UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES QUE DEPENDEN DEL TIEMPO DE MANERA PERIÓDICA Y CASI-PERIÓDICA

Autor: Carlos García Caamaño

Director: Dr. Àngel Jorba Monte

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de enero de 2022

Abstract

The differential equations are, in general, impossible to solve analytically. However, there are some numerical methods whose goal is finding their solutions approximately.

The goal of this memoir is about applying a perturbation to a linear differential equations system that depends of time in a periodic and almost periodic way, and, using a resursive method, getting a constant differential equations system wich will let us to find the solutions of our initial system .

We will use Fourier Series to develop these methods.

Resumen

Las ecuaciones diferenciales, en general, son imposibles de resolver analíticamente. Sin embargo, existen métodos numéricos cuyo fin es obtener las soluciones de manera aproximada y minimizando el error.

El objetivo de esta memoria es aplicar una perturbación a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales que dependen del tiempo de manera periódica o casi-periódica, y, a través de un método recursivo, obtener un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales lineales constante a partir del cual se puedan calcular analíticamente las soluciones, que serán las mismas que las del sistema de partida.

Para desarrollar estos métodos, haremos uso de técnicas analíticas como las Series de Fourier, que introduciremos a lo largo de la memoria.

2020 Mathematics Subject Classification. 34D10, 34D15, 42A10

Agradecimientos

La entrega de esta memoria supone un momento importante, ya que después de 4 años de altibajos y de duro trabajo durante la carrera de Matemáticas, llega a su fin y con ello un cambio importante.

Me gustaría agradecer en primer lugar al Dr. Àngel Jorba i Monte por mostrarse dispuesto a ser mi tutor del TFG, así como por su total disponibilidad para todas las dudas que me han surgido durante su redacción.

También agradecer a mi familia más cercana, a mis padres Pilar y Carlos, a mis abuelos Ángel, Carmen, Gonzalo y Rosa y a mi hermana Xiana por ayudarme con todo durante estos 4 años.

Mencionar también a Álvaro y a amigas y amigos.

Muchas gracias a todas y todos !

Índice

1. Introducción

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales que depende del tiempo con condición inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

En general, resolver este tipo de problemas directamente se vuelve complicado o imposible, es por ello que se recurre a métodos numéricos computacionales para obtener las soluciones de una forma aproximada y controlando el error a través de una serie de algoritmos.

En esta memoria nos centraremos en calcular las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a los cuales se les añade una perturbación que depende del tiempo de manera periódica por una parte, y por otra de sistemas a los que se les añade una perturbación que depende del tiempo de manera casi-periódica, esto es, donde aparecen funciones que tienen diversos periodos. Por lo tanto, nuestros problemas serán

$$\dot{x}(t) = (A + \epsilon Q(t))x(t), \tag{1.1}$$

donde $Q(t) = Q(t + T)$ y ϵ es lo suficientemente pequeño, en el caso periódico y

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + \epsilon Q(\theta))x(t), \\ \\ \theta &= \omega t \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $Q(\theta) = Q(\omega t)$ es una matriz que depende del tiempo casi-periódicamente.

Para avanzar en la resolución de estos problemas, es necesario introducir en un principio la conocida Teoría de Floquet. La Teoría de Floquet, desarrollada por primera vez por el matemático francés Gaston Floquet (1847 - 1920), trata el problema de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos. Consideremos un sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

donde $A(t)$ es una matriz T-periódica de dimensión $n > 0$.

Floquet enuncia y demuestra un teorema en que convierte este problema en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\dot{x}(t) = Bx(t),$$

donde B es una matriz constante.

Todos estos temas los comienza a tratar en su tesis doctoral *Sur la théorie des équations différentielles linéaires*, de 1879, que reedita posteriormente en otras dos obras *Sur les équations différentielles linéaires à coeffients périodiques*, de 1881 y 1883, y en *Sur les équations différentielles à coefficients doublement périodiques*, de 1884. En esta última obra deduce que, en general, las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales periódicos no se pueden expresar a partir de funciones elementales, pero debido a la linealidad y a la periodicidad de $A(t)$, se puede deducir el comportamiento para todo tiempo a partir de una solución en un intervalo de longitud T.

Así pues, el objetivo de la memoria consiste en reducir los problemas (1.1) y (1.2) a través de la elaboración un esquema iterativo que nos permitirá llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales constante, cuyas soluciones corresponderán a las del sistema de partida.

Para ello, haremos uso de las famosas series de Fourier, pues dado que las matrices están formadas por funciones periódicas o casi-periódicas, es muy conveniente utilizar sus expansiones en series de Fourier.

Entonces, nuestro propósito será encontrar un cambio de variable que nos permita eliminar la parte periódica o casi-periódica de la ecuación diferencial iterativamente. Analíticamente, después de p pasos nos quedará un sistema de forma

$$\dot{x}(t) = (A_p + \epsilon^{2^p} Q_p(t))x(t),$$

de manera que cuando hacemos un número alto de pasos ($p \to \infty$), la parte periódica de la ecuación diferencial se puede despreciar, quedando así un sistema constante

$$\dot{x}(t) = A_p x(t)$$

2. Teoría de Floquet

En esta sección, el objetivo será demostrar el Teorema de Floquet, pero antes de avanzar en este teorema, conviene explicar la noción de matrices exponenciales, logaritmos de una matriz y algunas de sus propiedades más destacadas que serán útiles posteriormente.

2.1. Exponenciales y logaritmos de matrices

Definición 2.1 (Exponencial de una matriz)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos $\exp(A) \equiv e^A$

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Proposición 2.2. La serie de la exponencial converge para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Demostración. Veamos que si la serie converge absolutamente para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces también será convergente.
Definamos

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!},$$

Para ver que es convergente, veamos que es de Cauchy.
$\forall \epsilon > 0$, fijamos $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p > q \geq M$, entonces

$$||S_p - S_q|| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \frac{||A||^k}{k!}.$$

Haciendo un simple cambio de índice $j = k - q - 1$, queda

$$\sum_{j=0}^{p-q-1} \frac{||A||^k}{k!},$$

y es evidente que es de Cauchy, por lo tanto convergente. □

Definición 2.3 (Logaritmo de una matriz)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $\det(A) \neq 0$. El logaritmo de la matriz A es una matriz $L = \log(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$\exp(L) = A.$$

Proposición 2.4. Sea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz tal que $\det(C) \neq 0$. Entonces, existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $C = e^B$.

Demostración. Veamos el caso donde C es diagonalizable. Definamos $C = PDP^{-1}$, donde $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz de paso y $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es la matriz diagonal asociada a C. Entonces, $\exists K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $K = \log(D)$, ya que por hipótesis, $\det(C) \neq 0$. Por lo tanto, $D = e^K \Longrightarrow C = Pe^K P^{-1}$.
Sabemos que $e^C = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1}$. Así, $C = e^{PKP^{-1}} = e^B$, donde se deduce que $B = PKP^{-1}$.

Para el caso no diagonalizable, hay que considerar las formas de Jordan, y se hace de manera análoga.

□

Lema 2.5. *Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces se tiene que*

$$AB = BA \Longrightarrow e^{A+B} = e^A e^B$$

Demostración.

$$e^A e^B = \left(\sum_{k_1 \geq 0} \frac{A^{k_1}}{k_1!}\right)\left(\sum_{k_2 \geq 0} \frac{B^{k_2}}{k_2!}\right) = \sum_{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0} \frac{A^{k_1}}{k_1!}\frac{B^{k_2}}{k_2!} =$$

$$\underset{\{k_2 = k - k_1\}}{=} \sum_{k \geq 0}\sum_{k_1 \geq 0} \frac{1}{k_1!}\frac{1}{(k-k_1)!} A^{k_1} B^{k-k_1} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{k_1 \geq 0} \frac{k!}{k_1!(k-k_1)!} A^{k_1} B^{k-k_1} =$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{k_1 \geq 0} \binom{k}{k_1} A^{k_1} B^{k-k_1} \underset{\{AB=BA\}}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{k_1 \geq 0} \binom{k}{k_1} A^{k} B^{k-k_1} =$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (A+B)^k = e^{A+B}$$

□

Proposición 2.6. El logaritmo de una matriz es único, salvo múltiplos de $2\pi i Id$, $i^2 = -1$.

Demostración. Sea $L \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}$. Por una propiedad de las matrices exponenciales, tenemos por el Lema 2.5

$$\exp(L + 2\pi i Id) = \exp(L)\exp(2\pi i Id) \Leftrightarrow L(2\pi i Id) = (2\pi i Id)L,$$

pero como

$$\exp(2\pi i Id) = \exp\begin{pmatrix} 2\pi i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2\pi i & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 2\pi i \end{pmatrix} = Id.$$

Se tiene que las matrices L y $2\pi i Id$ conmutan, por lo tanto

$$e^{L + 2\pi i Id} = e^L e^{2\pi i Id} = e^L Id = e^L,$$

y se deduce que el logaritmo es único salvo múltiplos de $2\pi i Id$.

□

Lema 2.7. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\overline{A}$ su matriz conjugada. Entonces, $e^{\overline{A}} = \overline{e^A}$.*

Demostración. Por la Definición 2.1

$$e^{\overline{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\overline{A}\right)^k}{k!} = Id + \overline{A} + \frac{\overline{A}^2}{2!} + \frac{\overline{A}^3}{3!} + \dots,$$

$$\overline{e^A} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}} = \overline{Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots} = Id + \overline{A} + \frac{\overline{A^2}}{2!} + \frac{\overline{A^3}}{3!} + \dots ,$$

Hay que probar que $\overline{A^k} = \overline{A}^k$, $\forall k \geq 1$.

Para ello, veamos que dadas dos matrices cualquiera $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se tiene que $\overline{MN} = \overline{M}\ \overline{N}$. Entonces, fijando j_1 una fila de la matriz M y j_2 una columna de la matriz N, con $1 \leq j_1, j_2 \leq n$

$$\overline{(MN)_{j_1 j_2}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} m_{j_1 k} n_{k j_2}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m_{j_1 k} n_{k j_2}} = \overline{m_{j_1 k}}\ \overline{n_{k j_2}} = \left(\overline{M}\right)_{j_1 j_2} \left(\overline{N}\right)_{j_1 j_2}.$$

Por lo tanto, aplicando este resultado de manera recursiva a la matriz A, se tiene que $\overline{A^k} = \overline{A}^k$.

□

Proposición 2.8. Sea $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\det(D) \neq 0$. Entonces, existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $e^B = D^2$.

Demostración. Ver el Teorema 2.82 del libro *Ordinary Differential Equations with Applications*, de Carmen Chicone. □

2.2. Teorema de Floquet

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineal de coeficientes no constantes

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

donde $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ es un vector n-dimensional y $A(t)$ es una matriz cuadrada de dimensión n cuyos elementos son funciones continuas a trozos y periódicas de periodo T, el objetivo del teorema de Floquet es estudiar las soluciones de este sistema a través de un cambio de variable adecuado, cuyo fin es transformarlo en un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales lineal de coeficientes constantes

$$\dot{y}(t) = By(t),$$

donde B es una matriz constante.

Teorema 2.9 (Teorema de Floquet)**.** Sea $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una función matricial periódica de periodo T. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t),$$

con $x \in \mathbb{C}^n$.
Entonces, existen una función matricial $P(t)$ periódica de periodo T y una matriz constante $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt},$$

donde $\Phi(t)$ es matriz fundamental del sistema.

Demostración. Consideremos $\Phi(t)$ matriz fundamental del sistema

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

Como A es periódica de periodo T, se tiene que

$$A(t) = A(t + T),$$

Entonces

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t),$$

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T),$$

de donde se deduce que $\Phi(t+T)$ es también una matriz fundamental del sistema.
Por lo tanto, $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, denominada matriz de monodromía, constante, tal que

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C.$$

Ahora, por la Proposición 2.4, establecemos $C = e^{BT}$ y definimos

$$P(t) = \Phi(t)e^{-Bt},$$

con $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Así, se tiene que

$$P(t+T) = \Phi(t+T)C^{-1} = \Phi(t+T)e^{-BT}e^{-Bt} =$$

$$= \Phi(t)Ce^{-BT}e^{-Bt} = \Phi(t)e^{BT}e^{-BT}e^{-Bt} = \Phi(t)e^{Bt},$$

y concluimos que $P(t) = P(t+T)$, por lo tanto existe la matriz $P(t)$ y es periódica de periodo T.

□

Como corolario del Teorema de Floquet, veamos el caso real. Esto es, dada una matriz $A(t)$ T-periódica y de coeficientes reales, integrando dos veces un periodo, es decir, a partir de un cambio $2T$-periódico, se obtiene que todas las matrices son reales. Para probar este caso, haremos uso de la Proposición 2.8.

Corolario 2.10. *Sea $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una función matricial periódica de periodo T. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t).$$

con $x \in \mathbb{R}^n$.
Entonces, existen una función matricial $P(t)$ periódica de periodo $2T$ y una matriz constante $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt},$$

donde $\Phi(t)$ es matriz fundamental del sistema.

Demostración. Consideremos $\Phi(t)$ matriz fundamental del sistema

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

Como en la demostración del *Teorema de Floquet*, como A es periódica de periodo T, se tiene que $\Phi(t+T)$ es también una matriz fundamental del sistema.
Por lo tanto, $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz de monodromía constante tal que

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C.$$

Igual que antes, por 2.4, establecemos $C = e^{BT}$ y definimos

$$P(t) = \Phi(t)e^{-Bt},$$

con $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Con el razonamiento de antes

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C \Rightarrow \Phi(t+2T) = \Phi((t+T)+T) = \Phi(t+T)C =$$

$$= \Phi(t)C^2,$$

con $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, por lo tanto C^2 es real, y por la Proposición 2.8

$$P(t+2T) = \Phi(t+2T)e^{-B(t+2T)} = \Phi(t)C^2 e^{-B(t+2T)} =$$

$$= \Phi(t)e^{2BT}e^{-Bt}e^{-2BT} = \Phi(t)e^{-Bt}.$$

Para poder aplicar la propiedad aditiva de la exponencial, hemos aplicado que las matrices Bt y que $2BT$ conmutan.
Concluimos que $P(t)$ existe y es $2T$-periódica.

$\square$

3. Series de Fourier de funciones periódicas

En esta sección veremos las definiciones y propiedades fundamentales de las series de Fourier en funciones reales y periódicas, puesto que serán esenciales a la hora de aplicar una perturbación a una ecuación diferencial periódica. Para desarrollar esta sección, nos basaremos en el libro *Fourier analysis and its applications*, de Gerald B. Folland.

Las series de Fourier, introducidas por el matemático francés *Joseph Fourier* en 1822 a la hora de calcular la difusión del calor utilizando una descomposición en serie trigonométrica convergente de una función, son fundamentales a la hora de estudiar funciones periódicas.

Consideraremos de ahora en adelante funciones periódicas de periodo 2π, ya que con un simple cambio de variable, podemos modificar el periodo de cualquier función T-periódica, con $T \in \mathbb{R}$, a una 2π-periódica.

Sea pues $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$ una función 2π-periódica y asumamos que es integrable Riemann en todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$.

Queremos expandir f en una serie de la forma

$$f(\theta) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right),$$

que también podemos escribir en forma exponencial compleja

$$f(\theta) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}.$$

Observación 3.1. En los dos apartados siguientes, asumiremos como cierta la convergencia puntual de las series de Fourier, que demostraremos formalmente en el último apartado de esta sección.

Notación 3.2. *A partir de ahora, estableceremos una igualdad entre la función f y su desarrollo en serie de Fourier.*

3.1. Cálculo de los coeficientes de las Series de Fourier de funciones periódicas

Queremos calcular los coeficientes de las series introducidas anteriormente, tanto para el caso real como para el caso complejo.

Tomando la expresión

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$, multiplicando por $e^{-ik\theta}$ en cada lado de la igualdad, se obtiene

$$f(\theta)e^{-ik\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)\theta}.$$

Como por hipótesis f es integrable Riemann en todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, en particular lo es sobre $[-\pi, \pi]$, por lo tanto, tomando integrales entre $-\pi$ y π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$

Más adelante veremos que las Series de Fourier son convergentes, por lo tanto, podemos permutar la integral y la suma

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta.$$

Observación 3.3. Es inmediato resolver la integral $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta$, considerando dos casos:

- Caso $n = k$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi$,
- Caso $n \neq k$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta = \frac{(-1)^{n-k} - (-1)^{n-k)}}{i(n-k)} = 0.$

A partir del caso $n = k$ de la Observación 3.3, se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = 2\pi c_k \Longrightarrow c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta,$$

por lo tanto, los coeficientes para el caso de las series de Fourier complejas son

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta,$$

y en particular

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta.$$

Calculemos ahora los coeficientes en el caso real, y lo haremos en primer lugar estableciendo una relación entre la serie en forma real y la serie en forma compleja. Recordemos que podemos expresar la forma exponencial compleja en función de las funciones sinusoidales

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2},$$
$$\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i},$$

por lo tanto, multiplicando y dividiendo por i en la componente del seno, se tiene que

$$\frac{i\sin(n\theta)}{i} = \frac{ie^{in\theta} - ie^{-in\theta}}{(-2)} = \frac{-ie^{in\theta} + ie^{-in\theta}}{2},$$

sustituyendo en la forma real de la expansión de Fourier, obtenemos

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}\right) + b_n\left(\frac{-ie^{in\theta} + ie^{-in\theta}}{2}\right),$$

y agrupando los términos, se deduce que

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-in\theta}.$$

Notación 3.4. *Denotaremos de la siguiente manera los coeficientes de la expresión obtenida*

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0,$$
$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},$$
$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Observamos que haciendo un simple cambio de índice, podemos reescribir la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \right) e^{in\theta},$$

y se tiene que

$$\frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = c_{-(-n)} = c_n,$$

por lo tanto

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\theta},$$

y en definitiva, podemos expresar la serie de forma

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Así, a partir de la Notación 3.4, obtenemos que para el caso real

$$\begin{cases} a_0 &= \quad 2c_0 &= & &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta, \\ a_n &= \quad c_n + c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(e^{-in\theta} + e^{in\theta}\right)d\theta &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta, \\ b_n &= \quad i\left(c_n - c_{-n}\right) &= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(e^{-in\theta} - e^{in\theta}\right)d\theta &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta. \end{cases}$$

Una vez calculados los coeficientes, ya tenemos la base suficiente para definir formalmente las Series de Fourier

Definición 3.5. Sea f una función 2π-periódica e integrable Riemann en $[-\pi, \pi]$. La serie

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right),$$

se denomina serie de Fourier real de f, y la serie

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

se denomina serie de Fourier compleja de f, donde los coeficientes a_n, b_n y c_n son los coeficientes de Fourier de f calculados anteriormente.

Proposición 3.6 (Coeficientes de Fourier para funciones pares e impares periódicas)**.** Sea f una función 2π periódica e integrable Riemann en $[-\pi, \pi]$. Entonces

(I) Si f es par, entonces
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta,$$
y
$$b_n \equiv 0.$$

(II) Si f es impar, entonces
$$a_n \equiv 0,$$
y
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta.$$

En particular, en el caso de la expansión de Fourier compleja, tenemos que si f es par
$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta,$$
y si f es impar
$$c_n = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta.$$

Demostración. (I) Por definición, si f es par, se tiene
$$f(\theta) = f(-\theta),$$
por lo tanto, en el caso del coeficiente a_n, sabiendo que cos() es función par
$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta\right) =$$
$$\underset{\{f(\theta)=f(-\theta)\}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta.$$
Ahora con b_n, sabiendo que sin() es función impar
$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta + \int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta\right)$$
$$\underset{\{f(\theta)=f(-\theta)\}}{=} \frac{1}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta + \int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta\right) = 0.$$

(II) Por definición, si f es impar, se tiene
$$f(-\theta) = -f(\theta),$$
por lo tanto, en a_n
$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta + \int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta\right) =$$
$$\underset{\{f(-\theta)=-f(\theta)\}}{=} \frac{1}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta + \int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta\right) = 0,$$
y en b_n
$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta + \int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta\right) =$$

$$\underset{\{f(-\theta)=-f(\theta)\}}{=} \frac{1}{\pi}\left((-1)^2\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta + \int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta.$$

Por último, en el caso de los coeficientes complejos, se sigue el resultado por la relación de estos con los coeficientes reales. Recordemos que

$$c_n := \frac{a_n - ib_n}{2},$$

entonces en el caso de f par

$$c_n = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta,$$

y en el caso de f impar

$$c_n = \frac{-ib_n}{2} = \frac{-i}{\pi} int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta.$$

$\square$

Ejemplo 3.7 (Expansión en serie de Fourier de una función periódica)**.** *Sea la función*

$$f(\theta) := |\theta|,$$

con $\theta \in [-\pi, \pi]$. Notemos que en este intervalo, f es 2π-periódica.
Veamos su desarrollo en serie de Fourier. Se observa que

$$f(-\theta) = |-\theta| = |\theta| = f(\theta),$$

por lo que f es una función par. Entonces, por la Proposición 3.6, los coeficientes b_n son nulos para todo n. Para los coeficientes a_n, consideremos dos casos

- *Caso $n = 0$*
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\theta| d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \theta d\theta = \pi,$$
- *Caso $n > 0$*
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \theta\cos(n\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2},$$
  de donde se deduce que
$$a_n = \begin{cases} 0 & si\ n\ es\ par, \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & si\ n\ es\ impar. \end{cases}$$

Por lo tanto, la expansión en serie de Fourier de f es

$$f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\ impar} \frac{cos(n\theta)}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 1} \frac{cos((2k-1)\theta)}{(2k-1)^2}.$$

3.2. Desigualdad de Bessel

La desigualdad de Bessel establece una cota que será muy útil posteriormente para demostrar la convergencia de las Series de Fourier.

Teorema 3.8 (Desigualdad de Bessel)**.** Sea f una función 2π-periódica e integrable Riemann en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Consideremos los coeficientes c_n del desarrollo en serie de Fourier compleja de f. Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Demostración. Sea $f(\theta) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ la expansión en serie de Fourier compleja de f. Tomamos N y consideramos la diferencia

$$|f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}|^2 = (f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta})(\overline{f(\theta)} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} e^{in\theta}) =$$

$$= f(\theta)\overline{f(\theta)} - \sum_{n=-N}^{N} (f(\theta)c_n e^{in\theta} + \overline{f(\theta)}\overline{c_n}e^{in\theta}) + (\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta})(\sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} e^{in\theta}) =$$

$$= f(\theta)\overline{f(\theta)} - \sum_{n=-N}^{N} (f(\theta)c_n e^{in\theta} + \overline{f(\theta)}\overline{c_n}e^{in\theta}) + \sum_{m,n=-N}^{N} c_m\overline{c_n}e^{i(m-n)\theta} =$$

$$= |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} (f(\theta)c_n e^{in\theta} + f(\theta)\overline{c_n}e^{in\theta}) + \sum_{m,n=-N}^{N} c_m\overline{c_n}e^{i(m-n)\theta}.$$

Sabemos por 3.3 que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & ;\text{ si } m \neq n, \\ 2\pi & ;\text{ si } m = n. \end{cases}$

por lo tanto, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & ;\text{ si } m \neq n, \\ 1 & ;\text{ si } m = n. \end{cases}$

También se tiene por un resultado anterior que $c_n = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$

Entonces, calculando la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}|^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} (f(\theta)c_n e^{in\theta} + f(\theta)\overline{c_n}e^{in\theta}) + \sum_{m,n=-N}^{N} c_m\overline{c_n}e^{i(m-n)\theta}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{n=-N}^{N} (c_n\overline{c_n} + \overline{c_n}c_n) + \sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{c_n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{c_n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2.$$

y hemos deducido que $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}(f(\theta)c_n e^{in\theta} + f(\theta)\overline{c_n}e^{in\theta}) = \sum_{n=-N}^{N}(c_n\overline{c_n} + \overline{c_n}c_n)$ a partir de $c_n = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$ Como $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}|^2 d\theta \geq 0$, entonces $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{c_n} \geq 0$.

$$\Rightarrow \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2 d\theta.$$

Ahora, haciendo $N \longrightarrow \infty$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2 d\theta.$$

como queríamos demostrar. □

Como corolario de la Desigualdad de Bessel, veremos que se puede establecer una acotación para los coeficientes de Fourier en el caso del desarrollo en serie real.

Corolario 3.9. *Sea f una función 2π-periódica e integrable Riemann en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Consideremos los coeficientes a_n y b_n del desarrollo en serie de Fourier real de f. Entonces*

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2 d\theta.$$

Demostración. Recordando la relación entre los coeficientes c_n de la expansión en serie compleja de Fourier de f y a_n y b_n del caso real, se tenía que $a_n = c_n + c_{-n}$ y que $b_n = i(c_n - c_{-n})$.
Por lo tanto, teniendo en cuenta que $|a_n|^2 = a_n\overline{a_n}$ y que $|b_n|^2 = b_n\overline{b_n}$

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2 =$$

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|(c_n + c_{-n})(\overline{c_n c_{-n}}) + i(c_n + c_{-n})(-i)(\overline{c_n c_{-n}}) =$$

$$= 2c_n\overline{c_n} + 2c_{-n}\overline{c_{-n}}.$$

Así, $\displaystyle\frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$
donde se deduce inmediatamente que se cumple la desigualdad de Bessel. □

3.3. Comportamiento de los coeficientes de las series de Fourier de funciones periódicas

En este apartado, queremos estudiar el comportamiento asintótico de los coeficientes de Fourier, es decir, queremos saber cómo se comportan cuando tomamos valores de n suficientemente grandes.

Para ello, en primer lugar, demostraremos la expresión que relaciona los coeficientes de Fourier de una función derivable a trozos f con los de su derivada f'.

Teorema 3.10 (Coeficientes de Fourier de f')**.** Sea f una función 2π-periódica, continua y derivable a trozos. Sean a_n y b_n los coeficientes de la expansión en serie de Fourier real de f y c_n en el caso complejo. Entonces

$$a'_n = nb_n,$$

$$b'_n = -na_n,$$

$$c'_n = inc_n.$$

Demostración. Comencemos por el caso real. Como hemos visto, se tiene que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta.$$

Por lo tanto

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)\cos(n\theta)d\theta,$$

Integrando por partes

$$u = \cos(n\theta) \Longrightarrow du = -n\sin(n\theta)d\theta,$$

$$dv = f'(\theta)d\theta \Longrightarrow v = f(\theta),$$

se obtiene

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\cos(n\theta)f'(\theta)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} nf(\theta)\sin(n\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} nf(\theta)\sin(n\theta)d\theta = nb_n.$$

Por otro lado

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)\sin(n\theta)d\theta,$$

Integrando por partes igual que antes

$$u = \sin(n\theta) \Rightarrow du = n\cos(n\theta)d\theta,$$

$$dv = f'(\theta)d\theta \Rightarrow v = f(\theta),$$

se obtiene

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\sin(n\theta)f'(\theta)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} nf(\theta)\cos(n\theta)d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi} nf(\theta)\cos(n\theta)d\theta = -na_n.$$

Por último, recordamos que en el caso complejo se tiene que

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta,$$

y por lo tanto

$$c'_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}d\theta,$$

Integrando por partes de nuevo

$$\begin{aligned} u = e^{-in\theta} &\Rightarrow du = -ine^{-in\theta}d\theta, \\ dv = f'(\theta)d\theta &\Rightarrow v = f(\theta), \end{aligned}$$

obtenemos

$$c'_n = \frac{1}{2\pi}e^{-in\theta}f'(\theta)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-in)f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi}(-in)f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = inc_n.$$

□

Proposición 3.11. Sea f una función 2π periódica de clase $\mathcal{C}^k$ y sea $f^{(k)}$ una función derivable a trozos. Entonces, los coeficientes de la serie de Fourier de f satisfacen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^k a_n|^2 < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^k b_n|^2 < \infty,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k c_n|^2 < \infty.$$

Demostración. Anteriormente, hemos deducido que

$$c'_n = (in)c_n.$$

Como por hipótesis f es de clase $\mathcal{C}^k$, aplicando iterativamente el mismo proceso que en la demostración de la igualdad anterior, se prueba que

$$c_n^{(k)} = (in)^k c_n.$$

Aplicando la desigualdad de Bessel a $f^{(k)}$, se tiene

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(k)}|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(in)^k c_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^k c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta < \infty,$$

por lo tanto, la serie es convergente.

A través de las relaciones entre los coeficientes de la serie de Fourier compleja y la serie de Fourier real, se deduce inmediatamente que

$$\sum_{n\geq 1} |n^k a_n|^2 < \infty,$$

y

$$\sum_{n\geq 1} |n^k b_n|^2 < \infty.$$

□

Corolario 3.12. *Sea f una función 2π periódica de clase $\mathcal{C}^k$ y sea $f^{(k)}$ una función derivable a trozos. Entonces, en particular*

$$n^k a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$n^k b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$n^k c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Demostración. A partir de la demostración anterior, como se ha probado que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^k c_n|^2 < \infty,$$

en consecuencia

$$n^k c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Lo mismo para los coeficientes reales, ya que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^k a_n|^2 < \infty \Longrightarrow n^k a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

y

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^k b_n|^2 < \infty \Longrightarrow n^k b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Proposición 3.13. Sea f una función 2π-periódica y sean c_n los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier compleja. Si

$$|c_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

para algún $C > 0$ y $\alpha > 1$, entonces, f es de clase $\mathcal{C}^k$.

Demostración. Notemos que como $\alpha > 1$ y por hipótesis $|c_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}$

$$\sum_{n\neq 0} |n^j c_n| \leq C \sum_{n\neq 0} |n|^{-(k-j+\alpha)} \leq 2C \sum_{n\neq 0} n^{-\alpha} < \infty,$$

cuando $j \leq k$.
A través del criterio M de Weierstrass, se puede probar que las series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^j c_n e^{in\theta},$$

son absoluta y uniformemente convergentes $\forall\ j \leq k$. Por lo tanto, definen funciones continuas, que son las derivadas $j-$*ésimas* de la función f, cuyo desarrollo en serie de Fourier es

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

por lo tanto, se concluye que f es de clase $\mathcal{C}^k$.

□

Lema 3.14. *Sea f una función 2π-periódica. Se tiene que*

$$|f|_\rho = \sup_{|Im\theta|\leq\rho} |f(\theta)|,$$

es una norma.

Demostración. Para demostrar el lema, sólo hay que probar las tres propiedades de la norma.

(I) $|f|_\rho > 0$,

En efecto, al tratarse del supremo de un valor absoluto, siempre será positivo.

(II) $|f|_\rho = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0$,

$\underline{\Longrightarrow}$: Si $|f|_\rho = 0$, entonces $\sup\limits_{|Im\theta|\leq\rho} |f(\theta)| \Longrightarrow f(\theta) = 0,\ \forall\theta$.

$\underline{\Longleftarrow}$: es evidente que si $f \equiv 0$, entonces $|f|_\rho = 0$.

(III) Dadas funciones f y g, entonces se cumple la desigualdad triangular

$$|f+g|_\rho = \sup_{|Im\theta|\leq\rho} |f(\theta)+g(\theta)| \leq \sup_{|Im\theta|\leq\rho} [|f(\theta)|+|g(\theta)|] \leq \sup_{|Im\theta|\leq\rho} |f(\theta)| + \sup_{|Im\theta|\leq\rho} |g(\theta)| =$$

$$= |f|_\rho + |g|_\rho \Longrightarrow |f+g|_\rho \leq |f|_\rho + |g|_\rho.$$

□

Definición 3.15. Sea

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

una función. Decimos que f es **real-analítica** si es analítica en un dominio $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{R}$. y toma valores reales sobre los reales.

Teorema 3.16 (Acotación de los coeficientes de Fourier de una función periódica analítica)**.** Sea f una función 2π-periódica y real-analítica.. Entonces, podemos acotar los coeficientes de la expansión de Fourier compleja de f como

$$c_n \leq M e^{-|n|\rho},$$

donde $\max\limits_{|Im(z)|\leq\rho} |f(z)| \leq M$.

Demostración. Consideremos la expansión en serie de Fourier compleja de f

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\theta}.$$

Definamos el camino cerrado $\gamma := \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4$ formado por los segmentos

- $\gamma_1 = (0,0) \vee (2\pi, 0)$,
- $\gamma_2 = (2\pi, 0) \vee (2\pi, i\rho)$,
- $\gamma_3 = (2\pi, i\rho) \vee (0, i\rho)$,

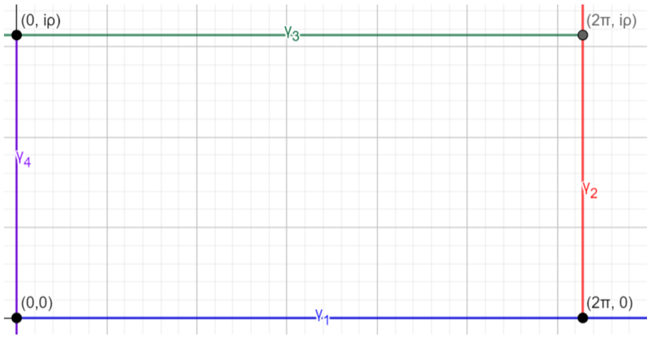

Figura 1: Camino cerrado definido por los segmentos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4

- $\gamma_4 = (0, i\rho) \vee (0,0)$.

Observamos que el camino γ es compacto, y en su interior no tenemos ninguna singularidad, ya que la función f es real.

Recordemos que $\displaystyle\int_\gamma f(\theta)d\theta = 0$ por ser γ un compacto. Además, por la aditividad de la integral

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma f(\theta)e^{-in\theta}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\gamma_1} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta + \int_{\gamma_2} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta + \int_{\gamma_3} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta + \int_{\gamma_4} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta\right).$$

Notemos que $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = -\int_{\gamma_4} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$, por lo tanto

$$\int_{\gamma_1} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = -\int_{\gamma_3} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \int_{-\gamma_3} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

Parametrizando ahora la curva $-\gamma_3$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_3: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & s & \longmapsto & i\rho + s, \end{array}$$

se tiene

$$\int_{-\gamma_3} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} f(i\rho+s)e^{-in(i\rho+s)}ds = \int_0^{2\pi} f(i\rho+s)e^{n\rho-ins}ds = \int_0^{2\pi} f(i\rho+s)e^{n\rho}e^{-ins}ds.$$

Por lo tanto, acotando la integral

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(i\rho+s)|e^{n\rho}ds,$$

y tomando el máximo definido en el enunciado del Teorema, se deduce que

$$|c_n| \leq Me^{n\rho}.$$

Por último, veamos que también podemos establecer la cota $|c_n| \leq Me^{-n\rho}$. En este caso, se hace análogamente considerando el camino cerrado cuya frontera son las curvas conjugadas a γ_k, con $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

Y de aquí se deduce que

$$|c_n| \leq Me^{-|n|\rho}.$$

□

3.4. Convergencia de las Series de Fourier de funciones periódicas

En este apartado, estudiaremos la convergencia de las series de Fourier dada una función periódica continua y derivable a trozos.

3.4.1. Conceptos de continuidad y derivabilidad a trozos de una función

Definición 3.17 (Funciones continuas a trozos)**.** Decimos que f es una función continua a trozos en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si

(i) f es continua en $[a, b]$ excepto en un nombre finito de puntos de discontinuidad $x_1, \ldots, x_k$.

(ii) Para cada punto de discontinuidad $x_1, \ldots, x_k$, los límites por la izquierda y por la derecha de f
$$\begin{aligned} f(x_j^-) &= \lim_{h \to 0^+} f(x_j), \\ f(x_j^+) &= \lim_{h \to 0^-} f(x_j), \end{aligned}$$
con $h > 0$, existen.

Definición 3.18 (Funciones derivables a trozos)**.** Decimos que f es una función derivable a trozos en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si

(i) f es continua a trozos en $[a, b]$.

(ii) f' es continua a trozos en $[a, b]$, donde f' representa la primera derivada de f.

3.4.2. Convergencia puntual de las Series de Fourier de funciones periódicas

Dada una función f 2π-periódica e integrable Riemann en $[-\pi, \pi]$, queremos saber bajo qué condiciones su serie de Fourier asociada converge en un punto de continuidad de f, que denotaremos por θ_0. Es decir, queremos probar la convergencia puntual.

Para demostrar este tipo de convergencia, necesitamos antes introducir la noción de *Núcleo de Dirichlet* y algunas de sus propiedades.

Consideremos en primer lugar la forma compleja del desarrollo en serie de Fourier parcial de la función f definida anteriormente, que denotaremos en esta sección por $S_N^f(\theta)$.

$$S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}. \tag{3.1}$$

Nuestro objetivo es probar que, dado θ_0 punto de continuidad de f

$$S_N^f(\theta_0) \xrightarrow[N \longrightarrow \infty]{} f(\theta_0).$$

Concepto y propiedades del Núcleo de Dirichlet

Recordemos que dada la función f definida, se tiene que los coeficientes complejos de Fourier son

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Theta)e^{-in\Theta}d\Theta,$$

Introduciendo esta expresión de los coeficientes en la ecuación (3.1), se tiene que

$$S_N^f(\Theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Theta)e^{-in\Theta}d\Theta e^{in\theta}d\Theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Theta)e^{-in(\Theta-\theta)}d\Theta. \tag{3.2}$$

Observación 3.19. Notemos que estamos integrando respecto la variable Θ, y no respecto de θ.

Para terminar de perfilar una expresión útil para S_N^f, tomemos el cambio de variable

$$\psi = \Theta - \theta,$$

$$d\psi = d\Theta,$$

por lo tanto, la ecuación (3.2) queda

$$S_N^f = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi+\theta)e^{-in\psi}d\psi. \tag{3.3}$$

Definición 3.20 (Núcleo de Dirichlet)**.** Se define el *Núcleo de Dirichlet*

$$D_N(\psi) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\psi}.$$

Observación 3.21. Notemos que la ecuación (3.3), se puede reescribir como

$$S_N^f = \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi+\theta)D_N(\psi)d\psi. \tag{3.4}$$

Proposición 3.22. Consideremos el núcleo de Dirichlet. Entonces, para todo N

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\psi)d\psi = 1.$$

En particular,

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\psi)d\psi = \int_{0}^{\pi} D_N(\psi)d\psi = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Sabiendo que

$$D_N(\psi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left[\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)\right],$$

como el *seno* es una función impar, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\psi)d\psi = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\cos(n\psi)\right)d\psi,$$

y como el *coseno* es par

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\cos(n\psi)\right)d\psi=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}d\psi+2\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\cos(n\psi)d\psi\right)=$$

$$=1+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\psi)d\psi,$$

e inmediatamente se deduce que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\psi)d\psi=0,$$

por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_N(\psi)d\psi=1.$$

Por último, veamos que

$$\int_{-\pi}^{0}D_N(\psi)d\psi=\int_{0}^{\pi}D_N(\psi)d\psi=\frac{1}{2}.$$

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_N(\psi)d\psi=\int_{-\pi}^{0}D_N(\psi)d\psi+\int_{0}^{\pi}D_N(\psi)d\psi,$$

y

$$\int_{0}^{\pi}D_N(\psi)d\psi=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}cos(n\psi)\right)d\psi=\left.\frac{\psi}{2\pi}+\frac{sin(n\psi}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2},$$

se concluyen las igualdades.

□

Lema 3.23. *Sea $D_N(\psi)$ el núcleo de Dirichlet. Entonces, se puede reescribir*

$$D_N(\psi)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)\psi}-e^{-iN\psi}}{e^{i\psi}-1}.$$

Demostración. Por definición

$$D_N(\psi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}e^{-in\psi}.$$

Tomando factor común $e^{-iN\psi}$

$$D_N(\psi)=\frac{1}{2\pi}e^{-iN\psi}\left(1+e^{i\psi}+\ldots+e^{2iN\psi}\right)=\frac{1}{2\pi}e^{-iN\psi}\sum_{n=0}^{2N}e^{in\psi}.$$

Notemos que la serie $\sum_{n=0}^{2N}e^{in\psi}$ es una progresión geométrica de razón $e^{i\psi}$. Entonces, para $\psi\neq 0$, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{2N}e^{in\psi}=\frac{e^{i(2N+1)\psi}-1}{e^{i\psi}-1},$$

donde hemos utilizado que
$$\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{r^{N+1}-1}{r-1}.$$
con $r \neq 1$.
Manipulando la expresión
$$D_N(\psi) = \frac{1}{2\pi} e^{-iN\psi} \frac{e^{i(2N+1)\psi}-1}{e^{i\psi}-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)\psi} - e^{-iN\psi}}{e^{i\psi}-1}.$$

□

Demostración de la convergencia puntual de las series de Fourier

Teorema 3.24 (Convergencia puntual de las Series de Fourier)**.** Sea f una función 2π-periódica, continua y derivable a trozos. Entonces, la serie de Fourier de f converge puntualmente en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea θ_0 un punto de continuidad de f. Hay que demostrar que
$$S_N^f(\theta_0) \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} f(\theta_0).$$
Para ello, veamos que
$$S_N^f(\theta_0) \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} \frac{1}{2}\left(f(\theta_0^-)+f(\theta_0^+)\right).$$
Por la Proposición 3.22
$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\psi)d\psi = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} f(\theta_0^-) = f(\theta_0^-)\int_{-\pi}^{0} D_N(\psi)d\psi,$$
$$\int_{0}^{\pi} D_N(\psi)d\psi = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} f(\theta_0^+) = f(\theta_0^+)\int_{0}^{\pi} D_N(\psi)d\psi.$$
Recordemos que
$$S_N^f = \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi+\theta_0) D_N(\psi)d\psi,$$
por lo tanto, manipulando las expresiones
$$S_N^f(\theta_0) - \frac{1}{2}\left(f(\theta_0^-)+f(\theta_0^+)\right) =$$
$$= \int_{-\pi}^{0}\left(f(\psi+\theta_0)-f(\theta_0^-)\right)D_N(\psi)d\psi + \int_{0}^{\pi}\left(f(\psi+\theta_0)-f(\theta_0^+)\right)D_N(\psi)d\psi. \tag{3.5}$$
Por el Lema 3.23, podemos reescribir la fórmula (3.5) como
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)\left(e^{i(N+1)\psi} - e^{-iN\psi}\right)d\psi, \tag{3.6}$$
donde hemos tomado
$$g(\psi) = \begin{cases} \dfrac{f(\psi+\theta_0)-f(\theta_0^-)}{e^{i\psi}-1} & \text{si} \quad -\pi < \psi < 0, \\ \dfrac{f(\psi+\theta_0)-f(\theta_0^+)}{e^{i\psi}-1} & \text{si} \quad 0 < \psi < \pi. \end{cases}$$

Notemos que la función $g(\psi)$ está bien definida en $[-\pi,\pi]$, excepto en $\psi=0$, que es donde se anula la expresión del denominador $e^{i\psi}-1$. No obstante, por l'Hôpital

$$\lim_{\psi\to 0^+} g(\psi) = \lim_{\psi\to 0^+} \frac{f(\psi+\theta_0)-f(\theta_0^+)}{e^{i\psi}-1} = \lim_{\psi\to 0^+} \frac{f'(\psi+\theta_0)}{ie^{i\psi}} = \frac{f'(0^+)}{i},$$

$$\lim_{\psi\to 0^-} g(\psi) = \lim_{\psi\to 0^-} \frac{f(\psi+\theta_0)-f(\theta_0^-)}{e^{i\psi}-1} = \lim_{\psi\to 0^+} \frac{f'(\psi+\theta_0)}{ie^{i\psi}} = \frac{f'(0^-)}{i}.$$

obtenemos que f es continua a trozos en $[-\pi,\pi]$.
Así pues, los coeficientes complejos de Fourier de g serán

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)e^{-in\psi}d\psi.$$

Notemos que

$$C_n \xrightarrow[n\longrightarrow\pm\infty]{} 0,$$

y observando que la fórmula (3.6) es

$$C_{-(N+1)} - C_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)\left(e^{i(N+1)\psi} - e^{-iN\psi}\right)d\psi,$$

deducimos que cuando $N\longrightarrow\infty$, hay convergencia puntual.

□

3.4.3. Convergencia absoluta de las Series de Fourier de funciones periódicas

En este apartado, demostraremos que la serie de Fourier de una función periódica converge absolutamente en $\mathbb{R}$, es decir, que la suma de los valores absolutos de los coeficientes de Fourier es finita.

Teorema 3.25 (Convergencia absoluta de las Series de Fourier)**.** Sea f una función 2π-periódica, continua y derivable a trozos. Entonces, la serie de Fourier de f converge absolutamente en $\mathbb{R}$.

Demostración. Consideremos en desarrollo en serie de Fourier compleja de f

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

y veamos que converge absolutamente en $\mathbb{R}$. Entonces

$$|\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n e^{in\theta}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|\ |e^{in\theta}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|,$$

ya que $|e^{in\theta}|=1$.

Por lo tanto, hay que probar la convergencia de la serie de la suma de los valores absolutos de los coeficientes de Fourier. Para ello, como por hipótesis f es derivable a trozos, podemos considerar f' y su desarrollo en serie de Fourier compleja.
Recordemos que hemos probado que los coeficientes de la serie de Fourier compleja de la

derivada, que denotamos por c'_n, se relacionan con los coeficientes de la serie de Fourier compleja de f de forma

$$c_n = \frac{1}{in} c'_n \quad \forall\, n \neq 0.$$

Se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \leq |c_0| + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\frac{c'_n}{in}|. \tag{3.7}$$

Notemos que $|c_0| < \infty$, por lo tanto hay que probar que la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\frac{c'_n}{in}|,$$

converge, y para ello usaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Entonces, por la fórmula (3.7), se tiene

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\frac{c'_n}{in}| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |c'_n| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora, como

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

queda probar que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |c'_n|,$$

converge. Para ello, usando la desigualdad de Bessel demostrada anteriormente, se deduce. Por lo tanto, se concluye que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

y en definitiva, la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

es absolutamente convergente. □

3.4.4. Convergencia uniforme de las Series de Fourier de funciones periódicas

Teorema 3.26 (Convergencia uniforme de las Series de Fourier)**.** Sea f una función 2π-periódica, continua y derivable a trozos. Entonces, la serie de Fourier de f converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Demostración. Para demostrar la convergencia uniforme de las series de Fourier, utilizaremos el criterio M de Weierstrass.
Consideremos

$$f(\theta) = c_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{in\theta}.$$

Tenemos que encontrar constantes M_n reales tales que se cumpla

$$|c_n e^{in\theta}| \leq M_n,$$

y que la suma

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} M_n,$$

sea convergente.
Hemos probado anteriormente que los coeficientes complejos de Fourier de f se relacionan con los de f'

$$c_n' = inc_n \Longrightarrow c_n = \frac{c_n'}{in},$$

por lo tanto, acotando y teniendo en cuenta que $|e^{in\theta}| = 1$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$|c_n e^{in\theta}| \leq |c_n| = |\frac{c_n'}{in}| = |\frac{c_n'}{n}| \leq . \frac{|c_n'|}{n}$$

Para concluir la demostración, hay que probar que la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{\nvdash\}} \frac{|c_n'|}{n}$ es convergente.
Así, definiendo la constante real

$$M_n := \frac{|c_n'|}{n},$$

y aplicando el Teorema 3.25, donde hemos visto que la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n'|,$$

converge, deducimos a través de la desigualdad

$$\frac{|c_n'|}{n} \leq |c_n'|,$$

que la serie de los M_n también es convergente.
En definitiva, por el criterio M de Weierstrass, resulta que la serie de Fourier de f es uniformemente convergente. $\square$

4. Perturbaciones en ecuaciones diferenciales periódicas

En esta sección, estudiaremos a través de la Teoría de Perturbaciones las soluciones analíticas de una ecuación diferencial

$$\dot{x} = (A + \epsilon Q(t))x,$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz constante a la cual hemos añadido una pequeña perturbación que depende del parámetro $|\epsilon| \leq \epsilon_0$ y $Q(t)$ es una matriz n-dimensional cuyos elementos son funciones periódicas de periodo T.

Reduciremos nuestro problema inicial de difícil solución a un problema de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, todo a través de un cambio de variable adecuado con la ayuda de la Teoría de Floquet vista en la segunda sección.

Sin embargo, en este caso, el cambio de variable del sistema es explícito y no necesitaremos la matriz fundamental del sistema inicial para llegar a sus soluciones. Todo esto también será válido para el caso casi-periódico, que desarrollaremos con más profundidad en la sección 6.

4.1. Series de Neumann

Antes de avanzar en el estudio de las perturbaciones, demostraremos que dada una matriz compleja con norma más pequeña estrictamente que uno, podemos encontrar su inversa a través de un desarrollo en serie. Son las conocidas Series de Neumann, y serán útiles para desarrollar este problema.

Proposición 4.1 (Series de Neumann)**.** Dada $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $||M|| < 1$, entonces

(i) $Id - M$ es invertible.

(ii) $(Id - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k$,

donde Id representa la matriz identidad de orden n.

Demostración. (i) Consideremos la igualdad

$$(Id - M)(Id + M + M^2 + \ldots + M^{k-1}) = Id - M^k.$$

Por hipótesis, $||M|| < 1$, entonces se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} M^k = 0,$$

por lo tanto, para k suficientemente grande, se tiene que $\det(Id - M^k) \neq 0$, lo que verifica la invertibilidad de $Id - M$.

(ii) Tomando límites en la expresión anterior

$$\lim_{k\to\infty}(Id - M)(Id + M + M^2 + \ldots + M^{k-1}) = \lim_{k\to\infty}(Id - M^k),$$

se tiene

$$(Id - M)\sum_{k=0}^{\infty} M^k = Id,$$

de donde se deduce que la inversa es

$$(Id - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k.$$

□

4.2. Perturbaciones dada una ecuación diferencial periódica: desarrollo analítico

Volviendo al principio, consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = (A + \epsilon Q(t))x,$$

con A matriz constante y $Q(t)$ matriz periódica de periodo T.

Haciendo un cambio de variable, podemos convertir $Q(t)$ en una matriz periódica de periodo 2π, y, abusando del lenguaje, denotaremos de la misma manera a esta nueva matriz periódica de periodo 2π.

Entonces, como $Q(t)$ es periódica, podemos hacer su expansión en serie de Fourier. Sea $q_{j_1 j_2}$ un elemento cualquiera de la matriz, con $1 \leq j_1, j_2 \leq n$. Por lo tanto

$$q_{j_1 j_2}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_{j_1 j_2}^k e^{ikt}.$$

Definamos las siguientes matrices

$$A_0(\epsilon) := A + \epsilon \overline{Q},$$

$$\tilde{Q}(t) := Q(t) - \overline{Q},$$

donde $Q(t) = \tilde{Q}(t) + \overline{Q}$, siendo

$$\overline{Q} = \left(q_{j_1 j_2}^0\right)_{j_1, j_2}$$

y

$$\tilde{Q}(t) = \left(\sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} q_{j_1 j_2}^k e^{ikt} \right)_{j_1, j_2},$$

con $1 \leq j_1, j_2 \leq n$.

Supondremos que A es una matriz diagonalizable, tal que $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{C}$ y cuyos valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ cumplirán la hipótesis de que $|ik - (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon))| > \beta > 0$, con $j_1 \neq j_2$ tal que $1 \leq j_1, j_2 \leq n$. Con un simple cambio, podemos considerar A diagonal, y es lo que haremos de ahora en adelante.

Cambiando las matrices del sistema original por las nuevas que hemos definido, queda

$$\dot{x} = (A_0(\epsilon) + \epsilon \tilde{Q}(t))x, \tag{4.1}$$

y como ϵ es suficientemente pequeño, los valores propios de $A_0(\epsilon)$ serán los mismos que los valores propios de A, pero añadiéndoles una pequeña perturbación que dependerá de ϵ, tendremos así $\mathrm{Spec}(A_0(\epsilon)) = (\lambda_1(\epsilon), \ldots, \lambda_n(\epsilon))$.

Consideremos ahora un cambio de variable del sistema, que definiremos

$$x = (Id + \epsilon P(t))y$$

donde $P(t)$ es una matriz periódica de periodo T tal que $||\epsilon P(t)|| < 1 \ \forall t$ y que, haciendo lo mismo que hemos hecho con $Q(t)$, convertiremos en una matriz periódica de periodo 2π. Abusando del lenguaje, la denotaremos igual.
Se tiene por lo tanto

$$\dot{x} = (Id + \epsilon P(t))\dot{y} + \epsilon \dot{P}(t)y.$$

Sustituyendo en la ecuación (4.1) y manipulando los términos

$$(Id + \epsilon P(t))\dot{y} + \epsilon \dot{P}(t)y = (A_0(\epsilon) + \tilde{Q}(t))(Id + \epsilon P(t))y,$$

$$(Id + \epsilon P(t))\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \tilde{Q}(t))(Id + \epsilon P(t))y - \epsilon \dot{P}(t)y,$$

$$(Id + \epsilon P(t))\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon A_0(\epsilon)P(t) + \epsilon \tilde{Q}(t) + \epsilon^2 \tilde{Q}(t)P(t))y - \epsilon \dot{P}(t)y,$$

$$\dot{y} = [(Id + \epsilon P(t))]^{-1}(A_0(\epsilon) + \epsilon A_0(\epsilon)P(t) + \epsilon \tilde{Q}(t) + \epsilon^2 \tilde{Q}(t)P(t) - \epsilon \dot{P}(t))y.$$

Aplicando las series de Neumann a $(Id + \epsilon P(t))^{-1}$, que es posible ya que por hipótesis hemos supuesto que $||\epsilon P(t)|| < 1 \ \forall t$, se tiene

$$(Id + \epsilon P(t))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\epsilon P(t))^k,$$

por lo tanto

$$(Id + \epsilon P(t))^{-1} = Id - \epsilon P(t) + o(|\epsilon|^2).$$

Volviendo al proceso anterior, se tiene

$$\dot{y} = (Id - \epsilon P(t) + o(|\epsilon|^2))(A_0(\epsilon) + \epsilon A_0(\epsilon)P(t) + \epsilon \tilde{Q}(t) + \epsilon^2 \tilde{Q}(t)P(t) - \epsilon \dot{P}(t))y,$$

$$\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon A_0(\epsilon)P(t) + \epsilon \tilde{Q}(t) - \epsilon \dot{P}(t) + \epsilon^2 \tilde{Q}(t)P(t) -$$
$$-\epsilon P(t)A_0(\epsilon) - \epsilon^2 P(t)A_0(\epsilon)P(t) - \epsilon^2 \tilde{Q}(t) - \epsilon^2 P(t)\dot{P}(t) - \epsilon^3 P(t)\tilde{Q}(t)P(t))y.$$

y queda

$$\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon(A_0(\epsilon)P(t) + \tilde{Q}(t) - \dot{P}(t) - P(t)A_0(\epsilon)) +$$
$$+\epsilon^2(\tilde{Q}(t)P(t) - P(t)A_0(\epsilon)P(t) - \tilde{Q}(t) - P(t)\dot{Q}(t) - \epsilon P(t)\tilde{Q}(t)P(t))y.$$

Ahora queremos encontrar las matrices $P(t)$ tales que anulan el término en ϵ de la ecuación diferencial. Es decir, se trata de resolver la siguiente ecuación diferencial

$$A_0(\epsilon) + \tilde{Q}(t) - \dot{P}(t) - P(t)A_0(\epsilon) = 0,$$

$$\iff \dot{P}(t) = A_0(\epsilon)P(t) - P(t)A_0(\epsilon) + \tilde{Q}(t).$$

Consideremos la diagonalización de la matriz $A_0(\epsilon)$. Se tiene

$$A_0(\epsilon) = C_0 D_0 C_0^{-1},$$

donde C_0 es la matriz de cambio y D_0 la matriz diagonal asociada a $A_0(\epsilon)$.
Manipulando la ecuación diferencial matricial multiplicando por la izquierda por C_0^{-1} y por la derecha por C_0, teniendo en cuenta que $A_0(\epsilon) = C_0 D_0 C_0^{-1}$, queda

$$C_0^{-1}\dot{P}(t)C_0 = C_0^{-1}[(C_0 D_0 C_0^{-1})P(t)]C_0 - C_0^{-1}[P(t)(C_0 D_0 C_0^{-1})]C_0 + C_0^{-1}\tilde{Q}(t)C_0,$$

$$C_0^{-1}\dot{P}(t)C_0 = D_0C_0^{-1}P(t)C_0 - C_0^{-1}P(t)C_0D_0 + C_0^{-1}\tilde{Q}(t)C_0.$$

Ahora hacemos un cambio de variables, y definiremos

$$\begin{array}{rcl} R(t) & = & C_0^{-1}P(t)C_0, \\ \tilde{S}(t) & = & C_0^{-1}\tilde{Q}(t)C_0. \end{array}$$

Por lo tanto, reescribiendo la ecuación diferencial resultante y notando que $\dot{R}(t) = C_0^{-1}\dot{P}(t)C_0$, se obtiene

$$\dot{R}(t) = D_0R(t) - R(t)D_0 + \tilde{S}(t).$$

Consideremos ahora que la matriz $R(t)$ es de la forma $R(t) = (r_{j_1j_2}(t))_{1\leq j_1,j_2\leq n}$ (es decir, está formada por los elementos $r_{j_1j_2}(t)$, con $1 \leq j_1, j_2 \leq n$), de la misma manera, la matriz $\tilde{S}(t)$ es de la forma $\tilde{S}(t) = (\tilde{s}_{j_1j_2}(t))_{1\leq j_1,j_2\leq n}$ y por último la matriz D_0 es diagonal cuyos elementos son los valores propios de $A_0(\epsilon)$, entonces $D_0 = (\lambda_k(\epsilon))_{1\leq k\leq n}$.
Escribiendo de forma matricial la ecuación diferencial, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_{11}(t) & \dot{r}_{12}(t) & \dots & \dot{r}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dot{r}_{n1}(t) & \dot{r}_{n2}(t) & \dots & \dot{r}_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & \dots & r_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(t) & r_{n2}(t) & \dots & r_{nn}(t) \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & \dots & r_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(t) & r_{n2}(t) & \dots & r_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n(\epsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{s}_{11}(t) & \tilde{s}_{12}(t) & \dots & \tilde{s}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \tilde{s}_{n1}(t) & \tilde{s}_{n2}(t) & \dots & \tilde{s}_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

De esta manera, para todo elemento $j_1 \neq j_2$

$$\dot{r}_{j_1j_2}(t) = (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon))r_{j_1j_2} + \tilde{s}_{j_1j_2}.$$

Ahora consideremos la expansión en serie de Fourier compleja para cada elemento $j_1 \neq j_2$ de las matrices $R(t)$ y $\tilde{S}(t)$.

$$r_{j_1j_2}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_{j_1j_2}^{(k)}e^{ikt},$$

$$\tilde{s}_{j_1j_2}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)}e^{ikt}.$$

donde $r_{j_1j_2}^{(k)}$ y $\tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)}$ representan el coeficiente k-ésimo de la serie de Fourier correspondiente a $r_{j_1j_2}(t)$ y $\tilde{s}_{j_1j_2}(t)$, respectivamente. Notemos que estas funciones son real-analíticas.
A partir de 3.16, considerando $\max\limits_{|Im(z)|\leq\rho} |r_{j_1j_2}^{(k)}| \leq M$, se tiene que

$$|r_{j_1j_2}^{(k)}| \leq Me^{-i|k|\rho},$$

y análogamente, como $\max\limits_{|Im(z)|\leq\rho} |\tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)}| \leq M$

$$|\tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)}| \leq Me^{-i|k|\rho}.$$

Nos interesa establecer ahora una relación entre los coeficientes $r_{j_1j_2}^{(k)}$ y los coeficientes $s_{j_1j_2}^{(k)}$. Partiendo de

$$\dot{r}_{j_1j_2}(t) = (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon))r_{j_1j_2} + \tilde{s}_{j_1j_2},$$

y considerando los desarrollos en serie

$$r_{j_1j_2}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_{j_1j_2}^{(k)} e^{ikt},$$

$$\tilde{s}_{j_1j_2}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)} e^{ikt},$$

se trata de resolver la ecuación diferencial utilizando estas series de Fourier. Por lo tanto, calculando la serie de Fourier de la derivada de $r_{j_1j_2}(t)$, que es la derivada de la serie de Fourier de $r_{j_1j_2}(t)$, se obtiene

$$\dot{r}_{j_1j_2}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ikr_{j_1j_2}^{(k)} e^{ikt}.$$

Por lo tanto, a partir de la igualdad de la ecuación diferencial y sustituyendo estas expresiones, queda

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} = ikr_{j_1j_2}^{(k)} e^{ikt} = (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon)) \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_{j_1j_2}^{(k)} e^{ikt} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)} e^{ikt}.$$

Así pues, dado un $k \in \mathbb{Z}$ cualquiera, se tiene la expresión de los coeficientes de la matriz R

$$r_{j_1j_2}^{(k)} = \frac{\tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)}}{ik - (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon))}.$$

Observación 4.2. Notemos que la expresión anterior está bien definida, ya que hemos supuesto inicialmente que $|ik - (\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2})| > \beta > 0,\ \forall j_1 \neq j_2,\ 1 \leq j_1, j_2 \leq n$, por lo tanto no se anula.

4.3. Convergencia del método iterativo periódico en la primera etapa. Acotación de las normas matriciales

Volviendo al esquema inicial, recordemos la cota

$$|ik - (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon)| > \beta \quad , \forall j_1 \neq j_2, \text{tal que } 1 \leq j_1, j_2 \leq n,$$

para un cierto $\beta > 0$.

Entonces, a partir de la relación entre los coeficientes de las series de Fourier de $r_{j_1j_2}(t)$ y de $\tilde{s}_{j_1j_2}(t)$, tenemos la desigualdad

$$r_{j_1j_2}^{(k)} = \frac{\tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)}}{ik - (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon)} \leq \frac{\tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)}}{\beta}.$$

Como

$$r_{j_1j_2}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_{j_1j_2}^{(k)} e^{ikt} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\tilde{s}_{j_1j_2}^{(k)}}{\beta} e^{ikt} \leq \frac{\tilde{s}_{j_1j_2}(t)}{\beta},$$

tomando normas, deducimos que

$$||R|| \leq \frac{||\tilde{S}||}{\beta}.$$

Recordemos que por definición

$$\begin{array}{rclcrcl} R(t) & = & C_0^{-1}P(t)C_0 & \Longleftrightarrow & P(t) & = & C_0R(t)C_0^{-1}, \\ \tilde{S}(t) & = & C_0^{-1}\tilde{Q}(t)C_0, & & & & \end{array}$$

por lo tanto, se tiene que

$$||P|| = ||C_0PC_0^{-1}|| \leq ||C_0||\ ||R||\ ||C_0^{-1}|| = k(C_0)\ ||R||,$$

y por otro lado

$$||\tilde{S}|| = ||C_0^{-1}\tilde{Q}C_0|| \leq ||C_0^{-1}||\ ||\tilde{Q}||\ ||C_0|| = k(C_0)\ ||\tilde{Q}||.$$

De estas desigualdades, deducimos que

$$||P|| \leq k(C_0)\ ||R|| \leq\ k(C_0)\ \frac{||\tilde{S}||}{\beta} \leq\ [k(C_0)]^2\ \frac{||\tilde{Q}||}{\beta},$$

donde $k(C_0)$ representa el número de condición de la matriz C_0.

Por último, volviendo al inicio, donde hemos considerado por hipótesis que $||\epsilon P|| < 1$, podemos calcular el valor ϵ adecuado

$$||\epsilon P|| = |\epsilon|\ ||P|| \leq |\epsilon|\ [k(C_0)]^2\ \frac{||\tilde{Q}||}{\beta} < 1 \Longrightarrow |\epsilon| < \frac{\beta}{[k(C_0)]^2}\ \frac{1}{||\tilde{Q}||},$$

y como teníamos que $|\epsilon| < \epsilon_0$, entonces podemos tomar

$$\epsilon_0 < \frac{\beta}{[k(C_0)]^2}\ \frac{1}{||\tilde{Q}||}.$$

4.4. Segunda etapa y posteriores del método iterativo periódico

Recordemos que

$$\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon(A_0(\epsilon)P(t) + \tilde{Q}(t) - \dot{P}(t) - P(t)A_0(\epsilon)) +$$

$$+\epsilon^2(\tilde{Q}(t)P(t) - P(t)A_0(\epsilon)P(t) - \tilde{Q}(t) - P(t)\dot{Q}(t) - \epsilon P(t)\tilde{Q}(t)P(t)))y.$$

Fijando un valor de ϵ adecuado utilizando la desigualdad obtenida en el caso anterior, notamos que el término en ϵ de orden 1 en la ecuación diferencial se anula. Por lo tanto, queda la ecuación

$$\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon^2(\tilde{Q}(t)P(t) - P(t)A_0(\epsilon)P(t) - \tilde{Q}(t) - P(t)\dot{Q}(t) - \epsilon P(t)\tilde{Q}(t)P(t)))y.$$

Observamos que si denominamos

$$\tilde{Q}_2(t,\epsilon) := \tilde{Q}(t)P(t) - P(t)A_0(\epsilon)P(t) - \tilde{Q}(t) - P(t)\dot{Q}(t) - \epsilon P(t)\tilde{Q}(t)P(t)),$$

nos queda un sistema similar al de partida, salvo que ahora el término en ϵ es cuadrático, y como ϵ es un valor pequeño, se tiene una mayor precisión.

Para continuar el proceso iterativo, se repite de manera análoga el desarrollo analítico anterior. Así, después de n pasos, obtendremos un sistema de forma

$$\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon^{2^n}(\tilde{Q}_n(t, \epsilon))y,$$

de manera que cuando $n \to \infty$, se tendrá que $\epsilon^{2^n} \to 0$, por lo tanto, nos quedará un sistema constante

$$\dot{y} = A_0(\epsilon)y.$$

5. Introducción a las funciones casi-periódicas y a las Series de Fourier de funciones casi-periódicas

5.1. Funciones casi-periódicas

Las funciones casi-periódicas, introducidas por el matemático Harald Bohr en 1923, son funciones reales muy similares en propiedades a las funciones periódicas. No obstante, son conceptos diferentes.

Intuitivamente, las funciones casi-periódicas son aquellas que cada vez que tomamos periodos más grandes, obtenemos una periodicidad aproximada cada vez más precisa.

Es decir, matemáticamente, podemos decir que a medida que tomamos un periodo T arbitrario cada vez más grande, la diferencia

$$|f(x+T) - f(x)|,$$

es cada vez más pequeña.

Notación 5.1. *Denotaremos por* $\mathbb{T}^r$ *el toro de dimensión* r.

Definición 5.2. Sea f una función real y continua. Se dice que f es **casi-periódica** si, y sólo si, existen $r \in \mathbb{N}$, una función

$$F: \quad \mathbb{T}^r \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R},$$

y un vector $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r) \in \mathbb{R}^r$ denominado vector de frecuencias tal que $\forall k \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$ que cumple

$$\langle k, \omega \rangle \neq 0,$$

entonces se tiene que

$$f(t) = F(t\omega).$$

Ejemplo 5.3 (Función casi-periódica)**.** *Sea la función real*

$$f(t) = 1 + \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t),$$

Tomando $r = 2$*, la función*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{T}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\theta_1, \theta_2) & \longmapsto & 1 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2), \end{array}$$

y el vector $\omega = (1, \sqrt{2})^T$*, veamos que es casi periódica.*

En efecto, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\langle k, \omega \rangle = (k_1, k_2)(1, \sqrt{2})^T = k_1 + \sqrt{2}k_2, \tag{5.1}$$

y como $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ *y* $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, se tiene que la expresión (5.1) siempre es no nula.*

Por lo tanto

$$f(t) = F(t\omega) = F(t, \sqrt{2}t).$$

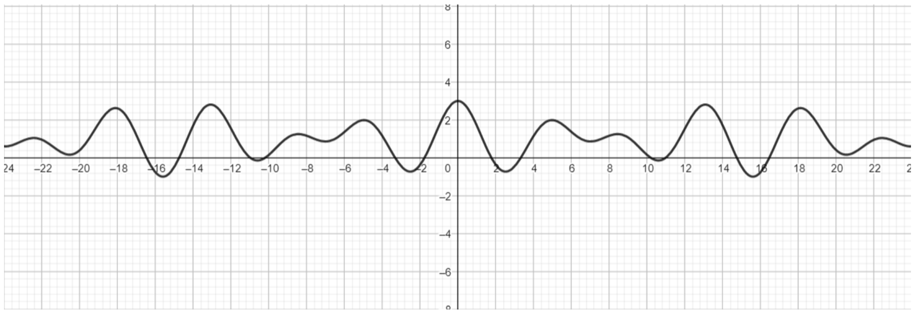

Figura 2: Gráfico de la función casi-periódica del ejemplo.

Notación 5.4. *Denotaremos más adelante siempre*

$$\theta = t\omega \in \mathbb{R}^r$$

En particular

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Proposición 5.5 (Algunas propiedades de las funciones casi-periódicas)**.**

(I) Toda función periódica es casi-periódica.

(II) Todas las funciones casi-periódicas están acotadas.

(III) Toda función casi-periódica es uniformemente continua.

Demostración. (I) Tomando $k = 1$ en la definición de función casi-periódica, se tiene inmediatamente.

(II) Sea f una función casi-periódica. Entonces, existen $r \in \mathbb{N}, \omega \in \mathbb{R}^r$ y $F : \mathbb{T}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = F(\omega t)$. Como por definición f es continua, es evidente que F también será continua; y como F es continua sobre el compacto $\mathbb{T}^r$, se deduce que está acotada por el teorema de Weierstrass. Por lo tanto, f es acotada.

(III) Veamos que f es uniformemente continua. Por definición, hay que ver que dados $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta_1(\epsilon) > 0 \mid |t_1 - t_2| < \delta_1(\epsilon) \Longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon$$

Como f es casi-periódica por hipótesis, consideremos F tal que $f(t) = F(\omega t)$. Entonces, por el Teorema de Heine, como F es continua y acotada sobre el compacto $\mathbb{T}^r$, entonces es uniformemente continua sobre $\mathbb{T}^r$. Así, por definición, se tiene que dados $\theta_1 = \omega t_1, \theta_2 = \omega t_2 \in \mathbb{T}^r$

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta_2(\epsilon) \mid ||\omega t_1 - \omega t_2|| < \delta_2(\epsilon) \Longrightarrow |F(\omega t_1) - F(\omega t_2)| < \epsilon$$

Tomando $\delta_1(\epsilon) = \dfrac{\delta_2(\epsilon)}{||\omega||}$, se sigue el resultado y se tiene que f es uniformemente continua.

□

5.2. Series de Fourier de funciones casi-periódicas

Sea f una función real casi-periódica. Hemos visto en el apartado anterior que, por definición, existe un $r \in \mathbb{N}$, una función F y un vector de frecuencias $\omega \in \mathbb{R}^r$ tal que

$$f(t) = F(t\omega),$$

donde

$$\theta = t\omega \in \mathbb{R}^r.$$

En esta sección nos centraremos en analizar las series de Fourier para funciones de este tipo.

Definición 5.6 (Serie de Fourier de una función casi-periódica)**.** Sea f una función real casi-periódica y F su función de $\mathbb{T}^r$ asociada. El desarrollo en serie de F

$$F(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^r} F_k e^{i\langle k,\theta \rangle},$$

se denomina desarrollo en Serie de Fourier de F, donde F_k son los coeficientes complejos de Fourier.

5.2.1. Coeficientes de las Series de Fourier de funciones casi-periódicas

Definición 5.7. Sea f una función real casi-periódica con vector de frecuencias $w \in \mathbb{R}^r$, con $r \in \mathbb{N}$. Sea F la función

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{T}^r & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & F(\theta) = f(t\omega), \end{array}$$

Entonces, los coeficientes complejos de Fourier F_k de F son de la forma

$$F_k = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{\mathbb{T}^r} F(\theta) e^{-i\langle k,\theta \rangle} d\theta.$$

Teorema 5.8 (Acotación de los coeficientes de Fourier de una función casi-periódica analítica)**.** Sea f una función real casi-periódica con vector de frecuencias $w \in \mathbb{R}^r$, con $r \in \mathbb{N}$. Sea F la función real-analítica

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{T}^r & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & F(\theta) = f(t\omega). \end{array}$$

Entonces

$$|F_k| \leq M e^{-|k|\rho}$$

con $k \in \mathbb{Z}^r$ y donde $\max\limits_{|Im(z)| \leq \rho} |F(z)| \leq M$.

Demostración. Denotemos $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ y $k = (k_1, \ldots, k_r)$. Por la definición 5.7, se tiene que los coeficientes de Fourier de la función F del enunciado son

$$F_k = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{\mathbb{T}^r} F(\theta) e^{-i\langle k,\theta \rangle} d\theta.$$

Como estamos en $\mathbb{T}^r$, el dominio de integración es $[0,2\pi] \times \ldots^{(r)} \times [0,2\pi] \equiv [0,2\pi]^r$
Entonces, desarrollando la integral múltiple, queda

$$F_k = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_0^{2\pi} \ldots^{(r)} \left(\int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-i\langle k,\theta\rangle} d\theta_r \right) \ldots^{(r)} d\theta_1,$$

ya que se aplica el teorema de Fubini, pues la función a integrar está acotada.
En efecto, por la proposición 5.5, las funciones casi-periódicas están acotadas, ergo $F(\theta)$ está acotada.
Ahora, la exponencial compleja está acotada por 1, ya que $|e^{-i\langle k,\theta\rangle}| = 1$. Por lo tanto, el producto $F(\theta)e^{-i\langle k,\theta\rangle}$ está acotado.
Resolvamos ahora la integral

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-i\langle k,\theta\rangle} d\theta_r.$$

Notemos que

$$F(\theta) = F(\theta_1, \ldots, \theta_r),$$

y como integramos respecto del parámetro θ_r, el resto de parámetros quedan fijos.
Definiendo

$$\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_{r-1}),$$

y

$$\overline{k} = (k_1, \ldots, k_{r-1}),$$

se tiene la integral

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-i\langle k,\theta\rangle} d\theta_r = \int_0^{2\pi} F(\theta_1, \ldots, \theta_r) e^{-i\langle \overline{k},\overline{\theta}\rangle} e^{-ik_r\theta_r} d\theta_r.$$

Esta integral tiene una solución, que la denotaremos por F_{k_r}, y depende de la variable $\overline{\theta}$.
Se tiene además que

$$|F_{k_r}(\theta_1, \ldots, \theta_{r-1})| \leq M_r e^{-|k_r|\rho_r},$$

para una constante $M_r > 0$.
Volviendo a la integral, podemos escribir

$$F_k = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_0^{2\pi} \ldots^{(r-1)} \left(\int_0^{2\pi} F_{k_r}(\theta_1, \ldots, \theta_{r-1}) e^{-i\langle k,\theta\rangle} d\theta_{r-1} \right) \ldots^{(r-1)} d\theta_1.$$

Repitiendo el mismo proceso anterior $r-1$ veces, obtendremos $r-1$ nuevas funciones. Es decir, tendremos funciones

$$F_{k_j}(\theta_1, \ldots, \theta_{j-1}),$$

con $2 \leq j \leq r$, y que están acotadas de manera

$$|F_{k_j}| \leq M_j e^{-|k_j|\rho_j}.$$

Así, en el último paso, quedarán los coeficientes F_k

$$F_k = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_0^{2\pi} F_{k_2}(\theta_1) e^{-ik_1\theta_1} d\theta_1.$$

Por las cotas de las funciones F_{k_j}, $2 \leq j \leq r$ dadas, se tiene que

$$|F_k| \leq M_1 \ldots M_r e^{-|k_1|\rho_1 - \ldots - |k_r|\rho_r}.$$

Tomando

$$\rho = \text{mín}\{\rho_1, \ldots, \rho_r\},$$

$$|k| = \sum_{j=1}^{r} |k_j|,$$

y

$$M = \prod_{j=1}^{r} M_j,$$

se tiene que

$$|F_k| \leq M e^{-|k|\rho}.$$

que era lo que queríamos demostrar.

$\square$

6. Perturbaciones en ecuaciones diferenciales casi-periódicas

6.1. Perturbaciones dada una ecuación diferencial casi-periódica: desarrollo analítico

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (A + \epsilon\, \tilde{Q}(\theta))x, \\ \dot{\theta} & = & \omega, \end{array} \right. \tag{6.1}$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz constante a la cual hemos añadido una pequeña perturbación que depende del parámetro ϵ y $Q(\theta)$ es una función casi-periódica cuyo vector de frecuencias es ω.

Consideremos que la matriz A tiene espectro

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},$$

con $\lambda_{j_1} \neq \lambda_{j_2}$, $\forall j_1 \neq j_2$ y $1 \leq j_1, j_2 \leq n$.

Queremos estudiar las soluciones de este sistema. Para ello, en primer lugar, cambiaremos la forma del sistema definiendo las matrices

$$A_0(\epsilon) := A + \epsilon\overline{Q},$$

$$\tilde{Q}(\theta) := Q(\theta) - \overline{Q},$$

donde $\tilde{Q}$ representa la matriz que incluye los términos que dependen de la variable θ y $\overline{Q}$ representa la matriz que incluye los términos constantes de Q.

Volviendo a la ecuación (6.1), haremos el cambio de variable definido por

$$x = (Id + \epsilon P(\theta))y,$$

donde $P(\theta)$ es una matriz casi-periódica tal que $||\epsilon P|| < 1$.

Así, derivando, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{x} = \left[\epsilon\left(\frac{\partial P}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial\theta_r}\dot{\theta}_r\right)\right] y + (Id + \epsilon P(\theta))\, \dot{y} = \\ = \epsilon\langle\nabla P(\theta), \dot{\theta}\rangle y + (Id + \epsilon P(\theta))\dot{y} = \\ = \epsilon\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle y + (Id + \epsilon P(\theta))\dot{y}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Notación 6.1. *Denotaremos el gradiente de $P(\theta)$, con $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ como*

$$\nabla P(\theta) := \left(\frac{\partial P(\theta)}{\theta_1}, \ldots, \frac{\partial P(\theta}{\theta_r}\right).$$

Notación 6.2. *Denotaremos el producto escalar de dos vectores con el símbolo $\langle\ ,\ \rangle$.*

Sustituyendo la expresión analítica (6.2) en la expresión (6.1)

$$(Id + \epsilon P(\theta))\dot{y} + \epsilon\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle y = (A_0(\epsilon) + \epsilon\tilde{Q}(\theta))(Id + \epsilon P(\theta))y,$$

y desarrollando

$$(Id + \epsilon P(\theta))\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon A_0(\epsilon)P(\theta) + \epsilon\tilde{Q}(\theta) + \epsilon^2\tilde{Q}(\theta)P(\theta))y - \epsilon\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle y,$$

$$(Id + \epsilon P(\theta))\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon A_0(\epsilon)P(\theta) + \epsilon\tilde{Q}(\theta) + \epsilon^2\tilde{Q}(\theta)P(\theta) - \epsilon\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle)y.$$

Observación 6.3. Para aislar el término en $\dot{y}$, aplicaremos las series de Neumann. Recordemos que

$$(Id + \epsilon P(\theta))^{-1} = (Id - (-\epsilon P(\theta))^{-1} = \sum_{k\geq 0}(-\epsilon P(\theta))^k = Id - \epsilon P(\theta) + o(|\epsilon|^2).$$

Entonces

$$\dot{y} = (Id + \epsilon P(\theta))^{-1}(A_0(\epsilon) + \epsilon A_0(\epsilon)P(\theta) + \epsilon\tilde{Q}(\theta) - \langle\nabla P(\theta), \omega\rangle + \epsilon^2\tilde{Q}(\theta)P(\theta))y,$$

$$\dot{y} = (Id - \epsilon P(\theta) + o(|\epsilon|^2))(A_0(\epsilon) + \epsilon A_0(\epsilon)P(\theta) + \epsilon\tilde{Q}(\theta) - \epsilon(\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle) + \epsilon^2\tilde{Q}(\theta)P(\theta))y,$$

$$\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon(A_0(\epsilon)P(\theta) - P(\theta)A_0(\epsilon) + \tilde{Q}(\theta) - \langle\nabla P(\theta), \omega\rangle) +$$
$$+\epsilon^2(\tilde{Q}(\theta)P(\theta) - P(\theta)\tilde{Q}(\theta) - P(\theta)A_0(\epsilon)P(\theta) - \epsilon P(\theta)\tilde{Q}(\theta)P(\theta))y.$$

Ahora queremos deshacernos del término en ϵ dentro de la ecuación diferencial. Para ello, es necesario encontrar una matriz $P(\theta)$ que verifique

$$A_0(\epsilon)P(\theta) - P(\theta)A_0(\epsilon) + \tilde{Q}(\theta) - \langle\nabla P(\theta), \omega\rangle = 0,$$

es decir

$$\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle = A_0(\epsilon)P(\theta) - P(\theta)A_0(\epsilon) + \tilde{Q}(\theta). \tag{6.3}$$

Hemos considerado que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ es el espectro de A, entonces, como $A_0(\epsilon) = A + \epsilon\overline{Q}$, los valores propios de $A_0(\epsilon)$ serán los mismos de A sujetos a una pequeña variación provocada por el parámetro ϵ. Es decir

$$\mathrm{Spec}(A_0(\epsilon)) = \{\lambda_1(\epsilon), \dots, \lambda_n(\epsilon)\}.$$

Tomemos ahora la diagonalización de la matriz $A_0(\epsilon)$, cuya matriz diagonal asociada será

$$D_0(\epsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon) & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n(\epsilon) \end{pmatrix}$$

Las matriz de cambio la denotaremos por C_0 y se tiene que

$$A_0(\epsilon) = C_0 D_0(\epsilon) C_0^{-1}.$$

Volviendo a la ecuación (6.3), multipliquemos por C_0^{-1} por la izquierda y por C_0 por la derecha en ambos miembros, obteniendo

$$C_0^{-1}\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle C_0 = C_0{-}1(A_0(\epsilon)P(\theta) - P(\theta)A_0(\epsilon) + \tilde{Q}(\theta))C_0,$$

$$C_0^{-1}\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle C_0 = C_0^{-1}A_0(\epsilon)P(\theta)C_0 - C_0^{-1}P(\theta)A_0(\epsilon)C_0 + C_0^{-1}\tilde{Q}(\theta))C_0,$$

$$C_0^{-1}\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle C_0 = C_0^{-1}C_0D_0(\epsilon)C_0^{-1}P(\theta)C_0 - C_0^{-1}P(\theta)C_0D_0(\epsilon)C_0^{-1}C_0 + C_0^{-1}\tilde{Q}(\theta))C_0,$$

$$C_0^{-1}\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle C_0 = D_0(\epsilon)C_0^{-1}P(\theta)C_0 - C_0^{-1}P(\theta)C_0D_0(\epsilon) + C_0^{-1}\tilde{Q}(\theta))C_0. \tag{6.4}$$

Definiendo ahora las matrices

$$R(\theta) = C_0^{-1}P(\theta)C_0,$$

$$\tilde{S}(\theta) = C_0^{-1}\tilde{Q}(\theta)C_0,$$

deducimos que

$$\langle\nabla R(\theta), \omega\rangle = C_0^{-1}\langle\nabla P(\theta), \omega\rangle C_0,$$

y la ecuación diferencial (6.4) se transforma en una ecuación diferencial

$$\langle\nabla R(\theta), \omega\rangle = D_0(\epsilon)R(\theta) - R(\theta)D_0(\epsilon) + \tilde{S}(\theta). \tag{6.5}$$

Notación 6.4. *Denotaremos los elementos de las matrices $R(\theta)$ y $\tilde{S}(\theta)$, respectivamente, por*

$$R(\theta) = \left(r_{j_1,j_2}(\theta)\right)_{j_1,j_2},$$

y

$$\tilde{S}(\theta) = \left(\tilde{s}_{j_1,j_2}(\theta)\right)_{j_1,j_2},$$

con $1 \leq j_1, j_2, \leq n$.

Observación 6.5. Antes de avanzar, notemos que la matriz resultante de la operación $D_0(\epsilon)R(\theta) - R(\theta)D_0(\epsilon)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}(\theta) & r_{12}(\theta) & \dots & r_{1n}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(\theta) & r_{n2}(\theta) & \dots & r_{nn}(\theta) \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} r_{11}(\theta) & r_{12}(\theta) & \dots & r_{1n}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(\theta) & r_{n2}(\theta) & \dots & r_{nn}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n(\epsilon) \end{pmatrix}$$

queda de forma

$$D_0(\epsilon)R(\theta) - R(\theta)D_0(\epsilon) = \left((\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon))r_{j_1,j_2}(\theta)\right)_{1\leq j_1,j_2\leq n},$$

con $j_1 \neq j_2$.

Ahora hay que resolver la ecuación diferencial (6.5) analíticamente con el objetivo de obtener una expresión para cada uno de los elementos de la matriz $R(\theta)$. Para ello, emplearemos las series de Fourier.

Cada elemento de las matrices tiene una serie de Fourier asociada. Entonces

$$r_{j_1,j_2}(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^r} r_{j_1,j_2}^{(k)} e^{i\langle k,\theta\rangle},$$

y

$$\tilde{s}_{j_1,j_2}(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^r} \tilde{s}_{j_1,j_2}^{(k)} e^{i\langle k,\theta\rangle}.$$

Notemos que fijando un elemento cualquiera de la ecuación diferencial matricial (6.5) queda

$$\left(\langle\nabla R(\theta), \omega\rangle\right)_{j_1,j_2} = (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon))r_{j_1,j_2}(\theta) + \tilde{s}(\theta)_{j_1,j_2}. \tag{6.6}$$

Observación 6.6. Se tiene que

$$(\langle \nabla R(\theta), \omega\rangle)_{j_1,j_2} = \langle\left(\frac{\partial r_{j_1,j_2}(\theta)}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial r_{j_1,j_2}(\theta)}{\partial \theta_r}\right), (\omega_1, \ldots, \omega_r)\rangle =$$

$$= \frac{\partial r_{j_1,j_2}(\theta)}{\partial \theta_1}\omega_1 + \ldots + \frac{\partial r_{j_1,j_2}(\theta)}{\partial \theta_r}\omega_r,$$

y derivando

$$\frac{\partial r_{j_1,j_2}(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^r} i\langle k, \omega\rangle r^{(k)}_{j_1,j_2}(\theta) e^{i\langle k,\omega\rangle}.$$

A partir de (6.6) y con la expresión derivada

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^r} i\langle k, \omega\rangle r^{(k)}_{j_1,j_2}(\theta) e^{i\langle k,\omega\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^r} (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon) r^{(k)}_{j_1,j_2} e^{i\langle k,\omega\rangle} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^r} \tilde{s}^{(k)}_{j_1,j_2} e^{i\langle k,\omega\rangle},$$

Así, para un vector $k \in \mathbb{Z}^r$ fijado

$$r^{(k)}_{j_1,j_2} = \frac{\tilde{s}^{(k)}_{j_1,j_2}}{i\langle k, \omega\rangle - (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon))}. \tag{6.7}$$

6.2. Convergencia del método iterativo casi-periódico en la primera etapa. Acotación de las normas matriciales

Queremos ahora encontrar un valor adecuado de $|\epsilon| \leq \epsilon_0$ tal que el primer paso del método iterativo sea válido.

Para ello, es necesario encontrar una cota para la norma de la matriz $P(\theta)$ inicial obtenida mediante el cambio de variable.

Recordemos que por la ecuación (6.1), la matriz $Q(\theta)$ viene dada. Por lo tanto, también tendremos la norma de la matriz $\tilde{Q}(\theta)$, que denotaremos por $||\tilde{Q}||$.

A partir de la relación

$$\tilde{S}(\theta) = C_0^{-1}\tilde{Q}(\theta)C_0,$$

obtenemos que

$$||\tilde{S}|| \leq ||C_0^{-1}||\ ||\tilde{Q}||\ ||C_0||.$$

Notación 6.7. *Denotaremos el número de condición de la matriz C_0 por $k(C_0)$, es decir*

$$k(C_0) := ||C_0||\ ||C_0^{-1}||.$$

Se tiene que

$$||\tilde{S}|| \leq k(C_0)\ ||\tilde{Q}||,$$

y como por hipótesis hemos supuesto que

$$|i\langle k, \omega\rangle - (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon)| > \beta,$$

de la relación

$$r^{(k)}_{j_1,j_2} = \frac{\tilde{s}^{(k)}_{j_1,j_2}}{i\langle k, \omega\rangle - (\lambda_{j_1}(\epsilon) - \lambda_{j_2}(\epsilon))},$$

se deduce que

$$||R|| \leq \frac{||\tilde{S}||}{\beta} \leq \frac{k(C_0)\ ||\tilde{Q}||}{\beta}.$$

Por último, como

$$P(\theta) = C_0 R(\theta) C_0^{-1},$$

se concluye que

$$||P|| \leq k(C_0)\ ||R|| \leq (k(C_0))^2 \frac{||\tilde{Q}||}{\beta}.$$

Una vez obtenida la cota matricial de $P(\theta)$ necesaria para que funcione el método iterativo, hay que elegir un ϵ_0 adecuado. Por hipótesis, se tiene

$$||\epsilon P|| < 1,$$

por lo tanto, imponiendo

$$|\epsilon|\ ||P|| \leq |\epsilon|(k(C_0))^2 \frac{||\tilde{Q}||}{\beta} < 1,$$

$$|\epsilon| < \frac{\beta}{(k(C_0))^2} \frac{1}{||\tilde{Q}||}.$$

Es decir, tomando un valor de ϵ que cumpla la cota, garantizaremos que el método converja en la primera etapa. Finalmente, como $|\epsilon| < \epsilon_0$, basta con tomar

$$\epsilon_0 < \frac{\beta}{(k(C_0))^2} \frac{1}{||\tilde{Q}||}.$$

6.3. Segunda etapa y posteriores del método iterativo casi-periódico

Recordemos que

$$\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon(A_0(\epsilon)P(\theta) - P(\theta)A_0(\epsilon) + \tilde{Q}(\theta) - \langle \nabla P(\theta), \omega \rangle) +$$
$$+\epsilon^2(\tilde{Q}(\theta)P(\theta) - P(\theta)\tilde{Q}(\theta) - P(\theta)A_0(\epsilon)P(\theta) - \epsilon(P(\theta)\tilde{Q}(\theta)P(\theta))y.$$

Fijando un valor de ϵ adecuado, notamos que el término en ϵ de orden 1 en la ecuación diferencial se anula. Por lo tanto, queda la ecuación

$$\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon^2(\tilde{Q}(\theta)P(\theta) - P(\theta)\tilde{Q}(\theta) - P(\theta)A_0(\epsilon)P(\theta) - \epsilon(P(\theta)\tilde{Q}(\theta)P(\theta))y.$$

Definimos

$$\tilde{Q}_2(\theta, \epsilon) := \tilde{Q}(\theta)P(\theta) - P(\theta)\tilde{Q}(\theta) - P(\theta)A_0(\epsilon)P(\theta) - \epsilon(P(\theta)\tilde{Q}(\theta)P(\theta),$$

y nos queda un sistema similar al de partida, salvo que ahora el término en ϵ es de grado dos, y al ser un valor pequeño, se tiene una mayor precisión.

Para continuar el proceso iterativo, a diferencia del caso periódico, efectuar n pasos es mucho más delicado debido a los divisores que aparecen en la ecuación (6.7). Es por ello, que bajo hipótesis adecuadas, después de n pasos se obtendría un sistema de forma

$$\dot{y} = (A_0(\epsilon) + \epsilon^{2^n}(\tilde{Q}_n(\theta, \epsilon))y,$$

de manera que cuando $n \to \infty$, se tendrá que $\epsilon^{2^n} \to 0$, por lo tanto, nos quedará un sistema constante

$$\dot{y} = A_0(\epsilon)y.$$

7. Ejemplo de aplicación de una perturbación en un sistema de ecuaciones diferenciales casi-periódico

Ejemplo 7.1. *Sea la ecuación difencial*

$$\begin{cases} \ddot{x} + (1 + \epsilon\, q(t))x &= 0, \\ \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

donde la expresión $q(t)$ viene dada por

$$q(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \cos(\sqrt{3}t).$$

Podemos reescribir la ecuación y convertirla en un sistema de ecuaciones diferenciales. Definiendo

$$y = \dot{x},$$

se tiene

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q(\theta) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{cases} \tag{7.2}$$

(I) *En primer lugar, probemos que el sistema es casi-periódico. En particular, sólo hay que probar que la función $q(t)$ es casi-periódica.*

En efecto, por la definición de función casi-periódica, existe un $r \in \mathbb{N}$, que en este caso es $r = 2$, un vector de frecuencias

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

y una función

$$\widehat{q}(\theta) = cos(\theta_1) + cos(\theta_2),$$

tal que

$$q(t) = \widehat{q}(t\omega) \equiv \widehat{q}(\theta).$$

(II) *Siguiendo el procedimiento de la sección 6, definamos*

$$A_0(\epsilon) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Q}(\theta) = Q(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\widehat{q}(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

Haciendo un simple cálculo, se obtiene que

$$Spec(A_0(\epsilon)) = \{-i, i\} = \{\lambda_1, \lambda_2\},$$

por lo que se cumple la hipótesis de que los valores propios tienen que ser distintos.

(III) *Busquemos ahora una matriz $P(\theta)$ casi-periódica para realizar el cambio de variable*

$$y = (Id + \epsilon P(\theta))x.$$

En primer lugar, busquemos la matriz $R(\theta)$, que hemos visto anteriormente que

$$R(\theta) = (r_{j_1,j_2})_{1\leq j_1,j_2\leq n},$$

donde

$$r_{j_1,j_2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} r_{j_1,j_2}^{(k)} e^{i\langle k,\omega\rangle},$$

siendo

$$r_{j_1,j_2}^{(k)} = \frac{\tilde{s}_{j_1,j_2}^{(k)}}{i\langle k,w\rangle - (\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2})}. \tag{7.3}$$

Definamos $\tilde{S}(\theta) = C_0^{-1}Q(\theta)C_0$, donde C_0 es la matriz de paso de A a su forma diagonal D_0.
Dado que

$$D_0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

a través de un simple cálculo, se deduce que

$$C_0 = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$C_0^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2i} & \dfrac{1}{2} \\ & \\ \dfrac{1}{2i} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$\tilde{S}(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2i} & \dfrac{1}{2} \\ & \\ \dfrac{1}{2i} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q(\theta)}{2} & -\dfrac{q(\theta)}{2}i \\ & \\ -\dfrac{q(\theta)}{2}i & -\dfrac{q(\theta)}{2} \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$q(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \cos(\sqrt{3}t)$$

ya viene expresado en serie de Fourier. En forma compleja sería

$$q(t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\sqrt{2}t} + e^{-i\sqrt{2}t} + e^{i\sqrt{3}t} + e^{-i\sqrt{3}t}\right).$$

Calculemos ahora la matriz R, y calcularemos separadamente cada uno de sus elementos.
Comencemos por $r_{1,1}(\theta)$. Se tiene que

$$s_{1,1}(\theta) = \frac{q(\theta)}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{i\sqrt{2}t} + e^{-i\sqrt{2}t} + e^{i\sqrt{3}t} + e^{-i\sqrt{3}t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}e^{i\langle(1,0),(\sqrt{2}t,\sqrt{3}t)\rangle} + \frac{1}{4}e^{i\langle(-1,0),(\sqrt{2}t,\sqrt{3}t)\rangle} + \frac{1}{4}e^{i\langle(0,1),(\sqrt{2}t,\sqrt{3}t)\rangle} + \frac{1}{4}e^{i\langle(0,-1),(\sqrt{2}t,\sqrt{3}t)\rangle},$$

por lo tanto, los coeficientes $s_{1,1}^{(k)}$, *con* $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ *serán*

$$\tilde{s}_{1,1}^{(1,0)} = \frac{1}{4},$$
$$\tilde{s}_{1,1}^{(-1,0)} = \frac{1}{4},$$
$$\tilde{s}_{1,1}^{(0,1)} = \frac{1}{4},$$
$$\tilde{s}_{1,1}^{(0,-1)} = \frac{1}{4}.$$

y de aquí se deduce por la fórmula 7.3

$$r_{1,1}^{(1,0)} = \frac{\frac{1}{4}}{i\langle(1,0),(\sqrt{2},\sqrt{3})\rangle - ((-i)-(-i))} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}i,$$
$$r_{1,1}^{(-1,0)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}i,$$
$$r_{1,1}^{(0,1)} = \frac{-1}{4\sqrt{3}}i,$$
$$r_{1,1}^{(0,-1)} = \frac{1}{4\sqrt{3}}i.$$

Así pues

$$r_{1,1}(\theta) = \frac{-i}{4\sqrt{2}}\left(e^{i\sqrt{2}t} - e^{-i\sqrt{2}t}\right) - \frac{i}{4\sqrt{3}}\left(e^{i\sqrt{3}t} - e^{-i\sqrt{3}t}\right).$$

Análogamente, se procede con $r_{2,2}(\theta)$, *pues se tiene la relación*

$$\tilde{s}_{2,2}(\theta) = -\tilde{s}_{1,1}(\theta),$$

y por lo tanto

$$\tilde{s}_{2,2}^{(1,0)} = \tilde{s}_{2,2}^{(-1,0)} = \tilde{s}_{2,2}^{(0,1)} = \tilde{s}_{2,2}^{(0,-1)} = -\frac{1}{4}.$$

entonces

$$r_{2,2}^{(1,0)} = \frac{\frac{1}{4}}{i\langle(1,0),(\sqrt{2},\sqrt{3})\rangle - (i-i)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}i,$$
$$r_{2,2}^{(-1,0)} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}i,$$
$$r_{2,2}^{(0,1)} = \frac{1}{4\sqrt{3}}i,$$
$$r_{2,2}^{(0,-1)} = \frac{-1}{4\sqrt{3}}i,$$
$$r_{2,2}(\theta) = \frac{i}{4\sqrt{2}}\left(e^{i\sqrt{2}t} - e^{-i\sqrt{2}t}\right) + \frac{i}{4\sqrt{3}}\left(e^{i\sqrt{3}t} - e^{-i\sqrt{3}t}\right).$$

Por último, los casos $r_{1,2}(\theta)$ *y* $r_{2,1}(\theta)$ *se hacen la misma manera, y queda*

$$r_{1,2}(\theta) = \frac{-1}{4(2+\sqrt{2})}e^{i\sqrt{2}t} - \frac{1}{4(2-\sqrt{2})}e^{-i\sqrt{2}t} - \frac{1}{4(2+\sqrt{3})}e^{i\sqrt{3}t} - \frac{1}{4(2-\sqrt{3})}e^{-i\sqrt{3}t},$$

$$r_{2,1}(\theta) = \frac{1}{4(2-\sqrt{2})}e^{i\sqrt{2}t} + \frac{1}{4(2+\sqrt{2})}e^{-i\sqrt{2}t} - \frac{1}{4(2-\sqrt{3})}e^{i\sqrt{3}t} - \frac{1}{4(2+\sqrt{3})}e^{-i\sqrt{3}t}.$$

Así pues, la matriz $P(\theta)$ *del cambio será la matriz*

$$P(\theta) = C_0 R(\theta) C_0^{-1},$$

y tendrá forma

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{1,1}(\theta - r_{1,2}(\theta) - r_{2,1}(\theta) + r_{2,2}(\theta)}{2} & \dfrac{-r_{1,1}(\theta) - r_{1,2}(\theta) + r_{2,1}(\theta) + r_{2,2}(\theta)}{2}i \\ \dfrac{r_{1,1}(\theta) - r_{1,2}(\theta) + r_{2,1}(\theta) - r_{2,2}(\theta)}{2}i & \dfrac{(r_{1,1}(\theta) + r_{1,2}(\theta) + r_{2,1}(\theta) + r_{2,2}(\theta)}{2} \end{pmatrix}.$$

Como $||\epsilon P|| < 1$*, se deberá tomar*

$$\epsilon < \frac{1}{||P||},$$

para garantizar la convergencia del método.

8. Conclusiones

Hemos visto que dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales al cual se le añade una perturbación que depende del tiempo de manera periódica o casi-periódica, podemos calcular sus soluciones de una manera aproximada y precisa a través de un cambio de variable y haciendo uso de las series de Fourier, pues en general calcular las soluciones de una manera directa no es posible o conlleva un trabajo demasiado grande, mientras que haciendo uso de algoritmos numéricos se reduce demasiado el tiempo y se obtienen resultados muy favorables.

Para llegar hasta aquí, hemos introducido la Teoría de Floquet, en la cual nos hemos basado para reducir el sistema de ecuaciones diferenciales inicial con la perturbación a uno constante, cuyas soluciones son aproximadamente las mismas.

Por otro lado, también hemos desarrollado la teoría de las series de Fourier, pues para resolver nuestro problema son necesarias. Hemos visto que dada una función periódica o casi-periódica, podemos calcular su expansión en serie de Fourier y hemos obtenido las fórmulas para calcular los coeficientes de dichas expansiones, lo que es muy útil en caso de funciones complicadas. También hemos visto su convergencia, por lo que dado un punto de una función, su serie de Fourier convergirá en ese punto.

En definitiva, la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lleva detrás una carga de conceptos matemáticos muy grandes que hay que tener en cuenta.

Referencias

[1] J. M. Sotomayor: Lições de equações diferenciais ordinárias, *Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, 1979

[2] G. B. Folland: Fourier Analysis and its applications, *The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series*, 1992

[3] E. M. Stein; Shakarchi, Rami: Fourier Analysis, an introduction, *Priceton University Press*, 2003

[4] J. C. González Aispuro: Estudios analíticos de la ecuación de Mathieu, *Universidad de Sonora, México*, 2007

[5] A. Zygmund: Trigonometric Series, *Cambridge University Press*, 2002

[6] Y. Katznelson: An Introduction to Harmonic Analysis, *Stanford*, 2002

[7] R. Lasser: Introduction to Fourier Series, *New York: Marcel Dekke*, 1996

[8] F. Rellich: Perturbation theory of eigenvalue problems, *New York: Gordon and Breach*, 1969

[9] A. Jorba, R. Ramírez-Ros, J. Villanueva: Effective Reducibility of Quasi-periodic Linear Equations Close to Constant coefficients, *Siam J. Math. Anal.*, Vol. 28, No. 1, pp. 178-188, 1997

[10] A. Jorba, C. Simó: On the Reducibility of Linear Differential Equations with Quasi-periodic Coefficients, *Journal of Differential Equations*, Vol. 98, No. 1, pp. 111-124, 1992

[11] C. Chicone: Ordinary Differential Equations with Applications (Second Edition), *Springer*, 2006