



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

SINGULARITATS DE L'ESPAI TEMPS

Autor: Irene Domenech Laborda

Director: Dr. Joana Cirici

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 14 de gener de 2026

Resum

L'objectiu d'aquest treball és desenvolupar de forma matemàtica la noció de singularitat d'un espaitemps. Per fer-ho primer s'introdueix una base d'eines matemàtiques pròpies de la geometria diferencial. Posteriorment es presenta una introducció sobre l'estructura causal d'un espaitemps amb l'objectiu de treure condicions sota les quals podem afirmar que les singularitats no són només objectes matemàtics, sino que també tenen un significat físic. En altres paraules, les singularitats són inevitables. Tot aixó donarà lloc a la formulació final dels tres teoremes principals sobre singularitats als espaitemps.

Agraïments

En primer lloc voldria agraïr a la meua tutora, la Dr. Joana Cirici per tota la seua ajuda i per guiarme en aquest treball. També vull agraïr als meus pares i al meu germà per estar al meu costat en tot moment i poder fer possible el haver arribat fins aquí. Però sobretot als meus amics, en especial els de la universitat, per totes les hores interminables que hem passat junts a la biblioteca durant els últims quatre anys.

Índex

1	Introducció	1
2	Geometria diferencial	4
2.1	Varietats Diferencials	4
2.2	Espai Tangent	6
2.3	Corbes	8
2.4	Camps Vectorials	9
2.5	Connexions i tensors relatius a una varietat	11
3	Geometria pseudo-Riemanniana	15
3.1	Varietats pseudo-Riemannianes	15
3.2	Geodèsiques	17
3.3	Curvatura mitjana	17
3.4	Punts conjugats i variacions de geodèsiques	20
4	Estructura Causal	22
4.1	Espai temps	22
4.2	Futurs i Passats	25
4.3	Condicions de Causalitat	30
4.4	Hiperbolicitat global	32
5	Resultats de singularitats	37
5.1	Preliminars	37
5.2	Teoremes sobre singularitats	40

1. Introducció

Tú quan mires al cel, què veus? La resposta sembla obvia ara mateix, després d'anys i anys d'estudi. Pot ser tothom podria fer un xicotet esquema mental per poder enendre de forma intuitiva el que hi ha a l'univers. Aquesta resposta però sempre quedarà molt lluny d'una definició rigorosa del que entenem, des del punt de vista científic, com a univers o espai-temps.

Des dels inicis de la història, gairebé totes les poblacions s'han fet aquesta pregunta. Tots ells han intentat donar una resposta, al principi molt lligada amb la religió i la divinitat, i més endavant des d'un punt de vista més científic i rigorós, tot i les traves que certes institucions van ficar al camí. Avui dia podem dir que la resposta tan senzilla que teniem al principi s'ens ha complicat una mica. Això és perquè el que “hi ha al cel” és prou més complicat del que ens pensariem. Aquest no és un sistema gaire senzill, i és per això que necessitem l'ajuda d'un bon model matemàtic que ens ajude a poder treballar de la forma més còmoda possible. Aquest model estarà fonamentat completament en la Geometria Diferencial.

La idea d'incorporar la Geometria Diferencial a l'estudi de la Relativitat General va ser proposada per Albert Einstein al segle XX. L'objectiu era deixar de tractar la gravetat com una força i començar a interpretar-la com una deformació de l'espai-temps degut a la curvatura d'aquest provocat per les acumulacions puntuals de massa i energia. Per tant, en aquest context, l'espai-temps es modelitza com una varietat diferencial dotada amb una mètrica pseudo-Riemanniana o Lorentziana. S'introdueix doncs la que es coneix com a ***Equació d'Einstein***,

$$\bar{G} + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

que representa la relació fonamental entre la geometria de l'espai-temps i el contingut físic de l'univers. La $\bar{G}$ representa el tensor d'Einstein, Λ representa la constant cosmològica, g la mètrica de l'espai-temps, G la constant gravitacional, c la velocitat de la llum i T el tensor d'energia-impuls. De forma sintètica, aquesta equació ens diu que la matèria i l'energia determinen la curvatura de l'espai-temps, i aquesta governa el moviment de la matèria.

Les mètriques que podem considerar al nostre espai-temps són les solucions d'aquesta equació. Algunes conegudes són la mètrica de Minkowski o mètrica de Lorentz, mètrica de Schwarzschild o mètrica de Kerr. Algunes d'aquestes solucions presenten limitacions fonamentals, donant lloc a singularitats a l'espai-temps. Aquestes són el centre d'aquest treball.

Donar una definició del que és una singularitat té una certa dificultat. De forma intuitiva, podem dir que una singularitat és un “lloc” on la curvatura “explota” o un altre tipus de comportament patològic té lloc. Aquesta definició no la podem agafar com a precisa donat que no tenim una definició clara i formal del que significa que la curvatura “explote” o del que és un comportament patològic. El problema principal ve donat pel fet d'intentar interpretar una singularitat com un lloc. En el context en el que estem treballant no tenim ni una varietat ni una estructura mètrica predeterminada per a l'espai-temps, fet que fa que no puguem conèixer el “on i quan” de tots els events que tenen lloc, sino que el que volem és intentar resoldre per la varietat i estructura mètrica que hem escollit per descriure l'espai-temps.

Encara que han hagut diferents intents de donar una definició formal d'aquest concepte,

a dia d'avui no existeix una definició general completament satisfactòria. Per tant, estem obligats a descartar la idea d'una singularitat com un punt de l'espai. Hem de buscar per tant altres formes de caracteritzar-la per poder donar una definició precisa. Una altra forma d'afrontar aquest problema és fent servir que la curvatura "explota" en aquest espai-temps. Malauradament, trobem una sèrie de grans dificultats si es fa servir la noció de curvatura "explotant" com un criteri general per a singularitats.

En primer lloc, la curvatura ve definida per un camp tensorial que es pot escriure de forma local amb les coordenades que hem triat de l'espai-temps. Per tant, si fem servir el mal comportament de els components de la curvatura o de les seues derivades com un criteri per a les singularitats, podem estar fent una errada donat que aquest mal comportament dels components pot ser una mala definició de les coordenades o de la base de l'espai-temps escollida en comptes de ser un mal comportament de la pròpia curvatura. Per tant, una altra vegada, la caracterització general de les singularitats pel concepte "d'explosió" de la curvatura no és satisfactòria. A més, la caracterització de les singularitats donada per una enumeració detallada d'altres possibles tipus de "comportaments patològics" de la mètrica de l'espai-temps també sembla ser una tasca no satisfactòria donada la infinitat de possibles comportaments patològics.

Aleshores, per poder caracteritzar una singularitat de l'espai-temps el que farem serà llevar els punts de l'espai-temps que podrien representar una singularitat, deixant així "forats". Aquests "forats" podran ser detectats gràcies a que hi haurà geodèsiques amb una longitud afi finita. Les geodèsiques són corbes que extremitzen la distància en el context de varietats diferencials dotades amb una mètrica. En un espai-temps, les geodèsiques representen màxims de longitud. Equivalentment, hi haurà geodèsiques inextendibles en almenys una de les direccions però que només tenen un rang finit de paràmetres afins. Aquestes geodèsiques es diuen *incompletes*. Per tant, direm que un espai-temps és singular si té almeys una geodèsica incompleta.

Aquesta definició que hem donat pot presentar diverses objeccions. Per exemple, baix aquesta tindriem que qualsevol espai-temps al qual se li ha llevat un punt de forma "artificial" és un espai-temps singular. No obstant, podem solucionar aquest fet restringint aquesta consideració només a *espai-temps inextendibles*, és a dir, espai-temps que no són isomètrics a un subconjunt propi d'un altre espai-temps. Una altra objecció és que la incompletitud de geodèsiques no sempre es correspon a la presència de "forats" a l'espai-temps produïts al llevar els punts que representen les singularitats. O siga, que si tenim la presència d'un "forat", aleshores, la incompletesa de geodèsiques hauria de tenir lloc per a qualsevol tipus de geodèsica.

No obstant totes aquestes objeccions, hi ha una patologia física greu en qualsevol espai-temps que siga nul o temporalment incomplet. En aquests tipus d'espai-temps tenim que és possible, per almenys una partícula o fotó, acabar la seua existència en un temps finit o haver començat la seua existència en un temps finit. És a dir, una partícula pot "desaparèixer" després d'un temps finit. Per tant, tot i no tenir cap noció completa de singularitat, considerarem aquest espai-temps com a singular. Aquesta propietat és la que demostrarem, a l'última secció, als teoremes de singularitats. Podem classificar les singularitats en dos grups diferents, una *singularitat de curvatura* o una *singularitat de no-curvatura*. Els teoremes sobre singularitats només ens donaran l'existència de les singularitats, no de quin tipus són.

Finalment donarem una breu explicació de com el treball està organitzat. La Secció 2 recull una introducció bàsica sobre la geometria diferencial. La Secció 3 es centra en

l'estudi de varietats diferencials dotades de mètriques pseudo-Riemannianes, on es s'introdueix diversos conceptes relatius a la mètrica com ara la curvatura. Aquestes dues seccions recullen tots els objectes matemàtics que ens faran falta per poder entendre les construccions posteriors. La Secció 4 comença introduint conceptes clau com el *con de llum*, per donar les definicions de passats i futurs que ens seran necessàries. Posteriorment es fa una construcció rigorosa de l'estructura causal de l'espai-temps, donant definicions i resultats clau per entendre aquesta. La Secció 5 comença donant condicions necessàries per les geodèsiques per tal que màximitzen la longitud baix certes hipòtesis. Posteriorment s'enuncien tres teoremes importants sobre les singularitats de l'espai-temps. En l'ordre en el que es presenten al treball trobarem el Teorema de Hawking, el Teorema de Penrose i finalment el Teorema de Hawking-Penrose. Del primer donarem dues versions lleugerament diferents canviant una hipòtesi clau a l'enunciat.

L'objectiu final del treball és donar una introducció bàsica però rigorosa de la geometria de l'espai-temps i l'estructura causal d'aquest, sense que siga necessari cap coneixement físic previ per part del lector.

2. Geometria diferencial

La geometria diferencial ens permet poder estudiar espais més generals que $\mathbb{R}^n$; espais que localment semblen $\mathbb{R}^n$ però que globalment no; de forma que tinguen sentit per si mateixos, sense necessitat que estiguen dins d'un espai ambient. Aquests espais més generals reben el nom de *varietats*. Aquest objecte el podem dotar amb el que anomenarem una *estructura diferencial*. A tota varietat dotada d'una estructura diferencial l'anomenarem *varietat diferencial*. Farem servir aquestes al llarg de tot el treball.

L'objectiu doncs d'aquesta secció és donar una estructura matemàtica a espais més generals que $\mathbb{R}^n$ tal que ens permeta tractar-lo de forma local com $\mathbb{R}^n$ i mantenint totes les eines que es poden considerar en $\mathbb{R}^n$. En aquesta secció estarem seguint principalment [Lee12], [DCarmo92] i [CB03].

2.1 Varietats Diferencials

Primer introduïrem el concepte de varietat topològica, el concepte més bàsic de varietat.

Definició 2.1. Siga M un espai topològic. Diem que M és una **varietat topològica de dimensió n** o una **n -varietat topològica** si satisfà les següents propietats:

- M és un **espai de Hausdorff**: per a tot parell de punts diferents $p, q \in M$, existeixen dos conjunts oberts que són disjunts $U, V \subseteq M$ tal que $p \in U$ i $q \in V$.
- M satisfà el **segon axioma de numerabilitat**: existeix una base numerable per a la topologia definida en M .
- M és **localment Euclidià de dimensió n** : cada punt de M té un entorn homeomorf a un conjunt obert de $\mathbb{R}^n$. Dit d'una altra forma, per a tot punt $p \in M$ podem trobar:
 - Un entorn obert $U \subseteq M$ tal que conté a p .
 - Un entorn obert $V \subseteq \mathbb{R}^n$, i
 - un homeomorfisme $\varphi : U \rightarrow V$

Observació 2.2. Fixem-nos que el conjunt vuit satisfà la definició de varietat topològica de dimensió n per a tota $n \in \mathbb{N}$.

Definició 2.3. Siga M una n -varietat topològica. Una **carta coordinada** (o només una **carta**) de M és un parell (U, φ) , on U és un conjunt obert de M i $\varphi : U \rightarrow V$ és un homeomorfisme de U cap a un subconjunt $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Per definició de varietat topològica, cada punt $p \in M$ està dintre d'alguna carta (U, φ) . Si $\varphi(p) = 0$ diem que la carta està **centrada en p** .

Donada una carta (U, φ) , ens referim a U com a **domini coordinat** i a la carta φ com a **carta (local) coordinada** i les funcions components de φ $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, definides per $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$, reben el nom de **coordenades locals** de U .

Definició 2.4. Siga M una n -varietat topològica. Si (U, φ) , (V, ψ) són dues cartes tals que $U \cap V \neq \emptyset$, el mapa $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ rep el nom de **carta de transició entre φ i ψ** .

Definició 2.5. Diem que dues cartes (U, φ) i (V, ψ) són **diferencialment compatibles** si, o bé $U \cap V = \emptyset$, o bé $\psi \circ \varphi^{-1}$ és un difeomorfisme.

Definició 2.6. Siga M una varietat topològica. Direm que la família $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$ és un **atles de M** si el seu domini recobreix M , és a dir, $M = \bigcup_i U_i$. Diem que l'atles $\mathcal{A}$ és un **atles diferenciable** si cada parell de cartes de $\mathcal{A}$, (U, φ) i (V, ψ) , són diferencialment compatibles.

La nostra intenció és definir una *estructura diferencial* en M donant un atles diferencial i definint una funció $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que és diferencial si, i només si, $f \circ \varphi^{-1}$ és diferenciable en el sentit del càlcul ordinari per a tota carta (U, φ) de l'atles $\mathcal{A}$. El principal problema d'això és que, en general, hi ha molts atles possibles que donen la mateixa estructura diferencial. Per resoldre aquesta inconveniència, introduïm les següents definicions.

Definició 2.7. Siga M una varietat topològica. Diem que un atles $\mathcal{A}$ és un atles **maximal** si no està contingut en cap altre atles. És a dir, que tota carta diferencialment compatible amb qualsevol carta de $\mathcal{A}$ està en $\mathcal{A}$.

Definició 2.8. Siga M una varietat topològica. Anomenem **estructura diferencial en M** a un atles diferencial maximal de M .

Definició 2.9. Definim una **varietat diferencial** com el parell $(M, \mathcal{A})$, on M és una varietat topològica i $\mathcal{A}$ una estructura diferencial en M .

Per tal d'alleugerir la notació, a partir d'ara ens referirem a una varietat diferenciable només com a M , obviant l'estructura diferencial amb la que està dotada.

Observació 2.10. Podem estendre la definició de varietat diferencial a varietat diferencial amb vora si M és un espai de Hausdorff, satisfà el segon axioma de numerabilitat i tot punt de M és homeomorf a un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ o a un subconjunt de $\mathbb{H}^n$, on $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}$.

Ara que tenim la noció del que és una varietat diferencial volem donar una definició del que significa que una funció siga diferenciable en aquest nou context.

Definició 2.11. Siga M una varietat diferencial n -dimensional. Considerem $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció continua arbitrària. Direm que la funció f és **diferenciable** per a tot punt $p \in M$ si existeix una carta (U, φ) de M tal que $p \in U$ i $f \circ \varphi^{-1}$ és diferenciable en el conjunt obert $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definició 2.12. Denotem per $\mathcal{F}(M)$ el conjunt d'aplicacions diferenciables de la forma $M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Aquesta satisfà:

- $f, g \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow f + g \in \mathcal{F}(M)$
- $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow \lambda \cdot f \in \mathcal{F}(M)$
- $f, g \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{F}(M)$

Per tant diem que $\mathcal{F}(M)$ és una $\mathbb{R}$ -algebra.

La definició de funció diferenciable la podem generalitzar fàcilment a funcions entre varietats diferencials.

Definició 2.13. Siguen M, N dues varietats diferencials. Siga $F : M \rightarrow N$ una funció continua. Diem que F és una **funció diferenciable** per a tot $p \in M$ si existeixen cartes (U, φ) de M tal que $p \in U$ i (V, ψ) de N tal que $F(p) \in V$ i per tant $F(U) \subseteq V$, tals que la composició $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ definida per

$$\varphi(F^{-1}(V) \cap U) \xrightarrow{\varphi^{-1}} F^{-1}(V) \cap U \xrightarrow{F} V \cap F(U) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m$$

és diferenciable de $\varphi(U)$ a $\psi(V)$.

2.2 Espai Tangent

A continuació volem introduir el concepte d'espai tangent d'una varietat diferencial, però per poder fer-ho necessitem primer donar la noció de derivació.

Definició 2.14. Siga M una varietat diferencial. Siga p un punt de M . Diem que $\delta : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ és una **derivació** en p si és $\mathbb{R}$ -lineal i satisfà

$$\delta(fg) = f(p)\delta g + g(p)\delta f \text{ per a tot } f, g \in \mathcal{F}(M)$$

Definició 2.15. Siga M una varietat diferencial i siga p un punt de M . El conjunt de derivacions és un $\mathbb{R}$ -espai vectorial. L'anomenem **espai tangent a M en p** i el denotem per $T_p M$.

Ens serà útil considerar el conjunt de tots els espais tangents de tots els punts d'una varietat diferencial. Definim aquest conjunt com:

Definició 2.16. Siga M una varietat diferencial. Definim el **fibrat tangent de M** , denotat per TM , com la unió disjunta dels espais tangents de tots els punts de M :

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M$$

En general, escrivim un element del fibrat tangent com el parell ordenat (p, v_p) , on $p \in M$ i $v_p \in T_p M$. El fibrat tangent ve equipat amb una projecció $\pi : TM \rightarrow M$, definida com $\pi(p, v_p) = p$. És a dir, envia cada vector v_p de $T_p M$ al punt p al qual és tangent.

Veiem a continuació que podem considerar TM com una varietat diferencial. Siga U un obert de M amb coordenades $(x^1, \dots, x^m)$. Tenim doncs que el conjunt $TM|_U = TU$ es pot identificar amb $U \times \mathbb{R}^m$ mitjançant l'aplicació següent:

$$\varphi : TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^m, \quad \varphi(q, v_q) = (q; v^1, \dots, v^m)$$

on $v^1, \dots, v^m$ són les coordenades de v_q en la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_q\}$. Observem que φ és bijectiva.

Dotarem TU amb la topologia induïda per aquesta bijecció i donarem TM amb la topologia suma mitjançant el fet que $TM = \bigcup_{U \subset M} (TU)$. És a dir, tindrem que un subconjunt de M és obert si, i només si, la seua intersecció amb cada TU és un obert de TU . Podem vore que amb aquesta topologia TM és un espai de Hausdorff i satisfà el segon axioma de numerabilitat.

Veiem primer que TM és un espai de Hausdorff. Considerem doncs $v, w \in TM$ tals que $v \in T_p M$ i $w \in T_q M$. Suposem primer que $p \neq q$. Aleshores, com M és un espai de

Hausdorff tenim que existèixen dos oberts disjunts $U, V \subset M$ tals que $p \in U$ i $q \in V$. Per tant, $TU, TV \in TM$ són dos oberts disjunts tals que $v \in TU$ i $w \in TV$. Suposem ara que $p = q$. Aleshores tenim que $v, w \in T_p M$ amb $v \neq w$. Considerem doncs (U, φ) una carta de M tal que $p \in U$. Podem definir doncs l'homeomorfisme

$$\Phi_U : TU \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

Aleshores tenim que $\Phi_U(v)$ i $\Phi_U(w)$ són dos punts diferents en $\mathbb{R}^{2n}$. Com $\mathbb{R}^{2n}$ és un espai de Hausdorff existèixen oberts disjunts O_v i O_w tals que $\Phi_U(v) \in O_v$ i $\Phi_U(w) \in O_w$. Per tant, $\Phi_U(O_v)$ i $\Phi_U(O_w)$ seran oberts disjunts de TU tals que $v \in \Phi_U(O_v)$ i $w \in \Phi_U(O_w)$. Com són oberts de TU en particular són oberts de TM . Per tant, TM és un espai de Hausdorff. Veiem ara que TM satisfà el segon axioma de numerabilitat, és a dir, que existeix una base numerable d'oberts que el recobreix. Com M satisfà el segon axioma de numerabilitat, tenim que existeix un atlas numerable $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ que recobreix M . Aleshores tenim que per a tot i , TU_i és homeomorf a $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$, el qual és un obert de $\mathbb{R}^{2n}$. Com tenim que $\mathbb{R}^{2n}$ satisfà el segon axioma de numerabilitat, aleshores tenim que TU_i admet una base numerable que denotarem per $\mathcal{B}_i$. Aleshores podem considerar

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$$

Observem que $\mathcal{B}$ és numerable, cada element de $\mathcal{B}$ és un obert de TM . Per tant, hem demostrat que TM satisfà el segon axioma de numerabilitat.

Podem donar l'estructura diferencial de TM considerant com a cartes els TU amb les respectives aplicacions $\varphi : TU \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$. Comprovem doncs que aquestes cartes són compatibles. Considerem (TU, φ) i (TV, ψ) dues cartes qualssevol, tal que les coordenades en U i V són (x^i) i (y^j) respectivament. Aleshores, l'aplicació $\psi \circ \varphi^{-1}$ s'expressa com

$$(x^i, v^i) \longrightarrow (y^j, w^j)$$

En aquesta expressió veiem que cada y^j és una funció diferenciable de les x^i i com que $w^j = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ tenim que l'aplicació $\psi \circ \varphi^{-1}$ és diferenciable.

Continuem introduint el concepte de *diferencial* d'una funció diferenciable entre dues varietats diferencials.

Definició 2.17. Siguen M i N dues varietats diferencials. Siga $F : M \rightarrow N$ una funció diferenciable entre varietats. Per a cada $p \in M$ definim el **diferencial de F en p** com

$$d_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$$

$$\left[\delta_p : F(M) \rightarrow \mathbb{R} \right] \longrightarrow \delta_p \longmapsto \left[\begin{array}{c} \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \delta_p(f \circ F) \end{array} \right] = dF_p(\delta_p)(f)$$

Definició 2.18. Siguen M, N dues varietats diferencials i siga $F : M \rightarrow N$ diferenciable. Aleshores:

- Diem que F és una **immersió** si per a tot $p \in M$, $d_p F$ és injectiva.
- Diem que F és una **submersió** si per a tot $p \in M$, $d_p F$ és exhaustiva.
- Diem que F és una **difeomorfisme local** si per a tot $p \in M$, $d_p F$ és bijectiu.

- Diem que F és una “**embedding**” si F és una immersió i $M \xrightarrow{F} F(M)$ és un homeomorfisme.

Definició 2.19. Siga M una varietat diferencial i siga $N \subset M$ un subconjunt de punts de M que manté l’estructura diferencial. Diem que N és una **subvarietat “embedded” de M** si la inclusió $i : N \hookrightarrow M$ és un “embedding”.

En general, quan volem determinar si $N \subset M$ és una subvarietat embedded de M fem servir el següent teorema:

Definició 2.20. Siguen M i N dues varietats diferencials. Siga $F : M \rightarrow N$ diferencial i $q \in N$. Direm que q és un **valor regular** de F si satisfà:

- $F^{-1}(q) \neq \emptyset$
- per a tot $p \in F^{-1}(q)$, $d_p F$ és exhaustiva

Aquest teorema és molt important donat que estableix una relació entre aplicacions diferenciables i la geometria diferencial de les varietats. A més ens permet trobar subvarietats diferencials de forma sistemàtica de forma més senzilla que aplicant la propia definició de subvarietat.

Teorema 2.21. (Teorema del valor regular). Siga M una varietat diferencial. Siga $F : M \rightarrow N$ diferenciable i $q \in N$ un valor regular de F . Aleshores $F^{-1}(q)$ és una subvarietat diferencial de M de dimensió $\dim(M) - \dim(N)$.

2.3 Corbes

Volem ara estendre la definició de corbes en l’espai per poder definir-les dins de les varietats diferencials. Amb aquestes podrem donar una definició alternativa dels espais tangents que hem definit. Recordem primer que és una corba:

Definició 2.22. Siga $I = (a, b)$ un interval obert de $\mathbb{R}$. Diem que una aplicació diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és una **corba parametritzada diferenciable** d’un interval obert $I = (a, b)$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^3$.

En aquesta definició ens estem referint al concepte de diferenciable en el sentit que α és una correspondència que aplica cada $t \in I$ en un punt $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de manera que les funcions $x(t), y(t), z(t)$ són diferenciables en el sentit ordinari del càlcul. Siga $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada diferenciable. Per cada $t \in I$ a on $\alpha'(t) \neq 0$ existeix una recta ben definida, que passa pel punt $\alpha(t)$ i conté el vector $\alpha'(t)$. Aquesta és la recta tangent de α en t .

Definició 2.23. Siga M una varietat diferencial i α una corba parametritzada diferenciable en M . Definim la longitud de α com:

$$L = \int |\alpha'(t)| dt$$

Definició 2.24. Siga $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada diferenciable. Diem que un punt t és un **punt singular** si $\alpha'(t) = 0$.

Definició 2.25. Una corba parametritzada diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ rep el nom de **corba regular** si $\alpha'(t) \neq 0$ per a tot $t \in I$, és a dir, si no té cap punt singular.

De forma anàloga definim una corba parametritzada diferenciable en una varietat diferencial de la següent manera:

Definició 2.26. Siga M una varietat diferencial. Siga $I = (a, b)$ un interval obert de $\mathbb{R}$. Una funció diferenciable $\alpha : I \rightarrow M$ és una **corba diferencial** en M .

Definició 2.27. Siga M una varietat diferencial. Siga $\alpha : I \rightarrow M$ una corba diferencial en M . Anomenem **camp tangent a M al llarg de α** a una aplicació

$$t \in I \longrightarrow Y(t) \in T_{\alpha(t)}M$$

tal que existeix un recobriment de $\alpha(I)$ per cartes coordenades tal que si

$$Y(t) = \sum_i \nu_i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)}$$

aleshores les funcions ν_i són diferenciables.

Definició 2.28. Siga M una varietat diferencial. Siga $O \subset M$ un obert. Una **congruència** en O és una família de corbes tals que per a tot $p \in O$ passa exactament una corba d'aquesta família.

Observació 2.29. Tot camp vectorial continu genera una congruència de corbes.

Definició 2.30. Diem que una congruència és **diferencial** si el camp vectorial corresponent és diferencial.

2.4 Camps Vectorials

Definició 2.31. Siga M una varietat diferencial. Definim un **camp vectorial en M** com una carta continua $X : M \rightarrow TM$ que escriurem com $p \mapsto X_p$.

Observació 2.32. Observem que $p \in T_p M$ per a tot $p \in M$.

Definició 2.33. Siga M una varietat diferencial. Siga $X : M \rightarrow TM$ un camp vectorial. Diem que és un **camp diferencial** si existeix un recobriment de M per a cartes coordenades $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$ tal que $x^1, \dots, x^n$ són les coordenades en U_i . Podem escriure doncs el valor de X a un punt $p \in U_i$ en termes de la base coordenada de la següent forma:

$$X_p = \sum_{i=0}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Aquesta representació defineix n funcions $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ que reben el nom de **components locals del camp X en la carta U_i** .

Definició 2.34. Diem que un camp vectorial X és **diferenciable** si les seues components locals $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ són diferenciables.

Definició 2.35. Siga M una varietat diferencial. Denotem per $\mathfrak{X}(M)$ el conjunt de camps diferenciables de M .

Podem generalitzar la noció de *derivació* que hem donat en l'apartat anterior de la següent forma:

Definició 2.36. Direm que $\delta : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ és una **derivació en $\mathcal{F}(M)$** si és $\mathbb{R}$ -lineal i

$$\delta(fg) = \delta(f)g - f\delta(g) \quad \text{per a tot } f, g \in \mathcal{F}(M)$$

Aleshores, donat $X \in \mathfrak{X}(M)$ podem definir la derivació

$$L_X : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

$$f \longmapsto \left[\begin{array}{c} M \longrightarrow \mathbb{R} \\ p \longmapsto X_p(f) \end{array} \right]$$

Tenim doncs que L_X està ben definida i localment $f \longmapsto \sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ és diferenciable.

Proposició 2.37. Si δ és una derivació de $\mathcal{F}(M)$ aleshores existeix un únic $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\delta = L_X$.

Demostració. Donats $p \in M$ i $f \in \mathcal{F}(M)$ definim $X_p(f) = \delta(f)(p)$. Veiem primer que $X \in \mathfrak{X}(M)$. Considerem (U, φ) una carta coordinada de M amb $x^1, \dots, x^n$ coordenades locals en U . Aleshores, en U tindrem que

$$X_q = \sum_{i=1}^n \xi_i(q) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q \quad \text{per a tot } q \in U$$

Considerem doncs $p \in U$. Siga ρ la funció aliplà ² associada a (U, φ) i siga $q \in \{x \in M \mid \rho(x) = 1\}$. Aleshores:

$$X_q(x^j) = \sum_{i=1}^n \xi_i(q) \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_q = \xi_j(q)$$

D'ací tenim que $\xi_i(q) = X_q(\rho x^i) = \delta(\rho x^i)(q)$. Per tant $\xi_i(q)$ és diferenciable. A més:

$$L_X(f)(p) = X_p(f) = \delta(f)(p) \quad \text{per a tot } f \in \mathcal{F}(M) \text{ i per a tot } p \in M$$

Això implica que $L_X = \delta$. Per últim, demostrem la unicitat. Suposem que existeixen X_1, X_2 dos camps diferents tals que $L_{X_1} = \delta = L_{X_2}$. Aleshores:

$$(X_1)_p(f) = L_{X_1}(f)(p) = \delta = L_{X_2}(f)(p) = (X_2)_p(f)$$

fet que implica que X_1 i X_2 són el mateix camp. □

Proposició 2.38. Siguen $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Aleshores l'aplicació

$$[\ , \] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

definida com $(L_X, L_Y) \mapsto [L_X, L_Y] = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$ és una derivació de $\mathcal{F}(M)$.

²Diem que una funció $\rho : M \rightarrow [0, 1]$ és una funció aliplà associada a (V, p) , on $p \in M$ i $V \subset M$ és un entorn de p , si existeix un entorn compacte $C \subset V$ de p tal que $\rho|_C = 1$ i el suport de ρ és un compacte contingut en V .

Demostració. Per demostrar que aquesta aplicació és una derivació hem de veure que és $\mathbb{R}$ -lineal i que satisfà la regla de Leibnitz. Que és $\mathbb{R}$ -lineal és directe donat que tots els components que apareixen són $\mathbb{R}$ -lineals. Veiem que es satisfà la regla de Leibnitz:

$$\begin{aligned} [L_X, L_Y](fg) &= L_X(L_Y(fg)) - L_Y(L_X(fg)) \\ &= L_X(gL_Y(f) + fL_Y(g)) - L_Y(gL_X(f) + fL_X(g)) \\ &= L_X(L_Y(f))g + L_Y(f)L_X(g) - L_Y(L_X(f))g - L_X(f)L_Y(g) \\ &\quad - L_Y(f)L_X(g) - fL_Y(L_X(g)) + L_X(f)L_Y(g) + fL_X(L_Y(g)) \\ &= [L_X, L_Y](f)g + f[L_X, L_Y](g) \end{aligned}$$

Per tant, $[L_X, L_Y]$ defineix una derivació en $\mathcal{F}(M)$. $\square$

Observació 2.39. Existeix un únic camp Z tal que $L_Z = [L_X, L_Y]$.

Definició 2.40. Siguen $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Denotarem $Z = [X, Y]$ i l'anomenarem **claudator de Lie**.

Donats dos camps vectorials $X \in \mathfrak{X}(M)$ i $Y \in \mathfrak{X}(M)$. En un entorn coordinat es poden expressar com:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{i} \quad Y = \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Aleshores l'expressió del claudator de Lie en coordenades locals ve donat per:

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

La següent proposició ens dona diverses propietats del claudator de Lie.

Proposició 2.41. Siga M una varietat diferencial. Siguen X, Y i $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Siguen $a, b \in \mathbb{R}$ i siguen $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Aleshores tenim que:

- a) $[X, Y] = -[Y, X]$
- b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
- c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
- d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

Totes aquestes propietats es poden demostrar de forma senzilla aplicant la definició del claudator i tractant un camp vectorial com una derivació en el cas de la propietat d). Podem trobar una demostració completa i detallada al Capítol 0 de [DCarmo92].

2.5 Connexions i tensors relatius a una varietat

Abans d'entrar en les definicions dels conceptes de *connexió* i *tensors de curvatura i torsió* anem a recordar alguns conceptes d'àlgebra multilinear. Suposarem que els espais vectorials amb els que treballem són espais vectorials reals de dimensió finita.

Definició 2.42. Siguen $E_1, \dots, E_n, F$ $\mathbb{R}$ -espais vectorials. Diem que una aplicació $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ és multilinear si

- $f(x_1, \dots, x_i + x_{i'}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i'}, \dots, x_n)$ per a tot $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$
- $f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ per a tot $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n, \lambda \in \mathbb{R}$

Definició 2.43. Siga E un $\mathbb{R}$ -espai vectorial. Un **tensor** de tipus (k, l) (k vegades covariant i l vegades contravariant) en E és una aplicació multilinear

$$T_l^k(E) : \overbrace{E \times \dots \times E}^k \times \overbrace{E^* \times \dots \times E^*}^l \longrightarrow \mathbb{R}$$

on E^* denota l'espai dual de l'espai vectorial E .

Observació 2.44. Quan $k = 0$ i $l = 0$ considerarem qualsevol nombre real com un tensor d'aquest tipus.

Fixats els índexs k i l tenim que el conjunt de tensors de tipus (k, l) té estructura d'espai vectorial sobre $\mathbb{R}$, definint la suma i el producte de la següent forma:

$$(T + S)(E, \dots, E, E^*, \dots, E^*) = T(E, \dots, E, E^*, \dots, E^*) + S(E, \dots, E, E^*, \dots, E^*)$$

$$(\lambda T)(E, \dots, E, E^*, \dots, E^*) = \lambda T(E, \dots, E, E^*, \dots, E^*)$$

on $T, S \in T_l^k(E)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Per tant, si $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ és una base de l'espai vectorial E i $\{w^j\}_{j=1, \dots, n}$ la seua base dual, tenim que una possible base de l'espai vectorial dels tensors de tipus (k, l) , que denotarem per $T_{(k, l)(E)}$, és $\{w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_n} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l}\}_{j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}}$. La dimensió de $T_{(k, l)(E)}$ és n^{k+l} .

Definició 2.45. Siga E un espai vectorial de dimensió finita. Un k -tensor covariant T en E és **simètric** si el seu signe no varia en permutar qualsevol parell d'arguments:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

Definició 2.46. Siga E un espai vectorial de dimensió finita. Un k -tensor covariant T en E és **antisimètric** si canvia de signe en permutar qualsevol parell d'arguments:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

Ja tenim totes les eines per donar les definicions necessaries. Introduïrem el concepte de *connexió* en una varietat diferencial conjuntament amb els *símbols de Christoffel* i els camps tensorials de torsió i curvatura.

Definició 2.47. Siga M una varietat diferencial. Una aplicació

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

és una **connexió** (*afí*) o un operador de derivació covariant si satisfà:

1. $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
2. $\nabla_{X_1 + X_2}(Y) = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$

$$3. \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y, \quad f \in \mathcal{F}(M) \quad (\text{Regla de Leibnitz})$$

$$4. \nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y$$

La següent proposició ens diu que la restricció d'una connexió en un obert de la varietat és en efecte una connexió i per tant podem donar una expressió d'aquesta en funció de les coordenades definides en aquest obert.

Proposició 2.48. *Siga M una varietat diferencial. Siga ∇ una connexió a M . Per a tot obert U de M , ∇ dona lloc a una connexió ∇^U a l'obert U , tal que per a tot $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tenim que*

$$\nabla_{X_U}^U Y_U = \nabla_X Y|_U$$

Podem trobar una demostració d'aquesta proposició en la pàgina 122 de [CB03].

Siga U un obert de M amb coordenades $x^1, \dots, x^n$. Aleshores, podem expressar qualsevol parell de camps de $\mathfrak{X}(U)$ com

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Aplicant les propietats 2 i 3 de la Definició 2.47 esmentades abans d'una connexió tenim que:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left(\sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \stackrel{3}{=} \sum_{j=1}^n X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^n Y^j \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &\stackrel{2}{=} \sum_{j=1}^n X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

Com que podem expressar el camp $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ com una combinació lineal de la base $\{\frac{\partial}{\partial x^k}\}$ en cada punt, tenim que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Definició 2.49. Els coeficients Γ_{ij}^k són funcions diferenciables definides com

$$\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$$

i reben el nom de *símbols de Christoffel* de ∇ en la carta coordenada (U, φ) .

Aleshores, obtenim l'expressió local de la connexió $\nabla_X Y$ que ve donada per:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{j=1}^n X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X^i Y^j \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(X(Y^k) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

D'ací endavant considerarem M una varietat diferencial i ∇ una connexió a M .

Definició 2.50. Definim el *camp tensorial de torsió* de ∇ com el camp tensorial de tipus $(2, 1)$ definit com:

$$\begin{aligned} T^\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

que és $\mathcal{F}(M)$ -bilineal.

Definició 2.51. Diem que una connexió és una *connexió simètrica* si el seu camp de torsió és zero.

Definició 2.52. Definim el *camp tensorial de curvatura* de ∇ com el camp tensorial de tipus $(3, 1)$ definit com:

$$\begin{aligned} R^\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

Farem servir la notació $R^\nabla(X, Y)Z$.

Aquests dos camps tensorials els podem expressar en un entorn coordinat (U, φ) de M amb coordenades $x^1, \dots, x^n$ i en funció dels símbols de Christoffel de la següent forma:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ R_{ijk}^l &= \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \sum_s \left(\Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l \right) \\ R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} &= R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \end{aligned}$$

3. Geometria pseudo-Riemanniana

A una varietat diferencial per si mateixa no podem donar una definició de distància ni de curvatura ni de longitud. Per poder donar una definició de tots aquests conceptes, i d'altres que veurem més endavant en aquesta secció, dotarem a la varietat diferencial d'una *mètrica*. D'aquestes ni han dos tipus: Riemannianes i semi-Riemannianes. Per referir-nos a totes dues farem servir el concepte de *pseudo-Riemannianes*, tot i que el nostre interès, pel tema que estem tractant, recau completament en les mètriques semi-Riemannianes o Lorentzianes.

3.1 Varietats pseudo-Riemannianes

En aquesta secció juntem el concepte de varietat diferencial que hem introduït amb la Geometria, amb l'objectiu de ser capaços de definir conceptes geomètrics com ara longituds, angles i distàncies en varietats diferencials. Per fer-ho, dotarem d'una *mètrica* a les varietats diferencials. A més, vorem que tota varietat diferencial admet una.

Definició 3.1. Siga M una varietat diferencial. Definim *mètrica en M* com un tensor covariant simètric de tipus $(2,0)$

$$g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

Tenim que g és $\mathcal{F}(M)$ -bilineal tal que per a tot $p \in M$

$$\begin{aligned} g_p : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto g(x_v, x_w) \end{aligned}$$

Donada una mètrica g sempre podem trobar una base coordenada tal que $g(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$ i $g(v_i, v_i) = \pm 1$. El nombre de $+1$ i -1 és independent de la base triada i rep el nom de *signatura de la mètrica*. Al nombre de -1 ens referirem con *l'índex de la mètrica*.

Definició 3.2. Siga M una varietat diferencial i g un camp tensorial diferenciable de tipus $(2,0)$. Per cada punt $p \in M$, g_p és una aplicació bilineal de $T_p M \times T_p M$ en $\mathbb{R}$. Direm que g és *simètrica* si per a tot $p \in M$, g_p és simètrica. Direm que g és *definit positiu* si $g_p(v_p, w_p) > 0$ per a tot $v_p \in T_p M$ amb $v_p \neq 0$ i per a tot $p \in M$.

Definició 3.3. Siga M una varietat diferencial. Siga g una mètrica en M tal que $\text{index}(g) = n - 1$ on n és la dimensió de l'espai vectorial $T_p M$. Aleshores diem que g és una mètrica *de Lorentz*. Diem doncs que una varietat (M, g) amb g una mètrica de Lorentz és una varietat de *Lorentz*.

Ara que la nostra varietat M està dotada d'una mètrica de Lorentz, tenim que la longitud de qualsevol corba, $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$, en aquesta varietat és defineix com

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{-g(v, v)} dt$$

Definició 3.4. Siga g una mètrica en una varietat M . Siga ∇ una connexió en M . Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ podem definir la connexió

$$\nabla_g : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

$$(Y, Z) \mapsto X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

Diem que és una **connexió de Levi-Civita** si satisfà $T^\nabla = 0$ i $\nabla_X g = 0$.

Teorema 3.5. (Teorema Levi-Civita) Siga (M, g) una varietat pseudo-Riemanniana. Aleshores, existeix una única connexió de Levi-Civita.

Demostració. Considerem $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ tres camps vectorials de M . Escrivim la condició $\nabla g = 0$ tres vegades, permutant els camps X, Y, Z ,

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

$$Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

Tenint en compte que la connexió de Levi-Civita té torsió zero i sumant les dues primeres igualtats i restant la tercera, tenim:

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z X, Y) &= \frac{1}{2} \{X(g(Y, Z)) + Z(g(X, Y)) - Y(g(Z, X))\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{g([X, Y], Z) + g([Z, Y], X) + g([X, Z], Y)\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Aquesta expressió determina $\nabla_Z X$ per a qualssevol camps Z, X . També ens diu que és únic. L'últim que ens queda per veure és que ∇ és una connexió. Ho podem fer aplicant l'expressió 1 per demostrar que les condicions donades a la Definició 2.47 es satisfan. $\square$

Definició 3.6. Siga (M, g) una varietat pseudo-Riemanniana. Es defineix el **tensor de curvatura Riemanniana** com el tensor de tipus $(4, 0)$:

$$R^g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

$$(X, Y, Z, T) \mapsto g(R^{\nabla^{LC}}(X, Y)Z, T)$$

on $R^{\nabla^{LC}}$ és el tensor curvatura en funció de la connexió de Levi-Civita.

Definició 3.7. Siga (M, g) una varietat diferencial. Definim per a cada punt $p \in M$ el mapa

$$Ric_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

com $Ric_p(Y, Z) := tr(X) \mapsto R_p(X, Y)Z$, on R_p representa el tensor de curvatura de Riemann al punt p .

Observació 3.8. En notació d'índexs tenim que el tensor de Ricci es defineix com la contracció d'índexs del tensor curvatura:

$$Ric_{ij} = R^l_{jki} = R^l_{ikj}$$

Siga (M, g) una varietat diferencial, on g una mètrica pseudo-Riemanniana. En un entorn local, on podem definir coordenades, podem definir el tensor de Ricci com:

$$R_{jk} := \partial_i \Gamma^i_{jk} - \partial_k \Gamma^i_{ji} + \Gamma^i_{ip} \Gamma^p_{jk} - \Gamma^i_{jp} \Gamma^p_{ik}$$

3.2 Geodèsiques

A continuació introduïrem el concepte de corbes geodèsiques. De forma intuïtiva, les geodèsiques són les corbes que extremitzen les distàncies per corbes que es troben infinitesimalment a prop. Per al cas que nosaltres estem tractant, és a dir, per a una mètrica Lorentziana, les geodèsiques representen corbes que maximitzen distàncies. Per altra banda, en el cas de les mètriques Riemannianes, les geodèsiques representen corbes que minimitzen distàncies.

Definició 3.9. Siga M una varietat diferencial. Donada una connexió ∇ en M i $Y \in \mathfrak{X}_{\alpha(t)}(M)$ definim la **derivada covariant** de Y al llarg de α com:

$$\nabla_{\alpha'}^Y = \sum_k \left(\sum_{i,j} \nu_j(t) \frac{d\alpha_i}{dt} \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) + \frac{d\nu_k}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Definició 3.10. Siga $\gamma : I \rightarrow M$ una corba parametritzada en una varietat pseudo-Riemanniana (M, g) . Diem que γ és una **geodèsica** si $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ en tots els punts de la corba.

Podem donar una expressió diferencial d'aquesta condició. Suposem doncs el cas en el que $\nu_j = \frac{d\alpha_j}{dt}$. Tenim doncs la igualtat:

$$\frac{d^2\alpha_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{d\alpha_j}{dt} \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

3.3 Curvatura mitjana

Per introduir el següent concepte necessari a l'hora d'enunciar els teoremes de singularitats, hem de presentar primer la noció de *segona forma fonamental*, un concepte clau a la Geometria Diferencial de superfícies. L'objectiu de la secció és donar la definició en el context de hipersuperfícies euclidianes, anomenat *segona forma fonamental escalar*, per poder definir el concepte de *curvatura mitjana*. Més endavant vorem que podem classificar els punts d'una varietat en funció del signe d'aquesta curvatura, de forma que obtindrem un criteri per determinar si les geodèsiques d'una varietat convergeixen o divergeixen. Per fer-ho hem de remarcar el fet que anem a considerar varietats dins del que anomenarem una *varietat ambient*.

Definició 3.11. Siga $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ una varietat Riemanniana o pseudo-Riemanniana. Siga (M, g) una subvarietat Riemanniana de $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$. En aquest cas, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ rep el nom de **varietat ambient**.

D'ací endavant totes les connexions referides a la varietat $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ les identificarem amb una tilde.

Observem que en cada $p \in M$ l'espai tangent de la varietat ambient $T_p \widetilde{M}$ es separa com una suma directa ortogonal $T_p \widetilde{M} = T_p M \oplus N_p M$, on l'espai $N_p M$ és **l'espai normal**. Es defineix com la projecció normal de l'espai tangent $T_p M$. És a dir, $N_p M := (T_p M)^\perp$.³

³ $(T_p M)^\perp := \pi^\perp T_p M$, on $\pi^\perp : T\widetilde{M}|_M \rightarrow NM$ és la projecció normal.

Definició 3.12. Definim *fibrat normal de M* al conjunt

$$NM := \coprod_{p \in M} N_p M$$

Ja tenim totes les eines per poder donar una definició de la *segona forma fonamental* d'una varietat. Ho farem fent una descomposició de la connexió $\tilde{\nabla}$ en la seua projecció tangencial⁴ i normal.

Considerem $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Aleshores tenim que

$$\tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^T + (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$$

El nostre objectiu ara és donar un significat matemàtic als dos termes que formen la part dreta de la igualtat.

Definició 3.13. Definim la *segona forma fonamental de M* com

$$\Pi : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^\perp(M)$$

tal que $\Pi(X, Y) := (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$

Lema 3.14. La *segona forma fonamental Π* és:

- *independent de les extensions de X i Y .*
- *$\mathcal{F}(M)$ -bilineal.*
- *simètrica en X i Y .*

Teorema 3.15. (La Fórmula de Gauss) Siguen $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ camps vectorials que s'estenen arbitràriament a camps vectorials en $\tilde{M}$. Aleshores la següent fórmula es satisfà al llarg de M :

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y)$$

Ara podem estendre aquesta definició al context en el que treballem amb hipersuperfícies. Recordem primer què entenem per hipersuperfície.

Definició 3.16. Siga M una varietat de dimensió m . Considerem $\overline{M} \subset M$ una subvarietat de dimensió n . Diem que $\overline{M}$ és una *hipersuperfície* si es satisfà que $\dim(M) - \dim(\overline{M}) = m - n = 1$.

Considerem doncs $\overline{M}$ una subvarietat diferencial de M tal que és una hipersuperfície amb la mètrica de Riemann induïda, és a dir, el parell $(\overline{M}, \overline{g})$. D'ací endavant en aquest punt, tot el que estiga associat amb la hipersuperfície $\overline{M}$ estarà denotat amb una barra superior. Per a cada punt $p \in \overline{M}$ podem agafar un únic vector normal v_p . En fer variar $p \in M$ tenim que el conjunt de v_p formen un camp vectorial N .

Definició 3.17. Siga M una varietat diferencial. Siga $\overline{M}$ una hipersuperfície. Siga N un camp vectorial unitari normal. Definim la *segona forma fonamental escalar*, denotada per h , com el tensor de tipus $(2, 0)$ definit com:

$$h : T_p \overline{M} \times T_p \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(X, Y) = \langle \Pi(X, Y), N \rangle$$

⁴ $\pi^T : T\tilde{M}|_M \rightarrow NM$ és la projecció tangencial

Com que N és un vector unitari en cada punt podem reescriure l'expressió anterior de la següent forma:

$$\text{II}(X, Y) = h(X, Y)N$$

Observem que el signe de h només depèn de l'orientació escollida del vector normal.

Definició 3.18. Siga M una varietat diferencial. Siga $\overline{M}$ una hipersuperfície. Siga N un camp vectorial unitari normal. Definim l'**operador forma**, denotat per s , com el tensor de tipus $(1, 1)$ definit com:

$$s : T_p\overline{M} \times T_p\overline{M}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

El caracteritzarem com

$$\langle X, sY \rangle = h(X, Y)$$

Aplicant el fet que h és simètrica, donat que $\text{II}(X, Y)$ ho és, és fàcil veure que s és un endomorfisme autoadjunt. A més, tenint en compte que

$$\text{II}(X, Y) = \text{II}(Y, X) \quad \text{i} \quad h(X, Y) = \langle \text{II}(X, Y), N \rangle$$

tenim que

$$\langle X, sY \rangle = h(X, Y) = \langle \text{II}(X, Y), N \rangle = \langle \text{II}(Y, X), N \rangle = h(Y, X) = \langle Y, sX \rangle = \langle sX, Y \rangle$$

on a l'última igualtat estem aplicant que el producte escalar és autoadjunt.

Aleshores existeix una base ortonormal $E_1, \dots, E_n$ de $T_p\overline{M}$ i $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ valors propis reals de s tals que $sE_i = \kappa_i E_i$. En aquesta base podem escriure

$$h(X, Y) = \kappa_1 X^1 Y^1 + \dots + \kappa_n X^n Y^n$$

Definició 3.19. Els valors propis $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ de la segona forma fonamental escalar reben el nom de **curvatures principals** de $\overline{M}$ en el punt $p \in T_p\overline{M}$.

Hi ha dues combinacions de les curvatures principals que tenen un rol important en espais Euclidians.

Definició 3.20. Definim la **curvatura Gaussiana** com el determinant de l'operador forma:

$$K = \det s$$

Definim la **curvatura mitjana** com el promig de la traça de l'operador forma:

$$H = \frac{1}{n} \text{tr } s = \frac{1}{n} \text{tr}_g h$$

Com que el determinant i la traça són independent de la base triada, podem escriure les expressions d'aquestes curvatures de la següent forma:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_n \quad H = \frac{1}{n} (\kappa_1 + \dots + \kappa_n)$$

on $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ són les curvatures principals.

3.4 Punts conjugats i variacions de geodèsiques

El nostre objectiu ara és estudiar què efecte té la curvatura en les geodèsiques. De forma intuïtiva, una curvatura positiva fa que les geodèsiques convergeixen, mentre que una curvatura negativa fa que es separen. Per poder formalitzar aquestes conseqüències necessitem una eina per poder mesurar de forma quantitativa l'efecte de la curvatura en una família de geodèsiques que només depenen d'un paràmetre. Ens centrarem primer en la variació de geodèsiques.

Definició 3.21. Siga (M, g) una varietat diferencial amb g una mètrica pseudo-Riemanniana. Siga $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ un segment geodèsic. Considerem $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ una variació de γ . Diem que Γ és una **variació al llarg de les geodèsiques** si cada corba $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ és també un segment geodèsic.

El nostre objectiu és derivar una equació que s'ha de satisfer pel camp variacional de les variacions al llarg de geodèsiques. Considerem primer $T(s, t) = \partial_t \Gamma(s, t)$ i $S(s, t) = \partial_s \Gamma(s, t)$. Aleshores, l'equació de les geodèsiques ens diu que:

$$\nabla_T T = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} T = \nabla_t T = 0$$

per a tot s . Agafant la derivada covariant respecte l'altre paràmetre tenim que:

$$\nabla_s \nabla_t T = 0$$

Considerant el claudator de Lie d'aquestes derivades covariants per tal que la curvatura estiga implicada obtenim el següent resultat:

Lema 3.22. Si Γ és una família diferencial de corbes qualsevol i X és un camp vectorial diferencial al llarg de Γ aleshores es satisfà l'igualtat:

$$\nabla_s \nabla_t X - \nabla_t \nabla_s X = R(S, T)X$$

Això ens permet enunciar el següent teorema:

Teorema 3.23. Siga (M, g) una varietat pseudo-Riemanniana. Siga γ una geodèsica, amb camp tangent T . Siga $X \in \mathfrak{X}(M)$ al llarg de la geodèsica γ . Aleshores X satisfà:

$$\nabla_T \nabla_T X + R(X, T)T = 0$$

on R és el tensor de curvatura de Riemann.

Definició 3.24. La igualtat anterior rep el nom de **l'equació de Jacobi**. Diem que un camp vectorial J al llarg d'una geodèsica γ és un **camp de Jacobi** si satisfà l'equació de Jacobi en els punts de γ .

Definició 3.25. Siga γ_i un segment d'una geodèsica que uneix dos punts $p, q \in M$. Diem que q és un **punt conjugat** de p al llarg de γ_i si existeix un camp de Jacobi al llarg de γ_i no trivial que es fa zero als punts p i q .

De forma similar podem donar la definició de punt conjugat a una hipersuperfície.

Definició 3.26. Siga γ una geodèsica que pertany a la congruència de geodèsiques ortogonals a una hipersuperfície Σ . Un punt $p \in \gamma$ és **conjugat a** Σ al llarg de γ si existeix un camp de Jacobi J no trivial tal que

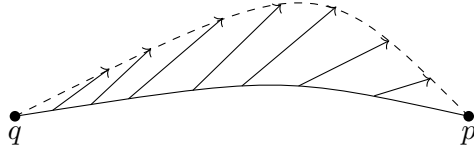


Figura 1: Punts conjugats.

- $J(0) \in T_{\gamma(0)}\Sigma$
- $\nabla_{\dot{\gamma}}J(0) + A(J(0)) \in \text{span}\{\dot{\gamma}(0)\}$ ⁵, on A és l'operador de Weingarten⁶ de Σ .
- $J(p) = 0$

Les següent fórmules que introduïrem ens serviran més endavant per determinar quin tipus de corbes són les que maximitzen la funció de longitud. Observarem també el paper clau que té la presència de punts conjugats per poder determinar aquesta maximització.

Proposició 3.27. (Primera Fòrmula de variació) Siga $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ qualsevol corba. Siga Γ una variació de γ i V el seu camp variacional. Aleshores:

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} = L(\Gamma_s) = - \int_a^b \langle V, \nabla_t T \rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i T \rangle \quad (2)$$

on $\Delta_i T = T(a_i^+) - T(a_i^-)$.

Teorema 3.28. (Segona Fòrmula de variació) Siga $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ qualsevol corba. Siga Γ una variació de γ i V el seu camp variacional. Aleshores la segona variació de $L(\Gamma_s)$ ve donada per la següent fórmula:

$$\frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} = L(\Gamma_s) = \int_a^b (|D_t V^\perp|^2 - Rm(V^\perp, \cdot, \gamma, \cdot, V^\perp)) dt \quad (3)$$

on $V^\perp$ és la component normal de V .

⁵ $\text{span}\{\dot{\gamma}(0) = \{\lambda \dot{\gamma}(0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ representa la direcció de la geodèsica en eixe punt.

⁶L'operador de Weingarten el definim com l'aplicació $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$, definit per cada punt p com $A_p(X) = -(\nabla_X n)^\top$, on ∇ és la connexió de Levi-Civita. És a dir, derivem el vector normal en una direcció tangent i el projectem sobre el pla tangent.

4. Estructura Causal

L'estructura causal de l'espai-temps és el conjunt de propietats geomètriques que determinen quines relacions de causa i efecte són possibles entre els esdeveniments que tenen lloc en aquest. En el context en que nosaltres estem treballant, aquesta estructura ve determinada per la mètrica de l'espai-temps i, en particular, pel con de llum associat a cada punt de l'espai-temps. A més ens permet classificar les corbes en tres tipus fonamentals: corbes temporals, que descriuen el moviment de partícules; corbes nul·les, que representen la propagació de la llum; i les corbes espacials, que corresponen a esdeveniments que no poden influir-se causalment. Des d'una perspectiva més global tenim que l'estructura causal ens dona l'existència d'horitzons, regions causalment aïllades, superfícies de Cauchy i la possibilitat de corbes tancades.

Tenim que, en Relativitat General, una singularitat adquireix rellevància física quan afecta al comportament de les corbes causals. Sense l'estructura causal de l'espai-temps una singularitat podria quedar reduïda a ser només una divergència local de curvatura, sense cap indici de que pugui ser observada, influïska en l'evolució de l'espai-temps o que quede amagada darrere d'un horitzó. Podem dir doncs que l'estructura causal de l'espai-temps és la connexió entre la base geomètrica i l'explicació física.

4.1 Espai-temps

Per poder estudiar l'estructura causal en profunditat primer hem de donar certes definicions com ara la d'espai-temps. Desenvoluparem també la classificació de corbes i superfícies en tres tipus diferents: temporals, nul·les i espacials. Els dos primers tipus seran els més importants per poder definir l'estructura causal d'un espai-temps a la secció següent.

També introduïrem el *con de llum*, un objecte físic propi de la Relativitat Especial. Més endavant el que farem serà generalitzar aquesta definició per poder descriure la causalitat en espai-temps corbats. Acabarem definint el con de llum per cada punt de la varietat. En aquesta subsecció estarem seguint sobretot el [HSE73] i el [Nab92].

Definició 4.1. Definim *espai-temps* com un parell (M, g) , on M és una varietat diferencial tal que $\dim(M) = 4$ i g és una mètrica de Lorentz.

Definició 4.2. Siga (M, g) un espai-temps. Un punt $p \in M$ rep el nom d'*event de M*.

Dos models (M, g) i (M', g') son *isomètrics* si existeix un difeomorfisme que els relaciona. Per tant, el model d'un espai-temps no és només un parell (M, g) sino que està format per tota una classe d'equivalència de tots els parells que són equivalents a (M, g) . Nosaltres només treballarem amb un sol parell de la classe d'equivalència.

Hem d'imposar una condició al nostre model (M, g) per tal d'assegurar-nos de que tots els punts no singulars de l'espai-temps que volem modelitzar estiguen inclosos. Donem doncs les següents definicions:

Definició 4.3. Diem que el model (M', g') és una *extensió* de (M, g) si existeix un embedding isomètric $\mu : M \rightarrow M'$.

Definició 4.4. Siga (M, g) un model. Diem que (M, g) és *inextensible* si no existeix cap extensió (M', g') de (M, g) tal que $\mu(M) \neq M'$.

Podem donar una definició més forta d'aquest concepte, enfocat des del punt de vista local:

Definició 4.5. Un model (M, g) és **localment inextendible** si no existeix cap entorn obert $U \subset M$ sense una adherència compacta en M , tal que el parell $(U, g|_U)$ tinga una extensió (U', g') en la que l'adherència de l'imatge de U és compacta.

Demanarem que tot model (M, g) siga inextendible. Observem ara que la mètrica g ens permet classificar els vectors en tres tipus diferents:

Definició 4.6. Siga (M, g) un espai-temps. Siga $p \in M$. Considerem un vector $v \in T_p M$ diferent del zero. Aleshores:

- v és un vector de **tipus temps** o **temporal** si satisfà $g(v, v) < 0$
- v és un vector de **tipus espai** o **espacial** si satisfà $g(v, v) > 0$
- v és un vector **nul** si satisfà $g(v, v) = 0$

Mitjançant aquesta classificació dels vectors de $T_p M$ podem classificar les superfícies en temporals, espacials o nul·les de la següent forma:

Definició 4.7. Siga (M, g) un espai-temps. Siga $S \subset M$ una superfície de M . Aleshores:

- S és una superfície de **tipus temps** o **temporal** si per a tot $p \in S$, $T_p S$ conté vectors temporals i el vector normal a la superfície és de tipus espai.
- S és una superfície de **tipus espai** o **espacial** si per a tot $p \in S$, tot vector tangent no nul és espacial i el vector normal de la superfície és temporal.
- S és una superfície **nul·la** si per a tot $p \in S$ almenys existeix un vector tangent diferent de zero que és un vector nul, el vector normal, n_p a la superfície és nul i $n_p \in T_p S$.

Per poder desenvolupar i comprendre els conceptes que definirem en aquesta i en la següent secció necessitem primer introduir el concepte de *con de llum*. De forma més intuïtiva aquest designa les trajectòries que descriu la llum en l'espai-temps a partir d'un esdeveniment, o retrospectivament per arribar a un observador. Aquestes trajectòries estan distribuïdes sobre una superfície cònica de quatre dimensions que té l'eix del temps com a eix de simetria. Anem a introduir també una definició més matemàtica d'aquest:

Al conjunt dels vectors temporals de M el denotem per τ . Definint la classe d'equivalència $\sim$ en τ com: si v i w són de τ , aleshores $v \sim w$ si, i només si $g(v, w) < 0$, tenim que τ és la unió de dos subconjunts disjunts τ^+ i τ^- , amb la propietat que $v \sim w$ per a tot v i w en τ^+ , $v \sim w$ per a tot v i w en τ^- i $v \not\sim w$ si v o w és de en τ^+ i l'altre és de en τ^- .

Definició 4.8. Els elements del conjunt τ^+ reben el nom de **vectors temporals dirigits cap al futur**. Anàlogament, els element del conjunt τ^- reben el nom de **vectors temporals dirigits cap al passat**.

Estenent aquestes definicions a vectors nuls diferents de zero, és a dir, a $v \in M$ tals que $v \neq 0$ tenim que:

Definició 4.9. Diem que un vector nul $v \in M$ diferent de zero és **futur-dirigit** si $v \cdot u < 0$ $\forall u \in \tau^+$. Diem que un vector nul $v \in M$ diferent de zero és **passat-dirigit** si $v \cdot u > 0$ $\forall u \in \tau^+$.

Definició 4.10. Siga (M, g) un espaitemps. Siga $p_0 \in M$. Definim el **raig de llum** amb origen en p_0 que passa per $p \in M$ com:

$$R_{p_0, p} = \{p_0 + t(p - p_0) : t \in \mathbb{R}\}$$

El denotarem per $R_{p_0, p}$.

Definició 4.11. Siga (M, g) un espaitemps. Definim el **con de llum** o **con nul**, que denotarem per $C_N(p_0)$, a p_0 de M per:

$$C_N(p_0) = \{p \in M : g(p - p_0, p - p_0) = 0\}$$

i es representa com es mostra a la Figura 2. També podem dir que $C_N(p_0)$ consisteix en tots els $p \in M$ tals que es poden “connectar” amb p_0 per un raig de llum.

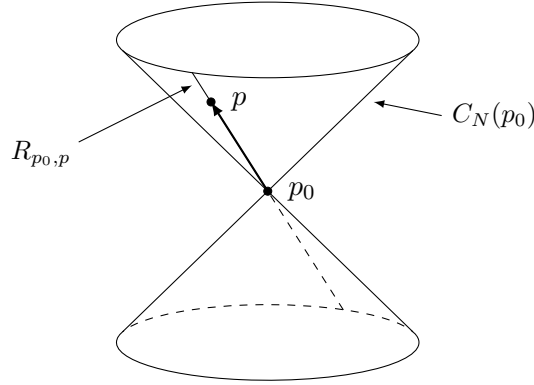


Figura 2: Con de llum $C_N(p_0)$ amb origen en p_0 .

Definició 4.12. Siga (M, g) un espaitemps. Per a cada $p \in M$ ens referirem al **con de llum** passant per l'origen de $T_p M$ com el **con de llum de p** .

Per a cada $p \in M$ designem una meitat del con (normalment la superior) com **futur** i l'altra meitat (l'inferior) com **passat** de la següent forma.

Definició 4.13. Per a cada $p_0 \in M$ definim el **con de llum futur en p_0** com

$$C_N^+(p_0) = \{p \in C_N(p_0) : p - p_0 \text{ és un vector futur dirigit}\}$$

Per a cada $p_0 \in M$ definim el **con de llum passat en p_0** com

$$C_N^-(p_0) = \{p \in C_N(p_0) : p - p_0 \text{ és un vector passat dirigit}\}$$

Aquesta designació continua del **futur** i del **passat**, en un espaitemps no simplement connex, no és possible fer-la a mesura que p recorre M .

Definició 4.14. Si es pot fer una designació continua del **futur** i del **passat**, la varietat (M, g) que representa l'espaitemps es diu que és **orientable en el temps**.

Per poder donar les definicions del següent apartat, donarem també la definició de con temporal:

Definició 4.15. Siga (M, g) un espai temps. Definim el **con temporal** com l'interior del con de llum, és a dir

$$C_T(p_0) = \{p \in M : g(p - p_0, p - p_0) < 0\}$$

Definició 4.16. Siga (M, g) una varietat diferencial que representa un espai temps. Definim el **con temporal futur** com l'interior d'un con de llum, és a dir

$$C_T^+(p_0) = \{p \in M : p - p_0 \in \tau^+\} = C_T(p_0) \cap \tau^+$$

Anàlogament, definim el **con temporal passat** com l'interior d'un con de llum, és a dir

$$C_T^-(p_0) = \{p \in M : p - p_0 \in \tau^-\} = C_T(p_0) \cap \tau^-$$

4.2 Futurs i Passats

Ara que hem introduït totes les eines per a poder desenvolupar l'estructura causal, començarem per definicions més bàsiques com les de *futur causal*, *passat causal*, *futur cronològic* o *passat cronològic*, en funció de la direcció de les corbes temporals i/o nul·les que formen els cons de llum. Acabarem la secció donant la definició de certes condicions que es poden demanar a un espai temps per a que siga “ideal”, tot i que no està demostrat que aquestes condicions es satisfacen en el nostre espai temps. No obstant, des del punt de vista físic sembla raonable creure que aquestes condicions són certes per a qualssevol espai temps físicament possibles. Si no fora així, “mals” comportaments de l'estructura causal podrien tenir lloc, com podrien ser els viatges en el temps provocats per l'existència de corbes temporals tancades. En aquesta subsecció estarem seguint sobretot [Wald84].

A partir d'ara considerarem només espai temps *orientables en el temps* i, per tant, assumirem que s'ha fet una designació continua del *futur* i del *passat* del con de llum a cada punt.

Definició 4.17. Siga (M, g) un espai temps i $T_p M$ el seu espai tangent. Diem que un vector $v \in T_p M$ nul o temporal que viu en el con temporal futur $C_T^+(p_0)$ és **dirigit cap al futur** o **futur-dirigit**.

Definició 4.18. Siga (M, g) un espai temps i $T_p M$ el seu espai tangent. Diem que un vector $v \in T_p M$ nul o temporal que viu en el con temporal passat $C_T^-(x_0)$ és **dirigit cap al passat** o **passat-dirigit**.

Lema 4.19. Siga (M, g) un espai temps temporalment orientable. Aleshores existeix un camp vectorial temporal $X \in \mathfrak{X}(M)$ no trivial. A més, aquest no és únic.

Demostració. Com (M, g) és un espai temps, en particular és una varietat diferencial pseudo-Riemanniana. Com hem demostrat que tota varietat admet una mètrica de Riemann podem agafar k una mètrica Riemanniana en M . Aquesta serà una mètrica auxiliar que farem servir per normalitzar els vectors. Considerem doncs, per a cada punt $p \in M$, el conjunt

$$V_p = \{v \in T_p M \mid k(v, v) = 1 \text{ i } g(v, v) < 0\}$$

Sense pèrdua de generalitat, agafarem k per a la qual V_p és una esfera compacta en $T_p M$. El que volem ara és buscar el mínim de la funció $f(v) := g(v, v)$ sobre el conjunt V_p . Com que és continua i convexa en la direcció temporal, hi ha un únic mínim. A aquest li direm v_0 . Fent variar v_0 per M obtenim el camp vectorial que volíem. $\square$

Ara, ens centrarem en la definició de corbes diferencials en aquest context que hem introduït.

Definició 4.20. Siga (M, g) un espai-temps temporalment orientable. Una corba diferencial $\lambda(t)$ rep el nom de **corba temporal dirigida cap al futur** si per a cada $p \in \lambda$ el vector tangent a p és un vector temporal dirigit cap al futur. Anàlogament, una corba diferencial $\lambda(t)$ rep el nom de **corba temporal dirigida cap al passat** si per a cada $p \in \lambda$ el vector tangent al punt p és un vector temporal dirigit cap al passat.

Definició 4.21. Siga (M, g) un espai-temps temporalment orientable. Una corba diferencial $\lambda(t)$ rep el nom de **corba causal dirigida cap al futur** si per a cada $p \in \lambda$ el vector tangent a p és un vector temporal o nul dirigit cap al futur. Anàlogament, una corba diferencial $\lambda(t)$ rep el nom de **corba causal dirigida cap al passat** si per a cada $p \in \lambda$ el vector tangent a p és un vector temporal o nul dirigit cap al passat.

Per poder enunciar dos dels teoremes de singularitats necessitarem definir **l'expansió**, que denotarem per θ , d'una congruència de geodèsiques nul·les. Considerem doncs (M, g) un espai-temps arbitrari. Siga $X \in \mathfrak{X}(M)$ un camp vectorial tal que $g(X, X) = 0$ i $\nabla_X X$ donat que és una congruència de geodèsiques. Considerem ara per a cada $p \in M$ el subespai perpendicular a X definit com:

$$X^\perp = \{v \in T_p M \mid g(v, X) = 0\}$$

Observem que $X \in X^\perp$. Agafem ara $u \in T_p M$ un vector auxiliar nul tal que $g(u, X) = -1$. Definim doncs l'endomorfisme

$$\begin{aligned} h : T_p M &\longrightarrow T_p M \\ v &\mapsto v + g(v, X)u + g(v, u)X \end{aligned}$$

Podem definir ara el *tensor de deformació*. Aquest ens dona la informació sobre com la congruència s'estira, es deforma i gira. El definim com $B := \nabla X$, de forma que $B(v) = \nabla_v X$. Amb totes aquestes noves eines que hem introduït ja podem donar una definició de l'expansió d'una congruència nul·la⁷. Definim doncs aquesta de la següent forma:

$$\theta := \text{tr}(h \circ B) = \text{tr}(v \mapsto h(\nabla_X v))$$

Definició 4.22. El **futur cronològic de $p \in M$** , $I^+(p)$, es defineix com el conjunt d'esdeveniments que es poden assolir mitjançant una corba temporal dirigida cap al futur amb origen en p . És a dir:

$$I^+(p) = \left\{ q \in M \mid \begin{array}{l} \exists \text{ una corba temporal dirigida cap al futur} \\ \lambda(t) \text{ tal que } \lambda(0) = p \text{ i } \lambda(1) = q \end{array} \right\}$$

Anàlogament, definim el **passat cronològic de $p \in M$** com el conjunt:

$$I^-(p) = \left\{ q \in M \mid \begin{array}{l} \exists \text{ una corba temporal dirigida cap al passat} \\ \lambda(t) \text{ tal que } \lambda(0) = p \text{ i } \lambda(1) = q \end{array} \right\}$$

⁷De forma anàloga podem donar una definició del que seria l'expansió d'una congruència de geodèsiques temporals, però aquesta és equivalent a la curvatura mitjana, definida anteriorment, en el context dels enunciats dels teoremes de singularitats, per tant no la introduïrem.

És a dir, definim el passat cronològic de $p \in M$ com el conjunt d'esdeveniments de M que es poden assolir mitjançant una corba temporal dirigida cap al passat amb origen en p .

Observació 4.23. Per a tot $q \in I^\pm(p)$ existeix un entorn obert O de q tal que $O \in I^\pm(p)$. Això implica que $I^\pm(p)$ és sempre un *subconjunt obert* de M .

Observació 4.24. En general, $p \notin I^\pm(p)$. L'únic cas on $p \in I^\pm(p)$ és quan tenim una corba temporal tancada amb origen i, per tant, final en p .

Observació 4.25. Per qualsevol subconjunt $S \subset M$, definim $I^\pm(S)$ per

$$I^\pm(S) = \bigcup_{p \in S} I^\pm(p)$$

Com la unió arbitrària de conjunts oberts és oberta, tenim que $I^\pm(S)$ és un conjunt obert.

Definició 4.26. El *futur causal* de $p \in M$, $J^+(p)$, es defineix com el conjunt d'esdeveniments que es poden assolir mitjançant una corba causal dirigida cap al futur amb origen en p . És a dir:

$$J^+(p) = \left\{ q \in M \mid \begin{array}{l} \exists \text{ una corba causal dirigida cap al futur} \\ \lambda(t) \text{ tal que } \lambda(0) = p \text{ i } \lambda(1) = q \end{array} \right\}$$

Anàlogament, definim el *passat causal* de $p \in M$ com el conjunt:

$$J^-(p) = \left\{ q \in M \mid \begin{array}{l} \exists \text{ una corba causal dirigida cap al passat} \\ \lambda(t) \text{ tal que } \lambda(0) = p \text{ i } \lambda(1) = q \end{array} \right\}$$

És a dir, definim el passat cronològic de $p \in M$ com el conjunt d'esdeveniments ($q \in M$) que es poden assolir mitjançant una corba causal dirigida cap al passat amb origen en p .

Observació 4.27. Per al cas del futur i passat causal tenim sempre que $p \in J^\pm(p)$.

Observació 4.28. En espai-temps plans, $J^\pm(p)$ és un conjunt tancat. No obstant, en espai-temps generals no necessàriament plans, $J^\pm(p)$ pot ser tancat o obert.

Observació 4.29. Per qualsevol subconjunt $S \subset M$, definim $J^\pm(S)$ per

$$J^\pm(S) = \bigcup_{p \in S} J^\pm(p)$$

Observació 4.30. Per al passat i futur cronològic i causal tenim que per a qualsevol $S \subset M$, $J^+(S) \subset \overline{I^+(S)}$. A més, tenint en compte que $J^+(S) \subset I^+(S)$, tenim directament que $\overline{J^+(S)} = \overline{I^+(S)}$.

El següent teorema ens permetrà abordar els posteriors teoremes de singularitats de forma més senzilla.

Teorema 4.31. Siga (M, g) un espai-temps arbitrari, i siga p un punt de M .

1. Existeix un conjunt obert U amb $p \in U$ tal que per a tot parell de punts $q, r \in U$ existeix una única geodèsica γ continguda en U que connecta q amb r .
2. Per a tot U , la restricció de $I^+(p)$ a U està formada per tots els punts als que es poden arribar mitjançant una geodèsica temporal dirigida cap al futur que comencen en p i que estan contingudes en U . A més, $\partial I^+(p)|_U$ està generat per les geodèsiques nul·les dirigides cap al futur en U que tenen origen en p .

Podem trobar una demostració de la primera part a la pàgina 134 de [HIC65], mentre que la demostració de la segona part la podem trobar a la Proposició 4.5.1 de [HSE73]. D'aquest teorema podem enunciar el següent corol·lari:

Corol·lari 4.32. *Siga (M, g) un espai-temps arbitrari. Siga $p \in M$. Considerem un punt q tal que $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$. Aleshores qualsevol corba causal connectant p amb q ha de ser una geodèsica nul·la.*

Definició 4.33. Diem que un subconjunt $S \subset M$ és **acronal** si no existeixen $p, q \in S$ tals que $q \in I^+(p)$, és a dir, $I^+(S) \cap S = \emptyset$.

Teorema 4.34. *Siga (M, g) un espai-temps orientable en el temps. Siga $S \subset M$ un subconjunt de M . Aleshores, tenim que la frontera del futur causal de S , $\partial I^+(S)$, és un conjunt acronal, tridimensional, embedded i una subvarietat diferencial de M .*

Demostració. Comencem veient que $\partial I^+(S)$ és un conjunt acronal. Com que $I^+(S)$ és un conjunt obert i $\partial I^+(S)$ és un conjunt tancat tenim que $I^+(\partial I^+(S)) \cap \partial I^+(S) = I^+(S) \cap \partial I^+(S) = \emptyset$. Per tant, per definició $\partial I^+(S)$ és un conjunt acronal. El següent raonament ens servirà per poder vore que $\partial I^+(S)$ és una subvarietat diferencial tridimensional. Considerem un punt $q \in \partial I^+(S)$. Considerem un punt $p \in I^+(q)$, aleshores tenim que $q \in I^-(p)$. Com que $I^-(p)$ és un conjunt obert, tenim que existeix un entorn obert O de p tal que $O \subset I^-(p)$. Com que q és de la frontera de $I^+(S)$ tenim que $O \cap I^+(S) \neq \emptyset$. Per tant, $p \in I^+[O \cap I^+(S)] \subset I^+(S)$ i llavors $I^+(q) \subset I^+(S)$. Fent servir el mateix raonament podem vore que $I^-(q) \subset M \setminus I^+(S)$. Agafem un punt $q \in \partial(M \setminus I^+(S))$. Considerem un punt $p \in I^-(q)$, aleshores tenim que $q \in I^+(p)$. Com que $I^+(p)$ és un conjunt obert, tenim que existeix un entorn obert O de p tal que $O \subset I^+(p)$. Com que q és de la frontera de $M \setminus I^+(S)$ tenim que $O \cap (M \setminus I^+(S)) \neq \emptyset$. Per tant, $p \in I^-[O \cap (M \setminus I^+(S))] \subset M \setminus I^+(S)$ i llavors $I^-(q) \subset M \setminus I^+(S)$.

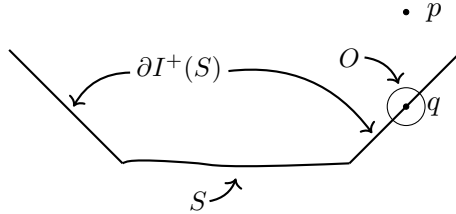


Figura 3: Diagrama de la frontera del futur cronològic, $\partial I^+(S)$, d'un conjunt $S \subset M$, on M és un espai-temps.

Anem a construir l'estructura diferencial de $\partial I^+(S)$. Volem vore a continuació que en efecte és una varietat diferencial tridimensional. Per fer-ho, hem d'obtenir l'estructura de varietat diferencial de $\partial I^+(S)$. Introduïm doncs coordenades Riemannianes normals x^0, x^1, x^2, x^3 al punt $q \in \partial I^+(S)$. Considerem doncs un entorn de q suficientment petit per al qual la component a-èssima del camp vectorial $\partial/\partial x^0$, $(\partial/\partial x^0)^a$, és temporal en tot aquest entorn i per al qual totes les corbes integrals de $(\partial/\partial x^0)^a$ intersequen amb $I^+(q) \subset I^+(S)$ i $I^-(q) \subset M \setminus I^+(S)$. Això implica que cada corba integral interseca amb $\partial I^+(S)$. Com aquesta és acronal i per tant no pot contenir corbes temporals, ha d'intersecar en un únic punt. Per tant, en cada entorn obtenim una bijecció dels punts de $\partial I^+(S)$ amb coordenades (x^1, x^2, x^3) que caracteritzen la corba integral de $(\partial/\partial x^0)^a$. Com que el punt d'intersecció és únic i les components x^1, x^2, x^3 de les corbes integrals de $(\partial/\partial x^0)^a$ són constants, podem definir el valor de la coordenada x^0 com $x^0 = f(x^1, x^2, x^3)$,

on f és una funció continua. Per tant, aquesta carta que hem definit de l'entorn de $q \in \partial I^+(S)$ a $\mathbb{R}^3$ és un homeomorfisme. Repetint aquesta construcció per a tots els $q \in \partial I^+(S)$ obtenim una família de cartes diferencials compatibles que recobreix $\partial I^+(S)$, i per tant, per definició, $\partial I^+(S)$ és una varietat tridimensional embedded en una varietat quatridimensional. $\square$

Ara, introduïrem diferents nocions relacionades amb l'extendibilitat de corba contínues cap al futur o cap al passat.

Definició 4.35. Una corba continua λ es diu que és una **corba temporal dirigida cap al futur** si per a cada $p \in \lambda$ existeix un entorn normal convex U de p tal que si $\lambda(t_1), \lambda(t_2) \in U$ amb $t_1 < t_2$ aleshores existeix una corba temporal diferencial dirigida cap al futur a U de $\lambda(t_1)$ fins a $\lambda(t_2)$.

Definició 4.36. Una corba continua λ es diu que és una **corba causal dirigida cap al passat** si per a cada $p \in \lambda$ existeix un entorn normal convex U de p tal que si $\lambda(t_1), \lambda(t_2) \in U$ amb $t_1 < t_2$ aleshores existeix una corba causal diferencial dirigida cap al passat a U de $\lambda(t_1)$ fins a $\lambda(t_2)$.

Abans d'introduir els següents conceptes hem de distingir clarament entre els conceptes d'una corba “va cap a infinit”, “va cap a una singularitat” o “es queda confinada en un entorn”, amb el concepte de que una corba “es para” perquè no està definida per anar més enllà. De fet, el primer bloc de propietats i el segon són excloents. Per donar una distinció més precisa introduïm els següents conceptes.

Definició 4.37. Siga $\lambda(t)$ una corba causal dirigida cap al futur. Diem que $p \in M$ és un **extrem futur** de λ si per a cada entorn O de p existeix un t_0 tal que $\lambda(t) \in O$ per a tot $t > t_0$.

Definició 4.38. Siga $\lambda(t)$ una corba causal dirigida cap al passat. Diem que $p \in M$ és un **extrem passat** de λ si per a cada entorn O de p existeix un t_0 tal que $\lambda(t) \in O$ per a tot $t < t_0$.

Observació 4.39. Per la propietat de Hausdorff de M , λ pot tenir com a molt un extrem.

Observació 4.40. L'extrem d'una corba no té perquè ser part de la corba, és a dir, pot no existir t tal que $\lambda(t) = p$.

Definició 4.41. Diem que la corba λ és **inextendible cap al futur** si no té cap extrem futur. Anàlogament, direm que és **inextendible cap al passat** si no té cap extrem passat.

Definició 4.42. Siga $\{\lambda_n\}$ una seqüència de corbes causals. Un punt $p \in M$ es diu que és un **punt de convergència** de $\{\lambda_n\}$ si, donat un entorn obert O de p , existeix una N tal que $\lambda_n \cap O \neq \emptyset$ per a tot $n > N$.

Definició 4.43. Siga $\{\lambda_n\}$ una seqüència de corbes causals. Una corba λ es diu que és una **corba de convergència** de $\{\lambda_n\}$ si cada $p \in \lambda$ és un punt de convergència.

Definició 4.44. Diem que un punt p és un **punt d'acumulació** o **punt límit** de $\{\lambda_n\}$ si per a cada entorn obert de p interseca infinitesimalment amb moltes λ_n .

Definició 4.45. Una corba λ es diu que és una **corba límit** de $\{\lambda_n\}$ si existeix una subseqüència $\{\lambda'_n\}$ per a la qual λ és una corba de convergència.

Observació 4.46. Si λ és una corba límit aleshores tot $p \in \lambda$ és un punt límit. No obstant, si γ és una corba tal que tots els seus punts són punts límit, no necessàriament tenim que siga una corba límit.

Lema 4.47. Siga $\{\lambda_n\}$ una successió de corbes causals dirigides cap al futur tals que tenen un punt d'acumulació p . Aleshores existeix una corba causal inextensible cap al futur λ que passa pel punt p i tal que és una corba límit de la successió $\{\lambda_n\}$.

Demostració. Considerem U_1 un conjunt obert del punt p . Considerem $b > 0$ tal que $B(p, b)$ és la bola oberta al voltant de p de radi b . Considerem doncs λ_{n_k} la subsuccessió que viu a $\lambda_n \cap U$ que convergeix a p . Com que $\partial B(p, b)$ és un tancat, en particular és compacte. Per tant, ha de contenir els punts d'acumulació de la subsuccessió λ_{n_k} . Observem que aquests necessàriament ha d'estar a $J^-(p)|_{U_1}$ o a $J^+(p)|_{U_1}$. Sense pèrdua de generalitat agafarem el punt

$$x_{11} \in J^+(p)|_{U_1} \cap \partial B(p, b)$$

com a un dels punts d'acumulació. Considerem doncs ara una subsuccessió de λ_{n_k} tal que convergeix a x_{11} . Aleshores, aquest serà un punt de la corba límit λ . Repetint aquest argument reiteradament trobem un conjunt de punts entre p i x_{11} per als quals existeix una corba causal λ que els uneix des de p fins a x_{11} . Per vore que en efecte λ és una corba límit, considerarem una subsuccessió λ'_n tal que per a tot $q \in \lambda$, λ'_n convergeix a q . Això ho fem, agafant λ'_n tal que interseque amb totes les boles de la forma $B(p, b)$ que hem construït. Per tant, tenim que λ és una corba límit de les λ_n des de p fins a x_{11} . Considerem U_2 un entorn obert de x_{11} i repetim tot l'argument descrit sobre la successió λ'_n . Repetint aquest argument podem estendre la corba λ infinitament. $\square$

4.3 Condicions de Causalitat

Volem donar una formulació per al concepte de que un espai-temps siga *causalment ben comportat*. Això és donat a que podem tenir exemples d'espai-temps on per a tot $p \in M$ tenim que $I^+(p) = I^-(p) = M$, com pot ser l'exemple mostrat al següent dibuix:

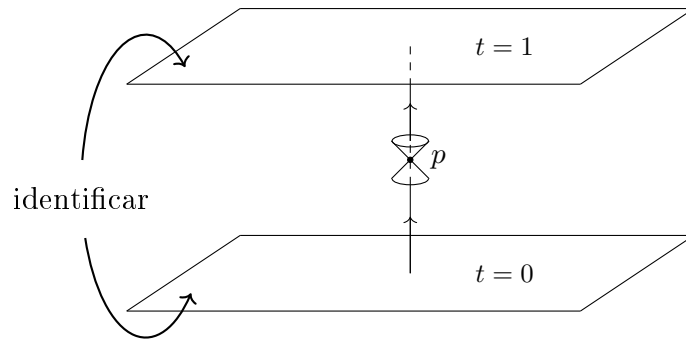


Figura 4: Espai-temps de Lorentz amb els hiperplans $t = 0$ i $t = 1$ identificats, de forma que dona lloc a l'existència de corbes temporals tancades en l'espai-temps.

Generalment es creu que els espai-temps amb corbes causals tancades no trivials, és a dir $\lambda(t) \neq p \forall t$, no són realistes a nivell físic. També podem tenir espai-temps sense corbes causals tancades que estiguen molt a prop de violar la causalitat. Aquests però, també semblen físicament no raonables. Volem doncs una definició rigorosa d'espai-temps que descriga aquest comportament.

Definició 4.48. Siga (M, g) un espai-temps. Diem que M és **causalment forta** si per a tot $p \in M$ i per a tot entorn O de p , existeix un entorn $V \subset O$ de p tal que cap corba causal interseca V més d'una vegada.

Observació 4.49. Si un espai-temps no satisfà la condició de ser fort causalment en un punt p aleshores existeix almenys un entorn de p tal que existeixen corbes causals arbitràriament a prop d'autointerseccar-se.

Lema 4.50. Siga (M, g) un espai-temps causalment fort, i siga $K \subset M$ un subconjunt compacte. Aleshores, tota corba causal λ confinada en K ha de tindre un extrem futur i un extrem passat en K .

Demostració. Sense pèrdua de generalitat suposarem que el parametre t de la corba λ pren valors dins de l'interval $(-\infty, \infty)$. Veiem primer que una corba causal arbitrària té un extrem futur en K . Considerem $\{t_i\}$ una successió creixent de nombres reals tal que divergeix a ∞ . Considerem doncs $p_i = \lambda(t_i)$. Aleshores, $\{p_i\}$ és una successió que viu en K , que recordem que és un conjunt compacte. Tenim doncs que, pel *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, existeix un punt d'acumulació $p \in K$. Suposem que podem trobar un entorn obert O de p tal que no existeix cap $t_0 \in \mathbb{R}$ per al qual $\lambda(t) \in O$ per a tot $t > t_0$. En particular aquest fet també es satisfà per a tot entorn obert V de p tal que $V \subset O$. Això implica que λ interseca amb els V més d'una vegada, donat que molts punts de la seqüència $\{\lambda(t_i)\}$ viuen dins de V però $\lambda(t)$ no roman en V . Per tant, es trenca la condició de causalitat forta al punt p . Llavors, p és un extrem futur de λ . Un raonament anàleg ens serveix per a demostrar que λ té un extrem passat en K . Considerem doncs $\{t_i\}$ una successió decreixent de nombres reals tal que divergeix a $-\infty$. Considerem doncs $q_i = \lambda(t_i)$. Aleshores, $\{q_i\}$ és una successió que viu en K . Tenim doncs que existeix un punt d'acumulació $q \in K$. Suposem que podem trobar un entorn obert O de q tal que no existeix cap $t_0 \in \mathbb{R}$ per al qual $\lambda(t) \in O$ per a tot $t < t_0$. En particular aquest fet també es satisfà per a tot entorn obert V de q tal que $V \subset O$. Això implica que λ interseca amb V més d'una vegada i no roman en V . Per tant, es trenca la condició de causalitat forta al punt q . Llavors, q és un extrem passat de λ . $\square$

Malauradament, podem trobar espai-temps *causalment forts* molt complexos en els que fent una modificació de g en un entorn arbitràriament petit de dos o més punts, pot arribar a produir corbes causals tancades. Per tant, per poder garantir que un espai-temps no està a prop de generar una violació de la causalitat, hem d'introduir el següent concepte:

Definició 4.51. Siga (M, g) un espai-temps. Siga v un vector temporal en un punt $p \in M$. Definim $\tilde{g}$ en p com:

$$\tilde{g}_p(u, u') = g_p(u, u') - g_p(v, u)g_p(v, u')$$

Diem que (M, g) és **causalment estable** si existeix un camp vectorial temporal continu diferent de zero, tal que l'espai-temps $(M, \tilde{g})$ no té corbes temporals tancades.

Observació 4.52. El concepte de causalitat estable implica causalitat forta.

Teorema 4.53. Un espai-temps (M, g) és causalment estable si, i només si, existeix una funció diferenciable f en M tal que ∇f és un camp vectorial dirigit cap al passat.

Demostració. Comencem veient la implicació de dreta a esquerra. Com tenim que ∇f és un camp vectorial temporal dirigit cap al passat, per a tota corba temporal dirigida cap al futur amb tangent v , tenim que $g(v, \nabla f) > 0$. Per tant, $g(v, \nabla f) = df(v) = v(f) > 0$. Per tant, f és estrictament creixent al llarg de totes les corbes temporals dirigides cap

al futur. Això implica que a l'espai temps (M, g) no hi poden haver corbes temporals tancades. Considerem ara $w = \nabla f$ i definim la mètrica $\tilde{g}$ com

$$\tilde{g}(u, u') = g(u, u') - g(w, u)g(w, u')$$

Volem vore que a l'espai temps $(M, \tilde{g})$ tampoc hi poden haver corbes temporals tancades. Veiem primer que en aquesta mètrica, el vector ∇f també és temporal. Per fer-ho hem de calcular primer l'expressió de l'inversa de la mètrica que sabem que ha de ser de la forma $\tilde{g}^{-1} = g^{-1} + Ag(w, \cdot)g(w, \cdot)$, on $A \in \mathbb{R}$. Aplicant la condició de que $\tilde{g}^{-1}\tilde{g} = Id$, obtenim que

$$\tilde{g}^{-1}(u, u') = g^{-1}(u, u') - g(w, u)g(w, u')/(1 - g(w, w))$$

Aleshores,

$$\tilde{g}^{-1}(\nabla f, \nabla f) = g^{-1}(\nabla f, \nabla f) - \frac{(w(f))^2}{1 - g(w, w)} = \frac{g(w, w)}{1 - g(w, w)} < 0$$

Per tant, $\tilde{g}\nabla f = w$ és un vector temporal a la mètrica $\tilde{g}$. Per tant, pel mateix argument que abans a l'espai temps $(M, \tilde{g})$ no hi poden haver corbes temporals tancades, amb lo que és un espai temps causalment estable. $\square$

Per tant, tenim que el concepte que ens indica si un espai temps té un bon comportament causal és el concepte de *causalitat estable*.

4.4 Hiperbolicitat global

En aquesta part, centrarem el nostre estudi en la col·lecció d'esdeveniments que estan "completament determinats" per un conjunt d'events S , que per raons tècniques l'agafarem tancat i acronal. Per començar donarem la definició de vora d'un conjunt en el context que estem treballant:

Definició 4.54. Siga (M, g) un espai temps. Siga $S \subset M$ tancat i acronal. Definim **la vora** de S com el conjunt de punts $p \in S$ tals que per a cada entorn obert O de p conté un punt $q \in I^+(p)$, un punt $r \in I^-(p)$ i una corba temporal λ connectant r amb q tal que no interseca amb S .

Donem pas ara a les definicions de conjunts d'events que ens serviran més endavant per definir el concepte de hiperbolicitat global, que és al que volem arribar.

Definició 4.55. Siga (M, g) un espai temps. Siga $S \subset M$ tancat i acronal, amb o sense vora. Definim el **domini de dependència futur** de S per:

$$D^+(S) = \left\{ p \in M \mid \begin{array}{l} \text{tota corba causal inextendible cap} \\ \text{al passat per } p \text{ interseca } S \end{array} \right\}$$

Anàlogament definim el **domini de dependència passat** de S per:

$$D^-(S) = \left\{ p \in M \mid \begin{array}{l} \text{tota corba causal inextendible cap} \\ \text{al futur per } p \text{ interseca } S \end{array} \right\}$$

Observació 4.56. $\overline{D^+(S)}$ no té punts aïllats, donat que $D^+(S)$ no té punts aïllats gràcies a la continuïtat de les corbes causals inextendibles cap al passat.

Observació 4.57. Sempre tenim que $S \subset D^+(S) \subset J^+(S)$, i com estem agafant S acronal, també tenim $D^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$

Definició 4.58. Definim el **domini de dependència de S** , denotat per $D(S)$, definit per:

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S) \quad (4)$$

Definició 4.59. Diem que un conjunt Σ tancat i acronal per al que $D(\Sigma) = M$ és una **superfície de Cauchy**. Per a tota superfície de Cauchy Σ tenim que $\text{edge}(\Sigma) = \emptyset$

Definició 4.60. Siga (M, g) un espaitemps. Diem que és **globalment hiperbòlic** si M és fortament causal i si per a $p, q \in M$ $J^+(p) \cap J^-(q)$ és un compacte contingut en M .

Observació 4.61. En un espaitemps globalment hiperbòlic tant el futur com el passat es poden predir mitjançant les condicions a l'instant de temps representat per Σ .

Proposició 4.62. $p \in \overline{D^+(S)}$ si, i només si tota corba temporal inextendible cap al passat que passa pel punt p intersecta amb S .

Demostració. Començarem demostrant la implicació d'esquerra a dreta. Procedim per reducció a l'absurd. Considerem un punt $p \in \overline{D^+(S)}$ tal que per ell passa una corba temporal inextendible cap al passat tal que no intersecta amb S . Aleshores, aquesta propietat es satisfà per un entorn obert O de p . Aleshores tenim que $O \cap D^+(S) = \emptyset$, i com $\overline{D^+(S)}$ no té punts aïllats tenim que $p \notin \overline{D^+(S)}$.

Veiem ara la implicació de dreta a esquerra. Suposem doncs ara que tota corba temporal inextendible cap al passat que passa per un punt p interseca amb S . Aleshores, o bé $p \in S \subset D^+(S) \subset \overline{D^+(S)}$ o bé $p \in I^+(S)$. La primera opció ix directa. Centrem-nos doncs en la segona. Considerem un punt $q \in I^-(p) \cap I^+(S)$ i suposem que existeix una corba causal inextendible cap al passat λ que passa pel punt q i que no intersecta amb S . Aleshores tenim que λ només viu a $I^+(S)$ o λ interseca amb $\partial I^+(S)$ en un punt r que no pertany a S . Observem doncs que, si $\lambda \in I^+(S)$, podem aplicar el lema 8.1.4 i llavors, com $q \in I^+(S)$ existeix una corba inextendible cap al passat γ tal que $\gamma \in I^+(\lambda)$. A més, com $\lambda \in I^+(S)$ tenim que γ no interseca amb S . Per altra banda, si λ interseca amb $\partial I^+(S)$ en un punt r que no pertany a S tenim que, com $r \in I^-(q)$ aleshores $q \in I^+(r)$, i en particular $q \notin J^+(r) \setminus I^+(r)$. Per tant, existeix com a mínim una corba causal, $\lambda_2(t)$, que uneix r amb q tal que és una geodèsica temporal. És a dir, $\lambda_2(0) = q$ i $\lambda_2(1) = r$. A més, com tenim que $q \in I^-(p) \cap I^+(S)$ per definició existeix una corba temporal dirigida cap al futur $\lambda_1(t)$ tal que uneix q amb p , és a dir, $\lambda_1(0) = q$ i $\lambda_1(1) = p$. Agafant p com a present, $\lambda_1(t)$ serà una corba dirigida cap al passat. Aleshores podem considerar la corba temporal dirigida cap al passat definida per

$$\Lambda : [0, \infty) \longrightarrow M, \quad \Lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1(t) & \text{for } t \in [0, 1], \\ \lambda_2(t) & \text{for } t \in [1, 2] \end{cases}$$

que va del punt p al punt r i és dirigida cap al passat. Extenent $\lambda_2(t)$ arbitrariament cap al passat obtenim

$$\Lambda : [0, \infty) \longrightarrow M, \quad \Lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1(t) & \text{for } t \in [0, 1], \\ \lambda_2(t) & \text{for } t \in [1, \infty] \end{cases}$$

una corba temporal inextendible cap al passat que no interseca amb S . Això entra en contradicció amb el fet que estem suposant que totes les corbes temporals inextendibles

cap al passat que passen per p intersecten amb S . Per tant, no pot existir una corba causal inextendible cap al passat que passe per q tal que no interseca S . Aleshores, q pertany a $D^+(S)$. Com que tot entorn obert de $p \in I^+(S)$ intersecta amb $I^-(p) \cap I^+(S)$, tenim que $p \in \overline{D^+(S)}$. $\square$

Lema 4.63. *Siga (M, g) un espai temps. Considerem $S \subset M$. Aleshores, se satisfan les següents igualtats.*

$$\mathring{D}^+(S) = I^-[D^+(S)] \cap I^+(S) \quad (5)$$

$$\mathring{D}^-(S) = I^+[D^-(S)] \cap I^-(S) \quad (6)$$

Demostració. Comencem per la igualtat $\mathring{D}^+(S) = I^-[D^+(S)] \cap I^+(S)$. Veiem que les dues inclusions són certes. Considerem doncs un punt $p \in \mathring{D}^+(S)$. En particular tenim que $p \in D^+(S) \subset J^+(S)$. Aleshores, $\mathring{D}^+(S) \subset \mathring{J}^+(S)$. Com que $\mathring{J}^+(S) = \mathring{I}^+(S)$ i $I^+(S)$ és un conjunt obert, tenim que $p \in I^+(S)$. Per altra banda, com $p \in \mathring{D}^+(S)$ tenim que per a tota corba temporal inextendible cap al passat que passa per p interseca amb $\mathring{D}^+(S)$ i per tant, en particular interseca amb $D^+(S)$. Per tant, existeix una corba temporal dirigida cap al passat tal que $\lambda(0) \in D^+(S)$ i $\lambda(1) = p$. Per definició, $p \in I^-[D^+(S)]$. Aleshores, $\mathring{D}^+(S) \subseteq I^-[D^+(S)] \cap I^+(S)$.

Considerem ara un punt $p \in I^-[D^+(S)] \cap I^+(S)$. Aleshores tenim que existeix una corba temporal que connecta un punt de S amb p i una altra corba temporal que connecta un punt de $D^+(S)$ amb p . Aleshores, qualsevol corba temporal per p des de un punt de $D^+(S)$ talla amb S . Per continuïtat, això és cert en tot entorn obert O de p . Per tant, tenim que $p \in \mathring{D}^+(S)$, amb el que $\mathring{D}^+(S) \supseteq I^-[D^+(S)] \cap I^+(S)$.

Per tant, hem demostrat que $\mathring{D}^+(S) = I^-[D^+(S)] \cap I^+(S)$. Anàlogament, observem que també tenim $\mathring{D}^-(S) = I^+[D^-(S)] \cap I^-(S)$. Aquestes dues igualtats, conjuntament amb el fet que $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$, ens serveixen per poder demostrar que $\mathring{D}(S) = I^-[D^+(S)] \cap I^+[D^-(S)]$. $\square$

Observació 4.64. Siga Σ una *superfície de Cauchy*. Aleshores, tota corba causal inextendible intersecta amb Σ .

Definició 4.65. Siga S una conjunt tancat i acronal. Definim *l'horitzó futur de Cauchy* de S , denotat $H^+(S)$ per

$$H^+(S) = \overline{D^+(S)} \setminus I^-[D^+(S)]$$

Anàlogament podem definir *l'horitzó passat de Cauchy* de S , denotat $H^-(S)$ per

$$H^-(S) = \overline{D^-(S)} \setminus I^+[D^-(S)]$$

Observació 4.66. Els conjunts $H^+(S)$ i $H^-(S)$ són tancats i acronals.

Observació 4.67. Podem expressar l'horitzó futur i passat de S de la següent forma:

$$H^+(S) = [I^+(S) \cap S] \setminus \partial I^-[D^+(S)] \quad \text{i} \quad H^-(S) = [I^-(S) \cap S] \setminus \partial I^+[D^-(S)] \quad (7)$$

Teorema 4.68. *Tot punt $p \in H^+(S)$ viu a una geodèsica nul·la λ continguda completament a $H^+(S)$ que, o bé és inextendible cap al passat o bé té un punt d'acumulació passat a la vora de S .*

Demostració. Considerem un punt $p \in H^+(S)$ tal que $p \notin \text{edge}(S)$. Aleshores, o bé $p \in I^+(S)$ o bé $p \in S$ amb $p \notin \text{edge}(S)$. Per als dos casos provarem que podem trobar

un segment que és geodèsic nul no trivial tal que està contingut en $H^+(S)$. Posteriorment vorem que o bé és inextendible, o bé té un punt d'acumulació passat a la vora de S . Considerem doncs un punt $p \in I^+(S)$, aleshores $p \notin I^-[D^+(S)]$. Per tant, per a tot punt $q \in I^+(p)$ tenim que existeix una corba inextendible cap al passat des de q que no interseca amb S . Considerem doncs $\{q_n\}$ una successió de punts en $I^+(S)$ que convergeix a p . Considerem també la successió $\{\lambda_n\}$ formada per les corbes inextendibles cap al passat pels respectius punts q_n que no intersequen amb S . Com que p és un punt límit de $\{\lambda_n\}$, pel lema 8.1.5, existeix una corba causal límit inextendible cap al passat, λ , de les $\{\lambda_n\}$ que passa pel punt p . Suposem que λ entra a l'obert $I^+(S) \cap I^-[D^+(S)] \subset D^+(S)$. Aleshores tindriem que per a cert n suficientment gran λ_n també hi entraria, però açó és una contradicció donat que $\lambda_n \cap D^+(S) = \emptyset$, λ_n no interseca amb S . A més, com $I^-(S) \subset I^-[D^+(S)] = I^-[D^+(S)]$, λ és una corba causal dirigida cap al passat per p que no entra a la regió $I^-(S)$. Per tant, pel Corol·lari 4.32, λ ha de ser una geodèsica nul·la. Si una corba temporal per un punt de $\lambda \cap I^+(S)$ dirigida cap al passat no arriba a intersecar amb S , podem construir una corba des de el punt p amb la mateixa propietat. No obstant, com $p \in \overline{D^+(S)}$ això és impossible. Per tant, $\lambda \cap I^+(S) \subset H^+(S) \subset \overline{D^+(S)}$. Hem obtingut doncs per a tot $p \in H^+(S) \cap I^+(S)$ un segment geodèsic nul no trivial dirigit cap al passat tal que $\lambda \in H^+(S)$. $\square$

Definició 4.69. Siga S un conjunt tancat i acronal. Definim el seu *horitzó de Cauchy* per

$$H(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$$

Proposició 4.70. $H(S) = \partial D(S)$.

Demostració. Aquesta igualtat ix directa aplicant les igualtats 5 i 6. També aplicarem les igualtats $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ i $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, on A , B i C són conjunts arbitraris. Aleshores tenim que:

$$\begin{aligned} H(S) &= H^+(S) \cup H^-(S) \\ &= [\overline{D^+(S)} \setminus I^-[D^+(S)]] \cup [\overline{D^-(S)} \setminus I^+[D^-(S)]] \\ &= (\overline{D^+(S)} \cup \overline{D^-(S)}) \setminus [I^-[D^+(S)] \cap I^+[D^-(S)]] \\ &= \overline{D(S)} \setminus [I^-[D^+(S)] \cap I^+[D^-(S)]] \\ &= \partial D(S) \end{aligned}$$

$\square$

Observació 4.71. Siga (M, g) un espai-temps globalment hiperbòlic, amb una superfície de Cauchy Σ . Aleshores, no poden existir corbes temporals tancades a M . Una corba temporal tancada que interseca amb Σ trencaria l'acronalitat de Σ , mentre que una corba temporal tancada que no interseca amb Σ trencaria l'hiperbolicitat global de M .

Considerem d'ací endavant (M, g) un espai-temps causalment fort. Siguen $p, q \in M$. Considerem doncs el conjunt de corbes causals contínues, dirigides cap al futur de p fins a q , on les corbes que només difereixen d'una reparametrització es consideren la mateixa corba. El denotem per $C(p, q)$. Volem construir un espai topològic amb aquest conjunt. Definim doncs la topologia $\mathcal{T}$ de la següent forma. Considerem U un conjunt obert de M , definim $O(U) \subset C(p, q)$ per

$$O(U) = \{\lambda \in C(p, q) \mid \lambda \subset U\}$$

Diem que un subconjunt O de $C(p, q)$ és obert si el podem expressar com $O = \bigcup O(U)$. Com que estem considerant un espai temps sense corbes causals tancades, és fàcil vore que aquesta topologia és de Hausdorff. És més, quan no tenim corbes causals tancades, $\mathcal{T}$ satisfà el segon axioma de numerabilitat. La noció de convergència a $\mathcal{T}$ és la següent: $\lambda_n \rightarrow \lambda$ si per a tot conjunt obert $U \subset M$ amb $\lambda \subset U$, existeix N tal que $\lambda_n \subset U$ per a tot $n > N$.

Observació 4.72. Agafant $\lambda \in C(p, q)$ tenim que $\{O(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ és una base numerable de entorns de λ . Per tant $C(p, q)$ satisfà el primer axioma de numerabilitat.

Necessitem el següent resultat per poder demostrar teorema posterior.

Teorema 4.73. *Siga (M, g) un espai temps globalment hiperbòlic. Siguen $p, q \in M$. Aleshores, $C(p, q)$ és compacte.*

Podem trobar una demostració d'aquest teorema al [Wald84] on es procedeix per convergència de successions de corbes que pertanyen al conjunt $C(p, q)$.

Teorema 4.74. *Siga (M, g) un espai temps globalment hiperbòlic. Siguen $K \in M$ un subconjunt compacte. Aleshores, $J^+(K)$ és tancat.*

Anàlogament, podem definir:

Definició 4.75. *Siga (M, g) un espai temps globalment hiperbòlic. Sigui Σ una superfície de Cauchy. Per a un punt $q \in D^+(\Sigma)$ definim $C(\Sigma, q)$ de la mateixa manera que $C(p, q)$.*

Teorema 4.76. *Siga (M, g) un espai temps globalment hiperbòlic. Sigui Σ una superfície de Cauchy. Aleshores, $C(\Sigma, q)$ és compacte.*

5. Resultats de singularitats

En les seccions anteriors hem definit el que considerem un espai-temps i la seua estructura causal. El nostre objectiu ara és donar un criteri per localitzar singularitats a l'espai-temps. Per això introduïrem dues versions del Teorema de Penrose (1965), el Teorema de Hawking (1966-1967) i el Teorema de Hawking-Penrose (1970).

5.1 Preliminars

Abans de començar a enunciar els teoremes de singularitats ens fa falta determinar quin tipus de corbes, i baix quines condicions, maximitzen la funció de longitud. Començem enunciant la següent proposició que, baix certes hipòtesis de l'espai-temps que estem considerant, ens assegura l'existència d'un punt conjugat a una distància menor d'una certa constant està garantida:

Proposició 5.1. *Siga (M, g) un espai-temps tal que $Ric(v, v) \geq 0$ per a tot vector temporal v . Siga Σ una hipersuperfície espacial tal que $H < 0$ per a un cert $q \in \Sigma$. Aleshores, existeix un punt p conjugat a Σ al llarg de la geodèsica $\gamma(\lambda)$ ortogonal a Σ , que passa pel punt q , per a $\lambda \leq 3/|H|$.*

Volem centrar ara el nostre estudi en la relació entre punts conjugats i les propietats d'extremalitat de la longitud de les corbes temporals. Per fer-ho, tindrem en compte les fórmules de variacions 2 i 3 aplicades a la longitud de les corbes temporals, que definirem com:

$$\tau(\gamma) = \int_a^b \sqrt{-g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt$$

on $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ representa una corba temporal almenys de classe $\mathcal{C}^2$. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que totes les corbes temporals estan parametritzades pel temps propi τ , de forma que

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -1$$

Baix aquestes suposicions tenim que la primera fórmula de variacions es pot escriure com:

$$\delta L(V) = \int_0^T g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, V) dt + [g(\dot{\gamma}, V)]_0^T$$

on ∇ representa la connexió de Levi-Civita i V un camp de variacions. Observem directament d'aquesta expressió que $\delta L(V) = 0$ per a tot V si, i només si $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. Per tant, tenim que les geodèsiques són candidates a ser un màxim de la longitud d'una corba temporal. Considerem ara la fórmula de la segona variació en aquest context i vorem quines condicions satisfan que la segona derivada siga negativa, és a dir, en quines condicions la funció longitud assoleix el seu màxim. L'expressió de la segona fórmula de variació ve donada per:

$$\delta^2 L(V, V) = - \int_0^T (g(\nabla_{\dot{\gamma}} V, \dot{\gamma} V) - g(R(V, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, V)) dt$$

Si no tenim punts conjugats entre els extrems, tindrem que $\delta^2 L(V, V) \leq 0$ per a tot $V \neq 0$. Per tant, una geodèsica temporal és un màxim local del temps propi. L'aparició d'un punt conjugat al llarg de la geodèsica dins del interval en el que està definida fa que es perda la propietat de maximalitat. Aplicant i desenvolupant una mica més aquestos arguments, podem enunciar el següent resultat:

Teorema 5.2. *Siga (M, g) una varietat diferencial amb g una mètrica de Lorentz. Siga γ una corba diferencial temporal tal que connecta els punts $p, q \in M$. Aleshores la condició necessària i suficient per a que γ maximitze localment la distància entre p i q respecte de variacions suaus d'un parametre és que γ siga una geodèsica sense cap punt conjugat a p entre p i q .*

De forma similar podem enunciar el següent resultat, el qual es demostra seguint uns arguments similars als donats per el teorema anterior.

Teorema 5.3. *Siga (M, g) una varietat diferencial amb g una mètrica Lorentziana. Siga γ una corba diferencial temporal tal que connecta el punt $p \in M$ amb un punt $q \in \Sigma$, on Σ és una hipersuperfície espacial diferencial. Aleshores la condició necessària i suficient per a que γ maximitze localment la distància entre p i Σ respecte de variacions suaus d'un parametre és que γ siga una geodèsica ortogonal a Σ sense cap punt conjugat a Σ entre p i Σ .*

El nostre objectiu ara és demostrar l'existència de corbes de màxima longitud en espais globalment hiperbòlics fent servir arguments globals com ara la compacitat dels espais de corbes causals $C(p, q)$ i $C(\Sigma, q)$. A continuació vorem que, suposant més hipòtesis, els resultats següents entren en contradicció si totes les geodèsiques són completes, donant pas així als teoremes de singularitats.

Per a varietats Lorentzianes tenim que la longitud d'una corba causal diferencial λ entre dos punts $p, q \in M$ es pot expressar en termes de la mètrica de la següent forma:

$$\tau[\lambda] = \int \sqrt{-g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)} dt$$

Per poder aplicar arguments globals, hem de generalitzar la noció de longitud al cas de corbes causals contínues entre els punts p i q , per tal que τ estiga definit per a totes les corbes de $C(p, q)$. Considerem $\tilde{C}(p, q)$ el subconjunt de $C(p, q)$ format per les corbes diferencials de tipus temps amb la topologia induïda per la topologia que varem definir per $C(p, q)$. Aleshores tenim que $\tilde{C}(p, q)$ és dens en $C(p, q)$, a excepció de les geodèsiques nul·les que connecten p amb q . És a dir, a excepció de certes geodèsiques nul·les, tota corba causal continua es pot expressar com una successió de corbes temporals diferencials.

Si τ fora una funció continua en $\tilde{C}(p, q)$, la podríem estendre a una funció continua en tot $C(p, q)$ de la següent forma:

$$\tau[\mu] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau[\lambda_n]$$

on $\{\lambda_n\}$ és una successió en $\tilde{C}(p, q)$ que convergeix a una corba $\mu \in C(p, q)$.

No obstant τ no és una funció continua en $\tilde{C}(p, q)$, sino que és una funció *semicontinua superior* en $\tilde{C}(p, q)$, és a dir, per a cada $\lambda \in \tilde{C}(p, q)$, donat $\epsilon > 0$ existeix un entorn obert $O \subset \tilde{C}(p, q)$ de λ tal que per a tot $\lambda' \in O$ tenim que $\tau[\lambda'] \leq \tau[\lambda] + \epsilon$. Podem doncs estendre τ com una funció semicontinua superior en $C(p, q)$ de la següent manera. Considerem $\mu \in C(p, q)$ i $O \subset C(p, q)$ un entorn obert de μ . Definim

$$T[O] = \sup\{\tau[\lambda] \mid \lambda \in O, \lambda \in \tilde{C}(p, q)\}$$

on $\sup$ denota el suprem. Definim doncs $\tau[\mu]$ com

$$\tau[\mu] = \inf\{T[O] \mid O \text{ és un entorn obert de } \mu\}$$

on $\inf$ denota l'ínfim. Tenim doncs el següent resultat:

Proposició 5.4. *Siga (M, g) un espai-temps fortament causal. Siga $p, q \in M$ tal que $q \in I^+(p)$. Aleshores τ és una funció semicontinua superior en $\tilde{C}(p, q)$.*

Al capítol anterior hem definit $C(\Sigma, p)$ per a una superfície de Cauchy Σ en un espai-temps globalment hiperbòlic. Ara definirem anàlogament $C(\Sigma, p)$ per a qualssevol conjunts acronal Σ en un espai-temps fortament causal. Seguint els mateixos arguments d'abans tenim que τ és una funció superiorment semicontinua en $\tilde{C}(\Sigma, p)$. Per tant, igual que hem fet abans, podem estendre τ a una funció superiorment semicontinua en $C(\Sigma, p)$.

Al principi de la secció hem vist que la condició única i necessària per a que una corba diferencial maximitze localment la distància és que siga una geodèsica sense punts conjugats entre dos punts o entre una hipersuperfície i un punt. Ara que hem estès la definició de τ també a corbes contínues, cap la possibilitat de trobar una corba continua no diferencial tal que tinga una longitud major o igual a la geodèsica que abans maximitzava la distància.

En un entorn convex normal U tenim que l'única geodèsica γ que connecta dos punts $r, s \in U$ causalment relacionats té una longitud major a qualsevol altra corba causal connectant r i s ⁸. Per tant, per la semicontinuitat de τ qualsevol corba causal μ connectant r i s de U ha de satisfer $\tau[\mu] \leq \tau[\gamma]$. Considerem el cas on la igualtat amb $\mu \neq \gamma$. Considerem un punt q tal que $q \in \mu$ però $q \notin \gamma$. Siguen γ_1, γ_2 els segments geodèsics connectant r i q , i q amb s respectivament. Com γ_1 maximitza la distància entre r i q , i γ_2 maximitza la distància entre q i s , tenim que $\tau[\gamma_1] + \tau[\gamma_2] \geq \tau[\gamma] = \tau[\mu]$. Això contradiu que γ maximitza la distància entre r i s . Per tant, en qualsevol entorn convex normal, l'única geodèsica connectant qualsevol parell de punts causalment relacionats té una longitud estrictament major que qualsevol altra corba causal connectant aquests dos punts. Per tant, una corba arbitrària causal que connecta dos punts no pot ser una corba de longitud màxima si no és una geodèsica, donat que si no ho fora la podríem deformar dins d'un entorn convex normal a una corba de longitud major. Obtenim doncs els següents resultats.

Teorema 5.5. *Siga (M, g) un espai-temps fortament causal. Siga Σ una hipersuperfície diferencial espacial i acronal. Donat $p \in M$ considerem la funció longitud τ definida en $C(\Sigma, p)$. Una condició necessària i suficient per a que τ continga el seu valor màxim en $\gamma \in C(\Sigma, p)$ és que γ siga una geodèsica ortogonal a Σ amb cap punt conjugat a Σ entre Σ i p .*

Aquest resultat només ens dona les condicions necessàries i suficients per a que τ assolisca el seu màxim, però no ens assegura que en efecte ho faci. No obstant, podem assegurar que τ sempre assoleix el seu màxim en un espai-temps globalment hiperbòlic amb el següent resultat.

Teorema 5.6. *Siga (M, g) un espai-temps globalment hiperbòlic. Siga $p \in M$ i siga Σ una superfície de Cauchy. Aleshores existeix una corba $\gamma \in C(\Sigma, p)$ per a la qual τ assoleix el seu valor màxim en $C(\Sigma, p)$.*

Demostració. Com que estem en un espai-temps globalment hiperbòlic, tenim que el conjunt $C(\Sigma, p)$ és un compacte. Aleshores, com la funció τ és una funció semicontinua superior definida des de un espai topològic compacte en $\mathbb{R}$, tenim que τ assoleix el seu màxim en $C(\Sigma, p)$. És a dir, existeix $\gamma \in C(\Sigma, p)$ tal que $\tau(\gamma) > \tau(\alpha)$ per a tot $\alpha \in C(\Sigma, p)$ diferent de γ . $\square$

⁸Podem trobar una demostració d'aquest fet a la Proposició 4.5.3 de [HSE73]

5.2 Teoremes sobre singularitats

Arribats a aquest punt i tenint en compte tots els conceptes desenvolupats a les seccions anteriors ja som capaços d'enunciar els teoremes de singularitats de l'espai-temps. Els tres primers teoremes que enunciem estableixen l'existència de singularitats per la incompletesa de les geodèsiques temporals i nul·les, baix certes condicions. El quart teorema que enunciem estableix l'existència de singularitats amb unes hipòtesis menys fortes que les que es demanen en els teoremes anteriors.

El primer teorema que enunciem i demostrarem es pot interpretar com la prova de que si l'univers és globalment hiperbòlic i en un moment de temps s'expandeix en totes direccions amb una velocitat que no s'anul·la, aleshores l'univers té origen en un estat singular fa un temps finit.

Teorema 5.7. Teorema de Hawking (versió 1) *Siga (M, g) un espai-temps globalment hiperbòlic amb $R_{ic}(\gamma, \gamma) \geq 0$ per a totes les geodèsiques temporals γ . Suposem que existeix una superfície espacial de Cauchy Σ suau (o almenys C^2) per a la qual la curvatura mitjana (per a la congruència de geodèsiques normals dirigides cap al passat) satisfà $H \leq C < 0$ per a tot $p \in M$, on C és una constant. Aleshores, cap corba temporal dirigida cap al passat de Σ pot tenir una longitud major a $3/|C|$. En particular, cap geodèsica temporal dirigida cap al passat és completa.*

Demostració. Procedirem per reducció a l'absurd. Suposem que existeix una corba temporal λ dirigida cap al passat desde Σ que té una longitud major a $3/|C|$. Considerem p un punt de λ que es troba a una distància major de $3/|C|$ de Σ . Aleshores, pel Teorema 5.6 tenim que la funció de longitud assoleix el seu màxim en $C(\Sigma, p)$ i per tant existeix una corba γ de màxima longitud entre p i Σ . La longitud de γ serà major a $3/|C|$. Com que γ maximitza la distància entre Σ i p , pel Teorema 5.5 tenim que γ és una geodèsica ortogonal a Σ tal que no existeix cap punt conjugat entre p i Σ . Això entra en contradicció amb la Proposició 5.1 que ens diu que en un espai-temps amb aquestes característiques, amb una superfície de Cauchy, aleshores existeix un punt conjugat a Σ amb una distància menor a $3/|C|$. Per tant la corba λ no pot existir, amb el que cap corba temporal dirigida cap al passat de Σ pot tenir una longitud major a $3/|C|$. $\square$

Per poder evitar la condició d'espai-temps globalment hiperbòlic, donarem un resultat similar del teorema anterior. En aquest no suposarem un espai-temps globalment hiperbòlic, però si un espai-temps "tancat", és a dir, Σ compacte. A més obtindrem una conclusió menys forta que a l'anterior teorema, només podrem assegurar la incompletesa d'almenys una geodèsica.

Teorema 5.8. Teorema de Hawking (versió 2) *Siga (M, g) un espai-temps causalment fort amb $R_{ic}(\gamma, \gamma) \geq 0$ per a totes les geodèsiques temporals γ . Suposem que existeix una hipersuperfície espacial S compacta, sense vora, acronal i suau tal que per a la congruència de geodèsiques normals dirigides cap al passat de S tenim que $K \geq 0$ en tots els punts de S . Siga C el valor màxim de H de forma que $H \geq C < 0$ en tots els punts de S . Aleshores, almenys una geodèsica temporal inextendible dirigida cap al passat de S té una longitud no major a $3/|C|$.*

Demostració. Procedirem per reducció a l'absurd. Suposem doncs que totes les geodèsiques temporals inextendibles cap al passat amb origen en S tenen una longitud major a $3/|C|$. Com que l'interior del domini de dependència de S és un obert contingut en M , podem considerar l'espai-temps $(\dot{D}(S), g|_{\dot{D}(S)})$. Observem que aquest espai-temps que estem

considerant és globalment hiperbòlic. Només ens cal vore que per a tot $p, q \in \mathring{D}(S)$ tenim que $J^+(p) \cup J^-(q)$ és un conjunt compacte en $\mathring{D}(S)$. Com $p, q \in \mathring{D}(S)$ aleshores totes les corbes entre p i q han d'intersecar S . Com estem suposant que S és una hipersuperfície compacta aleshores totes les corbes causals entre p i q queden confinades en un conjunt compacte dins de $\mathring{D}(S)$. A més, en aquest espai-temps, S és una superfície de Cauchy ($D(S) = \mathring{D}(S)$). Per tant, aquest espai-temps satisfà les hipòtesis del Teorema 5.7, amb el que cap corba temporal dirigida cap al passat amb origen en S té una longitud major a $3/|C|$, és a dir, no maximitzen la distància. Això implica l'existència de punts conjugats, però això no pot passar dins d'un espai-temps globalment hiperbòlic. Per tant, totes les geodèsiques inextendibles cap al passat amb origen en S han d'eixir de $\mathring{D}(S)$.

Com $H(S)$ és la frontera de $D(S)$, totes aquestes geodèsiques hauran d'interseccionar amb $H^-(S)$ abans de que la seua distància siga major a $3/|C|$. En particular tindrem $H^-(S) \neq \emptyset$. El nostre objectiu ara és demostrar que $H^-(S)$ és un conjunt compacte.

La clau per poder demostrar la compacitat del conjunt $H^-(S)$ és el fet que per a cada $p \in H^-(S)$ existeix una geodèsica de longitud màxima ortogonal a S , des de S cap a p . Primer, tenim que la longitud de qualsevol corba causal des de S fins a $p \in H^-(S)$ és superiorment fitada per $3/|C|$, per tant el suprem de la longitud de totes les corbes causals entre S i p existeix. El denotarem per τ_0 . Volem trobar una geodèsica ortogonal a S des de S fins a p amb longitud τ_0 . Considerem doncs $\{\lambda_n\}$ una successió de corbes temporals des de S fins a p tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau[\lambda_n] = \tau_0$$

Agafem $q_n \in \lambda_n$ amb $q_n \neq p$ tal que la successió $\{q_n\}$ convergeix al punt p . Com que $q_n \in I^+(p)$, tenim que $q_n \in \mathring{D}^-(S)$. Per tant, pel Teorema 5.5, existeix una geodèsica γ_n des de S fins a q_n tal que maximitza la distància de totes les corbes causals des de S fins a q_n . Per tant, tenim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau[\gamma_n] = \tau_0$$

Considerem ara r_n el punt d'intersecció de γ_n amb S . Com que S és compacte existeix un punt d'acumulació r de la successió $\{r_n\}$.

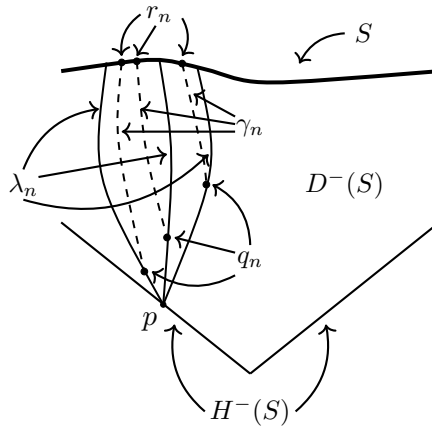


Figura 5: Diagrama d'un espai-temps que mostra la construcció que s'utilitza a la demostració del Teorema 5.8.

Siga γ la geodèsica normal a S amb origen en r . Aleshores, per la dependència continua de les geodèsiques del seu punt inicial i vector tangent, tenim que γ ha d'interseccionar $H^-(S)$

al punt p i

$$\tau[\gamma] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau[\gamma_n] = \tau_0$$

Per tant, hem trobat la geodèsica temporal ortogonal a S que maximitza la distància entre S i p .

Per demostrar la compacitat de $H^-(S)$ només hem de vore que tota seqüència $\{p_n\}$ en $H^-(S)$ té un punt d'acumulació $p \in H^-(S)$. Siga $\{\tilde{\gamma}_n\}$ siga una seqüència de geodèsiques ortogonals de màxima distància des de S fins a p_n . Considerem $\tilde{r}_n$ el punt d'intersecció entre $\tilde{\gamma}_n$ amb S , i siga $\tilde{r}$ el punt d'acumulació de $\{\tilde{r}_n\}$. Siga $\tilde{\gamma}$ la geodèsica amb origen $\tilde{r}$ ortogonal a S . Siga p el punt d'intersecció de $\tilde{\gamma}$ amb $H^-(S)$. Aleshores, p és un punt d'acumulació de $\{p_n\}$. Per tant, hem demostrat que $H^-(S)$ és compacte.

Com estem suposant que $\text{edge}(S) = \emptyset$, pel Teorema 4.68, tenim que $H^-(S)$ conté una geodèsica nul·la inextensible cap al futur. Com tenim que (M, g) és un espai-temps fortament causal, pel Lema 4.50, això és impossible si $H^-(S)$ és un conjunt compacte. Per tant, no totes les geodèsiques temporals dirigides cap al passat inextendibles desde S tenen una longitud major a $3/|C|$. $\square$

El pròxim teorema que enunciem estableix la incompletesa de geodèsiques nul·les en un context rellevant per a col·lapse gravitacional. Per poder enunciar aquest primer introduïm el següent concepte:

Definició 5.9. Siga (M, g) un espai-temps. Considerem T una subvarietat diferencial compacta dos dimensional de M . Diem que T és una **superfície atrapada** si la curvatura mitjana és negativa per a qualsevol direcció normal nul·la futura.

Aquest mostra que, baix certes hipòtesi, una singularitat s'ha de donar després de que es forme una superfície atrapada.

Teorema 5.10. Teorema de Penrose Siga (M, g) un espai-temps connex, globalment hiperbòlic amb una superfície de Cauchy Σ no compacta. Suposem que $R_{ic}(\gamma, \gamma) \geq 0$ per a totes les geodèsiques nul·les γ . Suposem també que M conté una superfície atrapada T . Siga $\theta_0 < 0$ el valor màxim de θ per als dos conjunts de geodèsiques ortogonals en T . Aleshores, almenys una geodèsica ortogonal nul·la inextensible dirigida cap al futur de T té una longitud no major a $2/|\theta_0|$.

Una altra vegada estem suposant que l'espai-temps (M, g) és globalment hiperbòlic. Això ho podem evitar fent servir arguments similars als que hem fet servir per al Teorema 5.8. Aleshores, podem enunciar el següent teorema que elimina la majoria de les hipòtesi que no volem considerar. Es pot trobar una demostració d'aquest en [HSE73].

Abans d'enunciar el teorema, introduïrem els següents dos conceptes que es demanen com a hipòtesi a l'enunciat.

Definició 5.11. Siga (M, g) un espai-temps. Diem que (M, g) satisfà la **condició temporal general** si tota geodèsica temporal té almenys un punt en el qual la curvatura de Riemann s'anul·la.

Definició 5.12. Siga (M, g) un espai-temps. Diem que (M, g) satisfà la **condició nul·la general** si tota geodèsica nul·la γ té almenys un punt $p \in \gamma$ i un vector $v \in T_p M$ linealment independent de $\dot{\gamma}(p)$ tals que

$$g(R(v, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, X) \neq 0$$

Teorema 5.13. Teorema de Hawking-Penrose *Suposem que un espai-temps (M, g) satisfà les següents quatre condicions.*

- $R_{ic}(\gamma, \gamma) \geq 0$ per a totes les geodèsiques temporals i nul·les γ .
- Les condicions temporals i nul·les genèriques es satisfan.
- No existeixen corbes temporals tancades.
- Es satisfà una de les tres següents condicions:
 - (M, g) té un conjunt compacte i acronal sense vora, és a dir, (M, g) és un univers tancat.
 - (M, g) té una superfície atrapada.
 - Existeix un punt $p \in M$ tal que l'expansió de les geodèsiques nul·les dirigides cap al futur (o cap al passat) amb origen p es fa negatiu al llarg de cada geodèsica en aquesta congruència.

Aleshores, (M, g) ha de tindre almenys una geodèsica temporal o nul·la no completa.

Aquest teorema ens dona un resultat molt més feble que els altres tres donats que no ens dona cap informació sobre si la incompletesa és de la geodèsica temporal o de la geodèsica nul·la. A més, aquest ens dona moltes raons per pensar que el nostre univers és singular, és a dir, conté al menys una singularitat.

En definitiva, tot i que els teoremes no expliquen la naturalesa microscòpica de les singularitats, si que ens diuen que aquestes són inevitables, baix certes hipòtesis, en situacions físiques realistes com ara el col·lapse gravitatori o l'expansió cosmològica. Per tant, no es tracten només d'un artefacte matemàtic sinó que tenen un significat físic. Observem que hem acabat caracteritzant les singularitats d'una forma invariant com a incompletesa de geodèsiques causals. Això ens proporciona una definició geomètrica i independent de coordenades que ens permet evitar interpretacions basades únicament en divergències locals de curvatura. Aquest fet implica que la relativitat general clàssica perd predictibilitat en presència de singularitats. No obstant, el caràcter inevitable d'aquestes ens indica que les singularitats no constitueixen una explicació última de la realitat, sinó que senyala la necessitat de formular un marc teòric més general que ens permeti descriure de manera més coherent l'estructura última de l'espai-temps.

Bibliografia

- [CB03] Carlos. Currás Bosch. *Geometria diferencial : varietats diferenciables i varietats de Riemann*. cat. UB ; 63. Barcelona: EUB, Edicions Universitat de Barcelona, 2003. ISBN: 8483383772.
- [DCarmo92] Manfredo Perdigão do. Carmo. *Riemannian geometry*. eng. Boston [etc, 1992.
- [HIC65] Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry*. eng. Van Nostrand mathematical studies ; 3. Princeton (N.J.): Van Nostrand, 1965.
- [HSE73] Stephen Hawking i George F. R. Ellis. *The Large scale structure of spacetime*. eng. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge [etc: Cambridge University Press, 1973. ISBN: 0521099064.
- [Lee12] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. eng. New York, 2012.
- [Lee97] John M. Lee. *Riemannian manifolds : an introduction to curvature*. eng. Graduate texts in mathematics ; 176. New York ; Springer, 1997. ISBN: 038798271X.
- [Nab92] Gregory L. Naber. *The Geometry of Minkowski spacetime : an introduction to the mathematics of the special theory of relativity*. eng. Applied mathematical sciences (Springer-Verlag New York Inc.) ; 92. New York [etc: Springer-Verlag, 1992. ISBN: 0387978488.
- [Wald84] Robert M. Wald. *General relativity*. eng. Chicago [etc: University of Chicago Press, 1984. ISBN: 0226870332.