



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Grups cristal·logràfics i orbifícies

Autora: Núria Vergés Albalate

Director: Dr. Carles Casacuberta Vergés

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 10 de juny de 2025

The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be beautiful; the ideas, like the colours of the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

G. H. Hardy [2, p. 55]

Abstract

In this project, we study a classification of plane crystallographic groups from a topological point of view, using orbifolds, an extension of manifolds. First, we recall basic results about crystallographic groups and we state Bieberbach's theorems. Then, we give the definition of orbifolds and review the main aspects of orbifold theory, such as properties that are analogous to the manifold ones and the classification of orbifolds of low dimension. Finally, we classify parabolic orbifolds and explain their relationship with crystallographic groups.

Resum

En aquest treball estudiem una classificació dels grups cristal·logràfics del pla des d'una vessant topològica: a partir de la teoria de les orbifícies, una extensió de les varietats topològiques. Primer recordem resultats bàsics sobre els grups cristal·logràfics i enunciem els teoremes de Bieberbach. Després exposem els aspectes principals de la teoria de les orbifícies, com són algunes propietats anàlogues a les de les varietats topològiques i la classificació de les orbifícies de dimensió baixa. Finalment, classifiquem les orbifícies parabòliques i expliquem la relació que tenen amb els grups cristal·logràfics.

Agraïments

Vull agrair principalment al Dr. Carles Casacuberta per rebre amb els braços ben oberts el tema que vaig proposar per a aquest treball, per guiar-me a partir dels seus coneixements i experiència, per fer-me un forat a la seva apretada agenda sempre que ho he necessitat i per ensenyar-me a redactar un text científic de manera atractiva i rigorosa alhora, ja que saber matemàtiques no és el mateix que saber-les comunicar: “s’han de redactar de manera que capti l’interès de la gent”.

Estic molt agraïda a la biblioteca de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona, per tenir un ampli ventall de fonts que m’han permès accedir a llibres molt importants per a la realització d’aquest treball, i a la biblioteca de la Alhambra y el Generalife, pel seu extens repositori institucional de recursos digitals “Recursos de Investigación de la Alhambra (RIA)” [39], en el que he pogut trobar el grup cristal·logràfic que m’ha faltat per fotografiar.

També vull donar les gràcies de tot cor als components dels grups “F de Fité” i “Los ángeles de Xevi” per la seva ajuda incondicional durant el grau, ja que no només m’he emportat els seus coneixements, sinó també la seva amistat. No hagués pogut acabar la carrera sense el suport moral de la meua família i parella, que si haguessin pogut, m’haguessin explicat el que no entenia i tot el que fes falta.

Per acabar, voldria fer una menció especial a totes aquelles persones que m’han ajudat d’una manera o altra a avançar en aquest llarg camí, sobretot al professorat de la Universitat, per la seva dedicació, i a la comunitat d’estudiants de Matemàtiques, una comunitat altruista i generosa.



Índex

Introducció	1
1 Preliminars d'àlgebra, geometria i topologia	4
1.1 Accions de grups	4
1.2 Desplaçaments en espais euclidians	6
1.3 Varietats topològiques	8
2 Grups cristal·logràfics	11
2.1 En dimensió arbitrària	11
2.1.1 Teoremes de Bieberbach	12
2.2 En dimensió 2	12
3 Orbificies	15
3.1 Definició i exemples	15
3.2 Propietats de les orbificies	18
3.3 Models locals d'orbificies de dimensió baixa	21
3.4 Classificació d'orbificies de dimensió baixa	23
3.4.1 1-Orbificies	23
3.4.2 2-Orbificies	23
4 Orbificies parabòliques i grups cristal·logràfics euclidians	26
4.1 Classificació de les orbificies parabòliques	26
4.2 Notacions diverses	48
Conclusions	50

Introducció

El projecte

La bellesa dels patrons sempre m'ha cridat l'atenció. Sabia que volia fer un treball que connectés les matemàtiques amb l'art. Un estiu que vaig anar a Groningen, vaig descobrir les obres de l'artista M. C. Escher i vaig indagar sobre les matemàtiques d'aquestes. Així vaig descobrir l'article de la matemàtica D. Schattschneider [45], que explica com Escher, sense ser matemàtic i amb l'ajuda de G. Pólya i F. Hagg, va voler reproduir una gran part dels anomenats grups cristal·logràfics del pla, tot inspirat per una visita a l'Alhambra de Granada, monument on es diu que hi ha representats tots els grups cristal·logràfics .

L'estudi d'estructures cristal·logràfiques s'anomena *cristal·lografia*. E. Fedorov [21] i G. Pólya [37] van demostrar per separat que existeixen només 17 grups cristal·logràfics diferents, és a dir, tipus de simetria que pot admetre un patró pla que es repeteix en dues direccions linealment independents (2.1.5). És comú demostrar aquest fet utilitzant teoria de grups i geometria del pla, però aprofitant l'estreta relació entre la geometria i la topologia, nosaltres demostrarem aquesta classificació estudiant la geometria dels quocients del pla per aquests grups, és a dir, a partir de les *orbificies*.

Les orbificies són objectes que estenen la noció de varietats topològiques: en una orbificie, hi ha punts *regulars*, que tenen entorns euclidians, i punts *singulars*, que tenen entorns que són discs (o boles) amb una acció d'un grup finit discret. Van ser introduïdes per I. Satake en els anys cinquanta amb el nom de *V-manifolds* [42] i vint anys més tard, va ser W. P. Thurston qui va popularitzar el nom *orbifold* [49]: segons el matemàtic M. Davis, tal i com explica a [19], en el 1976 Thurston va organitzar una votació per escollir el terme que substituiria les V-manifolds de Satake. Les paraules candidates eren suggerides per diverses persones, entre les quals hi havia Thurston amb les paraules “manifolded” i “foldimani”, Chuck Giffen amb “origam”, Dennis Sullivan amb “spatial dollop” i Bill Browder amb “orbifold”. La votació va consistir en un seguit de rondes, on s'eliminaven els noms menys votats. Quan només van quedar quatre noms (origami, orbifold, foldimani i un altre) i estaven a punt d'eliminar els noms d'orbifold i l'altre, Davis va expressar el seu desacord en eliminar orbifold, ja que els altres dos noms restants li semblaven ridículs, així que van mantenir orbifold a la llista i va guanyar fàcilment en la ronda següent. El terme *orbificie* va ser proposat i difós en castellà per J. M. Montesinos.

Segons [9], el primer estudi sistemàtic de les orbificies en el món de la cristal·lografia va ser dut a terme per W. D. Dunbar en la seva dissertació de Princeton del 1981, sota la direcció de Thurston, i en la qual va derivar i il·lustrar els conjunts singulars per als 65 grups espacials polars utilitzant orbificies orientables. Les parts de la seva dissertació relacionades amb l'espai hiperesfèric subjacent S^3 es van publicar el 1988. La segona contribució important és el desenvolupament sistemàtic d'orbificies (tant orientables com

no orientables) a l'espai fibrat de Seifert en el manuscrit no publicat de Bonahon i Siebenmann. Part d'aquest manuscrit relacionat amb les orbificies euclidianes de dimensió 3 (que omet discussió directa de la cristal·lografia) va ser publicada en el 1985. El llibre de Montesinos “Classical Tessellations and Three-Manifolds” cobreix i amplia certs aspectes del treball de Bonahon i Siebenmann. J. H. Conway va publicar a “Groups, Combinatorics & Geometry” un sistema de nomenclatura per a les orbificies de dimensió 2 i, juntament amb Thurston, tenen un sistema de nomenclatura per a les orbificies euclidianes no cúbiques de dimensió 3, basat en l'elevació d'orbificies euclidianes de dimensió 2 per formar espais fibrats de Seifert.

Si un grup del pla euclidià conté dues translacions linealment independents, les accions sobre ell creen una repetició bidireccional d'un patró, definint una *tessel·lació* o *mosaic* del pla. En aquest mosaic existeix un motiu mínim, que el podem pensar com una rajola (*domini fonamental*). En desplaçar-se, es va repetint de tal manera que construeix tot el disseny (*recobridor universal*), que conté simetries. Identificant els costats d'aquesta rajola d'una manera determinada, és a dir, fent el quocient de l'acció, s'obté l'orbificie corresponent. Existeix una relació molt estreta entre grups cristal·logràfics i orbificies.

Primer veurem una implicació en dimensió arbitrària: tot grup cristal·logràfic n -dimensional té associat una orbificie. Un *grup cristal·logràfic* n -dimensional és un grup discret Γ d'isometries de \mathbb{R}^n tal que \mathbb{R}^n/Γ és compacte (2.1.1). Veurem un resultat que diu que si Γ és un subgrup discret de $\text{Eucl}(n)$, aleshores Γ actua de manera pròpiament discontinua sobre \mathbb{R}^n (3.1.9). Per tant, obtenim que els grups cristal·logràfics actuen de manera pròpiament discontinua sobre \mathbb{R}^n . A més a més, així com hi ha el conegut resultat de que el quocient d'una varietat topològica per un grup que actua lliurement i de manera pròpiament discontinua sobre la varietat, és una varietat; existeix l'anàleg per a orbificies on només cal treure la condició d'acció lliure (3.1). En conseqüència s'obté que al fer un quocient de \mathbb{R}^n per un grup cristal·logràfic s'obté una orbificie.

Després veurem l'altra implicació per a dimensió 2, que és la que ens interessa: tota orbificie parabòlica, que són aquelles que tenen característica d'Euler zero (3.4.3), té associada un grup cristal·logràfic del pla. Per demostrar-ho, cal donar, per a cadascuna de les orbificies parabòliques, una tessel·lació de \mathbb{R}^2 amb grup de simetria un grup cristal·logràfic i quocient una orbificie parabòlica.

Per a fer aquesta segona implicació, ens serà útil classificar abans les orbificies parabòliques de dimensió 2, on ens caldrà la fórmula de Riemann-Hurwitz (3.2.7): sigui \mathcal{O} una 2-orbificie bona compacta amb espai subjacent $X_{\mathcal{O}}$, amb l punts cònics d'angle $2\pi/n_i$, on $1 \leq i \leq l$, i amb k cantons d'angle π/m_j , amb $1 \leq j \leq k$; aleshores se satisfà la igualtat següent:

$$\chi(\mathcal{O}) = \chi(X_{\mathcal{O}}) - \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right).$$

La classificació d'orbificies parabòliques de dimensió 2 ens donarà també la dels grups cristal·logràfics del pla, ja que aquestes dues classificacions són equivalents degut a la correspondència bijectiva entre grups cristal·logràfics del pla i orbificies parabòliques de dimensió 2. En classificar les orbificies, n'obtindrem només 17, fet que demostra que només existeixen 17 grups cristal·logràfics. Cal destacar que d'entre les 17 orbificies, n'hi ha 5 que no tenen punts singulars aïllats, que corresponen justament al tor, l'anell, el pla projectiu, la cinta de Möbius i l'ampolla de Klein. Les varietats topològiques són orbificies sense singularitats aïllades, ja que s'hi afegeix la condició d'acció lliure.

Estructura de la memòria

La memòria d'aquest treball consta de quatre capítols. El capítol 1 defineix tots els conceptes bàsics d'àlgebra, geometria i topologia utilitzats en els capítols posteriors. Entrem en matèria amb el capítol 2, on definim els grups cristal·logràfics en dimensió arbitrària i enunciem els teoremes de Bieberbach, ja que com a conseqüència d'aquests teoremes, tenim una caracterització dels grups cristal·logràfics que fem servir en la classificació dels grups de simetries en el pla euclidià feta posteriorment.

Els capítols 3 i 4 formen el cos del treball. En el capítol 3, es dona la definició d'orbifície, així com alguns exemples il·lustratius. Tot seguit, s'enuncien propietats importants de les orbifícies per tal que es vegin les analogies i les diferències amb les varietats topològiques, com per exemple el grup local, els recobriments, el grup fonamental i la característica d'Euler. En aquesta darrera propietat, destaquem la fórmula de Riemann-Hurwitz per la seva rellevància en les demostracions del capítol següent. Després s'expliquen els models locals que poden tenir les orbifícies de dimensió 1 i 2, incidint amb els tipus de singularitats que poden tenir, doncs és essencial per a la classificació d'aquestes. Es dona una classificació topològica, on es treballa amb l'espai subjacent i els punts singulars de les orbifícies, i una altra de geomètrica, on es té en compte la geometria de les varietats topològiques segons el signe de la característica d'Euler.

Comencem el capítol 4 enunciant l'existència de les 17 orbifícies parabòliques de dimensió 2 i ho demostrem tot fent la classificació d'aquestes orbifícies: distingint els casos a partir de l'orientabilitat de les orbifícies, fem servir la fórmula de Riemann-Hurwitz, tenint en compte que aquestes orbifícies tenen característica d'Euler zero. Després veiem que, efectivament, cada una d'aquestes orbifícies admet un grup cristal·logràfic, tot creant una estructura euclidiana per a cadascuna d'elles. En aquesta construcció, s'hi indica el domini fonamental de l'acció i les identificacions en aquest domini. Les imatges de l'Alhambra són d'autoria pròpia (excepte unes de la figura (4.17) i les de la figura (4.3), que són extretes del RIA, "Recursos de Investigación de la Alhambra" [39]) i les he modificat amb el programa GeoGebra [24]. Finalitzem el capítol amb diverses notacions dels 17 grups cristal·logràfics que es poden trobar a la literatura sobre aquest tema.

Capítol 1

Preliminars d'àlgebra, geometria i topologia

Aquest capítol conté les nocions necessàries per a entendre els resultats posteriors. Totes les definicions són bàsiques i es poden trobar en moltes referències. Hem fet servir principalment els llibres [1, 7, 17, 25, 27, 29, 36, 38, 40, 50].

1.1 Accions de grups

Un *subgrup* H d'un grup G és un subconjunt al qual es restringeix l'operació del grup, és a dir, un subconjunt $H \subset G$ tal que:

1. $ab \in H$ per $a, b \in H$ arbitraris;
2. $1 \in H$, on 1 denota l'element neutre de G ;
3. $a^{-1} \in H$ per a tot $a \in H$.

Si H és un subgrup de G , a vegades es denota per $H \leq G$. Així doncs, si $H \leq G$, llavors H és un grup amb la restricció de l'operació de G .

Siguin x, y elements d'un grup G . Diem que x és *conjugat* a y si $gxg^{-1} = y$ per a algun $g \in G$. Les classes d'equivalència s'anomenen *classes de conjugació*. A partir d'aquest concepte, es defineix el concepte de subgrup normal: $H \leq G$ és un *subgrup normal* de G , i ho denotem per $H \triangleleft G$, si H és una unió de classes de conjugació de G , és a dir, $ghg^{-1} = h$ per a tot $g \in G$ i tot $h \in H$. Equivalentment, un subgrup H de G és normal si i només si $gH = Hg$ per a tot $g \in G$.

Siguin G un grup i $H \triangleleft G$. El grup de les classes laterals esquerres de H en G s'anomena el *grup quocient* de G mòdul H i es denota per G/H . L'homomorfisme de grups $\pi: G \rightarrow G/H$ que envia cada element a la seva classe lateral s'anomena la *projecció canònica* de G en G/H .

Siguin G un grup i X un espai topològic. Una *acció* de G sobre X (o *G -acció*) és un homomorfisme de G al grup d'homeomorfismes de X :

$$\Phi: G \longrightarrow \text{Homeo}(X).$$

Així, tot $g \in G$ té un homeomorfisme associat $\Phi(g): X \rightarrow X$, que, per simplificar, l'escriurem com $g: X \rightarrow X$. Denotem la imatge de $x \in X$ sota l'homeomorfisme associat a $g \in X$ per $g(x)$.

Una G -acció defineix una relació d'equivalència en X , en la qual $x, y \in X$ són equivalents si i només si $y = g(x)$ per a algun $g \in G$. Les classes d'equivalència d'aquesta relació són les *òrbites* de G :

$$Gx := \{g(x) \mid g \in G\}.$$

L'espai de les òrbites, amb la topologia quocient, és el quocient de X per la G -acció i es denota per X/G .

Sigui G un grup que actua sobre un espai X . El *subgrup d'isotropia* o *estabilitzador* d'un punt $x \in X$ és el subgrup G_x de G que deixa x invariant:

$$G_x := \{g \in G \mid g(x) = x\} \leq G.$$

També es pot denotar per $\text{Stab}(x)$. Els punts d'una mateixa òrbita tenen estabilitzadors conjugats: $G_{g(x)} = gG_xg^{-1}$ per a $x \in X$ i $g \in G$.

Exemple 1.1.1. Sigui G un grup i considerem l'acció de G sobre ell mateix per conjugació, és a dir, $g \in G$ envia $x \in G$ a $g x g^{-1}$. Aleshores, com que $(gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1}$, les òrbites són les classes de conjugació de G . L'estabilitzador d'un element x és el subgrup format pels elements que commuten amb x , és a dir, $G_x = \{g \in G \mid g x g^{-1} = x\} = \{g \in G \mid g x = x g\}$.

Una acció d'un grup G sobre un espai X és:

- (i) *efectiva* si el seu nucli és trivial, és a dir, si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{1\}$;
- (ii) *lliure* si $G_x = \{1\}$ per a tot $x \in X$;
- (iii) *transitiva* si per a cada parell de punts $x, y \in X$ existeix un element $g \in G$ tal que $g x = y$, és a dir, si només hi ha una òrbita a X ;
- (iv) *pròpiament discontinua* si per a tot subconjunt compacte $K \subset G$, el conjunt de $g \in G$ tal $g(K) \cap K \neq \emptyset$ és finit.

Observació 1.1.2. Alguns autors anomenen una acció pròpiament discontinua si, per a cada $x \in X$, existeix un entorn U de x tal que $g(U)$ és disjunt amb U sempre que $g \neq 1$, on $g \in G$ i 1 és l'element neutre de G . En aquesta definició s'inclou implícitament que l'acció també sigui lliure, però en aquest treball es consideren accions pròpiament discontinues que no són lliures.

Si G actua de manera pròpiament discontinua sobre un espai X , aleshores l'estabilitzador de cada punt de X és finit. Un grup G d'homeomorfismes de X s'anomena *discontinu* si G actua de manera pròpiament discontinua sobre X .

Exemple 1.1.3. Exemples d'accions:

- (i) El grup $SO(2)$ actua de manera efectiva sobre \mathbb{R}^2 per rotacions. Sota les identifications $SO(2) \cong S^1 < \mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, aquesta acció ve donada pel producte habitual en \mathbb{C} . Tots els punts tenen estabilitzador trivial excepte l'origen.
- (ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ amb el grup generat per $g: (x,y) \rightarrow (2x,2y)$ és una acció lliure i pròpiament discontinua.

1.2 Desplaçaments en espais euclidians

Una *transformació* d'un espai X és una funció bijectiva $f: X \rightarrow X$. Les transformacions d'un conjunt X formen un grup amb l'operació de composició de funcions, la identitat $\text{id}_X: X \rightarrow X$ com a element neutre i $f \mapsto f^{-1}$ com a pas a l'invers. Aquest grup es denota per $\text{Trans}(X)$.

Una funció $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una transformació *ortogonal* si $\phi(x) \cdot \phi(y) = x \cdot y$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}^n$. Una matriu A real $n \times n$ és ortogonal si i només si la transformació lineal associada $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida per $A(x) = Ax$, és *ortogonal*. El conjunt de totes les matrius ortogonals $n \times n$ juntament amb l'operació de multiplicació de matrius és un grup: el *grup ortogonal* de les matrius $n \times n$, que es denota per $O(n)$.

La paraula "isometria" prové del grec *isos* (igual) i *metron* (mesura) i descriu una funció bijectiva entre dos espais mètrics que preserva les distàncies: donats dos espais mètrics $(X, d_X), (Y, d_Y)$, una funció $f: X \rightarrow Y$ és una *isometria* (o *transformació congruent* o *congruència*) si $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$ per a tot parell $x, y \in X$. Com que preserva les distàncies, també preserva les longituds, els angles, les àrees i els volums, és a dir, les isometries preserven la mida i la forma de cada figura geomètrica. Observem que tota isometria és un homeomorfisme, si considerem a X la topologia definida per la distància. El conjunt de totes les isometries d'un espai mètric X en ell mateix, amb la multiplicació definida per la composició de funcions, forma un grup: el *grup d'isometries* de X , que es denota per $\text{Iso}(X)$.

Si existeix una isometria entre dos espais, aquests són *isomètrics*. Ser isomètric és una relació d'equivalència entre espais mètrics. Dos espais mètrics $(X, d_X), (Y, d_Y)$ són *localment isomètrics* si tot $x \in X$ té un entorn isomètric a un conjunt obert de Y , és a dir, si per a tot $x \in X$ existeix un obert $U \subset X$ de x i una aplicació $\phi: U \rightarrow Y$ tals que $d_Y(\phi(p), \phi(q)) = d_X(p, q)$, per a tot $p, q \in U$. Els espais localment isomètrics a l'espai euclidià es diuen que són *plans*.

Denotarem per \mathbb{E}^n l'espai mètric (\mathbb{R}^n, d_E) , on d_E és la distància euclidiana. Les *isometries euclidianes* són les isometries de l'espai \mathbb{E}^n , és a dir, les funcions de la forma $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ tals que $d_E(f(P), f(Q)) = d_E(P, Q)$ per a tot parell $P, Q \in \mathbb{E}^n$. Les isometries euclidianes formen un grup, que denotem per $\text{Eucl}(n)$.

Un *desplaçament* o *moviment* és una isometria d'un espai afí euclidià en ell mateix. En el pla euclidià, existeixen 4 tipus de desplaçaments:

- (i) La *identitat* és un desplaçament que deixa fixos tots els punts.
- (ii) La *translació* (o *desplaçament paral·lel*) de vector no nul és un desplaçament que no té punts fixos: sigui a un vector de \mathbb{E}^n , la funció $\tau_a: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, definida per la fórmula $\tau_a(x) = a + x$, s'anomena la *translació* de \mathbb{E}^n per a .
- (iii) La *rotació* al voltant d'un punt p és un desplaçament que té p com a punt fix, el qual s'anomena *centre*.
- (iv) La *reflexió* és un desplaçament on els punts fixos són els punts d'una varietat lineal, que anomenem *mirall*.

Tal i com es demostra a la pàgina 20 de [38], les isometries euclidianes es caracteritzen pel resultat següent:

Signi $\phi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ una funció. Aleshores són equivalents:

- (i) La funció ϕ és una isometria.
- (ii) La funció ϕ preserva distàncies.
- (iii) La funció ϕ és de la forma $\phi(x) = a + Ax$, on A és una matriu ortogonal i $a = \phi(0)$.

Equivalentment, tota isometria de \mathbb{E}^n és la composició d'una transformació ortogonal i una translació. Aquesta descomposició és única.

El *producte semidirecte* és una generalització del producte directe i es defineix de la manera següent:

Definició 1.2.1. Siguin G un grup, $H \triangleleft G$ i K un subgrup de G tal que $K \cap H = \{1\}$. Aleshores podem considerar la descomposició $G = KH$. Es diu que G és un *producte semidirecte* de K i H i es denota per $G = K \rtimes H = H \ltimes K$.

En el producte semidirecte podem definir l'operació següent: considerem les parelles $(k, h), (k', h') \in K \rtimes H$. Aleshores definim el seu producte semidirecte com

$$(k, h) \cdot (k', h') = (k + \alpha(h)(k'), hh'),$$

on α és l'acció definida per $h \cdot k = \alpha(h)(k)$.

Observem que si K també és un subgrup normal de G , aleshores tenim la descomposició de G en producte directe $G = K \times H$, és a dir, existeix una aplicació bijectiva $K \times H \rightarrow G$ definida per $(k, h) \mapsto kh$ tal que cada element $g \in G$ admet una única descomposició $g = kh$, on $k \in K$ i $h \in H$.

Proposició 1.2.2. $\text{Eucl}(n) = O(n) \rtimes T(n)$, on $O(n)$ és el grup ortogonal, \rtimes denota el producte semidirecte i $T(n)$ és el grup de translacions.

Demostració. Tota isometria euclidiana és una afinitat $X \mapsto AX + B$ en la qual l'endomorfisme associat A és ortogonal i B és el vector d'una translació. Si la denotem per (A, B) , llavors la composició $(A, B) \circ (A', B')$ és igual a $(AA', AB' + B)$. \square

Teorema 1.2.3 ([27]). *Tota isometria euclidiana $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ és una composició de rotacions, translacions i reflexions.*

Com a corol·lari d'aquest teorema tenim que tota isometria és una composició de reflexions.

El producte d'una reflexió en una línia i una translació al llarg de la mateixa línia s'anomena *reflexió de lliscament* o simplement, *lliscament*. També se l'anomena "pas d'ós", ja que recorda les petjades que deixa un ós quan camina.

Tota isometria de \mathbb{E}^2 és una translació, una rotació, una reflexió o una reflexió de lliscament.

Teorema 1.2.4 ([38]). *La funció $\phi: \mathbb{E}^n \times O(n) \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ definida per $\phi(a, A) = a + A$ és un homeomorfisme.*

Si tots els punts d'un grup topològic Γ són oberts, es diu que Γ és un *grup discret*. Equivalentment, Γ és discret si i només si $\{1\}$ és obert en Γ . Tot grup Γ pot esdevenir un grup discret donant a Γ la topologia discreta. Si G és un grup topològic amb una

topologia mètrica, aleshores cada subgrup discret de G és tancat a G . Com a corol·lari tenim que un subgrup Γ de $O(n)$ és discret si i només si Γ és finit.

Una isometria ϕ de \mathbb{E}^n és *el·líptica* si i només si ϕ fixa un punt de \mathbb{E}^n ; altrament ϕ és *parabòlica*. Si ϕ és una isometria parabòlica de \mathbb{E}^n , aleshores el subgrup Γ de $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ generat per ϕ és discret.

Si ϕ és una isometria el·líptica de \mathbb{E}^n , aleshores ϕ té un punt fix en \mathbb{E}^n i, per tant, ϕ és conjugada en $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ a un element en $O(n)$. En conseqüència, el subgrup generat per ϕ és discret si i només si ϕ té un ordre finit.

Un subconjunt R d'un espai mètric X és una *regió fonamental* d'un grup Γ d'isometries de X si i només si se satisfan les condicions següents:

- (i) El conjunt R és obert en X .
- (ii) Els elements de $gR : g \in \Gamma$ són mútuament disjunts.
- (iii) $X = \cup\{g\bar{R} : g \in \Gamma\}$

Un subconjunt D d'un espai mètric X és un *domini fonamental* per a un grup Γ d'isometries de X si i només si D és una regió fonamental connectada per Γ . Si un grup Γ d'isometries d'un espai mètric X té una regió fonamental, aleshores Γ és un subgrup discret de $\text{Iso}(X)$.

El conjunt $G = \{\text{Iso}(\mathbb{E}^n) \mid S \rightarrow S, S \subset \mathbb{E}^n\}$ és un grup perquè és el conjunt de transformacions de \mathbb{E}^n que preserven la distància i els punts de S . Aquest grup G s'anomena el *grup de simetries* de S . Compte de no confondre els termes “grup de simetries” i “grup simètric”. El *grup simètric* és un cas particular de grup de simetries per a un símplex: és el grup de totes les permutacions d'un conjunt X amb l'operació composició i es denota per $S(X)$. El grup simètric d'un conjunt finit $X = (X_1, \dots, X_n)$ es denota per S_n .

Una *tessel·lació* \mathcal{T} de \mathbb{E}^2 és una família numerable de conjunts tancats $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$ (anomenats *tessel·les* de \mathcal{T}) que cobreixen el pla euclidià \mathbb{E}^2 sense buits ni solapaments. Més explícitament:

- (i) La unió dels conjunts T_1, T_2, \dots és tot el pla.
- (ii) Els interiors dels conjunts T_1, T_2, \dots són disjunts dos a dos.

1.3 Varietats topològiques

Una *varietat topològica de dimensió n* o *n -varietat topològica* (sense vora) és un espai topològic X de Hausdorff que admet una base numerable d'oberts i tal que cada punt $x \in X$ té algun entorn obert homeomorf a un obert de \mathbb{R}^n .

Exemple 1.3.1. Exemples de varietats topològiques:

- (i) Una 1-varietat s'anomena *corba*.
- (ii) Una 2-varietat s'anomena *superfície*.
- (iii) Si X és una varietat, tot obert $V \subseteq X$ és una varietat de la mateixa dimensió.

- (iv) Si M és una varietat de dimensió m i N és una varietat de dimensió n , llavors el producte $M \times N$ és una varietat de dimensió $m + n$. En particular, el tor $S^1 \times S^1$ és una varietat compacta de dimensió 2.

Tota varietat topològica connexa de dimensió 1 és homeomorfa a \mathbb{R} o bé a S^1 , i tota varietat topològica connexa de dimensió 1 amb vora és homeomorfa a $[0, 1]$ o bé a $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Un espai mètric X és *finitament compacte* si i només si totes les seves boles tancades són compactes, això és, $\overline{B}_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ és compacte per a cada punt $x \in X$ i $r > 0$.

Teorema 1.3.2 ([38]). *Si X és un espai mètric finitament compacte, aleshores $\text{Iso}(X)$ és un grup topològic.*

Per a tot parell de números reals a i b tals que $a < b$, designarem per $[a, b]$ l'interval tancat de la recta real, d'extrems a i b . Un *camí* o *arc* en un espai topològic X és una aplicació contínua d'algun interval tancat en X . Les imatges dels extrems de l'interval s'anomenen *extrems* del camí o arc, i es diu que el camí *uneix* els seus extrems. A un dels extrems se l'anomena *origen* i a l'altre punt *final* (o simplement *extrem* si no hi ha confusió possible) del camí (està clar quin és l'un i quin és l'altre).

Un espai X s'anomena *arc-connex* o *connex per camins* si dos punts qualssevol de X es poden unir per un arc. Un espai arc-connex és connex, però el recíproc no és cert. Un espai és *localment arc-connex* si en cada punt existeix una base d'entorns arc-connexos (és anàloga a la definició d'espai localment connex).

Fins ara hem considerat camins els dominis dels quals siguin intervals tancats arbitraris. Admetent homeomorfismes lineals que conservin l'orientació entre dos de tals intervals, podem imposar que tots els camins siguin funcions definides sobre un interval fix, l'interval $[0, 1]$. Així, siguin $f : [0, 1] \rightarrow X$ i $g : [0, 1] \rightarrow X$ dos llaços de X tals que l'extrem de f coincideix amb l'origen de g , *producte* o *composició* $f * g$ de f i g com el camí donat per les equacions:

$$(f * g)t = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dos camins f i g són *homòtops* si tenen el mateix punt inicial x_0 i el mateix punt final x_1 , i si existeix una aplicació contínua $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$F(s, 0) = f(s) \quad \text{i} \quad F(s, 1) = g(s),$$

$$F(0, t) = f(x_0) \quad \text{i} \quad F(1, t) = x_1,$$

per a tot $s \in [0, 1]$ i tot $t \in [0, 1]$. L'aplicació F s'anomena *homotopia de camins* entre f i g . Si f és homòtop a g , escrivim $f \simeq g$. La relació \simeq és una relació d'equivalència.

La classe d'equivalència d'un camí f sota la relació d'equivalència d'homotopia es denota per $[f]$ i s'anomena la *classe d'homotopia* de f . L'operació producte sobre camins induïx una operació ben definida sobre les classes d'homotopia de camins, donada per la igualtat

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Sigui X un espai topològic i x_0 un punt de X . Un camí en X que comença i acaba en x_0 s'anomena *llaç* en x_0 . Els camins $f : [0, 1] \rightarrow X$ tals que l'origen i el final són el mateix punt $f(0) = f(1) = x_0 \in X$ s'anomenen *llaços*, i el punt en comú s'anomena *punt base*. El conjunt de les classes d'homotopia de camins associades als llaços en x_0 , amb l'operació $*$, s'anomena *grup fonamental* de X relatiu al *punt base* x_0 . Es denota per $\pi_1(X, x_0)$ i també se'l coneix com a *primer grup d'homotopia* de X .

Un espai X és *simplement connex* si és connex per camins i $\pi_1(X, x_0)$ és el grup trivial per a algun $x_0 \in X$ i, per tant, per a tot $x_0 \in X$. Normalment, el fet que $\pi_1(X, x_0)$ sigui el grup trivial s'escriu com $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Una col·lecció \mathcal{A} de subconjunts d'un espai topològic X *recobreix* X (o és un *recobriments* de X) si la unió dels elements de \mathcal{A} coincideix amb X . Si els subconjunts són oberts, es diu que \mathcal{A} és un *recobriments obert* de X .

Sigui $f : A \rightarrow B$ una aplicació contínua i exhaustiva. Un conjunt obert U de B està *recobert regularment* o *recobert uniformement* per f si la imatge inversa $f^{-1}(U)$ es pot escriure com una unió disjunta de conjunts oberts V_α de A tals que, per a cada α , la restricció de f a V_α és un homeomorfisme de V_α en U . La col·lecció $\{V_\alpha\}$ és una partició de $f^{-1}(U)$ en *llesques*. Si tot punt b de B té un entorn U que està regularment recobert per f , aleshores f és una *aplicació recobridora* i A és un *espai recobridor* de B . Sigui $p : E \rightarrow B$ una aplicació recobridora, amb B connex. Si $p^{-1}(b_0)$ té k elements per algun $b_0 \in B$, aleshores $p^{-1}(b)$ té k elements per a tot $b \in B$. Es diu que E és un *recobridor de k fulls* de B .

Suposem que $p : E \rightarrow B$ és una aplicació recobridora amb $p(e_0) = b_0$, on E i B són localment connexos per camins i connexos per camins. Si E és simplement connex, aleshores E s'anomena *espai recobridor universal* de B . És únic llevat d'isomorfisme, per tant, podem parlar "del" recobridor universal.

Un espai B es diu *semilocalment simplement connex* si per a cada $b \in B$, existeix un entorn U de b tal que l'homomorfisme $i_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ induït per la inclusió és trivial.

Teorema 1.3.3 ([36]). *L'espai B té un espai recobridor universal si i només si B és connex per camins, localment connex per camins i semilocalment simplement connex.*

Capítol 2

Grups cristal·logràfics

En aquest capítol definim els grups cristal·logràfics i introduïm els teoremes de Bieberbach, que ens serviran de pont entre la geometria i l'àlgebra. Hem seguit principalment les referències següents: [22, 46, 47, 51, 53].

2.1 En dimensió arbitrària

Els grups cristal·logràfics viuen en el món de la geometria euclidiana, així que considerarem l'espai \mathbb{R}^n i el grup de les isometries euclidianes $\text{Eucl}(n)$.

Definició 2.1.1. Un *grup cristal·logràfic* n -dimensional és un grup discret Γ d'isometries de \mathbb{R}^n tal que \mathbb{R}^n/Γ és compacte.

Aquesta definició segueix la intuïció del que és un cristall: “Discret” significa que no hi ha punts d'acumulació en l'òrbita d'un punt, és a dir, que el patró del cristall no se sobreposa; i el fet que el quocient sigui compacte significa que existeix un domini fonamental compacte, és a dir, el patró està delimitat i es repeteix fins que omple l'espai.

L'estudi d'estructures cristal·logràfiques s'anomena *cristal·lografia*. A finals del segle dinou, els cristal·lografs havien classificat els grups cristal·logràfics 1-, 2- i 3- dimensionals. Per a cadascuna d'aquestes dimensions, es va determinar que només hi ha un nombre finit de tipus essencialment diferents de grups cristal·logràfics. Això va portar a Hilbert a preguntar-se, en el problema 18 de la seva famosa llista de problemes, si només hi ha un nombre finit de tipus essencialment diferents de grups cristal·logràfics en cada dimensió. Aquest problema va ser respost positivament per L. Bieberbach el 1910 ja que va demostrar a [5] que només hi ha un nombre finit de classes d'isomorfismes de grups cristal·logràfics n -dimensionals, per a cada n .

Tal i com s'explica a [35], els grups cristal·logràfics de dimensió 2 van ser classificats per primera vegada a la dècada del 1890 per Fedorov i els de dimensió 3 van ser classificats més tard per Fedorov, Schönflies i Barlow.

Avui dia se sap que per a dimensió $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, existeixen

$$2, 17, 219, 4.784, 22.018, 28.927.922$$

grups cristal·logràfics respectivament. Les tres darreres quantitats han estat calculades amb ajuda computacional.

2.1.1 Teoremes de Bieberbach

Bieberbach va donar una resposta completa al problema 18 de Hilbert mitjançant la seva teoria de les estructures per a grups cristal·logràfics, avui coneguda com els tres teoremes de Bieberbach:

Teorema 2.1.2 (Primer Teorema de Bieberbach). *Un grup cristal·logràfic n -dimensional conté n translacions linealment independents i el grup de rotacions és finit.*

Teorema 2.1.3 (Segon Teorema de Bieberbach). *Tot isomorfisme entre dos grups cristal·logràfics n -dimensionals es pot obtenir a partir d'un canvi de coordenades afí.*

Teorema 2.1.4 (Tercer Teorema de Bieberbach). *Per a una dimensió n fixada, existeix un nombre finit de classes d'isomorfismes de grups cristal·logràfics n -dimensionals.*

A [10] hi ha una demostració de caire geomètric i per a una demostració moderna, vegeu L. S. Charlap [11].

En conseqüència, tenim un pont entre la geometria i l'àlgebra i podem caracteritzar els grups cristal·logràfics de manera algebraica:

Proposició 2.1.5. *Un grup discret Γ d'isometries de \mathbb{R}^n és un grup cristal·logràfic si i només si Γ conté translacions en dues direccions linealment independents.*

Un *grup de Bieberbach* és un grup cristal·logràfic lliure de torsió. Hi ha autors que als grups cristal·logràfics també els anomenen grups de Bieberbach, sense fer-ne distinció.

2.2 En dimensió 2

Un *grup de simetries* d'un subconjunt S d'un espai mètric X és el grup de totes les isometries de X que deixen invariant S . Els grups de simetries en el pla euclidià es classifiquen en:

- (i) Grups de rosetes: subgrups discrets de \mathbb{R}^2 que tenen subgrup de translació trivial $T = \{1\}$, és a dir, no contenen translacions.
- (ii) Grups de frisos: subgrups discrets de \mathbb{R}^2 que tenen translacions en una única direcció.
- (iii) Grups cristal·logràfics: subgrups discrets de \mathbb{R}^2 que contenen translacions en dues direccions linealment independents.

Els grups de les rosetes es classifiquen en dos tipus, cíclics o dièdrics, i es denoten, respectivament, per C_k o D_k , on k és l'ordre de rotació. Això és degut al teorema següent:

Teorema 2.2.1. *Si Γ és un subgrup finit de $O(2)$, aleshores o bé Γ és un grup cíclic $\Gamma \cong \mathbb{Z}_k$ o bé és un grup dièdric $\Gamma \cong D_k$.*

La demostració d'aquest teorema clàssic es pot trobar en diverses referències, entre elles [1].

Segons Hermann Weyl [52], Leonardo da Vinci va participar en la determinació sistemàtica de les possibles simetries d'un edifici central i de com adjuntar capelles i nínxols

sense destruir la simetria del nucli. En terminologia moderna abstracta, el seu resultat és essencialment una classificació dels possibles grups finits de rotacions (pròpies i impròpies) en dues dimensions. Per això, aquest teorema també es coneix com a teorema de Leonardo da Vinci.

En els grups cíclics només hi ha rotacions mentre que en els dièdrics, hi ha rotacions i reflexions.

Els grups dels frisos es classifiquen en 7 tipus, és a dir, només hi ha 7 maneres de repetir un patró en una tira o cinta. Els desplaçaments que es poden donar en aquests grups han de deixar fixa la recta que passa pel centre del fris, per tant, els únics desplaçaments que es poden donar són els següents:

- (i) Rotacions de centre un punt de la recta del centre i angle de 180° .
- (ii) Reflexions respecte de la recta del centre.
- (iii) Reflexions respecte de les rectes perpendiculars a la recta del centre.
- (iv) Reflexions de lliscament amb eix la recta del centre i lliscament en la direcció d'aquesta mateixa recta.
- (v) Translacions en la direcció de la recta del centre.

Els grups dels frisos es denoten per F_n^m , on n és l'ordre de les rotacions i m indica si el grup conté reflexions: val 1 si l'eix de reflexió és paral·lel a la direcció de translació, 2 si l'eix de reflexió és perpendicular a la direcció de translació i val 3 si té reflexions de lliscament. Per classificar un grup de fris donat, podem seguir l'esquema (2.1).

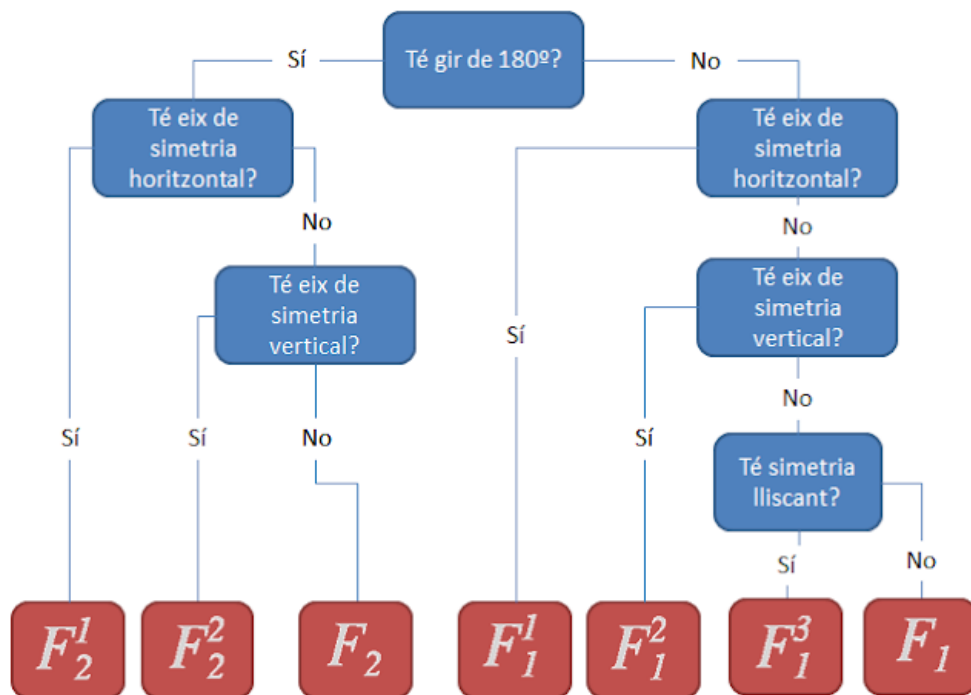


Figura 2.1: Diagrama classificació dels grups dels frisos. Simetria equival a reflexió. Foto de [23].

Els grups cristal·logràfics de dimensió 2 se'ls coneix també com a *grups de paper pintat* (*wallpaper groups* en anglès). En el capítol 4 els classificarem amb la teoria que haurem desenvolupat de les orbificies, però també es poden classificar a partir dels grups puntuals, els reticles i la restricció cristal·logràfica.

Teorema 2.2.2 (Restricció cristal·logràfica). *Els únics ordres possibles d'una operació de simetria rotacional d'un reticle són 2, 3, 4 i 6.*

La demostració d'aquest teorema clàssic es pot trobar en diverses referències, entre elles [1].

De manera semblant als grups de frisos, per classificar un grup cristal·logràfic donat, podem seguir l'esquema (2.2):

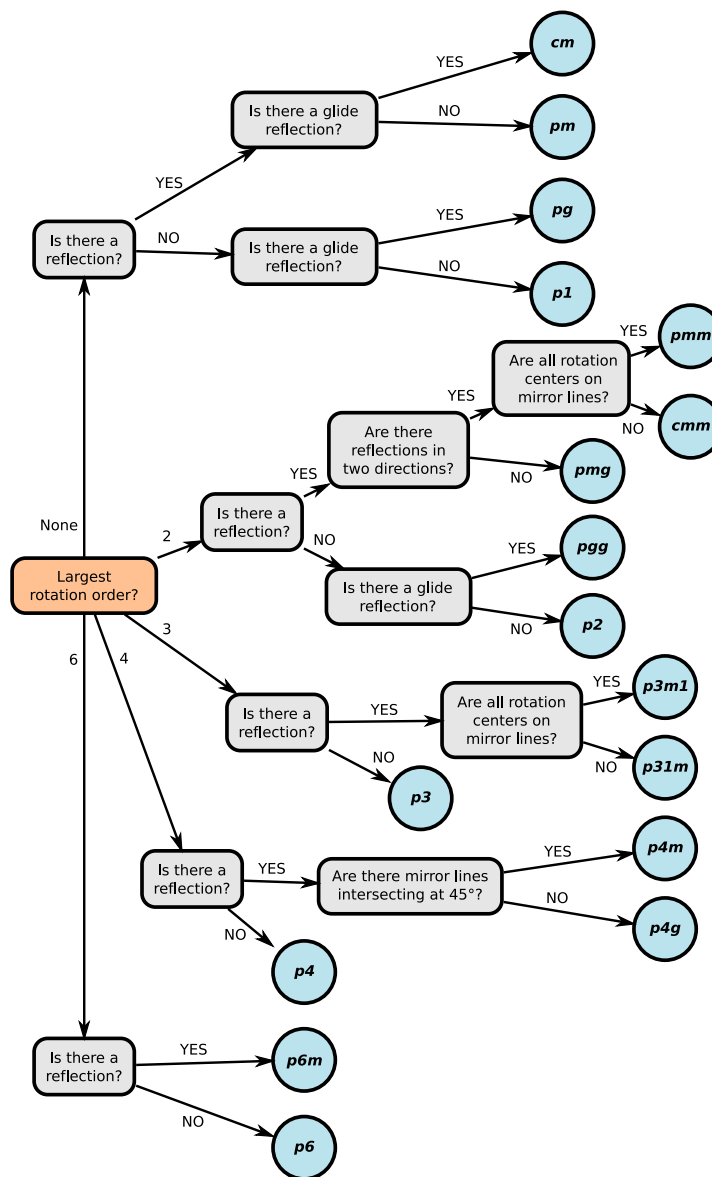


Figura 2.2: Diagrama classificació dels grups cristal·logràfics del pla. Foto de [30].

Capítol 3

Orbíficies

“This terminology should not be blamed on me. It was obtained by a democratic process in my course of 1976-77. An orbifold is something with many folds; unfortunately, the word ‘manifold’ already has a different definition. I tried ‘foldamani,’ which was quickly displaced by the suggestion of ‘manifolded.’ After two months of patiently saying ‘no, not a manifold, a manifolded,’ we held a vote, and ‘orbifold’ won.”

W. Thurston (1978-1979)

Ens endinsem en el món de les orbíficies, tot donant-ne la definició i propietats importants. També expliquem els models locals que poden tenir les orbíficies de dimensió 1 i 2, així com una classificació d’aquestes. Ens han sigut d’especial ajuda les referències següents: [6, 12, 13, 16, 28, 31, 32, 43].

3.1 Definició i exemples

El concepte d’orbifície estén de manera natural la noció de varietat; per això recordem aquí la definició de varietat i poder veure’n el paral·lelisme.

Definició 3.1.1. Una *varietat topològica de dimensió n* o *n -varietat topològica* (sense vora) és un espai topològic M de Hausdorff que admet una base numerable d’oberts i tal que cada punt $p \in M$ té algun entorn obert homeomorf a un obert de \mathbb{R}^n .

Sigui M una n -varietat topològica.

- (i) Una *carta local* a M és un parell (U, φ) , on U és un obert de M i φ és un homeomorfisme de U en un obert de \mathbb{R}^n . Llavors φ es denota per $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, on cada x_i és una aplicació $U \rightarrow \mathbb{R}$. Aquestes aplicacions x_1, \dots, x_n s’anomenen *coordenades locals*.
- (ii) Si (U_1, φ_1) i (U_2, φ_2) són dues cartes locals i $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, llavors l’homeomorfisme $\phi: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ definit com $\phi(x) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$ s’anomena *aplicació de canvi de coordenades*.
- (iii) Una col·lecció de cartes locals $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in A}$ tals que $\cup_{\lambda \in A} U_\lambda = M$ s’anomena un *atles*.

- (iv) Un atlas $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ s'anomena *diferenciable* (en el sentit de classe \mathcal{C}^∞) si $\varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ és una funció de classe \mathcal{C}^∞ (és a dir, cadascuna de les components de $\varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1}$ té derivades parcials de tots els ordres en tots els punts del seu domini) per a cada parell $i, j \in J$ tals que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.
- (v) Dos atlas diferenciables $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ són *equivalents* si la seva unió $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ és un atlas diferenciable.
- (vi) Tota estructura diferenciable determina un únic *atles maximal*, que és la unió de tots els atlas que formen la classe d'equivalència donada.

Definició 3.1.2. Una *n-varietat topològica diferenciable* és un parell $(M, [\mathcal{U}])$, on M és una varietat topològica de dimensió n i $[\mathcal{U}]$ és una classe d'equivalència d'atles diferenciables a M . Normalment denotarem una varietat diferenciable només per M , sense especificar l'estructura diferenciable.

L'espai \mathbb{R}^n té un atlas amb una única carta local $(\mathbb{R}^n, \text{id})$. L'esfera S^n és una varietat compacta de dimensió n i té un atlas amb dues cartes locals.

Les orbificies (*orbifolds* en anglès) es defineixen de manera anàloga:

Definició 3.1.3. Una *orbificie* de dimensió n o *n-orbificie* (sense vora) \mathcal{O} és un espai topològic $X_{\mathcal{O}}$ de Hausdorff que admet una base numerable d'oberts i localment homeomorf a l'espai quocient de \mathbb{R}^n per l'acció d'un grup finit.

$X_{\mathcal{O}}$ és l'espai subjacent de l'orbificie \mathcal{O} , i també es pot denotar per $|\mathcal{O}|$. Diem que \mathcal{O} està basada en $X_{\mathcal{O}}$. Una orbificie té una determinada propietat topològica si el seu espai subjacent la té. Sigui \mathcal{O} una *n-orbificie* topològica. Tenim les definicions següents:

- (i) Una *carta d'orbificie* en $X_{\mathcal{O}}$ és una quaterna $(U, \tilde{U}, \phi, \Gamma)$, on:
 - U és un subconjunt obert de $X_{\mathcal{O}}$.
 - $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ és obert i Γ és un grup finit d'homeomorfismes de \tilde{U} .
 - $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ és una funció Γ -invariant que indueix un homeomorfisme $U \cong \tilde{U}/\Gamma$.
- (ii) Dues cartes d'orbificies $\{(U_1, \tilde{U}_1, \phi_1, \Gamma_1)\}$ i $\{(U_2, \tilde{U}_2, \phi_2, \Gamma_2)\}$ són *compatibles* si donats dos punts $\tilde{u}_i \in \tilde{U}_i$ amb $\phi_1(\tilde{u}_1) = \phi_2(\tilde{u}_2)$, existeix un homeomorfisme h d'un entorn de \tilde{u}_1 en \tilde{U}_1 a un entorn de \tilde{u}_2 en \tilde{U}_2 tal que $\phi_1 = \phi_2 \circ h$ en aquest entorn.
- (iv) Un *atles d'orbificie* és una col·lecció de cartes d'orbificies $\{(U_i, \tilde{U}_i, \phi_i, \Gamma_i)\}_{i \in I}$ compatibles tals que $\cup_{i \in I} U_i = X_{\mathcal{O}}$.

Definició 3.1.4. Una *n-orbificie diferenciable* \mathcal{O} és un espai topològic de Hausdorff $X_{\mathcal{O}}$ amb un atlas d'orbificie $\{(U_i, \tilde{U}_i, \phi_i, \Gamma_i)\}$ maximal.

Notem que aquesta definició estén la clàssica definició d'una varietat, ja que una orbificie \mathcal{O} és una varietat si tots els grups Γ_i són trivials.

Exemple 3.1.5. Exemples d'orbificies:

- (i) Mirall: Considerem l'acció de \mathbb{Z}_2 sobre \mathbb{R}^3 donada per una reflexió respecte el pla $\{x = 0\}$. Els punts amb $x \neq 0$ tenen estabilitzador trivial, mentre que els punts amb $x = 0$, el seu estabilitzador és \mathbb{Z}_2 . El quocient és l'hiperplà positiu $\mathbb{H}^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_2$.

- (ii) Barberia: Siguin $M = \mathbb{R}^3$ i G el grup generat per les reflexions respecte els plans $x = 0$ i $x = 1$, és a dir, $G \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. L'espai quocient és $M/G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Físicament és anàleg a dos miralls en dues parets paral·leles, fet comú en les perruqueries.
- (iii) Taula de billar: Considerem quatre línies sobre \mathbb{R}^2 formant un rectangle R i sigui G el grup d'isometries de \mathbb{R}^2 generat per reflexions respecte d'aquestes línies. Aleshores G és isomorf a $(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)$ i el quocient és R . El model físic és una taula de billar.

Recordem que dos espais mètrics $(X, d_X), (Y, d_Y)$ són *localment isomètrics* si tot $x \in X$ té un entorn isomètric a un conjunt obert en Y i que els espais localment isomètrics a l'espai euclidià es diuen que són *plans*.

Utilitzant la noció d'isometria, obtenim les definicions següents:

Definició 3.1.6. (i) Una *varietat plana* és un espai mètric localment isomètric a \mathbb{R}^n .

- (ii) Una *orbifície plana* és un espai mètric localment isomètric a \mathbb{R}^n/Γ , on $\Gamma \subset O(n)$ és un grup finit d'isometries lineals. Recordem que $O(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^t A = \text{Id}\}$ és el grup ortogonal de les matrius $n \times n$.

Proposició 3.1.7. Si M és una varietat i Γ és un grup que actua lliurement i de manera pròpiament discontinua sobre M , aleshores M/Γ té una estructura d'una varietat.

Si prescindim de la condició d'acció lliure, obtenim la versió per a les orbifícies:

Proposició 3.1.8. Si M és una varietat i Γ és un grup que actua de manera pròpiament discontinua sobre M , aleshores M/Γ té una estructura d'una orbifície.

Demostració. Considerem la projecció $\pi: M \rightarrow M/\Gamma$. Prenem els punts $x \in M/\Gamma$ i $\tilde{x} \in M$ tal que $\pi(\tilde{x}) = x$. Sigui per $\Gamma_{\tilde{x}} = \{\gamma(\tilde{x}) = \tilde{x} \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \Gamma$ l'estabilitzador de \tilde{x} , és a dir, el subgrup de Γ que deixa \tilde{x} invariant.

Com que Γ és un grup que actua de manera pròpiament discontinua sobre M , existeix un entorn obert \tilde{U}_x de \tilde{x} invariant per $\Gamma_{\tilde{x}}$ i disjunt dels seus oberts traslladats pels elements $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_{\tilde{x}}$:

$$\gamma(\tilde{U}_x) \cap \tilde{U}_x = \emptyset \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_{\tilde{x}}.$$

Per tant, el quocient $\tilde{U}_x/\Gamma_{\tilde{x}}$ és homeomorf a un entorn obert U_x del punt $x \in M/\Gamma$ i, aleshores, U_x té una estructura d'una orbifície.

Per estendre aquest raonament a l'espai quocient M/Γ , cal obtenir un recobriment de M/Γ adequat: prenem el recobriment $\{U_x\}$ obtingut d'adjuntar interseccions finites. En particular, sempre que $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k} \neq \emptyset$, existiran elements de $\gamma_i \in \Gamma$ tals que $\gamma_1 \tilde{U}_{x_1} \cap \dots \cap \gamma_k \tilde{U}_{x_k} \neq \emptyset$. Aquesta intersecció hereta una estructura d'orbifície $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k}$ en la que actua el grup $\gamma_1 \Gamma_{x_1} \gamma_1^{-1} \cap \dots \cap \gamma_k \Gamma_{x_k} \gamma_k^{-1}$. \square

Com a conseqüència de la proposició anterior s'obté que una orbifície té un únic punt per a cada òrbita del grup sobre la varietat (*orbifold = orbit-manifold*).

Proposició 3.1.9. Si Γ és un subgrup discret de $\text{Eucl}(n)$, aleshores Γ actua de manera pròpiament discontinua sobre \mathbb{R}^n .

Demostració. Considerem un punt $x \in \mathbb{R}^n$. Escollim un $\varepsilon > 0$ qualsevol i considerem el conjunt $\{g_i\}$ d'elements de G tals que $g_i(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Aleshores $g_i(x) \in B_{2\varepsilon}(x)$ per a tot i . Suposem que aquest conjunt $\{g_i\}$ és infinit. Com que tota bola és acotada i la seva adherència és compacta, el conjunt $\{g_i(x)\}$ ha de tenir algun punt d'acumulació a $\overline{B_{2\varepsilon}(x)}$. Això contradiu el fet que Γ sigui un grup discret d'isometries. \square

Amb les dues darreres proposicions i tenint en compte la definició de grup cristal·logràfic (2.1.1), podem concloure que el quocient \mathbb{R}^n/Γ , on Γ és un grup cristal·logràfic, té una estructura d'orbificie. En el capítol 4 veurem que el recíproc per a dimensió 2 també és cert: tota orbificie parabòlica té associada un grup cristal·logràfic del pla.

3.2 Propietats de les orbífícies

Grup local

Sigui $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ una carta amb $x \in U$. Un *grup local* de \mathcal{O} en $x \in \mathcal{O}$ és el grup Γ_x definit com l'estabilitzador de tot punt de $\phi^{-1}(x)$ sota l'acció de Γ . Està ben definit llevat d'isomorfisme. Si Γ_x és trivial, diem que x és *regular*, sinó, diem que és *singular*. L'*espai singular* és el conjunt $\sum_{\mathcal{O}}$ de punts singulars de \mathcal{O} :

$$\sum_{\mathcal{O}} = \{x : \Gamma_x \neq \{1\}\}.$$

Observem que $\sum_{\mathcal{O}} = \emptyset$ si i només si \mathcal{O} és una varietat. Una orbificie que té un espai singular buit s'anomena *no singular* o *varietat*.

Recobriments

Un *recobriment* d'una orbificie \mathcal{O} és una orbificie $\tilde{\mathcal{O}}$ junt amb una projecció $p : X_{\tilde{\mathcal{O}}} \rightarrow X_{\mathcal{O}}$ entre els espais subjacents tal que cada punt $x \in X_{\mathcal{O}}$ té un entorn $U = \tilde{U}/\Gamma$, on \tilde{U} és un subconjunt obert de \mathbb{R}^n , per al qual cada component v_i de $p^{-1}(U)$ és isomorf a \tilde{U}/Γ_i , on $\Gamma_i \subset \Gamma$ per algun subgrup. L'isomorfisme ha de respectar la projecció. La projecció és un recobriment ramificat des del punt de vista de les varietats de Riemann. Des del punt de vista de les orbífícies, la projecció és un recobriment.

Siguin \mathcal{O} i \mathcal{O}' dues orbífícies i $p : |\mathcal{O}| \rightarrow |\mathcal{O}'|$ una funció contínua. La funció p s'anomena *funció de recobriment* entre les orbífícies \mathcal{O} i \mathcal{O}' si satisfà la propietat següent: per a tot punt $x \in |\mathcal{O}|$, existeix una carta $U = \tilde{U}/\Gamma_x$ tal que per a tot component V_i de $p^{-1}(U)$, la funció restringida $p : V_i \rightarrow U$ és una funció quocient d'un difeomorfisme equivariant $h_i : \tilde{V}_i \rightarrow \tilde{U}$. Si $y_i = p^{-1}(x) \cap V_i$, aleshores h_i conjuga l'acció de Γ_{y_i} sobre \tilde{V}_i a l'acció d'un subgrup de Γ_x sobre \tilde{U} .

Un *recobriment universal* $p : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ de l'orbificie \mathcal{O} és un recobriment tal que per a qualsevol altre recobriment $p' : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$, existeix un recobriment $\tilde{p} : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}'$ tal que $p' \circ \tilde{p} = p$. Si $p : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ és el recobriment universal, aleshores l'orbificie $\tilde{\mathcal{O}}$ s'anomena *l'espai recobridor universal* de \mathcal{O} . Per abús de notació, també farem servir \mathcal{O} per referir-nos al recobridor universal.

Definició 3.2.1. Una orbificie és *bona* o *desenvolupable* si està recoberta per una varietat o , de manera equivalent, si el seu recobridor universal és una varietat i és *molt bona* si

admet un recobriment finit per una varietat. Si el recobridor no és una varietat, es diu que és una orbifície *dolenta* o *no desenvolupable*.

Les nocions bàsiques per a varietats (funcions, homotopia, isotropia, recobriments, grup fonamental...) es poden estendre a la categoria d'orbifícies. En el cas de les orbifícies bones, aquestes nocions corresponen a les nocions equivariants del recobridor universal, el qual és una varietat.

Proposició 3.2.2. *Tota orbifície \mathcal{O} té un recobridor universal $\tilde{\mathcal{O}}$.*

La demostració d'aquesta proposició es pot trobar a [49].

El recobriment universal d'orbifície $\tilde{\mathcal{O}}$ també se'l coneix com a *recobriment ramificat universal*. Quan els espais subjacents són varietats, un recobriment d'una orbifície induïx un recobriment ramificat de les varietats subjacents.

El grup $\text{Deck}(p)$ de *transformacions recobridores* del recobriment d'orbifície $p : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$ és el grup d'autodifeomorfismes $h : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}'$ tals que $p \circ h = p$.

Grup fonamental

Els grups fonamentals de les orbifícies es poden calcular de manera semblant als grups fonamentals de les varietats:

Definició 3.2.3. El *grup fonamental* $\pi_1(\mathcal{O})$ d'una orbifície \mathcal{O} és el grup de les transformacions recobridores del recobridor universal $\tilde{\mathcal{O}}$.

Com a conseqüència de la definició, obtenim que $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}/\pi_1(\mathcal{O})$.

Una definició alternativa del grup fonamental basada en les classes d'homotopia dels llaços de \mathcal{O} es troba a [38].

Orientabilitat

L'orientabilitat de les orbifícies és semblant a la de les varietats, però cal afegir-hi la noció local, ja que les orbifícies poden ser localment no orientables si el grup local actua amb funcions que inverteixen l'orientació.

Definició 3.2.4. Una orbifície és *orientable* si satisfà les condicions següents:

- (i) Tots els encabiments en l'atles preserven l'orientació.
- (ii) Tots els grups locals Γ que actuen en la carta \tilde{U} preserven l'orientació.

Característica d'Euler

Recordem que tot complex simplicial finit K té característica d'Euler $\mathcal{X}(K)$, i si α_i denota el nombre de i -símplexs sobre K , aleshores tenim la igualtat següent:

$$\mathcal{X}(K) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \alpha_i.$$

A partir d'aquesta definició, és obvi que si \tilde{K} és un espai recobridor amb n fulls de K , aleshores $\mathcal{X}(\tilde{K}) = n \cdot \mathcal{X}(K)$.

Definició 3.2.5. Donada una orbifície \mathcal{O} , sigui K un complex cel·lular de \mathcal{O} tal que $\sum_{\mathcal{O}}$ és un subcomplex i el grup local és constant entre cada cel·la. Aleshores la *característica d'Euler* de \mathcal{O} es defineix per:

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}) = \sum_{\Delta} (-1)^{\dim(\Delta)} \frac{1}{|\Gamma_e|}$$

on la suma és sobre les cel·les de K i $|\Gamma_{\Delta}|$ denota l'ordre del grup local de la cel·la Δ .

Observem que la característica d'Euler és multiplicativa respecte els recobriments i que estén la definició usual per a varietats.

Proposició 3.2.6. *Sigui $p: \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$ una recobriments d'orbifície de r fulls. Aleshores $\mathcal{X}(\mathcal{O}') = r\mathcal{X}(\mathcal{O})$.*

La demostració d'aquesta proposició es pot trobar a [49].

Teorema 3.2.7 (Riemann-Hurwitz formula). *Sigui \mathcal{O} una 2-orbifície bona compacta amb espai subjacent $X_{\mathcal{O}}$, amb l punts cònics d'angle $\frac{2\pi}{n_i}$, $1 \leq i \leq l$ i amb k cantons d'angle $\frac{\pi}{m_j}$, $1 \leq j \leq k$. Aleshores se satisfà la igualtat següent:*

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}) = \mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) - \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right).$$

Demostració. Aquesta demostració segueix l'article de P. Scott [43]. Suposem que \mathcal{O} és una 2-orbifície bona compacta amb espai subjacent $X_{\mathcal{O}}$ i l punts cònics d'angle $\frac{2\pi}{n_i}$, $1 \leq i \leq l$ (no té cantons). Siguin D_1, \dots, D_l 2-discs disjunts en $X_{\mathcal{O}}$, cadascun amb un dels punts cònics i sigui W la clausura del complement de la unió dels discs D_i . Aleshores $X_{\mathcal{O}} = W \cup (\cup_i D_i)$. Com que $\mathcal{X}(D_i) = 1$ i $\mathcal{X}(S) = 1$, obtenim que $\mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) = \mathcal{X}(W) + l$. Com que \mathcal{O} és bona, té un recobriments d'orbifície finit $\tilde{\mathcal{O}}$ sense singularitats. Denotem per \tilde{W} la preimatge en $\tilde{\mathcal{O}}$ de W . La projecció $\tilde{W} \rightarrow W$ és una funció recobridora de grau d . Aleshores, $\mathcal{X}(\tilde{W}) = d \cdot \mathcal{X}(W)$ i, per tant, la preimatge en $\tilde{\mathcal{O}}$ de D_i són $\frac{d}{n_i}$ discs. En conseqüència,

$$\mathcal{X}(\tilde{\mathcal{O}}) = d \cdot \mathcal{X}(W) + \sum_{i=1}^l \frac{d}{n_i} \quad \Leftrightarrow \quad d \cdot \mathcal{X}(\mathcal{O}) = d \cdot \mathcal{X}(W) + \sum_{i=1}^l \frac{d}{n_i},$$

on hem utilitzat que, per definició, $\mathcal{X}(\tilde{\mathcal{O}}) = d \cdot \mathcal{X}(\mathcal{O})$. Dividint l'equació per d i substituint $\mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) = \mathcal{X}(W) + l \Leftrightarrow \mathcal{X}(W) = \mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) - l$, obtenim que

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}) = \mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) - \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right).$$

Suposem ara que \mathcal{O} també té k cantons d'angle $\frac{\pi}{m_j}$, $1 \leq j \leq k$. Denotem per $D\mathcal{O}$ l'orbifície obtinguda en duplicar \mathcal{O} al llarg dels eixos de simetria i denotem per $DX_{\mathcal{O}}$ el seu espai subjacent. Aleshores $D\mathcal{O}$ és un recobriments d'orbifície de 2 fulls de \mathcal{O} i $D\mathcal{O}$ té l parells de punts cònics d'angle $\frac{2\pi}{n_i}$, $1 \leq i \leq l$ i k cantons d'angle $\frac{\pi}{m_j}$, $1 \leq j \leq k$. Pel cas anterior, tenim que

$$\mathcal{X}(D\mathcal{O}) = \mathcal{X}(DX_{\mathcal{O}}) - 2 \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) - \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

Com que $\mathcal{X}(D\mathcal{O}) = 2\mathcal{X}(\mathcal{O})$ i $\mathcal{X}(DX_{\mathcal{O}}) = 2\mathcal{X}(X_{\mathcal{O}})$, obtenim que

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}) = \mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) - \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right).$$

Això acaba la demostració. \square

Aquesta fórmula també la podem utilitzar per a definir la característica d'Euler d'una orbifície dolenta. Per exemple, l'orbifície llàgrima $S^2(p)$ té característica d'Euler igual a $2 - (1 - \frac{1}{p}) = 1 + \frac{1}{p}$. Així podem comprovar que, efectivament, aquesta orbifície no es pot recobrir amb una varietat (de fet, no es pot recobrir amb cap altre orbifície) doncs no és un nombre enter.

Una *mètrica Riemanniana* sobre una orbifície \mathcal{O} és un conjunt de mètriques Riemanni-anes sobre un recobriment de \mathcal{O} per cartes que uniformen, tal que el grup local d'accions sobre les cartes són per isometries i funcions de transició.

Per dimensió 2, tenim el resultat següent:

Proposició 3.2.8 (Gauss-Bonnet). *Sigui F una 2-orbifície tancada dotada d'una mètrica Riemanniana amb curvatura de Gauss K . Aleshores:*

$$\int_F K = 2\pi\mathcal{X}(F).$$

Observem que la definició de curvatura de Gauss és clara sobre punts no singulars. Com que \sum_F té mesura zero, és suficient per aquest treball. També es pot definir la curvatura sobre punts singulars, utilitzant el fibrat tangent d'orbifície.

La demostració d'aquesta proposició es pot trobar a [49].

3.3 Models locals d'orbifícies de dimensió baixa

Per simplificar, a partir d'ara, considerarem que totes les varietats i mètriques són diferenciables per a que els objectes d'interès estiguin en varietats Riemannianes.

Tenim un model local per a les varietats topològiques i les orbifícies.

Varietats planes de dimensió 1

Recordem que tota varietat topològica connexa de dimensió 1 és homeomorfa a \mathbb{R} o bé a S^1 , i tota varietat topològica connexa de dimensió 1 amb vora és homeomorfa a $[0, 1]$ o bé a $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Varietats planes de dimensió 2

- (i) El tor T .
- (ii) L'ampolla de Klein K .

Per enumerar les orbifícies planes, ens cal veure què pot ser Γ , és a dir, cal interpretar la classificació dels subgrups de $O(n)$ en termes d'orbifícies descrivint els espais quocients i la informació d'isotropia.

Orbificies planes de dimensió 1

En dimensió 1, els models locals per les orbificies estan donats pels subgrups finits de $O(1)$. Hi ha dos models de subgrups finits de $O(1)$: punts regulars (amb grup local trivial) i punts singulars amb grup local \mathbb{Z}_2 que actua per reflexió $\mathbb{R} \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}$. Aleshores només existeixen, llevat d'homeomorfisme, dues orbificies 1-dimensionals tancades. Ambdues són esfèriques: el cercle \mathbb{S}^1 , que és orientable, i l'orbificie no-orientable $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$, on \mathbb{Z}_2 actua mitjançant una reflexió per l'eix X (pensant \mathbb{S}^1 com el cercle unitat en \mathbb{R}^2). Aquesta darrera orbificie s'anomena *interval reflectit*; el seu espai subjacent és l'interval tancat $[0, 1]$ i els seus punts singulars són els extrems.

Orbificies planes de dimensió 2

Per dimensió 2, ens cal recordar el resultat següent:

Teorema 3.3.1. *Si Γ és un subgrup finit de $O(2)$, aleshores o bé Γ és un grup cíclic $\Gamma \cong \mathbb{Z}_k$ o bé és un grup dièdric $\Gamma \cong D_k$, on k és l'ordre de rotació.*

Tot subgrup finit de $O(2)$ és d'un dels tipus següents:

- (i) Un grup cíclic C_n d'ordre n generat per una rotació d'angle $\frac{2\pi}{n}$.
- (ii) Un grup de reflexions R d'ordre 2 generat per una reflexió respecte d'una recta.
- (iii) Un grup dièdric D_{2n} d'ordre $2n$, generat per dues reflexions respecte rectes que formen un angle de $\frac{\pi}{n}$.

En conseqüència, tenim els models locals següents:

Proposició 3.3.2. *L'espai singular d'una 2-orbificie segueix un dels models locals següents (3.1):*

- (i) *El mirall: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2$, on \mathbb{Z}_2 actúa per reflexions sobre l'eix Y .*
- (ii) *Punts cònics d'ordre n : $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_n$, on \mathbb{Z}_n actúa per rotacions. El model local és un con que té l'origen fixat per Γ i que, per tant, és un punt singular que anomenarem punt cònic. El con té angle $\frac{2\pi}{n}$, $n \geq 2$ i no té vora, ja que topològicament, segueix sent euclidià.*
- (iii) *Cantons d'ordre n : \mathbb{R}^2/D_m , on D_m és el grup dièdric generat per dues reflexions τ, σ el producte de les quals té ordre $m \geq 2$. El model local és una falca d'angle $\frac{\pi}{m}$, $m \geq 1$. Com que el grup dièdric té reflexions, la falca té vora. La falca està formada per 2 eixos de simetria i un cantó. L'angle del cantó és $\frac{\pi}{m}$, on n és l'ordre de l'element RL , on R i L són els eixos de simetria.*

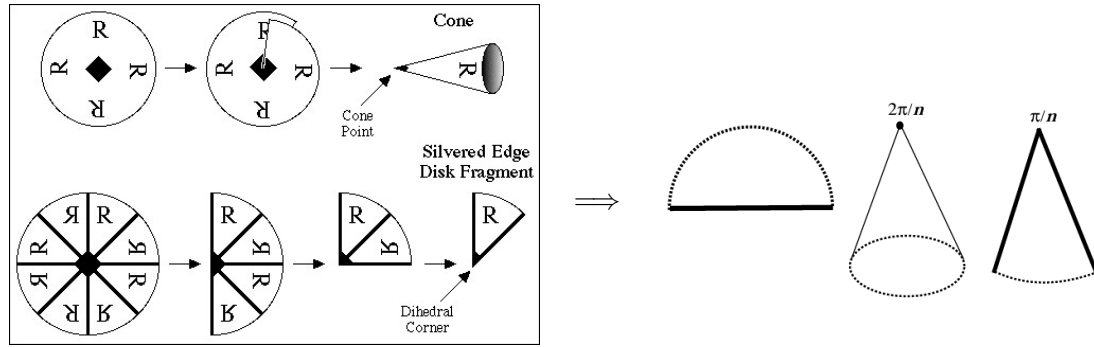


Figura 3.1: Models locals de les 2-orbifícies. En la segona imatge, d'esquerra a dreta, tenim el mirall, un punt cònic i un cantó. Fonts: [18] i [28] respectivament.

D'aquesta proposició es segueix que l'espai subjacent d'una 2-orbifícia sempre és una superfície topològica, possiblement amb vora.

3.4 Classificació d'orbifícies de dimensió baixa

Volem veure la geometria corresponent a cada n -orbifícia per a $n = 1, 2$.

3.4.1 1-Orbifícies

Recordem de l'apartat anterior que tota varietat topològica connexa de dimensió 1 és homeomorfa a \mathbb{R} o bé a S^1 , i tota varietat topològica connexa de dimensió 1 amb vora és homeomorfa a $[0, 1]$ o bé a $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

L'únic grup finit que actua de manera lineal sobre \mathbb{R} és el grup cíclic d'ordre 2, C_2 . Actua amb la reflexió $x \mapsto -x$. L'espai d'òrbita \mathbb{R}/C_2 es pot identificar amb l'interval $[0, \infty)$. Com a conseqüència obtenim que tota 1-orbifícia és o bé una 1-varietat o bé una 1-varietat amb vora. Per tant, tota 1-orbifícia és d'un dels tipus següents:

- (i) \mathbb{R} .
- (ii) S^1 .
- (iii) $[0, \infty)$, on 0 és un punt de mirall.
- (iv) $[0, 1]$, on 0 i 1 són punts de mirall.

3.4.2 2-Orbifícies

És fàcil enumerar totes les 2-orbifícies de manera geomètrica: només cal enumerar les superfícies junt amb una informació combinatoria que determina l'estructura de l'orbifícia. Des d'un punt de vista topològic, no és completament trivial determinar quina d'aquestes orbifícies són bones i quines són dolentes.

Classificació topològica

Llista de les 2-orbífícies dolentes (sense vora):

- (i) La *llàgrima*: el conjunt subjacent de \mathcal{O} és la 2-esfera i $\Sigma_{\mathcal{O}}$ és un únic punt.
- (ii) La *doble llàgrima*: el conjunt subjacent de \mathcal{O} és la 2-esfera i $\Sigma_{\mathcal{O}}$ és un parell de punts cònics d'ordre diferent.
- (iii) El quocient de la llàgrima per la reflexió d'un cercle que conté el punt singular.
- (iv) El quocient de la doble llàgrima per la reflexió en un cercle que conté ambdós punts singulars.

	Espai subjacent	Punts cònics	Cantons
(i)	S^2	$(m), m \neq 1$	-
(ii)	S^2	$(m, n), m \neq n$	-
(iii)	D^2	-	$(m), m \neq 1$
(iv)	D^2	-	$(m, n), m \neq n$

Taula 3.1: 2-orbífícies dolentes. Les lletres corresponen als ordres dels punts singulars.

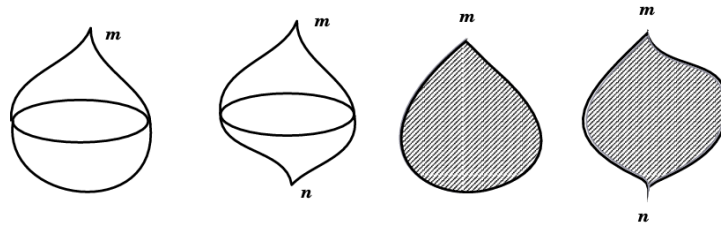


Figura 3.2: Representació de les 2-Orbífícies dolentes. Font: [28].

Teorema 3.4.1. *Les úniques orbífícies dolentes són les llistades més amunt, i tota altra 2-orbifície compacta és bona.*

Una demostració ben completa d'aquest teorema la trobem a [13].

Classificació geomètrica

Se sap des del principi del segle vint que tota superfície compacta és geomètrica: de manera més precisa, és el·líptica, euclidiana o hiperbòlica, és a dir, es pot obtenir com un quocient de la 2-esfera S^2 , del pla euclidià \mathbb{E}^2 o del pla hiperbòlic \mathbb{H}^2 per un grup discret d'isometries. Tota superfície tancada admet una mètrica de curvatura constant i existeixen tres casos dependent de la característica d'Euler de la superfície. Així doncs, una superfície és:

- (i) el·líptica (la 2-esfera S^2 i el pla projectiu real $\mathbb{R}P^2$) si i només si té característica d'Euler positiva;
- (ii) euclidiana (el 2-tor T^2 i l'ampolla de Klein K^2) si i només si té característica d'Euler zero;

(iii) hiperbòlica si no és ni el·líptica ni euclidiana (té característica d'Euler negativa).

Teorema 3.4.2. *Tota 2-orbifície bona sense vora admet una estructura geomètrica modelada sobre \mathbb{S}^2 , \mathbb{E}^2 o \mathbb{H}^2 , és a dir, és isomorfa com a orbifície al quocient de \mathbb{S}^2 , \mathbb{E}^2 o \mathbb{H}^2 per algun grup discret d'isometries.*

Teorema 3.4.3. *Una 2-orbifície tancada té una estructura el·líptica, parabòlica o hiperbòlica si i només si és bona. És més:*

- (i) *Una orbifície \mathcal{O} té una estructura hiperbòlica si i només si $\chi(\mathcal{O}) < 0$.*
- (ii) *Una orbifície \mathcal{O} té una estructura parabòlica si i només si $\chi(\mathcal{O}) = 0$.*
- (iii) *Una orbifície \mathcal{O} és el·líptica si i només si $\chi(\mathcal{O}) > 0$.*

Les demostracions d'aquests dos teoremes es poden trobar a [49].

Nosaltres ens centrarem en la classificació de les orbifícies parabòliques, que es dona en el capítol següent.

Capítol 4

Orbíficies parabòliques i grups cristal·logràfics euclidians

4.1 Classificació de les orbíficies parabòliques

En la notació de la proposició següent, les lletres S , P i D denoten els espais subjacents (esfera, pla projectiu i disc, respectivament) i els subíndexs denoten els ordres de les singularitats. Les barres damunt d'alguns subíndexs indiquen que les singularitats són cantons; la resta corresponen a punts cònics.

Les demostracions es basen en les indicacions de Juan Rojo [41]. Algunes imatges de les orbíficies s'han extret de [2, 4, 16] i d'altres s'han modificat a partir d'imatges extretes de [26]. Les imatges dels mosaics de l'Alhambra són d'autoria pròpia, excepte unes de la figura (4.17) i les de la figura (4.3), que són extretes del RIA (“Recursos de Investigación de la Alhambra”) [39], i les he modificat amb el programa GeoGebra [24].

Proposició 4.1.1. *Les úniques 2-orbíficies parabòliques són les següents:*

- *El tor T .*
- *La funda de coixí de 4 punts cònics S_{2222} .*
- *Les fundes de coixí de 3 punts cònics S_{236} , S_{244} , S_{333} .*
- *L'ampolla de Klein K .*
- *El pla projectiu amb dos punts cònics P_{22} .*
- *La cinta de Möbius M .*
- *L'anell A .*
- *Els discs amb singularitats $D_{\overline{3}\overline{3}\overline{3}}$, $D_{\overline{2}\overline{4}\overline{4}}$, $D_{\overline{2}\overline{3}\overline{6}}$, $D_{\overline{2}\overline{2}\overline{2}\overline{2}}$, $D_{4\overline{2}}$, $D_{3\overline{3}}$, $D_{2\overline{2}\overline{2}}$, D_{22} .*

Demostració. Anem a classificar les 2-orbíficies parabòliques, és a dir, 2-orbíficies bones amb $\mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) = 0$. Distingirem els casos a partir de l'orientabilitat de les orbíficies:

Cas orientable. Sigui \mathcal{O} una orbifícia parabòlica orientable sense vora, per tant, només amb punts cònics. Suposem que l'orbifícia té l punts cònics p_i d'ordre $n_i \geq 2$. Aleshores

la fórmula de Riemann-Hurwitz queda de la manera següent:

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}) = \mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) - \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right),$$

on $\mathcal{X}(\mathcal{O}) = 0$ i $X_{\mathcal{O}} = F_g$ és una superfície orientable de gènere g (sense vora). Per tant, $\mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) = \mathcal{X}(F_g) = 2 - 2g$, és a dir:

$$0 = 2 - 2g - \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right).$$

Analitzem els valors que pot prendre g :

Si $g > 1$, a partir de la igualtat

$$2 - 2g = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

obtenim que no hi ha solució, ja que el membre esquerre de la igualtat és negatiu mentre que el membre dret és positiu.

Si $g = 1$, aleshores $X_{\mathcal{O}} = F_1 = \mathbb{T}^2$ i, a partir de la fórmula de Riemann-Hurwitz, obtenim la igualtat següent:

$$0 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right).$$

En conseqüència, resulta que $l = 0$, és a dir, \mathcal{O} no té punts cònics. Per tant, \mathcal{O} és una orbificie sense singularitats, és a dir, $\mathcal{O} = T$, el tor (4.1).

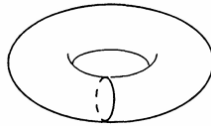


Figura 4.1: El tor T .

Si $g = 0$, $X_{\mathcal{O}} = F_0 = S^2$ i, a partir de la fórmula de Riemann-Hurwitz, obtenim la igualtat següent:

$$2 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

En conseqüència, tenim que el nombre de punts cònics ha de satisfer les desigualtats $2 < l \leq 4$. En efecte, com que $n_i \geq 2$, tenim que $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n_i} < 1$, per tant, $\frac{1}{2}l \leq 2 < l$ i d'aquí obtenim la desigualtat que volíem. Cal, doncs, separar per casos:

Cas 1. Si $l = 3$ (tres punts cònics), a partir de la fórmula de Riemann-Hurwitz, obtenim la igualtat següent:

$$2 = \sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

En conseqüència, tenim que $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1$, equivalentment, que $1 + \frac{n_1}{n_2} + \frac{n_1}{n_3} = n_1$. Podem suposar que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, en particular, que $\frac{n_1}{n_2} \leq 1$ i $\frac{n_1}{n_3} \leq 1$. Aleshores tenim la desigualtat $n_1 \leq 3$ i, com que $n_i \geq 2$, l'ordre del punt cònic p_1 ha de ser 2 o 3.

- Per a $n_1 = 2$, tenim la igualtat $\frac{1}{2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1$ i, procedint de manera anàloga, obtenim la desigualtat $2 \leq n_2 \leq 4$.
 - n_2 no pot ser 2 perquè la suma seria més gran que 1.
 - Si $n_2 = 3$, tenim que $n_3 = 6$ i, per tant, $\mathcal{O} = S_{236}$ (4.2).
 - Si $n_2 = 4$, tenim que $n_3 = 4$ i, per tant, $\mathcal{O} = S_{244}$ (4.2).

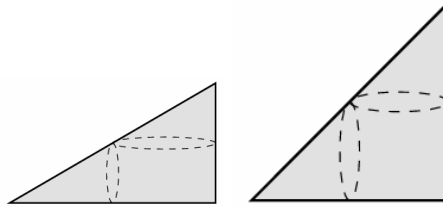


Figura 4.2: Fundes de coixí de 3 punts cònics S_{236} i S_{244} .

- Per $n_1 = 3$, tenim la igualtat $\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1$ i, procedint de manera anàloga, obtenim la desigualtat $2 \leq n_2 \leq 3$.
 - n_2 no pot ser 2 perquè la suma seria més gran que 1.
 - Si $n_2 = 3$, tenim que $n_3 = 3$ i, per tant, $\mathcal{O} = S_{333}$ (4.3).

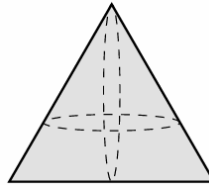


Figura 4.3: Fundes de coixí de 3 punts cònics S_{333} .

Cas 2. Si $l = 4$ (quatre punts cònics), a partir de la fórmula de Riemann-Hurwitz, obtenim la igualtat següent:

$$2 = \sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

En conseqüència, tenim que $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 2$. Com que $n_i \geq 2$, cal que $n_i = 2$, per a tot $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ i, per tant, $\mathcal{O} = S_{2222}$ (4.4).

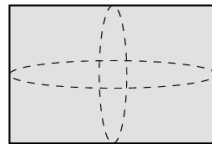


Figura 4.4: Fundes de coixí de 4 punts cònics S_{2222} .

Cas no orientable. Sigui \mathcal{O} una orbifícia parabòlica no orientable. Pot ser degut a la no orientabilitat dels punts singulars (existència de punts de simetria o cantons) o bé degut a la no orientabilitat de l'espai subjacent $X_{\mathcal{O}}$. Si \mathcal{O} té punts de simetria o

cantons, aleshores pel model local de la proposició (3.3.2), $X_{\mathcal{O}}$ té vora. Denotem per b el nombre de components de la vora de $X_{\mathcal{O}}$. Així doncs, distinguirem els casos a partir de la orientabilitat $X_{\mathcal{O}}$.

Cas 1. Sigui $X_{\mathcal{O}}$ un espai orientable i, per tant, una superfície de gènere g amb b components sobre la seva vora, és a dir, $X_{\mathcal{O}}$ és F_g treient b discs. En particular, obtenim que la característica d'Euler de $X_{\mathcal{O}}$ és $\chi(X_{\mathcal{O}}) = 2 - 2g - b$. Suposem que l'orbifície té l punts cònics p_i d'ordre $n_i \geq 2$ i k cantons q_j d'ordre $m_j \geq 2$. Aleshores la fórmula de Riemann-Hurwitz queda de la següent manera:

$$0 = 2 - 2g - b - \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

Equivalentment,

$$2 - 2g - b = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

Com que el membre de l'esquerra és positiu o igual a 0, cal que $2 - 2g - b \geq 0$. Per una altra banda, si $X_{\mathcal{O}}$ és orientable, significa que la no orientabilitat de \mathcal{O} prové de la no orientabilitat dels punts singulars, és a dir, \mathcal{O} té punts de simetria i, per tant, $X_{\mathcal{O}}$ ha de tenir $b \geq 1$ components a la vora. Si $b \geq 1$, la desigualtat $2 - 2g - b \geq 0$ implica que $g = 0$ i, per tant, $1 \leq b \leq 2$. Analitzem els casos a partir dels valors que pot prendre b :

Si $g = 0$ i $b = 1$, aleshores $X_{\mathcal{O}}$ és una esfera menys un disc, és a dir, \mathcal{O} és un disc, que denotarem per D . A més a més, a partir de la fórmula de Riemann-Hurwitz, obtenim la igualtat següent:

$$2 - 0 - 1 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \Leftrightarrow 1 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right).$$

En conseqüència, tenim que els dos sumands del membre esquerre de la igualtat han de ser menors o iguals que 1. En particular, tenim que $\sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \leq 1$ i, com que $\sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \geq \frac{1}{2}l$ (calculat en el cas \mathcal{O} orientable), concloem que $l \leq 2$. Anàlogament, obtenim que $k \leq 4$. Continuem l'anàlisi per casos segons el valor de l (nombre de punts cònics de \mathcal{O}):

- Si $l = 0$, tenint en compte que $k \leq 4$ i la igualtat següent:

$$1 = 0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \Leftrightarrow 2 = \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right),$$

veiem que k només pot ser 3 o 4, obtenint les mateixes equacions que les del cas \mathcal{O} orientable amb $g = 0$:

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1 \quad i \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = 2$$

Procedint de manera anàloga, obtenim les orbifícies següents (4.5): $\mathcal{O} = D_{2\bar{3}\bar{3}\bar{6}}$, $\mathcal{O} = D_{2\bar{4}\bar{4}}$, $\mathcal{O} = D_{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}$, $\mathcal{O} = D_{\bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{2}}$

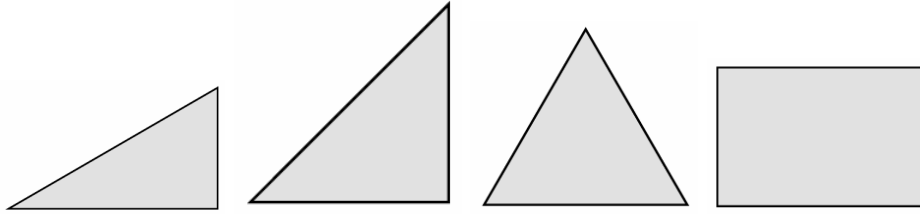


Figura 4.5: Discs amb singularitats $D_{\overline{2}\overline{3}\overline{6}}$, $D_{\overline{2}\overline{4}\overline{4}}$, $D_{\overline{3}\overline{3}\overline{3}}$, $D_{\overline{2}\overline{2}\overline{2}\overline{2}}$.

- Si $l = 1$, tenim la igualtat següent:

$$1 = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n_1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

D'una banda, tenint en compte que $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \geq \frac{1}{4}k$, obtenim que $\frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{4}k \Leftrightarrow \frac{4}{n_1} \geq k \geq 1 \Leftrightarrow n_1 \leq 4$. D'altra banda, tenint en compte que $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{n_1}$, obtenim que $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \Leftrightarrow k \leq 2$.

- Per $k = 1$, tenim la igualtat següent:

$$\frac{1}{n_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{n_1} = 1 - \frac{1}{m_1}$$

Substituint els diversos valors que pot tenir $n_1 \leq 4$ a la igualtat, obtenim dues orbíficies $\mathcal{O} = D_{\overline{3}\overline{3}}$ i $\mathcal{O} = D_{\overline{4}\overline{2}}$ (4.6).

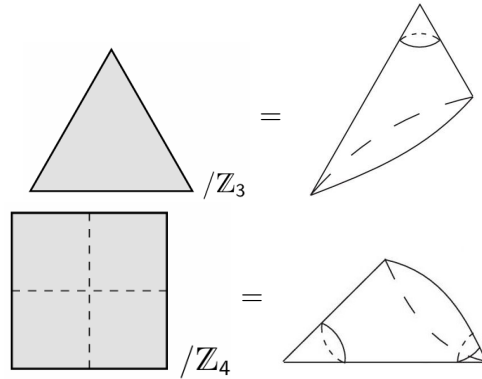


Figura 4.6: Discs amb singularitats $D_{\overline{3}\overline{3}}$, $D_{\overline{4}\overline{2}}$.

- Per $k = 2$, tenim la igualtat següent:

$$\frac{1}{n_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m_1} + 1 - \frac{1}{m_2}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{n_1} = 2 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}$$

Substituint els diversos valors que pot tenir $n_1 \leq 4$ a la igualtat, obtenim una única orbíficie $\mathcal{O} = D_{\overline{2}\overline{2}\overline{2}}$ (4.7).

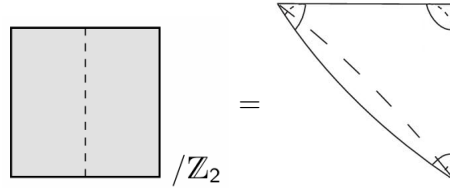


Figura 4.7: Disc amb singularitats $D_{2\overline{2}}$.

- Si $l = 2$, tenim la igualtat següent:

$$1 = \left(1 - \frac{1}{n_1} + 1 - \frac{1}{n_2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

Com que $\frac{1}{n_i} \leq \frac{1}{2}$ per $i = 1, 2$ i $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \in [0, 1]$, obtenim que $k = 0$ i $n_1 = n_2 = 2$. Per tant, ens queda l'orbifície següent: $\mathcal{O} = D_{22}$ (4.8).

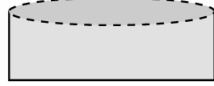


Figura 4.8: Disc amb singularitats D_{22} .

Si $g = 0$ i $b = 2$, aleshores $X_{\mathcal{O}}$ és una esfera menys dos discs, és a dir, \mathcal{O} és un anell, que denotarem per A . A més a més, a partir de la fórmula de Riemann-Hurwitz, obtenim la igualtat següent:

$$2 - 0 - 2 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

Com que els dos sumands del membre esquerre de la igualtat són positius, la igualtat només és certa si $l = k = 0$ i, per tant, \mathcal{O} no té ni punts cònics ni cantons, és a dir, els components de la vora de l'anell són punts de simetria (4.9).



Figura 4.9: Anell A .

Cas 2. Sigui $X_{\mathcal{O}}$ un espai no orientable i, per tant, una suma connexa de $r \geq 1$ plans projectius amb $b \geq 0$ discs trets, és a dir, una superfície amb b components a la vora. En particular, obtenim que la característica d'Euler de $X_{\mathcal{O}}$ és $\mathcal{X}(X_{\mathcal{O}}) = 2 - r - b$. Suposem que l'orbifície té l punts cònics p_i d'ordre $n_i \geq 2$ i k cantons q_i d'ordre $m_j \geq 2$. Aleshores la fórmula de Riemann-Hurwitz queda de la següent manera:

$$0 = 2 - r - b - \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

Equivalentment,

$$2 - r - b = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

Com que el membre de l'esquerra és positiu o igual a 0, cal que $2 - r - b \geq 0$, és a dir, la suma de $r \geq 1$ i $b \geq 0$ ha de ser més petita o igual que 2. Així doncs, tenim els casos següents:

- Si $r = 1$ i $b = 0$, aleshores $X_{\mathcal{O}} = \mathbb{P}^2$. Com que $b = 0$, no poden haver ni punts de simetria ni cantons a la vora. En particular, $k = 0$ i, per tant, tenim la igualtat següent:

$$2 - 1 - 0 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \Leftrightarrow 1 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

Tenint en compte que $\sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \geq \frac{1}{2}$, obtenim que $1 \geq \frac{l}{2}$, és a dir, $l \leq 2$.

Substituint l a la igualtat anterior tenim una única orbifície: $\mathcal{O} = P_{22}$ (4.10).

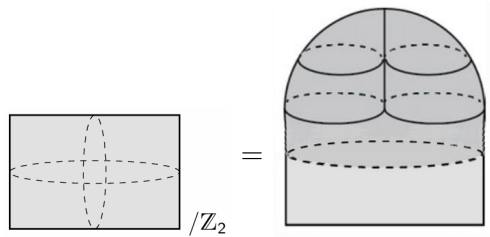


Figura 4.10: Pla projectiu P_{22} . A l'esquerra, imatge de [4]. A la dreta, imatge d'autoria pròpia.

- Si $r = 1$ i $b = 1$ aleshores $X_{\mathcal{O}}$ és un pla projectiu menys un disc, és a dir, $\mathcal{O} = M$, la cinta de Möbius (4.11). A partir de la igualtat

$$2 - 1 - 1 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

obtenim que $l = k = 0$ i, per tant, \mathcal{O} no té ni punts cònics ni cantons, és a dir els components de la vora de la cinta són punts de simetria.

- Si $r = 2$ i $b = 0$, aleshores $X_{\mathcal{O}} = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, és a dir, $\mathcal{O} = K$, l'ampolla de Klein (4.11). Com que $b = 0$, no poden haver ni punts de simetria ni cantons a la vora.

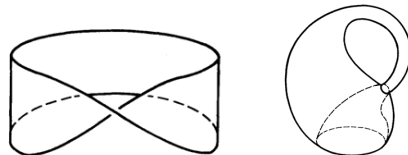


Figura 4.11: Ampolla de Klein K .

Això acaba la demostració. □

Proposició 4.1.2. *Totes les 2-orbífícies parabòliques admeten una estructura euclidiana donada per \mathbb{R}^2/Γ , per a algun subgrup discret $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$.*

Demostració. Per la proposició anterior, sabem que només existeixen 17 orbífícies parabòliques de dimensió 2 que admeten tal estructura euclidiana i també quines 2-orbífícies són. Queda construir una estructura euclidiana per a cadascuna de les orbífícies, és a dir, cal donar una tessellació de \mathbb{R}^2 amb grup de simetria Γ i quocients aquestes orbífícies.

- (1) El tor T ve donat per la tessellació de la figura (4.12). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z} \rangle$, on $\tau_{n,m}(x, y) = (x + n, y + m)$ és una translació. El domini fonamental de l'acció és el rectangle en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la tercera imatge:

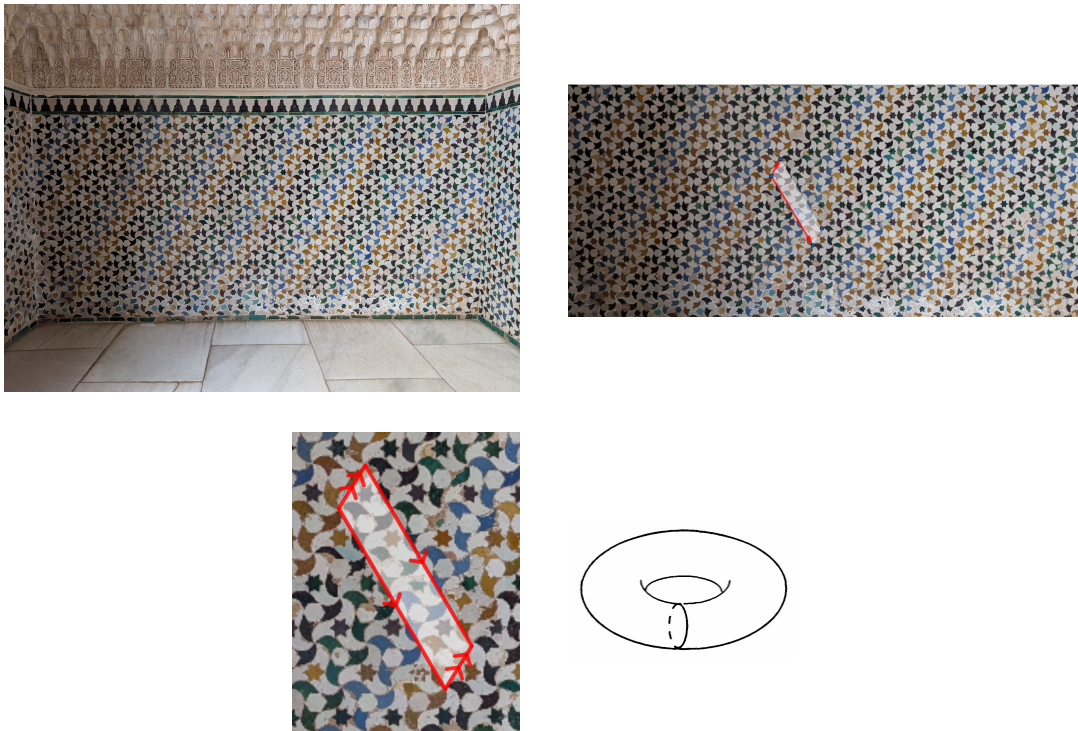


Figura 4.12: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) del tor T . Foto pròpia. Part inferior: T s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (2) La funda de coixí S_{2222} ve donada per la tessellació de la figura (4.13). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{n,m}, g : n, m \in \mathbb{Z} \rangle$, on $\tau_{n,m}(x, y) = (x + n, y + m)$ és una translació i $g(x, y) = (-x, -y)$ és un gir de 180° . El domini fonamental de l'acció és el rectangle en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

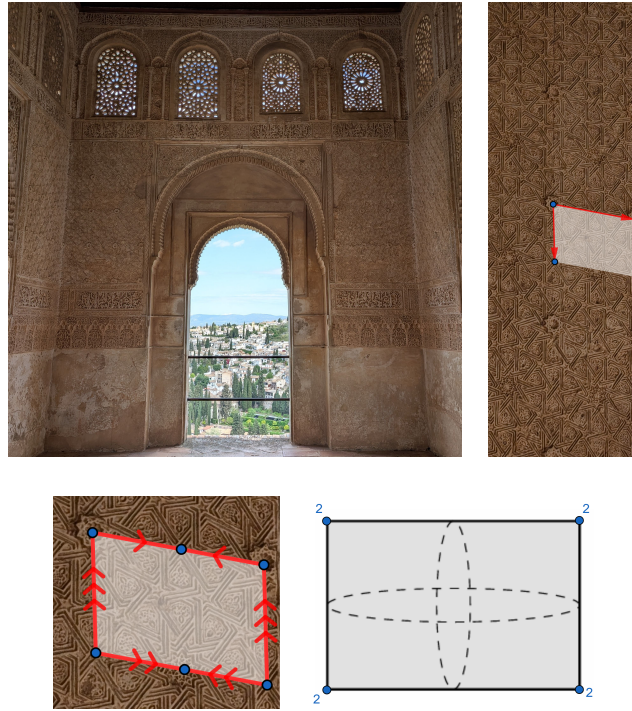


Figura 4.13: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de S_{2222} . Foto pròpia. Part inferior: S_{2222} s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (3) La funda de coixí S_{236} ve donada per la tessellació de la figura (4.14). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(2,0)}, \tau_{(1,\sqrt{3})}, g_{\frac{\pi}{3}} \rangle$, on τ_v és la translació del vector v i g_α és la rotació d'angle α . El domini fonamental de l'acció és el triangle equilàter en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

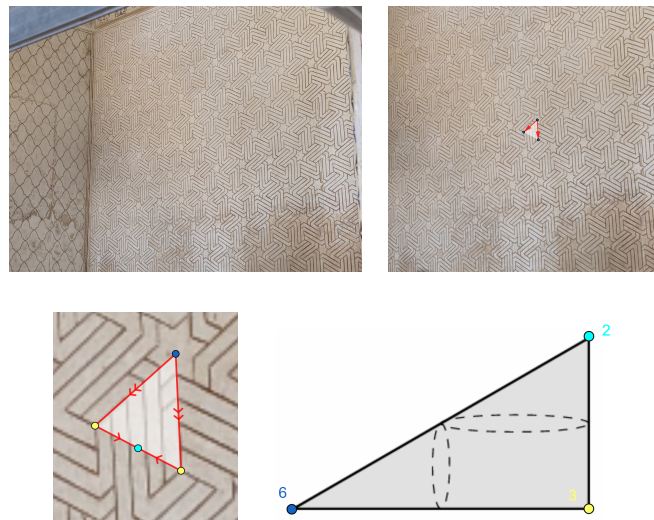


Figura 4.14: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de S_{236} . Foto pròpia. Part inferior: S_{236} s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del triangle.

- (4) La funda de coixí S_{244} ve donada per la tessellació de la figura (4.15). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(2,0)}, \tau_{(0,2)}, g_{\frac{\pi}{2}} \rangle$, on τ_v és la translació del vector v i g_α és la rotació d'angle α . El domini fonamental de l'acció és el quadrat en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

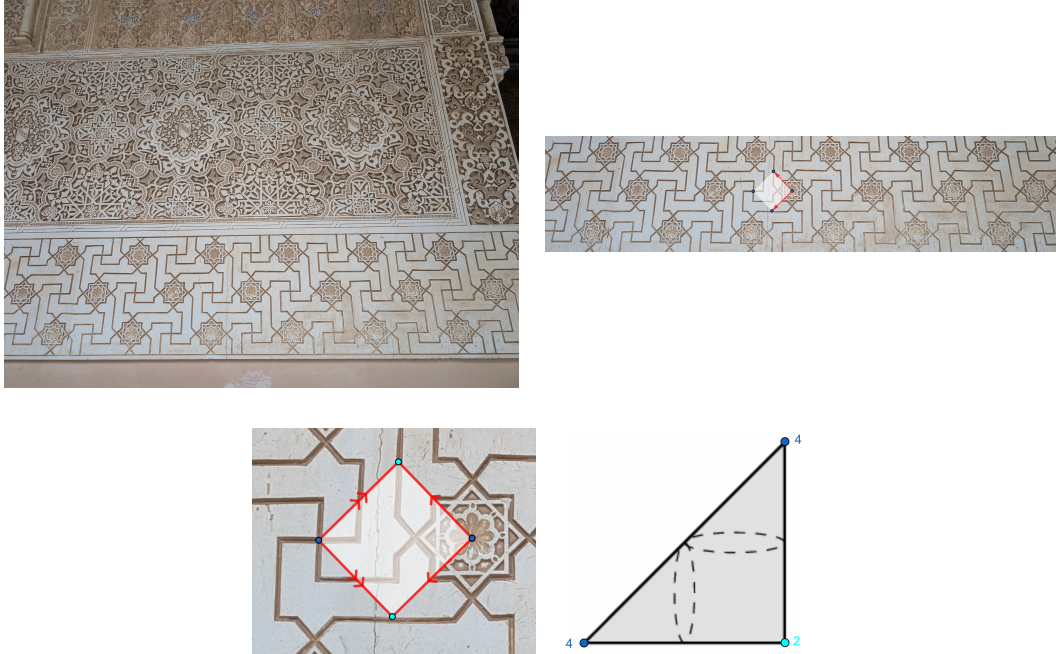


Figura 4.15: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de S_{244} . Foto pròpia. Part inferior: S_{244} s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (5) La funda de coixí S_{333} ve donada per la tessellació de la figura (4.16). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(2,0)}, \tau_{(1,\sqrt{3})}, g_{\frac{2\pi}{3}} \rangle$, on τ_v és la translació del vector v i g_α és la rotació d'angle α . Aquest és l'únic cas en el que suposem que el disseny només té dos colors (blanc i negre). El domini fonamental de l'acció és el quadrilàter en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

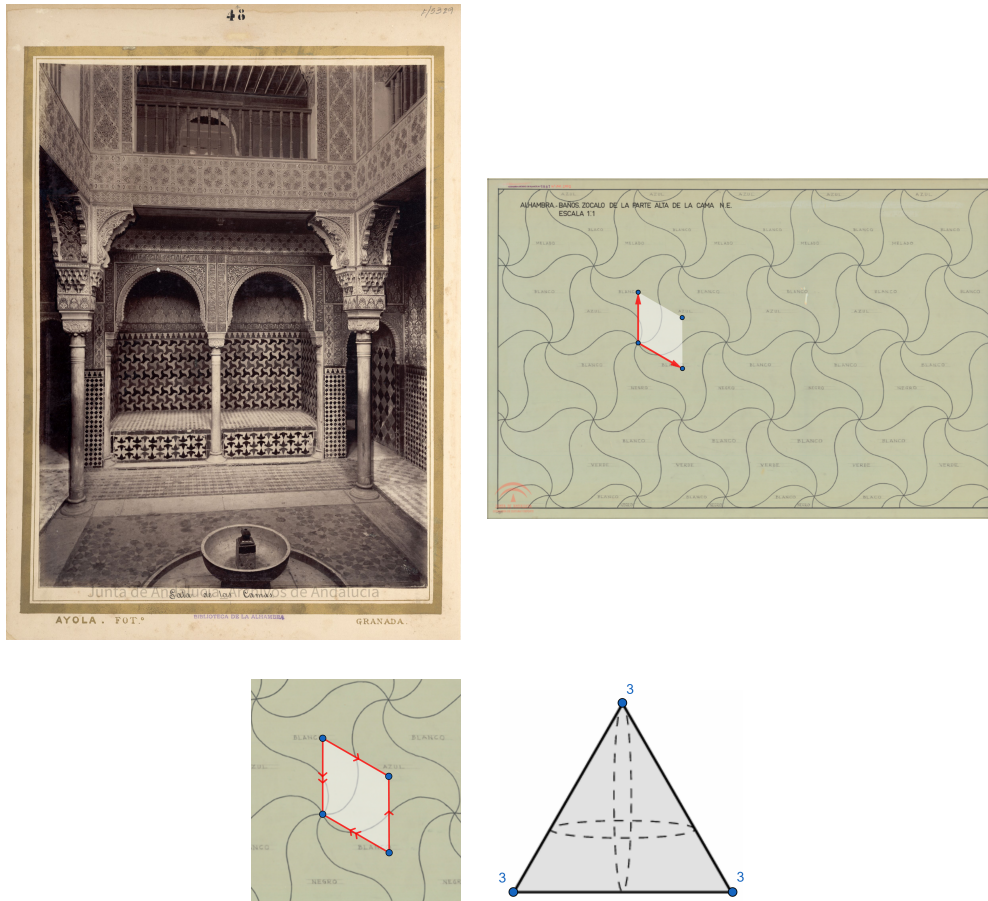


Figura 4.16: Part superior: recobriments universal i domini fonamental (blanc) de S_{333} . Foto del RIA. Part inferior: S_{333} s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (6) L'ampolla de Klein K ve donada per la tessellació de la figura (4.17). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle g, \tau_{(1,0)} \rangle$, on τ_v és la translació del vector v i $g(x, y) = (-x, y + 1)$ és una simetria amb lliscament. El domini fonamental de l'acció és el quadrat en blanc i les identifikacions en el domini fonamental es poden veure en la tercera imatge:

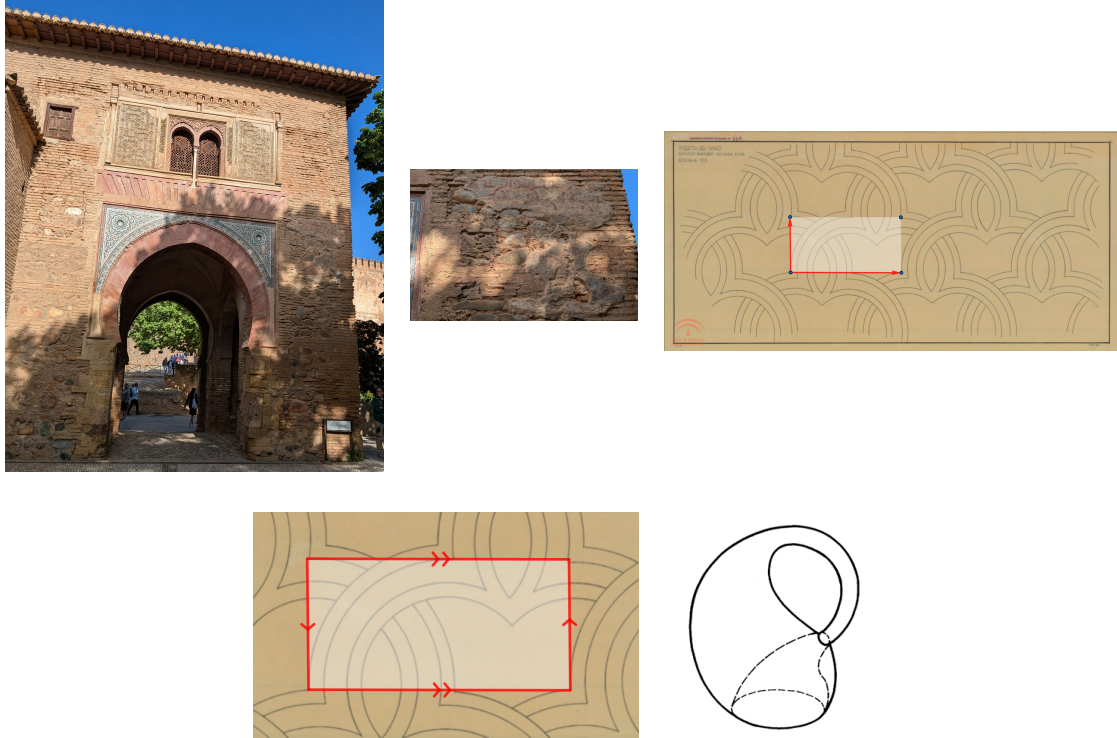


Figura 4.17: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de K . Foto pròpia i de RIA. Part inferior: K s'obté amb les identifikacions indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (7) El pla projectiu P_{22} ve donat per la tessellació de la figura (4.18). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(0,2)}, g, r \rangle$, on τ_v és la translació del vector v , $g(x, y) = (-x, -y)$ és una rotació i $r(x, y) = (x, 2 - y)$ és un desplaçament amb lliscament. El domini fonamental de l'acció és el quadrat en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:



Figura 4.18: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de P_{22} . Foto pròpia. Part inferior: P_{22} s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (8) La cinta de Möbius M ve donada per la tessellació de la figura (4.19). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle r, r_1, r_2 \rangle$, on $r(x, y) = (x + 1, -y)$ és un desplaçament amb lliscament, $r_1(x, y) = (x, -y)$ és una reflexió respecte $\{y = 0\}$ i $r_2(x, y) = (x, 2 - y)$ és una reflexió respecte $\{y = 1\}$. El domini fonamental de l'acció és el triangle equilàter en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

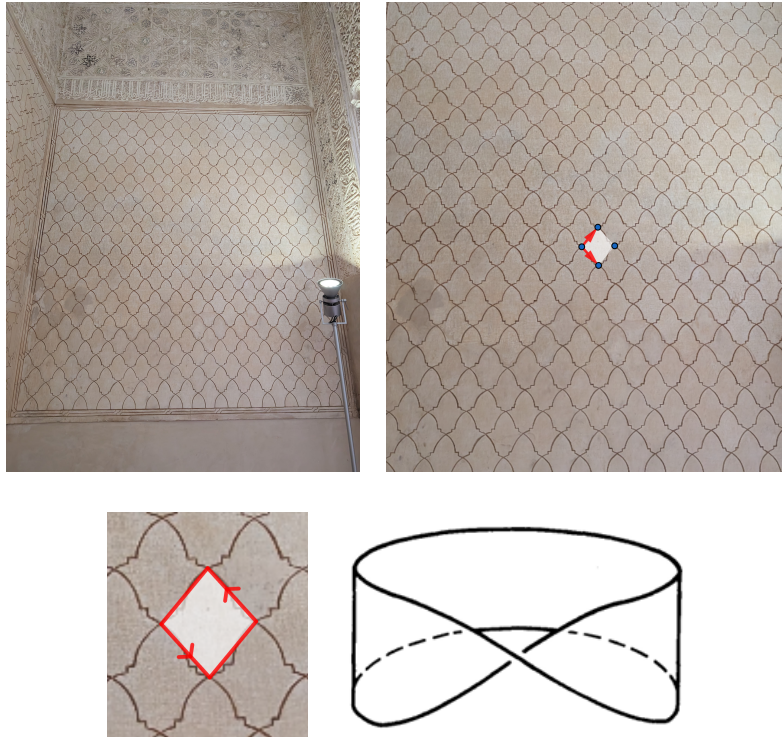


Figura 4.19: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de M . Foto pròpia. Part inferior: M s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (9) L'anell A ve donat per la tessellació de la figura (4.20). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(1,0)}, r_1, r_2 \rangle$, on $\tau_{(1,0)}$ és la translació del vector $(1, 0)$, $r_1(x, y) = (x, -y)$ és una reflexió respecte $\{y = 0\}$ i $r_2(x, y) = (x, 2 - y)$ és una reflexió respecte $\{y = 1\}$. El domini fonamental de l'acció és el rectangle en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

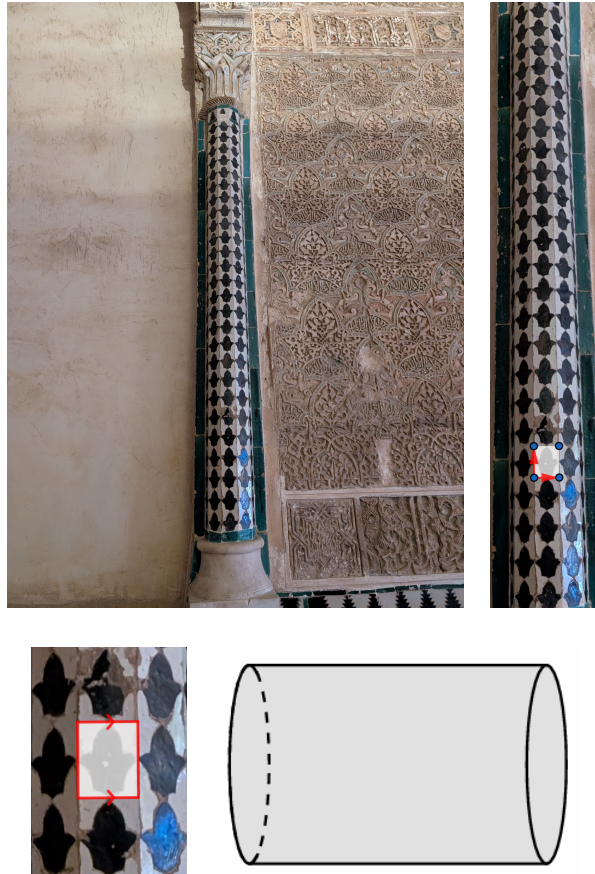


Figura 4.20: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de A . Foto pròpia. Part inferior: A s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (10) El disc $D_{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}$ ve donat per la tessellació de la figura (4.21). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(2,0)}, \tau_{(1,\sqrt{3})}, r_d, r_2 \rangle$, on τ_v és la translació del vector v , $r_d(x, y) = (y, x)$ és una reflexió respecte la diagonal principal $y = x$ i $r_2(x, y) = (y, x)$ és una reflexió respecte $\{x = -y\}$. El domini fonamental de l'acció és el triangle equilàter en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

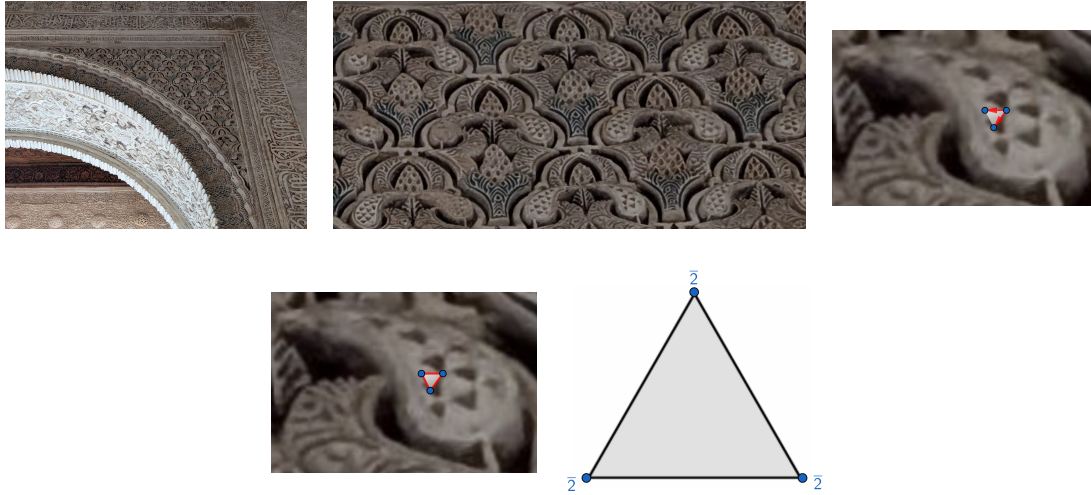


Figura 4.21: Part superior: recobriments universals i domini fonamental (blanc) de $D_{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}$. Foto pròpia. Part inferior: $D_{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}$.

- (11) El disc $D_{\bar{2}\bar{4}\bar{4}}$ ve donat per la tessellació de la figura (4.22). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(2,0)}, \tau_{(0,2)}, r_x, r_y, r_d \rangle$, on τ_v és la translació del vector v , $r_x(x, y) = (x, -y)$ és una reflexió respecte $x = 0$, $r_y(x, y) = (-x, y)$ és una reflexió respecte $y = 0$ i $r_d(x, y) = (y, x)$ és una reflexió respecte la diagonal principal $\{y = x\}$. El domini fonamental de l'acció és el triangle isòsceles rectangle en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

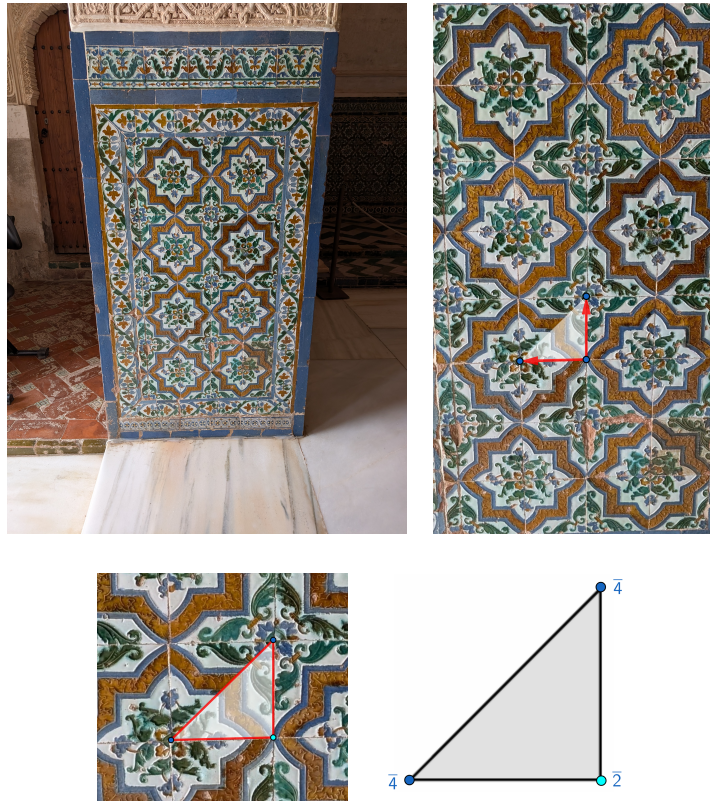


Figura 4.22: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de $D_{\bar{2}\bar{4}\bar{4}}$. Foto pròpia. Part inferior: $D_{\bar{2}\bar{4}\bar{4}}$.

- (12) El disc $D_{\bar{2}\bar{3}\bar{6}}$ ve donat per la tessellació de la figura (4.23). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(1,\sqrt{3})}, r_x, r_y \rangle$, on τ_v és la translació del vector v , $r_x(x, y) = (x, -y)$ és una reflexió respecte $\{x = 0\}$ i $r_y(x, y) = (-x, y)$ és una reflexió respecte $\{y = 0\}$. El domini fonamental de l'acció és el triangle en blanc i les identificacions en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

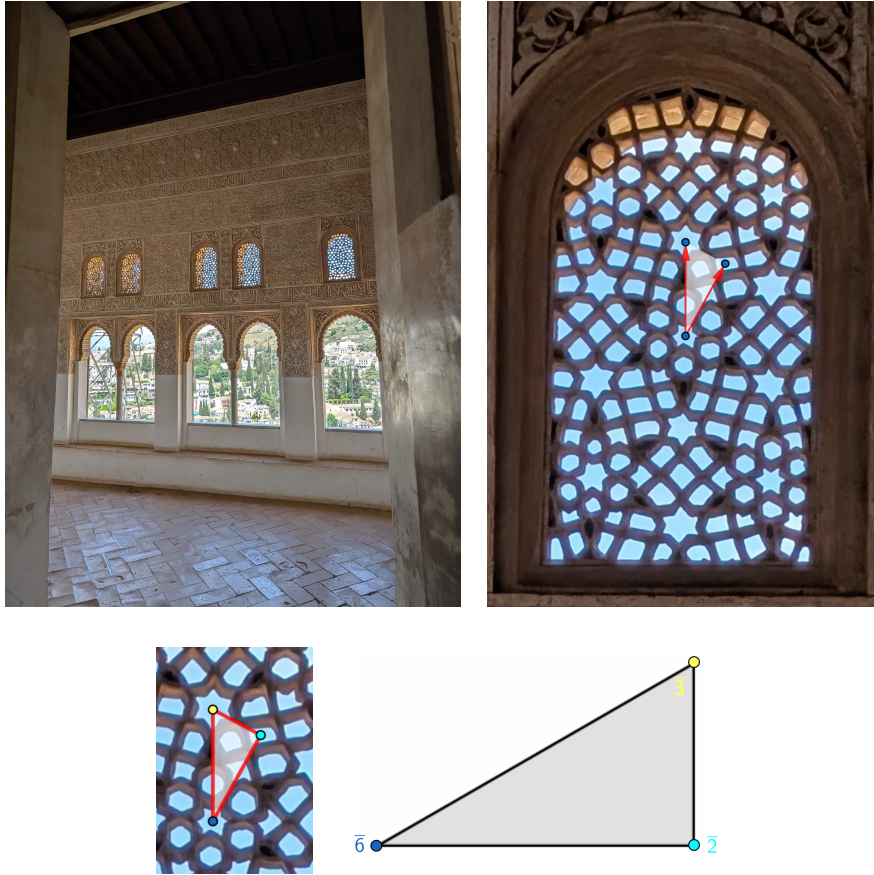


Figura 4.23: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de $D_{\bar{2}\bar{3}\bar{6}}$. Foto pròpia. Part inferior: $D_{\bar{2}\bar{3}\bar{6}}$.

- (13) El disc $D_{\overline{2}\overline{2}\overline{2}\overline{2}}$ ve donat per la tessellació de la figura (4.24). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(2,0)}, \tau_{(0,2)}, r_x, r_y \rangle$, on τ_v és la translació del vector v , $r_x(x, y) = (x, -y)$ és una reflexió respecte $\{x = 0\}$ i $r_y(x, y) = (-x, y)$ és una reflexió respecte $\{y = 0\}$. El domini fonamental de l'acció és el quadrat en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

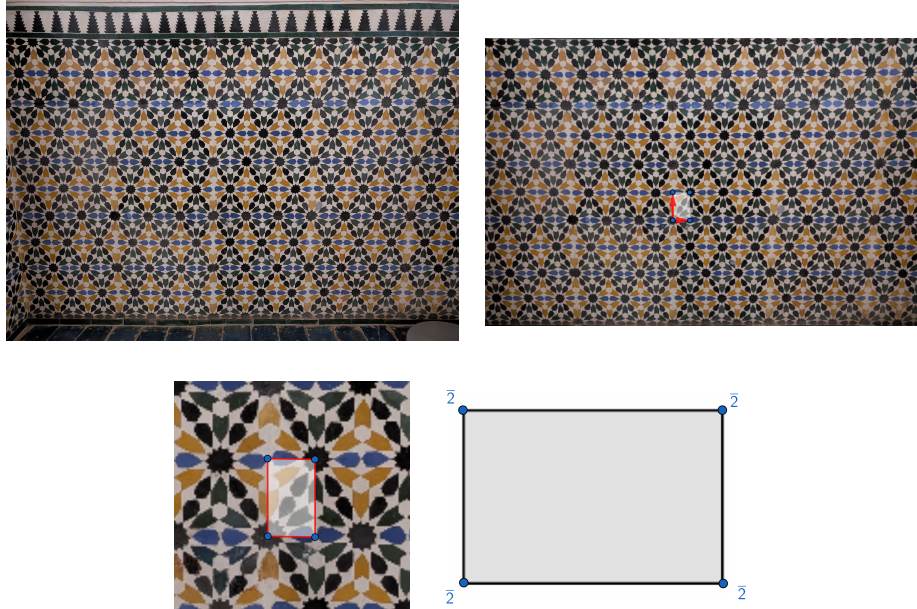


Figura 4.24: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de $D_{\overline{2}\overline{2}\overline{2}\overline{2}}$. Foto pròpia. Part inferior: $D_{\overline{2}\overline{2}\overline{2}\overline{2}}$.

- (14) El disc $D_{4\sqrt{2}}$ ve donat per la tessellació de la figura (4.25). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(2,0)}, \tau_{(0,2)}, r_x, g_{\frac{\pi}{2}} \rangle$, on τ_v és la translació del vector v , $r_x(x, y) = (x, -y)$ és una reflexió respecte $\{x = 0\}$ i $g_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = (-y, x)$ és una rotació d'ordre 4. El domini fonamental de l'acció és el quadrat en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

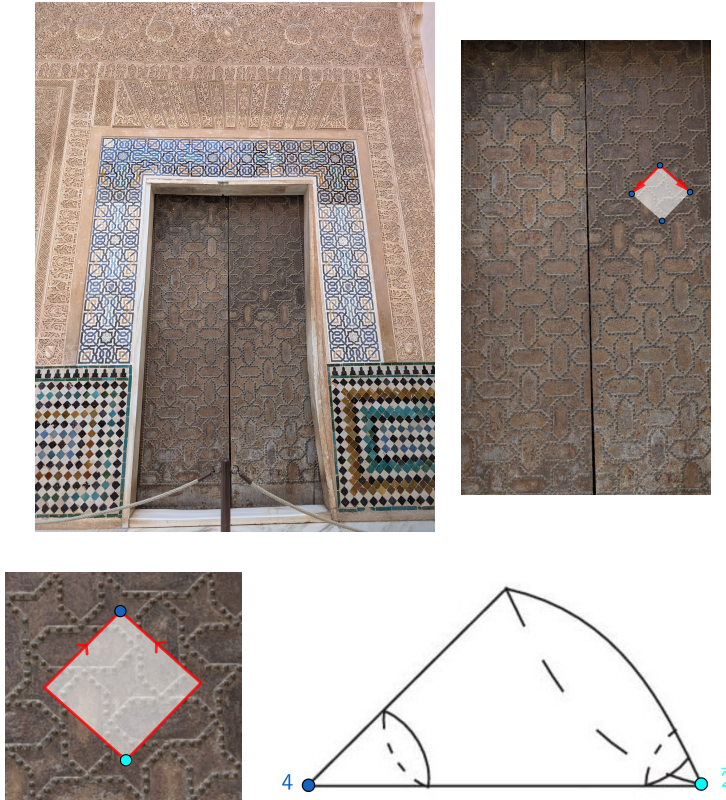


Figura 4.25: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de $D_{4\sqrt{2}}$. Foto pròpia. Part inferior: $D_{4\sqrt{2}}$ s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (15) El disc $D_{3\bar{3}}$ ve donat per la tessellació de la figura (4.26). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(1,\sqrt{3})}, r_x, g_{\frac{2\pi}{3}} \rangle$, on τ_v és la translació del vector v , $r_x(x, y) = (x, -y)$ és una reflexió respecte $\{x = 0\}$ i $g_{\frac{2\pi}{3}}$ és una rotació d'ordre 3. El domini fonamental de l'acció és el triangle en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

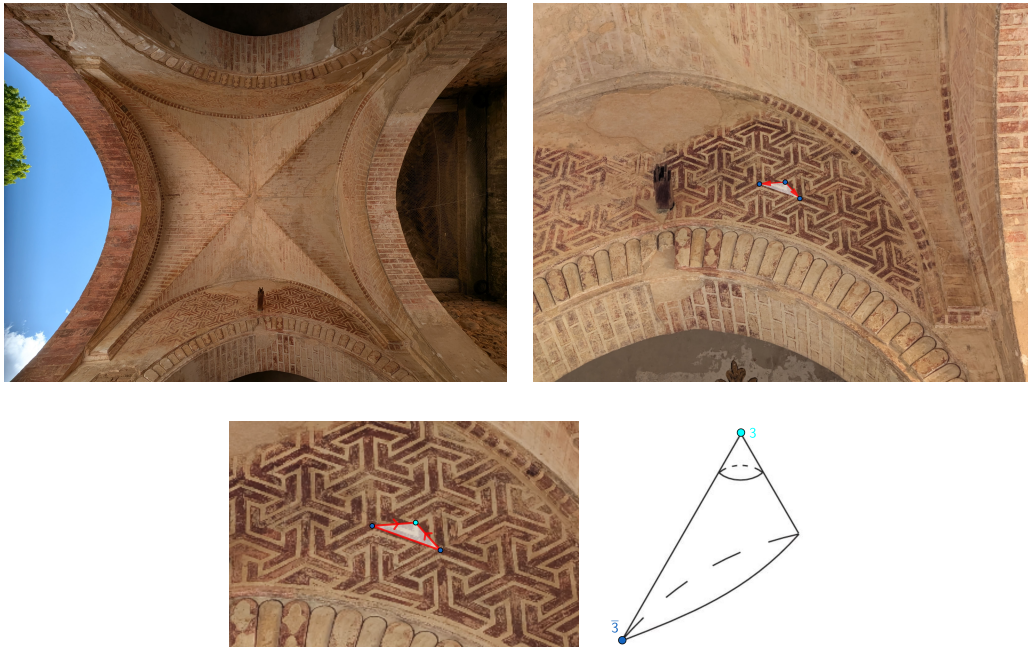


Figura 4.26: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de $D_{3\bar{3}}$. Foto pròpia. Part inferior: $D_{3\bar{3}}$ s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del triangle.

- (16) El disc $D_{2\bar{2}\bar{2}}$ ve donat per la tessellació de la figura (4.27). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(1,0)}, \tau_{(1,\sqrt{3})}, r_x, r_y \rangle$, on τ_v és la translació del vector v , $r_x(x, y) = (x, -y)$ és una reflexió respecte $\{x = 0\}$ i $r_y(x, y) = (-x, y)$ és una reflexió respecte $\{y = 0\}$. El domini fonamental de l'acció és el rectangle en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

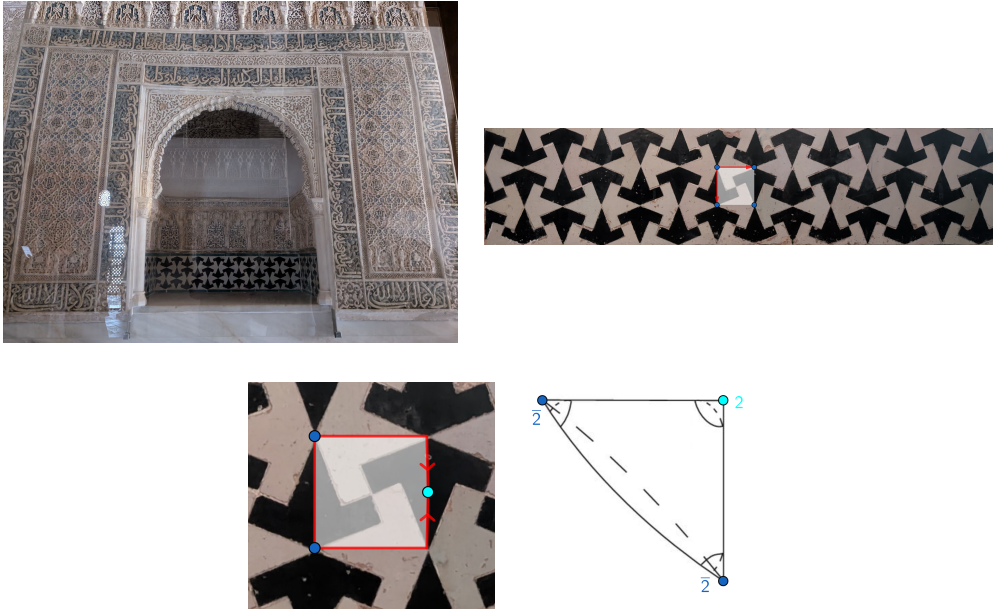


Figura 4.27: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de $D_{2\bar{2}\bar{2}}$. Foto pròpia. Part inferior: $D_{2\bar{2}\bar{2}}$ s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

- (17) El disc D_{22} ve donat per la tessellació de la figura (4.28). El grup que actua sobre \mathbb{R}^2 per isometries és $\Gamma = \langle \tau_{(2,0)}, \tau_{(0,2)}, r_x, g_\pi \rangle$, on τ_v és la translació del vector v , $r_x(x, y) = (x, -y)$ és una reflexió respecte $\{x = 0\}$ i g_π és un gir de 180° . El domini fonamental de l'acció és el quadrat en blanc i les identifications en el domini fonamental es poden veure en la segona imatge:

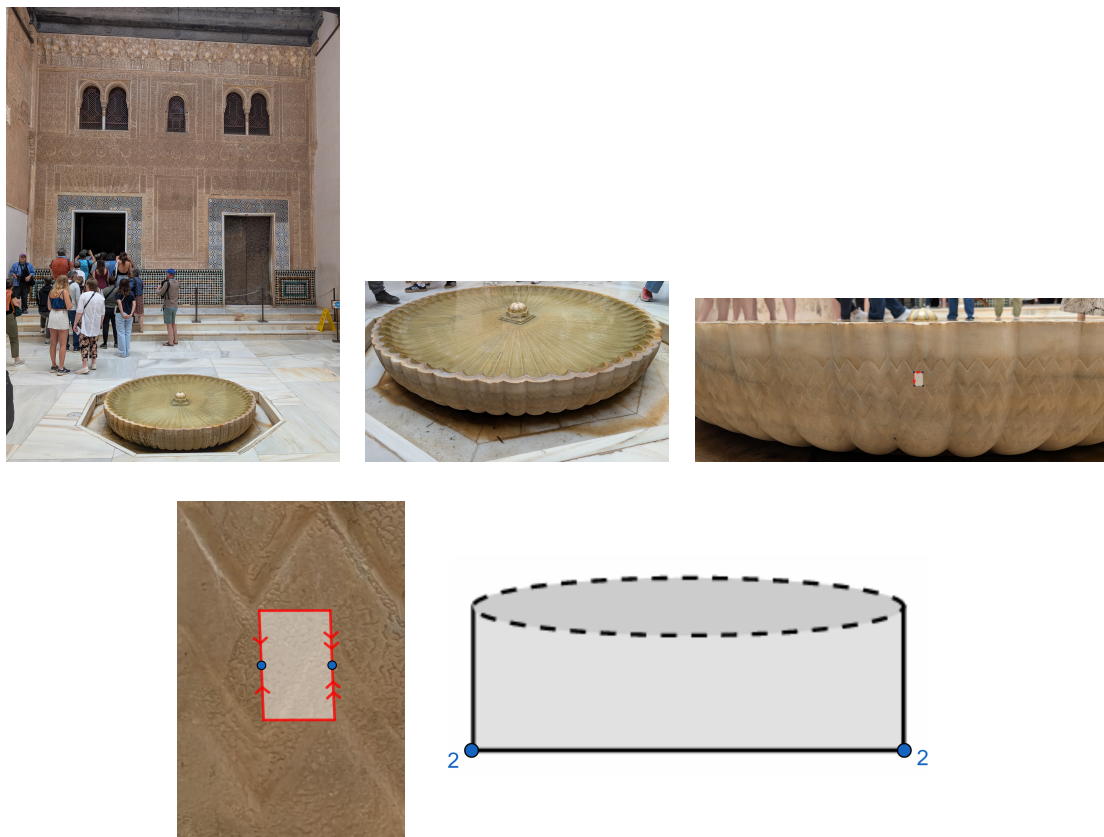


Figura 4.28: Part superior: recobriment universal i domini fonamental (blanc) de D_{22} . Foto pròpia. Part inferior: D_{22} s'obté amb les identifications indicades per les fletxes de les arestes del paral·lelogram.

Això acaba la demostració. □

4.2 Notacions diverses

La classificació dels 17 grups cristal·logràfics es pot resumir en la taula 4.1, on hi ha llistats tots els grups amb notacions equivalents. Aquesta taula està basada en la de l'article [44] i amb l'ajuda del llibre [8]. Tal i com s'explica en el mateix article, són molts els matemàtics que han anat creant diverses notacions al llarg dels anys. Aquest fet afavoreix a confondre grups entre ells: per exemple, la notació per als dos grups $p31m$ i $p3m1$ s'ha intercanviat sovint i aquest error notacional s'ha anat perpetuant en treballs posteriors. Per això aconsellem als lectors anar en compte per poder identificar aquests errors en les obres.

Thurston	Conway	Clàssica	Pólya; Guggenheimer	Fejes Tóth; Cadwell
T	\circ	p1	C_1	W_1
S_{236}	236	p6	C_6	W_6
S_{244}	244	p4	C_4	W_4
S_{333}	333	p3	C_3	W_3
S_{2222}	2222	p2	C_2	W_2
$D_{\bar{2}\bar{3}\bar{6}}$	*236	p6m	D_6	W_6^1
$D_{\bar{2}\bar{4}\bar{2}}$	*244	p4m	D_4^*	W_4^1
$D_{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}$	*333	p3m1	D_3^*	W_3^1
$D_{\bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{2}}$	*2222	pmm	D_2kkkk	W_2^2
$D_{\bar{3}\bar{3}}$	3*3	p31m	D_3°	W_3^2
$D_{\bar{4}\bar{2}}$	4*2	p4g	D_4°	W_4^2
$D_{\bar{2}\bar{2}\bar{2}}$	2*22	cmm	D_2kgkg	W_2^1
D_{22}	22*	pmg	D_2kkgg	W_2^3
A	**	pm	D_1kk	W_1^2
P_{22}	22 \times	pgg	D_2gggg	W_2^4
M	* \times	cm	D_1kg	W_1^1
K	$\times\times$	pg	D_1gg	W_1^3

Taula 4.1: Notacions per als grups cristal·logràfics

Conclusions

La simetria té una bellesa intrínseca. Visitar l'Alhambra amb l'objectiu de trobar tots els disset grups cristal·logràfics és tota una experiència que recomano a qualsevol persona curiosa, matemàtica o no.

Només hem pogut gratar lleugerament la superfície del món de les orbificies, que són una eina molt valuosa en topologia, geometria i física matemàtica (per exemple, en la teoria de cordes). El concepte d'orbificie no se sol aprendre durant el grau i, tanmateix, és molt rellevant en l'estudi de les accions de grups sobre espais euclidians, o sobre varietats en general. L'estudi d'orbificies ha mostrat ser una eina potent i versàtil, desplegant noves perspectives per al món de la simetria i la topologia.

Aquest ha estat un treball molt transversal, fet que ha mantingut la meua motivació durant la seva realització. He pogut relacionar diverses branques de les matemàtiques entre elles i així anar més enllà dels coneixements del grau en els àmbits de la topologia, la geometria i la teoria de grups: és fascinant com uns objectes topològics obtinguts de fer el quocient del pla per l'acció d'un grup d'isometries es “desenvolupen” tot donant tessellacions, les quals tenen simetries.

Al llarg del treball he après coneixements nous, aplicant-ne de bàsics. Això ho he aconseguit gràcies a l'exhaustiva recerca bibliogràfica feta, tant en format paper com en format digital. Les fonts han sigut de caires diferents: principalment he fet servir llibres, articles de divulgació i articles de recerca, però també ho he complementat amb pàgines web i conferències. En comparar diverses fonts d'informació, m'he adonat que alguns conceptes són més subtils i delicats del que semblava, com per exemple la definició d'acció pròpiament discontinua (1.1.2).

El procés de recerca bibliogràfica va ser molt interessant: l'article de Schattschneider [45] em va descobrir les matemàtiques de M. C. Escher i a partir dels articles de Montesinos [34, 35], vaig descobrir que els grups cristal·logràfics es poden classificar a partir de les orbificies. Indagant sobre el tema, vaig arribar a les famoses fonts antigues: les notes de Thurston [49], l'article de Scott [43] i el llibre de Montesinos [32]; i a fonts més modernes: els articles de Conway [15] i de M. Boileau, S. Maillot i J. Porti [6] i les notes de F. Caramello [12]. Amb el treball més avançat, vaig descobrir a les notes de la conferència de R. Bettiol [4] i a les notes de J. Rojo [41] del curs online d'aquest any organitzat per la RET (Red Española de Topología) amb el títol de “Orbifolds”. Durant l'escapada a l'Alhambra, vaig comprar el llibre de F. Fernández, A. Fernández i J. Valderrama [22], ja que, a més a més d'indicar el domini fonamental de cada grup cristal·logràfic, també explica com realitzar les tessellacions en paper, una activitat molt interessant per a una amant de les manualitats com jo. Per acabar, també voldria destacar els llibres de M. Kapovich [28] i J. Ratcliffe [38], les notes de M. Davis [19] i el llibre de S. Choi [13].

També he trobat programes interessants que treballen amb els grups de simetria:

- GeCla2 [3]: programa creat per Atractor i que s'ha de descarregar. Donada una imatge, pots crear o classificar els grups de frisos i els grups cristal·logràfics que vulguis. Cal destacar que per als grups cristal·logràfics, ensenya la corresponent orbifície, la qual també pots desplegar amb una animació i veure com tessella el pla.
- EscherSketch [20]: programa online que et permet crear patrons des de zero i et pots guiar amb unes graelles, les quals canvien segon el grup cristal·logràfic escollit.
- Tess [48]: programa que s'ha de descarregar que et permet crear patrons des de zero i mostra com es veu en un con, un cilindre i un tor, orbifícies que corresponen als grups de les rosetes, als grups dels frisos i al grup cristal·logràfic $p1$, respectivament.
- Morenaments [14]: programa online que et permet crear patrons des de zero i t'indica el domini fonamental.

Bibliografia

- [1] Armstrong, M. A., Groups and Symmetry, *Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer (1988).
- [2] Armstrong, M. A., Basic topology, *Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer (2000).
- [3] Atractor, GeCla program https://www.atorator.pt/mat/GeCla/index_en.html.
- [4] Bettiol, R. G., Exploring flat worlds (2018) <https://www.lehman.edu/faculty/rbettiol/talks.html>.
- [5] Bieberbach, L., Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Raume, I, *Annals of Mathematics* 70 (1911), 297–226; II, *Annals of Mathematics* 72 (1912), 400–412.
- [6] Boileau, M., Maillot, S. and Porti, J., Three-dimensional orbifolds and their geometric structures, *Panorama et Synthèses, Société Mathématique de France* 15 (2003).
- [7] Burago, D., Burago, Y., Ivanov, S., A Course in Metric Geometry, *Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society* 33 (2001).
- [8] Burgiel, H., Conway, J. H., Goodman-Strauss, C., The Symmetries of Things, *Boca Raton: CRC Press. Wellesley: AK Peters Ltd* (2008).
- [9] Burnett, M.N., Dunbar, W.D. and Johnson, C.K., Crystallographic topology and its applications (1996).
- [10] Buser, P., A Geometric proof of Bieberbach’s theorems on crystallographic groups, *L’Enseignement Mathématique* 31 (1985) 137–145.
- [11] Charlap, L. S., *Bieberbach Groups and Flat Manifolds*, Springer-Verlag, New York (1986).
- [12] Caramello, F. C. Jr ., Introduction to Orbifolds, arXiv: 1909.08699 (2019).
- [13] Choi, S., Geometric Structures of 2-Orbifolds: Exploration of Discrete Symmetry. MSJ Memoirs *Tokyo: Mathematical Society of Japan* 27 (2012).
- [14] Con Garden, Martin. (2011). *Morenaments: Ornament drawing applet using crystallographic groups*. TU München, <https://www.imaginary.org/es/program/morenaments>.
- [15] Conway, J. H., The Orbifold Notation for Surface Groups, *Groups, Combinatorics & Geometry*, M. Liebeck and J. Saxl, eds., Cambridge University Press (1992) 438–447.

- [16] Cooper, D., Hodgson, C. D., Kerckhoff, S. P., Three-dimensional Orbifolds and Cone-Manifolds, *Mathematical Society of Japan Memoirs* 5 (2000) 0–178.
- [17] Coxeter, H. S. M., Introduction to Geometry, Wiley Classics Library Edition (1989).
- [18] Crystallographic Topology, <https://ornl-ndav.github.io/ortep/topology.html>.
- [19] Davis, M. W., Lectures on orbifolds and reflection groups, Zhejiang University (2008).
- [20] EscherSketch, <https://eschersket.ch/>.
- [21] Fedorov, E. S., Symmetry in the plane, *Zapiski Rus. Mineralog. Obščestva, Ser 2* 28 (1891), 345–390.
- [22] Fernández, F., Fernández, A., Valderrama, J., La Alhambra Matemática (2023).
- [23] Frisant pels frisos, <https://blocs.xtec.cat/calaixmatematiques/activitats/geometria/frisant-pels-frisos/>.
- [24] GeoGebra, <https://www.geogebra.org/>.
- [25] Hatcher, A., Algebraic Topology, Cambridge University Press (2001).
- [26] Hilden, H. M., Montesinos, J. M., Tejada, D. M., Toro, M. M., Artifacts for Stamping Symmetric Designs, *The American Mathematical Monthly* 118(4) (2011), 327–343.
- [27] Jennings, G. A., Modern Geometry with Applications, *Universitext*, Springer-Verlag (1994).
- [28] Kapovich, M., Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups, *Progress in Mathematics* 183, Birkhäuser (2001).
- [29] Massey, W. S., Introducción a la topología algebraica, Editorial Reverté (1972).
- [30] Math & the Art of Escher, https://eschermath.org/wiki/Wallpaper_Patterns.html
- [31] Moise, E. E., Affine structures in 3-manifolds V: The triangulation theorem and Hauptvermutung, *Annals of Mathematics* 56 (1952), 96–114.
- [32] Montesinos Amilibia, J. M., Classical tessellations and three-manifolds, *Universitext*, Berlín-Heidelberg: Springer-Verlag, New York (1987).
- [33] Montesinos Amilibia, J. M., La Cristalografía Geométrica, *Horizontes Culturales: las fronteras de la Ciencia* (1999), 97–112.
- [34] Montesinos Amilibia, J. M., Cristalografía y arte, *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp)* 103(1) (2009), 207–222.
- [35] Montesinos Amilibia, J. M., Grupos cristalográficos y Topología en Escher, *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp)* 104(1) (2010), 27–47.
- [36] Munkres, J. R., Topología, Prentice Hall, (2000).
- [37] Pólya, G., Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene, *Zeitschrift für Kristallographie* 60 (1-6) (1924), 278–282.

- [38] Ratcliffe, J. G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag (1994).
- [39] Recursos de Investigación de la Alhambra (RIA) <https://www.alhambra-patronato.es/ria/>.
- [40] Reid, M., Szendrői, B., Geometry and Topology, Cambridge University Press (2005).
- [41] Rojo, J., Lecture notes, <https://sites.google.com/view/curso-ret-orbifolds/home> (2025).
- [42] Satake, I., On a Generalization of the Notion of a Manifold, *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 42 (1956), 359–363.
- [43] Scott, P., The Geometry of 3-Manifolds, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 15 (1983), 401–487.
- [44] Schattschneider, D. J., The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation, *The American Mathematical Monthly* 85(6) (1978), 439–450.
- [45] Schattschneider, D. J., The Mathematical Side of M. C. Escher, *Notices of the American Mathematical Society* 57(6) (2010), 706–718.
- [46] Steiner, M., Metric Rigidity of Crystallographic Groups, *Journal of Lie Theory* 14 (2004), 35–68.
- [47] Szczepański, A., Geometry of Crystallographic Groups, *Algebra and Discrete Mathematics* 5 (2024).
- [48] Tess tessellation software program, <http://www.peda.com/tess/>.
- [49] Thurston, W., Geometry and Topology of Three-manifolds, *Lecture Notes*, Princeton University (1976-79).
- [50] Thurston, W., Three-Dimensional Geometry and Topology, Princeton, NJ: Princeton University Press (1997).
- [51] Vince, A. Periodicity, Quasiperiodicity, and Bieberbach’s Theorem on Crystallographic Groups, *The American Mathematical Monthly* 104 (1997), 27–35.
- [52] Weyl, H., Symmetry, Princeton University Press (1989).
- [53] Workshop, Crystallographic Groups and Their Generalizations, *Workshop Katholieke Universiteit Leuven, Campus Kortrijk, Belgium* (1999).