A partir d'ara, i sempre que no doni lloc a confusió, farem un abús de notació i posarem simplement A per referir-nos a la MV-àlgebra $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$.

Lema 2.1.7. Sigui A una MV-àlgebra i siguin $x, y \in A$. Són equivalents

(i) $\neg x \oplus y = 1$;

(ii) $x \odot \neg y = 0$;

(iii) $y = x \oplus (y \ominus x)$;

(iv) Existeix un element $z \in A$ tal que $x \oplus z = y$.

Demostració. Usant les condicions $(MV1) - (MV6)$ i les propietats $(MV7) - (MV10)$, demostrem les equivalències. Suposant (i) se segueix fàcilment (ii). En efecte,

$$x \odot \neg y = \neg(\neg x \oplus \neg\neg y) \underset{\text{(MV4)}}{=} \neg(\neg x \oplus y) \underset{\text{(i)}}{=} \neg 1 \underset{\text{(MV7)}}{=} 0.$$

De manera similar, també obtenim que (ii) implica (iii):

$$x \oplus (y \ominus x) = x \oplus (y \odot \neg x) = x \oplus (\neg(\neg y \oplus \neg\neg x)) \underset{\text{(MV4)}}{=} x \oplus (\neg(\neg y \oplus x)) \underset{\text{(MV2)}}{=} \neg(\neg y \oplus x) \oplus x =$$

$$\underset{\text{(MV6)}}{=} \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = (x \odot \neg y) \oplus y \underset{\text{(ii)}}{=} 0 \oplus y = y.$$

La implicació (iii) implica (iv) és immediata prenent $z = y \odot \neg x$. Finalment, si suposem (iv), aleshores

$$\neg x \oplus y \underset{\text{(iv)}}{=} \neg x \oplus (x \oplus z) \underset{\text{(MV1)}}{=} (\neg x \oplus x) \oplus z \underset{\text{(MV9)}}{=} 1 \oplus z \underset{\text{(MV5)}}{=} 1.$$

□

Definició 2.1.8. Sigui A una MV-àlgebra i $x, y \in A$ qualssevol. Diem que $\boldsymbol{x \leq_A y}$ si, i només si, x i y satisfan les condicions equivalents (i)-(iv) anteriors.

Proposició 2.1.9. Amb la definició anterior es té que $\leq_A$ és un ordre parcial en A anomenat l'**ordre natural de A**.

Demostració.

1. *Reflexivitat*: Aquesta propietat és equivalent a $(MV9)$.

2. *Antisimetria*: Suposem que $x \leq_A y$ i que $y \leq_A x$, aleshores, fent servir les condicions d'ordre, tenim que

$$y \underset{\text{(iii)}}{=} x \oplus (y \ominus x) = x \oplus (\neg(\neg y \oplus x)) \underset{\text{(i)}}{=} x \oplus (\neg 1) = x.$$

3. *Transitivitat*: Suposem que $x \leq_A y \leq_A z$; per la condició (iv) d'ordre, existeixen $z_1, z_2 \in A$ tals que $y = x \oplus z_1$, $z = y \oplus z_2$; per tant, $z = (x \oplus z_1) \oplus z_2 \underset{\text{(MV1)}}{=} x \oplus (z_1 \oplus z_2)$ amb $z_1 \oplus z_2 \in A$.

□

Observació 2.1.10. Sigui A una MV-àlgebra qualsevol. Per definició de $\leq_A$, per tot $x \in A$, tenim que

$$0 \leq_A x \leq_A 1.$$

En efecte, $\neg 0 \oplus x = 1$ implica la primera desigualtat, i de $\neg x \oplus 1 = 1$ s'obté la segona.

A més, per la condició d'ordre (i), és immediat veure que, per tot parell d'elements $x, y \in A$, es compleixen les següents desigualtats:

$$x \odot y \leq_A x,\ y \leq_A x \oplus y.$$

Lema 2.1.11. Sigui A una MV-àlgebra. Per tot $x, y, z \in A$, l'ordre natural de A compleix

1. $x \leq_A y$ si, i només si, $\neg y \leq_A \neg x$;
2. Si $x \leq_A y$, aleshores $x \oplus z \leq_A y \oplus z$ i $x \odot z \leq_A y \odot z$ *(monotonia de $\oplus$ i $\odot$).*

Demostració.

1. És conseqüència de la condició (i) del Lema 2.1.7.
2. Si $x \leq_A y$, per la condició (iv) del Lema 2.1.7, existeix un element $t \in A$ tal que $y = x \oplus t$. Per tant, $(x \oplus t) \oplus z = y \oplus z$ i, per $(MV1)$ i la condició (iv), obtenim que $x \oplus z \leq_A y \oplus z$. La monotonia de $\odot$ és conseqüència de la monotonia de $\oplus$ i de l'apartat anterior.

□

Definició 2.1.12. Una MV-àlgebra A és una **MV-cadena** si el seu ordre natural és un ordre total, és a dir, si per a qualsevol parell d'elements $x, y \in A$, es compleix que $x \leq_A y$ o $y \leq_A x$.

Observació 2.1.13. $[0, 1]$ és una MV-cadena, ja que el seu ordre natural coincideix amb l'ordre usual dels nombres reals. En efecte, per qualsevol parell d'elements $x, y \in [0, 1]$, es compleix que $x \leq_{[0,1]} y$ si, i només si, $\neg x \oplus y = 1$. Utilitzant les definicions de $\oplus$ i $\neg$ en $[0, 1]$, tenim que aquesta condició és equivalent a la igualtat $\min\{1 - x + y, 1\} = 1$, la qual és trivialment equivalent a $x \leq y$.

Recordem breument unes definicions generals d'àlgebra universal:

Definició 2.1.14. Sigui A un conjunt parcialment ordenat amb l'ordre $\leq$, i siguin $a, b \in A$. L'**ínfim** de a i b és un element $\boldsymbol{a \wedge b} \in A$ que compleix les següents condicions:

(i) $a \wedge b \leq a, \quad a \wedge b \leq b$;

(ii) Per tot $x \in A$ tal que $x \leq a$ i $x \leq b$, es compleix que $x \leq a \wedge b$.

Anàlogament, definim el **suprem** de a i b, denotat per $\boldsymbol{a \vee b}$, si existeix, com el mínim element d'entre tots els elements de A majors o iguals que a i b.

Un conjunt parcialment ordenat A és un **reticle** si, per qualsevol parell d'elements $a, b \in A$, existeixen els elements $a \wedge b$ i $a \vee b \in A$. En aquest cas, és fàcil veure que l'ínfim i el suprem són únics.

Proposició 2.1.15. L'ordre natural de les MV-àlgebres determina una estructura de reticle. Concretament, donada A una MV-àlgebra qualsevol, per tot $x, y \in A$, se satisfan les següents igualtats:

$$x \vee y = (x \odot \neg y) \oplus y = (x \ominus y) \oplus y; \qquad x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = x \odot (\neg x \oplus y).$$

Demostració. Per veure que una MV-àlgebra A amb l'ordre natural és un reticle, cal comprovar que, per tota parella d'elements $x, y \in A$, necessàriament $x \wedge y, x \vee y \in A$. Comencem comprovant que $x \vee y = (x \ominus y) \oplus y$:

(i) D'una banda, per l'apartat 2. del Lema 2.1.11, sabem que $y \leq_A (x \ominus y) \oplus y$. D'altra banda, utilitzant $(MV6)$, tenim que $(x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$ i, d'aquesta manera, obtenim que $x \leq_A (x \ominus y) \oplus y$.

(ii) Suposem que existeix un element $z \in A$ tal que $z \leq_A x$ i $z \leq_A y$. Pel Lema 2.1.7, veure que $(x \ominus y) \oplus y \leq_A z$ és equivalent a demostrar que $\neg((x \ominus y) \oplus y) \oplus z = 1$. Com que $x \leq_A z$ i $y \leq_A z$, tenim que $\neg x \oplus z = 1$ i que $z = (z \ominus y) \oplus y$, respectivament. Per tant,

$$\neg((x \ominus y) \oplus y) \oplus z = (\neg(x \ominus y) \ominus y) \oplus y \oplus (z \ominus y) \underset{(\mathrm{MV6})}{=} (y \ominus \neg(x \ominus y)) \oplus \neg(x \ominus y) \oplus (z \ominus y) =$$

$$= (y \ominus \neg(x \ominus y)) \oplus \neg x \oplus y \oplus (z \ominus y) = (y \ominus \neg(x \ominus y)) \oplus \neg x \oplus z = 1.$$

Així, hem vist que $x \vee y = (x \ominus y) \oplus y$ i, en particular, que $x \vee y \in A$. Ara, la igualtat per l'ínfim n'és conseqüència directa aplicant el Lema 2.1.11. □

Observació 2.1.16. Si A és una MV-cadena, com que l'ordre és total, per tot parell d'elements $x, y \in A$ es compleix que $x \wedge y = \min\{x, y\}$ i $x \vee y = \max\{x, y\}$.

2.2 Homomorfismes i ideals

En aquesta secció treballem els conceptes d'homomorfisme i ideal en el context de les MV-àlgebres. A més, demostrem una sèrie de resultats que seran essencials per a la demostració del teorema de representació subdirecta, desenvolupada a la secció 2.3.

Definició 2.2.1. Siguin A i B dues MV-àlgebres. Es diu que $h : A \longrightarrow B$ és un **homomorfisme** si, per tot $x, y \in A$, h satisfà les següents condicions:

(H1) $h(0) = 0$;

(H2) $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y)$;

(H3) $h(\neg x) = \neg h(x)$.

Com és habitual en àlgebra universal, diem que A i B són **isomorfes** i, ho denotem per $\boldsymbol{A \cong B}$, si existeix un homomorfisme $h : A \longrightarrow B$ injectiu i exhaustiu. A més, seguint la notació habitual, denotem per $\boldsymbol{Ker(h)}$ el conjunt $\{x \in A : h(x) = 0\}$, anomenat **nucli de h**.

Observació 2.2.2. Com que els homomorfismes preserven les operacions $\oplus$ i $\neg$, i tant les operacions $\odot$ i $\ominus$ com l'ordre natural $\leq_A$ estan definits a partir de $\oplus$ i $\neg$, es dedueix de manera trivial que els homomorfismes també compleixen

1. $h(x \odot y) = h(x) \odot h(y)$;
2. $h(x \ominus y) = h(x) \ominus h(y)$;
3. $x \leq_A y$ si, i només si, $h(x) \leq_B h(y)$.

Proposició 2.2.3. Un homomorfisme $h : A \longrightarrow B$ és injectiu si, i només si, $Ker(h) = \{0\}$.

Demostració. La necessitat és conseqüència directa de $(H1)$ i la definició de $Ker(h)$.

D'altra banda, suposem que $Ker(h) = \{0\}$. Siguin $a_1, a_2 \in A$ tals que $h(a_1) = h(a_2)$, és a dir, suposem que $h(a_1) \leq_A h(a_2)$ i $h(a_1) \leq_A h(a_1)$.

Per la condició (ii) d'ordre, obtenim que $h(a_1) \ominus h(a_2) = 0$ i $h(a_2) \ominus h(a_1) = 0$. Per tant, $h(a_1 \ominus a_2) = h(a_2 \ominus a_1) = 0$. Per hipòtesi, això implica que $a_1 \ominus a_2 = a_2 \ominus a_1 = 0$. Així, tornant a aplicar la condició (ii), deduïm que $a_1 = a_2$ i queda demostrada la injectivitat de h. □

Definició 2.2.4. Un **ideal** d'una MV-àlgebra A és un subconjunt I de A complint:

(I1) $0 \in I$;

(I2) Si $x \in I$, $y \in A$ i es compleix que $y \leq_A x$, aleshores $y \in I$;

(I3) Si $x, y \in I$, aleshores $x \oplus y \in I$.

Denotem per $\boldsymbol{\mathcal{I}(A)}$ el conjunt d'ideals de la MV-àlgebra A.

Exemple 2.2.5. Siguin A, B dues MV-àlgebres i sigui $h : A \longrightarrow B$ un homomorfisme qualsevol. El conjunt $Ker(h)$ és un ideal de A.

Definició 2.2.6. Sigui A una MV-àlgebra. La **distància** en A es defineix com la funció $d : A \times A \longrightarrow A$ on, per tot $x, y \in A$,

$$d(x, y) = (x \ominus y) \oplus (y \ominus x).$$

El següent resultat verifica que la funció distància compleix les propietats esperades.

Proposició 2.2.7. Sigui A una MV-àlgebra. Per tot $x, y, z, t \in A$, es compleixen

1. $d(x, y) \geq_A 0$;
2. $d(x, y) = 0$ si, i només si, $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq_A d(x, y) \oplus d(y, z)$;
5. $d(x, y) = d(\neg x, \neg y)$;
6. $d(x \oplus z, y \oplus t) \leq_A d(x, y) \oplus d(z, t)$.

Demostració. La demostració de totes aquestes propietats segueix un procediment extens però estàndard utilitzant les propietats de les MV-àlgebres i les definicions d'ordre natural, ínfim i suprem. De totes maneres, pel lector interessat en els detalls tècnics, vegeu [Cha58a, p.477-478]. □

Aquestes propietats porten a definir la següent relació:

Definició 2.2.8. Sigui I un ideal d'una MV-àlgebra A. Per tot parell d'elements $x, y \in A$, definim la relació $\boldsymbol{\equiv_I}$ per

$$x \equiv_I y \quad \text{si, i només si,} \quad d(x, y) \in I.$$

Abans d'estudiar aquesta relació, recordem un concepte d'àlgebra universal:

Definició 2.2.9. Sigui $\mathcal{A} = \langle A, \{f^{\mathcal{A}} : f \in \mathscr{F}\}\rangle$ una àlgebra i R una relació d'equivalència en A. Es diu que R és una **relació de congruència** si satisfà la condició de compatibilitat següent: per tot $f \in \mathscr{F}$ tal que $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ i per tots $a_i, b_i \in A$, si $a_i R b_i$ per tota $1 \leq i \leq n$, aleshores $f(a_1, ..., a_n) R f(b_1, ..., b_n)$.

Proposició 2.2.10. La relació $\equiv_I$ és una relació de congruència en A. A més, es compleix que $I = \{x \in A : x \equiv_I 0\}$.

Demostració. Veure que $\equiv_I$ és una relació d'equivalència és directe utilitzant les propietats vistes a la Proposició 2.2.7. La reflexivitat, la simetria i la transitivitat són conseqüència de les propietats $2, 3$ i 4, respectivament.

Per demostrar que $\equiv_I$ és relació de congruència falta comprovar que, per tot $x, y, z, t \in A$, es compleixen

1. Si $x \equiv_I y$, aleshores $\neg x \equiv_I \neg y$;
2. Si $x \equiv_I z$ i $y \equiv_I t$, aleshores $x \oplus y \equiv_I z \oplus t$.

Aquestes dues condicions també es comproven directament mitjançant les propietats 5 i 6 de Proposició 2.2.7.

Finalment, la igualtat $I = \{x \in A : x \equiv_I 0\}$ s'obté tenint en compte que $x \equiv_I 0$ si, i només si, $d(x, 0) \in I$, i utilitzant que

$$d(x, 0) = (x \ominus 0) \oplus (0 \ominus x) = (x \odot 1) \oplus (0 \odot \neg x) = x \oplus 0 = x.$$

□

Observació 2.2.11. Aquest resultat ens permet considerar el conjunt quocient per tota MV-àlgebra A, $\boldsymbol{A/I} \coloneqq A/\equiv_I$, i definir, per tot $x, y \in A$, les operacions

$$[x]_I \oplus [y]_I = [x \oplus y]_I; \quad \neg[x]_I = [\neg x]_I.$$

Amb aquestes definicions, és fàcil comprovar que $\langle A/I, \oplus, \neg, [0]_I\rangle$ és una MV-àlgebra, sovint anomenada **MV-àlgebra quocient de $\boldsymbol{A}$ per l'ideal $\boldsymbol{I}$**.

A més, també és directe comprovar que $h_I : A \longrightarrow A/I$ definit per $h_I(x) = [x]_I$ és un homomorfisme amb $Ker(h_I) = I$. Aquest homomorfisme es coneix com **homomorfisme natural de $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A/I}$**.

Lema 2.2.12. La intersecció de qualsevol família d'ideals d'una MV-àlgebra A és també un ideal de A.

Demostració. Sigui $\{I_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ una família qualsevol d'ideals d'una MV-àlgebra. Anomenem

$$I \coloneqq \bigcap_{j\in J} I_j,$$

i comprovem que I és un ideal.

(I1) És clar que $0 \in I$ perquè $0 \in I_j$ per tot $j \in \mathcal{J}$.

(I2) Sigui $x \in I$ i $y \in A$ tal que $y \leq_A x$. Com que $x \in I_j$ per tot $j \in \mathcal{J}$ i $y \leq_A x$, obtenim que $y \in I_j$ per tot $j \in \mathcal{J}$ i, en particular, $y \in I$.

(I3) Si $x, y \in I$, aleshores $x, y \in I_j$ per tot $j \in \mathcal{J}$. Per tant, $x \oplus y \in I_j$ per tot $j \in \mathcal{J}$ i, en particular, $x \oplus y \in I$.

□

Com a conseqüència directa d'aquest resultat, obtenim el següent cas particular:

Corol·lari 2.2.13. Sigui A una MV-àlgebra i $W \subseteq A$. La intersecció de tots els ideals I de A tals que $W \subseteq I$ és també un ideal de A.

Aquest ideal es denota per $\langle \boldsymbol{W} \rangle$ i s'anomena l'**ideal generat per $\boldsymbol{W}$**.

Proposició 2.2.14. Sigui A una MV-àlgebra i $W \subseteq A$. Distingim els següents casos:

(a) Si $W = \emptyset$, aleshores $\langle W \rangle = \{0\}$;

(b) Si $W \neq \emptyset$, aleshores $\langle W \rangle = \{x \in A : x \leq_A w_1 \oplus \ldots \oplus w_k \text{ per certs } w_1, \ldots, w_k \in W\}$.

Demostració. El cas (a) és directe tenint en compte que $\{0\}$ és un ideal de A.

Procedim amb la demostració de (b). Suposem que $W \neq \emptyset$ i definim el conjunt

$$A_W \coloneqq \{x \in A : x \leq_A w_1 \oplus \ldots \oplus w_k \text{ per certs } w_1, \ldots, w_k \in W\},$$

veurem que $A_W = \langle W \rangle$. És clar que $W \subseteq A_W$.

Comprovem que A_W és un ideal de A.

(I1) Sigui $w \in W$ un element qualsevol, com que $0 \leq_A w$, necessàriament $0 \in A_W$.

(I2) Sigui $x \in A_W$ i $y \in A$ de manera que $y \leq_A x$. Com que $x \in A_W$, existeixen $w_1, \ldots, w_k \in W$ tals que $x \leq_A w_1 \oplus \ldots \oplus w_k$. Per la transitivitat de $\leq_A$ s'obté que $y \leq_A w_1 \oplus \ldots \oplus w_k$ i, per tant, $y \in A_W$.

(I3) Si $x, y \in A_W$, aleshores $x \leq_A w_{x_1} \oplus \ldots \oplus w_{x_k}$ i $y \leq_A w_{y_1} \oplus \ldots \oplus w_{y_m}$ per certs $w_{x_1}, \ldots, w_{x_k}, w_{y_1}, \ldots, w_{y_m} \in W$. Per la monotonia de $\oplus$ respecte l'ordre $\leq_A$, deduïm que $x \oplus y \in A_W$, ja que $x \oplus y \leq_A w_{x_1} \oplus \ldots \oplus w_{x_k} \oplus w_{y_1} \oplus \ldots \oplus w_{y_m}$.

Suposem ara que I és un ideal de A tal que $W \subseteq I$. Si $x \in A_W$, aleshores $x \leq_A w_1 \oplus \ldots \oplus w_k$ per certs $w_1, \ldots, w_k \in W$. En particular, $w_1, \ldots, w_k \in I$ i, per tant, $w_1 \oplus \ldots \oplus w_k \in I$. Així, per la condició $(I2)$, obtenim que $x \in I$.

Així doncs, tenim que $A_W \subseteq I$ i, per tant, hem demostrat que A_W és l'ideal de A més petit que conté W, fet que implica la igualtat que volíem demostrar: $A_W = \langle W \rangle$. □

Observació 2.2.15. Si J és un ideal de A i considerem un element $z \in A$, aleshores

$$\langle J \cup \{z\} \rangle = \{x \in A : x \leq_A n.z \oplus a \text{ per certs } n \in \mathbb{N} \text{ i } a \in J\},$$

on $\boldsymbol{n.z} \coloneqq z \oplus \overset{n)}{\ldots} \oplus z$ i $\boldsymbol{0.z} \coloneqq 0$. En efecte, aquesta igualtat és conseqüència de la propietat $(I3)$ de l'ideal J i del fet que {z} és un subconjunt de A amb un sol element.

Definició 2.2.16. Un ideal I d'una MV-àlgebra A és un **ideal primer** si $I \neq A$ i, per tota parella d'elements $x, y \in A$, es compleix

(I4) $x \ominus y \in I$ o $y \ominus x \in I$.

Denotem per $\boldsymbol{\mathcal{P}(A)}$ el conjunt d'ideals primers de la MV-àlgebra A.

Proposició 2.2.17. Sigui A una MV-àlgebra i I un ideal de A. Si existeix un element $a \in A$ tal que $a \notin I$, aleshores existeix un ideal primer P de A de manera que $I \subseteq P$ i $a \notin P$.

Abans de fer la demostració, enunciem un resultat ben conegut de teoria de conjunts:

Lema 2.2.18. (Lema de Zorn). Sigui X un conjunt parcialment ordenat. Si tot subconjunt totalment ordenat de X té una cota superior en X, aleshores X té almenys un element maximal.

Demostració. (Proposició 2.2.17) Definim el conjunt $S_a \coloneqq \{J \in \mathcal{I}(A) : I \subseteq J, a \notin J\}$ i considerem l'ordre en S_a donat per la inclusió. Observem que $S_a \neq \emptyset$ perquè $I \in S_a$. A més, sigui $\{J_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subseteq S_a$ tal que $J_n \subseteq J_{n+1}$ per tot $n \geq 0$.

La unió d'aquesta cadena d'ideals, $\bigcup_{j\in\mathcal{J}} J_j$, és una cota superior de $\{J_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ dins de S_a. Per tant, pel lema de Zorn, existeix un ideal $J \in \mathcal{I}(A)$ maximal respecte les condicions $I \subseteq J$ i $a \notin J$.

Sabem que $J \neq A$, ja que $a \notin J$ i $a \in A$. Per tant, per demostrar que J és un ideal primer de A, només cal comprovar la condició $(I4)$.

Suposem que existeixen $x, y \in A$ tals que $x \ominus y \notin I$ i $y \ominus x \notin I$. Per la maximalitat de J, els ideals $\langle I \cup \{x \ominus y\}\rangle$ i $\langle I \cup \{y \ominus x\}\rangle$ han de contenir, necessàriament, l'element a. Així, existeixen elements $s, t \in I$ i naturals $p, q \geq 1$, tals que

$$a \leq_A s \oplus p.(x \ominus y) \quad \text{i} \quad a \leq_A t \oplus q.(y \ominus x).$$

Sigui $u = s \oplus t$ i $n = \max\{p, q\}$, aleshores

$$a \leq_A u \oplus n.(x \ominus y) \quad \text{i} \quad a \leq_A u \oplus n.(y \ominus x).$$

Per tant, aplicant la definició d'ínfim i utilitzant repetidament $(MV6)$ i algunes propietats bàsiques de les operacions $\oplus$ i $\neg$, obtenim que

$$a \leq_A (u \oplus n.(x \ominus y)) \wedge (u \oplus n.(y \ominus x)) = u \oplus (n.(x \ominus y) \wedge n.(y \ominus x)) = u \oplus 0 = u.$$

Així, $a \in A$, $u \in J$ i $a \leq_A u$ impliquen que $a \in J$, fet que porta a contradicció. □

Corol·lari 2.2.19. Sigui A una MV-àlgebra. Tot ideal $I \neq A$ és intersecció d'ideals primers de A.

Demostració. Com que $I \neq A$, existeix una família d'elements de A, $\{a_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, tal que $A = I \cup \{a_j\}_{j\in\mathcal{J}}$. Per cada $j \in \mathcal{J}$, considerem P_{a_j} l'ideal primer obtingut aplicant la Proposició 2.2.17 prenent $a = a_j$. Aleshores, tenim que

$$I \subseteq \bigcap_{j\in\mathcal{J}} P_{a_j}.$$

Recíprocament, suposem que $x \in \bigcap_{j\in\mathcal{J}} P_{a_j}$. Això implica que $x \neq a_j$ per tot $j \in \mathcal{J}$, ja que $a_j \notin P_{a_j}$. Com que $x \in A$, $x \notin \{a_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ i $A = I \cup \{a_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, obtenim necessàriament que $x \in I$.

Així, hem obtingut que $I = \bigcap_{j\in\mathcal{J}} P_{a_j}$, on, per cada $j \in \mathcal{J}$, P_{a_j} és un ideal primer de A, tal com volíem demostrar. □

Proposició 2.2.20. Siguin A, B dues MV-àlgebres. Si $h : A \longrightarrow B$ és un homomorfisme exhaustiu, aleshores $f : A/Ker(h) \longrightarrow B$ definit, per tot $x \in A$, per $f([x]_{Ker(h)}) = h(x)$ és un isomorfisme.

Demostració. Per definició, és clar que f és un homomorfisme exhaustiu. Per comprovar la injectivitat de f, veiem que $Ker(f) = \{[0]_{Ker(h)}\}$.

D'una banda, la inclusió $\{[0]_{Ker(h)}\} \subseteq Ker(f)$ és directe tenint en compte que $f([0]_{Ker(h)}) = h(0) = 0$.

D'altra banda, si $[x]_{Ker(h)} \in Ker(f)$, aleshores $f([x]_{Ker(h)}) = h(x) = 0$ i, per tant, $x \in Ker(h)$. Així, com que $Ker(h)$ és un ideal de A, per la Proposició 2.2.10 obtenim que $x \equiv_{Ker(h)} 0$, fet que implica la igualtat $[x]_{Ker(h)} = [0]_{Ker(h)}$. □

Proposició 2.2.21. Siguin A, B dues MV-àlgebres i $h : A \longrightarrow B$ un homomorfisme. Es compleix que $Ker(h) \in \mathcal{P}(A)$ si, i només si, $B \neq \{0\}$ i $h(A)$ és una MV-cadena.

Demostració. Observem primer que l'equivalència

$$Ker(h) \neq A \quad \text{si, i només si,} B \neq \{0\},$$

és conseqüència de la propietat $(H1)$, ja que $h(1) = h(\neg 0) = \neg h(0) = \neg 0 = 1$.

A més, per tota MV-àlgebra A, $h(A)$ és també una MV-àlgebra perquè l'homomorfisme h preserva les operacions $\oplus$ i $\neg$. Per tant, només falta demostrar que la condició $(I4)$ sobre els elements de $Ker(h)$ és equivalent a que l'ordre en $h(A)$ sigui total.

Siguin $h(a), h(b) \in h(A)$. Pel Lema 2.1.7, $h(a) \leq_B h(b)$ o $h(b) \leq_B h(a)$ si, i només si, $h(a) \ominus h(b) = 0$ o $h(b) \ominus h(a) = 0$. Com que h preserva les operacions, aquesta condició és equivalent a que $h(a \ominus b) = 0$ o $h(b \ominus a) = 0$, és a dir, $a \ominus b \in Ker(h)$ o $b \ominus a \in Ker(h)$, com volíem veure. □

Corol·lari 2.2.22. Sigui A una MV-àlgebra i I un ideal de A. A/I és una MV-cadena si, i només si, I és un ideal primer.

Demostració. Considerem l'homomorfisme natural h_I de A a A/I. Per definició, $Ker(h_I) = I$ i h_I és exhaustiu, fet que implica que $h_I(A) = A/I$. Ara, el resultat és directe a partir de la Proposició 2.2.21. □

2.3 Teorema de representació subdirecta

La següent secció té per objectiu enunciar i demostrar el teorema de representació subdirecta que permetrà suposar, en certs contextos, que l'ordre de les MV-àlgebres és total.

Comencem amb una definició general de teoria de conjunts:

Definició 2.3.1. El **producte cartesià** d'una família de conjunts $\{X_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ és el conjunt d'aplicacions $f : \mathcal{J} \longrightarrow \bigcup_{j \in \mathcal{J}} X_j$ tals que, per cada $j \in \mathcal{J}$, $f(j) \in X_j$.

En el context de les MV-àlgebres, aquest concepte dona lloc a la següent definició:

Definició 2.3.2. Sigui $\mathcal{J}$ un conjunt no buit. El **producte directe** d'una família de MV-àlgebres $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ és la MV-àlgebra $\langle\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j, \oplus, \neg, 0^*\rangle$ obtinguda dotant el producte cartesià de $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ amb les operacions definides per

$$(\neg f)(i) = \neg f(i), \quad (f \oplus g)(i) = f(i) \oplus g(i);$$

i la constant $0^* : j \mapsto 0_j$, on 0_j denota la constant de cada MV-àlgebra $\langle A_j, \oplus, \neg, 0_j\rangle$.

Observació 2.3.3. Per cada $j \in \mathcal{J}$, considerem $\pi_j : \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j \longrightarrow A_j$ la **projecció j-èssima** definida per $\pi_j(f) = f(j)$. És directe comprovar que π_j és un homomorfisme exhaustiu.

Definició 2.3.4. Una MV-àlgebra A és **producte subdirecte** d'una família de MV-àlgebres $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ si, i només si, existeix un homomorfisme injectiu $h : A \longrightarrow \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ tal que, per cada $j \in \mathcal{J}$, $\pi_j \circ h$ és un homomorfisme exhaustiu.

Teorema 2.3.5. Una MV-àlgebra A és producte subdirecte d'una família $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ si, i només si, existeix una família $\{I_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ d'ideals de A que compleix les següents condicions:

1. Per cada $j \in \mathcal{J}$, $A_j \cong A/I_j$;
2. $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} I_j = \{0\}$.

Demostració. Suposem que A és producte subdirecte d'una família de MV-àlgebres $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$. Considerem l'homomorfisme injectiu $h : A \longrightarrow \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ i definim, per cada $j \in \mathcal{J}$,

$$I_j \coloneqq Ker(\pi_j \circ h).$$

Com que, per tot $j \in \mathcal{J}$, $\pi_j \circ h$ és un homomorfisme, és clar que cada I_j és un ideal de A. Demostrem les dues condicions del teorema:

1. Per definició de producte subdirecte, sabem que, per cada $j \in \mathcal{J}$, l'homomorfisme $\pi_j \circ h : A \longrightarrow A_j$ és exhaustiu. Això implica que $A/Ker(\pi_j \circ h) \cong A_j$ i, com que $I_j = Ker(\pi_j \circ h)$, obtenim que $A/I_j \cong A_j$ per tot $j \in \mathcal{J}$.
2. Suposem que $x \in \bigcap_{j\in\mathcal{J}} I_j$. Això implica que $(\pi_j \circ h)(x) = 0$ per tot $j \in \mathcal{J}$. Per tant, $h(x) = 0^*$ i, per la injectivitat de h, obtenim que $x = 0$. Així, queda demostrat que $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} I_j = \{0\}$.

Recíprocament, suposem que $\{I_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ és una família d'ideals de A que compleix les dues condicions de l'enunciat. Per cada $j \in \mathcal{J}$, anomenem $f_j : A/I_j \longrightarrow A_j$ l'isomorfisme donat per la primera condició, i considerem l'homomorfisme $h : A \longrightarrow \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ definit per $(h(x))(j) = f_j([x]_{I_j})$ per tot $x \in A$.

Suposem que $h(x) = 0^*$. Com que f_j és injectiu, la hipòtesi implica que $[x]_{I_j} = [0]_{I_j}$ per tot $j \in \mathcal{J}$. Considerant els homomorfismes naturals h_{I_j} de A a A/I_j, la condició és equivalent a $h_{I_j}(x) = h_{I_j}(0)$ per tot $j \in \mathcal{J}$. Ara, com que $Ker(h_{I_j}) = I_j$ i $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} I_j = \{0\}$, obtenim que $x = 0$.

Així, hem demostrat que h és un homomorfisme injectiu. Finalment, donat $j \in \mathcal{J}$, l'exhaustivitat de $\pi_j \circ h$ és immediata, ja que $\pi_j \circ h = f_j \circ h_{I_j}$ i tant f_j com h_{I_j} són homomorfismes exhaustius. Per tant, A és producte subdirecte de la família $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$. □

Corol·lari 2.3.6. Una MV-àlgebra A és producte subdirecte d'una família de MV-cadenes $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ si, i només si, existeix una família $\{P_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ d'ideals primers de A tal que $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} P_j = \{0\}$.

Demostració. Suposem que A és producte subdirecte d'una família de MV-cadenes $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$. Pel Teorema 2.3.5, existeix una família $\{I_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ d'ideals de A tal que $A_j \cong A/I_j$ per tot $j \in \mathcal{J}$. Com que els homomorfismes preserven l'ordre, A/I_j són també MV-cadenes i, per tant, $I_j \in \mathcal{P}(A)$.

El recíproc és un cas particular del Teorema 2.3.5 prenent $I_j = A/P_j$ per tot $j \in \mathcal{J}$. □

Teorema 2.3.7. (Teorema de representació subdirecta). Tota MV-àlgebra $A \neq \{0\}$ és producte subdirecte de MV-cadenes.

Demostració. Sigui A una MV-àlgebra no trivial. Sabem que el conjunt $I = \{0\}$ és un ideal de A. A més, com que $I \neq A$, pel Corol·lari 2.2.19, existeix una família d'ideals primers $\{P_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ tal que $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} P_j = I = \{0\}$. Ara, pel Corol·lari 2.3.6, s'obté immediatament el resultat desitjat. □

2.4 Àlgebres de Wajsberg

En aquesta secció presentem les àlgebres de Wajsberg, un enfocament alternatiu per a l'estudi de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz, desenvolupat posteriorment a les MV-àlgebres de Chang. Aquest sistema fou introduït a [FRT84] seguint una formulació més fidel a les definicions originals del càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz, oferint així una perspectiva més intuïtiva i natural.

Definició 2.4.1. Una **àlgebra de Wajsberg** és una àlgebra $\langle A, \to, \neg, 1\rangle$, on A és un conjunt no buit, $\to$ és una operació binària, $\neg$ és una operació unària i 1 és una constant de A de manera que, per tot $x, y \in A$, es satisfan les següents condicions:

(W1) $1 \to x = x$;

(W2) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$;

(W3) $((x \to y) \to y) = ((y \to x) \to x)$;

(W4) $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) = 1$.

Proposició 2.4.2. Sigui $\langle A, \to, \neg, 1\rangle$ una àlgebra de Wajsberg, per tot $x, y, z \in A$, es compleixen

(W5) $x \to x = 1$;

(W6) $x \to 1 = 1$;

(W7) $x \to (y \to x) = 1$;

(W8) $\neg\neg x = x$;

(W9) $x \to y = \neg y \to \neg x$;

(W10) $\neg x = x \to \neg 1$;

(W11) Si $x \to y = y \to x = 1$, aleshores $x = y$;

(W12) Si $x \to y = y \to z = 1$, aleshores $x \to z = 1$;

(W13) $(x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y)) = 1$;

(W14) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

Demostració. La demostració d'aquestes propietats segueix un procediment estàndard combinant les propietats $(W1)-(W4)$. Demostrem $(W5)$ a mode il·lustratiu i deixem la resta de casos sense detallar.

$$1 \underset{\text{(W2)}}{=} (1\to 1)\to((1\to x)\to(1\to x)) \underset{\text{(W1)}}{=} 1\to(x\to x) \underset{\text{(W1)}}{=} x\to x.$$

Els detalls tècnics del procediment a seguir es poden consultar a [FRT84, p. 8-9]. □

Exemple 2.4.3 (Lògica clàssica)**.** L'àlgebra $\langle\{0,1\},\to,\neg,1\rangle$, on les operacions $\to$ i $\neg$ es defineixen com la implicació i la negació clàssica, respectivament, és una àlgebra de Wajsberg.

Exemple 2.4.4 (Lògica infinitvalorada de Łukasiewicz)**.** L'àlgebra Ł$=\langle[0,1],\to,\neg,1\rangle$, introduïda al capítol anterior, amb les operacions definides, per a tot $x,y\in[0,1]$, per

$$x\to y=\min\{1,1-x+y\} \quad \text{i} \quad \neg x=1-x,$$

és també un exemple d'àlgebra de Wajsberg.

Definim a continuació l'exemple principal d'aquesta secció: l'*àlgebra de Lindenbaum* pel càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz.

Definició 2.4.5. Sigui $\Sigma\subseteq Prop(X)$. Per tot parell d'elements $\varphi,\psi\in Prop(X)$, definim la relació $\equiv_\Sigma$ per

$$\varphi\equiv_\Sigma\psi \quad \text{si, i només si,} \quad \Sigma\vdash_{\text{Ł}_\infty}\varphi\to\psi \ \text{ i } \ \Sigma\vdash_{\text{Ł}_\infty}\psi\to\varphi.$$

Proposició 2.4.6. Per tot $\Sigma\subseteq Prop(X)$, la relació $\equiv_\Sigma$ és una relació de congruència en $Prop(X)$.

Demostració. La simetria de la relació és immediata per definició, mentre que la transitivitat es dedueix de l'axioma Ł$_3$. Resta demostrar la reflexivitat i verificar que la relació $\equiv_\Sigma$ és compatible amb les operacions del llenguatge, és a dir, cal comprovar que, per tot $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2\in Prop(X)$, es compleixen

$$\varphi_1\to\psi_1\equiv_\Sigma\varphi_2\to\psi_2 \quad \text{i} \quad \neg\varphi_1\equiv_\Sigma\varphi_2.$$

No entrarem en els detalls d'aquestes demostracions, ja que són tècnicament laborioses i requeririen excessiu espai. Tanmateix, la demostració de la reflexivitat es pot trobar a la Proposició 4.3.4 de [CDM00] i una demostració d'un resultat més fort que la propietat de compatibilitat, en el cas $\Sigma=\emptyset$, es presenta al Teorema 4.4.1 de la mateixa referència. □

Proposició 2.4.7. Sigui $\Sigma\subseteq Prop(X)$. Considerem $\langle Prop(X)/\equiv_\Sigma,\to,\neg,1\rangle$ amb les operacions definides, per tot $\varphi,\psi\in Prop(X)$, per

$$[\varphi]_{\equiv_\Sigma}\to[\psi]_{\equiv_\Sigma}=[\varphi\to\psi]_{\equiv_\Sigma};\qquad \neg[\varphi]_{\equiv_\Sigma}=[\neg\varphi]_{\equiv_\Sigma};$$

i definint la constant $1=Ded(\Sigma)/\equiv_\Sigma$. Aquesta estructura és una àlgebra de Wajsberg, coneguda com l'**àlgebra de Lindenbaum**.

Demostració. Com que $\equiv_\Sigma$ és una relació de congruència, sabem que $Prop(X)/\equiv_\Sigma$ està ben definit. Cal veure que $Ded(\Sigma)/\equiv_\Sigma$ és realment una classe d'equivalència en $Prop(X)/\equiv_\Sigma$.

Comencem comprovant que si $\varphi, \psi \in Ded(\Sigma)$, aleshores $\varphi \equiv_\Sigma \psi$. En efecte, per l'axioma Ł$_1$ tenim que

$$\Sigma \vdash_{Ł_\infty} \varphi \to (\psi \to \varphi) \quad \text{i} \quad \Sigma \vdash_{Ł_\infty} \psi \to (\varphi \to \psi).$$

Per tant, aplicant dues vegades la regla de Modus Ponens als parells

$$\begin{cases} \Sigma \vdash_{Ł_\infty} \varphi, \\ \Sigma \vdash_{Ł_\infty} \varphi \to (\psi \to \varphi); \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \Sigma \vdash_{Ł_\infty} \psi, \\ \Sigma \vdash_{Ł_\infty} \psi \to (\varphi \to \psi); \end{cases}$$

deduïm que $\Sigma \vdash_{Ł_\infty} \psi \to \varphi$ i $\Sigma \vdash_{Ł_\infty} \varphi \to \psi$.

Falta demostrar que si $\varphi \notin Ded(\Sigma)$ i $\psi \in Ded(\Sigma)$, aleshores $\varphi \not\equiv_\Sigma \psi$. Suposem, per arribar a contradicció, que $\varphi \equiv_\Sigma \psi$. Això implica que

$$\Sigma \vdash_{Ł_\infty} \varphi \to \psi \quad \text{i} \quad \Sigma \vdash_{Ł_\infty} \psi \to \varphi.$$

Com que $\psi \in Ded(\Sigma)$, tenim $\Sigma \vdash_{Ł_\infty} \psi$, i, aplicant Modus Ponens, obtenim $\Sigma \vdash_{Ł_\infty} \varphi$, fet que contradiu la hipòtesi $\varphi \notin Ded(\Sigma)$.

Ara, només falta comprovar que, per tot $\varphi, \psi \in Prop(X)$, es compleixen les condicions $(W1) - (W4)$.

(W3) Per la definició de les operacions en $Prop(X)/\equiv_\Sigma$, la igualtat

$$([\varphi]_{\equiv_\Sigma} \to [\psi]_{\equiv_\Sigma}) \to [\psi]_{\equiv_\Sigma} = ([\psi]_{\equiv_\Sigma} \to [\varphi]_{\equiv_\Sigma}) \to [\varphi]_{\equiv_\Sigma}$$

és equivalent a la igualtat $[(\varphi \to \psi) \to \psi]_{\equiv_\Sigma} = [(\psi \to \varphi) \to \varphi]_{\equiv_\Sigma}$, la qual es dedueix de l'axioma Ł$_3$.

La resta de condicions es demostren anàlogament utilitzant els axiomes del càlcul Ł$_\infty$. □

Finalment, l'objectiu és demostrar que les àlgebres de Wajsberg són estructures terme-equivalents a les MV-àlgebres.

Teorema 2.4.8. Sigui $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$ una MV-àlgebra. Si definim $x \to y \coloneqq \neg x \oplus y$, aleshores $A^* = \langle A, \to, \neg, 1\rangle$ és una àlgebra de Wajsberg.

En sentit contrari, considerem $\langle B, \to, \neg, 1\rangle$ una àlgebra de Wajsberg. Si definim $x \oplus y \coloneqq \neg x \to y$ i $0 \coloneqq \neg 1$, aleshores $B' = \langle B, \oplus, \neg, 0\rangle$ és una MV-àlgebra.

A més, aquestes construccions són l'una inversa de l'altra, és a dir, se satisfà que $(A^*)' = A$ i $(B')^* = B$.

Demostració. Sigui $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$ una MV-àlgebra. Cal comprovar que $\langle A, \to, \neg, 1\rangle$, amb les operacions definides com a l'enunciat, compleix les propietats $(W1) - (W4)$.

(W1) $1 \to x = \neg 1 \oplus x \underset{\text{(MV7)}}{=} 0 \oplus x \underset{\text{(MV2)}}{=} x \oplus 0 \underset{\text{(MV3)}}{=} x.$

(W3) $((x \to y) \to y) = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y \underset{\text{(MV6)}}{=} \neg(\neg y \oplus x) \oplus x = ((y \to x) \to x).$

(W4) $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) = \neg(x \oplus \neg y) \oplus (\neg y \oplus x) \underset{\text{(MV2)}}{=} \neg(\neg y \oplus x) \oplus (\neg y \oplus x) \underset{\text{(MV9)}}{=} 1.$

No demostrem la propietat $(W2)$, ja que la demostració és molt més extensa i segueix un procediment anàleg a les demostracions anteriors utilitzant les propietats de les MV-àlgebres vistes a la secció 2.1.

Per obtenir el segon resultat, cal demostrar que, amb les definicions donades, $\langle B, \oplus, \neg, 0\rangle$ satisfà les propietats $(MV1) - (MV6)$.

(MV2) $x \oplus y = \neg x \to y \underset{\text{(W9)}}{=} \neg y \to \neg\neg x \underset{\text{(W8)}}{=} \neg y \to x = y \oplus x.$

(MV1) $x \oplus (y \oplus z) = \neg x \to (\neg y \to z) \underset{\text{(W9)}}{=} \neg x \to (\neg z \to \neg\neg y) \underset{\text{(W8)}}{=} \neg x \to (\neg z \to y) =$
$\underset{\text{(W14)}}{=} \neg z \to (\neg x \to y) = z \oplus (x \oplus y) \underset{\text{(MV2)}}{=} (x \oplus y) \oplus z.$

(MV3) $x \oplus 0 = \neg x \to 0 = \neg x \to \neg 1 \underset{\text{(W9)}}{=} 1 \to x \underset{\text{(W1)}}{=} x.$

(MV4) Directe de $(W8)$.

(MV5) $x \oplus \neg 0 = \neg x \to \neg 0 = \neg x \to 1 \underset{\text{(W5)}}{=} 1.$

(MV6) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg\neg(\neg\neg x \to y) \to y \underset{\text{(W8)}}{=} (x \to y) \to y \underset{\text{(W14)}}{=} (y \to x) \to x =$
$\underset{\text{(W8)}}{=} \neg\neg(\neg\neg y \to x) \to x = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$

Finalment, considerem la MV-àlgebra $(A^*)' = \langle A, \circledcirc, \neg, \neg 1\rangle$. Observem que, per tot parell d'elements $x, y \in A$, se satisfà

$$x \circledcirc y = \neg x \to y = \neg(\neg x) \oplus y \underset{\text{(MV4)}}{=} x \oplus y,$$

fet que implica la igualtat $(A^*)' = A$. De la mateixa manera, considerem l'àlgebra de Wajsberg $(B')^* = \langle B, \Rightarrow, \neg, 1\rangle$. Per tot $x, y \in B$ es compleix

$$x \Rightarrow y = \neg x \oplus y = \neg(\neg x) \to y \underset{\text{(W8)}}{=} x \to y,$$

concloent la igualtat $(B')^* = B$. □

Observació 2.4.9. El teorema anterior demostra la terme-equivalència entre les MV-àlgebres i les àlgebres de Wajsberg. Així, a partir d'ara, parlarem indistintament d'ambdues estructures, utilitzant les operacions $\oplus, \neg, 0$ o les operacions $\to, \neg, 1$, segons les necessitats del context. En particular, tots els conceptes i resultats sobre MV-àlgebres, com homomorfismes, ordre, ideals i el teorema de representació subdirecta, són igualment vàlids per a les àlgebres de Wajsberg.

2.5 Primera aproximació al teorema de completesa

Al llarg d'aquest capítol, hem introduït les MV-àlgebres i les àlgebres de Wajsberg, establint així les bases teòriques necessàries per començar a abordar la demostració del teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz que, com s'ha mencionat prèviament, és l'objectiu principal d'aquest treball. En aquesta secció, veurem alguns resultats que serviran com a primera aproximació a la demostració d'aquest teorema.

Definició 2.5.1. Sigui $\langle A, \to^A, \neg^A, 1\rangle$ una àlgebra de Wajsberg. Una $\boldsymbol{\mathcal{W}_A}$**−interpretació** és una aplicació $I : Prop(X) \longrightarrow A$ tal que per tota $\varphi, \psi \in Prop(X)$, es compleixen

1. $I(\neg\varphi) = \neg^A I(\varphi)$;
2. $I(\varphi \to \psi) = I(\varphi) \to^A I(\psi)$.

Com ja fèiem en el primer capítol, denotem de manera indistinta les connectives i les operacions dins les àlgebres, utilitzant simplement les notacions $\to$ i $\neg$ en ambdós casos.

Definició 2.5.2. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$ i denotem per $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ el conjunt d'àlgebres de Wajsberg. Diem que $\boldsymbol{\Sigma \models_{\mathcal{W}} \varphi}$ si, per tota àlgebra de Wajsberg $A \in \mathcal{W}$ i per tota $\mathcal{W}_A-$interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$, es compleix que $I(\varphi) = 1$.

Lema 2.5.3. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. Si $\Sigma \nvdash_{\mathrm{L}_\infty} \varphi$, aleshores $\Sigma \not\models_{\mathcal{W}} \varphi$.

Demostració. Sigui $A \coloneqq \langle Prop(X)/\equiv_\Sigma, \to, \neg, 1\rangle$ l'àlgebra de Lindenbaum definida a la Proposició 2.4.7. Sabem que A és una àlgebra de Wajsberg per tant, podem considerar la $\mathcal{W}_A-$interpretació

$$I : Prop(X) \longrightarrow Prop(X)/\equiv_\Sigma \quad \text{definida per} \quad I(\varphi) = [\varphi]_{\equiv_\Sigma}.$$

La hipòtesi $\Sigma \nvdash_{\mathrm{L}_\infty} \varphi$ implica que $\varphi \notin Ded(\Sigma)$. En particular,

$$I(\varphi) = [\varphi]_{\equiv_\Sigma} \neq 1.$$

Ara bé, per tot $\psi \in \Sigma$, tenim trivialment que $\psi \in Ded(\Sigma)$. Així,

$$I(\psi) = [\psi]_{\equiv_\Sigma} = 1.$$

És a dir, hem demostrat l'existència d'una àlgebra de Wajsberg $A \in \mathcal{W}$ i d'una $\mathcal{W}_A-$interpretació I tal que, per tot $\psi \in \Sigma$ $I(\psi) = 1$, però $I(\varphi) \neq 1$. Per tant, hem demostrat que $\Sigma \not\models_{\mathcal{W}} \varphi$, com volíem veure. □

Definició 2.5.4. Una àlgebra de Wajsberg $\langle A, \to, \neg, 1\rangle$ és una **Wajsberg cadena** si l'ordre natural heretat per l'estructura MV associada, $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$, segons la correspondència del Teorema 2.4.8, és un ordre total.

Observació 2.5.5. Notem que la terme-equivalència entre les MV-àlgebres i les àlgebres de Wajsberg demostrada a la secció anterior, implica que les MV-cadenes i les Wajsberg cadenes són també terme-equivalents. En particular, qualsevol resultat obtingut per a les MV-cadenes és vàlid per a les Wajsberg cadenes, i viceversa.

Definició 2.5.6. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$ i denotem per $\boldsymbol{\mathcal{WC}}$ el conjunt de les Wajsberg cadenes. Diem que $\boldsymbol{\Sigma \models_{\mathcal{WC}} \varphi}$ si, per tota Wajsberg cadena $A \in \mathcal{WC}$ i per tota $\mathcal{W}_A-$interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$, es compleix que $I(\varphi) = 1$.

Lema 2.5.7. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. Es compleix que $\Sigma \models_{\mathcal{W}} \varphi$ si, i només si, $\Sigma \models_{\mathcal{WC}} \varphi$.

Demostració. Suposem primer que $\Sigma \models_{\mathcal{W}} \varphi$. Aleshores, trivialment se satisfà que $\Sigma \models_{\mathcal{WC}} \varphi$, ja que $\mathcal{WC} \subseteq \mathcal{W}$. Per demostrar el recíproc, suposem que $\Sigma \not\models_{\mathcal{W}} \varphi$ i veiem que $\Sigma \not\models_{\mathcal{WC}} \varphi$.

Per hipòtesi, existeix una àlgebra de Wajsberg $\langle A, \to, \neg, 1\rangle$ i una $\mathcal{W}_A-$ interpretació tal que, per tot $\psi \in \Sigma$, $I(\psi) = 1$, però $I(\varphi) \neq 1$. Pel Teorema de representació subdirecta 2.3.7, sabem que A és producte subdirecte de Wajsberg cadenes. És a dir, existeix una família $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ de Wajsberg cadenes i un homomorfisme injectiu $h : A \longrightarrow \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ tal que, per cada $j \in \mathcal{J}$, $\pi_j \circ h$ és un homomorfisme exhaustiu.

Considerem la següent composició:

$$Prop(X) \xrightarrow{I} A \xrightarrow{h} \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j \xrightarrow{\pi_j} A_j$$

Per a cada $j \in \mathcal{J}$, la composició $\pi_j \circ h \circ I$ és una $\mathcal{W}_{A_j}-$interpretació, ja que π_j i h són homomorfismes i, en particular, preserven les operacions $\to$ i $\neg$.

Sigui $\psi \in \Sigma$. Sabem que $I(\psi) = 1$ i que $h(1) = 1$ per tant, $(\pi_j \circ h \circ I)(\psi) = 1$ per tot $j \in \mathcal{J}$. D'altra banda, com que $I(\varphi) \neq 1$ i h és injectiu, obtenim que $(h \circ I)(\varphi) \neq 1$, fet que implica l'existència d'un índex $j^* \in \mathcal{J}$ tal que $(\pi_{j^*} \circ h \circ I)(\varphi) \neq 1_{j^*}$.

Finalment, prenent $A_{j^*} \in \mathcal{WC}$ obtenim el resultat, ja que hem demostrat l'existència d'una $\mathcal{W}_{A^*_j}-$interpretació $\pi_{j^*} \circ h \circ I : Prop(X) \longrightarrow A_{j^*}$ tal que, per a tot $\psi \in \Sigma$, es compleix que $(\pi_{j^*} \circ h \circ I)(\psi) = 1$, però $(\pi_{j^*} \circ h \circ I)(\varphi) \neq 1$. □

Capítol 3

Grups abelians ordenats: l-grups i to-grups

Seguint la línia del capítol anterior on, en termes algebraics, s'han obtingut resultats que constitueixen una primera aproximació al teorema de completesa mitjançant les MV-àlgebres i les àlgebres de Wajsberg, en aquest capítol s'introdueixen els grups abelians ordenats. El capítol s'inicia amb l'estudi dels grups parcialment ordenats (secció 3.1), continua amb un breu parèntesi dedicat a les MV-àlgebres (secció 3.2) i culmina amb la presentació d'un exemple fonamental de grup parcialment ordenat, l'anomenat $l-$grup de Chang (secció 3.3). Finalment, el capítol es tanca amb la presentació de resultats sobre els grups abelians totalment ordenats i s'estableix la relació entre aquestes estructures i les MV-àlgebres (secció 3.4).

3.1 Grups abelians parcialment ordenats

Definició 3.1.1. Diem que $\langle G, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ és un **l-grup** si $\langle G, +, -, 0\rangle$ és un grup abelià, $\langle G, \wedge, \vee\rangle$ és un reticle i, per tot $x, y, z \in G$, es compleixen les següents igualtats:

$$z + (x \wedge y) = (z + x) \wedge (z + y) \quad \text{i} \quad z + (x \vee y) = (z + x) \vee (z + y).$$

Definició 3.1.2. Sigui $\langle G, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ un $l-$grup. Diem que G és un **to-grup** si la relació d'ordre sobre G és total, és a dir, si per tot parell $x, y \in G$, $x \leq_G y$ o $y \leq_G x$.

Definició 3.1.3. Sigui $\langle G, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ un $l-$grup i $u \in G$ un element de G tal que $0 \leq_G u$. Definim

$$\boldsymbol{\Gamma(G, u)} \coloneqq \langle [0, u], \oplus, \neg, 0\rangle,$$

on $[0, u] = \{x \in G : 0 \leq_G x \leq_G u\}$ i, per cada $x, y \in [0, u]$, les operacions es defineixen per

$$x \oplus y = u \wedge (x + y); \quad \neg x = u - x.$$

Proposició 3.1.4. Sigui $\langle G, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ un $l-$grup i $u \in G$ tal que $0 \leq_G u$, aleshores $\Gamma(G, u)$ és una MV-àlgebra.

Demostració. Si $u = 0$, aleshores $[0, u] = \{0\}$ i $\Gamma(G, u)$ és la MV-àlgebra trivial.

Suposem ara que $0 <_G u$. Cal comprovar que, per tot $x, y, z \in [0, u]$, es compleixen les condicions $(MV1) - (MV6)$.

(MV1) $x\oplus(y\oplus z) = x\oplus(u\wedge(y+z)) = u\wedge(x+(u\wedge(y+z))) = u\wedge((x+u)\wedge(x+y+z)) =$
$= u \wedge (x+y+z) = u \wedge ((z+u)\wedge(x+y+z)) = u \wedge (z+(u\wedge(x+y))) =$
$= u \wedge ((u\wedge(x+y))+z) = (u\wedge(x+y))\oplus z = (x\oplus y)\oplus z.$

(MV2) $x \oplus y = u \wedge (x+y) = u \wedge (y+x) = y \oplus x.$

(MV3) $x \oplus 0 = u \wedge (x+0) = u \wedge x = x.$

(MV4) $\neg\neg x = \neg(u-x) = u-(u-x) = u-u+x = x.$

(MV5) $x\oplus\neg 0 = x\oplus(u-0) = x\oplus u = u\wedge(x+u) = (0+u)\wedge(x+u) = (u+0)\wedge(u+x) =$
$= u + (0\wedge x) = u+0 = u-0 = \neg 0.$

Per demostrar la condició $(MV6)$, utilitzarem la igualtat: $-(x\wedge y) = -x\vee -y$.

(MV6) $\neg(\neg x\oplus y)\oplus y = y\oplus\neg(\neg x\oplus y) = u\wedge(y+\neg(\neg x\oplus y)) = u\wedge(y+(u-(\neg x\oplus y))) =$
$= u\wedge(y+(u-(u\wedge(u-x+y)))) = u\wedge(y+u-(u\wedge(u-x+y))) =$
$= u\wedge(y+u+(-u\vee(-u+x-y))) = u\wedge((y+u-u)\vee(y+u-u+x-y)) =$
$= u\wedge(y\vee x) = y\vee x = x\vee y$. Per tant, x i y són intercanviables.

□

Proposició 3.1.5. L'ordre natural de la MV-àlgebra $\Gamma(G,u)$ coincideix amb l'ordre de $[0,u]$ heretat de G per restricció.

Demostració. Comprovem que, per tot $x, y \in [0,u]$, la condició $x \leq_{\Gamma(G,u)} y$ és equivalent a la condició $x \leq_G y$.

Suposem que $x \leq_{\Gamma(G,u)} y$. Per tant, existeix un element $z \in \Gamma(G,u)$ tal que $x\oplus z = y$. Això implica que $y = u\wedge(x+z)$ i, en particular, obtenim que $x = u\wedge x \leq_G u\wedge(x+z) = y$.

Recíprocament, suposem que $x \leq_G y$ i considerem l'element $z = y - x$. Per hipòtesi, sabem que $0 \leq_G z$ i també tenim que $z = y-x \leq_G u-x \leq_G u$. Per tant, $z \in [0,u]$. A més, com que $x+z = y \leq_G u$, obtenim que $y = x+z = u\wedge(x+z) = x\oplus z$ i podem concloure que $x \leq_{\Gamma(G,u)} y$. □

Definició 3.1.6. Siguin G i H dos $l-$grups. Una aplicació $h : G \longrightarrow H$ és un **l-homomorfisme** si h és un homomorfisme de grups i un homomorfisme de reticles, és a dir, si, per tot $x, y \in G$, es compleixen

(i) $h(x+y) = h(x)+h(y)$;
(ii) $h(0) = 0$;
(iii) $h(-x) = -h(x)$;
(iv) $h(x\wedge y) = h(x)\wedge h(y)$;
(v) $h(x\vee y) = h(x)\vee h(y)$.

Si, a més, per a certs elements $0 <_G u \in G$ i $0 <_H v \in H$, es compleix que $h(u) = v$, diem que h és un **l-homomorfisme unital**.

Proposició 3.1.7. Siguin G i H dos $l-$grups i $h : G \longrightarrow H$ un $l-$homomorfisme unital tal que $h(u) = v$. La restricció $h_{\restriction [0,u]}$ és un homomorfisme exhaustiu entre les MV-àlgebres $\Gamma(G,u)$ i $\Gamma(H,v)$.

Demostració.

(H1) $h(0) = 0$, ja que h és un homomorfisme de grups.

(H2) Per tot $x, y \in [0, u]$,
$h(x \oplus y) = h(u \wedge (x + y)) = h(u) \wedge h(x + y) = h(u) \wedge (h(x) + h(y)) = h(x) \oplus h(y)$.

(H3) Per tot $x \in [0, u]$,
$h(\neg x) = h(u - x) = h(u) - h(x) = v - h(x) = \neg h(x)$.

A més, com que h és un homomorfisme de reticles, és clar que h preserva l'ordre. En conseqüència, l'exhaustivitat de h és directa. □

Exemple 3.1.8. Considerem $\langle [0, 1], \oplus, \neg, 0\rangle$ la MV-àlgebra de l'Exemple 2.1.4. Observem que $\Gamma(\mathbb{R}, 1) = \langle [0, 1], \oplus, \neg, 0\rangle$. A més, per tot $u \in \mathbb{R}_{>0}$, es compleix

$$\Gamma(\mathbb{R}, 1) \cong \Gamma(\mathbb{R}, u).$$

En efecte, és ben sabut que l'aplicació $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $h(x) = ux$ és un $l-$homomorfisme bijectiu entre els $l-$grups $\langle \mathbb{R}, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ tal que $h(1) = u$. Aplicant la Proposició 3.1.7, concloem que $h_{\restriction [0,1]}$ és un isomorfisme entre les MV-àlgebres $\Gamma(\mathbb{R}, 1)$ i $\Gamma(\mathbb{R}, u)$.

Considerem ara la MV-àlgebra $\Gamma(\mathbb{Z} \overrightarrow{\times} \mathbb{Z}, (1, 0))$ definida a l'Exemple 2.1.6.

Proposició 3.1.9. Per tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix que $\Gamma(\mathbb{Z} \overrightarrow{\times} \mathbb{Z}, (n, 0)) \cong \Gamma(\mathbb{Z}, n)$.

Demostració. És directa veient que l'aplicació $h : \Gamma(\mathbb{Z} \overrightarrow{\times} \mathbb{Z}, (n, 0)) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{Z}, n)$ definida per tot $a \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq a \leq n$ per $h((a, 0)) = a$ és un isomorfisme. □

Observació 3.1.10. Notem que, tot i que els grups $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}$ no són isomorfs, el resultat anterior demostra que les MV-àlgebres corresponents sí que ho són. Per tal d'evitar aquesta situació, cal imposar més condicions sobre la unitat u de les MV-àlgebres $\Gamma(G, u)$.

Definició 3.1.11. Sigui $\langle G, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ un $l-$grup. Un element $u \in G$ és una **unitat forta de G** si es compleixen les següents condicions:

(i) $0 <_G u$;

(ii) Per cada $x \in G$, existeix un nombre natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq_G nu$, on $|x|$ denota el **valor absolut de x** definit com $\boldsymbol{|x| := x \vee (-x)}$, i $nu = u + \overset{n)}{\cdots} + u$.

Observació 3.1.12. Tractant amb $l-$grups i MV-àlgebres $\Gamma(G, u)$, és important remarcar la diferència entre les notacions:

$$nx = x + \overset{n)}{\cdots} + x \quad \text{i} \quad n.x = x \oplus \overset{n)}{\cdots} \oplus x.$$

Tot i que no entrarem en detall en definicions de teoria de categories, és important destacar el següent resultat:

Observació 3.1.13. Considerem $\mathcal{A}$ la categoria dels $l-$grups amb unitat forta formada pels objectes $\langle G, u\rangle$, on G és un $l-$grup i u és una unitat forta de G i les fletxes h, on h és un $l-$homomorfisme unital.

Amb els resultats obtinguts en aquesta secció, hem vist que $\mathbf{\Gamma}$, definit per

$$\mathbf{\Gamma}(\langle G, u\rangle) \coloneqq \Gamma(G, u), \quad \mathbf{\Gamma}(h) \coloneqq h_{\restriction [0,u]},$$

és un functor de la categoria $\mathcal{A}$ a la categoria $\mathcal{MV}$ formada per les MV-àlgebres i els homomorfismes entre MV-àlgebres.

L'objectiu que ens proposem a continuació és invertir aquest functor, mostrant que a partir d'una MV-àlgebra es pot obtenir un $l-$grup amb unitat forta i que els homomorfismes de MV-àlgebres corresponen naturalment a l-homomorfismes unitals.

3.2 Successions bones

Definició 3.2.1. Sigui A una MV-àlgebra. Diem que una successió $a = (a_1, a_2, \ldots)$ d'elements de A és **bona** si es compleixen les següents condicions:

(i) Per tot índex i, $a_i = a_i \oplus a_{i+1}$;

(ii) Existeix un índex n tal que $a_r = 0$ per tot $r > n$.

En tal cas, escrivim simplement $(a_1, \ldots, a_n)$ per denotar la successió $(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)$.

Exemple 3.2.2. Considerem el grup abelià additiu $\mathbb{R}$ amb l'ordre natural. Per cada nombre $x \geq 0$, denotem per $\lfloor x \rfloor$ la part entera de x i per $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$ la part fraccionària de x. És clar que es compleix

$$x = 1 + \overset{n)}{\ldots} + 1 + \lfloor x \rfloor + 0 + \cdots + 0, \quad \text{per un cert } n \in \mathbb{N}.$$

Definim la successió $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (1^n, \lfloor x \rfloor)$ i comprovem que és una successió bona d'elements de $\mathbb{R}$. En efecte, per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$, es compleix que

$$x_i = 1 = 1 \oplus x_{i+1} = x_i \oplus x_{i+1}$$

i, si $i = n + 1$,

$$x_{n+1} = \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor \oplus 0 = x_{n+1} \oplus x_{n+2}.$$

Donada una MV-àlgebra A, denotem per $\boldsymbol{M_A}$ el conjunt de successions bones d'elements de A. A continuació, equipem aquest conjunt amb una operació binària tancada en M_A.

Lema 3.2.3. Sigui A una MV-àlgebra i considerem elements $x, y \in A$. Són equivalents

1. $x = x \oplus y$; 2. $\neg y = \neg x \oplus \neg y$; 3. $x = 1$ o $y = 0$.

Aquest resultat es presenta sense demostració, ja que la prova és un procediment tècnic poc rellevant pel desenvolupament d'aquest treball. Tot i això, la demostració es pot consultar a [CDM00, p. 27].

Proposició 3.2.4. Sigui A una MV-cadena i $(a_1, \ldots, a_n) \in M_A$. Existeix un nombre $p \in \mathbb{N}$ i un element $x \in A$ tals que

$$(a_1, \ldots, a_n) = (1^p, x);$$

on 1^p denota la $p-$tupla de $1'$s consecutius.

Demostració. Sigui $(a_1, \ldots, a_n)$ una successió bona d'elements d'una MV-cadena A. Sabem que, per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$, es compleix la condició $a_i = a_i \oplus a_{i+1}$. Pel Lema 3.2.3, obtenim que, per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$, es compleix una de les següents condicions:

$$a_i = 1 \quad \text{o} \quad a_{i+1} = 0.$$

Considerem un índex qualsevol $i \in \{1, \ldots, n\}$ i distingim els dos casos possibles.

1. Suposem que $a_i = 1$. Aleshores, $a_{i-1} = a_{i-1} \oplus 1 = 1$ i, per inducció, obtenim que $a_j = 1$ per tot $1 \leq j \leq i$.

2. Suposem que $a_{i+1} = 0$. La igualtat $0 = 0 \oplus a_{i+2}$ implica que $a_{i+2} = 0$. Novament, per inducció, obtenim que $a_j = 0$ per tot $j > i$.

Així, la successió $(a_1, \ldots, a_n)$ ha de ser de la forma $(1, \ldots, 1, x, 0, \ldots, 0)$, on x és un element de A no necessàriament diferent de 0 ni de 1. □

Definició 3.2.5. Sigui A una MV-àlgebra i $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_m) \in M_A$. Definim la **suma de successions bones**, $\boldsymbol{a +_s b}$, com la successió $c = (c_1, \ldots, c_{n+m})$ tal que, per cada $i \in \{1, \ldots, n+m\}$, c_i es defineix per

$$c_i = a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus \ldots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i = a_i \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{i-1} a_k \odot b_{i-k} \right) \oplus b_i.$$

Lema 3.2.6. Sigui A una MV-àlgebra i siguin $(1^p, x), (1^q, y)$ dues successions bones d'elements de A. Es compleix que

$$(1^p, x) +_s (1^q, y) = (1^{p+q}, x \oplus y, x \odot y).$$

Demostració. Anomenem $c = (c_1, \ldots, c_{p+q+2})$ la successió $(1^p, x) +_s (1^q, y)$. Cal demostrar que $c = (1^{p+q}, x \oplus y, x \odot y)$.

Per $1 \leq i \leq p+q$, un dels termes del sumatori de c_i és igual a 1, fet que implica que $c_i = 1$. En efecte, si $1 \leq i \leq p$, aleshores $a_i = 1$. En canvi, si $p+1 \leq i \leq p+q$, tenim que $1 \leq i - p \leq q$ i, per tant, el terme $k = p$ del sumatori $\left(\bigoplus_{k=1}^{i-1} a_k \odot b_{i-k} \right)$ és $a_p \odot b_{i-p} = 1 \odot 1 = 1$.

La igualtat del terme $c_{p+q+1} = x \oplus y$ és conseqüència de les següents observacions:

1. Si $k < p$, aleshores $a_k \odot b_{p+q+1-k} = a_k \odot 0 = 0$.

2. Si $k = p$, aleshores $a_p \odot a_{q+1} = 1 \odot y = y$.

3. Si $k = p+1$, aleshores $a_{p+1} \odot b_q = x \odot 1 = x$.

4. Si $k > p+1$, aleshores $a_k \odot b_{p+q+1-k} = 0 \odot b_{p+q+1-k} = 0$.

Anàlogament, $c_{p+q+2} = x \odot y$, ja que

1. Si $k < p+1$, aleshores $a_k \odot b_{p+q+2-k} = a_k \odot 0 = 0$.
2. Si $k = p+1$, aleshores $a_{p+1} \odot b_{q+1} = x \odot y$.
3. Si $k > p+1$, aleshores $a_k \odot b_{p+q+2-k} = 0 \odot b_{p+q+2-k} = 0$. □

Lema 3.2.7. Sigui A una MV-cadena. Per tot parell d'elements $x, y \in A$, es compleix la següent igualtat:

$$(x \oplus y) \oplus (x \odot y) = x \oplus y.$$

Demostració. Si $x \oplus y = 1$, aleshores el resultat és immediat, ja que $1 \oplus (x \odot y) = 1$.

Suposem que $x \oplus y \neq 1$. Per demostrar la igualtat, veiem que $x \odot y = 0$. En efecte, la hipòtesi $x \oplus y \neq 1$ és equivalent a suposar que $\neg x \not\leq_A y$. Així doncs, com que A és una MV-cadena, necessàriament s'ha de complir que $y <_A \neg x$. Fet que implica, per definició d'ordre, que $x \odot y = 0$. □

Proposició 3.2.8. Sigui A és una MV-cadena. La suma de dues successions bones d'elements de A és una successió bona d'elements de A.

Demostració. Sigui A una MV-cadena i considerem $a, b \in M_A$. Per la Proposició 3.2.4 i pel Lema 3.2.7, sabem que

$$a +_s b = (1^p, x) +_s (1^q, y) = (1^{p+q}, x \oplus y, x \odot y);$$

per certs $p, q \in \mathbb{N}$ i certs $x, y \in A$.

Anomenem $c = a +_s b = (c_1, \ldots, c_{p+q+2})$.

Si $i \in \{1, \ldots, p+q\}$ és clar que $c_i = c_i \oplus c_{i+1}$, ja que $c_i = 1$. El cas $i = p+q+2$ és directe tenint en compte que $c_{p+q+3} = 0$. Finalment, si $i = p+q+1$ el resultat és immediat aplicant el Lema 3.2.7, ja que

$$c_{p+q+1} = x \oplus y = (x \oplus y) \oplus (x \odot y) = c_{p+q+1} \oplus c_{p+q+2}.$$

Així doncs, queda demostrat que $a +_s b$ és una successió bona d'elements de A. □

Ara cal verificar que aquest resultat continua sent vàlid quan s'elimina la hipòtesi d'ordre total.

Lema 3.2.9. Suposem que A és producte subdirecte d'una família de MV-àlgebres $\{A_j\}_{j \in \mathcal{J}}$. Una successió $(a_1, \ldots, a_n)$ d'elements de A és una successió bona si, i només si, per cada $j \in \mathcal{J}$, la seqüència $(\pi_j(a_1), \ldots, \pi_j(a_n))$ és una successió bona de A_j i existeix un nombre $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n > n_0$ i per tot $j \in \mathcal{J}$, $\pi_j(a_n) = 0$.

Demostració. La prova és immediata tenint en compte que, per tot índex i, la condició $a_i = a_i \oplus a_{i+1}$ és equivalent a $\pi_j(a_i) = \pi_j(a_i) \oplus \pi_j(a_{i+1})$ per tot $j \in \mathcal{J}$. □

Corol·lari 3.2.10. Sigui A una MV-àlgebra. Si $a, b \in M_A$, aleshores $a +_s b \in M_A$.

Demostració. El resultat és conseqüència del Teorema de representació subdirecta 2.3.7, juntament amb la Proposició 3.2.8, que garanteix que en una MV-cadena el conjunt M_A és tancat sota la suma i el Lema 3.2.9, que permet traslladar aquesta propietat al producte subdirecte. □

Observació 3.2.11. Degut al resultat anterior, per demostrar identitats de la suma en M_A podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que A és una MV-cadena.

Teorema 3.2.12. Sigui A una MV-àlgebra. L'estructura $\langle M_A, +_s, (0)\rangle$ és un monoide abelià, és a dir, l'operació $+_s$ en M_A és associativa, commutativa i (0) n'és l'element neutre. A més, per tota successió $a, b, c \in M_A$, se satisfan les següents propietats:

1. Si $a +_s b = a +_s c$, aleshores $b = c$. *(llei de cancel·lació)*
2. Si $a +_s b = (0)$, aleshores $a = b = (0)$. *(llei zero)*

Demostració. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que A és una MV-cadena.

La commutativitat de $+_s$ és conseqüència de la commutativitat de $\oplus$ i $\odot$. També és clar que (0) és l'element neutre, ja que per tot element $x \in A$ es compleixen les igualtats $x \oplus 0 = x$ i $x \odot 0 = 0$.

L'associativitat de $+_s$ es dedueix de la següent igualtat en MV-àlgebres:

$$(x \odot y) \oplus ((x \oplus y) \odot z) = (x \odot z) \oplus ((x \oplus z) \odot y),$$

que es pot trobar demostrada a [CDM00, p. 27–29].

La llei zero és immediata a partir de la definició de suma de successions bones i del fet que, per tot $x, y \in A$, la condició $x \oplus y = 0$ és equivalent a que $x = y = 0$.

Finalment, per demostrar la llei de cancel·lació, suposem que $a = (1^p, x)$, $b = (1^q, y)$ i $c = (1^r, z)$ compleixen la igualtat $a +_s b = a +_s c$. Equivalentment, suposem que

$$(1^{p+q}, a \oplus b, a \odot b) = (1^{p+r}, a \oplus c, a \odot c).$$

Si algun dels elements x, y, z és igual a 1, el resultat és trivial. Per tant, podem suposar que x, y, z són diferents de 1. Distingim els següents casos:

(a) *Cas* $q = r$.

La hipòtesi implica que $x \oplus y = x \oplus z$ i $x \odot y = x \odot z$. Per tant,

$$\max\{\neg x, y\} = \neg x \oplus (y \odot x) = \neg x \oplus (z \odot x) = \max\{\neg x, z\},$$

$$\min\{\neg x, y\} = \neg x \odot (x \oplus y) = \neg x \odot (x \oplus z) = \min\{\neg x, z\},$$

d'on deduïm que $y = z$.

(b) *Cas* $q = r - 1$.

La hipòtesi implica que $x \oplus y = 1$, $x \odot y = x \oplus z$ i que $x \oplus z = 0$. De la segona igualtat, deduïm que $y = 1$ i $z = 0$, cosa que porta a contradicció amb la hipòtesi $y \neq 1$.

(c) *Cas* $q < r - 1$.

La hipòtesi implica que $x \odot y = 1$ i, per tant, $x = y = 1$, fet que porta a contradicció.

La resta de casos porten a contradicció per simetria. Per tant, concloem que $q = r$ i $y = z$, fet que implica que $b = c$. □

A continuació, dotem el monoide M_A d'una estructura de reticle definint un ordre parcial sobre els seus elements.

Lema 3.2.13. Sigui A una MV-àlgebra, i considerem dues successions bones d'elements de A: $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Són equivalents

1. Existeix una successió bona c d'elements de A tal que $b +_s c = a$.
2. $b_i \leq_A a_i$ per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definició 3.2.14. Sigui A una MV-àlgebra i siguin $a, b \in M_A$. Diem que $\boldsymbol{b \leq_{M_A} a}$ si, i només si, a i b compleixen les condicions equivalents 1-2 anteriors.

Proposició 3.2.15. Amb la definició anterior, $\leq_{M_A}$ és un ordre parcial sobre M_A. A més, per tot $a, b, c \in M_A$, es compleix que

$$a \leq_{M_A} b, \text{ si, i només si, } a +_s c \leq_{M_A} b +_s c.$$

Demostració. Veure que $\leq_{M_A}$ és un ordre parcial és directe a partir de la definició tenint en compte que $\leq_A$ és un ordre parcial.

Per demostrar que és invariant per translació, suposem que $a \leq_{M_A} b$. Això significa que existeix una successió $b^* \in M_A$ tal que $a +_s b^* = b$. Sumant c a ambdues parts, obtenim $b +_s c = a +_s b^* +_s c$, i, per commutativitat de $+_s$, es té que $a +_s c \leq_{M_A} b +_s c$.

Recíprocament, si $a +_s c \leq_s b +_s c$, aleshores existeix una successió $c^* \in M_A$ tal que $a +_s c +_s c^* = b +_s c$. Per la llei de cancel·lació, podem simplificar la igualtat i obtenim que $a +_s c^* = b$, fet que implica que $a \leq_{M_A} b$. □

Teorema 3.2.16. L'ordre $\leq_{M_A}$ determina una estructura de reticle sobre el conjunt M_A. En particular, per tota MV-àlgebra A i per qualsevol parell de successions $a, b \in M_A$, l'ínfim i el suprem són donats per

$$\boldsymbol{a \vee_s b} = (a_1 \vee b_1, \ldots, a_n \vee b_n, \ldots), \qquad \boldsymbol{a \wedge_s b} = (a_1 \wedge b_1, \ldots, a_n \wedge b_n, \ldots).$$

A més, per tot $a, b, c \in M_A$, se satisfan les següents igualtats:

$$c +_s (a \vee_s b) = (c +_s a) \vee_s (c +_s b); \quad c +_s (a \wedge_s b) = (c +_s a) \wedge_s (c +_s b).$$

Demostració. Cal demostrar que les successions $c = (c_1, c_2, \ldots)$ i $d = (d_1, d_2, \ldots)$ definides per $c_i = a_i \vee b_i$ i $d_i = a_i \wedge b_i$, respectivament, són successions bones.

Pel Teorema de representació subdirecta 2.3.7, A és producte subdirecte d'una família de MV-cadenes $\{A_j\}_{j \in \mathcal{J}}$. A més, es compleix que $\pi_j(a_i \vee b_i) = \pi_j(a_i) \vee \pi_j(b_i)$ per tot índex i i tot $j \in \mathcal{J}$, ja que les projeccions π_j són homomorfismes en cada MV-cadena A_j. Així, per demostrar que $c \in M_A$, n'hi ha prou amb comprovar que, per cada $j \in \mathcal{J}$, la successió

$$c_{\pi_j} = (\pi_j(a_1) \vee \pi_j(b_1), \pi_j(a_2) \vee \pi_j(b_2), \ldots)$$

és una successió bona de A_j.

Com que cada A_j és una MV-cadena, tenim que $a_{\pi_j} = (1^p, x)$, $b_{\pi_j} = (1^q, y)$ per certs $x, y \in A_j$. Per tant, la successió c_{π_j} és de la forma

$$c_{\pi_j} = (\max\{\pi_j(a_1), \pi_j(b_1)\}, \max\{\pi_j(a_2), \pi_j(b_2)\}, \ldots) = (1^{\max\{p,q\}}, z);$$

on $z = x$, $z = y$, o $z = \max\{x, y\}$, depenent de si $p > q$, $p < q$ o $p = q$, respectivament.

Així doncs, $c_{\pi_j} \in M_{A_j}$ per tot $j \in \mathcal{J}$ i, aplicant el Lema 3.2.9, concloem que $c \in M_A$.

Amb aquest resultat, és directe demostrar que $d \in M_A$, ja que l'ínfim de dos elements x, y d'una MV-àlgebra es defineix mitjançant el suprem: $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$. A més, veure que $a \vee_s b$ i $a \wedge_s b$ són el suprem i l'ínfim de les successions a i b respecte l'ordre $\leq_{M_A}$ és immediat, ja que ho són terme a terme.

Finalment, considerem $a = (1^p, x)$, $b = (1^q, y)$ i $c = (1^r, z)$ i demostrem la igualtat pel suprem, ja que la demostració per l'ínfim és anàloga. Per fer-ho, distingim casos.

(a) Si $p = q$, aleshores $a \vee_s b = (1^p, x \vee y)$ i, per tant,

$$c \oplus_s (a \vee_s b) = (1^{p+r}, z \oplus (x \vee y), z \odot (x \vee y)).$$

A més,

$$\begin{aligned}(c +_s a) \vee_s (c +_s b) = (1^{p+r}, z \oplus x, z \odot y) \vee_s (1^{q+r}, z \oplus y, z \odot y) = \\ = (1^{p+r}, (z \oplus x) \vee (z \oplus y), (z \odot x) \vee (z \odot y)).\end{aligned}$$

Així, per la propietat de monotonia de $\oplus$ i $\odot$, obtenim la igualtat desitjada.

(b) Si $p > q$, aleshores $a \vee_s b = (1^p, x)$ i, per tant,

$$c +_s (a \vee_s b) = (1^{p+r}, z \oplus x, z \odot x).$$

Com que $c +_s a = (1^{p+r}, z \oplus x, z \odot x)$, $c +_s b = (1^{q+r}, z \oplus y, z \odot y)$ i $p + r > q + r$, només cal assegurar que, si $z \oplus y = 1$, aleshores $(z \oplus x) \vee (z \odot y) = (z \oplus x)$. Ara bé, això és evident, ja que

$$z \odot y \leq z \leq z \oplus x.$$

El cas $p < q$ és simètric al cas $p > q$. Per tant, en qualsevol dels casos es compleix la igualtat desitjada. □

3.3 El l-grup de Chang

En aquesta secció, fixem una MV-àlgebra A qualsevol i considerem el monoide-reticle M_A de les successions bones de A presentat en la secció anterior.

Definició 3.3.1. Siguin $a, b, a', b' \in M_A$. Definim la relació $\equiv_{\boldsymbol{M_A}}$ per

$$(a, b) \equiv_{M_A} (a', b') \quad \text{si, i només si,} \quad a +_s b' = a' +_s b.$$

Observació 3.3.2. És senzill comprovar que la relació $\equiv_{M_A}$ és una relació d'equivalència sobre $M_A \times M_A$. Així, podem considerar el conjunt quocient $\boldsymbol{G_A} \coloneqq (M_A \times M_A)/\equiv_{M_A}$. Per cada $(a, b) \in M_A \times M_A$, denotem per $\boldsymbol{[(a, b)]}$ la seva corresponent classe d'equivalència en G_A.

Proposició 3.3.3. Sigui $\langle G_A, +, -, 0\rangle$, on l'element 0 és $[((0), (0))]$ i, per tot parell de classes $[(a, b)], [(c, d)] \in G_A$, les operacions es defineixen per

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a +_s c, b +_s d)]; \qquad -[(a, b)] = [(b, a)].$$

Llavors, G_A és un grup abelià.

Demostració. La demostració és immediata, ja que M_A és un monoide abelià. □

Definició 3.3.4. Siguin $[(a,b)], [(c,d)] \in G_A$. Diem que **[(c,d)] domina [(a,b)]**, i escrivim $\boldsymbol{[(a,b)] \preceq [(c,d)]}$ si, i només si, $a +_s d \leq_{M_A} c +_s b$.

Proposició 3.3.5. La relació $\preceq$ és un ordre parcial que determina una estructura de reticle sobre el conjunt G_A. Concretament, el suprem i l'ínfim d'un parell de classes d'equivalència $[(a,b)], [(c,d)] \in G_A$ són donats per

$$[(a,b)] \bigvee [(c,d)] = [((a +_s d) \vee_s (c +_s b), b +_s d)];$$

$$[(a,b)] \bigwedge [(c,d)] = [((a +_s d) \wedge_s (c +_s b), b +_s d)].$$

Demostració. La demostració de la reflexivitat, antisimetria i transitivitat és rutinària. Per demostrar que $[((a +_s d) \vee_s (c +_s b), b +_s d)]$ és el suprem de $[(a,b)]$ i $[(c,d)]$, observem que la desigualtat $a +_s d \leq_{M_A} (a +_s d) \vee (c +_s b)$, juntament amb la propietat d'invariància per translació, impliquen $a +_s d +_s b \leq_{M_A} (a +_s d) \vee (c +_s b) +_s b$. Així, obtenim que

$$[(a,b)] \preceq [((a +_s d) \vee (c +_s b), b +_s d)].$$

De manera similar, també tenim que $[(c,d)] \preceq [((a +_s d) \vee (c +_s b), b +_s d)]$. Això mostra que $[((a +_s d) \vee (b +_s c), b +_s d)]$ és una cota superior de $[(a,b)]$ i $[(c,d)]$.

Per demostrar que és la més petita, considerem $[(p,q)]$ una altra cota superior i demostrem que existeix una successió $e \in M_A$ tal que

$$((a +_s d) \vee_s (c +_s b)) +_s q +_s e = p +_s (b +_s d).$$

Com que $[(p,q)]$ és una cota superior de $[(a,b)]$ i $[(c,d)]$, existeixen successions $f, g, \in M_A$ tals que $p +_s b = a +_s q +_s f$ i $p +_s d = c +_s q +_s g$. A més, per definició de suprem, es compleix que $f \vee_s g \leq_{M_A} f +_s g$. Per tant, existeix una successió $e \in M_A$ tal que $(f \vee_s g) + e = f +_s g$. Així, obtenim que

$$(p +_s b) +_s (p +_s d) = (a +_s q +_s f) +_s (c +_s q +_s g) = a +_s q +_s c +_s q +_s (f \vee_s g) +_s e.$$

D'altra banda, per la Proposició 3.2.16, deduïm les següents igualtats:

$$\begin{aligned}(p +_s b) +_s (p +_s d) &= (e +_s q) +_s ((q +_s a +_s c +_s f) \vee_s (q +_s a +_s c +_s g) = \\ &= (e +_s q) +_s ((p +_s b +_s c) \vee_s (p +_s d +_s a)) = \\ &= (e +_s q +_s p) +_s ((b +_s c) \vee_s (d +_s a)).\end{aligned}$$

Finalment, per la propietat de cancel·lació, arribem a la igualtat desitjada:

$$p +_s b +_s d = ((a +_s d) \vee_s (c +_s b)) +_s q +_s e.$$

□

Teorema 3.3.6. L'estructura $\langle G_A, +, -, 0, \bigwedge, \bigvee \rangle$ és un $l-$grup anomenat **l-grup de Chang**.

Demostració. A les Proposicions 3.3.3 i 3.3.5 s'ha demostrat que $\langle G_A, +, -, 0 \rangle$ és un grup abelià i que $\langle G_A, \bigwedge, \bigvee \rangle$ és un reticle, respectivament. Només falta comprovar que, per tota classe d'equivalència $[(a,b)], [(c,d)], [(p,q)] \in G_A$, es compleixen les propietats

1. $[(p,q)] + ([(a,b)] \bigvee [(c,d)]) = ([(p,q)] + [(a,b)]) \bigvee ([(p,q)] + [(c,d)])$;
2. $[(p,q)] + ([(a,b)] \bigwedge [(c,d)]) = ([(p,q)] + [(a,b)]) \bigwedge ([(p,q)] + [(c,d)])$.

Aquestes igualtats es dedueixen de la Proposició 3.2.16 i de les definicions en G_A. Demostrarem la primera igualtat, i la segona es demostra de manera anàloga.

D'una banda, per la definició de suma i suprem en G_A, tenim que

$$\begin{aligned}[(p,q)] + ([(a,b)] \bigvee [(c,d)]) &= [(p,q)] + [((a +_s d) \vee_s (c +_s b), b +_s d)] = \\ &= [(p +_s ((a +_s d) \vee_s (c +_s b)), q +_s b +_s d)].\end{aligned}$$

D'altra banda, similarment obtenim que

$$\begin{aligned}([p,q]+[a,b]) \bigvee ([p,q]+[c,d]) &= [((p+_s a+_s q+_s d) \vee_s (p+_s c+_s q+_s b), q+_s b+_s q+_s d)] = \\ &= [((p +_s q) +_s ((a +_s d) \vee_s (c +_s b)), q +_s b +_s q +_s d)].\end{aligned}$$

La igualtat entre les classes d'equivalència

$$[p +_s ((a +_s d) \vee_s (c +_s b)), q +_s b +_s d] = [(p +_s q) +_s ((a +_s d) \vee_s (c +_s b)), q +_s b +_s q +_s d]$$

és equivalent a la igualtat

$$p +_s ((a +_s d) \vee_s (c +_s b)) +_s q +_s b +_s q +_s d = p +_s q +_s ((a +_s d) \vee_s (c +_s b)) +_s q +_s b +_s d.$$

Aquesta darrera igualtat es segueix directament de la propietat de cancel·lació. □

Lema 3.3.7. L'aplicació $a \mapsto [(a,(0))]$ defineix un isomorfisme entre el monoide reticulat $\langle M_A, +_s, (0), \wedge_s, \vee_s \rangle$ i el conjunt $G_A^+ = \{[(a,b)] \in G_A : b \leq_{M_A} a\}$ amb l'estructura de reticle heretada per la restricció de l'ordre $\preceq$ a G_A^+.

Demostració. Definim l'aplicació $f : M_A \longrightarrow G_A^+$ com $f(a) = [(a,(0))]$. És evident que $f(a) \in G_A^+$, ja que $(0) \leq_{M_A} a$ per tot $a \in M_A$. Cal demostrar que f és un morfisme de reticles, és a dir, cal veure que, per tot $a, b \in M_A$, es compleixen

$$f(a \vee_s b) = f(a) \bigvee f(b); \quad f(a \wedge_s b) = f(a) \bigwedge f(b).$$

Per la definició de suprem en G_A, tenim que

$$f(a) \bigvee f(b) = [((a + (0)) \vee_s (b + (0)), (0) + (0))] = [(a \vee_s b, (0))] = f(a \vee_s b, (0)).$$

Un procediment anàleg demostra la mateixa propietat per l'ínfim, ja que l'ínfim en G_A es comporta igualment.

Per demostrar la injectivitat de f, suposem que $f(a) = f(b)$, és a dir, $[(a,(0))] = [(b,(0))]$. Això implica que $a +_s (0) = (b) +_s (0)$ i, per tant, $a = b$.

Finalment, per demostrar l'exhaustivitat de f, cal veure que per qualsevol $[(a,b)] \in G_A^+$, existeix una successió $c \in M_A$ tal que $[(a,b)] = [(c,(0))]$. Aquest resultat és conseqüència de l'equivalència entre les següents condicions:

1. $[(a,b)] = [(c,(0))]$; 2. $a = b +_s c$; 3. $b \leq_A a$.

Així, hem demostrat que l'aplicació f és un isomorfisme entre el monoide reticulat M_A i el reticle G_A^+. □

Proposició 3.3.8. L'element $\boldsymbol{u_A} \coloneqq [((1),(0))]$ és una unitat forta del $l-$grup G_A.

Demostració. Cal demostrar que, per tot $[(a,b)] \in G_A$, existeix un nombre $n \in \mathbb{N}$ tal que $|[(a,b)]| \leq_{G_A} nu_A$.

Primer, suposem que $[(a,b)] \in G_A^+$. Pel Lema 3.3.7, podem suposar que

$$[(a,b)] = [(c,(0))] \quad \text{per alguna successió } c = (c_1,\ldots,c_m) \in M_A.$$

Aleshores, l'element mu_A domina $[(c,(0))]$, ja que $c \leq_{M_A} (1^m)$. Per tant, com que $-[(c,(0))] = [((0),c)] \preceq [(c,(0))]$, tenim que

$$|[(c,(0))]| = [(c,(0))] \bigvee -[(c,(0))] = [(c,(0))] \preceq mu_A.$$

A continuació, considerem un element qualsevol $[(a,b)] \in G_A$. Es compleix que

$$|[(a,b)]| = [(a,b)] \bigvee -[(a,b)] = ([((0),(0))] \bigvee [(a,b)]) + ([((0),(0))] \bigvee -[(a,b)]).$$

Com que els dos sumands pertanyen a G_A^+, sabem que existeixen $n,m \in \mathbb{N}$ tals que $|[(a,b)]| \preceq nu_A + mu_A = (n+m)u_A$. □

Proposició 3.3.9. Siguin G_A i G_B dos $l-$grups i u_A, u_B unitats fortes de G_A i G_B, respectivament. Sigui $h : A \longrightarrow B$ un homomorfisme entre MV-àlgebres. Considerem $h^* : G_A \longrightarrow G_B$ definit, per tot $[(a,b)] \in G_A$, per

$$h^*([(a,b)]) = [(h_s(a), h_s(b))],$$

on h_s es defineix per tota $a = (a_1,\ldots,a_n) \in M_A$, com $h_s(a) = (h(a_1),\ldots,h(a_n))$.

Aleshores, h^* és un $l-$homomorfisme unital.

Demostració. És clar que si $(a_1,\ldots,a_n) \in M_A$, aleshores $(h(a_1),\ldots,h(a_n)) \in M_B$, ja que h és un homomorfisme entre les MV-àlgebres A i B. Verificar que h^* satisfà les condicions de $l-$homomorfisme és directe tenint en compte que M_A i M_B són monoides reticulats i observant que per l'operació $-$ es compleix

$$-h^*([a,b]) = -[h_s(a), h_s(b)] = [h_s(b), h_s(a)] = h^*([b,a]) = h^*(-[a,b]).$$

Finalment, h^* és un homomorfisme unital, ja que

$$h^*(u_A) = h^*([(1),(0)]) = [(h(1)),(h(0))] = [(1),(0)] = u_B.$$

□

Observació 3.3.10. Notem que, definint $\boldsymbol{\Xi}$ per

$$\boldsymbol{\Xi}(A) \coloneqq \langle G_A, u_A \rangle, \quad \boldsymbol{\Xi}(h) \coloneqq h^*,$$

el Teorema 3.3.6 i la Proposició 3.3.9 demostren que $\boldsymbol{\Xi}$ és un functor de la categoria $\mathcal{MV}$ a la categoria $\mathcal{A}$. De fet, es pot demostrar que les categories $\mathcal{A}$ i $\mathcal{MV}$ són equivalents, veient que les composicions dels functors $\boldsymbol{\Gamma\Xi}$ i $\boldsymbol{\Xi\Gamma}$ són els functors identitat $\mathcal{MV}$ i $\mathcal{A}$, respectivament.

No demostrarem l'equivalència en la seva totalitat, ja que la seva demostració excedeix l'abast d'aquest treball. A més, per a la demostració del teorema de completesa, que és l'objectiu d'aquest treball, no requerim un resultat tan fort. Ens limitarem a demostrar resultats parcials que condueixen a l'equivalència $\boldsymbol{\Gamma\Xi}(A) \cong A$. La demostració de l'equivalència entre les categories $\mathcal{A}$ i $\mathcal{MV}$ és atribuïda a Daniele Mundici, [Mun58], tot i que també es pot trobar demostrada a [CDM00, pp. 139-146], referència principal d'aquesta secció.

Teorema 3.3.11. Tota MV-àlgebra A és isomorfa a la MV-àlgebra $\Gamma(G_A, u_A)$.

Demostració. Definim l'aplicació $\varphi_A : A \longrightarrow \Gamma(G_A, u_A)$ com $\varphi_A(a) = [((a), (0))]$. És evident que $\varphi_A(a) \in \Gamma(G_A, u_A)$, ja que, per tot $a \in A$, es compleix que

$$[((0), (0))] \preceq [((a), (0))] \preceq u_A.$$

Cal demostrar que, per tot $a, b \in A$, φ_A satisfà les condicions d'homomorfisme.

(H1) Per la definició de φ_A, tenim que $\varphi_A(0) = [((0), (0))]$.

(H2) Per les definicions de les operacions en $\Gamma(G_A, u_A)$, tenim que

$$\varphi_A(a) \oplus \varphi_A(b) = u_A \bigwedge([((a), (0))] + [((b), (0))]) = [((1), (0))] \bigwedge[((a \oplus b, a \odot b), (0))] =$$
$$= [(((1) \wedge_s (a \oplus b), 0 \wedge_s (a \odot b)), (0))].$$

Ara, per la definició de suprem en M_A, obtenim el resultat:

$$[(((1) \wedge_s (a \oplus b), 0 \wedge_s (a \odot b)), (0))] = [((a \oplus b), (0))] = \varphi_A(a \oplus b).$$

(H3) Com que $\neg\varphi_A(a) = u_A - \varphi_A(a) = [((1), (0))] - [((a), (0))] = [((1), (a))]$ i també $\varphi_A(\neg a) = [((\neg a), (0))]$, la condició es redueix a la igualtat $[((1), (a))] = [((\neg a), (0))]$. Ara bé, aquesta igualtat es dedueix del fet que

$$(\neg a) +_s (a) = (\neg a \oplus a, \neg a \odot a) = (1) = (1) + (0).$$

La injectivitat de φ_A és immediata, ja que si $[((a), (0))] = [((0), (0))]$, aleshores $(a) = a = 0$.

Finalment, per demostrar que φ_A és exhaustiu, veiem que per qualsevol element $[(a, b)] \in \Gamma(G_A, u_A)$, existeix un element $c \in A$ tal que $[(a, b)] = [((c), (0))]$.

Sigui $[(a, b)] \in G_A$. La condició $[((0), (0))] \preceq [(a, b)] \preceq [((1), (0))]$ és equivalent a la desigualtat $b \leq_{M_A} a \leq_{M_A} (1) +_s b$. Si $b \leq_{M_A} a$, aleshores existeix una successió $c' \in M_A$ tal que $a = b +_s c$. Així, $[(a, b)] = [(c', (0))]$. A més, imposant que $a \leq_{M_A} b +_s (1)$, obtenim que $c' \leq_{M_A} (1)$, fet que implica que $c' = (c)$ per alguna $c \in A$.

Per tant, queda demostrada l'exhaustivitat de φ_A, obtenint així que φ_A és un isomorfisme entre les MV-àlgebres A i $\Gamma(G_A, u_A)$. □

Corol·lari 3.3.12. Una MV-àlgebra A és una MV-cadena si, i només si, G_A és un $to-$grup.

Demostració. Suposem que A és una MV-cadena. Llavors, pel Lema 3.2.13, $\leq_{M_A}$ és un ordre total, i conseqüentment, pel Lema 3.3.4, obtenim que $\preceq$ és també un ordre total. Per tant, G_A és un $to-$grup.

El recíproc és conseqüència del Teorema 3.3.11 i de la Proposició 3.1.5, on es demostra que l'ordre de la MV-àlgebra $\Gamma(G, u)$ coincideix amb l'ordre de $[0, u]$ heretat de G per restricció. □

3.4 Grups abelians totalment ordenats

El corol·lari de la secció anterior subratlla la importància dels grups abelians totalment ordenats en l'estudi de les MV-cadenes. Per aquesta raó, en la present secció s'analitzen aquestes estructures, centrant-se principalment en un resultat fonamental, atribuït a Y. S. Gurevich i A. I. Kokorin l'any 1963 i enunciat a [Há98].

Definició 3.4.1. Sigui $\langle G, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ un $l-$grup.

(i) G és **arquimedià** si per tot parell d'elements $x, y \in G$ tals que $0 \leq_G x, y$, existeix un nombre $n \in \mathbb{N}$ de manera que $y <_G nx$.

(ii) Sigui S un subconjunt de G. Definim el **subgrup de G generat per S**, $\langle S\rangle$, com la intersecció de tots els subgrups de G que contenen S. Diem que G és **finitament generat** si existeix un subconjunt finit $S \subseteq G$ tal que $G = \langle S\rangle$.

Considerem el *to*-grup additiu $\langle \mathbb{R}, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ amb l'ordre habitual, $\leq$, en $\mathbb{R}$.

Lema 3.4.2 (Teorema de Hölder)**.** Si $\langle G, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ és un *to*-grup arquimedià, aleshores existeix una aplicació $h : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que h és un $l-$homomorfisme injectiu. És a dir, G és isomorf d'ordre a un subgrup de $\mathbb{R}$.

Lema 3.4.3. Si $\langle G, +, -, 0, \wedge, \vee\rangle$ és un $to-$grup finitament generat, aleshores existeixen $to-$grups $H_0, \dots H_m$ arquimedians i finitament generats i $h : G \longrightarrow H_0 \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} H_m$ una aplicació bijectiva de manera que h és un $l-$homomorfisme bijectiu entre G i $H_0 \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} H_m$.

Observació 3.4.4. El **producte lexicogràfic** $H_0 \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} H_m$ fa referència al $to-$grup determinat pel producte cartesià $H_0 \times \cdots \times H_m$ amb l'**ordre lexicogràfic** $\leq_{H_{lex}}$ definit per l'equivalència:

$(h_0, \dots, h_m) \leq_{H_{lex}} (h'_0, \dots, h'_m)$ si, i només si, $h_i = h'_i$ per tot $i \in \{0, \dots, k\}$ o bé, pel primer i tal que $h_i \neq h'_i$, tenim que $h_i <_{H_i} h'_i$.

Aquests dos resultats deriven d'un teorema conegut en àlgebra abstracta, el *Hahn Embedding Theorem*. Una demostració purament constructiva del teorema de Hölder es pot trobar a [Rib99, pp. 60], mentre que el segon lema es demostra a [HHJ92, pp. 187].

Definició 3.4.5. Sigui $\mathscr{F}$ un llenguatge algebraic amb símbols funcionals d'arietat τ. Considerem $\mathcal{A} = \langle A, \{f^{\mathcal{A}} : f \in \mathscr{F}\}\rangle$ i $\mathcal{B} = \langle B, \{f^{\mathcal{B}} : f \in \mathscr{F}\}\rangle$ dues àlgebres de tipus $\mathscr{F}$. Diem que $\mathcal{A}$ és **localment submergible** en $\mathcal{B}$ si per a tot subconjunt finit $X \subseteq A$, existeix una aplicació injectiva $h : X \longrightarrow B$ tal que, per tot $f \in \mathscr{F}$ i per tot $\{a, a_1, \dots, a_{\tau(f)}\} \subseteq X$, es compleix que

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\tau(f)}) = a \quad \text{si, i només si,} \quad f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{\tau(f)})) = h(a).$$

Observació 3.4.6. En el cas que el llenguatge sigui finit, per demostrar que una àlgebra $\mathcal{A}$ és localment submergible en una àlgebra $\mathcal{B}$, n'hi ha prou amb comprovar la implicació dreta de la definició. Concretament, per a qualsevol subconjunt finit $X \subseteq A$, cal demostrar l'existència d'una aplicació injectiva $h : X \longrightarrow B$ tal que, per tot $f \in \mathscr{F}$ i per a qualsevol conjunt $\{a, a_1, \dots, a_{\tau(f)}\} \subseteq X$:

$$\text{si } f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\tau(f)}) = a, \text{ aleshores } f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{\tau(f)})) = h(a).$$

Suposem que aquesta implicació dreta és certa i veiem que el recíproc n'és conseqüència. Donat un subconjunt finit $X \subseteq A$ qualsevol, definim

$$X^* \coloneqq X \cup \{f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots x_{\tau(f)}) : f \in \mathscr{F}, \quad x_1, \dots, x_{\tau(f)} \in X\}$$

És clar que $X^* \subseteq A$ i que X^* és finit, ja que tant X com $\mathscr{F}$ són conjunts finits. Per tant, per hipòtesi, existeix una aplicació injectiva $h : X^* \longrightarrow B$ tal que, per tot $f \in \mathscr{F}$ i per tot $\{a, a_1, \ldots, a_{\tau(f)}\} \subseteq X^*$, si es compleix que $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_{\tau(f)}) = a$, aleshores $f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_{\tau(f)})) = h(a)$.

Així, la restricció $h_{\restriction X} : X \longrightarrow B$ és una aplicació injectiva tal que, per tot $f \in \mathscr{F}$ i per tot $\{x, x_1, \ldots, x_{\tau(f)}\} \subseteq X$, si es compleix que $f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_{\tau(f)}) \in X$, aleshores $f^{\mathcal{B}}(h_{\restriction X}(x_1), \ldots, h_{\restriction X}(x_{\tau(f)})) = h_{\restriction X}(x)$, ja que $x_1, \ldots, x_{\tau(f)} \in X \subseteq X^*$.

Vegem que també se satisfà la implicació contrària. Per definició de X^*, tenim que $f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_{\tau(f)}) \in X^*$. Com que, trivialment, $f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_{\tau(f)}) = f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_{\tau(f)})$, també se satisà que $f^{\mathcal{B}}(h(x_1), \ldots, h(x_{\tau(f)})) = h(f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_{\tau(f)}))$.

Per tant, hem obtingut les igualtats següents:

$$h(f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_{\tau(f)})) = f^{\mathcal{B}}(h(x_1), \ldots, h(x_{\tau(f)})) = f^{\mathcal{B}}(h_{\restriction X}(x_1), \ldots, h_{\restriction X}(x_{\tau(f)})) = h_{\restriction X}(x) =$$

$$= h(x),$$

que per l'injectivitat de h, impliquen la igualtat $f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_{\tau(f)}) = x$.

Teorema 3.4.7. (Gurevich-Kokorin). Tot $to-$grup és localment submergible en $\mathbb{R}$.

Demostració. Sigui $X \subseteq G$ un subconjunt finit qualsevol, i sigui $G_X := \langle X \rangle$ el subgrup de G generat per X. Com que G_X és un $to-$grup finitament generat, pel Lema 3.4.3, existeixen $to-$grups arquimedians i finitament generats $H_0, \ldots, H_m$ i una aplicació

$$h : G_X \longrightarrow H_0 \overset{\rightarrow}{\times} \cdots \overset{\rightarrow}{\times} H_m,$$

tal que h és un $l-$homomorfisme bijectiu.

Així, per demostrar el teorema podem suposar que $G_X = H_0 \overset{\rightarrow}{\times} \cdots \overset{\rightarrow}{\times} H_m$.

Pel teorema de Hölder, sabem que H_i és isomorf d'ordre a un subgrup de $\mathbb{R}$ per tot $i \in \{0, \ldots, m\}$. Per tant, si definim $(X)_i := \{\, x_i \mid (x_0, \ldots, x_m) \in X \,\}$, el conjunt de les i-èssimes coordenades dels elements de X, tenim que

$$X \subseteq (X)_0 \times \cdots \times (X)_m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}.$$

Procedim per inducció sobre m per construir una aplicació injectiva

$$f_m : (X)_0 \times \cdots \times (X)_m \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que, per tot $(x_0^1, \ldots, x_m^1)$, $(x_0^2, \ldots, x_m^2)$, $(x_0^3, \ldots, x_m^3) \in (X)_0 \times \cdots \times (X)_m$, es compleixen les següents condicions:

1. Si $(x_0^1, \ldots, x_m^1) + (x_0^2, \ldots, x_m^2) = (x_0^3, \ldots, x_m^3)$, aleshores
$$f_m((x_0^1, \ldots, x_m^1)) + f_m((x_0^2, \ldots, x_m^2)) = f_m((x_0^3, \ldots, x_m^3)).$$
2. Si $(0, \ldots, 0) \in (X)_0 \times \cdots \times (X)_m$, aleshores $f_m((0, \ldots, 0)) = 0$.
3. Si $-(x_0^1, \ldots, x_m^1) = (x_0^2, \ldots, x_m^2)$, aleshores $-f_m((x_0^1, \ldots, x_m^1)) = f_m(x_0^2, \ldots, x_m^2)$.
4. Si $(x_0^1, \ldots, x_m^1) \wedge (x_0^2, \ldots, x_m^2) = (x_0^3, \ldots, x_m^3)$, aleshores
$$f_m((x_0^1, \ldots, x_m^1)) \wedge f_m((x_0^2, \ldots, x_m^2)) = f_m((x_0^3, \ldots, x_m^3)).$$

5. Si $(x_0^1, \ldots, x_m^1) \vee (x_0^2, \ldots, x_m^2) = (x_0^3, \ldots, x_m^3)$, aleshores

$$f_m((x_0^1, \ldots, x_m^1)) \vee f_m((x_0^2, \ldots, x_m^2)) = f_m((x_0^3, \ldots, x_m^3)).$$

El cas base és directe, ja que $(X)_0 \subseteq \mathbb{R}$ és finit.

Suposem que existeix una aplicació injectiva $f_{m-1} : (X)_0 \times \cdots \times (X)_{m-1}$ complint les condicions anteriors. Anomenem

$$Y_{m-1} \coloneqq f_{m-1}((X)_0 \times \cdots \times (X)_{m-1}) \subseteq \mathbb{R},$$

la imatge d'aquesta aplicació.

Denotem per $|x|$ el valor absolut de $x \in \mathbb{R}$ i definim

$$\gamma \coloneqq \min_{\substack{u,v \in Y_{m-1} \\ u \neq v}} |u - v|; \quad \mu \coloneqq 2 \max_{x \in (X)_m} |x|.$$

Podem suposar que $\mu < \gamma$. En cas contrari, reescalem H_m mitjançant l'automorfisme $y \mapsto cy$ per un c adequat.

Definim $f_m : (X)_0 \times \cdots \times (X)_{m-1} \times (X)_m \longrightarrow \mathbb{R}$ segons:

$$f_m((x_0, \ldots, x_{m-1}, x_m)) = f_{m-1}((x_0, \ldots, x_{m-1})) + x_m.$$

La injectivitat de f_m és conseqüència directa de la injectivitat de f_{m-1}.

A més, és fàcil comprovar que es compleixen les condicions $1 - 3$. Vegem-ho per la suma a mode il·lustratiu. Siguin $(x_0^1, \ldots, x_m^1)$, $(x_0^2, \ldots, x_m^2)$, $(x_0^3, \ldots, x_m^3) \in (X)_0 \times \cdots \times (X)_m$ i suposem que

$$(x_0^1, \ldots, x_m^1) + (x_0^2, \ldots, x_m^2) = (x_0^3, \ldots, x_m^3).$$

En particular, això implica que $x_m^1 + x_m^2 = x_m^3$. Per tant, tenim que

$$f_m((x_0^1, \ldots, x_m^1)) + f_m((x_0^2, \ldots, x_m^2)) = f_{m-1}((x_0^1, \ldots, x_{m-1}^1)) + f_{m-1}((x_0^2, \ldots, x_{m-1}^2)) + x_m^3.$$

Per hipòtesi inductiva, obtenim el resultat:

$$f_m((x_0^1, \ldots, x_m^1)) + f_m((x_0^2, \ldots, x_m^2)) = f_{m-1}((x_0^3, \ldots, x_{m-1}^3)) + x_m^3 = f_m((x_0^3, \ldots, x_m^3)).$$

Per verificar les condicions 4 i 5, demostrem que f_m preserva l'ordre. Considerem $(u_1, x_1), (u_2, x_2) \in Y_{m-1} \times (X)_m \subseteq \mathbb{R}^2$ i suposem que $(u_1, x_1) \leq_{\mathbb{R}^2_{lex}} (u_2, x_2)$. Això implica un dels següents casos:

$$\begin{cases} u_1 < u_2, \\ u_1 = u_2, x_1 \leq x_2. \end{cases}$$

En el primer cas es compleix que $u_1 + x_1 \leq u_2 + x_2$, ja que $|u_1 - u_2| \geq \gamma > \nu \geq |x_1| + |x_2|$. En el segon cas, el resultat és immediat.

Així, f_m és una aplicació injectiva que compleix les condicions desitjades. □

Proposició 3.4.8. Tota MV-àlgebra A és localment submergible en $[0, 1]$.

Demostració. Sigui $\langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$ una MV-àlgebra i considerem $\leq_A$ l'ordre natural sobre A. Pel Teorema de representació subdirecta 2.3.7 podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que A és una MV-cadena. A més, usant l'equivalència entre to-grups i MV-cadenes, sabem

que A és isomorfa a la MV-cadena $\Gamma(G_A, u_A)$. Per tant, n'hi ha prou amb comprovar que $\Gamma(G_A, u_A)$ és localment submergible en $[0, 1]$.

Sigui $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \Gamma(G_A, u_A)$ un subconjunt finit qualsevol i considerem el conjunt $G_n \subseteq G_A$ format per

$$G_n = \{0, u_A, a_1, \ldots, a_n, -a_1, \ldots, -a_n\} \cup \{a_i + a_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Pel Teorema 3.4.7, G_A és localment submergible en $\mathbb{R}$. En particular, com que G_n és un subconjunt finit de G_A, existeix una aplicació injectiva $f : G_n \longrightarrow \mathbb{R}$ complint les condicions $1 - 5$.

Definim ara l'aplicació $h : \{a_1, \ldots, a_n\} \longrightarrow \Gamma(\mathbb{R}, f(u_A))$ per

$$h(a_i) \coloneqq f(a_i), \quad \text{per tot } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Observem que h és injectiva, ja que f és injectiva. A més, per tot $a_i, a_j, a_k \in \{a_1, \ldots, a_n\}$, es compleixen les següents condicions:

1. Si $a_i = 0$, aleshores $h(a_i) = f(a_i) = 0$.

2. Si $a_i \oplus a_j = a_k$, aleshores $h(a_i) \oplus h(a_j) = h(a_k)$.

   En efecte, per la definició de $\oplus$ en $\Gamma(G_A, u_A)$, la hipòtesi $a_i \oplus a_j = a_k$ és equivalent a la igualtat $u_A \wedge (a_i + a_j) = a_k$. Per tant,

   $$f(u_A \wedge (a_i + a_j)) = f(a_k).$$

   Com que f compleix les condicions 1 i 4, tenim que

   $$f(u_A \wedge (a_i + a_j)) = f(u_A) \wedge f(a_i + a_j) = f(u_A) \wedge (f(a_i) + f(a_j)).$$

   Finalment, per la definició de $\oplus$ en $\Gamma(\mathbb{R}, f(u_A))$, obtenim que

   $$f(u_A) \wedge (f(a_i) + f(a_j)) = f(a_i) \oplus f(a_j).$$

   Així doncs, $f(a_i) \oplus f(a_j) = f(a_k)$ i, en particular, $h(a_i) \oplus h(a_j) = h(a_k)$.

3. Si $\neg a_i = a_j$, aleshores $\neg f(a_i) = f(a_j)$.

   La demostració és anàloga al cas anterior usant que $\neg a_i = 1 - a_i$.

A més, com es demostra a l'Exemple 3.1.8, $\Gamma(\mathbb{R}, 1)$ és isomorfa a $\Gamma(\mathbb{R}, u)$, per tot $u > 0$. Per tant, com que u_A és unitat forta de G_A i f preserva l'ordre, es té que $f(u_A) > 0$, la qual cosa implica que la MV-àlgebra $\Gamma(\mathbb{R}, f(u_A))$ és isomorfa a $\Gamma(\mathbb{R}, 1)$. Així, es conclou que $\Gamma(G_A, u_A)$ és localment submergible en $[0, 1]$. □

Corol·lari 3.4.9. Tota Wajsberg cadena és localment submergible en l'àlgebra Ł.

Demostració. El resultat és immediat fent ús de la terme-equivalència entre les MV-àlgebres i les àlgebres de Wajsberg. En particular, observant que a partir de l'àlgebra de Wajsberg Ł$= \langle [0, 1], \to, \neg, 1\rangle$ i definint l'operació $\oplus$ segons $x \oplus y = \neg x \to y$, tal com es fa en 2.4.8, s'obté la MV-àlgebra $[0, 1]$ i, posteriorment, aplicant la Proposició 3.4.8. □

Capítol 4

El teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz

En aquest capítol es presenta una demostració detallada del teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz. A més, també es discuteixen breument les estratègies originals emprades per C. C. Chang a [Cha59] i les reformulacions posteriors presentades a [CDM00], posant en relleu les diferències conceptuals i argumentatives entre les dues demostracions. Finalment, s'analitzen els límits de la completesa, mostrant per què una formulació forta del teorema de completesa no és vàlida per a la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz.

4.1 El teorema de completesa finitària

Recordem que la conjectura original de Łukasiewicz afirma que, per a tota fórmula $\varphi \in Prop(X)$, la validesa semàntica respecte de $\mathrm{Ł}_{\aleph_1}$ és equivalent a la deducció sintàctica en el sistema axiomàtic $\mathrm{Ł}_\infty$, és a dir,

$$\models_{[0,1]} \varphi \quad \text{si, i només si,} \quad \vdash_{\mathrm{Ł}_\infty} \varphi.$$

Tal com hem vist en el primer capítol, aquesta equivalència es descompon en dues implicacions: la coherència i la completesa.

En aquesta secció abordarem una formulació més general del problema, afegint premisses. D'una banda, veurem que la coherència es pot establir en un context fort, admetent conjunts arbitraris de premisses. Mentre que, d'altra banda, la completesa només es demostrarà en el cas finit, donant lloc a l'anomenat teorema de completesa finitària.

Teorema de coherència fort

Teorema 4.1.1 (Teorema de coherència fort)**.**

Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, on Σ és un conjunt finit o infinit de premisses. Si $\Sigma \vdash_{\mathrm{Ł}_\infty} \varphi$, aleshores $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$.

Procedim a la demostració del teorema. Malgrat que l'argument és essencialment el mateix que la demostració del cas sense premisses presentat al Teorema 1.3.3, en reproduïm aquí el procediment complet per tal de mantenir el desenvolupament dins d'aquest capítol.

Demostració. Demostrem per inducció que, per tot $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ i per tota $\varphi \in Prop(X)$ tal que $\Sigma \vdash_{\text{Ł}_\infty} \varphi$, si $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ és una deducció de φ amb premisses en Σ, aleshores $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi_i$ per tota $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Si $n = 1$, φ_1 és una instància d'axioma o $\varphi_1 \in \Sigma$. Distingim aquests dos casos:

(a) Si φ_1 és una instància d'axioma, pel Lema 1.3.2, es compleix que $\models_{[0,1]} \varphi_1$. En particular, per monotonia, també es compleix que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi_1$.

(b) Si $\varphi_1 \in \Sigma$, trivialment s'obté que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi_1$, ja que per tota $[0,1]-$interpretació I tal que $I(\psi) = 1$ per tota $\psi \in \Sigma$, es compleix que $I(\varphi) = 1$ en ser $\varphi \in \Sigma$.

Suposem-ho cert per n i vegem-ho per $n+1$. Sigui $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \rangle$ una deducció amb premisses en Σ de $\varphi \in Prop(X)$. Per hipòtesi inductiva, com que $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ és una deducció amb premisses en Σ d'una certa proposició $\varphi_n \in Prop(X)$, per cada $i \leq n$, tenim que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi_i$. Considerem φ_{n+1} i distingim casos:

(a) Si φ_{n+1} és una instància d'axioma, anàlogament al cas (a) del cas base, tenim que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi_{n+1}$.

(b) Si $\varphi_{n+1} \in \Sigma$, anàlogament al cas (b) del cas base, també obtenim que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi_{n+1}$.

(c) Si φ_{n+1} s'obté per Modus Ponens d'anteriors, existeixen $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tals que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_{n+1}$. Pel Lema 1.3.1, sabem que $\{\varphi_i, \varphi_j\} \models_{[0,1]} \varphi_{n+1}$. En particular, com que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi_i$ i $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi_j$, per la propietat de tall, tenim que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi_{n+1}$. □

Observació 4.1.2. Tenint demostrat aquest resultat, notem que tant el cas sense premisses del Teorema 1.3.3 com el cas amb un nombre finit de premisses $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ són casos particulars d'aquest teorema.

Teorema de completesa finitària

Teorema 4.1.3. (Teorema de completesa finitària).

Sigui $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n \in Prop(X)$. Si $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models_{[0,1]} \varphi$, aleshores es compleix que $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash_{\text{Ł}_\infty} \varphi$.

Per demostrar-lo, procedirem per contrarecíproc, suposant que $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \nvdash_{\text{Ł}_\infty} \varphi$ i veient que aleshores $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \not\models_{[0,1]} \varphi$.

Recordem dos resultats obtinguts respectivament a les seccions 2.5 i 3.4:

Proposició 4.1.4. Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, es compleixen

1. Si $\Sigma \nvdash_{\text{Ł}_\infty} \varphi$, aleshores $\Sigma \not\models_{\mathcal{W}} \varphi$. (Lema 2.5.3)
2. $\Sigma \models_{\mathcal{W}} \varphi$ si, i només si $\Sigma \models_{\mathcal{WC}} \varphi$. (Lema 2.5.7)

Proposició 4.1.5. Tota Wajsberg cadena és localment submergible en l'àlgebra Ł.

La hipòtesi $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \nvdash_{\mathrm{L}_\infty} \varphi$ implica que $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \not\models_{\mathcal{W}} \varphi$ i d'aquí s'obté que $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \not\models_{\mathcal{WC}} \varphi$. Per tant, existeix una Wajsberg cadena $\langle A, \to, \neg, 1\rangle$ i una $\mathcal{W}_A-$interpretació $I : Prop(X) \longrightarrow A$, tal que $I(\psi_i) = 1$ per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$ però $I(\varphi) \neq 1$.

Considerem el conjunt de valors de les interpretacions de totes les subfórmules implicades

$$I(Sb) \coloneqq \{I(\xi) : \xi \in Sb(\psi_1) \cup \ldots \cup Sb(\psi_n) \cup Sb(\varphi)\}.$$

Aquest conjunt és finit, ja que estem considerant un nombre finit de proposicions i cada proposició té un nombre finit de subfórmules. A més, com que $I(Sb) \subseteq A$ i A és localment submergible en Ł$= \langle [0,1], \to, \neg, 1\rangle$, existeix una aplicació injectiva

$$f : I(Sb) \longrightarrow [0,1],$$

tal que per cada $x, y, z \in I(Sb)$ es compleixen

1. $x \to y = z$ si, i només si, $f(x) \to f(y) = f(z)$;
2. $\neg x = y$ si, i només si, $\neg f(x) = f(y)$;
3. $f(1) = 1$;
4. $x \wedge y = z$ si, i només si, $f(x) \wedge f(y) = f(z)$;
5. $x \vee y = z$ si, i només si, $f(x) \vee f(y) = f(z)$.

Definim ara una aplicació $I' : Prop(X) \longrightarrow [0,1]$ amb l'objectiu de poder concloure $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \nvdash_{\mathrm{Ł}_\infty} \varphi$.

$$I'(x) = \begin{cases} f(I(x)) & \text{si } x \in X \cap I(Sb), \\ 0 & \text{si } x \in X \text{ i } x \notin I(Sb), \end{cases}$$

i estenem la definició a qualsevol proposició $\chi_1, \chi_2 \in Prop(X)$ a imposant

1. $I'(\neg\chi_1) = \neg I'(\chi_1) = 1 - I'(\chi_1)$;
2. $I'(\chi_1 \to \chi_2) = I'(\chi_1) \to I'(\chi_2) = \min\{1, 1 - I'(\chi_1) + I'(\chi_2)\}$.

Per construcció, és clar que I' és una $[0,1]-$interpretació. A més, I' compleix la següent propietat:

Proposició 4.1.6. Per tota $\xi \in I(Sb)$, $I'(\xi) = f(I(\xi))$.

Demostració. Procedim per inducció sobre la construcció de ξ.

(i) Si $\xi = x \in X$, aleshores $I'(\xi) = I'(x) = f(I(x))$, per definició.

(ii) Si $\xi = \neg\chi$, és clar que $\chi \in Sb(\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi)$. En particular, $I(\chi) \in I(Sb)$ i, per hipòtesi inductiva, es compleix que $I'(\chi) = f(I(\chi))$. Aleshores, tenint en compte la segona propietat de f i usant que I' és una $[0,1]-$interpretació i que I és una $\mathcal{W}_A-$interpretació,

$$I'(\xi) = I'(\neg\chi) = \neg I'(\chi) = \neg f(I(\chi)) = f(\neg I(\chi)) = f(I(\neg\chi)) = f(I(\xi)).$$

(iii) Si $\xi = \chi_1 \to \chi_2$, procedint de manera anàloga al cas anterior, obtenim

$$I'(\xi) = I'(\chi_1 \to \chi_2) = I'(\chi_1) \to I'(\chi_2) = f(I(\chi_1)) \to f(I(\chi_2)) = \\ = f(I(\chi_1) \to I(\chi_2)) = f(I(\chi_1 \to \chi_2)).$$

□

Així doncs, com que $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Sb(\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi)$, tenim que, per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$I'(\psi_i) = f(I(\psi_i)) = f(1) = 1.$$

A més, com que $\varphi \in Sb(\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi)$, es compleix que

$$I'(\varphi) = f(I(\varphi)) \neq 1,$$

ja que $I(\varphi) \neq 1$ i f és injectiva.

Per tant, I' és una $[0,1]-$interpretació que compleix que $I'(\psi_i) = 1$ per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$ però $I'(\varphi) \neq 1$. Això prova que $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \not\models_{[0,1]} \varphi$ i conclou la demostració de la completesa finitària.

Observació 4.1.7. Notem que el teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz enunciat a 1.3.4 és un cas particular del present resultat.

4.2 Discussió d'arguments i estratègies

Històricament, l'enunciat del teorema de completesa de la lògica infinitvalorada de Łukasiewicz es formulava únicament en el cas sense premisses, ja que la lògica es definia a partir del concepte de tautologia i no es treballava amb la noció de conseqüència lògica. En aquest context, la demostració original de C. C. Chang, publicada l'any 1959, estableix la completesa semàntica de les tautologies respecte del sistema axiomàtic, sense tractar el cas amb premisses. Així doncs, la demostració presentada en aquest treball, tot i que en termes generals segueix l'estratègia algebraica proposada per Chang, estén l'abast d'aquesta permetent considerar conjunts finits de premisses.

En els articles [Cha58a] i [Cha59], Chang introdueix les MV-àlgebres com a eina fonamental, en demostra la seva representació en producte subdirecte de MV-cadenes i estableix una correspondència entre MV-cadenes i grups abelians totalment ordenats. En aquest marc, la construcció de la MV-cadena associada a un to-grup es fa mitjançant el mateix procediment, $\Gamma(G, u)$, utilitzat en el present treball. Ara bé, per a la construcció inversa, donada una MV-cadena $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$, Chang defineix el grup A^* format pels parells (m, x), amb $m \in \mathbb{Z}$ i $x \in A$ i dotat de les operacions

$$(m, x) + (n, y) = \begin{cases} (m + n, x \oplus y) & \text{si } x \oplus y < 1, \\ (m + n + 1, x \odot y) & \text{si } x \oplus y = 1; \end{cases} \qquad -(m, x) = (-m - 1, \neg x);$$

i mostra que, amb l'ordre lexicogràfic, $\langle A^*, +, -, (0, 0)\rangle$ esdevé un to-grup.

A partir d'aquesta correspondència, la demostració de Chang es fonamenta en resultats de lògica de primer ordre i de la teoria de models, determinant que a cada identitat en la teoria de MV-àlgebres li correspon una sentència universal en la teoria dels to-grups. A més, a partir dels fets següents:

- Tot to-grup es pot immergir en un grup abelià ordenat i divisible;

- La teoria de primer ordre dels to-grups divisibles és completa;

redueix la validesa de les sentències universals en els to-grups a la validesa en el subgrup dels racionals $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, concloent així la completesa de la lògica infinitvalorada. Els detalls d'aquesta argumentació es desenvolupen a [Cha59]. Tot i que les dues propietats esmentades es presenten sense demostració, aquestes es troben demostrades mitjançant el concepte de *divisible hull* i *quantifier elimination*, respectivament, a les referències [Fuc70] i [Mar02].

Basant-se en la correspondència entre MV-cadenes i to-grups demostrada per Chang, en l'article [Mun58], Mundici demostra un resultat més fort, concloent l'equivalència entre les MV-àlgebres i els l-grups amb unitat forta. A partir d'aquesta equivalència, en la referència [CDM00], s'aborda la demostració del teorema de completesa amb un caràcter marcadament diferent: es basa en l'estudi de subgrups finitament generats, identificats amb $\mathbb{Z}^r$, i fa ús d'eines d'anàlisi convexa així com la forma normal de Smith. Tot i l'elegància i l'interès d'aquest enfocament alternatiu, el seu desenvolupament detallat queda fora de l'abast del present treball.

La demostració exposada aquí combina, doncs, l'enfocament algebraic original de Chang, barrejant-se amb la generalització de [CDM00] i culmina amb un argument diferent del d'aquestes dues demostracions, però també algebraic, basat en els resultats de [FRT84] i [Há98], obtenint un resultat més general, la completesa finitària.

4.3 El teorema de completesa fort

Per concloure aquest treball, en aquesta secció demostrem que la completesa forta falla, és a dir, que en considerar un nombre infinit de premisses el resultat no es compleix. A més, veiem com aquesta fallida es justifica a partir de la definició distingida de les dues lògiques semàntiques infinites $Ł_{\aleph_0}$ i $Ł_{\aleph_1}$.

Teorema 4.3.1. (Teorema de McNaughton). Sigui $f : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$. Per tal que existeixi una proposició $\varphi \in Prop(X)$ de manera que $f \equiv \varphi^{[0,1]}$ és suficient i necessari que la funció f sigui contínua i lineal a trossos a coeficients enters. És a dir, cal que f sigui contínua i que existeixin polinomis lineals a coeficients enters $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$,

$$\lambda_i(x_1, \ldots, x_n) = m_0^i + m_1^i x_1 + \ldots + m_n^i x_n, \quad \text{on } m_0^i, \ldots, m_n^i \in \mathbb{Z};$$

tals que, per tot $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$, es compleixi que

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \lambda_i(a_1, \ldots, a_n) \text{ per algun } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

En tal cas, es diu que f és una **funció de McNaughton**.

Demostració. Comencem demostrant la necessitat. Suposem que existeix $\varphi \in Prop(X)$ tal que $f \equiv \varphi^{[0,1]}$ i procedim per inducció sobre la construcció de φ per demostrar que $\varphi^{[0,1]}$ és contínua i lineal a trossos.

Si $\varphi = x \in X$, aleshores $\varphi^{[0,1]} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ envia $a_1 \in [0,1]$ a $I_{a_1}(\varphi) = I_{a_1}(x) = a_1$. Per tant, $\varphi^{[0,1]} \equiv \lambda(a_1) = a_1$ i obtenim el resultat desitjat.

Si $\varphi = \neg\psi$ i suposem que $\psi^{[0,1]} : [0,1]^m \longrightarrow [0,1]$ és continua i lineal a trossos, aleshores $\varphi^{[0,1]} : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$, ja que $X_\varphi = X_\psi$ i, a més, per tot $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$,

$$\varphi^{[0,1]}(a_1,\ldots,a_n) = I_{a_1,\ldots,a_n}(\varphi) = I_{a_1,\ldots,a_n}(\neg\psi) = \neg I_{a_1,\ldots,a_n}(\psi) = \neg\psi^{[0,1]}(a_1,\ldots,a_n) = \\ = 1 - \psi^{[0,1]}(a_1,\ldots,a_n).$$

Per tant, $\varphi^{[0,1]}$ també és contínua i lineal a trossos a coeficients enters.

Si $\varphi = \psi \to \chi$, suposem que $\psi^{[0,1]} : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ i $\chi^{[0,1]} : [0,1]^k \longrightarrow [0,1]$ són contínues i lineals a trossos. Suposant que X_φ té n elements i procedint de manera anàloga s'obté que per tot $a_1,\ldots,a_n$

$$\varphi^{[0,1]}(a_1,\ldots,a_n) = \min\{1, 1 - \psi^{[0,1]}(a_1,\ldots,a_n) + \chi^{[0,1]}(a_1,\ldots,a_n)\},$$

fet que implica la continuïtat i linealitat a trossos a coeficients enters.

D'altra banda, la demostració de la suficiència és més complexa degut a la seva naturalesa no constructiva. El procediment segueix el següent esquema:

1. Suposem que $f(a_1,\ldots,a_n)$ és una funció contínua i lineal a trossos que compleix les hipòtesis de l'enunciat.
2. Considerem el cub $n-$dimensional dins l'espai cartesià generat per $a_1,\ldots,a_n$ i demostrem que els espais $(n-1)-$dimensionals determinats per les igualtats entre parells de polinomis $\lambda_i = \lambda_j$ per $i,j \in \{1,\ldots,m\}$, divideixen el cub en regions $n-$dimensionals $D_1,\ldots,D_s$ tancades, convexes i tals que per cada D_k existeix un índex $i \in \{1,\ldots,m\}$ amb $f \equiv \lambda_i$ dins d'aquesta regió.
3. Per a cada regió D_k, demostrem l'existència d'una proposició $\varphi_k(x_1,\ldots,x_n)$ tal que $\varphi_k^{[0,1]} \equiv f$ dins de D_k i $\varphi_k^{[0,1]} \leq f$ fora d'aquesta regió.
4. Considerem $\varphi = \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k$ i demostrem que $\varphi^{[0,1]} \equiv f$.

□

Pel lector interessat en els detalls de la demostració de la suficiència, la demostració original i completa es pot consultar a [McN51]. Una demostració alternativa de caràcter purament constructiu es pot trobar a [Mun94].

Proposició 4.3.2. Les lògiques semàntiques $Ł_{\aleph_0}$ i $Ł_{\aleph_1}$ són diferents. Concretament, existeixen $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$ de manera que $\Sigma \models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi$ però $\Sigma \not\models_{[0,1]} \varphi$.

Demostració. Sigui $\frac{m}{n} \in [0,1]$ una fracció irreductible. És fàcil veure que existeixen funcions de McNaughton $f, g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ complint, respectivament,

$$f(x) = 1 \quad \text{si, i només si,} \quad x \geq \frac{m}{n}; \qquad g(x) = 1 \quad \text{si, i només si,} \quad x \leq \frac{m}{n}.$$

Pel teorema de McNaughton, existeixen proposicions $\varphi_{\geq \frac{m}{n}}(x), \varphi_{\leq \frac{m}{n}}(x) \in Prop(X)$ de manera que

$$f \equiv \varphi_{\geq \frac{m}{n}}^{[0,1]}, \quad \text{i} \quad g \equiv \varphi_{\leq \frac{m}{n}}^{[0,1]}.$$

Considerem dues successions $\{\alpha_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, $\{\beta_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ en $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ tals que $\{\alpha_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ és una successió creixent, $\{\beta_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ és decreixent i satisfent

$$\{\alpha_i\}_i, \{\beta_j\}_j \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Definim el conjunt de proposicions

$$\Sigma \coloneqq \{\varphi_{\geq \alpha_i}(x), i \in \mathcal{I}\} \cup \{\varphi_{\leq \beta_j}(x), j \in \mathcal{J}\}.$$

No existeix cap interpretació en $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ tal que $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$, ja que en tal cas s'hauria de satisfer $I(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $I(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, fet que implica que $I(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, contradient la hipòtesi $I(x) \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Així, per qualsevol $\varphi \in Prop(X)$, tenim que

$$\Sigma \models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi.$$

En canvi, si considerem una $[0,1]-$interpretació I tal que $I(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ per tot $x \in X$, llavors $I(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$. Ara bé, $I(x) \neq 1$ i, per tant,

$$\Sigma \not\models_{[0,1]} x.$$

Així doncs, prenent $\varphi = x$, hem obtingut que $\Sigma \models_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi$ però $\Sigma \not\models_{[0,1]} \varphi$, demostrant que les lògiques $Ł_{\aleph_0}$ i $Ł_{\aleph_1}$ són diferents. □

Observació 4.3.3. La diferència essencial rau en el fet que les interpretacions en $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ no poden assolir el límit de les successions considerades, mentre que en $[0,1]$ sí que existeixen interpretacions que l'assoleixen, ja que $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0,1]$ però $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Proposició 4.3.4. La lògica semàntica $Ł_{\aleph_1}$ no és finitària. És a dir, existeixen conjunts infinits de premisses $\Sigma \subseteq Prop(X)$ i una proposició $\varphi \in Prop(X)$ de manera que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$ però $\Delta \not\models_{[0,1]} \varphi$, per tot subconjunt finit de premisses $\Delta \subseteq \Sigma$.

Demostració. Considerem una successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ tal que $x_n \neq 1$ per tot $n \in \mathbb{N}$ i $\{x_n\}_n \longrightarrow 1$. Definim $\Sigma \coloneqq \{\varphi_{\geq x_n}(x), n \in \mathbb{N}\}$. Per construcció, és clar que

$$\Sigma \models_{[0,1]} x.$$

Per tant, si la lògica fos finitària, hauria d'existir un subconjunt finit de proposicions $\{\varphi_{\geq p_1}(x), \ldots, \varphi_{\geq p_k}(x)\} \subseteq \Sigma$ tal que

$$\{\varphi_{\geq p_1}(x), \ldots, \varphi_{\geq p_k}\}(x) \models_{[0,1]} x.$$

Ara bé, aquesta suposició porta a contradicció. En efecte, considerem la $[0,1]-$interpretació I definida per

$$I(x) \coloneqq \max\{p_1, \ldots, p_k\}.$$

En aquest cas, tenim que $I(\psi) = 1$, per tot $\psi \in \{\varphi_{\geq p_1}(x), \ldots, \varphi_{\geq p_k}(x)\}$. Ara bé, $I(x) \neq 1$, ja que $p_1, \ldots, p_k \neq 1$, fet que implica que

$$\{\varphi_{\geq p_1}(x), \ldots, \varphi_{\geq p_k}\}(x) \not\models_{[0,1]} x,$$

contradient la hipòtesi finitària. □

Observació 4.3.5. La mateixa demostració serveix per veure que la lògica semàntica $Ł_{\aleph_0}$ no és finitària.

Teorema 4.3.6. Sigui $\Sigma \subseteq Prop(X)$ un conjunt infinit de premisses i sigui $\varphi \in Prop(X)$ una proposició qualsevol. Les condicions $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$ i $\Sigma \vdash_{Ł_\infty} \varphi$ no són equivalents.

Demostració. Suposem que $\Sigma \models_{[0,1]} \varphi$ i suposem que l'equivalència és certa. Aleshores, tenim que $\Sigma \vdash_{Ł_\infty} \varphi$ i, per tant, existeix una deducció $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ amb premisses en Σ. En particular, tenim que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{Ł_\infty} \varphi$. Tornant a aplicar l'equivalència, obtenim que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models_{[0,1]} \varphi$, fet que porta a contradicció amb el resultat anterior de no-finitarietat de la lògica $Ł_{\aleph_1}$. □

Bibliografia

[BS81] Stanley Burris and H.P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1981.

[CDM00] Roberto L.O. Cignoli, Itala M.L. D'Ottaviano, and Daniele Mundici. *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*. Springer-Science+Business Media, B.V., 2000.

[Cha58a] C. C. Chang. Algebraic Analysis of Many Valued Logics. *Transactions of the American Mathematical Society*, 88(2):467–490, 1958.

[Cha58b] C. C. Chang. Proof of an Axiom of Łukasiewicz. *Transactions of the American Mathematical Society*, 87(1):55–56, 1958.

[Cha59] C. C. Chang. A New Proof of the Completeness of the Łukasiewicz Axioms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(1):74–80, 1959.

[FRT84] Josep M. Font, Antonio J. Rodríguez, and Antoni Torrens. Wajsberg algebras. *Stochastica*, 1984.

[Fuc70] László Fuchs. *Infinite Abelian Groups*. Academic Press, New York, 1970.

[Gis24] Joan Gispert. Apunts de Modelització Matemàtica de les Formes del Raonament. 2024.

[Got01] Siegfried Gottwald. *A Treatise on Many-Valued Logics*. Research Studies Press, 2001.

[HHJ92] Petr Hájek, Tomáš Havránek, and Radim Jiroušek. *Uncertain Information Processing in Expert Systems*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[Há98] Petr Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[Mar02] David Marker. *Model Theory: An Introduction*. Springer, New York, 2002.

[McC67] Storrs McCall. *Polish Logic, 1920-1939: Papers by Ajdukiewicz, Chwistek, Jałkowski, Jordan, Leśniewski, Łukasiewicz, Słupecki, Sobociński, and Wajsberg*. Oxford: Clarendon Press, 1967.

[McN51] Robert McNaughton. A theorem about infinite-valued sentential logic. *Journal of Symbolic Logic*, 16(1), 1951.

[Mun58] Daniele Mundici. Interpretation on AF C^*-Algebras in Łukasiewicz Sentential Calculus. *Journal of Functional Analysis*, 65:15–63, 1958.

[Mun94] Daniele Mundici. A constructive proof of McNaughton's Theorem in infinite-valued logics. *The Journal of Symbolic Logic*, 59:596–602, 1994.

[Res69] Nicolas Rescher. *Many-Valued Logic*. McGraw-Hill, 1969.

[Rib99] Paulo Ribenboim. *The Theory of Classical Valuations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1999.

[RR58] Alan Rose and J. Barkley Rosser. Fragments of Many-Valued Statement Calculi. *Transactions of the American Mathematical Society*, 87(1):1–53, 1958.

[Waj31] Mordchaj Wajsberg. Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań. *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 1931.

[Wol95] Jan Woleński. Mathematical Logic in Poland 1900–1939: People, Circles, Institutions, Ideas. *Modern Logic*, 5(4):363–405, 1995.

[Wó73] Ryszard Wójcicki. On Matrix Representations of Consequence Operations of Łukasiewicz's Sentential Calculi. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 19, 1973.

Índex alfabètic