



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

LÍMITS I COLÍMITS A LES
CATEGORIES D'ORDRE
INFINIT

Autor: Hug Camps i Regàs

Director: Dr. Carles Casacuberta
Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2024

Abstract

Limits and colimits are a key tool in category theory. Over the last century, they have enabled fundamental constructions in several mathematical disciplines. In this work, we study these constructions, as well as their homotopy-invariant version with the aim of defining limits and colimits in ∞ -categories. These bring to classical homotopy theory the language and results of categories in a homotopy-invariant context.

Resum

Els límits i colímits són una eina clau a la teoria de categories. Aquests han permès, durant l'últim segle, construccions fonamentals en diverses àrees de les matemàtiques. En aquest treball estudiem aquestes construccions, així com la seva versió homotòpicament invariant amb l'objectiu de definir els límits i colímits a les ∞ -categories. Aquests aporten a la teoria d'homotopia clàssica el llenguatge i resultats de les categories en un context homotòpicament invariant.

Agraïments

Vull agrair especialment al Dr. Carles Casacuberta per introduir-me la teoria de categories, per la paciència que ha tingut amb mi durant l'últim any i per ensenyar-me a redactar matemàtiques.

També vull agrair el suport que he tingut per part de la meva parella, els meus companys de pis i la meva família. Sense ells no hauria aconseguit redactar aquest treball.

Índex

1	Introducció	1
1.1	El projecte	1
1.2	Estructura de la memòria	2
2	Teoria de categories	3
2.1	Definicions preliminars	3
2.2	Propietats universals	6
2.3	Exemples de límits i colímits	12
2.4	Adjuncions	15
3	Homotopia	19
3.1	Categoria homotòpica dels espais topològics	19
3.2	Conjunts simplicials	20
3.3	Equivalència entre les categories homotòpiques dels espais topològics i dels conjunts simplicials	22
3.4	Límits i colímits homotòpics	25
4	Categories d'ordre infinit	34
4.1	Motivació	34
4.2	Quasi-categories	34
4.3	Limits i colímits	37
4.4	Adjuncions	38
5	Conclusions	41

1 Introducció

1.1 El projecte

La teoria de categories estudia les diferents estructures matemàtiques i com es relacionen entre elles, sempre fent-ho de la forma més general possible. Aquesta branca de les matemàtiques es crea a mitjan segle passat, de la mà de Saunders Mac Lane i Samuel Eilenberg, en un context de desenvolupament de la topologia algebraica on calia aprofundir en la relació entre els grups, anells i mòduls i els espais topològics.

En aquest camp, veurem com els límits i colímits són construccions que, a partir de certs objectes d'una categoria, en permeten construir de nous. Veurem que algunes de les concrecions d'aquestes noves construccions a cada categoria són objectes sovint coneguts. Els productes, les unions o els quocients que coneixem per a grups, conjunts o espais topològics són exemples de límits i colímits, tot i ser conceptes previs a la teoria de categories.

El concepte de propietat universal és fonamental per entendre aquesta generalització. Caracteritzar els objectes segons una propietat universal permet treballar amb ells amb independència del context on es desenvolupen.

Continuant amb la seqüència històrica, el desenvolupament de l'àlgebra homotòpica necessitava un desenvolupament en la teoria de categories. Veurem que aquest supòsit parteix d'una limitació: conceptes tan importants com límits i colímits no existeixen en les categories homotòpiques. Bousfield i Kan van publicar el 1972 una definició alternativa de límits i colímits coherents amb la teoria d'homotopia. Aquesta definició requereix molta més complexitat tècnica.

Les categories d'ordre infinit s'introdueixen ja al segle XXI, amb la publicació del llibre *Higher Topos Theory*. En aquest llibre, Jacob Lurie dona un model per a les categories d'ordre infinit. Aquest model consta de conjunts simplicials amb la propietat d'extensió de Kan feble. Aquests objectes els anomenem quasi-categories i, de fet, es coneixen des dels anys setanta del segle passat, poc després de les aportacions de Bousfield i Kan. L'aportació fonamental que fa Lurie és mostrar com resultats bàsics de la teoria de categories ordinària tenen versions anàlogues per a les quasi-categories. Aquest enfocament va ser desenvolupat amb anterioritat per André Joyal.

Aquest treball té per objectiu principal donar totes les definicions i resultats necessaris per poder explicar les categories d'ordre infinit i els seus límits i colímits. Per altra banda, intentarem mitjançant exemples donar un punt de vist intuïtiu a aquestes construccions per tal d'entendre la importància dels conceptes.

1.2 Estructura de la memòria

Començarem la memòria donant les definicions i resultats inicials de la teoria de categories, amb l'objectiu d'arribar tan ràpid com puguem a les definicions clàssiques de límit i colímit. Un cop donades, en descriurem exemples senzills, que compleixin dos objectius:

- Per una banda, donar una perspectiva intuïtiva a les definicions donades. La teoria de categories és interessant perquè, malgrat treballar des de l'abstracció, proporciona millores qualitatives en la seva aplicació.
- Mostrar com diferents objectes molt coneguts per nosaltres es poden construir utilitzant els conceptes de límit i colímit. Entre aquests exemples, tindrem la construcció dels nombres racionals, els nombres p -àdics o el mínim comú múltiple.

Tot seguit, definirem les adjuncions i en donarem els resultats bàsics. Veurem la importància que tenen aquestes a l'hora de treballar els límits i colímits, i ens serviran per demostrar resultats al voltant d'aquests.

En el tercer capítol, partim de la premisa que els límits i colímits ordinaris no preserven homotopies quan treballem en la categoria dels espais topològics. A partir d'aquí, i passant necessàriament per un treball sobre la categoria dels conjunts simplicials i com es relacionen amb els espais topològics, podem acabar donant la definició de Bousfield i Kan dels límits i colímits homotòpics. De nou, és a partir de treballar amb dos exemples que s'entendrà millor el perquè dels detalls tècnics d'aquesta definició. També a partir dels exemples veurem l'encert amb què es resol el problema de la manca d'invariància homotòpica dels límits i colímits clàssics.

En el quart capítol, acabarem donant les mateixes definicions i resultats que al capítol 2, però per a les categories d'ordre infinit. Per fer-ho, començarem descrivint les quasi-categories i explicant per què les podem considerar models per a les ∞ -categories. Finalment, donarem un últim exemple en què veurem com d'útil ens és el desenvolupament tècnic que representa la fórmula de Bousfield i Kan i quines aportacions fan les categories d'ordre infinit a la topologia algebraica.

2 Teoria de categories

2.1 Definicions preliminars

Per començar el treball, donarem unes primeres definicions i resultats de teoria de categories extrets del llibre d'Emily Riehl [11]. Aquesta part serà la base per a les construccions posteriors. Com que no és l'objectiu principal del treball, però, aquest serà un capítol breu.

Definició 2.1. Una *categoria* \mathcal{C} consisteix en una col·lecció d'*objectes*, $\text{Ob}(\mathcal{C})$, i una col·lecció de *morfismes* amb l'estructura següent:

- Cada morfisme té un objecte, que anomenem *domini*, i un altre objecte, el *codomini*. La notació que s'utilitza és $f: a \rightarrow b$, on f és un morfisme i $a, b \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ són el seu domini i el seu codomini, respectivament.
- Per a cada objecte $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existeix un morfisme identitat 1_a , on el mateix objecte n'és tant el domini com el codomini.
- Podem definir la *composició* de dos morfismes sempre que el codomini d'un coincideixi amb el domini de l'altre. Així, si tenim $f: a \rightarrow b$ i $g: b \rightarrow c$, existeix un morfisme composició $gf: a \rightarrow c$.

A més, es compleixen les propietats següents:

- La composició de qualsevol morfisme f amb el morfisme identitat (independentment de si és per la dreta o per l'esquerra) és igual a f .
- La composició és associativa.

Un morfisme $f: a \rightarrow b$ és un *isomorfisme* si, i només si, existeix un morfisme $g: b \rightarrow a$ tal que $gf = 1_a$ i $fg = 1_b$.

Siguin a i b dos objectes d'una categoria \mathcal{C} . Anomenem $\mathcal{C}(a, b)$ o $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ a la col·lecció de morfismes amb domini a i codomini b . Si aquesta col·lecció forma un conjunt per a qualsevol parell d'objectes de \mathcal{C} , direm que la categoria és *localment petita*. Si tots els morfismes d'una categoria \mathcal{C} formen un conjunt, llavors direm que \mathcal{C} és una categoria *petita*.

Per a tota categoria \mathcal{C} , existeix una categoria \mathcal{C}^{op} tal que

- $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$, i
- \mathcal{C}^{op} té un morfisme f^{op} per cada morfisme f de \mathcal{C} , que té per domini el codomini de f i per codomini el domini de f .

Moltes estructures amb què es treballa en matemàtiques les podem definir com a categories. Malgrat que hi ha molts exemples que poden ser il·lustratius, de moment en donarem tres que ens seran els més importants:

- Anomenem **Set** a la categoria que té per objectes els conjunts i per morfismes les aplicacions entre ells.
- Anomenem **Top** a la categoria que té per objectes els espais topològics i per morfismes les aplicacions contínues entre ells.
- Anomenem **Grp** a la categoria que té per objectes els grups i per morfismes els homomorfismes de grups.

Un *functor* $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dues categories consisteix en

- un objecte $Fc \in \mathcal{D}$ per a cada objecte $c \in \mathcal{C}$;
- un morfisme $Ff: Fc \rightarrow Fc'$ a \mathcal{D} per a cada morfisme $f: c \rightarrow c'$ a \mathcal{C} .

Aquesta assignació ha de complir els dos axiomes següents:

- Es conserva la composició: $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$.
- Es conserven les identitats: $F(1_c) = 1_{Fc}$.

Exemple 2.2. Un exemple de functor entre categories és el grup fonamental $\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$, on \mathbf{Top}_* és la categoria que té per objectes els espais topològics amb punt base i per morfismes les aplicacions contínues entre ells que conserven el punt base. Per a cada $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_*$, $\pi_1(X, x_0)$ és un objecte de **Grp**. A cada aplicació contínua $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \in \mathbf{Top}_*$ li assignem l'homomorfisme

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Per veure que f_* està ben definit a **Grp**, cal veure que conserva la concatenació. Com que la concatenació és una funció definida a trossos, tenim que la composició amb f també es pot definir així. Si

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

llavors

$$f(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = (f(\gamma_1) * f(\gamma_2))(t) = \begin{cases} f(\gamma_1(2t)) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(\gamma_2(2t - 1)) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Amb aquesta definició, veiem que

$$f_*[\gamma_1 * \gamma_2] = [f \circ (\gamma_1 * \gamma_2)] = [f(\gamma_1) * f(\gamma_2)] = f_*[\gamma_1] * f_*[\gamma_2].$$

Ara demostrem que es compleixen els dos axiomes functorials. Per al primer, cal que es conservi la composició, és a dir, si tenim $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, llavors

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*.$$

Per definició,

$$\begin{aligned} g_* \circ f_*(\gamma) &= [g \circ (f \circ \gamma)] \\ (g \circ f)_*[\gamma] &= [(g \circ f) \circ \gamma] \end{aligned}$$

i per tant, per associativitat de la composició veiem que aquest primer axioma es compleix. El segon es dedueix del fet que l'aplicació identitat per a qualsevol espai topològic envia cada llaç a ell mateix.

Teorema 2.3. *Els functors conserven els isomorfismes.*

Demostració. Sigui $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un functor i sigui $f: c \rightarrow c'$ un isomorfisme a \mathcal{C} . Llavors existeix un altre morfisme $g: c' \rightarrow c \in \mathcal{C}$ tal que $gf = 1_c$. Utilitzant els axiomes dels functors, tenim que $Fg \circ Ff = F(g \circ f) = F(1_c) = 1_{Fc}$. De manera anàloga, $Ff \circ Fg = 1_{Fc'}$. Així obtenim que Ff és un isomorfisme a \mathcal{D} . \square

Corol·lari 2.4. *Dos espais topològics homeomorfs tenen grups fonamentals isomorfs en cada punt.*

Demostració. Apliquem el teorema 2.3 juntament amb el fet que el grup fonamental és un functor, tal com hem demostrat a l'exemple 2.2. \square

Si tenim dues categories \mathcal{C} i \mathcal{D} i dos functors entre elles F i G , una *transformació natural* $\alpha: F \rightarrow G$ és una família de morfismes α_c , indexada pels objectes de \mathcal{C} , tal que per a cada parell d'objectes $c, c' \in \mathcal{C}$ i cada morfisme $f: c \rightarrow c'$, el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{Ff} & Fc' \\ \alpha_c \downarrow & & \downarrow \alpha_{c'} \\ Gc & \xrightarrow{Gf} & Gc'. \end{array}$$

Un *isomorfisme natural* és una transformació natural α on tots els morfismes α_c són isomorfismes.

Direm que dues categories \mathcal{C} i \mathcal{D} són *equivalents* si existeixen dos functors $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tals que FG sigui naturalment isomorf a $1_{\mathcal{D}}$ i GF ho sigui a $1_{\mathcal{C}}$.

Teorema 2.5. *Si tenim dues categories \mathcal{C} i \mathcal{D} , els functors entre elles i les transformacions naturals entre aquests functors formen una categoria, que anomenem $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ o bé $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$.*

Demostració. Per a cada functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ hi ha la transformació natural identitat, on tots els morfismes α_c són la identitat. Per altra banda, podem definir la composició entre transformacions naturals. Si tenim

$$F \xRightarrow{\alpha} G \xRightarrow{\beta} H,$$

definim $\beta \circ \alpha$ com la família de morfismes indexada pels objectes de \mathcal{C} on

$$(\beta \circ \alpha)_c := \beta_c \circ \alpha_c.$$

Com que α i β són transformacions naturals, els diagrames següents són commutatius:

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{Ff} & Fc' \\ \alpha_c \downarrow & & \downarrow \alpha_{c'} \\ Gc & \xrightarrow{Gf} & Gc' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Gc & \xrightarrow{Gf} & Gc' \\ \beta_c \downarrow & & \downarrow \beta_{c'} \\ Hc & \xrightarrow{Hf} & Hc'. \end{array}$$

Podem unir-los verticalment, i el rectangle resultant també serà commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{Ff} & Fc' \\ \alpha_c \downarrow & & \downarrow \alpha_{c'} \\ Gc & \xrightarrow{Gf} & Gc' \\ \beta_c \downarrow & & \downarrow \beta_{c'} \\ Hc & \xrightarrow{Hf} & Hc'. \end{array}$$

Així, la composició està ben definida. La composició de qualsevol transformació natural α amb la identitat (tant per la dreta com per l'esquerra) és α , i l'associativitat de la composició es demostra comprovant-la per a qualsevol α_c , que ho compleix per definició. \square

2.2 Propietats universals

Per a moltes de les estructures amb les quals es treballa en matemàtiques, ens pot ser útil utilitzar la teoria de categories; ho hem vist en concret amb l'exemple del grup fonamental. La manera en la qual es construeixen nous objectes és una qüestió central en aquesta disciplina i també en aquest treball. Per fer-ho, utilitzarem les *propietats universals*. Aquestes les utilitzarem per caracteritzar objectes llevat d'isomorfisme. Els primers exemples que descriurem a partir de la seva propietat universal són els objectes inicials i terminals.

Un *objecte inicial* d'una categoria \mathcal{C} és un objecte $i \in \mathcal{C}$ tal que per a cada $c \in \mathcal{C}$ hi ha un únic morfisme $f: i \rightarrow c$.

Un *objecte terminal* de \mathcal{C} és un objecte $t \in \mathcal{C}$ tal que per a cada $c \in \mathcal{C}$ hi ha un únic morfisme $f: c \rightarrow t$.

Teorema 2.6. *Els objectes inicials i terminals d'una categoria \mathcal{C} són únics llevat d'isomorfisme.*

Demostració. Si tenim dos objectes c, d de la categoria \mathcal{C} que compleixen la propietat dels objectes inicials, llavors, per definició, hi ha un únic $f: c \rightarrow d$ i un únic $g: d \rightarrow c$. Si aquests els componem, $gf: c \rightarrow c$ ha de ser la identitat, ja que en cas contrari tindríem dos morfismes diferents de c a c . En aquest cas, c incompliria la propietat dels objectes inicials. El mateix passa per a fg i, per tant, c i d són isomorfs. La demostració és anàloga per als objectes terminals. \square

Exemple 2.7. El conjunt buit és inicial a la categoria **Set**, ja que per a tot conjunt C hi ha una única aplicació $f: \emptyset \rightarrow C$. A la vegada, qualsevol conjunt amb un únic element n'és un objecte terminal, perquè només existeix una aplicació de qualsevol altre conjunt a ell.

Sigui \mathcal{C} una categoria i J una categoria petita. Un *diagrama* D a \mathcal{C} indexat per J és un functor $D: J \rightarrow \mathcal{C}$.

Un *con* (c, λ) sobre un diagrama F amb vèrtex c és una transformació natural λ entre el functor constant a c i F . Així, per a cada $f: x \rightarrow y$ a J hi ha un diagrama commutatiu com el següent:

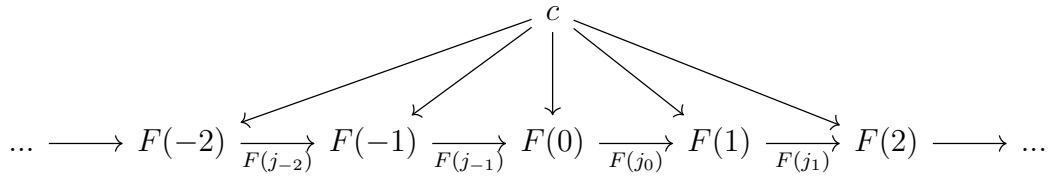
$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & c \\ \lambda_x \downarrow & & \downarrow \lambda_y \\ Fx & \xrightarrow{Ff} & Fy. \end{array}$$

Si existeix un diagrama commutatiu per a tot $f: x \rightarrow y$ a J ,

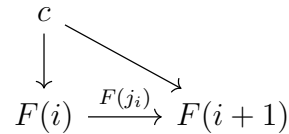
$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{Ff} & Fy \\ \lambda_x \downarrow & & \downarrow \lambda_y \\ c & \longrightarrow & c \end{array}$$

es diu que (c, λ) és un *cocon* sota F amb vèrtex c .

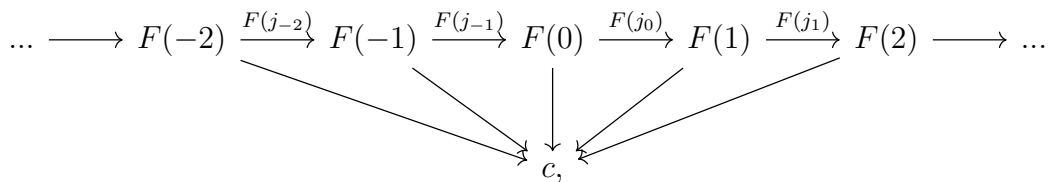
Exemple 2.8. Sigui F un diagrama en una categoria \mathcal{C} indexat per la categoria petita \mathbb{Z} , que té per elements els nombres enters i per morfismes els de la forma $j_i: i \rightarrow i + 1$ amb les identitats i composicions. La figura següent representa un con sobre aquest diagrama F amb vèrtex $c \in \mathcal{C}$:



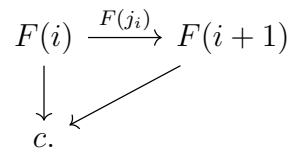
on cada triangle del tipus



és commutatiu. Un cocon amb vèrtex c es pot representar amb el diagrama següent:



amb els triangles següents commutatius:



Donat un diagrama $F: I \rightarrow \mathcal{C}$, el functor

$$\text{Cone}(-, F): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

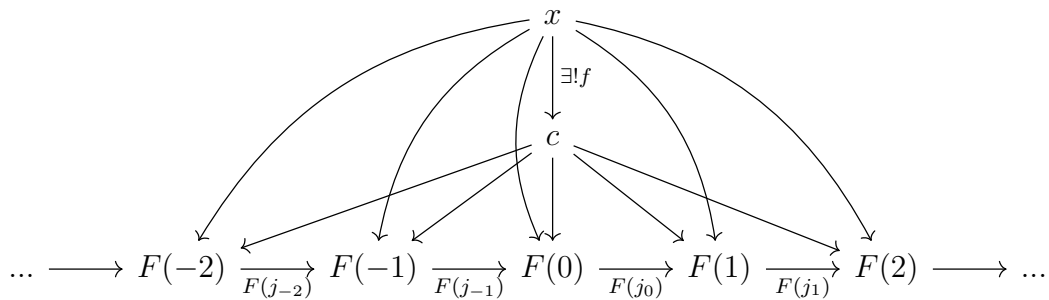
envia

- cada objecte c de \mathcal{C}^{op} al conjunt de cons sobre F amb vèrtex c ;
- per a cada morfisme $f^{\text{op}}: c \rightarrow c'$ de \mathcal{C}^{op} , una aplicació entre el conjunt de cons amb vèrtex c i el conjunt de cons amb vèrtex c' , que envia cada con (c, λ) al con (c', λ') on $\lambda' = \lambda \circ f$.

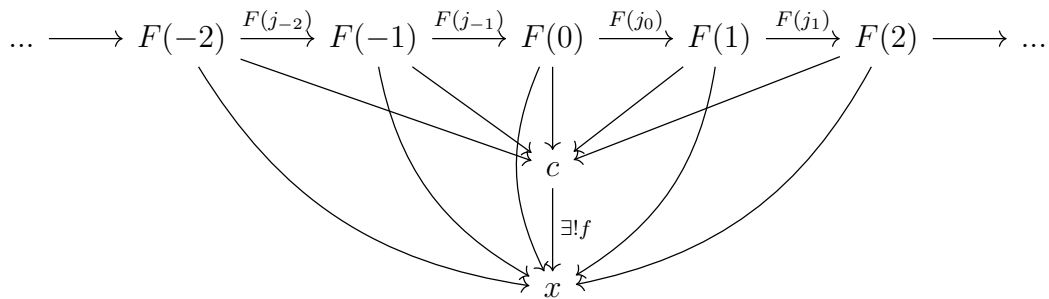
A partir del functor $\text{Cone}(-, F)$, podem obtenir una nova categoria on els objectes són els cons (c, λ) i morfismes $(c, \lambda) \rightarrow (c', \lambda')$ amb $f: c \rightarrow c'$ a \mathcal{C} amb $\text{Cone}(f, F)(\lambda') = \lambda$. A aquesta categoria li direm la *categoria dels cons* sobre F . La construcció dual defineix la *categoria dels cocons* sota F .

Definició 2.9. Un *límit* d'un diagrama F és un objecte terminal de la categoria dels cons sobre F . Un *colímit* d'un diagrama F és un objecte inicial de la categoria dels cocons sota F .

Exemple 2.10. Recollint l'exemple 2.8, suposem que c amb la respectiva família de morfismes és el límit del diagrama. Llavors, tal com indica la figura següent, per a cada altre con amb vèrtex x ha d'existir un únic morfisme $f: x \rightarrow c$ que faci commutatiu qualsevol triangle entre x , c i $F(i)$:

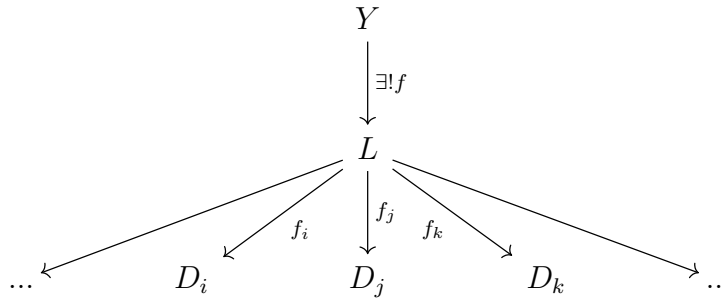


En els colímits se satisfà la propietat dual per a qualsevol altre cocon amb vèrtex x :



Ara mostrarem exemples especialment rellevants de límits i colímits. Com a referència es pot consultar [9] (pàgines 62-72).

Un *producte* és un límit d'un diagrama $D: J \rightarrow \mathcal{C}$ on J és una categoria discreta, és a dir, que té com a únics morfismes les identitats. En aquest diagrama, que compleixi la propietat universal del límit vol dir que, si L és el producte d'una col·lecció d'objectes, existeix un únic morfisme f de Y a L , per a tot Y que tingui morfismes a D_j per a tot $j \in J$.

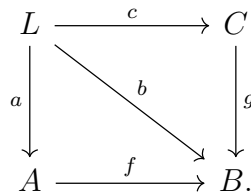


Els productes cartesianes per a espais topològics, conjunts o grups en són casos particulars.

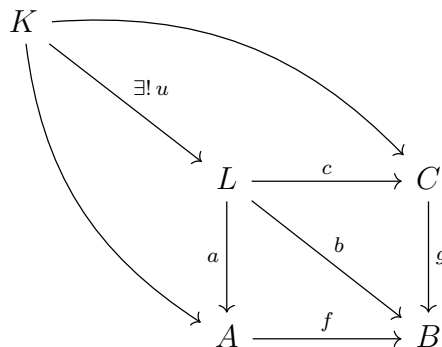
Els *pushouts* i *pullbacks* són conceptes també importants de colímits i límits. Un pullback és un límit d'un diagrama indexat per la categoria que té tres objectes i els morfismes següents a part de les identitats:



Així, siguin A, B, C objectes de \mathcal{C} i F un diagrama a \mathcal{C} indexat per la categoria del pullback. Aleshores L és un objecte de \mathcal{C} junt amb una família de morfismes per a cada objecte del diagrama tal que el quadrat següent és commutatiu:



Per la propietat universal, per a qualsevol altre K que també commuti amb el diagrama, existeix un i només un morfisme de K a L que fa commutativus els triangles:



Un pushout és un colímit d'un diagrama indexat per la categoria dual a la del pullback, que té tres objectes amb els morfismes següents, a part de les identitats:

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

Un diagrama indexat per la categoria pullback a una categoria \mathcal{C} té com a límit el colímit del mateix diagrama indexat per la categoria pushout de \mathcal{C}^{op} .

L'últim cas concret de colímit que veurem són els *coigualadors*. Un coigualador és el colímit d'un diagrama indexat per la categoria que té dos objectes i dos morfismes paral·lels entre ells, a part de les identitats:

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

En el cas de $f, g: d \rightrightarrows e$ a \mathcal{C} , el seu colímit és, per definició, un objecte C junt amb un morfisme $p: e \rightarrow C$ tal que es compleixen les dues propietats següents:

- $p \circ f = p \circ g$;
- per a qualsevol altre cocon (W, q) que compleixi la primera propietat existeix un únic morfisme $q': C \rightarrow W$ tal que $q' \circ p = q$.

Teorema 2.11. *El colímit d'un diagrama indexat per una categoria petita $F: J \rightarrow \mathcal{C}$ es pot expressar com el coigualador del diagrama següent:*

$$\coprod_{f \in \text{Mor} J} F(\text{dom} f) \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} \coprod_{j \in \text{Ob} J} Fj$$

on a és, per a cada component del coproducte, la identitat, i b és Ff respectivament. Per a cada $f: i \rightarrow j \in J$, tenim

$$\begin{aligned} a: Fi &\mapsto Fi \\ b: Fi &\mapsto Fj. \end{aligned}$$

Demostració. El coigualador del diagrama és un objecte C junt amb un morfisme $h: \coprod_{j \in \text{Ob} J} Fj \rightarrow C$ tal que els dos triangles següents imposats per a i b siguin commutatius:

$$\begin{array}{ccc} Fi & \xrightarrow{\text{Id}} & Fi \\ & \searrow h_i & \swarrow h_i \\ & & C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Fi & \xrightarrow{Ff} & Fj \\ & \searrow h_i & \swarrow h_j \\ & & C \end{array}$$

La commutativitat del segon triangle equival a dir que (C, h) és un cocon sobre el diagrama F . Veiem ara, per la segona condició que es demana, que aquest cocon compleix la propietat universal del colímit sobre F . Per definició,

tenim que per a qualsevol altre cocon (W, q) sobre el diagrama de morfismes paral·lels, existeix un únic $q': C \rightarrow W$ tal que $q' \circ p = q$. Això és, per a cada element $j \in J$ tenim per la seva component del morfisme a que

$$(F_i \xrightarrow{a_i = \text{Id}} F_i \xrightarrow{h_i} C \xrightarrow{q'} W) = (F_i \xrightarrow{q_i} W).$$

Aquesta és la condició necessària perquè (C, h) compleixi la propietat universal del colímit. \square

Observació 2.12. Aquest argument demostra que l'existència de colímits en una categoria es equivalent a l'existència de coproductes i coigualadors en aquesta categoria. El teorema 2.11 té una versió dual per als límits en termes de productes i igualadors.

2.3 Exemples de límits i colímits

Un *sistema directe* és un diagrama indexat per un conjunt dirigit, és a dir, un conjunt amb una relació binària reflexiva i transitiva (un preordre) juntament amb la propietat que cada parell d'elements té una cota superior. A cada objecte del diagrama l'anomenem A_i i els morfismes entre ells els anomenem $f_{ij}: A_i \rightarrow A_j$. Aquests han de complir les dues condicions següents:

- f_{ii} és la identitat per a tot i ;
- $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ per a tot $i \leq j \leq k$.

Els *límits directes* són els colímits d'aquest tipus de diagrames. Dualment, els *límits inversos* són els límits dels sistemes inversos.

El càlcul dels límits inversos es pot fer utilitzant la fórmula següent, quan aquesta fórmula tingui sentit en el context en què estem treballant. Per a espais topològics, grups o conjunts, és clar que sí que en té.

$$\lim_{\leftarrow} A_i = \left\{ (a_i) \in \prod_{i \in I} A_i \mid a_i = f_{ij}(a_j) \text{ per a tot } i \leq j \right\}.$$

La fórmula per als límits directes és la següent:

$$\lim_{\rightarrow} A_i = \prod_i A_i / \sim$$

amb la relació d'equivalència

$$x_i \in A_i, x_j \in A_j, x_i \sim x_j \iff \exists k \text{ amb } i \leq k, j \leq k \mid f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j).$$

Exemple 2.13. En aquest exemple calcularem el límit directe del sistema directe representat pel diagrama

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \xrightarrow{f_3} \mathbb{Z}/p^4\mathbb{Z} \xrightarrow{f_4} \dots$$

on els morfismes estan definits per $f_i(1) = p$. El seu colímit (o límit directe) és un grup abelià que manté l'estructura i tots els elements de qualsevol $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, ja que cada morfisme f_n és un homomorfisme. Una manera de visualitzar-ho és imaginant la circumferència unitat inserida al pla complex. Per a $p = 3$, podem visualitzar els dos primers elements del sistema en les figures següents, que representen arrels de la unitat:



Per fer el pas a l'infinit per treure'n el límit directe, omplim densament tota la circumferència seguint aquest procediment. Aquest objecte s'anomena $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ i té les dues propietats següents:

- És infinit i numerable. La seva construcció fa clara aquesta propietat.
- És un grup de torsió: $\forall x \in \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N} \mid p^n x = 0$.

Exemple 2.14. Agafant el sistema directe anterior, ara en calcularem el límit invers canviant la direcció de les fletxes i prenent f_n com la reducció mòdul p^n . Per la fórmula que n'hem donat, obtenim

$$\widehat{\mathbb{Z}}_p = \{(a_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid a_{n+1} \equiv a_n \pmod{p^n} \text{ per a tot } n\}.$$

Aquest grup es coneix com els enters p -àdics i, contràriament al límit directe:

- No és numerable.
- És lliure de torsió.

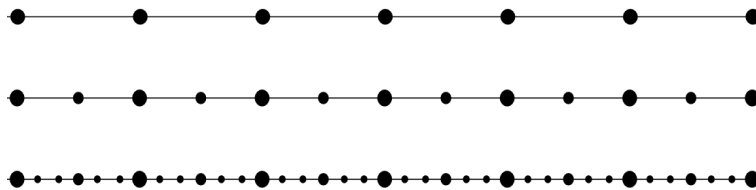
Exemple 2.15. Considerem el sistema directe següent a la categoria dels grups:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 4} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 5} \dots$$

Per trobar-ne el límit directe, cal agafar la unió de totes les còpies dels enters, segons la relació d'equivalència explicada. Anomenem n_i a cada element del colímit, que representa l'element $n \in \mathbb{Z}$ de la còpia i -èsima dels enters. Aleshores

$$n_i \sim m_j \iff \left(\prod_{i < k \leq j} k \right) \cdot n = m, i < j.$$

Visualment, el límit directe es pot anar construint sobre la recta real tal com s'indica a la figura:



Veiem com a mesura que afegim còpies de \mathbb{Z} anem omplint densament la recta, superposant els nombres identificats segons la relació \sim .

Si prenem la primera còpia de \mathbb{Z} com a referència dels enters, llavors cada n_i representa el nombre racional $n/i!$. Així, cada $q \in \mathbb{Q}$, $q = a/b$ apareix (com a mínim) al pas b , representat per $a(b-1)!/b!$. Recíprocament, cada element del límit directe representa un nombre racional i el que acabem de fer és construir el grup dels racionals a partir dels enters.

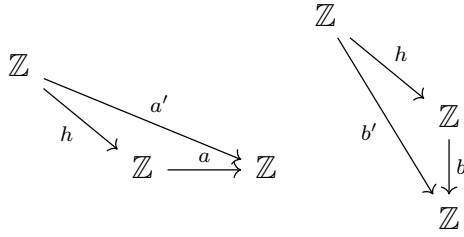
Exemple 2.16. Per a aquest exemple, també treballarem amb la categoria dels grups, en concret amb \mathbb{Z} . Calculem el límit del diagrama de pullback següent:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xleftarrow{m} \mathbb{Z}.$$

En primer lloc, busquem un grup G i dos morfismes f i g que facin commutatiu el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ \downarrow g & & \downarrow n \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{m} & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Veiem que $G = \mathbb{Z}$, amb un morfisme f que sigui el producte per un enter a i g el producte per un altre b , tals que $an = bm$. Ara, però, tenim infinites opcions i el límit ha de ser únic llevat d'isomorfisme. Per trobar-lo, apliquem la propietat universal, i veiem que qualsevol dels dos triangles de la forma següent commuta per a qualsevol a' i b' si, i només si, $an = bm$ és el mínim comú múltiple de m i n :



Per tant, aquest homomorfisme h és el producte per a'/a , que sempre existeix, ja que per definició del mínim comú múltiple, a conté tots els divisors de a' .

2.4 Adjuncions

Definició 2.17. Una *adjunció* és un parell de functors $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ juntament amb un isomorfisme $\mathcal{C}(c, Gd) \cong \mathcal{D}(Fc, d)$ per a qualsevol parell d'elements c i d , que és natural en les dues variables. Això és, hi ha un isomorfisme natural entre els functors $\mathcal{C}(-, Gd)$ i $\mathcal{D}(Fc, d)$ i un altre entre $\mathcal{C}(c, G-)$ i $\mathcal{D}(Fc, -)$. En aquest cas, direm que F és l'*adjunt per l'esquerra* de G , i G és l'*adjunt per la dreta* de F . Utilitzarem la notació

$$F \dashv G.$$

Exemple 2.18. En aquest exemple definim el functor *oblit* $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, que envia cada espai topològic al seu conjunt subjacent i cada aplicació contínua a la corresponent aplicació entre conjunts. Comencem veient que té un functor adjunt per l'esquerra $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$, que envia cada conjunt a l'espai topològic que forma amb la topologia discreta. Per comprovar-ho hem de veure que, per a tot conjunt C i cada espai topològic X ,

$$\mathbf{Top}(D(C), X) \cong \mathbf{Set}(C, U(X)).$$

Comencem veient que a cada aplicació de conjunts $f: C \rightarrow U(X)$ podem assignar-li l'aplicació següent:

$$\begin{aligned} g: D(C) &\rightarrow X \\ y &\mapsto f(y). \end{aligned}$$

Per veure que $g \in \mathbf{Top}(D(C), X)$, cal demostrar que g és contínua. Això, però, és cert per a qualsevol aplicació que tingui a l'espai de sortida la topologia discreta. També caldria veure que a cada aplicació contínua $g: D(C) \rightarrow X$ li podem assignar una $f: C \rightarrow U(X)$ que sigui compatible amb l'assignació anterior per demostrar l'isomorfisme. Per a cada g , assignem l'aplicació

$$\begin{aligned} f: C &\rightarrow U(X) \\ y &\mapsto g(y) \end{aligned}$$

que està ben definida a **Set**.

Podem intentar trobar ara un functor adjunt per la dreta. En aquest cas, necessitem que el functor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ envii cada conjunt C a un espai topològic tal que les aplicacions que el tinguin com a conjunt d'arribada siguin contínues. La topologia que compleix aquesta propietat és la topologia grollera. Definim

$$\begin{aligned} F: \mathbf{Set} &\rightarrow \mathbf{Top} \\ C &\mapsto (C, \{\emptyset, C\}) \end{aligned}$$

i a cada aplicació $f: U(X) \rightarrow C$ entre conjunts podem assignar-li aquella $g: X \rightarrow F(C)$ que té les mateixes imatges per a espais topològics, que sabem que serà contínua.

Donem ara dues definicions equivalents a les que hem construït als apartats anteriors d'objectes terminals i inicials, límits i colímits, però utilitzant les adjuncions. Aquests exemples ens donen una idea de la importància d'aquestes relacions.

Teorema 2.19. *El functor $i: 1 \rightarrow \mathcal{C}$ que envia la categoria amb un sol objecte (que anomenem \bullet) i la seva identitat 1_\bullet a l'objecte inicial de \mathcal{C} (quan existeixi) és adjunt per l'esquerra del functor $!: \mathcal{C} \rightarrow 1$, i el functor $t: 1 \rightarrow \mathcal{C}$ que té per imatge l'objecte terminal de \mathcal{C} n'és l'adjunt per la dreta.*

Demostració. Per la definició d'adjunció, hi ha una bijecció

$$1(\bullet, !c) \simeq \mathcal{C}(i(\bullet), c).$$

És clar que el primer conjunt té un únic element per a tot $c \in \mathcal{C}$. Així, sempre existeix un únic morfisme de $i(\bullet)$ a c , que compleix la definició d'objecte inicial.

Per als objectes terminals, la demostració és anàloga a partir de la informació que ens dona l'adjunció, en aquest cas

$$1(!c, \bullet) \simeq \mathcal{C}(c, t(\bullet)),$$

que també tenen un únic element. □

Sigui \mathcal{C} una categoria i J una categoria petita. Anomenem \mathcal{C}^J a la categoria de diagrames a \mathcal{C} indexats per J .

Teorema 2.20. *Una categoria \mathcal{C} admet límits per a qualsevol diagrama indexat per la categoria petita J si i només si el functor constant $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$, que envia cada element de \mathcal{C} al diagrama on tots els elements són c i tots els morfismes són la identitat, admet un adjunt per la dreta. Per dualitat, \mathcal{C} admet colímits si i només si el functor Δ admet un adjunt per l'esquerra.*

Demostració. Per a tot $c \in \mathcal{C}$ i $F \in \mathcal{C}^J$, $\mathcal{C}^J(\Delta c, F)$ és el conjunt de transformacions naturals del diagrama constant en c al diagrama F . Aquest és precisament el conjunt de cons amb vèrtex c sobre F . Així, si $\lim F$ és l'adjunt per la dreta de Δ , tenim que l'isomorfisme

$$\mathcal{C}^J(\Delta c, F) \cong \mathcal{C}(c, \lim F)$$

existeix si, i només si, per a cada con sobre F podem assignar un únic morfisme $c \rightarrow \lim F$, és a dir, que coincideix amb la propietat universal dels límits. La demostració per als colímits és anàloga. \square

Donades les definicions i resultats bàsics sobre adjuncions i la seva relació amb els límits i colímits, veiem tot seguit resultats més específics que ens seran útils en els pròxims capítols.

Lema 2.21. *Sigui $F \dashv G$ una adjunció entre functors. Hi ha una transformació natural $\eta: 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$, que anomenem unitat de l'adjunció.*

Demostració. Per demostrar-ne la naturalitat, hem de veure que el diagrama següent commuta per a tot $f: c \rightarrow c'$:

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\ f \downarrow & & \downarrow GFf \\ c' & \xrightarrow{\eta_{c'}} & GFc'. \end{array}$$

Per adjunció, la commutativitat del diagrama anterior és equivalent a la d'aquest altre:

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{1_{Fc}} & Fc \\ Ff \downarrow & & \downarrow Ff \\ Fc' & \xrightarrow{1_{Fc'}} & Fc' \end{array}$$

i aquesta és trivial. \square

Lema 2.22. *Sigui $F \dashv G$ una adjunció entre functors. Hi ha una transformació natural $\epsilon: FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$, que anomenem counitat de l'adjunció.*

Demostració. Per a la demostració cal veure la commutativitat del diagrama següent, que es fa de manera anàloga a l'anterior:

$$\begin{array}{ccc} FGd & \xrightarrow{\epsilon_d} & d \\ FGf \downarrow & & \downarrow f \\ FGd' & \xrightarrow{\epsilon_{d'}} & d'. \end{array}$$

\square

Teorema 2.23. *Si $F \dashv G$ una adjunció dels functors $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Si la unitat i la counitat de l'adjunció són isomorfismes naturals, llavors F i G indueixen una equivalència de categories.*

Demostració. La demostració és conseqüència directa de la definició donada d'equivalència de categories. \square

Teorema 2.24. *Donada una parella de functors $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}: G$, existeix un isomorfisme natural $\mathcal{C}(c, Gd) \cong \mathcal{D}(Fc, d)$ si i només si existeixen les transformacions naturals $\eta: 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ i $\epsilon: FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ que satisfan les identitats triangulars:*

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\
 & \searrow 1_F & \downarrow \epsilon^F \\
 & & F
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\
 & \searrow 1_G & \downarrow G\epsilon \\
 & & G.
 \end{array}$$

Demostració. Es poden trobar els detalls de la demostració a [11] (Proposició 4.2.6, pàgina 124). \square

3 Homotopia

3.1 Categoria homotòpica dels espais topològics

La categoria homotòpica del espais topològics **HoTop** té per objectes els espais topològics i per morfismes les classes d'homotopia de les aplicacions contínues entre ells. Els isomorfismes d'aquesta categoria són les equivalències homotòpiques entre espais.

Proposició 3.1. Si $\prod_i A_i$ és un producte a **Top**, aquest està ben definit a **HoTop**. És a dir, per a qualsevol elecció de $A'_i \simeq A_i$, tenim que $\prod_i A'_i \simeq \prod_i A_i$.

Demostració. Siguin $f_i: A_i \rightarrow A'_i$ i $g_i: A'_i \rightarrow A_i$ equivalències homotòpiques. Llavors podem definir $F: \prod_i A_i \rightarrow \prod_i A'_i$ i $G: \prod_i A'_i \rightarrow \prod_i A_i$ de la manera següent:

$$F(\dots, a_i, \dots) = (\dots, f_i(a_i), \dots)$$

$$G(\dots, a'_i, \dots) = (\dots, g_i(a'_i), \dots)$$

i també definiran una relació d'equivalència homotòpica. □

Malgrat que els productes es conservin, en general els límits i colímits de diagrames de **Top** no es conserven a **HoTop**. Són un contraexemple els diagrames següents, que són isomorfs a **HoTop**:

$$\mathbb{D}^2 \xleftarrow{f} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{g} \mathbb{D}^2, \quad * \xleftarrow{f'} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{g'} *$$

on les aplicacions f, g són homeomorfismes de \mathbb{S}^1 a la vora de \mathbb{D}^2 . Tot i ser diagrames equivalents, els seus colímits (pushouts) no són isomorfs. Els pushouts a **Top** són la unió dels dos espais codomini identificant els punts que tenen la mateixa antiimatge. Podem aplicar-ho als exemples anteriors:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{D}^2 \\ f \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{g'} & * \\ f' \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & * \end{array}$$

Com que \mathbb{S}^2 no és homotòpicament equivalent a un punt, els dos pushouts no són isomorfs a **HoTop**.

3.2 Conjunts simplicials

Un *objecte simplicial* X sobre una categoria \mathcal{C} consisteix en

- un objecte $X_n \in \mathcal{C}$ per a cada enter $n \geq 0$;
- per a cada parell d'enters i, n tals que $0 \leq i \leq n$, els morfismes següents *cara* i *degeneració*, respectivament:

$$d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad s_i: X_n \rightarrow X_{n+1}.$$

Aquests morfismes han de complir les *proprietats simplicials*:

$$\begin{aligned} i < j, & & d_i d_j &= d_{j-1} d_i \\ i < j, & & d_i s_j &= s_{j-1} d_i \\ i = j \text{ o } i = j + 1, & & d_i s_j &= \text{Id} \\ i > j + 1, & & d_i s_j &= s_j d_{i-1} \\ i > j, & & s_i s_j &= s_j s_{i-1}. \end{aligned}$$

Una *aplicació simplicial* $f: X \rightarrow Y$ entre dos objectes simplicials consisteix en una aplicació $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ per a cada $n \geq 0$ que commuta amb els morfismes d i s , és a dir,

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i \text{ i } s_i f_n = f_{n+1} s_i.$$

Un objecte simplicial sobre la categoria **Set** direm que és un *conjunt simplicial*. A l'exemple següent veiem quina és la relació que guarden els conjunts simplicials amb els complexos simplicials.

Exemple 3.2. Tot complex simplicial ordenat (escollim un ordre total en el conjunt de vèrtexs) és un conjunt simplicial. Comencem definint X_n com el conjunt de n -símplexs i $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$ tal que

$$d_i([v_{k_1}, \dots, v_{k_n}]) = ([v_{k_0}, \dots, \widehat{v_{k_i}}, \dots, v_{k_n}]),$$

és a dir, el $(n-1)$ -símplex que resulta d'eliminar el vèrtex v_{k_i} . Per altra banda, $s_i: X_n \rightarrow X_{n+1}$ és tal que

$$s_i([v_{k_1}, \dots, v_{k_n}]) = ([v_{k_0}, \dots, v_{k_i}, v_{k_i}, \dots, v_{k_n}]).$$

Comprovem que es compleixen les propietats simplicials:

1. Si $i < j$,

$$\begin{aligned} d_i(d_j([v_{k_0}, \dots, v_{k_n}])) &= d_i([v_{k_0}, \dots, \widehat{v_{k_j}}, \dots, v_{k_n}]) \\ &= [v_{k_0}, \dots, \widehat{v_{k_i}}, \dots, \widehat{v_{k_j}}, \dots, v_{k_n}] \\ &= d_{j-1}([v_{k_0}, \dots, \widehat{v_{k_i}}, \dots, v_{k_n}]) \\ &= d_{j-1}(d_i([v_{k_0}, \dots, v_{k_n}])). \end{aligned}$$

2. També,

$$\begin{aligned}
d_i(s_j([v_{k_0}, \dots, v_{k_n}])) &= d_i([v_{k_0}, \dots, v_{k_j}, v_{k_j}, \dots, v_{k_n}]) \\
&= [v_{k_0}, \dots, \widehat{v_{k_i}}, \dots, v_{k_j}, v_{k_j}, \dots, v_{k_n}] \\
&= s_{j-1}([v_{k_0}, \dots, \widehat{v_{k_i}}, \dots, v_{k_n}]) \\
&= s_{j-1}(d_i[v_{k_0}, \dots, v_{k_n}]).
\end{aligned}$$

3. Si $i = j$ o $i = j + 1$,

$$\begin{aligned}
d_i(s_j([v_{k_0}, \dots, v_{k_n}])) &= d_i([v_{k_0}, \dots, v_{k_j}, v_{k_j}, \dots, v_{k_n}]) \\
&= [v_{k_0}, \dots, v_{k_n}].
\end{aligned}$$

4. Si $i > j + 1$,

$$\begin{aligned}
d_i(s_j([v_{k_0}, \dots, v_{k_n}])) &= d_i([v_{k_0}, \dots, v_{k_j}, v_{k_j}, \dots, v_{k_n}]) \\
&= [v_{k_0}, \dots, v_{k_j}, v_{k_j}, \dots, \widehat{v_{k_{i-1}}}, \dots, v_{k_n}] \\
&= s_j([v_{k_0}, \dots, \widehat{v_{k_{i-1}}}, \dots, v_{k_n}]) \\
&= s_j(d_{i-1}([v_{k_0}, \dots, v_{k_n}])).
\end{aligned}$$

5. Per últim, si $i > j$,

$$\begin{aligned}
s_i(s_j([v_{k_0}, \dots, v_{k_n}])) &= s_i([v_{k_0}, \dots, v_{k_j}, v_{k_j}, \dots, v_{k_n}]) \\
&= [v_{k_0}, \dots, v_{k_j}, v_{k_j}, \dots, v_{k_{i-1}}, v_{k_{i-1}}, \dots, v_{k_n}] \\
&= s_j([v_{k_0}, \dots, v_{k_{i-1}}, v_{k_{i-1}}, \dots, v_{k_n}]) \\
&= s_j(s_{i-1}([v_{k_0}, \dots, v_{k_n}])).
\end{aligned}$$

Tanmateix, no tot conjunt simplicial és un complex simplicial. En un complex simplicial no hi pot haver més d'una aresta entre dos vèrtexs, mentre aquesta condició no és necessària en els conjunts simplicials.

Exemple 3.3. Cada categoria \mathcal{C} té associat un conjunt simplicial, que s'anomena el *nervi* de la categoria $\mathcal{N}(\mathcal{C})$. Es construeix com

$$\mathcal{N}(\mathcal{C})_n = \{\text{Functors } [n] \rightarrow \mathcal{C}\}.$$

Utilitzem $[n]$ per referir-nos a la categoria que té per objectes els elements del conjunt $\{0, \dots, n\}$ i els morfismes de la forma $i \rightarrow i + 1$ (amb les composicions i identitats corresponents). Veiem que $\mathcal{N}(\mathcal{C})_n$ és el conjunt de totes les successions de n morfismes componibles de \mathcal{C} . El diagrama següent n'és un exemple:

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} c_{n-1} \xrightarrow{f_n} c_n.$$

Per completar la definició de conjunt simplicial, cal descriure els morfismes cara i degeneració. El morfisme cara d_i enviarà cada successió de $\mathcal{N}(\mathcal{C})_n$ a la successió de $\mathcal{N}(\mathcal{C})_{n-1}$

$$c_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{i-1}} c_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} c_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots \xrightarrow{f_n} c_n.$$

El morfisme degeneració enviarà cada successió de $\mathcal{N}(\mathcal{C})_n$ a la successió de $\mathcal{N}(\mathcal{C})_{n+1}$

$$c_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_i} c_i \xrightarrow{1_i} c_i \xrightarrow{f_{i+1}} \dots \xrightarrow{f_n} c_n.$$

Es comprova d'una manera molt semblant a l'exemple anterior que les cares i les degeneracions compleixen les propietats simplicials.

S'anomena **sSet** la categoria que té per objectes els conjunts simplicials i per morfismes les aplicacions simplicials.

3.3 Equivalència entre les categories homotòpiques dels espais topològics i dels conjunts simplicials

Per començar aquesta secció, estudiarem primer la relació entre les dues categories **Top** i **sSet**. Veurem que estan relacionades per un parell de functors adjunts, el functor *singular* (Sing) i el de *realització* ($|\cdot|$). Les definicions d'aquests functors les obtenim de [1] (pàgines 232 i 233).

El functor $\text{Sing}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$ envia cada $X \in \mathbf{Top}$ al conjunt simplicial format per les aplicacions $c: \Delta^n \rightarrow X$ per a tot $n \geq 0$. Per definir els morfismes cara d_i i degeneració s_i cal definir primer les aplicacions següents entre símplexs estàndard²:

$$\underline{d}^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n \\ [t_0, \dots, t_{n-1}] \mapsto [t_0, \dots, t_i, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}]$$

$$\underline{s}^i: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n \\ [t_0, \dots, t_n] \mapsto [t_0, \dots, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n-1}].$$

Els morfismes cara i degeneració a $\text{Sing}X$ són les composicions amb les aplicacions \underline{d}^i i \underline{s}^i . El morfisme d_i envia $c: \Delta^n \rightarrow X$ a $c \circ \underline{d}^i: \Delta^{n-1} \rightarrow X$ i s_i envia $c: \Delta^n \rightarrow X$ a $c \circ \underline{s}^i: \Delta^{n+1} \rightarrow X$. Per demostrar que els morfismes definits

²El símplex estàndard Δ^n és, per a cada $n \geq 1$, el subespai de \mathbb{R}^{n+1} que consisteix en els punts (t_0, \dots, t_n) tals que $\sum t_i = 1$ i $0 \leq t_i \leq 1$ per a cada i .

així compleixen les propietats simplicials, n'hi ha prou amb veure que \underline{d}^i i \underline{s}^i compleixen les propietats simplicials duals, que són

$$\begin{array}{ll} i < j, & \underline{d}^j \underline{d}^i = \underline{d}^i \underline{d}^{j-1} \\ i < j, & \underline{s}^j \underline{d}^i = \underline{d}^i \underline{s}^{j-1} \\ i = j \text{ o } i = j + 1, & \underline{s}^j \underline{d}^i = Id \\ i > j + 1, & \underline{s}^j \underline{d}^i = \underline{d}^{i-1} \underline{s}^j \\ i > j, & \underline{s}^j \underline{s}^i = \underline{s}^{i-1} \underline{s}^j. \end{array}$$

La comprovació és immediata.

Per a cada aplicació contínua entre espais topològics $f: X \rightarrow Y$, tindrem que $\text{Sing}f$ enviarà cada aplicació $c: \Delta^n \rightarrow X$ a $f \circ c: \Delta^n \rightarrow Y$.

El functor realització $|\cdot|: \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ envia cada $X \in \mathbf{sSet}$ a $|X|$, que es defineix com:

$$|X| = (\bigsqcup_n X_n \times \Delta^n) / \sim$$

amb la relació d'equivalència

$$\begin{array}{l} (d_i k, u) \sim (k, \underline{d}^i u), \text{ per a } k \in X_{n+1}, u \in \Delta^n \\ (s_i k, u) \sim (k, \underline{s}^i u), \text{ per a } k \in X_{n-1}, u \in \Delta^n \end{array}$$

assignant-li la topologia discreta. Així, els punts de $|X|$ són de la forma $|k_n, u_n|$, que denota la classe d'equivalència del punt $(k_n, u_n) \in X_n \times \Delta^n$ amb la relació donada.

Teorema 3.4. *El functor singular és adjunt per la dreta al functor realització.*

Demostració. Per a la demostració buscarem l'isomorfisme explícit de l'adjunció. Notem

$$\phi: \mathbf{sSet}(K, \text{Sing}X) \rightarrow \mathbf{Top}(|K|, X) \text{ i } \psi: \mathbf{Top}(|K|, X) \rightarrow \mathbf{sSet}(K, \text{Sing}X),$$

de manera que si tenim

$$\begin{array}{l} f: K \rightarrow \text{Sing}X \\ g: |K| \rightarrow X \end{array}$$

definim els isomorfismes com

$$\begin{array}{l} \phi(f): |K| \rightarrow X \\ |k_n, u_n| \mapsto f(k_n)(u_n) \\ \psi(g): K \rightarrow \text{Sing}X \\ k_n \mapsto c \end{array}$$

on $c: \Delta^n \rightarrow X$ tal que $c(u_n) = g|_{k_n, u_n}$ per a tot u_n punt interior de Δ^n .

Per definició, $\phi \circ \psi = 1$ i $\psi \circ \phi = 1$. Per tant, tenim una adjunció. \square

Donades dues aplicacions simplicials $f, g: X \rightarrow Y$, una *homotopia simplicial* de f a g és una aplicació simplicial $H: \Delta^1 \times X \rightarrow Y$ tal que $H_0 = f$ i $H_1 = g$, on H_0 és la composició de l'isomorfisme $X \cong \Delta^0 \times X$ amb l'aplicació $\Delta^0 \times X \hookrightarrow \Delta^1 \times X$ corresponent a la inclusió $\underline{d}^0: \Delta^0 \rightarrow \Delta^1$, i anàlogament amb H_1 . Aquesta definició d'homotopia no és una relació d'equivalència en general: ho és només en els conjunts simplicials que són conjunts de Kan (que definim al següent capítol). En aquest cas, dues aplicacions simplicials $f, g: X \rightarrow Y$ són homòtopes simplicialment si i només si les realitzacions $|f|, |g|: |X| \rightarrow |Y|$ són homòtopes com a aplicacions entre espais topològics.

Definim \mathbf{HosSet}_f com la categoria que té per objectes els conjunts de Kan amb la relació d'homotopia d'aplicacions. Es pot veure a [6], i ho utilitzarem al següent teorema, que per a tot conjunt simplicial Y existeix un conjunt de Kan \widehat{Y} tal que $|Y|$ i $|\widehat{Y}|$ són espais homotòpicament equivalents. La categoria \mathbf{HoTop} també l'hem de substituir per la subcategoria \mathbf{HoTop}_c , que té per objectes els espais topològics homeomorfs a realitzacions de conjunts simplicials. Aquesta categoria \mathbf{HoTop}_c és equivalent a la subcategoria de \mathbf{HoTop} que té per objectes els complexos cel·lulars. Un *complex cel·lular* és un espai topològic que s'obté a partir d'un conjunt de punts amb la topologia discreta adjuntant cel·les en dimensions successives. *Adjuntar una n -cel·la* a un espai topològic X vol dir prendre el push-out d'una aplicació contínua $S^{n-1} \rightarrow X$ amb la inclusió $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$.

Teorema 3.5. *Els functors singular i realització preserven les homotopies. De fet, indueixen una equivalència entre les categories \mathbf{HoTop}_c i \mathbf{HosSet}_f .*

Demostració. En aquesta demostració veurem que

- l'adjunció entre \mathbf{Sing} i el functor realització és compatible amb la relació d'homotopia en les categories respectives;
- la unitat i counitat de l'adjunció indueixen isomorfismes

$$\eta_K: K \longrightarrow \mathbf{Sing} |K|, \quad \epsilon_X: |\mathbf{Sing} X| \longrightarrow X.$$

Donat un conjunt simplicial W i un espai X , ja sabem que hi ha una bijecció

$$\mathbf{Top}(|W|, X) \cong \mathbf{sSet}(W, \mathbf{Sing} X).$$

Com que $\mathbf{Sing} X$ és de Kan, dues aplicacions simplicials $f, g: W \rightarrow \mathbf{Sing} X$ són homòtopes si hi ha una homotopia simplicial $H: \Delta^1 \times W \rightarrow \mathbf{Sing} X$ tal que $H_0 = f$ i $H_1 = g$. Per adjunció, hi ha una aplicació contínua $\tilde{H}: |\Delta^1 \times W| \rightarrow X$ adjunta de H . Com que $|\Delta^1 \times W| \cong [0, 1] \times |W|$, obtenim que les aplicacions

adjuntes $\tilde{f}, \tilde{g}: |W| \rightarrow X$ són homòtopes. Recíprocament, si tenim donades dues aplicacions contínues $r, s: |W| \rightarrow X$ amb una homotopia $F: [0, 1] \times |W| \rightarrow X$ tal que $F_0 = r$ i $F_1 = s$, que és el mateix que $F: |\Delta^1 \times W| \rightarrow X$, per adjunció tenim una aplicació simplicial $\tilde{F}: \Delta^1 \times W \rightarrow \text{Sing } X$ que és una homotopia entre $\tilde{r}, \tilde{s}: W \rightarrow \text{Sing } X$.

Comprovem ara que η_K indueix un isomorfisme a \mathbf{HosSet}_f per a tot conjunt de Kan K . Per a qualsevol conjunt simplicial W , tenim que

$$[W, K] = [|W|, |K|] \cong [W, \text{Sing } |K|],$$

on la primera igualtat és certa perquè K és de Kan i la segona igualtat prové del fet que l'adjunció entre \mathbf{sSet} i \mathbf{Top} és compatible amb la relació d'homotopia.

A continuació, comprovem que ϵ_X indueix un isomorfisme a \mathbf{HoTop}_c per a tot espai topològic X de la forma $X = |K|$ on K és un conjunt simplicial, que podem suposar que és de Kan (prenent, si no ho és, una aproximació fibrant \widehat{K}). Aleshores, utilitzant el fet que η_K és un isomorfisme a \mathbf{HosSet}_f , tenim

$$|\text{Sing } X| = |\text{Sing } |K|| \simeq |K| = X.$$

Aquí hem utilitzat el fet que el functor realització envia conjunts de Kan homotòpicament equivalents a espais topològics homotòpicament equivalents; això es dedueix del fet que, si dues aplicacions simplicials f, g entre conjunts de Kan són homòtopes, llavors $|f|$ i $|g|$ també són homòtopes. \square

3.4 Límits i colímits homotòpics

Definim ara els límits homotòpics tal com ho fan Bousfield i Kan ([1], capítols 11 i 12).

Donada una categoria petita I , es defineix el seu *espai subjacent* com aquell conjunt simplicial que té per símplexs les successions de n morfismes componibles com els del diagrama:

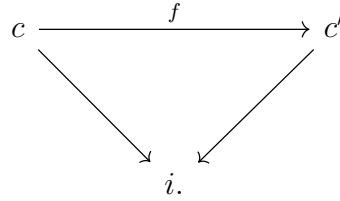
$$i_0 \xleftarrow{f_1} i_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} i_{n-1} \xleftarrow{f_n} i_n.$$

Fixem-nos que és molt semblant a com definíem el nervi d'una categoria, però amb els morfismes invertits. De fet, els morfismes cara i degeneració es definiran de manera anàloga. És per això que l'espai subjacent d'una categoria I és $\mathcal{N}(I)^{\text{op}}$.

Donada una categoria petita I i un objecte i de I , podem formar la categoria $(I \uparrow i)$ sobre i de la manera següent:

- Els objectes són els morfismes de I que tenen i per codomini, de la forma $i \leftarrow c$.

- Els morfismes són els triangles commutatius amb els morfismes $f : c \rightarrow c' \in I$ següents:



Els n -símplexs de l'espai subjacent de $(I \uparrow i)$ són de la forma

$$i \xleftarrow{f} i_0 \xleftarrow{f_1} i_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} i_{n-1} \xleftarrow{f_n} i_n.$$

Podem definir el functor

$$\mathcal{N}(I \uparrow -)^{\text{op}} : I \rightarrow \mathbf{sSet}$$

que envia cada element $i \in I$ a l'espai subjacent de la categoria sobre i , i cada morfisme a la corresponent aplicació entre conjunts simplicials.

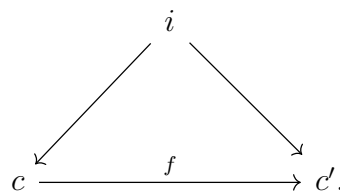
Definim, també, l'espai de morfismes entre dos diagrames de conjunts simplicials F i G com el conjunt simplicial $\text{Hom}(F, G)$ en què el conjunt de n -símplexs són els morfismes $\Delta^n \times F \rightarrow G$ per a tot $n \geq 0$.

Definició 3.6. (Límit homotòpic) Sigui I una categoria petita i F un diagrama indexat per I (un functor $I \rightarrow \mathbf{sSet}$). Definim el *límit homotòpic* de F de la manera següent:

$$\text{HoLim}(F) = \text{Hom}((I \uparrow -), F).$$

Per definir el colímit homotòpic, cal donar unes definicions prèvies. Donada una categoria petita I i un objecte $i \in I$, la categoria $(i \downarrow I)$ sota i és aquella tal que

- els seus objectes són morfismes de I que tenen i per domini, de la forma $i \rightarrow c$;
- els seus morfismes són els triangles commutatius derivats dels morfismes $f : c \rightarrow c' \in I$ següents:



Els n -símplexs de l'espai subjacent de $(i \downarrow I)$ són de la forma

$$i_0 \xleftarrow{f_1} i_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} i_{n-1} \xleftarrow{f_n} i_n \xleftarrow{f} i.$$

Tenim el functor

$$\mathcal{N}(- \downarrow I)^{\text{op}}: I \longrightarrow \mathbf{sSet}$$

que envia cada element de I a l'espai subjacent de la categoria sota I , i cada morfisme a la corresponent aplicació entre conjunts simplicials.

Definició 3.7. (Colímit homotòpic) Sigui I una categoria petita i F un diagrama indexat per I (un functor $I \rightarrow \mathbf{sSet}$). El *colímit homotòpic* de F es defineix com

$$\text{HoColim}(F) = F \otimes (- \downarrow I)^{\text{op}}$$

que és equivalent a

$$\text{HoColim}(F) = \text{coigualador} \left[\coprod_{f: i \rightarrow j} X_i \times \mathcal{N}(j \downarrow I)^{\text{op}} \rightrightarrows \coprod_i X_i \times \mathcal{N}(i \downarrow I)^{\text{op}} \right]$$

on els dos morfismes, diguem a i b , envien cada component del coproducte segons les aplicacions següents per a cada $f: i \rightarrow j$:

$$a_f = Ff \times \text{Id}: F_i \times \mathcal{N}(j \downarrow I)^{\text{op}} \longmapsto F_j \times \mathcal{N}(j \downarrow I)^{\text{op}}$$

$$b_f = \text{Id} \times \mathcal{N}(f \downarrow I)^{\text{op}}: F_i \times \mathcal{N}(j \downarrow I)^{\text{op}} \longmapsto F_i \times \mathcal{N}(i \downarrow I)^{\text{op}}.$$

Aquesta definició és molt semblant per a espais topològics: només cal utilitzar el functor realització per als conjunts simplicials subjacents. Així, si F és un diagrama d'espais topològics, tenim la fórmula següent per al colímit:

$$\text{HoColim}(F) = \text{coigualador} \left[\coprod_{i \rightarrow j} X_i \times |\mathcal{N}(j \downarrow I)^{\text{op}}| \rightrightarrows \coprod_i X_i \times |\mathcal{N}(i \downarrow I)^{\text{op}}| \right],$$

on els dos morfismes estan definits anàlogament.

Aquesta construcció de colímit homotòpic d'un diagrama F consisteix en ([1], pàgina 327),

- (i) per a cada conjunt simplicial del diagrama, agafar-ne una còpia;
- (ii) per a cada morfisme $f: x \rightarrow x'$ del diagrama, agafar una còpia de $\Delta^1 \times x$, identificant una banda del cilindre amb x i l'altra amb x' , el que anomenem el *cilindre* del morfisme f ;
- (iii) per a cada parell de morfismes componibles del diagrama, $f: x \rightarrow x'$ i $g: x' \rightarrow x''$, agafar una còpia de $\Delta^2 \times x$, identificant els tres costats del símplex amb f , g i gf respectivament, construint-ne el cilindre de cada morfisme, etc.

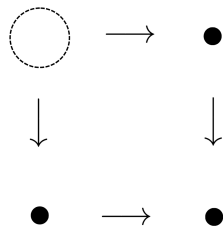
Exemple 3.8. Utilitzarem el mateix exemple que hem descrit a l'inici del capítol, on hem vist que

$$* \xleftarrow{f} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{g} * \simeq \mathbb{D}^2 \xleftarrow{f'} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{g'} \mathbb{D}^2$$

però

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{g} & * \\ f \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & * \end{array} \not\cong \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{g'} & \mathbb{D}^1 \\ f' \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2. \end{array}$$

El diagrama de l'esquerra representa la construcció on totes les aplicacions són constants a un punt. Podem redibuixar el diagrama de la manera següent:



Ara podem utilitzar la fórmula del colímit homotòpic que hem explicat anteriorment per construir-ne el pushout homotòpic. Fixem-nos que la categoria I és la que té els objectes i morfismes següents (a part de les identitats):

$$\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$$

Així, les categories $(i \downarrow I)^{\text{op}}$ són les següents.

Per a $i = 0$, hi ha tres morfismes amb domini 0, que són f , g i $\mathbf{1}_0$. D'aquests tres, tenim dues parelles componibles, $0 \xrightarrow{\mathbf{1}_0} 0 \xrightarrow{f} 1$ i $0 \xrightarrow{\mathbf{1}_0} 0 \xrightarrow{g} 2$. Amb aquesta informació, tenim que $(0 \downarrow I)^{\text{op}}$ té l'estructura

$$\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$$

Per altra banda, $(1 \downarrow I)^{\text{op}}$ i $(2 \downarrow I)^{\text{op}}$ són els conjunts simplicials amb només un vèrtex i cap altre símplex no degenerat.

Aplicant-ho al primer diagrama (que anomenem F),

$$\begin{aligned} K &= \coprod_{i \rightarrow j} X_i \times |\mathcal{N}(j \downarrow I)^{\text{op}}| = \\ &= (\mathbb{S}^1 \times \{\bullet\}) \amalg (\mathbb{S}^1 \times \{\bullet\}) = \\ &= \mathbb{S}^1 \amalg \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned}
 G &= \coprod X_i \times |\mathcal{N}(i \downarrow I)^{\text{op}}| = \\
 &= (\mathbb{S}^1 \times |0 \downarrow I|) \coprod (\{\bullet\} \times \{\bullet\}) \coprod (\{\bullet\} \times \{\bullet\}) = \\
 &= (\mathbb{S}^1 \times |0 \downarrow I|) \coprod \{\bullet\} \coprod \{\bullet\},
 \end{aligned}$$

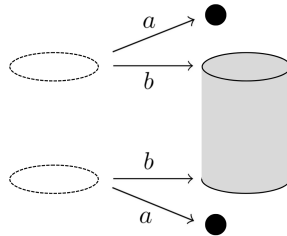
on l'espai $\mathbb{S}^1 \times |0 \downarrow I|$ és un cilindre. Així, estem buscant el coigualador de

$$\begin{array}{ccc}
 & a & \\
 K & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} & G \\
 & b &
 \end{array}$$

on les aplicacions a i b estan definides, per a cada f del coproducte, tal com les hem donat a la definició 3.8:

$$\begin{aligned}
 a_f &= Ff \times Id : F_i \times |\mathcal{N}(j \downarrow I)^{\text{op}}| \mapsto F_j \times |\mathcal{N}(j \downarrow I)^{\text{op}}| \\
 b_f &= Id \times \mathcal{N}(f \downarrow I)^{\text{op}} : F_i \times |\mathcal{N}(j \downarrow I)^{\text{op}}| \mapsto F_i \times |\mathcal{N}(i \downarrow I)^{\text{op}}|.
 \end{aligned}$$

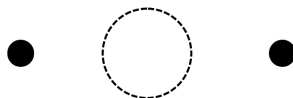
Sabem que aquest coigualador és l'espai G quotient per la relació d'equivalència $a(k) \sim b(k)$ per a tot k de K . Visualment, les aplicacions a i b són com les del dibuix.



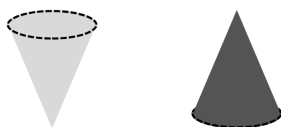
Així, si identifiquem les imatges de a i b estem identificant cada una de les vores del cilindre en un punt, i l'espai obtingut és homotòpicament equivalent a \mathbb{S}^2 .

Veurem ara que la construcció per passos ens porta al mateix espai que utilitzant la definició formal.

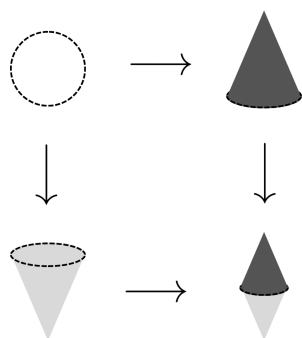
- (i) Començem agafant una còpia de cada espai del diagrama



(ii) i per a cada morfisme $\mathbb{S}^1 \rightarrow \{\bullet\}$ del diagrama prenem el cilindre $\Delta^1 \times \mathbb{S}^1$, on una de les vores la identifiquem amb un punt. Així, ens quedarien dos espais com els següents:



Aquests són cons buits per dins. Fixem-nos que la corba discontinua representa la imatge de \mathbb{S}^1 . Per acabar, només caldria unir els dos espais identificant les imatges de \mathbb{S}^1 . Podem representar els passos que hem seguit amb el diagrama següent:

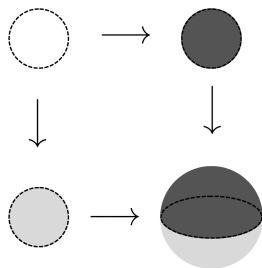


i el colímit homotòpic és un espai homeomorf a \mathbb{S}^2 .

Seguint amb aquest exemple, fem ara el mateix procés però amb el diagrama

$$\mathbb{D}^2 \xleftarrow{f'} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{g'} \mathbb{D}^2 .$$

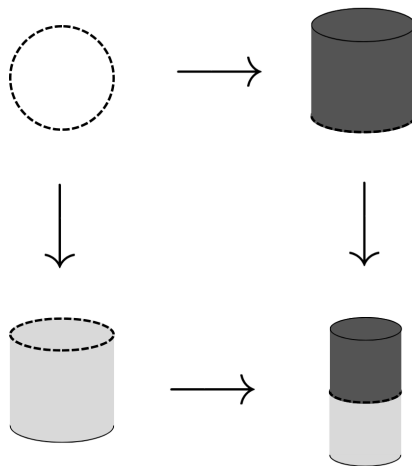
El seu colímit el podem redibuixar, igual que hem fet abans, de la manera següent:



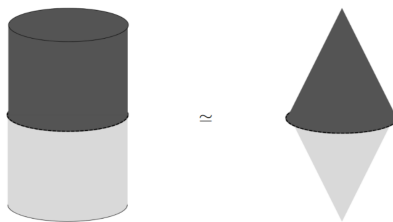
i per fer el colímit homotòpic construïm primer els cilindres



que en aquest cas són cilindres buits per dins amb una de les bases. Finalment, cal unir-los identificant la imatge de \mathbb{S}^1 de cada con que hem representat amb la corba discontinua. Així queda el diagrama:



Finalitzant ja l'exemple, hem vist com la construcció dels colímits homotòpics descrita per Bousfield i Kan ens permet resoldre el problema que teníem inicialment: que els límits i colímits ordinaris no es conserven a les respectives categories homotòpiques. És clar que els dos espais obtinguts són homotòpicament equivalents, és a dir, isomorfs a **HoTop**.



Observació 3.9. Fixem-nos que el colímit ordinari d'aquest segon diagrama

$$\mathbb{D}^2 \xleftarrow{f'} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{g'} \mathbb{D}^2$$

coincideix a **HoTop** amb el seu colímit homotòpic, mentre que en el primer diagrama

$$* \xleftarrow{f} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{g} *$$

el colímit a **Top** és un punt i l'homotòpic és \mathbb{S}^2 . Aquí podríem preguntar-nos quina és la diferència entre els dos diagrames, o quines són les condicions necessàries perquè els dos colímits o límits coincideixin. Malgrat que respondre aquesta pregunta ens allunyaria dels objectius del treball, Bousfield-Kan ([1]) en parlen de forma extensa. És interessant apuntar que en un diagrama les aplicacions són injectives i en l'altre no. En les construccions dels colímits homotòpics, aquestes aplicacions que no són injectives es converteixen en aplicacions injectives. Es veu més òbviament encara si comparem la definició de colímit homotòpic amb coigualadors i la definició de colímit a **Top** donada en el teorema 2.11 d'aquest mateix treball. Veiem que són molt semblants afegint un producte per un conjunt simplicial nervi (o la seva realització en el cas d'espais topològics). Hem vist en l'exemple que aquest canvi fa que els dos morfismes del diagrama siguin incusions sempre, que és el necessari perquè el colímit sigui homotòpicament invariant. El cas dels límits no és substancialment diferent: també hi ha una condició sobre els morfismes perquè el límit homotòpic d'un diagrama coincideixi amb el de **Top**, tot i que per explicar-la caldria endinsar-nos a les categories de models ([1], pàgines 295-300).

Exemple 3.10. Per acabar aquest apartat, expliquem un exemple més de colímit homotòpic a la categoria dels espais topològics. Aquest consisteix en un sistema directe de circumferències \mathbb{S}^1 com el següent:

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{f_2} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f_3} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f_4} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f_5} \dots$$

on cada f_k la definim com

$$f_k : (\cos(\theta), \sin(\theta)) \mapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta)).$$

Hem escollit començar per 2 els índexs per comoditat a l'hora de definir el sistema. El que tenim és un sistema en què cada circumferència l'enviem a la següent donant un número i de voltes. El colímit a **Top** o límit directe d'aquest sistema directe és, seguint les fórmules del capítol 2, \mathbb{S}^1 , on comencem identificant els punts antipodals (per f_2), tot seguit identifiquem els punts que tenen la mateixa imatge per f_3 , etc. L'espai resultant després de totes les identificacions és un espai que ni tan sols és de Hausdorff, i que porta dificultats a l'hora d'estudiar les seves propietats com, per exemple, el grup fonamental.

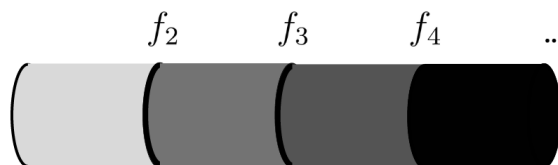
L'interessant en aquest punt serà calcular-ne el colímit homotòpic. Tal com dèiem abans, volem agafar un diagrama homotòpicament equivalent en els seus espais i aplicacions però que aquestes siguin injectives en la forma que la fórmula de Bousfield i Kan ens indica. No entrarem en els detalls

tècnics com sí que ho hem fet a l'exemple anterior, però veureu que seguim exactament els mateixos passos.

Per començar, cada circumferència la transformem en un cilindre sense tapes com el de la imatge:



Així, la vora de la dreta del cilindre s'identifica amb la vora esquerra del cilindre següent, però seguint l'aplicació f_k . L'espai resultant té la forma següent:



on cada circumferència que uneix dos cilindres ho fa amb el nombre de voltes corresponent.

En aquest punt, anem a calcular el grup fonamental del colímit homotòpic, que anomenem X . Per fer-ho, anomenem X_i l'espai resultant d'unir els i primers cilindres. Aquest grup fonamental és $[\mathbb{S}^1, X]$. Per compacitat de S^1 , cada aplicació $\mathbb{S}^1 \rightarrow X$ factoritza com $\mathbb{S}^1 \rightarrow X_i \hookrightarrow X$ per a algun i . Utilitzant aquest argument veiem que

$$[\mathbb{S}^1, X] \cong \operatorname{colim}_i [\mathbb{S}^1, X_i].$$

Per aquest motiu, tenim que el grup fonamental de l'espai colímit és el límit directe del sistema directe de grups fonamentals. En aquest cas, tots els espais del sistema són còpies homotòpicament equivalents de \mathbb{S}^1 , així que el sistema directe de grups fonamentals és com el que hem ensenyat a l'exemple 2.15, que tenia per colímit \mathbb{Q} .

Aquest resultat és vàlid per a les esferes de qualsevol dimensió, és a dir, el colímit homotòpic del sistema directe

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{f_2} \mathbb{S}^n \xrightarrow{f_3} \mathbb{S}^n \xrightarrow{f_4} \mathbb{S}^n \xrightarrow{f_5} \dots$$

amb les aplicacions f_i de grau i , és un espai X amb $\pi_n(X) \cong \mathbb{Q}$ per a tot $n \geq 1$. De fet, com que \mathbb{S}^k és compacta per a tot $k \geq 1$, obtenim $\pi_k(X) \cong \pi_k(\mathbb{S}^n) \otimes \mathbb{Q}$ sempre que $k \geq n$. Per aquest motiu, el colímit del sistema directe que hem descrit s'anomena *racionalització* de l'esfera.

4 Categories d'ordre infinit

4.1 Motivació

Tal com s'ha dit en el capítol 2, podem veure que les categories i els functors formen una categoria. Hem vist també que, si considerem els functors entre dues categories \mathcal{C} i \mathcal{D} i les transformacions naturals entre ells, també formen una categoria. Així, les categories, els functors i les transformacions naturals formen el que s'anomena una *2-categoria*, que té per objectes les categories i per morfismes els functors entre elles. Anomenem *2-morfismes* als morfismes entre morfismes, en aquest cas les transformacions naturals. Seguint aquesta generalització, podríem treballar amb els *3-morfismes*, *4-morfismes* o *i-morfismes* en *n-categories*. Per elaborar aquesta teoria, cal definir quines propietats o restriccions han de satisfer els *i-morfismes* perquè siguin coherents amb tots els resultats de teoria de categories, i amb l'existència de construccions com els límits o colímits. Amb això, podem fer el pas a l'infinit sobre aquestes estructures per construir el concepte de *∞ -categoria*. Seguint amb la mateixa idea, considerem la construcció següent sobre un espai topològic X . Prenem

- com a 0-morfismes els punts de X ,
- com a 1-morfismes els camins entre punts de X ,
- com a 2-morfismes les homotopies entre camins,
- com a 3-morfismes les homotopies entre homotopies de camins, etc.

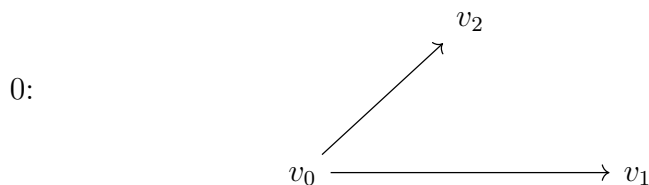
Aquest és un exemple important i molt estudiat, anomenat ∞ -grupoid fonamental d'un espai topològic.

Aquesta idea de les categories d'ordre infinit es pot construir de moltes maneres diferents, totes elles equivalents. Nosaltres utilitzarem la descrita per Lurie a [8], a partir dels complexos de Kan febles, també anomenats quasi-categories.

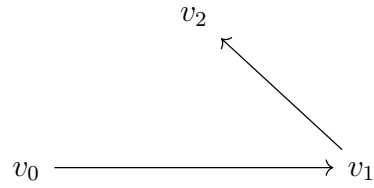
4.2 Quasi-categories

La *vora parcial* k -èsima d'un símplex Δ^n de dimensió n és el conjunt simplicial obtingut a partir de la unió de totes les seves $(n - 1)$ -cares menys la k -èsima.

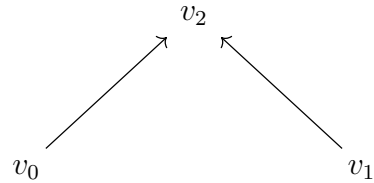
Exemple 4.1. Dibuixem les tres vores parcials de Δ^2 . La vora parcial d'ordre



La vora parcial d'ordre 1:

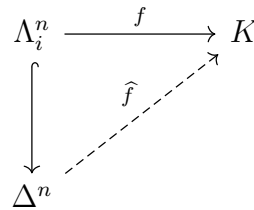


La vora parcial d'ordre 2:



Per al símplex Δ^n d'ordre n , denotarem la seva vora parcial i -èsima com Λ_i^n . Les vores parcials *internes* seran aquelles amb $0 < i < n$ i les *externes* aquelles amb $i = 0, n$.

Un *complex de Kan* és un conjunt simplicial K tal que tota aplicació simplicial $f: \Lambda_i^n \rightarrow K$ es pot estendre a una $\hat{f}: \Delta^n \rightarrow K$. Una *quasi-categoria* (o *complex de Kan feble*) és un conjunt simplicial que satisfà la condició de Kan per a les vores parcials internes.



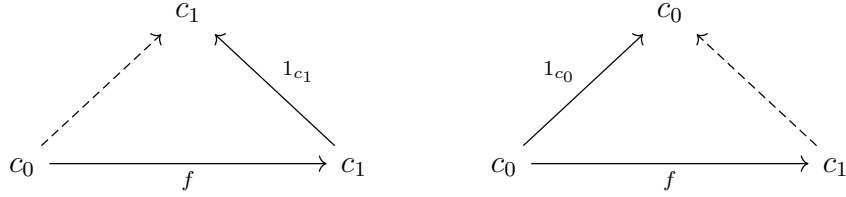
Donats dos vèrtexs x i y d'una quasi-categoria C , denotem per $\text{Hom}_C(x, y)$ el *conjunt simplicial de morfismes entre x i y* que es defineix de la manera següent. Per a cada n definim

$$\text{Hom}_C(x, y)_n = \{\sigma \in C_{n+1} \mid d_{n+1}^{n+1}\sigma = s_0^{n-1} \dots s_0^0 x, d_1^0 \dots d_n^{n+1}\sigma = y\}.$$

Aquests són, per a cada n , els n -símplexs amb tots els vèrtexs iguals a x (i tots els símplexs entre ells degenerats) menys un vèrtex igual a y . Els morfismes cara i degeneració es poden derivar dels de C .

Si tenim tres vèrtexs c_0, c_1 i c_2 en una quasi-categoria i dos morfismes $f_1: c_0 \rightarrow c_1, f_2: c_1 \rightarrow c_2$, per la propietat de Kan feble tenim que existeix un morfisme composició $f_2 \circ f_1: c_0 \rightarrow c_2$. Aquesta composició, a diferència de les categories ordinàries, no és única en general, sinó que està definida llevat d'un espai contràctil de morfismes. Dient-ho d'una altra manera, la composició és única llevat d'homotopia.

Fixem-nos que si prenem la condició de Kan (no només la condició feble), llavors les vores parcials següents poden estendre's



d'on deduïm que cada morfisme $f: c_0 \rightarrow c_1$ a C és invertible.

Exemple 4.2. Si \mathcal{C} és una categoria, el seu nervi $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ és una quasi-categoria. La condició de Kan feble per a 2-símplexs significa, en concret, que en una categoria sempre existeix la composició. En aquest cas, la composició sí que és única.

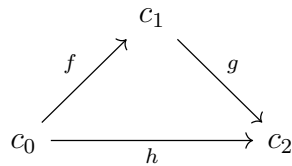
Exemple 4.3. A tot espai topològic X se li pot assignar una quasi-categoria. Aquesta assignació la fem prenent la imatge pel functor $\text{Sing}(X)$. Sabem pel capítol anterior que aquesta imatge sempre és un conjunt de Kan, és a dir, que la condició d'extensió no és només per a les vores parcials internes sinó també per a les externes. Això ens indica, tal com hem vist, que tots els 1-símplexs son invertibles.

Un *functor* entre quasi-categories és una aplicació simplicial. Donades dues quasi-categories C i D , definim

$$\text{Fun}(C, D) := \mathbf{sSet}(C, D)$$

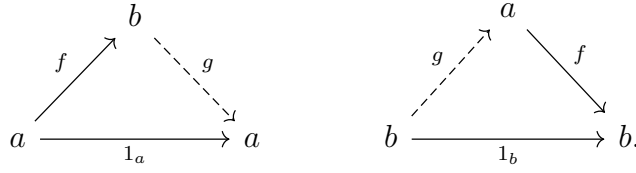
com el *conjunt simplicial de functors* entre C i D .

Definició 4.4. (*La categoria homotòpica d'una quasi-categoria.*) Com que una quasi-categoria és un conjunt simplicial, podem truncar-la agafant només els 0-símplexs i els 1-símplexs. Així, si C és una quasi-categoria, definim hC com la seva categoria homotòpica, que té per objectes els 0-símplexs i per morfismes els 1-símplexs, junt amb la congruència següent: per a qualsevol 2-símplex de C ,



identifiquem h amb $g \circ f$. És a dir, si tenim tres morfismes f, g, h , es compleix la relació $h \simeq g \circ f$ si, i només si, existeix un 2-símplex la vora del qual són f, g i h . Així, tot i que la composició no és única a C , sí que ho és a hC .

Un morfisme entre dues quasi-categories és un *isomorfisme* si la seva imatge a la categoria homotòpica és un isomorfisme. Seguint amb la definició que hem donat, tenim que f és un isomorfisme si, i només si, existeix un g tal que els 2-símplexs següents existeixen:



Ara podem definir una *transformació natural* entre dos functors F i G , amb $F, G: C \rightarrow D$, com un 1-símplex a $\text{Fun}(C, D)$.

Fins ara, hem vist com les definicions inicials s'assemblen en el cas de les categories ordinàries i les quasi-categories. En essència, les definicions són pràcticament iguals, canviant el concepte de categoria per conjunt simplicial, el d'objecte per vèrtex, el de morfisme per 1-símplex, el d'isomorfisme per equivalència homotòpica, etc. Aquesta diferència representarà una complicació en els càlculs, com més endavant veurem, però ens permet entendre per què les quasi-categories són models per a les categories d'ordre infinit.

Les *propietats universals* a les categories d'ordre infinit ens serviran per caracteritzar objectes llevat d'homotopia.

4.3 Límits i colímits

En aquest apartat definirem els límits i colímits a partir de les quasi-categories. Aquesta definició és com la que dona Joyal a [5].

El *join* de dos conjunts simplicials K i M és el conjunt simplicial $K * M$ definit com

$$(K * M)_n = K_n \amalg M_n \amalg (\amalg_{i+j=n-1} K_i \times M_j)$$

per a $n \geq 1$, i $(K * M)_0 = K_0 \amalg M_0$. Si C i D són quasi-categories, també ho és $C * D$.

Els diagrames a les quasi-categories es defineixen com aplicacions simplicials d'un conjunt simplicial J a una quasi-categoria C . Així, anomenem C^J a la categoria de diagrames de C indexats per J . També podem definir aquí el functor constant $\Delta: C \rightarrow C^J$.

Sigui C una quasi-categoria, J un conjunt simplicial i $F: J \rightarrow C$ una aplicació simplicial. Definim la quasi-categoria $C_{/F}$ d'objectes sobre F a partir de la propietat següent. Per a qualsevol quasi-categoria M , tenim que

$$\mathbf{sSet}(M, C_{/F}) \cong \mathbf{sSet}_F(M * J, C)$$

on l'expressió de la dreta denota els conjunts de morfismes $g: M * J \rightarrow C$ tals que $g_J = F$.

Definim la quasi-categoria $C_{/F}$ d'objectes sota F amb la propietat següent:

$$\mathbf{sSet}(C_{F/}, M) \cong \mathbf{sSet}_F(C, J * M).$$

Hi ha un parell adjunt de functors $\mathbf{sSet} \rightleftarrows (J \downarrow \mathbf{sSet})$ per a tot J , tal que l'adjunt per l'esquerra envia una quasi-categoria C a la inclusió $J \hookrightarrow C * J$ i l'adjunt per la dreta envia cada $F : J \rightarrow C$ a la quasi-categoria $C_{F/}$.

També tenim un parell adjunt de functors on l'adjunt per l'esquerra envia cada C a la inclusió $J \hookrightarrow J * C$ i l'adjunt per la dreta envia cada $f : J \rightarrow C$ a $C_{F/}$.

Definim els símplexs de $C_{F/}$ com

$$(C_{F/})_n \cong \mathbf{sSet}(\Delta^n, C_{F/}) \cong \mathbf{sSet}_F(\Delta^n * J, C),$$

on el darrer isomorfisme es per l'adjunció. Es defineixen anàlogament els símplexs de $C_{/F}$.

Un objecte p d'una quasi-categoria és *terminal* si per a tot altre objecte x tenim que $\mathrm{Hom}(x, p) \simeq *$. Un objecte p és *inicial* si per a tot altre objecte y tenim que $\mathrm{Hom}(p, y) \simeq *$.

Definició 4.5. El *colímit* d'un diagrama $F : J \rightarrow C$ és un objecte inicial de la quasi-categoria $C_{/F}$. El *límit* d'un diagrama $F : J \rightarrow C$ és un objecte terminal de la quasi-categoria $C_{F/}$.

4.4 Adjuncions

Tot i que surti dels objectius del treball, cal dir que les quasi-categories són un *model* de categories d'ordre infinit, però n'hi ha d'altres. Riehl i Verity expliquen a [12] i [13] que es pot treballar amb les categories d'ordre infinit sense utilitzar cap model concret, ja que tots els models coneguts són equivalents entre ells. Pel que fem d'ara en endavant, parlarem de ∞ -categories en comptes de quasi-categories. Començarem parlant de les adjuncions, i definirem a partir d'aquestes els objectes terminal i final, límits i colímits, que es poden fer sense escollir cap model.

Les adjuncions consisteixen en

- dues ∞ -categories C i D ,
- dos functors entre elles $F : C \rightleftarrows D : G$,
- dues transformacions naturals $\eta : 1_D \Rightarrow FG$ i $\epsilon : GF \Rightarrow 1_C$ tals que els diagrames següents siguin commutatius en el sentit de les ∞ -categories, és a dir, que siguin les vores d'un 2-símplex a $\mathrm{Fun}(C, D)$ i $\mathrm{Fun}(D, C)$:

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\
& \searrow 1_F & \downarrow \epsilon^F \\
& & F
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\
& \searrow 1_G & \downarrow G\epsilon \\
& & G.
\end{array}$$

Aquestes diagrames commutatius anomenats *identitats triangulars* són exactament els mateixos que hem utilitzat per al teorema 2.24.

Proposició 4.6. Si $G \dashv F$ i $G' \dashv F$, llavors $G \simeq G'$.

Demostració. Tenim que $\eta: 1_D \Rightarrow FG$, $\epsilon: GF \Rightarrow 1_C$, $\eta': 1_D \Rightarrow FG'$ i $\epsilon': G'F \Rightarrow 1_C$, que es poden representar amb els triangles següents:

$$\begin{array}{ccc}
D & \xrightarrow{1_D} & D \\
& \searrow G' & \downarrow \Downarrow \eta' \\
& & C \\
& \nearrow F & \\
D & & D
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& D & \\
F \nearrow & & \searrow G \\
& C & \\
& \xrightarrow{1_C} & C
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
D & \xrightarrow{1_D} & D \\
& \searrow G & \downarrow \Downarrow \eta \\
& & C \\
& \nearrow F & \\
D & & D
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& D & \\
F \nearrow & & \searrow G' \\
& C & \\
& \xrightarrow{1_C} & C
\end{array}$$

A l'unir-los per les vores, tenim els paral·lelograms següents:

$$\begin{array}{ccc}
D & \xrightarrow{1_D} & D \\
& \searrow G' & \downarrow \Downarrow \eta' \\
& & C \\
& \nearrow F & \downarrow \Downarrow \epsilon \\
& & C
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
D & \xrightarrow{1_D} & D \\
& \searrow G & \downarrow \Downarrow \eta \\
& & C \\
& \nearrow F & \downarrow \Downarrow \epsilon' \\
& & C
\end{array}$$

que defineixen, per composició, transformacions naturals $\eta \circ F \circ \epsilon': G' \Rightarrow G$ i $\eta' \circ F \circ \epsilon: G \Rightarrow G'$. Ara, unint els dos diagrames horitzontalment per la dreta i per l'esquerra respectivament, tenim:

$$\begin{array}{ccccc}
D & \xrightarrow{1_D} & D & \xrightarrow{1_D} & D \\
& \searrow G' & \downarrow \Downarrow \eta' & \nearrow F & \downarrow \Downarrow \epsilon \\
& & C & \xrightarrow{1_C} & C \\
& & & \nearrow F & \downarrow \Downarrow \eta \\
& & & & C \\
& & & \nearrow F & \downarrow \Downarrow \epsilon' \\
& & & & C
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
D & \xrightarrow{1_D} & D & \xrightarrow{1_D} & D \\
\searrow G & & \downarrow \eta & \nearrow F & \\
& & C & & \\
& & \downarrow \epsilon' & \nearrow G' & \\
& & C & & \\
& & \downarrow \eta' & \nearrow F & \\
& & C & & \\
& & \downarrow \epsilon & \nearrow G & \\
& & C & & \\
& & \xrightarrow{1_C} & & \xrightarrow{1_C} \\
& & C & & C
\end{array}$$

que representen les composicions $G' \Rightarrow G \Rightarrow G'$ i $G \Rightarrow G' \Rightarrow G$ respectivament. Fent les dues composicions podem aplicar les identitats triangulars de l'adjunció per veure que ambdues són la identitat. \square

La quasi-categoria 1 és aquella que té un únic vèrtex i tots els n -símplexs amb $n \geq 1$ són degenerats.

Un *element inicial* en una ∞ -categoria C és un adjunt per la dreta del functor $! : C \rightarrow 1$, mentre que un *element terminal* és un adjunt per l'esquerra:

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{!} & 1 \\
\downarrow \perp & & \downarrow \perp \\
C & \xleftarrow{t} & 1 \\
& & \downarrow \perp \\
& & C
\end{array}$$

Lema 4.7. (Unicitat). Qualsevol parell d'elements inicials (o terminals) en una ∞ -categoria C són isomorfs a hC .

Demostració. Aquesta demostració és una conseqüència directa de la proposició 4.6, ja que hem definit els elements inicials (i terminals) mitjançant adjuncions. \square

Teorema 4.8. Un diagrama de C^J admet un colímit si el functor Δ admet un adjunt per l'esquerra. Dualment, un diagrama admet un límit si el functor Δ admet un adjunt per la dreta:

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{\Delta} & C^J \\
\downarrow \perp & & \downarrow \perp \\
C & \xleftarrow{\lim} & C^J \\
& & \downarrow \perp \\
& & C
\end{array}$$

Demostració. Per a demostrar-ho, cal veure que els límits i colímits que hem construït a l'apartat 4.3 compleixen aquesta adjunció. Aquesta demostració la podem trobar a [7] (proposició 17.19). \square

5 Conclusions

Aquest treball tenia per objectiu introduir els conceptes de límits i colímits a les categories d'ordre infinit. Això ens ha portat en primer lloc a estudiar les categories i els seus límits i colímits. Donada l'abstracció que suposen aquests conceptes, hem intentat utilitzar exemples que fossin il·lustratius. Aquests tenien com a objectius

- visualitzar els conceptes categòrics en contextos coneguts;
- mostrar la importància i utilitat d'aquestes construccions;
- veure, en els capítols següents, com evolucionen aquests per a categories homotòpiques o categories d'ordre infinit.

Al capítol 3, amb un contraexemple, hem vist com els colímits i límits no estan ben definits a **HoTop**. La solució a aquest problema requereix parlar de conjunts simplicials i la seva relació amb els espais topològics, així com definicions diverses. De nou, amb els dos exemples que hem donat teníem la intenció d'entendre què significaven els detalls tècnics. En el cas dels colímits hem vist com la fórmula transforma cada espai en un espai homotòpicament equivalent, fent que totes les aplicacions siguin injectives. Tant per comprendre els límits homotòpics com per resoldre qüestions com l'existència d'aquests o la relació que guarden els límits i colímits amb les seves versions homotòpiques, hauríem d'haver estudiat les categories de models de Quillen i les seves característiques. Aquesta qüestió l'hem saltat, però és una eina crucial per entendre amb més profunditat la teoria d'homotopia.

Amb tota la feina prèvia hem tingut els elements per introduir les ∞ -categories i els seus límits i colímits, notant la semblança de les definicions amb les categories ordinàries amb l'objectiu d'explicar per què, sense ser una generalització, té sentit anomenar-les així. Diem que no és una generalització perquè una categoria no és una ∞ -categoria, però a cada categoria sí que li podem assignar una ∞ -categoria. Aquesta assignació hem vist que ens la donava el nervi, que sempre envia una categoria a una quasi-categoria.

Nosaltres ho hem deixat aquí, entenent que la majoria dels objectius del treball han estat assolits. Per continuar més enllà d'aquest treball, seria interessant estudiar exemples com el del final del capítol 3. Podem estudiar què passa si en comptes de considerar el colímit homotòpic a **HoTop** el calculem com el d'un diagrama de ∞ -categories, on substituïm cada esfera per la categoria d'ordre infinit que és el conjunt de Kan associat a l'esfera donada, descrit al capítol 4. Generalitzant aquestes qüestions, entendríem millor la importància de les categories d'ordre infinit i quines aplicacions poden tenir a l'àlgebra abstracta i a la teoria d'homotopia.

Referències

- [1] Bousfield, A., Kan, D.; *Homotopy Limits, Completions and Localizations*; Lecture Notes in Mathematics, 304, Springer 1972.
- [2] Goerss, P., Jardine, J.; *Simplicial Homotopy Theory*; Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1999.
- [3] Hirschhorn, P.; *The Quillen model category of topological spaces*; arXiv:1508.01942, 2017.
- [4] Joyal, A.; *Notes on quasi-categories*; 2008.
- [5] Joyal, A.; *Quasi-categories and Kan complexes*; Mathematics Department, Université du Québec, Montreal, 2002.
- [6] Kan, D.; *On c.s.s. complexes*, American Journal of Mathematics, 79, 1957.
- [7] Land, M.; *Introduction to infinity-categories*; Regensburg, 2019.
- [8] Lurie, J.; *Higher Topoi*; Princeton University Press, Princeton, 2009.
- [9] Mac Lane, S.; *Categories for the Working Mathematician*; Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, Vol.5, Nova York, 1971.
- [10] May, P.; *Simplicial Objects in Algebraic Topology*; The University of Chicago Press, Chicago, Londres, 1993.
- [11] Riehl, E.; *Category Theory in Context*; Aurora: Dover Modern Math Originals, 2016.
- [12] Riehl, E., Verity, D.; *Elements of ∞ -Category Theory*; Cambridge University Press, Cambridge, 2022.
- [13] Riehl, E., Verity, D.; *Infinity theory from scratch*; arXiv:1608.05314, 2019.
- [14] Spivak, D.; *Category Theory for the Sciences*; MIT Press, Cambridge, MA, 2014.