



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

MÁS ALLÁ DEL TEOREMA DE VIZING

Autora: Paloma Juano de Echave

Director: Dr. Kolja Knauer

**Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica**

Barcelona, 10 de junio de 2025

Abstract

Vizing's theorem is a fundamental basis for the theory of edge colouring. This theorem provides an upper bound for the chromatic index and distinguishes between simple graphs of Class 1 ($\chi' = \Delta$) and those of Class 2 ($\chi' = \Delta + 1$). This dissertation presents two proofs of the theorem and algorithms for obtaining $(\Delta + 1)$ -colourings of any simple graph. The classification of simple graphs into Class 1 and Class 2 is an *NP-complete* problem, which rules out a simple and efficient characterisation of the general case.

Subsequently, various bounds for the chromatic index are obtained generalising to multigraphs. This dissertation includes both upper and lower bounds and their proofs. In turn, an algorithm is provided to obtain a $\left(3 \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil\right)$ -colouring of any multigraph.

This defines the theoretical framework for understanding the development of the recently proven Goldberg-Seymour conjecture. This conjecture gives an equality for the chromatic index of any graph.

Key words: Vizing's theorem, edge coloring, chromatic index, algoritmos de coloración

Resumen

El Teorema de Vizing es una base fundamental para la teoría de coloración de grafos por aristas. Este teorema da una cota para el índice cromático y discierne entre los grafos simples de Clase 1 ($\chi' = \Delta$) y los de Clase 2 ($\chi' = \Delta + 1$). En este trabajo se recogen dos pruebas del mismo y algoritmos destinados a obtener $(\Delta + 1)$ -coloraciones de cualquier grafo simple. La clasificación de grafos simples en Clase 1 y Clase 2 es un problema *NP-completo*, lo que descarta una caracterización simple y eficiente del caso general.

Posteriormente, generalizando a grafos multiarista se obtienen diversas cotas para el índice cromático. En este trabajo se recogen tanto cotas superiores como inferiores y las demostraciones de las mismas. A su vez se aporta un algoritmo para obtener una $\left(3 \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil\right)$ -coloración de cualquier multigrafo.

Quedando así definido el marco teórico para poder comprender el desarrollo de la recientemente demostrada conjetura de Goldberg Seymour. Esta conjetura da una igualdad para el índice cromático de cualquier grafo.

Palabras clave: Teorema de Vizing, coloración por aristas, índice cromático, algoritmos de coloración

Agradecimientos

*A mi familia,
agradecer su total incondicionalidad y
a mis amigas y amigos,
gracias por acompañarme en este largo viaje académico.*

*Al Dr. Kolja Knauer,
profesor inspirador y tutor comprensivo y paciente,
agradecerle especialmente su tiempo y
la oportunidad de adentrarme en este interesante mundo que son los grafos.*

Índice de figuras

1.	Los puentes de Königsberg.	1
2.	Grafos para el descifrado de la Máquina Enigma por Turing en la II Guerra Mundial.	1
3.	Ejemplos sobre el grafo de Petersen.	3
1.1.	Ejemplo de grafo.	5
1.2.	Ejemplos de multigrafos.	6
1.3.	Ejemplo de grafo completo.	7
1.4.	Grafo bipartito G	8
1.5.	Ejemplos de coloración sobre 1.2b.	9
1.6.	Grafo bipartito con 2-coloración.	9
1.7.	3 fat-triangle ($T(3)$).	10
1.8.	(a_1, a_2) -camino alternante maximal de coloración.	12
1.9.	Coloración f' en el (a_1, a_2) -camino alternante maximal de la figura 1.8 tras la inversión de colores.	12
1.10.	Ejemplo de abanico constituido por los vértices $\{y, v_1, v_2, v_3\}$ y aristas $\{e_0, \dots, e_3\}$	13
2.1.	Ejemplo de cuadrado latino.	17
2.2.	K_5 coloreado con $\Delta(K_5) + 1 = 6$ colores.	18
2.3.	Grafo G con arista sin colorear uv con $(\Delta(G) + 1)$ -coloración original.	18
2.4.	Recoloración si $a_1 \in \overline{C}(v_0) \cap \overline{C}(u)$	19
2.5.	Recoloración si $a_2 \in \overline{C}(v_1) \cap \overline{C}(u)$	20
2.6.	Recoloración si $a_3 \in \overline{C}(v_2) \cap \overline{C}(u)$	20
2.7.	Recoloración en el caso en que el camino alternante maximal pasa por un $v_i \in N(u)$ distinto de v_{k-1} y v_k . Las líneas más gruesas de colores naranja y verde representan el (a_0, a_k) -camino alternante maximal P	22
2.8.	Recoloración en el caso en que el camino alternante maximal llega a v_k	22
2.9.	Recoloración en el caso en que el camino alternante maximal llega a v_{k-1}	23
2.10.	Grafo G añadiendo y eliminando vértices.	24
2.11.	(a_1, a_2) -camino alternante maximal.	24

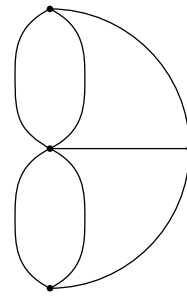
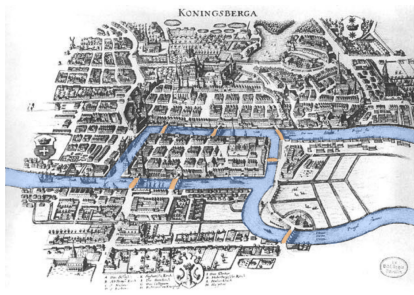
2.12. Coloración tras la inversión de colores en el (a_1, a_2) -camino alternante maximal de la figura 2.11.	24
2.13. Grafo G sin la arista uv (verde) y sin $f^{-1}(a_k)$ (azul).	25
3.1. Los conjuntos disjuntos del lema 3.1.5.	31

Índice general

Índice de figuras	iii
Introducción	1
1. Conceptos generales	5
1.1. Conceptos sobre grafos	5
1.2. Coloración	8
1.3. Técnicas de recoloración	11
1.4. Cota inferior	13
2. El Teorema de Vizing	15
2.1. Clases de grafos	15
2.2. Demostración del Teorema de Vizing por inducción sobre número de aristas . . .	18
2.3. Demostración del Teorema de Vizing por inducción sobre número de vértices . .	22
2.4. Algoritmo de coloración de grafos simples	25
3. Coloración multiarista	29
3.1. Cota superior	29
3.1.1. Demostración de la última cota	30
3.2. Algoritmo multiarista	33
4. Conclusiones	35
Bibliografía	37

Introducción

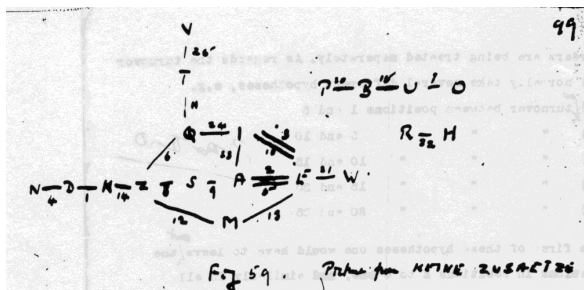
Los orígenes de la Teoría de grafos se remontan al siglo XVIII en que Leonhard Euler (Basilea, 15 de abril de 1707 - San Petersburgo, 18 de septiembre de 1783) resuelve el famoso problema de puentes de los Königsberg, que consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel en la ciudad de Königsberg, actual Kaliningrado, de manera que se pasara exactamente una vez por cada uno de ellos, sin repetir ninguno y volviendo al punto de partida. Este problema se puede modelar abstrayendo las orillas del río como vértices y los puentes como aristas que unen esos vértices, dando lugar a lo que conocemos como grafo y cuya representación puede verse en la figura 1.



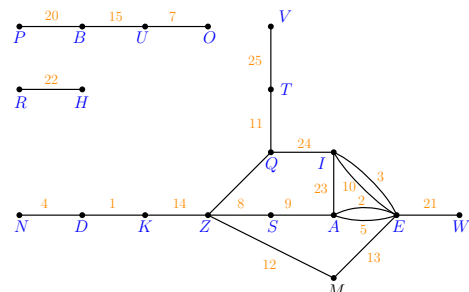
(a) Los puentes de Königsberg en 1613. (Wikimedia Commons) (b) Grafo de los puentes de Königsberg.

Figura 1: Los puentes de Königsberg.

Los grafos nos han acompañado en la resolución de problemas y se pueden encontrar algunos con curiosidad histórica, como el hallado en la página 99 del libro *Treatise on the Enigma. Proof's book* [20], mecanografiado, manuscrito y anotado por Alan Turing (Paddington, Londres; 23 de junio de 1912 - Wilmslow, Cheshire; 7 de junio de 1954) y que fue utilizado en el descifrado de la Máquina Enigma durante la II Guerra Mundial. Se muestra dicho grafo en la figura 2.



(a) Grafo manuscrito.



(b) Notación moderna.

Figura 2: Grafos para el descifrado de la Máquina Enigma por Turing en la II Guerra Mundial.

Desde aquel inicio como ejercicio lúdico, pasando por su utilización en conflictos bélicos, hasta la actualidad, este marco teórico ha desempeñado un papel transformador en la evolución del conocimiento matemático, convirtiéndose en parte estructural de la Matemática actual e imprescindible hoy en día en las ciencias aplicadas, desde Computacionales o de Ingeniería hasta las Ciencias Sociales, la Química estructural, la Biología o la Genética, la Ciencia de datos o la Inteligencia Artificial.

Desde esa perspectiva evolutiva, su estudio es un interesante ejercicio de construcción de pensamiento matemático que, a través del establecimiento de problemas, conjeturas y búsqueda de demostraciones o de contraejemplos, han permitido avanzar y enriquecer el conocimiento matemático con nuevos enfoques. Además, aportar el uso de recursos visuales a su potencial aplicación a problemas complejos relacionados con la vida cotidiana, la hace especialmente atractiva para la realización de un trabajo de fin de estudios.

Dentro de los problemas cotidianos que se pueden abordar en el marco de la Teoría de grafos encontramos aplicaciones variadas en ámbitos diversos como puede ser el académico, con la gestión de itinerarios en planes de estudio mediante elección de optativas, pudiendo asignar nodos a hitos académicos y aristas a posibles caminos o itinerarios. El caso de la distribución de espacios y horarios de clase o de problemas de planificación de tareas en un proyecto (diagramas de Gantt), se puede abordar construyendo un grafo de intervalos específico. Este tipo de grafos está especialmente indicado en el análisis de conflictos de tareas o tiempos y para la optimización en el uso de recursos en proyectos, tal como se muestra en las páginas 139 y 140 de [5].

De todas las posibilidades, dado su papel clave y transversal dentro de la Teoría de grafos para este trabajo se ha escogido específicamente la Teoría de coloración. Originalmente este problema se ha abordado desde la coloración de vértices y ha tenido un extenso desarrollo. Cuando se ha querido abordar la coloración de otro elemento principal de los grafos, como son las aristas, se ha visto que su coloración se corresponde con la de los vértices de los grafos de línea, es así que, puede considerarse como caso particular de coloración de vértices. Sin embargo, abordar el estudio de la coloración por aristas tiene especial interés, dado que las propiedades o cotas que se deducen de esta clase de grafos son más finas y mejores que en los grafos en general. En este sentido, encontramos que el estado del arte actual en la Teoría de coloración de aristas es muy activo y diverso, tanto desde el punto de vista teórico como algorítmico, constituyendo uno de los problemas más estudiados en Teoría de grafos. Dicho problema consiste en colorear las aristas de un grafo sin bucles, tal que aristas adyacentes tengan diferente color y que el número de colores utilizados sea el menor posible. A este número mínimo se conoce como su índice cromático.

Abordar los grafos mediante coloración contribuye aún más a la visualización no solo de problemas caracterizados por su complejidad, sino también del alcance de las soluciones propuestas, para las que se abre una ventana con nuevos retos que resolver en forma, por ejemplo, de mejorar cotas o buscar la eficiencia de los algoritmos.

Un ejemplo muy ilustrativo lo encontramos en el *grafo de Petersen*, creado por Julius Petersen en 1898 como contraejemplo en su propia investigación sobre grafos cúbicos (son aquellos en los que cada vértice tiene 3 aristas incidentes). Desde entonces, este pequeño grafo (ver figura 3a) de 10 vértices y 15 aristas mantiene el interés y su utilidad debido a las interesantes propiedades que presenta, entre las que destacan no ser planar (ya que, a excepción de los vértices, no se puede dibujar en un plano sin que sus aristas se crucen), está muy conectado y es altamente simétrico. En cuanto a las aristas, no existe una 3-coloración, por lo que requiere de una 4-coloración (ver ejemplo de la figura 3b).

Estas propiedades siguen dándole utilidad como contraejemplo en teoremas y conjeturas, y herramienta de prueba para algoritmos y propiedades de estructuras altamente simétricas y

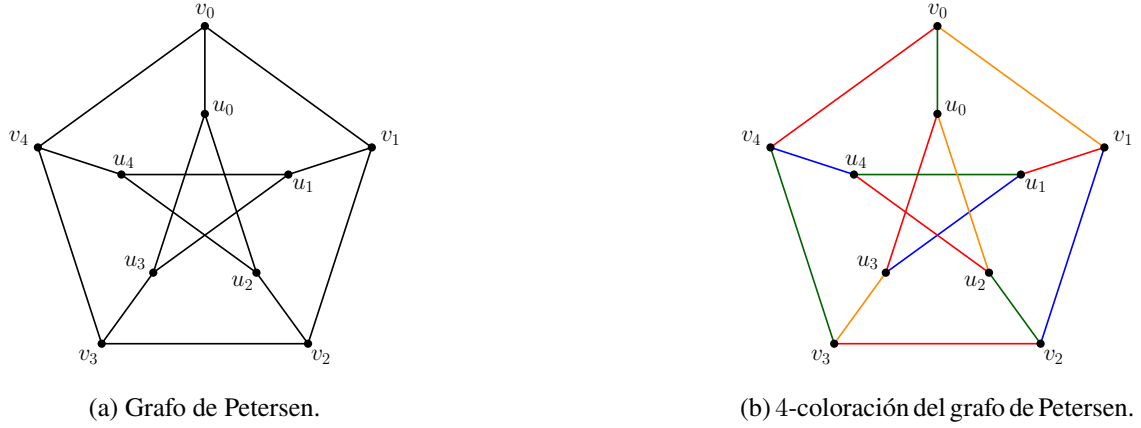


Figura 3: Ejemplos sobre el grafo de Petersen.

conectadas, que pueden consultarse en [6].

En particular, sus propiedades en coloración de aristas lo hacen interesante como ejemplo en la resolución de emparejamientos en torneos deportivos tipo liga en la que todos juegan con todos. Un emparejamiento en un grafo es un conjunto de aristas sin vértices en común y el emparejamiento máximo es el que tiene el mayor número posible de aristas. En el grafo clásico de Petersen este valor es de 5 y empareja a los 10 vértices o equipos de manera que cada equipo solo aparece una vez en ese emparejamiento. Si cada emparejamiento corresponde a una jornada del torneo y este grafo tiene 15 aristas, podemos obtener 3 jornadas de emparejamientos basados en este grafo. Es así, que puede utilizarse como un modelo sencillo para construir un calendario del torneo de manera eficiente y equilibrada.

En este trabajo, vamos a partir de uno de los resultados de referencia relativo al problema de coloración de grafos (1964), en el que el matemático ucraniano Vadim Georgievich Vizing (Kiev, 25 de marzo de 1937 - Odessa, 23 de agosto de 2017) formuló el denominado *Teorema de Vizing* en [22], donde se muestra que el índice cromático está limitado por los valores de Δ y $\Delta + 1$, siendo Δ el grado máximo del grafo.

Analizando el índice cromático, el planteamiento de este teorema posibilita la clasificación en dos tipos de grafos, los de Clase 1, que se corresponden con aquellos en los que su índice cromático es igual a Δ y de Clase 2, que son los que cumplen que su índice cromático es igual a $\Delta + 1$. En el caso del grafo de Petersen, vemos que es un grafo de Clase 2 de Vizing.

Más allá del Teorema de Vizing comienza con la coloración de aristas en grafos simples y alcanza los grafos multiarista a las puertas de la conjetura de Goldberg Seymour.

En el trabajo se abordan dos demostraciones del Teorema de Vizing basadas en el principio de Inducción, aunque una utiliza las aristas y otra los vértices como base para su prueba. En el desarrollo de ambas demostraciones se ha puesto en valor, además del rigor, la claridad y un buen uso de los recursos visuales con el objetivo de mejorar su comprensión para lectores poco avanzados.

Estructura de la Memoria

La memoria de este trabajo consta de cuatro capítulos que están organizados de la siguiente manera.

En el primer capítulo, establecemos las bases necesarias para el desarrollo del resto del trabajo. Así, se definen los conceptos básicos tanto de grafos generales como específicamente de coloración por aristas que es el tema principal del trabajo.

En el segundo capítulo, que se centra en los grafos simples, se demuestra el Teorema de Vizing, base de cualquier resultado posterior en coloración por aristas, obteniéndose dos algoritmos de coloración. A su vez, se ven ejemplos de grafos de Clase 1 y 2 que son los tipos de grafos simples que, como se ha indicado, clasifica el Teorema de Vizing.

En el tercer capítulo, se generalizan conceptos a multigrafos y se ven diversas cotas superiores que quedan demostradas dado que se demuestra la mejor de ellas. También se muestra aquí un algoritmo de coloración para grados múltiples.

Para finalizar en el cuarto y último capítulo, se recogen las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1 Conceptos generales

1.1. Conceptos sobre grafos

En esta sección se introducirán los conceptos básicos fundamentales que posteriormente serán necesarios para el desarrollo del trabajo. Se basan en la terminología usada por [Diestel](#) en el capítulo 1, The Basics, de [5] y por [Vieites Rodríguez et al.](#) en el texto [21] .

Primeramente, comenzaremos con los más sencillos e intuitivos.

Un *grafo* es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman *vértices* o *nodos* y E es un conjunto cuyos elementos se denominan *aristas*.

Se muestra, a continuación, un ejemplo de un grafo $G = (V, E)$ dado por:

$$V = (1, 2, 3, 4, 5) \text{ y } E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$$

y cuya representación gráfica se puede ver en la figura 1.1.

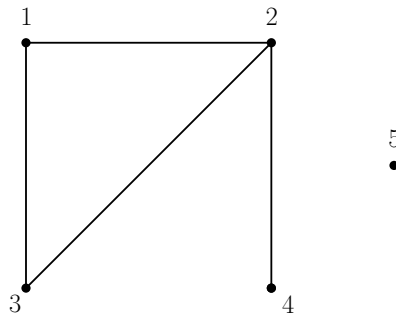


Figura 1.1: Ejemplo de grafo.

$V(G)$ es el *conjunto de vértices* del grafo G y $E(G)$ es el *conjunto de aristas* del grafo G .

Podemos distinguir entre:

- Un grafo G es *no dirigido* si sus aristas son pares de vértices no ordenados. En este caso, $e = \{u, v\}$, indica que la arista e une los vértices u y v , se puede escribir como $e = uv$ (o $e = vu$).
- Un grafo G , se dice que es *dirigido* si sus aristas son pares de vértices ordenados. En este caso, $e = (u, v)$ indica que la arista e sale del vértice u y termina en el vértice v . Por lo que la arista uv no es la misma que la vu .

Definición 1.1.1. *Orientar un grafo no dirigido es darle una dirección u orientación a las aristas.*

Un *bucle* es una arista que conecta un nodo consigo mismo o lo que es lo mismo la arista que solo tiene un extremo. Se denominan *multiaristas*, *aristas múltiples* o *aristas paralelas* si dados dos nodos $v_1, v_2 \in V$ están conectados por más de una arista. El *número de aristas entre dos vértices*, v_1 y v_2 , se denomina $\mu(v_1 v_2)$.

Un *grafo simple* es aquel que no tiene ni bucles ni multiaristas. El ejemplo de grafo simple es el descrito en la figura 1.1.

Por el contrario, un *multigrafo* $G = (V, E)$ es aquel grafo que puede tener bucles y aristas múltiples.

Dos ejemplos de multigrafo G y G' son los dados por

$$G = (V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\})$$

$$G' = (V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\})$$

Que gráficamente se pueden observar en la figura 1.2.



Figura 1.2: Ejemplos de multigrafos.

Dos *aristas* se denominan *adyacentes* si tienen un nodo común. $E(v)$ será el *conjunto de aristas adyacentes al vértice v* . Un vértice $v \in G$ y una arista $e \in G$, se dice que son *incidentes* si $v \in e$. Se dice que dos *vértices* $u, v \in V(G)$ son *adyacentes* o *vecinos* si $\{u, v\} = e \in E$ y $u \neq v$. Equivalentemente en aristas, si $e_1, e_2 \in E(G)$ y $v \in e_1 \cap e_2$ con $v \in V(G)$, entonces ambas *aristas* son *adyacentes*.

Un grafo $G = (V, E)$ es *vacío* o *trivial* es aquel en que $V = \emptyset$ y $E = \emptyset$, es decir, $G = (\emptyset, \emptyset)$.

Un grafo $G = (V, E)$ es *completo* si todos sus vértices están conectados entre sí y se denomina K_n siendo $n = |V(G)|$.

Un ejemplo de grafo completo es $G = (V, E) = K_4$ siendo

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \text{ y } E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$$

como se puede observar en la figura 1.3.

Definición 1.1.2. Un grafo $G = (V, E)$ es *k-regular* si cada vértice tiene grado k .

Sean G y G' grafos, se define la *unión de G y G'* como el conjunto $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ y la *intersección de G y G'* como $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$.

Si $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ y $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E') = (\emptyset, \emptyset)$ se dice que son *disjuntos*.

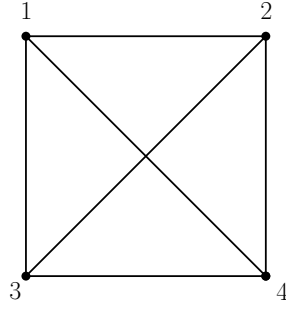


Figura 1.3: Ejemplo de grafo completo.

Definición 1.1.3. Sea $G = (V, E)$ es un grafo y $e \in E(G)$ una arista, el grafo $G \setminus e := (V, E \setminus \{e\})$ es el grafo G sin la arista e . El grafo obtenido de eliminar únicamente aristas, se denomina grafo inducido. Análogamente, sea una arista $e' \notin E(G)$, se puede definir $G + e := (V, E \cup \{e\})$ como el grafo G añadiéndole la arista e' .

También se puede definir el *grafo generado al añadir un vértice*. Si $G = (V, E)$ es un grafo y $v \notin V(G)$, el grafo $G + v := (V \cup \{v\}, E)$ es un grafo añadiendo un vértice.

Por otra parte, el *grafo generado al eliminar un vértice*. Si $G = (V, E)$ es un grafo y $v' \in V(G)$, el grafo resultante es $G \setminus v' := (V \setminus \{v'\}, E \setminus \{e_i = v_i v' \mid v_i \in N(v')\})$.

Definición 1.1.4. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces G' es un subgrafo de G . O lo que es lo mismo, un subgrafo es aquel que es obtenido borrando vértices o aristas. Se denota con $G' \subseteq G$. Se dice que es un subgrafo propio si $E' \neq E$.

Si $U \subseteq V(G)$, $G \setminus U$ es el grafo G borrando todos los vértices en $U \cap V$ y sus aristas incidentes. $G \setminus U := (V \setminus U, E \setminus \{e_{i,j} = u_i v_j \mid u_i \in U, v_j \in N(u)\})$.

Sea $G = (V, E)$ un grafo no trivial, al *conjunto de vecinos de un vértice* $v \in V$ se denota por $N_G(v)$ o $N(v)$. Es decir:

$$N_G(v) = N(v) = \{u \in V \mid e = uv \in E\}$$

De la misma forma si en vez de un vértice tenemos un conjunto de vértices U , se denota por $N(U)$. Es decir:

$$N(U) = \{u \in V \mid e = uv \in E \forall v \in U\}$$

Definición 1.1.5. Sea $G = (V, E)$ grafo. El grado o valencia $d_G(v) = d(v)$ de un vértice $v \in V$ es el número de aristas incidentes a v .

Si un vértice tiene grado 0, se denomina *aislado*.

Se llama *grado mínimo del grafo* $G = (V, E)$ a $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\}$.

Definición 1.1.6. El grado máximo del grafo $G = (V, E)$ es $\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}$.

Definición 1.1.7. Un camino es un grafo no vacío $P = (V, E)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0 x_1, x_1 x_2, \dots, x_{k-1} x_k\}$$

donde todos los $x_i \forall i = 1, \dots, k$ son distintos.

Si $P = x_0, x_1, \dots, x_k$ es un camino, $P + x_k x_0$ es un ciclo.

Definición 1.1.8. Un grafo $G = (V, E)$ se llama bipartito si admite una partición de dos subconjuntos de vértices tal que cada arista tiene cada extremo en un subconjunto distinto

$$G = (V_1 \dot{\cup} V_2, E)$$

Ejemplo 1.1.9. Un ejemplo de grafo bipartito $G = (V, E)$ es el dado por la figura 1.4.

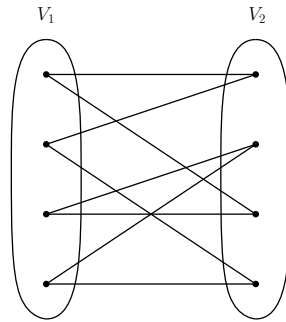


Figura 1.4: Grafo bipartito G .

Este trabajo comienza en su introducción con la descripción del problema de Leonhard Euler de los puentes de Königsberg. Ese problema fue estudiado en su momento con detalle, y motiva las siguientes definiciones:

Definición 1.1.10. Un tour euleriano $W = (V, E)$ es aquel camino que recorre cada arista del grafo exactamente una vez (pudiendo repetirse los vértices).

Sea un grafo conexo $G = (V, E)$ con el grado de todos sus vértices par. Entonces, podemos conseguir un tour euleriano, tal como indica Diestel en las páginas 22-23 de su libro [5]. La idea de la demostración es construir un tour que no tiene por qué contener todas las aristas del grafo. Entonces se toma una de las aristas que no está en el tour y se consigue un tour de aristas que no estaban en el ciclo original y se unen ambos tours. Este proceso se repite tantas veces como sea necesario. Este algoritmo funciona por la paridad del grado de los vértices, porque al ir uniendo tours, seguimos manteniendo la paridad de los restantes.

Definición 1.1.11. Un grafo euleriano $G = (V, E)$ es aquel grafo que tiene un tour euleriano (definición 1.1.10)

Teorema 1.1.12 (Teorema de Euler). Sea un grafo euleriano $G = (V, E)$. Entonces, G es conexo y todos los vértices tienen grado par.

La idea de la demostración es que, sea $G = (V, E)$ grafo con un tour euleriano W . Al tener un tour euleriano, el número de aristas que entran a cada vértice es igual al número de aristas que salen de él. Por tanto, $d(v_i)$ con $v_i \in V$ es par.

1.2. Coloración

En este trabajo se va a tratar específicamente de cotas sobre el número de colores necesario para colorear un grafo, por tanto definiremos los conceptos más relevantes en este ámbito más concreto.

Como vamos a centrarnos en la coloración por aristas, al nombrar multigrafos en cualquier momento, se sobreentiende que no tienen bucles, dado que un bucle impide colorear. Siempre que se hable de grafo, se trata de grafo con multiaristas sin bucles a no ser que se especifique lo contrario.

En esta sección también seguiremos a [Diestel](#) en el capítulo 5 (Colouring) de [\[5\]](#).

Definición 1.2.1. Sea $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, una k -coloración propia por aristas es una función $f : E \rightarrow \{a_1, \dots, a_k\}$ tal que si $e, e' \in E$ que comparten un vértice, entonces $f(e) \neq f(e')$. Denominamos $a_i \forall i = 1, \dots, k$ a los colores.

Ejemplo 1.2.2. Si tomamos el ejemplo de la figura 1.2, dos coloraciones serían:

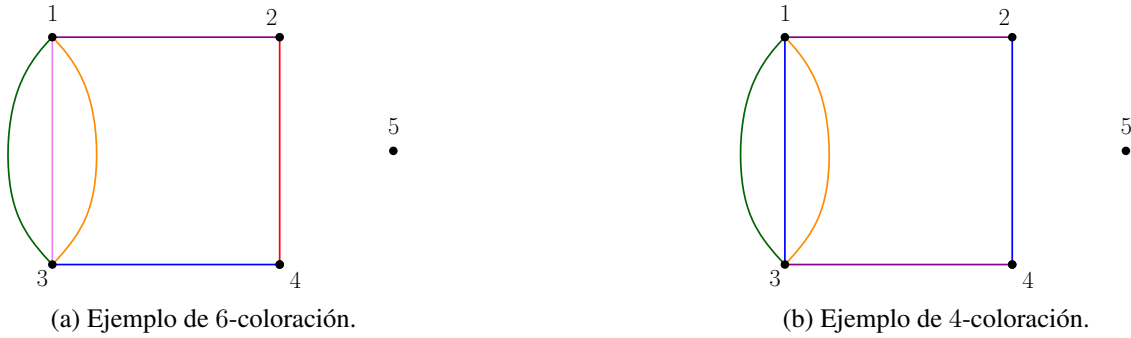


Figura 1.5: Ejemplos de coloración sobre 1.2b.

Ejemplo 1.2.3. Otro ejemplo de coloración, sería la coloración f del grafo bipartito $G = (V, E)$ de la figura 1.4 como se observa en 1.6.

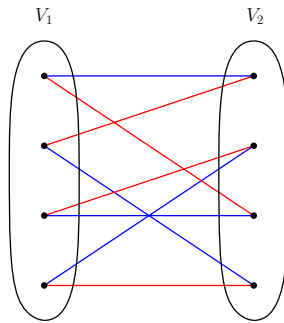


Figura 1.6: Grafo bipartito con 2-coloración.

Usamos " $\rightarrow$ " para asignar un color a a una arista e . ($a_i \rightarrow e$).

Teniendo f una coloración, se denomina recoloración a una nueva asignación de colores teniendo como resultado una coloración f' bien definida (1.2.1).

Definición 1.2.4. Sea $G = (V, E)$ y f una coloración, llamamos índice cromático o número cromático por aristas a $\chi'(G) = \min\{k \mid G \text{ tiene una } k\text{-coloración por aristas, } f\}$.

Lema 1.2.5. Sea $G = (V, E)$ grafo, f coloración, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Demostración. sea $G = (V, E)$ grafo y f coloración, si $\chi'(G) < \Delta(G)$, los vértices v_i tal que $d(v_i) = \Delta(G)$, por definición de coloración (definición 3) f no sería una coloración porque habría por lo menos dos $e, e' \in E$ tal que $f(e) = f(e')$. $\square$

Podemos observar que la coloración del ejemplo 1.5a no es una $\chi'(G)$ -coloración de 1.2b porque en la figura 1.5b necesitamos menos colores para colorearlo.

Ejemplo 1.2.6. Un ejemplo de multigrafo son los k fat-triangles $T(k) = (V, E)$ siendo $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E = \{e_0, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k+1}, e_{2k+2}, \dots, e_{3k+2}\}$ donde las aristas $\{e_0, \dots, e_k\}$ tienen como extremos v_1 y v_2 , las aristas $\{e_{k+1}, \dots, e_{2k+1}\}$ tienen como extremos v_2 y v_3 y $\{e_{2k+2}, \dots, e_{3k+2}\}$ tienen como extremos v_1 y v_3 . Lo que significa que cada vértice está conectado k veces con los otros dos ($\mu(v_1v_2) = \mu(v_2v_3) = \mu(v_1v_3) = k$). El 3 fat-triangle se puede observar en la figura 1.7.

En este ejemplo $\chi'(T(k)) = 3k$ porque todas las aristas tienen que ser de colores distintos. Cabe destacar que al ser $\Delta(T(k)) = 2\mu(G)$, obtenemos

$$\chi'(T(k)) = 3k = 3\mu(G) = 2\mu(G) + \mu(G) = \Delta + \mu(G)$$

Y a su vez,

$$\chi'(T(k)) = 3k = 3\mu = \frac{3}{2}\Delta$$

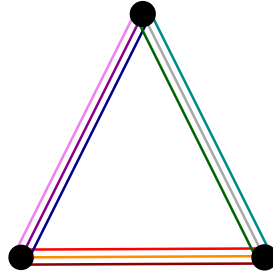


Figura 1.7: 3 fat-triangle ($T(3)$).

Definición 1.2.7. Dado $G = (V, E)$ y f coloración (definición 1.2.1), se denomina $C(v) := \{a_i \mid f(e_i) = a_i, e_i \text{ aristas de extremos } v_i \in N(v) \text{ y } v\}$ al conjunto de colores presentes en el vértice v . Y el conjunto de los colores de aristas entre dos vértices es $C(v_1, v_2) := \{a_i \mid f(e_i) = a_i, e_i \text{ aristas de extremos } v_1 \text{ y } v_2\}$. Finalmente, al conjunto de colores presentes en el grafo G como $C(G) := \{a_i \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$.

Definición 1.2.8. Sea $G = (V, E)$ y f coloración, el conjunto complementario al de colores de un vértice v es $\bar{C}(v) := C(G) \setminus C(v)$ y los denominamos no colores.

Definición 1.2.9. Sea $G = (V, E)$ y f una coloración, $M \subseteq E$ es un emparejamiento si y solo si todo $v \in V$ es incidente como mucho a una $e \in M$. Denotamos como $\mathcal{M} = \max\{|M| \mid M \text{ emparejamiento}\}$.

Si conseguimos un emparejamiento en el que cada vértice es incidente a una arista del emparejamiento se denomina emparejamiento perfecto. Por otra parte, podemos observar que una k -coloración es exactamente lo mismo que una partición de aristas en k emparejamientos.

Una propiedad a raíz del concepto de emparejamiento es la siguiente:

Lema 1.2.10. Sea $G = (V, E)$ un grafo (no necesariamente simple) con una coloración f .

$$\chi'(G) \geq \frac{|E(G)|}{|\mathcal{M}(G)|} \quad (1.2.1)$$

Demostración. Sea $G = (V, E)$ con una $\chi'(G)$ -coloración f . Sea $\chi'(G) = k$. Entonces cada uno de los k colores corresponde con un emparejamiento $M_1, \dots, M_k$. Por definición de emparejamiento,

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^k M_i \text{ y } M_i \cap M_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

Por otra parte, $|M_i(G)| \leq |\mathcal{M}(G)| \quad \forall i = 1, \dots, k$ porque $\mathcal{M}(G)$ es el emparejamiento máximo.

Es por tanto que,

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^k |M_i(G)| \leq \sum_{i=1}^k |\mathcal{M}(G)| = k \cdot |\mathcal{M}(G)| \quad (1.2.2)$$

Despejando 1.2.2 nos queda:

$$\frac{|E(G)|}{|\mathcal{M}(G)|} \leq k = \chi'(G)$$

Entonces obtenemos 1.2.1, quedando demostrado el lema 1.2.10. $\square$

Finalmente, pese a que hay un resultado interesante que explica Andersen en [1] sobre multigrafos infinitos ($|V(G)| = \infty$ o $|E(G)| = \infty$ o ambas) que dice que si $G = (V, E)$ grafo infinito, $\chi' = \Delta$ y k es finito, entonces un grafo infinito G tiene una k -coloración si y solo si cada subgrafo finito tiene una k -coloración. Se entiende que en todo momento se está hablando de grafos finitos, con número de aristas y vértices finito dado que el estudio de grafos infinitos se escapa del alcance de este trabajo.

1.3. Técnicas de recoloración

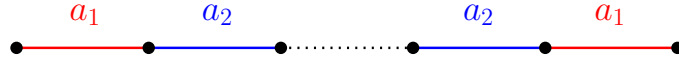
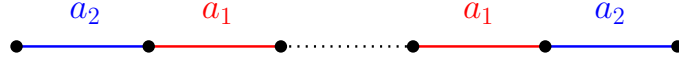
Definición 1.3.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo, f una coloración y $a_1, a_2 \in C(G)$. Un (a_1, a_2) -camino alternante maximal es aquel camino $P = (V_P, E_P)$ definido como en la definición 1.1.7 tal que $a_1 \rightarrow x_i x_j \forall i \geq 0$ par, $j \geq 1$ impar. Y $a_2 \rightarrow x_i x_j \forall i$ impar, j par. Este camino, para ser maximal, tiene que cumplir que si $a_1 \in C(x_k) \implies a_2 \in C(x_k)$ y viceversa.

Otra forma alternativa de definir $P = (V_P, E_P)$ es dado $G = (V, E)$ y f una coloración, dos colores (a_1, a_2) inducen un subgrafo de grado como mucho 2, por lo que sus componentes son caminos o ciclos, cada componente es un (a_1, a_2) -camino alternante maximal. Véase la figura 1.8.

Lema 1.3.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo, f una coloración y (a_1, a_2) -camino alternante maximal $P = (V_P, E_P)$ siendo $a_1, a_2 \in C(G)$. El (a_1, a_2) -camino alternante maximal que pasa por un vértice v es único.

Demostración. Este será único debido a que al ser maximal, no se puede prolongar. Y en cada vértice como mucho tendremos una vez cada color por lo que está unívocamente determinado. $\square$

Definición 1.3.3. Cabe destacar que teniendo una coloración f de $G = (V, E)$, en la que hay un camino alternante maximal $P = (V_P, E_P)$ definido como en la definición 1.3.1, podemos definir una recoloración, f' , dada al cambiar la alternancia de los colores, o lo que es lo mismo, que en P , $a_1 \rightarrow x_i x_j \forall i \geq 1$ impar, $j \geq 0$ par. Y $a_2 \rightarrow x_i x_j \forall i$ par, j impar. A esta recoloración la llamamos invertir los colores de P . Véanse figuras 1.8 y 1.9.

Figura 1.8: (a_1, a_2) -camino alternante maximal de coloración.Figura 1.9: Coloración f' en el (a_1, a_2) -camino alternante maximal de la figura 1.8 tras la inversión de colores.

Lema 1.3.4. Sea $G = (V_1, E_1)$ un grafo y f una coloración sobre G , invertir los colores de un (a_1, a_2) -camino alternante maximal $P = (V, E)$ (definición 1.3.1) resulta una recoloración válida (definición 1.2.1).

Demostración. Sin contar con los extremos $(x_0$ y $x_k)$, $a_1 \cup a_2 \in C(x_i) \forall x_i \in V(P) \setminus \{x_0, x_k\}$. Por lo que intercambiarlos no cambiaría los conjuntos $C(x_i)$. Así que, el único caso en el que podría ser problemático es en los extremos. Pero al haber seleccionado el camino maximal, si en f , $a_1 \in C(x_k) \implies a_2 \in C(x_k)$, después en f' , $a_2 \in C(x_k) \implies a_1 \in C(x_k)$ y viceversa. Por lo que f' sería una coloración propia (definición 1.2.1) bien definida intercambiando los colores del camino alternante maximal. $\square$

Definición 1.3.5. Sea una arista e de G , se llama crítica si $\chi'(G \setminus e) < \chi'(G)$.

Lema 1.3.6. Tomando un grafo $G = (V, E)$, existe un subgrafo $G' \subseteq G$ con $\chi'(G) = \chi'(G')$ que contiene una arista crítica e (definición 1.3.5).

Demostración. Puede ser que $G = (V, E)$ no tenga ninguna arista crítica. Si este es el caso, se pueden eliminar las aristas necesarias hasta obtener un subgrafo de G , $G' = (V, E')$ con una arista crítica $e \in E'$ de forma que $\chi'(G) = \chi'(G')$.

Sea $E = (e_1, \dots, e_m)$. Entonces, se considera $G' = G \setminus e_1$ (definición 1.1.3). Si $\chi'(G') < \chi'(G)$, G tendría una arista crítica y e_1 es la arista crítica.

De lo contrario, se considera $G' = (V, E \setminus \{e_1, e_2\})$. Si $\chi'(G') < \chi'(G)$, G' tendría una arista crítica y e_2 es la arista crítica.

Así sucesivamente hasta obtener una arista crítica. Este algoritmo va a llegar a su fin porque estamos tratando de grafos finitos. $\square$

Definición 1.3.7. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $G' = (V, E')$ un subgrafo de G , $(E' \subset E)$. Sea una arista $e_0 \in E \setminus E'$ con extremos x, y . Dada una coloración f de G' (e_0 sin colorear). Llamamos abanico de x a una secuencia de aristas $e_0, \dots, e_r$ $r \geq 0$ incidentes a x con extremos $y = v_0, v_1, \dots, v_r$ tal que e_0 está sin colorear y $a_i \in \overline{C}(v_{i-1}) \cap C(xv_i) \forall 1 \leq i \leq r$.

Para denotar los abanicos vamos a aclarar cuales son las aristas que lo constituyen y los extremos de las mismas, sus vértices incidentes. En caso de los grafos simples, con los nodos sería suficiente. En cambio, en caso de los multigrafos sería necesario especificar a cual de las aristas nos estamos refiriendo porque podría haber varias.

Ejemplo 1.3.8. Un ejemplo de abanico sería el siguiente, sea $G = (V, E)$ y la coloración f de G' tal y como se aprecia en la figura 1.10 quedando e_0 sin colorear ($e_0 \notin G'$). El abanico de x sería el constituido por los vértices $\{y, v_1, v_2, v_3\}$ y aristas $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Podemos comprobar fácilmente que es un abanico, dado que el rojo no está en $C(y)$. El azul no está en $C(v_1)$. El verde

no está en $C(v_2)$. Ni la arista naranja ni la violeta podrían continuar el abanico dado que el naranja y el violeta están en $C(v_3)$.

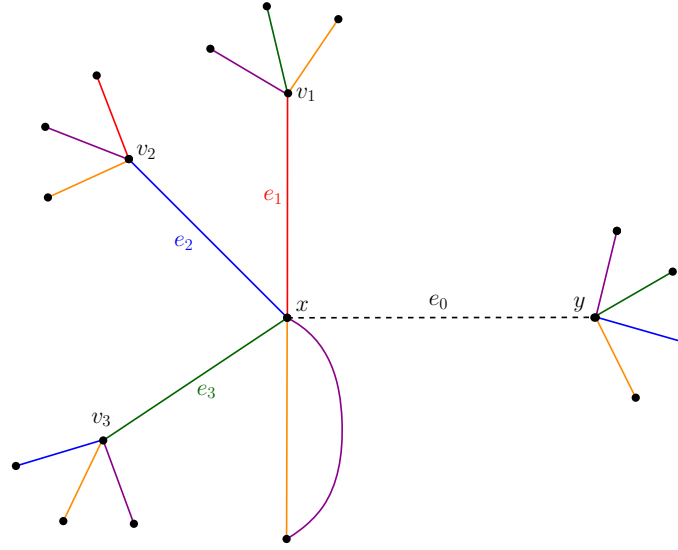


Figura 1.10: Ejemplo de abanico constituido por los vértices $\{y, v_1, v_2, v_3\}$ y aristas $\{e_0, \dots, e_3\}$.

1.4. Cota inferior

Cuando hablamos de coloración por aristas, lo que más nos interesa es obtener cotas del índice cromático o en el mejor de los casos igualdades. Con el objetivo de llegar a una igualdad, se intenta aproximar desde una cota inferior.

Teorema 1.4.1. Sea G , $\chi'(G) \geq \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|-1} \mid H \subseteq G, |V(H)| \geq 3 \text{ impar} \right\}$

Demostración. Sea $H \subseteq G$ con $|V(H)| \geq 3$ e impar. Al ser H un subgrafo de G , el número de colores necesario para colorearlo será menor o igual,

$$\chi'(G) \geq \chi'(H) \quad (1.4.1)$$

Por otra parte, el número de colores que necesitamos como mínimo para colorear H va a ser como mínimo el número de aristas entre el máximo emparejamiento de H (lema 1.2.10).

$$\chi'(H) \geq \frac{|E(H)|}{|\mathcal{M}(H)|} \quad (1.4.2)$$

Al ser $|V(H)|$ impar, $|\mathcal{M}(H)| \leq \frac{|V(H)|-1}{2}$. Por lo que,

$$\frac{|E(H)|}{|\mathcal{M}(H)|} \geq \frac{2|E(H)|}{|V(H)|-1} \quad (1.4.3)$$

Uniendo las desigualdades 1.4.1, 1.4.2 y 1.4.3 se obtiene el resultado,

$$\chi'(G) \geq \frac{2|E(H)|}{|V(H)|-1}$$

□

Una vez obtenida esta cota inferior, en 1973, Mark K. Goldberg, del Instituto Politécnico Rensselaer, en el artículo [7] y Paul D. Seymour, de la Universidad de Princeton, en el artículo [18], formularon la siguiente conjetura sobre el índice cromático en aristas, a la que llegaron de forma independiente.

Conjetura 1.4.2 (Conjetura de Goldberg-Seymour). *Sea G grafo,*

$$\chi'(G) = \max \left\{ \Delta(G) + 1, \max \left\{ \Delta(G) + 1, \frac{2|E(H)|}{|V(H)| - 1} \mid H \subseteq G, |V(H)| \text{ impar} \right\} \right\}$$

La conjetura de Goldberg-Seymour, pese a haber sido postulada hace más de medio siglo, ha sido demostrada recientemente, una primera demostración fue publicada en 2019 por [Chen, Jing y Zang](#) en el artículo [3], siendo una demostración muy larga y compleja. Estos mismos autores depuraron la demostración, reduciéndola de 80 páginas a 22 en el año 2024 y la publicaron en [2]. Pese a haber hecho una gran reducción, la densidad y complejidad conceptual han hecho que todavía no esté comprobada.

En esta última demostración, [2], podemos ver muchas analogías con la demostración de 2.2. Dado que partiendo de una coloración parcial construyen estructuras más generales para que haciendo un cambio de colores (lo que en abanicos llamamos inversión) se obtenga una coloración sin añadir colores.

En esta demostración aparece también un algoritmo que consigue encontrar una coloración de índice cromático por aristas dado por la Conjetura 1.4.2 en un tiempo polinomial $o(|V|^5|E|^3)$.

Capítulo 2 El Teorema de Vizing

Como se ha comentado en la introducción, el matemático ruso-ucraniano Vadim G. Vizing cuando trabajaba en Novosibirsk (Siberia) en el año 1964 publicó en [22] un teorema que posteriormente se ha conocido como el *Teorema de Vizing*. Por su lado, el matemático indio Ram Prakash Gupta descubrió el teorema de forma independiente mientras realizaba su doctorado entre 1965 y 1968 [10] [11].

Vizing mencionó en varias entrevistas que su trabajo se inspiró en el teorema que Claude Shannon enunció y demostró en 1949 en el artículo [19], planteando que los multigrafos (sin bucles) podían colorearse con un máximo de $\frac{3}{2}\Delta$ colores. Aunque el Teorema de Vizing es ahora material habitual en muchos libros de texto de Teoría de grafos, Vizing tuvo dificultades para publicar el resultado inicialmente, y sus artículos al respecto, [22] y [23], aparecen en una revista rusa prácticamente desconocida, *Diskret. Analiz*.

En primer lugar se enunciará el teorema, se dará una serie de resultados previos y posteriormente se demostrará el mismo. Hay diversas formas de demostrar este teorema. En este trabajo se recogen dos de ellas.

Teorema 2.0.1 (Teorema de Vizing). *Dado un grafo simple G , entonces $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

El teorema 2.0.1 produce una clasificación en dos tipos de grafos simples: grafos de Clase 1 con $\chi'(G) = \Delta(G)$ y grafos de Clase 2 con $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Dado que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ por el lema 1.2.5.

2.1. Clases de grafos

Proposición 2.1.1. *Sea $G = (V, E)$ grafo, bipartito, entonces $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Demostración. Esto lo podemos ver de la siguiente manera. Se toma el grafo $G = (V, E) = (A \cup B, E)$, siendo $A \subset V(G)$ y $B \subset V(G)$. Al ser G un grafo bipartito, sus aristas tienen la propiedad siguiente,

$$|E| = \sum_{v \in A} d(v) = \sum_{u \in B} d(u) \quad (2.1.1)$$

Para conseguir un grafo simple, bipartito, regular (definición 1.1.2, vamos a ampliar el grafo G a G' ($G \subseteq G'$). Para ello, hay que añadir vértices hasta que $|A| = |B|$. Después, si existe un $v \in A$ tal que $d(v) < \Delta(G)$. Entonces, existirá un $u \in B$ tal que $d(u) < \Delta(G)$ por (2.1.1). Se añade la arista e de extremos u y v y se repite el algoritmo hasta que sea posible.

El grafo G' resultante es $\Delta(G)$ regular porque acabamos teniendo $d(v) = d(u) = \Delta(G)$. Por otra parte, tiene un emparejamiento completo por el teorema de Hall [5, pág. 38-41] que dice que este emparejamiento de A existe si y solo si $|N(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq A$. Al ser G' regular se cumple y por tanto tiene un emparejamiento completo. Llamamos M_1 al emparejamiento del primer color a_1 . Por tanto, $G' \setminus M_1$ es $(\Delta(G) - 1)$ regular y si llamamos M_2 al emparejamiento del color a_2 . Entonces, $G' \setminus (M_1 \cup M_2)$ es $(\Delta(G) - 2)$ regular. Por tanto, si es cierto para a_n , entonces tenemos que

$$G' \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_n \cup M_{n+1}) = (G' \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_n)) \setminus M_{n+1}$$

Como $G' \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_n)$ es $(\Delta(G) - n)$ -regular, quitando el color a_{n+1} , $G' \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_n \cup M_{n+1})$ es $(\Delta(G) - (n + 1))$ -regular.

Debido a esto,

$$\Delta(G) \geq \chi'(G') \geq \chi'(G) \quad (2.1.2)$$

Por el lema 1.2.5 vemos que en (2.1.2) ha de darse la igualdad. Quedando demostrado que para todos los grafos bipartitos $\chi'(G) = \Delta(G)$. $\square$

Si nos ceñimos a los grafos simples, tenemos la clasificación del teorema de Vizing (2.0.1). Entonces, los grafos simples bipartitos son de Clase 1.

Método para aumentar un emparejamiento en grafos bipartitos Un método para obtener un emparejamiento completo en grafos bipartitos es por caminos aumentantes como se indica en la página 38 de [5]. Si tenemos un emparejamiento $M \subset E$ de $G = (A \cup B, E)$ que no cubre todos los vértices, buscamos un camino alternante $P = (V_P, E_P)$ que comience y acabe en vértices que no estén cubiertos. Por el lema 1.3.4, podemos invertir los colores de P y la coloración sigue siendo válida. De esta forma, conseguimos cubrir cada vez 2 vértices más.

Ejemplo 2.1.2. Una aplicación para este resultado es el de los cuadrados latinos que son matrices de $n \times n$ elementos, donde cada elemento de la matriz es un símbolo de los n símbolos posibles. Estos tienen que estar dispuestos de tal forma que ningún símbolo tiene que repetirse en la misma fila ni en la misma columna. Un ejemplo habitual de cuadrado latino es el 9×9 o comúnmente conocido como Sudoku. El Sudoku tiene la restricción adicional de que cada símbolo también debe aparecer una única vez en cada uno de los 9 subcuadrados 3×3 .

Asignando un nodo a cada columna de un cuadrado latino y un nodo a cada fila, obtenemos un problema de coloración por aristas de un grafo simple bipartito de n vértices en cada subconjunto $(L = (V_1 \cup V_2, E))$ con $|V_1| = n$ y $|V_2| = n$, correspondiendo cada color a un símbolo. Véase el ejemplo 3×3 en la figura 2.1.

Por lo que, efectivamente, para rellenar un cuadrado latino $n \times n$ necesitamos n símbolos porque $\Delta(L) = n$ y al ser equivalente un problema de coloración por aristas de un grafo bipartito que como ya hemos vistos son de Clase 1.

Por otra parte, un ejemplo de grafos $G = (V, E)$, con una coloración f donde $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ son aquellos grafos que $\mathcal{M}(G) < \frac{|E|}{\Delta(G)}$. Sea $G = (V, E)$ grafo y una coloración f y $\mathcal{M}(G) < \frac{|E|}{\Delta(G)}$. Entonces,

$$\Delta + 1 \geq \chi'(G) \geq \frac{|E|}{\mathcal{M}(G)} > \Delta(G)$$

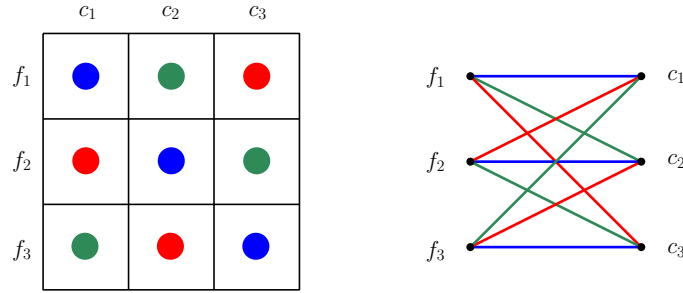


Figura 2.1: Ejemplo de cuadrado latino.

Tenemos que $\Delta + 1 \geq \chi'(G)$ dado que G es un grafo. Además, $\chi'(G) \geq \frac{|E|}{\mathcal{M}(G)}$ demostrado en el lema 1.2.10. Por último, $\frac{|E|}{\mathcal{M}(G)} > \Delta(G)$ por la hipótesis.

Proposición 2.1.3. *Los grafos $G = (V, E)$ regulares, simples con número de vértices impar con una coloración f , cumplen que $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.*

Demostración. Concretamente, es un subconjunto de los anteriores. Porque al ser $|V|$ es impar,

$$\mathcal{M}(G) \leq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor = \frac{|V| - 1}{2} \quad (2.1.3)$$

A su vez, por ser regular,

$$|E| = \frac{\Delta(G) \cdot |V|}{2}.$$

Entonces, operando, se tiene,

$$\frac{|E|}{\Delta(G)} = \frac{|V|}{2} \quad (2.1.4)$$

Uniendo (2.1.3) y (2.1.4),

$$\mathcal{M}(G) \leq \frac{|V| - 1}{2} < \frac{|V|}{2} = \frac{|E|}{\Delta(G)} \implies \mathcal{M}(G) < \frac{|E|}{\Delta(G)}$$

Al ser un subconjunto de los grafos que $\frac{|E|}{\mathcal{M}(G)} > \Delta(G)$, implica que los grafos regulares, con número de vértices impar, $\chi'(G) = \Delta + 1$.

□

De nuevo, si nos ceñimos a los grafos simples, tenemos la clasificación del teorema de Vizing (2.0.1). Entonces, los grafos regulares, simples con número de vértices impar son de Clase 2.

Ejemplo 2.1.4. Un ejemplo de grafo $G = (V, E)$ simple, regular con $|V|$ impar es un torneo tipo liga, que no solo es regular, además es completo. Una liga de n equipos K_n con n impar es, por tanto, un grafo de Clase 2. Concretamente, el torneo de 5 equipos se puede ver en la figura 2.2 siendo cada v_i $i = 0, \dots, 4$ cada uno de los equipos, y los emparejamientos qué equipos pueden jugar a la vez. En este caso, necesitaríamos 6 tiempos donde en cada uno se jugarían 2 partidos simultáneamente.

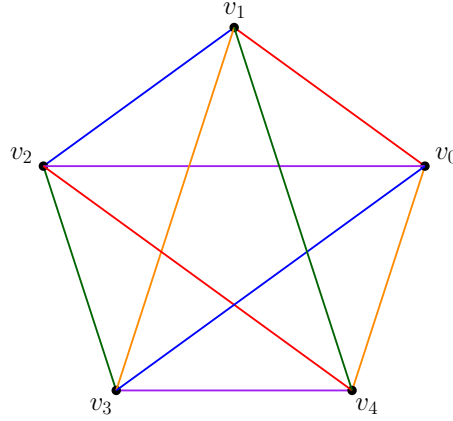


Figura 2.2: K_5 coloreado con $\Delta(K_5) + 1 = 6$ colores.

2.2. Demostración del Teorema de Vizing por inducción sobre número de aristas

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Si el grafo es vacío, el teorema es claramente cierto, por lo que suponemos que G es no vacío. Entonces, sea $G' = (V, E')$ un subgrafo de G (definición 1.1.4). Tomamos entonces f una $(\Delta(G) + 1)$ -coloración propia por aristas (definición 1.2.1) del subgrafo G' .

En caso de $G' = G$, el teorema sería cierto porque f sería una $(\Delta(G) + 1)$ -coloración de G .

Suponemos entonces que $G' \subset G$, teniendo entonces una arista $e = uv \in E \setminus E'$ de G sin colorear por f como puede verse gráficamente en figura 2.3.

Si después de una posible recoloración, podemos extender nuestra coloración f a la arista uv sin añadir ningún color, habremos demostrado el enunciado dado que podemos colorear $G' + e$ con $\Delta(G) + 1$ colores y si esto lo repetimos $\forall e \in E \setminus E'$ habremos obtenido una $(\Delta(G) + 1)$ -coloración de G .

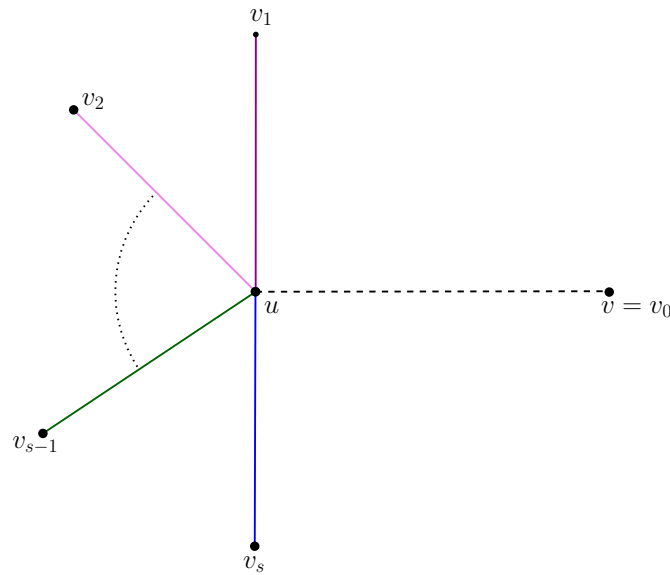


Figura 2.3: Grafo G con arista sin colorear uv con $(\Delta(G) + 1)$ -coloración original.

Como tenemos más de $\Delta(G)$ colores, cada vértice va a tener un color excedente por lo menos. Vamos a diferenciar dos casos en esta demostración.

Parte 1: Recoloración sin repetición de colores con el algoritmo 1.

Sea $C(u)$ el conjunto de colores presentes en el vértice u (definición 1.2.7). Sea $a_0 \notin C(u)$ y como notación renombramos v como v_0 .

Buscamos $a_1 \notin C(v_0)$, si $a_1 \notin C(u)$ lo asignamos a uv_0 , como se puede observar en la figura 2.4, acabando aquí la recoloración y por tanto la demostración.

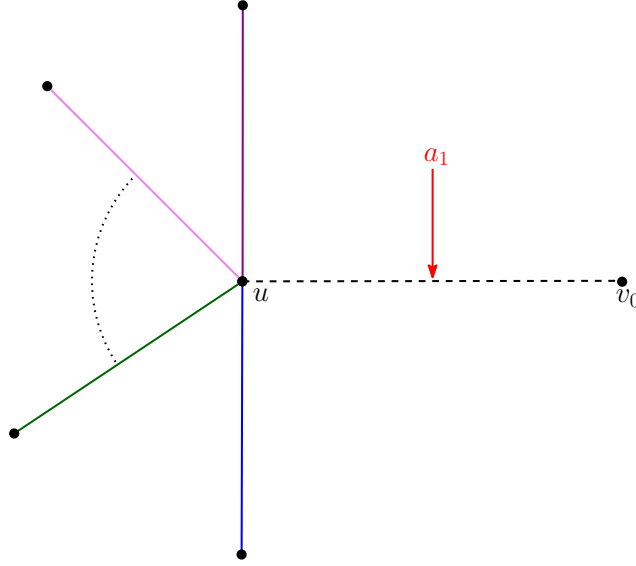


Figura 2.4: Recoloración si $a_1 \in \overline{C}(v_0) \cap \overline{C}(u)$.

Suponemos entonces que $a_1 \in C(u) \setminus C(v_0)$. Por tanto, a_1 coloreará una arista. Definimos v_1 como el vértice tal que $f(uv_1) = a_1$. O lo que es lo mismo, que la arista uv_1 está coloreada con a_1 .

Ahora buscamos $a_2 \notin C(v_1)$, si $a_2 \notin C(u)$. Por tanto, tenemos un abanico de u de vértices $\{v_0, v_1\}$ y aristas $\{uv_0, uv_1\}$ (definición 1.3.7). Entonces, recoloreamos asignando a_2 a uv_1 y a_1 a uv_0 . Véase la figura 2.5.

Si $a_2 \in C(u) \setminus C(v_1)$, entonces v_2 es el vértice tal que $f(uv_1) = a_1$.

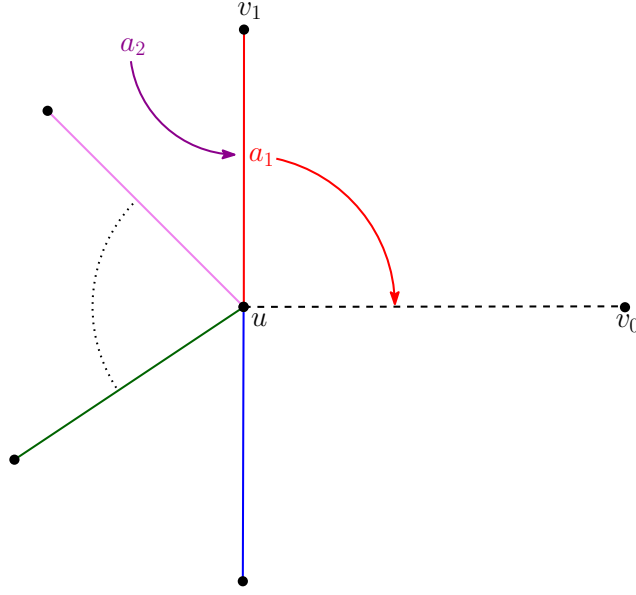
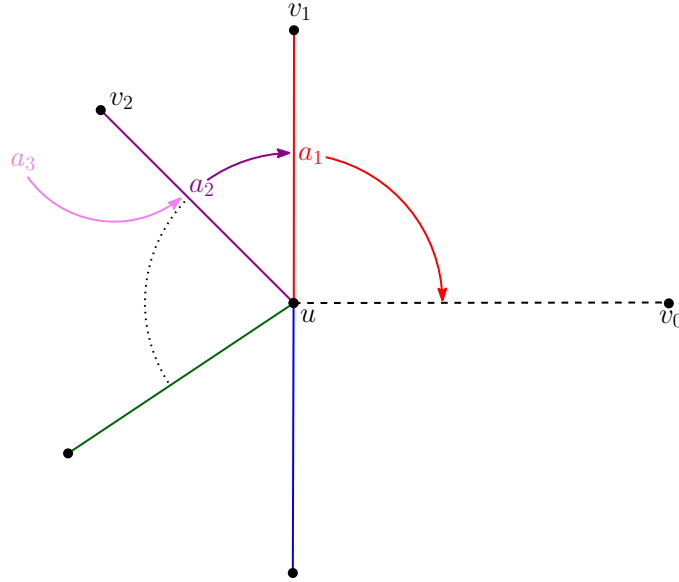
Sino seguimos argumentando buscando un $a_3 \notin C(v_2)$. Si $a_3 \notin C(u)$. Quedando un abanico de u de vértices $\{v_0, v_1, v_2\}$ y aristas $\{uv_0, uv_1\}$. Entonces asignamos $a_3 \rightarrow uv_2$, $a_2 \rightarrow uv_1$ y $a_1 \rightarrow uv_0$. Como se puede observar en la figura 2.6

En caso que $a_3 \in C(u)$, seguimos con el argumento sucesivamente. De forma general, el algoritmo de la recoloración se transcribe en el algoritmo 1.

Este algoritmo puede llegar o bien a que encontremos un $a_j \notin C(v_{j-1}) \cup C(u)$ o bien que se repita un color que ya ha aparecido, dado que tenemos un número finito de colores.

Parte 2: Recoloración con repetición de colores con el algoritmo 2.

Supongamos que se repite el color en el vértice v_l . Esto quiere decir que el color a_{l+1} coincide con un color $a_1, a_2, a_3, \dots, a_l$. Sea a_k el color que se repite, $a_k = a_{l+1}$. Por lo que $a_k \notin C(v_l) \cup C(v_{k-1})$. Hasta aquí, tenemos un abanico de u de vértices $\{v_0, \dots, v_l\}$ y aristas $\{uv_0, \dots, uv_l\}$.


 Figura 2.5: Recoloración si $a_2 \in \overline{C}(v_1) \cap \overline{C}(u)$.

 Figura 2.6: Recoloración si $a_3 \in \overline{C}(v_2) \cap \overline{C}(u)$.

Ahora usamos el color $a_0 \in \overline{C}(u)$ y vemos si aparece en los colores de v_l . Si no está, asignamos $a_0 \rightarrow uv_l$ y se recolora el siguiendo el algoritmo 1 el abanico de u de vértices $\{v_0, \dots, v_l\}$ y aristas $\{uv_0, \dots, uv_l\}$. Si está, tomamos el (a_0, a_k) -camino alternante maximal, $P = (V_P, E_P)$ (definición 1.3.1) que tenga el nodo v_l . Que por el lema 1.3.2 sabemos que es único.

En caso de que este camino no pase por ninguno de nuestros vértices vecinos de u , invertimos los colores (definición 1.3.1). Cabe destacar que da igual donde acabe el camino porque está bien definida la inversión por el lema 1.3.4. O lo que es lo mismo donde había a_0 los sustituimos por a_k y viceversa. A continuación, hacemos la recoloración desde a_l como el algoritmo 1 y obtendríamos la recoloración deseada.

En caso de que sí pase por alguno de los vecinos de u , tenemos tres casos. Todos recogidos en

Algoritmo 1 Algoritmo de recoloración de abanicos**Entradas:** $G : (V, E)$, $e := uv$ arista sin colorear, $(\Delta(G) + 1)$ -coloración de G' .**Salidas:** $(\Delta(G) + 1)$ -coloración de $G' + e$ o $a_i = a_k \quad k \in \{1, \dots, i-1\}$ y $v_1, \dots, v_i$ ordenados.

```

1:  $a_0 \in \overline{C}(u)$ 
2:  $i = 0$ 
3: repeat
4:   Elige  $a_{i+1} \in \overline{C}(v_i)$ 
5:                                      $\triangleright$  construcción del abanico de  $u$  de vértices  $\{v_0, \dots, v_i\}$  y aristas
       $\{e_0 = uv_0, \dots, e_i = uv_i\}$ 
6:   if  $a_i \in \overline{C}(u)$  then
7:     for  $1 \leq j \leq i$  do
8:        $e_{j-1} \leftarrow a_j$   $\triangleright$  recoloración del abanico
9:     end for
10:    return  $(\Delta(G) + 1)$ -coloración
11:   else
12:      $v_i =$  vértice que une  $u$  por la arista de color  $a_i$ 
13:                                      $\triangleright$  busca el siguiente vértice del abanico
14:   end if
15: until  $a_i = a_k \quad k \in \{1, \dots, i-1\}$ 
      return  $a_i = a_k \quad k \in \{1, \dots, i-1\}$  y abanico de  $u$  de vértices  $\{v_0, \dots, v_i\}$  y aristas
       $\{uv_0, \dots, uv_i\}$   $\triangleright$  como damos las aristas y los vértices es válido tanto para grafos simples
      como para multigrafos.

```

el algoritmo 2, al que habría que introducirle la información del algoritmo 1 para que funcionara.

Caso 1: P no pasa ni por v_k ni por v_{k-1} .

Si pasa por un vértice v_i distinto al v_k y v_{k-1} , la solución es la misma que si no pasara por ningún vértice. Al invertir los colores en el camino alternante maximal (definición 1.3.1) no tenemos ningún problema ni con la nueva coloración del camino (lema 1.3.4) ni con la recoloración del abanico porque no tienen vértices ni aristas en común. Así que de la misma forma obtenemos la recoloración deseada. Véase figura 2.7.

Caso 2: P pasa por v_k .

Nótese que si P pasa por v_{k-1} , el camino tiene que acabar en él. Porque $a_k \notin C(v_{k-1})$. En este caso, también invertimos los colores de P . Pero en vez de empezar la recoloración en v_l , empezamos en v_{k-1} de la siguiente forma: $a_0 \rightarrow v_{k-1}u$, $a_{k-1} \rightarrow v_{k-2}u$, $\dots$, $a_1 \rightarrow v_0u$. Véase figura 2.8.

Caso 3: P pasa por v_{k-1} .

También notar que si P pasa por v_k , el camino tiene que acabar en u porque $v_k u$ está coloreado de a_k . Por tanto, ahora al invertir los colores de P , cambiamos hasta $v_k u$. Análogamente al caso que pasa por v_k (caso 2) sustituimos $a_0 \rightarrow v_k u$, $a_k \rightarrow v_{k-1}u$, $\dots$, $a_1 \rightarrow v_0u$. Véase figura 2.9.

Por tanto, hemos abarcado todas las posibilidades, dado que con estos casos o combinaciones de los mismos se obtienen la totalidad de los casos. Dando igual donde acabe P por el lema 1.3.4. Queda así demostrado el enunciado.

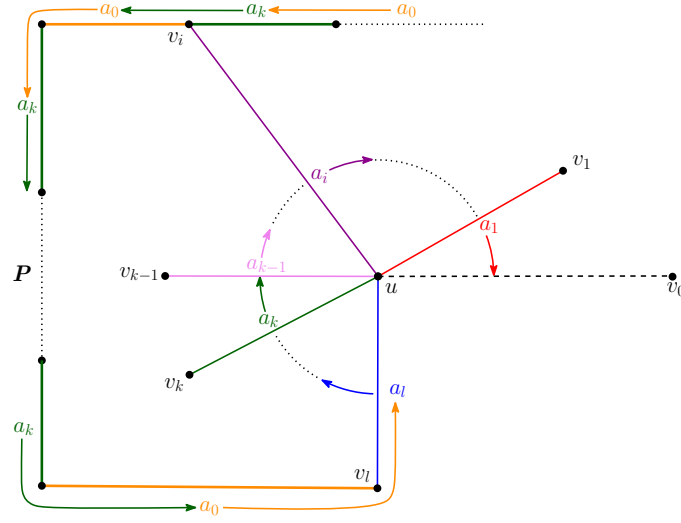


Figura 2.7: Recoloración en el caso en que el camino alternante maximal pasa por un $v_i \in N(u)$ distinto de v_{k-1} y v_k . Las líneas más gruesas de colores naranja y verde representan el (a_0, a_k) -camino alternante maximal P .

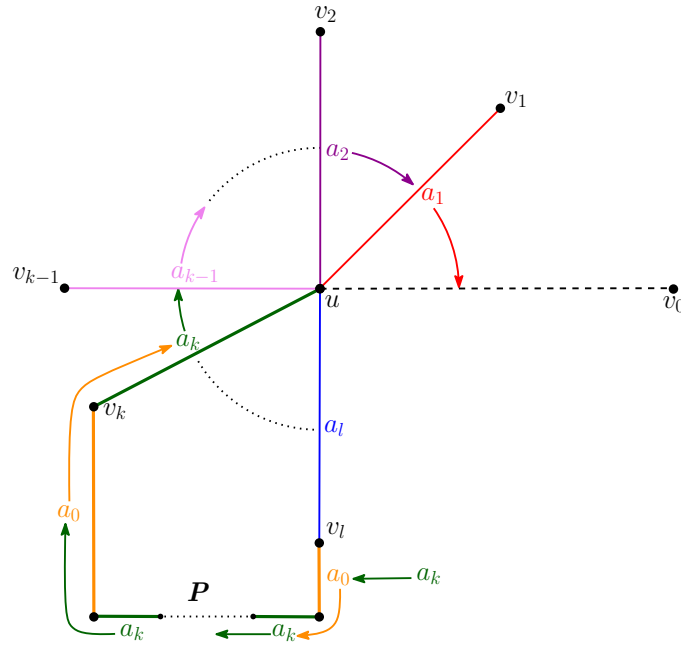


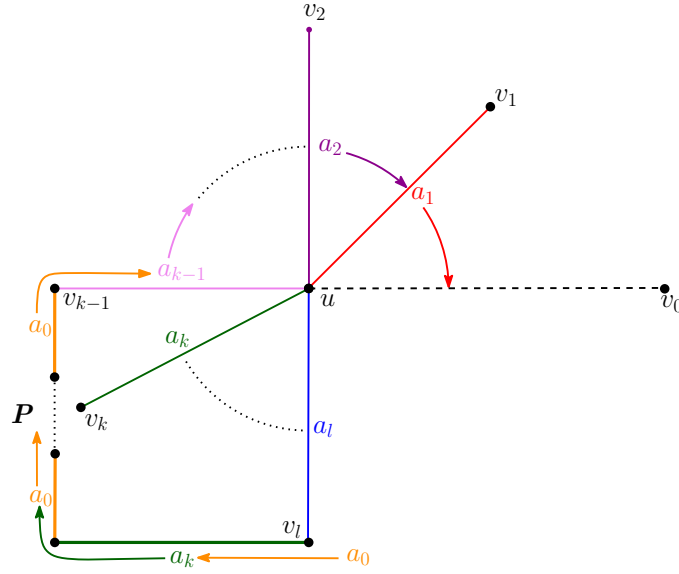
Figura 2.8: Recoloración en el caso en que el camino alternante maximal llega a v_k .

2.3. Demostración del Teorema de Vizing por inducción sobre número de vértices

En segundo lugar, vamos a proceder a demostrar el teorema 2.0.1 por inducción sobre el número de vértices basándonos en [17].

Para ello, vamos a demostrar un lema del que se infiere el resultado.

Lema 2.3.1. *Sea $v \in V$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(N(v) \cup v) \leq k$ y como mucho un vértice $x \in N(v)$ tiene $d(x) = k$ y $\chi'(G \setminus v) \leq k$, entonces $\chi'(G) \leq k$.*


 Figura 2.9: Recoloración en el caso en que el camino alternante maximal llega a v_{k-1} .

Veamos que el lema 2.3.1 implica el teorema 2.0.1. Haciendo inducción sobre el número de vértices vemos que si $k = \Delta + 1$ y $v \in V$ arbitrario, entonces la hipótesis del lema 2.3.1 se cumple y por inducción

$$\chi'(G - v) \leq \Delta_G + 1 \Rightarrow \chi'(G) \leq \Delta_G + 1$$

Demostración del lema 2.3.1. Sin pérdida de generalidad, vamos a asumir que todo $u \in N(v) \setminus x$ tiene $d(u) = k - 1$ y x que tiene $d(x) = k$. Esto lo podemos asumir porque si $d(u) \leq k - 1$ añadimos las aristas necesarias hasta que $d(u) = k - 1$ y, equivalentemente, con x hasta $d(u) = k$. Y coloreamos estas aristas con los colores sobrantes de cada vértice u o x . Estará bien definido dado que la coloración de G es una k -coloración y estamos añadiendo hasta $k - 1$ y k aristas. Por tanto, si $d(u) = d$, añadiríamos $k - 1 - d$ aristas con sus respectivos colores. Y en el caso de x , si $d(u) = d$, añadiríamos $k - d$ aristas con sus respectivos colores.

Si quitamos v de G , cabe resaltar que $u \in N(v) \setminus x$ tiene $d(u) = k - 2$ y x que tiene $d(x) = k - 1$.

Para cualquier k -coloración de $G \setminus v$, podemos definir $X_i = \{u \in N(v) \mid a_i \notin C(u)\}$.

Como $u \in N(v) \setminus x$ aparece exactamente en dos X_i y x aparece exactamente en uno.

$$\sum_{i=1}^k |X_i| = 2 \cdot d(v) - 1 < 2k \quad (2.3.1)$$

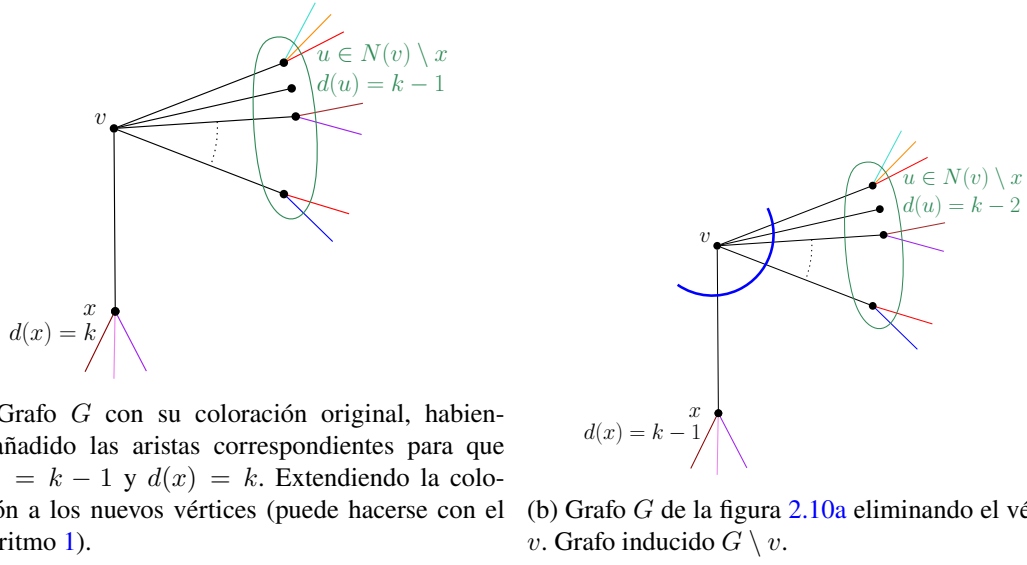
Elegimos la coloración f que minimice $\sum_{i=1}^k |X_i|^2$.

Esta va a ser en la que

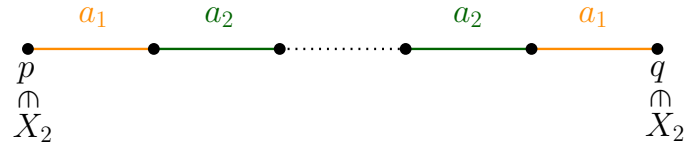
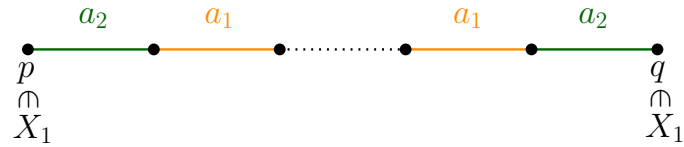
$$||X_i| - |X_j|| \leq 2 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\} \quad (2.3.2)$$

Si no fuera así, $|X_1| > |X_2| + 2$ y considerando $H \subseteq G$ con aristas de colores a_1 y a_2 .

Por una parte, $\Delta(H) \leq 2$ al tener H solo dos colores. Entonces, cada componente será un camino o un ciclo. Ya que al tener como mucho grado dos no hay más posibilidades.


 Figura 2.10: Grafo G añadiendo y eliminando vértices.

Por otra parte, $|X_1| > |X_2| + 2 \Rightarrow |X_1| > |X_2|$, en consecuencia, una componente es un camino alternante maximal (definición 1.3.1) que empieza en un punto (p) de X_1 y no acaba en un punto (q) de X_2 . Así que empieza y acaba en un punto de X_1 .


 Figura 2.11: (a_1, a_2) -camino alternante maximal.

 Figura 2.12: Coloración tras la inversión de colores en el (a_1, a_2) -camino alternante maximal de la figura 2.11.

Invertiendo los colores (definición 1.3.3) x_2 y ya no pertenecen a x_1 . Por lo que,

$$\begin{cases} X'_1 \leftarrow X_1 \setminus \{p, q\} \\ X'_2 \leftarrow X_2 \cup \{p, q\} \end{cases}$$

Comprobemos que,

$$\begin{aligned} |X'_1|^2 + |X'_2|^2 &= |X_1|^2 - 4|X_1| + 4 + |X_2|^2 + 4|X_2| + 4 \\ &= |X_1|^2 + |X_2|^2 + 4(|X_2| - |X_1| + 2) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $|X_2| - |X_1| + 2 < 0$, entonces,

$$|X'_1|^2 + |X'_2|^2 < |X_1|^2 + |X_2|^2 \quad (2.3.3)$$

Asumíamos que f minimizaba $\sum_{i=1}^k |X_i|^2$. Teniendo en cuenta que el resto de los términos se mantienen.

$$|X'_1|^2 + |X'_2|^2 + \sum_{i=3}^k |X_i|^2 < \sum_{i=1}^k |X_i|^2$$

Finalizamos así el argumento por contradicción.

Tenemos por tanto por (2.3.1) que existe $|X_i| < 2$ al tomar el sumatorio hasta $k = 1$. Entonces, si $|X_i| < 2$, o bien $|X_i| = 0$ o $|X_i| = 1$. Y por otra parte, habrá algún $|X_j|$ que sea impar. Esto se debe a que, por (2.3.1), el grado de $|X_i|$ es un número impar. Todo ello implica que si $|X_i| = 1$, ya tenemos un $|X_i|$ impar. En cambio, si $|X_i| = 0$, por (2.3.2) tenemos que $|X_j| = 0$ o 1. Pero como sabemos que al menos uno es impar, $|X_j| = 1$. Por tanto, $\exists |X_i|$ tal que $|X_i|$ es impar y más concretamente 1.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $X_k = \{u\}$.

Por tanto, definimos $G' = G - uv - f^{-1}(a_k)$. Entonces, $d_{G'}(v) \leq k - 1$ porque hemos quitado la arista uv . Por otra parte, $d_{G'}(N(v)) \leq k - 1$ porque hemos quitado todas las aristas de color a_k y como mucho un $x \in N(v)$ tendrá $d(x) = k - 1$. Todo ello implica que, $G' - v$ tiene una $(k - 1)$ -coloración.

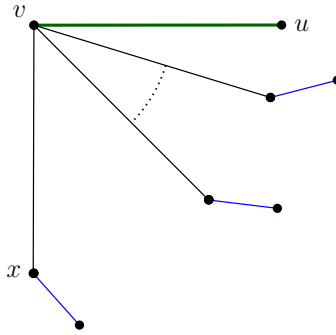


Figura 2.13: Grafo G sin la arista uv (verde) y sin $f^{-1}(a_k)$ (azul).

Por hipótesis de inducción $\chi'(G') \leq k - 1$ y si añadimos el color a_k y uv obtenemos $\chi'(G) \leq k$. Finalizando así la demostración del lema 2.3.1. $\square$

Al haber demostrado ya la implicación del lema 2.3.1 al teorema 2.0.1, queda demostrado el teorema.

2.4. Algoritmo de coloración de grafos simples

En la sección 2.2 se proporcionan dos algoritmos (1 y 2) que juntos dan una coloración para una arista no coloreada, o sea una coloración parcial.

De forma similar Misra y Gries en [14] desarrollan un algoritmo. Pero a diferencia de los algoritmos (1 y 2), en este se parte de un grafo sin ninguna coloración.

El algoritmo va coloreando arista a arista usando como mucho $\Delta(G) + 1$ colores. Y en caso de no ser trivial, recurre al algoritmo 2 para colorear. Y una vez se ha coloreado la arista se borra del conjunto U hasta que este queda vacío finalizando así la coloración.

Por ser un algoritmo para grafos simples, por el Teorema de Vizing (2.0.1) la coloración que se da es de $\Delta(G) + 1$ colores. Para probar que un grafo pertenece a la Clase 2, además, sería

necesario probar que este grafo no pertenece a la Clase 1. En 1981, Holyer [12] probó que el problema de clasificación de los grafos en Clases, es un problema *NP-completo*, y descarta una caracterización simple y eficiente del caso general.

Algoritmo 2 Algoritmo de recoloración con caminos alternantes maximales**Entradas:** $G : (V, E)$, $e := uv$ arista sin colorear, $(\Delta(G) + 1)$ -coloración de G' .

▷ (entradas del algoritmo 1).

 $a_i = a_k \quad k \in \{1, \dots, i-1\}$ y abanico de u de vértices $\{v_0, \dots, v_i\}$ y aristas $\{uv_0, \dots, uv_i\}$

▷ (salidas del algoritmo 1).

Salidas: $(\Delta + 1)$ -coloración de $G' + e$.

1: Tomar camino alternante maximal de colores a_0 y a_k desde v_i definida por sus aristas:
 $P = \{e_1, e_2, \dots\}$ coloreadas por a_0 las aristas impares y a_k las pares.

▷ Aquí se recolorea el grafo si P no pasa ni por v_k ni por v_{k-1} . Caso 12: **if** $e_m \notin E(N(u))$ o $e_m \in E(N(u)) \setminus \{E(v_k), E(v_{k-1})\}$ **then**3: **for** $1 \leq j \leq i$ **do**4: $uv_{j-1} \leftarrow a_j$

▷ Recoloración del abanico

5: **end for**6: $uv_i \leftarrow a_0$ 7: **if** m impar **then**▷ Recoloración de P 8: $e_m \leftarrow a_k$ 9: **end if**10: **if** m par **then**11: $e_m \leftarrow a_0$ 12: **end if**▷ Aquí se recolorea el grafo si P pasa por v_k . Caso 213: **else if** $e_m \in E(v_k)$ **then**14: **for** $1 \leq j \leq k$ **do**15: $uv_{j-1} \leftarrow a_j$

▷ Recoloración del abanico

16: **end for**17: $uv_k \leftarrow a_0$ 18: **if** m impar **then**▷ Recoloración de P 19: $e_m \leftarrow a_k$ 20: **end if**21: **if** m par **then**22: $e_m \leftarrow a_0$ 23: **end if**▷ Aquí se recolorea el grafo si P pasa por v_{k-1} . Caso 324: **else** ▷ $e_m \in E(v_{k-1})$ 25: **for** $1 \leq j \leq k-1$ **do**26: $uv_{j-1} \leftarrow a_j$ Recoloración del abanico27: **end for**28: $uv_{k-1} \leftarrow a_0$ 29: **if** m impar **then**▷ Recoloración de P 30: $e_m \leftarrow a_k$ 31: **end if**32: **if** m par **then**33: $e_m \leftarrow a_0$ 34: **end if**35: **end if** **return** $(\Delta(G) + 1)$ -coloración

Algoritmo 3 Algoritmo de coloración grafos simples.

Entradas: $G : (V, E)$ grafo

Salidas: $(\Delta + 1)$ -coloración propia de G .

```

1: Sea  $U := E(G)$ . ▷ U son las aristas sin colorear
2: Sea  $C(G) = \{a_1, \dots, a_{\Delta+1}\}$ .
3: while  $U \neq \emptyset$  do
4:   Sea  $e = xv$  ▷ Elegimos una arista sin colorear
5:   Sea un abanico de  $x$  de vértices  $\{v_0, \dots, v_i\}$  y aristas  $\{e_0 = xv_0, \dots, e_i = xv_i\}$ 
6:    $a_1 \in \overline{C}(x)$ ,  $a_2 \in \overline{C}(v_i)$ 
7:   Obtenemos  $(a_1, a_2)$ -camino alternante maximal
8:   Aplicamos algoritmo 2 al abanico con  $(a_1, a_2)$ -camino alternante maximal
9:    $U := U \setminus e$ 
10: end while
    return  $(\Delta(G) + 1)$ -coloración de  $G$ .
  
```

Capítulo 3 Coloración multiarista

En el capítulo anterior hemos visto la cota de grafos simples, pero análogamente, durante el siglo XX se probaron distintas cotas para grafos no simples.

3.1. Cota superior

Históricamente se han ido demostrando diversas cotas sobre χ' en grafos no simples. Tal como se muestran ordenados cronológicamente por [West](#) en [24, pág. 285], donde aparece como ejercicio 7.1.35 y deja como tarea su demostración al lector. Trasladamos aquí su enunciado en forma de teorema y su demostración por la autora de este trabajo.

Teorema 3.1.1. *Sea G grafo no simple y $A = \{x, y, z \in V(G) : y \in N(x) \cap N(z)\}$. La cota indicada en d) implica todas las anteriores.*

- a) $\chi' \leq \lfloor \frac{3}{2} \Delta(G) \rfloor$, formulada por [Shannon](#) en las paginas 148 a 151 de [19]
- b) $\chi' \leq \Delta(G) + \mu(G)$, encontrada por [Vizing](#) en las paginas 9 a 17 de [22] y en las paginas 25 a 30 de [23] y por [Gupta](#) en [10].
- c) $\chi' \leq \max \{ \Delta(G), \max_A \{ \lfloor \frac{1}{2} (d(x) + d(y) + d(z)) \rfloor \} \}$, descubierta por [Ore](#) en [16].
- d) $\chi' \leq \max \{ \Delta(G), \max_A \{ \lfloor \frac{1}{2} (d(x) + \mu(xy) + \mu(yz) + d(z)) \rfloor \} \}$, formulada por [Andersen](#) en las paginas 161 a 175 de [1], por [Goldberg](#) en las paginas 3 a 12 de [8] y en las paginas 123 a 137 de [9].

Demostración. Procederemos a demostrar que d) $\implies$ c), d) $\implies$ b) y c) $\implies$ a) y de esta forma quedará completamente probado el teorema.

d) $\implies$ c)

Por definición:

$$d(y) = \mu(xy) + \mu(yz) + \sum_{v \in G} \mu(vy)$$

Como todos los términos del sumatorio son no negativos, deducimos que,

$$d(y) \geq \mu(xy) + \mu(yz)$$

Al ser el resto de términos igual, queda demostrado, puesto que,

$$\frac{1}{2} (d(x) + \mu(xy) + \mu(yz) + d(z)) \leq \frac{1}{2} (d(x) + d(y) + d(z))$$

Y por tanto,

$$\left\lfloor \frac{1}{2}(d(x) + \mu(xy) + \mu(yz) + d(z)) \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(d(x) + d(y) + d(z)) \right\rfloor$$

d) $\implies$ b)

Por una parte tenemos que $\forall v \in G \ d(v) \leq \Delta(G)$. Por otra parte, $\forall v, y \in G, \mu(vy) \leq \mu(G)$.

Tenemos entonces que

$$\frac{1}{2}(d(x) + \mu(xy) + \mu(yz) + d(z)) \leq \frac{1}{2}(2\Delta(G) + 2\mu(G)) = \Delta(G) + \mu(G)$$

$$\left\lfloor \frac{1}{2}(d(x) + \mu(xy) + \mu(yz) + d(z)) \right\rfloor \leq \lfloor \Delta(G) + \mu(G) \rfloor = \Delta(G) + \mu(G)$$

c) $\implies$ a)

Como $\forall v \in G \ d(v) \leq \Delta(G)$. Deducimos que

$$\frac{1}{2}(d(x) + d(y) + d(z)) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$$

$$\left\lfloor \frac{1}{2}(d(x) + d(y) + d(z)) \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \right\rfloor$$

□

Por tanto, demostrando la última cota, quedan demostradas todas las anteriores.

Cabe destacar que en el ejemplo 1.2.6 vemos como para el caso del k fat-triangle la cota a) y la cota b) son iguales y las óptimas para su coloración.

3.1.1. Demostración de la última cota

Podemos reescribir la última cota como Andersen en [1].

Teorema 3.1.2. Para todo grafo G ,

$$\chi'(G) \leq \max \left\{ \Delta(G), \sup_{x \in V(G)} \sup_{\substack{A \in N(x) \\ |A|=2}} \left[\frac{1}{2} \sum_{v \in A} (d(v) + \mu(vx)) \right] \right\}$$

Para la demostración, necesitamos definir dos conjuntos.

Definición 3.1.3. $A_x = \{y, v_1, \dots, v_r\}$, $r \geq 0$ es el conjunto de vértices tal que todas sus aristas incidentes pertenecen a un abanico de x (definición 1.3.7) que comienza en la arista e_0 de extremos x e y .

Definición 3.1.4. $B_x = \{z_1, \dots, z_t\}$, $t \geq 0$ es el conjunto definido como $B_x = N(x) \setminus A_x$.

Para poder demostrar el teorema (3.1.2), previamente vamos a demostrar un lema.

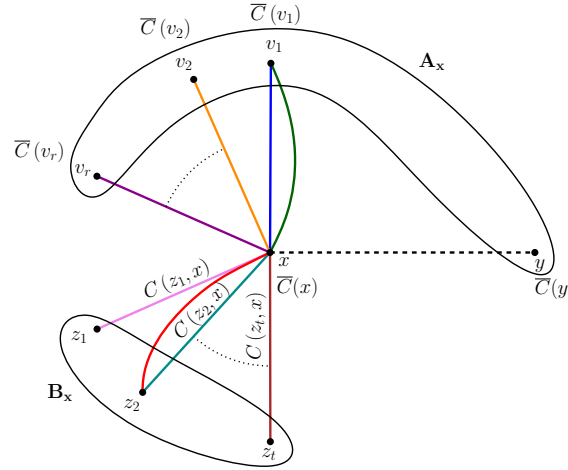


Figura 3.1: Los conjuntos disjuntos del lema 3.1.5.

Lema 3.1.5. Sea G un grafo con una arista crítica e_0 de extremos x e y . Sea $d(G) \leq \chi'(G) - 1$ y una $(\chi'(G) - 1)$ -coloración de $G \setminus e_0$. Entonces, $\overline{C}(x), \overline{C}(y), \overline{C}(v_1), \dots, \overline{C}(v_r), C(x, z_1), \dots, C(x, z_t)$ con $r, t \geq 0$ (definición 1.2.7) son conjuntos mutuamente disjuntos. Ver figura 3.1.

Demostración. Para ver que todos los conjuntos son disjuntos, vamos a comenzar con los más sencillos.

Caso 1: sean $z_i, z_j \in B_x$, $C(x, z_i) \cap C(x, z_j) = \emptyset$ y $C(x, z_i) \cap \overline{C}(x) = \emptyset$.

En primer lugar, $C(x, z_1), \dots, C(x, z_t) \in C(x)$ está claro que son disjuntos entre ellos porque son aristas que conectan x con algún $z_i \in N(x)$ $i \in \{1, \dots, t\}$. Y con $\overline{C}(x)$ también serán disjuntos, ya que $\overline{C}(x)$ y $C(x)$ son disjuntos y $C(x, z_i) \subseteq C(x) \forall i \in \{1, \dots, t\}$.

Caso 2: sean $v_i \in A_x$, $z_j \in B_x$, $\overline{C}(v_i) \cap C(x, z_j) = \emptyset$.

En segundo lugar, $\overline{C}(v_i)$ con $v_i \in A_x$ y $C(x, z_j)$ con $z_j \in B_x$. Cabe destacar que el vértice y está incluido en los v_i porque pertenece a A_x . Como todos los vértices $v_i \in A_x$ pertenecen a algún abanico, necesariamente $a_i \in \overline{C}(v_{i-1})$. Por ello, $\overline{C}(v_i)$ y $C(x, z_j)$ han de ser disjuntos. De lo contrario, si hubiera algún color, $a_{i+1} \in \overline{C}(v_i) \cup C(x, z_j)$, entonces, el vértice z_j podría continuar con el abanico al que pertenezca v_i y por tanto, z_j pertenecería a algún abanico. O lo que es lo mismo, z_j no pertenecería a B_x sino a A_x .

Caso 3: sean $v_i \in A_x$, $\overline{C}(v_i) \cap \overline{C}(x) = \emptyset$.

En tercer lugar, dado un vértice $v_i \in A_x$, ver que $\overline{C}(v_i) \cap \overline{C}(x) = \emptyset$. Suponemos que es falso, sea $\{y, v'_1, \dots, v'_n\} = \{e'_0, e'_1, \dots, e'_n\}$ el abanico de x (definición 1.3.7) tal que $\overline{C}(v_i) \cap \overline{C}(x) = a$. Entonces, usando el algoritmo 1 que acepta multigrafos porque definimos los abanicos con aristas y vértices, podemos recolorear el grafo asignando el color a la arista e_n dado que $\overline{C}(v_i) \cap \overline{C}(x) = a$. Esto nos daría una $(\chi'(G) - 1)$ -coloración. Llegando a una contradicción, al haber encontrado una $(\chi'(G) - 1)$ -coloración de G .

Caso 4: sean $z_i, z_j \in B_x$, $\overline{C}(v_i) \cap \overline{C}(v_j) = \emptyset$.

En último lugar, habría que ver si para cada pareja de vértices $v_i, v_j \in A_x$, $\overline{C}(v_i)$ y $\overline{C}(v_j)$ son disjuntos. Para ello, como sabemos que $d(x) \leq \chi'(G) - 1$ implica que existe un $b \in \overline{C}(x)$. Si suponemos que $a \in \overline{C}(v)$ con $v \in A_x$, cabe destacar que a y b han de ser distintos por el párrafo anterior, entonces x y v están en el mismo (a, b) -camino alternante maximal (definición 1.3.1). Para demostrarlo, vamos a suponer que no. Por tanto, asumimos que en el abanico de x de aristas

$\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ y vértices $\{y = v_0, v_1, \dots, v_n = v\}$ con menor cantidad de vértices posibles, v no pertenece al mismo (a, b) -camino alternante maximal que x .

Entonces, similarmente a la argumentación que se hizo en la sección 2.2, página 18, invertimos los colores del (a, b) -camino alternante maximal (definición 1.3.3). El abanico sigue estando constituido por las mismas aristas. Por una parte, si a no coloreaba ninguna arista del abanico, trivialmente el abanico sigue siendo el mismo. Y por otra parte, si a coloreaba una de las aristas del abanico e_k , $a \in \overline{C}(v_k) \cap C(e_{k+1}) \forall k \leq n-2$, ya que la arista e_n suponíamos que no está coloreada con a . Entonces, v_k y x están en el mismo (a, b) -camino alternante maximal y al hacer el intercambio, $b \in \overline{C}(v_k) \cap C(e_{k+1})$. Por lo que intercambiando los colores del (a, b) -camino alternante maximal los integrantes del abanico siguen siendo los mismos, concretamente v sigue perteneciendo al abanico. Pero $a \in \overline{C}(x) \cap \overline{C}(v)$, contradiciendo a lo ya demostrado hace dos párrafos. Quedando demostrado que si $a \in \overline{C}(v)$ y $v \in A_x$, entonces x y v están en el mismo (a, b) -camino alternante maximal.

Como tanto v_i como v_j pertenecen a A_x , y suponiendo que existe un $a \in \overline{C}(v_i) \cap \overline{C}(v_j)$, entonces el (a, b) -camino alternante maximal tendrá tres finales. Esto es debido a que $a \in \overline{C}(v_i) \cap \overline{C}(v_j)$ o lo que es lo mismo, el (a, b) -camino alternante maximal llega a v_i y a v_j por el color b y ninguno de los dos vértices puede continuar el (a, b) -camino alternante maximal con el color a . Es así como llegamos a una contradicción y por tanto $\overline{C}(v_i) \cap \overline{C}(v_j) = \emptyset$. $\square$

Demostración. (del teorema 3.1.2)

Tomando un grafo G' cualquiera, es posible que no tenga ninguna arista crítica. Si este es el caso, reducimos a G' con e_0 arista crítica de extremos x e y , como en el lema 1.3.6.

Consideramos una $\chi'(G)$ -coloración de $G \setminus e_0$. Siempre es cierto que $d(x) \leq \Delta(G)$. Y a su vez suponemos que $\chi'(G) > \Delta(G)$ porque si no se cumpliría trivialmente el teorema 3.1.2. Resultando, $d(x) \leq \Delta(G) \leq \chi'(G) - 1$. Cumpliendo así todas las hipótesis del lema 3.1.5. A su vez, como $d_{G \setminus e_0}(y) < \chi'(G) - 1$, entonces $|A_x| \geq 2$.

Como mucho puede haber $\chi'(G) - 1$ colores diferentes, por tanto la cantidad de colores a los que se hace referencia en el lema 3.1.5 es $\chi'(G) - 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \chi'(G) - 1 &\geq |\overline{C}(x)| + |\overline{C}(y)| + \sum_{v \in A_x \setminus \{y\}} |\overline{C}(v)| + \sum_{z \in B_x} |C(xz)| \\ &= (\chi'(G) - 1 - (d(x) - 1)) + (\chi'(G) - 1 - (d(y) - 1)) + \\ &\quad + \sum_{v \in A_x \setminus \{y\}} (\chi'(G) - 1 - d(v)) + \left(d(x) - \sum_{v \in A_x} \mu(vx) \right) \end{aligned}$$

Agrupando,

$$|A_x| \cdot \chi'(G) \leq \sum_{v \in A_x} (d(v) + \mu(vx)) + |A_x| - 2 \implies \chi'(G) \leq \frac{\sum_{v \in A_x} (d(v) + \mu(vx))}{|A_x|} + 1 - \frac{2}{|A_x|}$$

Para finalizar la demostración quedaría por ver que,

$$\frac{\sum_{v \in A_x} (d(v) + \mu(vx))}{|A_x|} + 1 - \frac{2}{|A_x|} \leq \max_{\substack{A \in N(x) \\ |A|=2}} \left[\frac{1}{2} \sum_{v \in A} (d(v) + \mu(vx)) \right] \quad (3.1.1)$$

Se define $s(v_i) := d(v_i) + \mu(xv_i)$ con $v_i \in A_x$. Suponemos que no es cierto 3.1.1, o lo que es lo mismo que

$$\frac{\sum_{v_i \in A_x} s(v_i)}{|A_x|} + 1 - \frac{2}{|A_x|} > \max_{v_i, v_j \in A_x} \frac{s(v_i) + s(v_j)}{2} =: W \quad (3.1.2)$$

Sean $v_i, v_j \in A_x$

$$\frac{s(v_i) + s(v_j)}{2} \leq \max_{v_i, v_j \in A_x} \frac{s(v_i) + s(v_j)}{2} = W \implies s(v_i) + s(v_j) \leq 2W$$

Sumando, se obtiene,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq |A_x|} s(v_i) + s(v_j) &\leq \binom{|A_x|}{2} 2W = |A_x|(|A_x| - 1)W \implies \\ (|A_x| - 1) \sum_{1 \leq i < j \leq |A_x|} s(v_i) &\leq |A_x|(|A_x| - 1)W \end{aligned}$$

Y entonces,

$$\frac{\sum_{v_i \in A_x} s(v_i)}{|A_x|} \leq W \quad (3.1.3)$$

Teniendo en cuenta 3.1.1 y 3.1.3,

$$\frac{\sum_{v_i \in A_x} s(v_i)}{|A_x|} + 1 - \frac{2}{|A_x|} > W \geq \frac{\sum_{v_i \in A_x} s(v_i)}{|A_x|} \quad (3.1.4)$$

Como $|A_x| \geq 2$, entonces, $1 - \frac{2}{|A_x|} \geq 0$ y concretamente para $|A_x| = 2$, $1 - \frac{2}{2} = 0$. Teniendo esto en consideración y 3.1.2,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{v_i \in A_x} s(v_i)}{2} &= \frac{\sum_{v_i \in A_x} s(v_i)}{2} + 1 - \frac{2}{2} > W \geq \frac{\sum_{v_i \in A_x} s(v_i)}{2} \implies \\ \frac{\sum_{v_i \in A_x} s(v_i)}{2} &> \frac{\sum_{v_i \in A_x} s(v_i)}{2} \end{aligned}$$

Llegando así a una contradicción, por lo que queda demostrado (3.1.1). Y a su vez el total del teorema 3.1.2.

□

3.2. Algoritmo multiarista

Una parte muy importante de la demostración de estas cotas es poder hacer un algoritmo para poder obtenerlas. Por ello vamos a ver un algoritmo desarrollado el año 1987 por Karloff y Shmoys en [13], que se recoge en el algoritmo 4 para conseguir una cota $3 \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$, que es ligeramente menos fina que la cota de Shannon en [19, págs. 148-151] vista en el teorema 3.1.1 ($\lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor$).

Cabe destacar que el algoritmo 4 a diferencia del algoritmo 1 es constructivo, no necesitamos una coloración original.

Primero, lo que queremos conseguir es un grafo Euleriano (definición 1.1.11), para ello necesitamos que todos los vértices del grafo tengan grado par. Para conseguirlo, añadimos un vértice auxiliar que llamaremos x y añadiremos a su vez las aristas necesarias. Estas serán las que conecten a x con cada vértice de grado impar. Llamamos a este nuevo grafo G' .

Una comprobación importante sería ver que x tiene grado par también. Pero esto es cierto dado que el número de vértices de grado impar en un grafo es siempre un número par. Por tanto, x tendrá un número par de aristas incidentes.

En segundo lugar, encontramos un tour euleriano de G' (definición 1.1.10).

Comenzando en un vértice, orientamos el ciclo (definición 1.1.1) y eliminamos el vértice x y todas las aristas incidentes a él. Quedando así una lista de aristas orientadas que llamaremos Ar de G . Por haber eliminado x y todas las aristas que llegan a él, recuperamos G .

Una vez orientado el ciclo, vamos a generar un grafo bipartito. Para ello vamos a hacer dos copias de los vértices. Sea $v_i \in V(G')$, tendremos $v_{i_L} \in L$ y $v_{i_R} \in R$. Siendo L un conjunto y R el otro conjunto. Para construir el grafo bipartito haremos que $N(v_{i_R}) = \{v_{j_L} \mid v_j \rightarrow v_i \in Ar\}$.

Posteriormente colorearemos el grafo bipartito H . Hay diversos métodos para hacerlo, en el apartado (2.1) se explica una forma y se ve también que $\chi'(H) = \Delta(H)$ (proposición 2.1.1) y concretamente si son bipartitos simples son de Clase 1. Otra forma, más compleja aunque computacionalmente mejor sería el utilizado por Cole, Ost y Schirra en [4], en cuyo desarrollo no se va a entrar en el presente trabajo.

Cabe destacar que por construcción $\Delta(H) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$. Cada conjunto de aristas del mismo color de H , corresponde con un subconjunto de $E(G)$. Dichos subgrafos tienen grado como mucho 2. Por lo que son caminos o ciclos y para colorear cada uno necesitamos como mucho 3 colores.

Entonces, con la $\left(\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil\right)$ -coloración de H , obtenemos una $\left(3 \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil\right)$ -coloración de G .

Algoritmo 4 Algoritmo de coloración de grafo multiarista

Entradas: $G : (V, E)$.

Salidas: $\left(3 \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil\right)$ -coloración de G .

- 1: Añadir vértice x y aristas a vértices de grado impar.
 - 2: Encontrar tour euleriano W .
 - 3: Orientar W .
 - 4: Eliminar x .
 - 5: Hacer dos copias de los nodos.
 - 6: Construir el grafo bipartito H con las aristas del tour orientadas.
 - 7: Colorear H ([4]).
 - 8: Colorear los caminos o ciclos obtenidos de la coloración de H .
- return** $\left(3 \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil\right)$ -coloración
-

Capítulo 4 Conclusiones

Como se ha visto, utilizando el Teorema de Vizing (2.0.1) es posible clasificar los grafos en Clase 1 ($\chi'(G) = \Delta(G)$) o Clase 2 ($\chi'(G) = \Delta(G) + 1$). El Teorema de Vizing establece que no existe otra posibilidad y se trata por tanto, de decidir a qué clase pertenece un grafo G . Para determinar si un grafo G pertenece a la Clase 1, primero se busca una coloración que utilice sólo Δ colores para G . Si se encuentra esta coloración, entonces G pertenece a la Clase 1. Sin embargo, encontrar una coloración que utilice $\Delta + 1$ colores, no garantiza que el grafo G pertenezca a la Clase 2, ya que cualquier grafo que pertenezca a la Clase 1 también puede utilizar un color adicional en su coloración y, estar coloreado con $\Delta + 1$ colores. Por lo tanto, para probar que un grafo pertenece a la Clase 2, además, es necesario probar que este grafo no pertenece a la Clase 1. En 1981, Holyer [12] demostró que el problema de clasificación de los grafos en Clases, es un problema *NP-completo* que descarta una caracterización simple y eficiente del caso general y por tanto hace que la búsqueda de algoritmos cada vez más eficientes para obtener coloraciones en casos concretos y su clasificación sea un tema de gran interés para la comunidad académica.

Los algoritmos descritos en este trabajo se obtienen todos en tiempo polinómico e incluso el de la demostración de la conjetura de Goldberg-Seymour, es del orden de $o(|V|^5|E|^3)$, que es polinomial aunque todavía no ha sido comprobado y se puede encontrar publicado por Chen, Hao, Yu y Zang en 2024 en el artículo [2].

Otra de las conclusiones de este trabajo es que ha permitido visibilizar la enorme utilidad práctica de los resultados obtenidos, y así, tras haber indagado en la coloración de grafos por aristas, se comprueba que una buena parte de las demostraciones proporcionan resultados no solo teóricos, sino que, simultáneamente, consiguen un desarrollo algorítmico que puede ser implementado en un lenguaje de programación para ser ejecutado en un ordenador. Sin embargo, en algunas demostraciones la parte teórica y la parte algorítmica colisionan. Esto hace que, pese a haber resultados teóricamente posibles, si algorítmicamente no se pueden materializar en un tiempo razonable, su utilidad práctica se reduce drásticamente.

Cabe destacar que con los constantes avances en las nuevas tecnologías, es posible que pese a no conseguir un algoritmo especialmente eficiente computacionalmente, sea posible obtener esas recoloraciones con el número de colores óptimo en un tiempo razonable. Gordon Moore recoge informalmente esta idea en la conocida Ley de Moore, publicada originalmente en [15], que predice la duplicación de la capacidad computacional, velocidad incluida, aproximadamente cada dos años (un año en el original y modificada en 1975 a dos años como se indica en una entrevista de 2005 ¹).

En conclusión, ha sido una oportunidad para visibilizar la importancia del rigor matemático en este tipo de teorías, que pueden aplicarse a problemas prácticos en forma de algoritmos matemáticos, ya que ayudan a analizar este tipo de problemas de manera robusta.

¹http://large.stanford.edu/courses/2012/ph250/lee1/docs/Excepts_A_Conversation_with_Gordon_Moore.pdf

Para finalizar, resulta reseñable que este trabajo aborda un tema que está en un momento de plena e intensa producción científica, incluso con aportaciones publicadas este mismo año. Esto ha supuesto que, personalmente, además de un reto, ha sido una oportunidad de observar cómo se va realizando la producción de conocimiento y tener una idea de las Matemáticas desde una perspectiva de continua construcción, más que de producto acabado.

En este sentido, es destacable que del estudio de las fuentes documentales necesarias para este trabajo, se ha identificado la evolución de la notación en el área y como consecuencia, se reconoce el valor que proporciona la búsqueda de un lenguaje común y potente en la definición del problema y de las demostraciones, que no solo aporte belleza sino también un mayor significado matemático.

Como muestra de esa evolución en la notación, el profesor de la Universidad de Illinois, Douglas West, y autor en 2005 de la 2ª edición del texto [24] utilizado ampliamente en las fases iniciales de este trabajo, decidió hacer una encuesta² entre sus lectores para unificar la terminología que emplearía en la 3ª edición del manual citado. Entre los resultados que obtuvo me permito señalar aquí algunos de los más relevantes para este trabajo, el primero, fue relativo a la nomenclatura entre *grafo simple* y *multigrafo*, y cuál de ellos se identificaba con el término genérico *grafo*.

Otra de las preguntas que se hacían en la encuesta era la relativa a los términos *número de vértices* y *número de aristas*, pues bien, se llegan a votar varias propuestas, correspondientes a:

- Número de vértices: $|V(G)|$, $n(G)$, $|G|$, $v(G)$, $\nu(G)$
- Número de aristas: $|E(G)|$, $m(G)$, $\|G\|$, $e(G)$, $\epsilon(G)$

Concretamente, en este trabajo se ha realizado una uniformización de la notación, para lo cual, en la mayoría de ocasiones se ha mantenido la terminología utilizada por West en [24], por ejemplo, para los colores (a_i) de la definición 1.2.1, para el índice cromático (χ') en la definición 1.2.4 y para la multiplicidad de aristas (μ) . Sin embargo, por su sencillez y facilidad de uso, se ha seguido la notación utilizada por Andersen en [1] como para la definición 1.2.7 del conjunto de colores C y en la definición 1.2.8 $\overline{C}$ del conjunto de no colores. Otro ejemplo que cabe destacar es el del grado del grafo $(\Delta(G))$ y el grado de los vértices $(d(v))$ en la definición 1.1.5, ya que se usan multitud de notaciones diferentes. En este caso, se ha optado por seguir a Diestel en [5] porque se ha considerado más clara para su comprensión del texto.

Todo ello, hace concluir, que si en una terminología tan básica existe tanta disparidad en la notación, la comunicación científica y el acceso a la investigación tendrá un obstáculo más a superar en esta área.

²Disponible en <https://dwest.web.illinois.edu/igt/> y en <https://dwest.web.illinois.edu/igt/notat.html>

Bibliografía

- [1] ANDERSEN, LARS DOVLING «On edge-colourings of graphs». *Math. Scand.*, 1977, **40**, pp. 161–175. ISSN 0025-5521. doi: 10.7146/math.scand.a-11685.
<https://eudml.org/doc/166524>.
- [2] CHEN, GUANTAO; HAO, YANLI; YU, XINGXING y ZANG, WENAN «A short proof of the Goldberg-Seymour conjecture». Preprint, arXiv:2407.09403 [math.CO] (2024), 2024.
<https://arxiv.org/abs/2407.09403>.
- [3] CHEN, GUANTAO; JING, GUANGMING y ZANG, WENAN «Proof of the Goldberg-Seymour Conjecture on Edge-Colorings of Multigraphs». Preprint, arXiv:1901.10316 [math.CO] (2019), 2019.
<https://arxiv.org/abs/1901.10316>.
- [4] COLE, RICHARD; OST, KIRSTIN y SCHIRRA, STEFAN «Edge-coloring bipartite multigraphs in $O(E \log D)$ time». *Combinatorica*, 2001, **21**(1), pp. 5–12. ISSN 0209-9683. doi: 10.1007/s004930170002.
- [5] DIESTEL, REINHARD *Graph theory*, tomo 173 de *Grad. Texts Math.* Berlin: Springer, 6.^a edición, 2025. ISBN 978-3-662-70106-5. doi: 10.1007/978-3-662-70107-2.
- [6] GARCÍA-MARCO, IGNACIO y KNAUER, KOLJA «Beyond symmetry in generalized Petersen graphs». *J. Algebr. Comb.*, 2024, **59**(2), pp. 331–357. ISSN 0925-9899. doi: 10.1007/s10801-023-01282-y.
- [7] GOLDBERG, MARK K. «Über Multigraphen mit beinahe maximaler chromatischer Klasse». *Diskret. Analiz, Novosibirsk*, 1973, **23**, pp. 3–7.
- [8] — «Structure of multigraphs with constraints on the chromatic class». *Metody Diskretn. Anal.*, 1977, **30**, pp. 3–12. ISSN 0136-1228.
- [9] — «Edge-coloring of multigraphs: recoloring technique». *J. Graph Theory*, 1984, **8**, pp. 123–137. ISSN 0364-9024. doi: 10.1002/jgt.3190080115.
- [10] GUPTA, RAM PRAKASH «The chromatic index and the degree of a graph». *Notices Am. Math. Soc.*, 1966, **13**(6), p. 719. ISSN 0002-9920.
- [11] — *Studies in the Theory of Graphs*. Tesis doctoral, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1968.
<https://digitalcommons.isical.ac.in/doctoral-theses/173>.
- [12] HOLYER, IAN «The NP-completeness of edge-coloring». *SIAM J. Comput.*, 1981, **10**, pp. 718–720. ISSN 0097-5397. doi: 10.1137/0210055.
semanticscholar.org/paper/37c92599655b9f66850f1e4e0e48ad045abad8f6.

- [13] KARLOFF, HOWARD J. y SHMOYS, DAVID B. «Efficient parallel algorithms for edge coloring problems». *Journal of Algorithms*, 1987, **8**, pp. 39–52. ISSN 0196-6774. doi: 10.1016/0196-6774(87)90026-5.
- [14] MISRA, J. y GRIES, DAVID «A constructive proof of Vizing's theorem». *Inf. Process. Lett.*, 1992, **41**(3), pp. 131–133. ISSN 0020-0190. doi: 10.1016/0020-0190(92)90041-S.
- [15] MOORE, GORDON E. «Cramming more components onto integrated circuits (1965)». En: *Ideas that created the future. Classic papers of computer science*, pp. 261–266. Cambridge, MA: MIT Press, 2021. ISBN 978-0-262-04530-8.
https://web.archive.org/web/20141006144200/http://web.eng.fiu.edu/npala/EEE6397ex/Gordon_Moore_1965_Article.pdf.
- [16] ORE, ØYSTEIN *The four-color problem*, tomo 27 de *Pure Appl. Math.*, Academic Press. Academic Press, New York, NY, 1967.
- [17] SCHRIJVER, ALEXANDER *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency (3 volumes)*, tomo 24 de *Algorithms Comb.* Berlin: Springer, 2003. ISBN 3-540-44389-4.
- [18] SEYMOUR, P. D. «On multi-colourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte». *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 1979, **38**, pp. 423–460. ISSN 0024-6115. doi: 10.1112/plms/s3-38.3.423.
- [19] SHANNON, CLAUDE E. «A theorem on coloring the lines of a network». *J. Math. Phys., Mass. Inst. Techn.*, 1949, **28**, pp. 148–151. ISSN 0097-1421. doi: 10.1002/sapm1949281148.
- [20] TURING, ALAN *Treatise on the Enigma. Proof's Book*. The Turing Digital Archive, 1939-1942.
<https://turingarchive.kings.cam.ac.uk/unpublished-manuscripts-and-drafts-amtc/amt-c-30>.
- [21] VIEITES RODRÍGUEZ, ANA MARÍA; AGUADO MARTÍN, FELICIDAD; VIDAL MARTÍN, CONCEPCIÓN y PÉREZ VEGA, GILBERTO *Teoría de Grafos*. Madrid: Ediciones Paraninfo, 1.^a edición, 2014. ISBN 978-84-283-3707-6.
- [22] VIZING, VADIM GEORGIEVIC «On an estimate of the chromatic class of a p -graph». *Diskret. Analiz, Novosibirsk*, 1964, **3**, pp. 25–30.
- [23] ——— «Kritische Graphen mit gegebener chromatischer Klassen». *Diskret. Analiz, Novosibirsk*, 1965, **5**, pp. 9–17.
- [24] WEST, DOUGLAS B. *Introduction to graph theory*. New Delhi: Prentice-Hall of India, 2.^a edición, 2005. ISBN 81-203-2142-1.