# The Theory of the Moon in the *Al-Zīj al-Kāmil fī-l-Taᶜālīm* of Ibn al-Hā'im (*ca.* 1205)

Roser Puig

## Introduction. The Zīj and its Author[1]

At the beginning of the thirteenth century (601H / 1204-1205) Abū Muḥammad ᶜAbd al-Ḥaqq al-Ghāfiqī al-Ishbīlī known as Ibn al-Hā'im composed his work entitled *al-Zīj al-Kāmil fī-l-Taᶜālīm* in honour of the Caliph Abū ᶜAbd Allāh Muḥammad al-Nāṣir (who reigned from 1199-1213). All we know of Ibn al-Hā'im's life is that he came from Seville and that he appears to have worked in North Africa.

Ibn al-Hā'im's *Zīj* is included in the MS Oxford Bodleian 285 (Marsh 618). It is quite a long text, with an introduction and seven books (*maqālāt*). Each book is divided into several chapters, of which there are eighty altogether. The text can be considered as a *zīj* on the basis of its structure and its contents, although it does not include astronomical tables;

1 This paper is part of the complete study of the *zīj* of Ibn al-Hā'im which we started in Barcelona some years ago as part of a research program entitled "Astronomical Theory and Tables in al-Andalus and the Maghrib between the 12th and 14th Centuries", sponsored by the Dirección General de Investigación Científica y Técnica of the Spanish Ministry of Education and Culture. Emilia Calvo (1998) has recently published a paper on the astronomical theories related to the Sun in the same *zīj* and Mercè Comes is preparig a paper on Ibn al-Hā'im's trepidation model.

it may in fact have had some tables in its original version[2]. The text offers calculating procedures and gives geometrical proofs for the rules proposed.

Ibn al-Hā'im describes the astronomy practised in al-Andalus and the Maghrib at the beginning of the thirteenth century and informs us of the activities of the Andalusian astronomer Ibn al-Zarqālluh (died 1100) and the Toledan astronomers (*al-jamāʿa al-ṭulayṭūliyya*) who worked under the patronage of *qāḍī* Ṣāʿid in the eleventh century.

In this paper I shall deal with the theory of the Moon in the *zīj*, which is of considerable historical interest. The *zīj* deals with two aspects of the theory of the Moon: the computation of its longitude, and the computation of its latitude. It does not contain specific chapters on eclipses, the visibility of the new moon or the parallax, which are typical of similar *zījes*. The Arabic text of the chapters that I will comment on appears as Appendix 1 at the end of the paper.

## Determination of the Moon's Longitude

This question is discussed in chapter 4 (fols. 36v-37r, pp. 72-73) and 9 (fols. 41v-43v, pp. 82-86) of the third book. In chapter 4, entitled *On Determining the Distance of the Lunar Position in the Ecliptic from the "Beginning of Aries" and "the Vernal Equinox"*, the Moon's sidereal and tropical longitudes are computed by means of a set of tables; the difference between them is the amount of precession calculated according to the theory of trepidation. In chapter 9, entitled *On Finding the Variations* (ikhtilāfāt) *of the Lunar Epicycle Centre Due to the Displacement of the Point of Alignment* (markaz al-muḥāḏāt) *from the Centre of the Ecliptic* we find Ibn al-Hā'im's explanation of the theory set out in chapter 4.

Ibn al-Hā'im's instructions for calculating the longitude of the Moon in chapter four are as follows:

[1] Find the mean longitude of the Moon, its mean anomaly, and the mean longitude of the Sun, all for the place and the time desired.

[2] Then correct the mean longitude of the Moon by multiplying the sine

[2] See M. Abdulrahman (1996a).

of the distance between the Moon and the corrected solar apogee[3] by 0;0,24°[4].

[3] Then add this product to the mean longitude if the Moon is between the solar apogee and the solar perigee, or subtract it from the mean longitude if the Moon is between the solar perigee and the apogee.

[4] Subtract the mean longitude of the Sun from this corrected mean longitude of the Moon in order to obtain the elongation ($\eta$) and hence the double elongation ($2\eta$). Then, enter with the double elongation as argument in the *Lunar Equation Tables*.

[5]-[8] The rest of the steps are standard and the only point of interest is the terminology used by Ibn al-Ha'im: the equation of the centre is called *inḥirāf al-quṭr* (*Almagest*[5] $C_3$: *Equation for Mean to True Apogee*); the interpolation function corresponds to the *daqā'iq al-nisba* (*Alm.* $C_6$: *Sixtieths*); the *taʿdīl al-buʿd al-aqrab* is the difference between the epicyclic equation at the perigee and at the apogee (*Alm.* $C_5$: *Increment in Epicyclic Equation*); the equation of anomaly at the apogee is the *taʿdīl al-ḥiṣṣa* (*Alm.* $C_4$: *Epicyclic Equation*). The final result (equation of anomaly for a particular double elongation and true anomaly) is called *al-taʿdil al-murakkab*. We must add it to or subtract it from the mean lunar longitude to obtain the sidereal longitude.

[3] This "corrected solar apogee" (*al-awj al-muʿaddal*) is defined in the same manuscript, *Maqāla* II, Chapter 10, fol. 34v: "The mean motion of the apogee for the moment and the era we wish plus the radix position for the beginning of the era. The result will be the corrected position of the apogee on the ecliptic, that is the distance from the point of the Head of Aries for that moment". This means that the corrected solar apogee is a sidereal apogee corrected with the apogee's own motion. See G.J. Toomer (1969) and (1987). See also J. Samsó and E. Millăs (1994).

[4] He is using 0;24' * R sin $(L_m - A_s)$
so, for $(L_m - A_s) = 90°$
then, the correction will be 60 * 0;24' = 0;24°
as stated in [26]

[5] See, for instance, G.J. Toomer (1984), p. 238. On the Ptolemaic model, see O. Neugebauer (1969), Appendix I, pp. 191-207.

[9] In order to obtain the tropical longitude, we must add or subtract the amount of precession calculated with the trepidation tables.

The most interesting thing in this chapter is the correction of [2] and [3], which will modify the Moon's initial mean longitude obtained with the tables and consequently the double elongation as argument. We find Ibn al-Hā'im's justification in chapter 9[6]:

Ibn al-Hā'im begins ([10]-[23]) by explaining the computation of the lunar equation of the centre using Ptolemy's model. For that purpose, he begins by explaining the computation procedure ([10]-[17]) and then adds a geometrical justification (*ᶜilla*) of the formula employed ([18]-[23]). There is nothing new in this part of the text, but one should note that Ibn al-Hā'im is not copying the *Almagest* (V, 9). As in the rest of the book, he is providing a clear explanation of the methods used to calculate tables of equations: something which is implicit in Ptolemy's work, and which our author wishes to develop.

The computation of the equation of the centre appears as follows:
[10-11] He calculates Sin $2\eta$ (*al-jayb al-awwal*, the first sine) and Cos $2\eta$ (*al-jayb al-thānī*, the second sine)
[12] He then determines:

$d_1 = 10;19^p \times \text{Sin } 2\eta \ / \ 60$ (*al-ḍilᶜ al-awwal*, the first side)

$f = 2 \times 10;19^p \times \text{Cos } 2\eta \ / \ 60$ (*al-faḍla*, difference)

[13-14] $d_2 = \sqrt{(49;41^2 - d_1^2)} + f$ (*al-ḍilᶜ al-thānī*, the second side)

$b = \sqrt{(49;41^2 - d_1^2)} + f/2$ (*buᶜd al-markaz al-mar'ī*, the distance between the centre of the lunar epicycle and the centre of the ecliptic)

[15] He next gives an alternative approximate procedure to calculate *b*. He enters the table of the interpolation function (*daqā'iq nisbat al-khārij al-markaz*) with the value for the double elongation, obtains a value *m*, and establishes a proportion:

$$x \ / \ 20;38 = m \ / \ 60 \text{ where } x = 60 - b$$

- for $2\eta = 0$, then m = 0, x = 0 and b = 60
- for $2\eta = 180$, then m = 60, x = 20;38 and b = 39;22 = R - e, e

[6] A description and detailed analysis of this chapter is in R. Puig (1992), still unpublished. See a first approximation to the subject in J.Samsó (1992), pp. 218-219.

being the eccentricity
Finally, he determines
[16] $w = \sqrt{(d_2^2 + d_1^2)}$ (*al-watar*, the hypotenuse) and
[17] $q = \mathrm{Sin}^{-1}(60/w \times d_1)$, the equation of the centre, which he uses to calculate the true anomaly.

The geometrical justification for the computation procedure begins in [18] which is described in fig. 1: ABG is the lunar deferent with centre E. D is the centre of the ecliptic and T the *prosneusis* point, diametrically opposite to E. Angle ADB is the double elongation ($2\eta$). B is the centre of the epicycle HM.

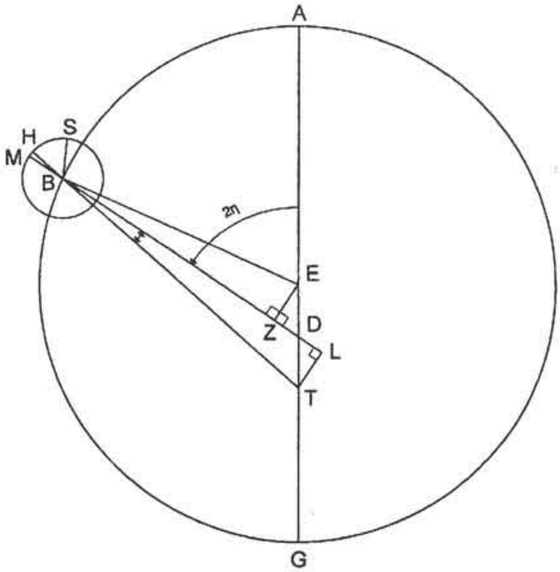


**Figure 1**

[19] He joins B and E, B and D, B and T. TB and DB will intersect the epicycle at points H and M. The Moon will be at S, which he joins with B. Point H will be the mean apogee of the epicycle (*al-bu<sup>c</sup>d al-ab<sup>c</sup>ad al-wasaṭī*), while M will be the true apogee (*al-bu<sup>c</sup>d al-ab<sup>c</sup>ad al-mar'ī*).
[20] $<$TBD ($= <$HBM), the equation of the centre, is the difference

between <HBS (mean anomaly) and <MBS (true anomaly).
[21] <HBM (equation of the centre) is known. From points E and T he traces EZ and TL, perpendicular to DB, which they intersect at points Z and L. Triangles DEZ and DTL are congruent (the text says *shabīh*), for TD = DE, TL = EZ, and LD = DZ. In the triangle DEZ, <D is known ($2\eta$) and <Z is a right angle. TD = $10;19^p$ is the eccentricity.

This explains the two computations of [12]:

TL = EZ = $10;19^p \times \text{Sin } 2\eta \ / \ 60 = d_1$

LD = DZ = $10;19^p \times \text{Cos } 2\eta \ / \ 60$

LZ = 2 × DZ = $f$

[22] EZB is a right angled triangle, <Z being the right angle. EZ and EB (deferent radius = $49;41^p$) are known, as is side BZ. This implies that he is using Pythagoras' theorem, and we have:

$$BZ = \sqrt{(49;41^2 - EZ^2)} \text{ (as in [13])}$$

and BL is also known, for

BL = BZ + ZL (which should be identified with $d_2$)

BD = BZ + ZL/2 (*buᶜd al-markaz al-mar'ī*) (as in [14]).

The explanation is obvious although it is not given explicitly in [23], where the text merely states that side TL and <LBT are known:

$w = BT = \sqrt{(BL^2 + LT^2)}$ (as in [16])

<LBT = $\sin^{-1}(LT/BT) = \text{Sin}^{-1} (60/BT \times LT)$ (as in [17])

[24]-[26] Ibn al-Hā'im goes on to explain the aforementioned correction (see [2]-[3]) as an addition which fills an empty space or corrects an error of the Ancients (*al-ziyāda al-mustadraka ᶜalà-l-qudamā'*)[7]. He ascribes it to Ibn al-Zarqālluh, as a result of some 37 years of lunar observations. This is a new and extremely valuable reference to Ibn al-Zarqālluh's work on the Moon, which has not been preserved. Ibn al-Hā'im says that he found in Ibn al-Zarqālluh's own hand that the results of his observations of the

[7] G. Saliba has pointed out to me that there is a tradition for the terms *mustadraka*, *istidrāk*, *etc*. to mean "objections to Ptolemy" and his discovery of a reference to the earliest Andalusian criticism of Ptolemaic astronomy (eleventh century) in a lost anonymous work entitled *al-Istidrāk ᶜalà Baṭlāmyūs*, gives valuable support to this theory. See G. Saliba (1994), p. 83, and (1999).

Moon's motion in longitude, latitude, and variations (*ikhtilāfāt*) during the eclipses were in absolute agreement with the Ancient astronomers except for the mean motion in longitude. In his own observations of eclipses Ibn al-Zarqālluh found the Moon in the middle of them, either delayed or advanced with respect to its mean motion obtained from the tables. The maximum amount of the variation was about 24 minutes at 90° from the Sun's apogee.

[27] The conclusion was that the Moon's mean motion, as tabulated by the Ancient astronomers, was not around the centre of the Earth, as they thought, but around another centre displaced from it on the Sun's apsidal line in the direction of the apogee.

Ibn al-Hā'im gives us a figure (Fig. 2)[8] to show this:

[28] Let us consider circle ABD with centre L as the deferent circle and diameter BD as the deferent's apsidal line. E is the centre of the Ecliptic. The figure corresponds to the situation in [mean] conjunctions and oppositions in which E is placed between L and D (lunar perigee) so that the geocentric distance of the centre of the lunar epicycle (B) is R+e. The text adds a confusing remark according to which points L and D "are placed on this side of the figure, I mean between the apogee and the perigee of the Sun, in the direction of the signs. This is point E". The sentence apparently describes the side of the figure corresponding to points E and D.

[29] Diameter AG is the Sun's apsidal line, A being on the direction of the apogee.

[30] B is the centre of the epicycle of the Moon. Angle AEB corresponds to the distance observed between the centre of the epicycle of the Moon and the solar apogee. [B is the Moon's mean position at conjunction or opposition and at 90° from the Sun's apogee].

[31] According to observation, B is delayed with respect to its position obtained from the tables. So we will look for another centre Z displaced from E in the direction of the solar apogee. The new angle AZB will

[8] In order to make clearer the relationship between figure 1 and figure 2, I have rotated figure 2 and put letters in brackets which correspond with letters in fig.1.

correspond to the mean distance between the centre of the epicycle of the Moon and the solar apogee obtained from the tables.

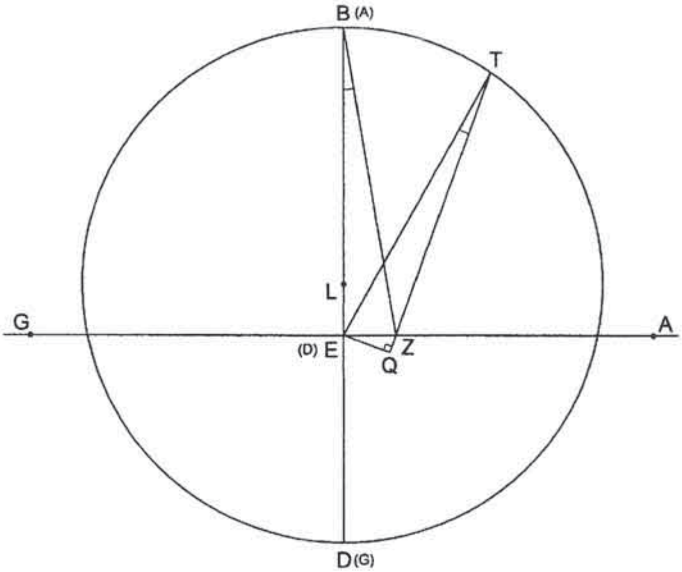


**Figure 2**

[32] Angle ZBE will be the maximum difference, which reaches about 0;24° for this position of B.

[From this maximum value we will find a partial value which will correspond to any possible position of the centre of the epicycle]:

[33] T is now the centre of the epicycle. Ibn al-Ha'im joins T and Z, T and E with lines ZT and ET. In this case, as before, angle AET corresponds to the mean observed distance between the centre of the lunar epicycle and the solar apogee, while angle AZT is the mean distance obtained from the tables. The end of the paragraph (almost two lines) is difficult to reconstruct due to the blanks in the manuscript.

[34]-[35] He drops perpendicular EQ from E to the prolongation of ZT. Angles B and T, being small enough, are considered by Ibn al-Ha'im as equivalent to segments EZ and EQ subtended by these two angles (*al-khuṭūṭ al-mustaqīma al-muwattara bihā*).

[36] He solves right angled triangle EQZ in which Q is the right angle, EZ is approximately equivalent to the 24' of the maximum variation and Z equals angle AZT, the mean lunar longitude measured from the solar apogee as obtained from the tables.
Then,

$$<T \approx QE = EZ/60 \times \text{Sin} <Z = 0;24^\circ/60 \times \text{Sin} <AZT$$

Therefore, the final formula (see above [2] and [3]) to correct the mean longitude obtained with the tables is:

$$L'_m = L_m + 0;24^\circ \sin (L_m\text{-}A_s)$$

where $L'_m$ is the corrected mean longitude,
$L_m$ is the mean longitude obtained with the tables, and
$L_m$-$A_s$ is the distance between the mean position of the Moon obtained with the tables and the corrected solar apogee.

We find the same correction in *zījes* of later Andalusian and Maghribī astronomers such as:

*Al-Zīj al-Muqtabas* by Ibn al-Kammād (fl. Cordova 12th century)[9]. His procedure for calculating the longitude of the Moon is Ptolemaic, and he uses the correction in the case of the calculation of eclipses. In fact, the canons of Ibn al-Kammād state the following rule: "*Quod si volueris locum Lune verum pro eclipsi minue augem Solis a centro et quod remanserit fac illud cordam et multiplica eam in duobus quintis unius minuti et duo quinti unius minuti sunt 24 secunda et divide quod inde colligetur per 60*". Ibn al-Kammād's words deserve some comments. First, the use of the term *corda* for the sine, following al-Battānī. This use is confirmed in chapter 17 of the canons in which he explains how to use the table of cords, cords of the complement (= cosine), and *sagittae* (versed sines). Second: there seems to be an error in his formulation for, according to him, the correction is:

[9] I have used the Latin manuscript 10023 of Biblioteca Nacional de Madrid, Chapter (*porta*) 13. See a general commentary on the tables of this *zīj* in J. Chabás and B.R. Goldstein (1994).

$$(0;0,24 \times 60 \sin (L_m\text{-}A_s)) \;/\; 60$$

The division by 60 does not seem to have much sense and it is probably the result of a confusion with a formula like:

$$(0;24 \times 60 \sin (L_m\text{-}A_s)) \;/\; 60$$

The *zīj* of Ibn Isḥāq al-Tūnisī (fl. Tunis and Marrakesh ca. 1193-1222), as preserved in the Hyderabad manuscript Andra Pradesh State Library 298[10], and the *Al-Minhāj al-ṭālib fī taᶜdīl al-kawākib*, by Ibn al-Bannā' al-Marrākushī (1256-1321)[11]. They add to their procedure for calculating the longitude of the Moon another correction which appeared in Eastern Islamic astronomy in the ninth century: as they obtain the longitude of the Moon on its orbital plane, they must "reduce" it to the ecliptic by means of a table called *Jadwal taᶜdīl al-falak al-mā'il* by Ibn Isḥāq and *Jadwal taᶜdīl falak al-qamar al-mā'il* by Ibn al-Bannā'. The manuscript of Ibn Isḥāq contains two versions of the same table[12] which we also find in the *zīj* of Ibn al-Banna'(MS Escorial 909, fol. 25v) beside the lunar latitude table, with a maximum of 5°. In both authors, the arguments are comprised between 0° and 180° with a maximum of 0;6,39° for argument 45°. We can find the same table in the astronomical handbook known as *Mumtaḥan Zīj* (MS Escorial Arabic 927, fols. 20v-23r), in the $C_7$ of the lunar equation table of Yaḥyà ibn Abī Manṣūr (fl. *ca.* 830) calculated for a maximum

[10] I owe this information to Àngel Mestres who is preparing the edition of this *zīj*. To date, he has published a detailed survey of the contents of the manuscript in Mestres (1996).

[11] The canons of this *zīj* were edited by J. Vernet (1952). Chapters on the Moon are on pp. 31-32 (Arabic text) and 87-89 (Spanish translation). On the computation of planetary longitudes in the *zīj*, including the Moon, see a recent paper by J. Samsó and E. Millás (1998).

[12] See Mestres (1996), p. 415.

inclination of the lunar orbit of 4;46°[13]. The "reduction to the ecliptic" as a correction to the Ptolemaic longitude is pointed out by Pedersen[14] who has calculated a maximum correction of about 0;7° for a longitude of 45;3° and for a maximum latitude of 5°.

In addition to this adjustment, both Ibn Isḥāq and Ibn al-Bannā' recommend using the correction explained by Ibn al-Hā'im when a high degree of accuracy is needed, i.e. for the calculation of eclipses and new moon. Ibn al-Bannā' also includes the computed values of the second correction in a table called *Table of the ṣarf*[15].

*Al-Zīj al-Shāmil fī tahdhīb al-Kāmil* by Ibn al-Raqqām (1245-1315). He follows Ibn al-Hā'im word for word but he does not include the geometrical justifications; nor does he mention Ibn al-Zarqālluh[16].

Finally, the recent publication by Mancha[17] of a Provençal version of the tables for eclipses of Levi ben Gerson (1288-1344) shows a possible introduction of the Zarqāllian correction in the work of the Jewish astronomer: Levi says that in lunar conjunctions and oppositions one finds a correction (*divercitat*) in the lunar equation (the computation of lunar longitude ?) which could reach an amount of up to 29 minutes. I wonder whether these 29 minutes are the result of a copying error and they correspond to the 24 minutes of Ibn al-Zarqālluh or whether Levi ben Gerson made a new estimation of the maximum value of the Zarqāllian correction.

[13] See H. Salam and E.S. Kennedy (1967), reprinted in E.S. Kennedy (1983), pp. 109-113.

[14] See O. Pedersen (1974), p. 200.

[15] The table of *ṣarf* (MS Escorial 909, fol. 25v) is only described, not edited, in a footnote by J. Vernet (1952), p. 88, note 177.

[16] I have used the MS Istanbul Kandilli 249, fol. 14r (Chapter 28) and fol. 15v (Chapter 33), as well as the partial edition of this *zīj* presented by Muḥammad ʿAbd al-Raḥmān as a doctoral dissertation (1996b).

[17] See Mancha (1998).

## Determination of the Moon's Latitude

As in the case of longitude, this question is discussed in two chapters. Chapter 2 of the fourth book (fols. 50r-50v, pp. 99-100) and chapter 6 of the seventh book (fols. 84r-84v, pp.165-166). In chapter 2 of the fourth book, entitled *On Determining the Lunar Latitude to the South and North of the Ecliptic, the Argument of Latitude* (ḥiṣṣat al-ᶜarḍ) *and its Verification*, we have Ibn al-Ha'im's instructions for using a *Table of the Differences of the Arguments of Latitude* (Jadwal tafāḍul ḥiṣaṣ ᶜarḍ al-qamar) which does not appear in the standard layout of the Ptolemaic lunar tables. In chapter 6 of the seventh book, entitled *On Determining the Inclinations of the Degrees of the Lunar Orbit* (muyūl ajzā' falak al-qamar) *from the Ecliptic and the Differences of the Arguments of Latitude*, we find the general formula for the computation of a table of latitude and another one for the aforementioned differences.

In Chapter 2 of the fourth book, the instructions to calculate the latitude are as follows:

[37] Take the distance between the Moon's true position (*mawḍiᶜ al-qamar al-muqawwam*) and the nearer of the two nodes. Call it the first argument (*al-ḥiṣṣa al-ūlā*) or the difference (*al-faḍla*).

[38] Enter with it in the *Table of the Differences of the Arguments of Latitude*, tabulated in minutes and seconds, and *always* add them to the first argument in order to obtain the true argument of latitude (*ḥiṣṣat al-ᶜarḍ al-ḥaqīqiyya*). [As the argument used is true argument of latitude, these tables must be calculated from 0° to 90°].

[39] Enter with it in the *Lunar Latitude Table* to obtain the latitude.

[40] and [41] We must take into account four possible positions of the Moon with respect to both the ascending and descending nodes according to the distance obtained in [37], in order to determine if the latitude is northern or southern and if the Moon is ascending or descending on its orbit.

[42] Ibn al-Ha'im gives a figure (fig. 3) to justify all this: Circle AGD is the lunar orbit (*al-falak al-mā'il*) and circle ABD is the parecliptic (*al-falak al-muwāfiq*). A is the ascending node and D the descending one. G and Z

are, respectively, the northern and southern positions of the Moon on its orbital plane.

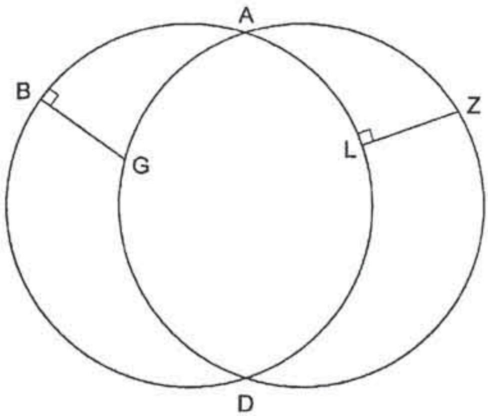


**Figure 3**

[43] We drop perpendiculars ZL and GB on the plane of the ecliptic: B and L will be the positions of the Moon in longitude.
[44] B and L being right angles, arcs AZ and AG, on the orbital plane, are longer than the corresponding arcs AL and AB, on the ecliptic. This produces a difference, which, according to Ibn al-Ha'im, will reach a maximum of about 0;7°. He then explains that the value of the latitude in the tables is given as a function of the argument of latitude measured on the Moon's orbit. Thus, latitude ZL corresponds to arc AZ. But, if we enter the latitude table with the arc AL of the ecliptic as argument instead of arc AZ, the latitude corresponding to AL will be approximate.
[45] At the limits of eclipses Ibn al-Hā'im gives a difference between both

arcs of about 0;3°[18]. The end of the paragraph is difficult to understand due to the blanks in the manuscript, but there is a reference to Ibn al-Hā'im's treatment of eclipses in another part of his work, which I have been unable to find in the extant manuscript.
[46] Finally, he repeats the four lunar positions detailed in [40] and [41].
Chapter 6 of the seventh book explains the problem in more detail:
[47] First, Ibn al-Hā'im says, following Ptolemy, that to calculate the latitude we must proceed as in the case of declinations, but he has a number of remarks to make. [48] Then, he explains how to calculate the latitude. We obtain the lunar distance from the node, measured on the lunar orbit (*al-falak al-mā'il*): this will be the true argument of latitude (*ḥiṣṣat al-ʿarḍ al-ḥaqīqiyya*, AG in fig. 3). The formula is standard:

$$\beta = \text{Sin}^{-1} (\text{Sin AG} \times \text{Sin } 5^{\circ}) / 60$$

He is using the Ptolemaic parameter 5° for the maximum inclination of the lunar orbit.
[49] He then gives us the formula to find the *differences*. He calculates AB which he calls *ḥiṣṣat al-ṭūl* (argument of longitude):

$$\text{AB} = \sin^{-1} (\sin \text{AG} \cos 5^{\circ} / \cos \beta)$$

and the difference (*faḍl*) will be:

$$\text{AG - AB}$$

[50] Ibn al-Ha'im gives a figure (fig. 4) saying that AG is the true argument of latitude, measured on the lunar orbit, and AB the argument of longitude, measured on the ecliptic. BG is the latitude of point G.

[18] This figure is correct according to the Ptolemaic values of 5° for the maximum inclination and 15;12° for a lunar eclipse limit (*Almagest* VI, 5, see G.J. Toomer (1984), p. 287 and O. Pedersen (1974), p. 230).

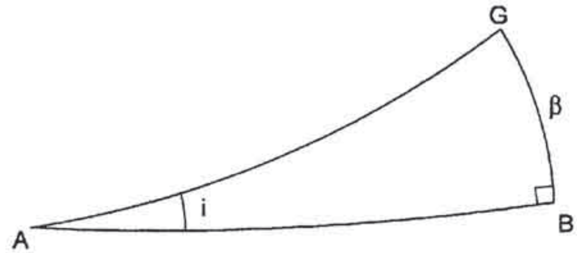


**Figure 4**

[51] In the figure he justifies the formula explained in [48], applying the sine law to spherical triangle ABG:

$$\sin BG / \sin \angle GAB = \sin AG / \sin 90^\circ$$

[52] And the formula of the *differences* using the so-called theorem of Jābir ibn Aflaḥ (Geber)[19]:

$$\sin AG / \sin AB = \cos BG / \cos \angle GAB$$

from which he obtains AB, and then, the *difference* = AG - AB

[19] Both the sine law and Jābir's theorem appear in the *Kitāb Majhūlāt qisī al-kura* of Ibn Muᶜādh al-Jayyānī (d. 1093) and in Jābir b. Aflaḥ's *Iṣlāḥ al-Majisṭī*. I do not know which source is used by Ibn al-Hā'im. See J. Samsó (1980), p. 64, note 44, reprinted in J. Samsó (1994) item VIII. On Jābir's trigonometry see R. Lorch (1975), reprinted in R. Lorch (1995a), item VI, and R. Lorch (1995a) item VIII.

The conclusion we may draw from Ibn al-Hā'im's treatment of lunar latitude is that it contains important information about his determination of the lunar longitude. It seems clear that he interprets his corrected lunar position (*mawḍiᶜ al-qamar al-muqawwam*) as corresponding to a lunar longitude measured on the ecliptic (AB in fig. 4) and not on its own orbit (AG), in spite of the fact that the instructions given by the author to calculate longitudes do not include any reference to the "reduction to the ecliptic" and that the Zarqāllian correction, which is a function of the mean lunar longitude and of the longitude of the solar apogee, has nothing to do with this. As the argument for lunar latitude is not AB but AG, Ibn al-Hā'im uses his table of differences in order to obtain an amount $d$, and then AB + d = AG, which he uses to obtain the lunar latitude. The procedure is related to, although to some extent in conflict with, the tradition of the *Mumtaḥan Zīj*, preserved by Ibn Isḥāq and Ibn al-Bannā': there, Yaḥyā ibn Abī Manṣūr considers that, when he calculates the lunar longitude using his lunar equation tables derived from the *Handy Tables*, he obtains AG which he uses directly in order to obtain the lunar latitude. On the other hand, to compute the longitude correctly, he must obtain AB and, for that purpose, he uses his own table of differences mentioned above. Since his table is calculated for arguments between 1° and 180°, the correction can be positive or negative.

Ibn al-Hā'im's non-extant table uses the Ptolemaic 5° for $\beta_{max}$ and calculates his entries for arguments between 1° and 90°: as he subtracts the lunar position from the nearer node (and not from the ascending node as Yaḥyā does), his corrections are always positive. A table probably similar to that used by Ibn al-Hā'im is preserved by Ibn al-Raqqām in his *Shāmil Zīj*[20], which is also computed for arguments between 1° and 90° and for $\beta_{max} = 5°$ (see Appendix 2).

## Concluding Remarks

Ibn al-Ha'im proposes two corrections to the standard Ptolemaic theory of the Moon. The first is an attempt to correct the theory of lunar longitude.

[20] E.S. Kennedy (1997).

The correction is ascribed to a lost astronomical work of Ibn al-Zarqālluh which Ibn al-Hā'im had read in an autograph manuscript written by the Toledan astronomer himself. The modification consists of correcting the Moon's mean longitude and, consequently, the double elongation, used as initial arguments to enter the tables. Ibn al-Hā'im interprets this correction as a result of the displacement of the centre of the lunar mean motion to a point on the straight line joining the centre of the Universe and the solar apogee, and at a distance of $0;24^p$ from the centre of the Universe. This seems to imply the existence of a lunar equant point which will rotate with the motion of the solar apogee. We do not know to what extent this generalization of the correction of the Ptolemaic lunar model is due to Ibn al-Zarqālluh himself or is the result of Ibn al-Hā'im's interpretation of Ibn al-Zarqālluh's work. Whatever the case, this model met with some success, for we find the same correction in later Andalusī and Maghribī *zīj*es although restricted to the calculation of eclipses and new moon.

The second is a peculiar correction to the computation of the lunar latitude that has a direct relation with a standard practice of Muslim astronomers since the *Mumtaḥan Zīj* in the calculation of longitudes. However, it implies a change of attitude in their respect: Ibn al-Hā'im believes that his lunar model gives ecliptic longitudes and that, consequently, Yaḥyā's reduction to the ecliptic is unnecessary for the computation of longitudes and that an inverse reduction to the lunar orbit has to be operated for calculating latitudes. Ibn al-Hā'im's final result, however, in the calculation of latitudes is necessarily different from Ptolemy's, for he has introduced a double correction (in the "argument of longitude" and in the reduction to the lunar orbit). It is also obviously different from the result obtained by Yaḥyā b. Abī Manṣūr and his followers.

## APPENDIX I

The manuscript is badly damaged and the last lines of each page are very difficult to read. I have used square brackets to mark the holes and the words added or reconstructed. In most of the cases, to reconstruct the text, the *zij* of Ibn al-Raqqām (d.1315) has been useful since he follows Ibn al-Hā'im textually in some passages. I have also used brackets to indicate the MS page number as well as sequential paragraph numbers which are not part of the original text. This paragraph numbering is referred to in my English commentary. A few orthographic and morphological corrections have been made without comment.

## [المقالة 3 الباب 4 (36 ظ- 37 و)] في معرفة بعد موضع القمر في منطقة فلك البروج من نقطتي رأس الحمل والاعتدال الربيعي منها

[1] إذا أردت ذلك فاستخرج وسط القمر وحصّته ووسط [الشمس] أيضاً وكلّ ذلك للوقت والبلد الذي تريد على ما تقدّم.
[2] ثمّ اسقط أوج الشمس المعدّل من وسط القمر فما بقي فخذ جيبه واضرب في خمسي دقيقة وذلك أربع وعشرون ثانية فما اجتمع فاحفظه.
[3] ثمّ انظر فإن كان القمر بين الأوج والحضيض على التوالي فزد ما حفظت على وسط القمر وإن كان القمر بين الحضيض والأوج على خلاف التوالي فانقصه منه فما اجتمع أو بقي فهو الوسط المعدّل فاحفظه.
[4] ثمّ انقص منه وسط الشمس فما بقي فاضعفه فما اجتمع فهو البعد المضاعف فادخل به في جدول تعديل القمر الكلّي.
[5] وخذ ما بحياله من انحراف القطر ومن دقائق نسبة [انحراف] البعد الأقرب وعدّل الدقائق على ما تقدّم واحفظ ذلك.
[6] ثمّ انظر فإن كان البعد المضاعف أقلّ من ستّة بروج فزد الانحراف على الحصّة وإن كان أكثر من ستّة بروج فانقص الانحراف من الحصّة فما اجتمع أو بقي من الحصّة فهي الحصّة المعدّلة فادخل بها في الجدول المذكور وخذ ما بحيالها من تعديل البعد الأقرب و[من تعديل] الحصّة [معاً] وعدّل الدقائق كما تقدّم واحفظ ذلك.
[7] ثمّ اضرب النسبة في تعديل البعد [الأقرب وزد الحاصل] على تعديل الحصّة فما اجتمع فهو [التعديل المركّب]// [٣٧و].

[8] ثمّ انظر فإن كانت الحصّة المعدّلة أكثر من ستّة بروج فزد التعديل المركّب على الوسط المعدّل [للقمر] وإن كانت أقلّ من ستّة بروج فانقص التعديل المركّب من وسط القمر المعدّل فما اجتمع أو بقي بعد ذلك فهو بعد موضع القمر في منطقة فلك البروج من نقطة رأس الحمل منها للوقت والبلد الذي حسبت لهما فا[بدأ بالعدد] من برج الحمل فحيث [ينتهي] ذلك العدد من البروج فالقمر في تلك الدرجة والدقيقة والثانية من ذلك البرج على التحقيق.
[9] فإن أردت أن تعرف موضعه ذلك من نقطة الاعتدال الربيعي فزد عليه مقدار حركة الإقبال إن كان الفلك مقبلاً وانقص منه مقدار حركة الإدبار إن كان الفلك مدبراً فما اجتمع بعد ذلك أو بقي فهو بعد موضع القمر في منطقة فلك البروج من نقطة الاعتدال الربيعي منها فاعلمه وبالله التوفيق.

## [المقالة 3 الباب 9 (41 ظ-43 ظ)] في معرفة عمل الاختلافات الّتي تكون لمركز فلك تدوير القمر من قبل خروج مركز المحاذات عن مركز فلك البروج

[10] إذا أردت ذلك فاستخرج البعد المضاعف للوقت الّذي تريد فإن كان أقلّ من ستّة بروج فهي حصّة المركز وإن كان أكثر من ستّة بروج ففضلة على ستّة بروج هي حصّة المركز فما كانت حصّة المركز فخذ جيبها فما كان فهو الجيب الأوّل فاحفظه.
[11] ثمّ اسقط حصّة المركز من تسعين فما بقي فخذ جيبه فما كان فهو الجيب الثاني فاحفظه.
[12] ثمّ اضرب كلّ واحد من الجيبين في عشرة أجزاء وتسع عشرة دقيقة فما اجتمع فاقسمه على ستّين فما خرج للجيب الأوّل فهو الضلع الأوّل فاحفظه وما خرج للجيب الثاني فاضعفه فما اجتمع فهي الفضلة فاحفظها.
[13] ثمّ اضرب الضلع الأوّل في مثله واسقط المجتمع من ضرب تسعة وأربعين جزءاً واحدى وأربعين دقيقة في مثله فما بقي فخذ جذره فما كان فاثبته في موضعين.
[14] ثمّ زد على أحدهما الفضلة [...] وعلى الثاني نصف الفضلة فما كان الموضع الثاني بعد زيادة نصف الفضلة عليه فهو بعد المركز المرئي فاحفظه وما كان الموضع الأوّل بعد زيادة الفضلة كلّها عليه فهو الضلع الثاني.

[15] وإن شئت فادخل بالبعد المضاعف في جدول دقائق نسبة الخارج المركز وخذ ما بحيالها من دقائق النسبة فما كانت فخذ من عشرين[1] أجزاء وثماني وثلاثين دقيقة مثل نسبة تلك الدقائق إلى ستّين فما كان فانقصه أبداً من ستّين فما بقي فهو بعد المركز المرئي فزد عليه نصف الفضلة فما اجتمع فهو الضلع الثاني.

[16] فما كان الضلع الثاني فاضرب في مثله والضلع الأوّل في مثله واجمع الضربين وخذ جدر المجتمع فما كان الجدر فهو الوتر فاحفظه.

[17] ثم اقسم ستّين على الوتر واضرب الخارج في الضلع الأوّل فما اجتمع فقوسه تقويس الجيوب فما كانت القوس فهو مقدار زاوية الاختلاف الّذي [من] قبل خروج مركز المحاذات عن مركز فلك البروج فاسقطه [من] حركة [...ك] إن كان البعد المضاعف أكثر من ستّة بروج أو زد عليه إن كان // [٤٢و] البعد المضا[عف] أقلّ من ستّة بروج فما اجتمع أو بقي فهو بعد القمر عن دروة فلك تدويره المرئيّة فاعلمه وباللّه التوفيق.

[18] والعلّة في ذلك ليكن فلك القمر الخارج المركز دائرة الف باء جيم حول مركز الهاء وقطر ألف جيم وليكن مركز فلك البروج عليه نقطة الدال ومركز المحاذات نقطة الطاء ولتكن زاوية ألف دال باء مساوية للبعد المضاعف ونخط على نقطة الباء فلك تدوير وهو دائرة حاء ميم.

[19] ثم نصل الباء بالهاء والدال والطاء وننفذ طاء باء ودال باء خطي يلقيان محيط فلك التدوير على نقطتي الميم والحاء وليكن القمر على نقطة السين منه ونصل السين بالباء بخط باء سين فتكون نقطة الحاء من فلك التدوير البعد الأبعد الوسطى ونقطة الميم منه البعد الأبعد المرئي

[20] وتكون زاوية طاء باء دال أعني زاوية ميم باء حاء مقدار الاختلاف الّذي يوافق [...] بين زاوية حاء باء سين وهي زاوية المسير الوسط في الاختلاف وبين زاوية ميم باء سين وهي زاوية المسير المرئي في الاختلاف.

[21] فأقول إن هذه الزاوية أعني زاوية حاء باء ميم معلومة فلننفذ خط باء دال على استقامة في خلاف جهته ولنخرج عليه من نقطتي الهاء والطاء عمودي هاء زاي وطاء لام فبيّن أن مثلّث هاء دال زاي شبيه بمثلّث دال طاء لام وضلع طاء دال مساو لضلع دال هاء فضلع طاء لام مساو لهاء زاي وضلع

[1] في المخطوط: عشرة

لام دال مساو لضلع دال زاي فلأنّ [في] مثلّث دال هاء زاي زاوية الدال منه معلومة وزاوية الزاي قائمة فيكون كل واحد من ذلك معلوم بالمقدار الّذي به خطّ هاء دال وهو ما بين المركزين عشرة أجزاء وتسع عشرة دقيقة وكلّ واحد من خطّي طاء لام ولام دال مساو لنظيره من خطّي هاء زاي وزاي دال فكلّ واحد إذاً من خطّي طاء لام ولام دال معلوم بذلك المقدار فخطّ لام زاي كلّه بذلك المقدار معلوم أيضاً.

[22] ولأنّ [في] مثلّث هاء زاي باء زاوية الزاي منه قائمة وضلعا هاء زاي وهاء باء منه معلومان بذلك المقدار المذكور يكون ضلع باء زاي منه معلوما أيضاً بذلك المقدار وضلع باء لام معلوما أيضاً وضلع طاء لام معلوم وزاوية اللام قائمة ويكون موتّر [باء] طاء معلوما [أيضاً] بذلك المقدار.

[23] ولأنّ طاء لام معلوم بذلك المقدار فزاوية [لام باء طاء] // [٢٤ظ] أيضاً معلومة بالمقدار الّذي موتّر باء طاء ستّون [...] يكون زاوية لام باء طاء أعني زاوية حاء باء ميم معلومة بالمقدار الّذي به الزاوية القائمة تسعون فقوس حاء ميم معلومة وهي الفضلة بين البعدين الأبعدين في فلك التدوير المرئي والوسطي فقوس ميم حاء سين وهي الّتي تحيطه بمسير القمر المرئي في الاختلاف معلومة وذلك ما أردنا بيانه.

[24] وأمّا الزيادة المستدركة على القدماء من هذه الاختلافات فهي ما نذكره بعد بحول اللّه تعالى.

[25] وذلك أنّ وسط القمر المرئيّ في الجداول إنّما هو في جميع الزيجات بحسب أنّ حركة مركز فلك تدويره المستوية إنّما هي على مركز فلك البروج ولمّا رصد أبو إسحاق إبراهيم بن يحيى المعروف بالزرقالّه رحمه اللّه جميع حركات القمر في الطول والعرض والاختلافات وامتحن ذلك في الكسوفات الكثيرة في جميع أجزاء فلك البروج مدّة طويلة من الزمان مبلغها نحو من سبع وثلاثين سنة على ما وجدنا له بخطّ يده لم يختلف عن القدماء في شيء بما وضعوه في ذلك إلاّ في الحركة الوسطى في الطول فقط.

[26] وذلك أنّه كان يجد أبداً وسط القمر في زمن أوساط الكسوفات بحسب ما يقتضيه الرصد والعمل أمّا متى كان القمر سائراً من أوج الشمس إلى حضيضها فمتأخراً عن وسطه المخرج من الجداول إلى خلاف التوالي وأمّا متى كان القمر سائراً من حضيض الشمس إلى أوجها فمتقدّماً لوسطه المخرج من الجداول على التوالي أكثر ما كان [...] مبلغ هذا التقدّم والتأخّر نحو من أربع وعشرين دقيقة بالتقريب [...] لمقد[ار] به الزاوية القائمة تسعون جزءاً

وذلك عند كونه في تربيع // [٤٣و] أوج الشمس .

[27] فظاهر إذاً من ذلك أن حركة القمر الوسطى في الطول ليست في الحقيقة على مركز فلك البروج لكن على مركز آخر خارج عن مركز فلك البروج إلى جهة أوج الشمس وعلى الخط المار ببعدي الشمس الأبعد والأقرب.

[28] فليكن الفلك الخارج المركز للقمر دائرة ألف باء دال حول مركز اللام وقطر باء دال وليؤخذ عليه مركز فلك البروج وليقع بين نقطتي اللام والدال كما يعرض في حالة الاجتماع والاستقبال الّذان يكونان في هذه الجهة أعني من أوج الشمس إلى حضيضها على التوالي وهي نقطة الهاء.

[29] ونخرج من نقطة الهاء خطّاً قائماً على قطر باء دال يحيط معه بزاوية قائمة ويمر ببعدي الشمس الأبعد والأقرب وهو خط ألف جيم.

[30] وليكن مركز فلك تدوير القمر على نقطة الباء من خارجه فتكون زاوية ألف هاء باء تحيط ببعد وسط القمر المرصود من أوج الشمس.

[31] ولأنّ الوسط المرصود وجد في هذه الجهة من الأوج يتأخر عن وسطه المخرج من الجداول وجهة الأوج على خلاف التوالي فلتكن زاوية ألف زاي باء تحيط بمسير القمر الوسط في الطول المخرج من الجداول على الأوج فتكون نقطة الزاي هي مركز الحركة الوسطى في الطول لا نقطة الهاء الّتي عليها عمل القدماء من أهل الرصد في وسط القمر وتكون زاوية الباء هي زاوية الاختلاف بين وسطي القمر المحسوب والمرصود

[32] فوجدت هذه الزاوية في هذا الموضع أعني حيث تكون أعظم ما تكون وذلك عند كون وسط القمر على تربيع موضع أوج الشمس أكثر ما تبلغ نحو من أربع وعشرين دقيقة بالتقريب بالمقدار الّذي به الزاوية القائمة تسعون والاختلاف الكلّي إذاً بين هتين الحركتين المحسوبة والمرصودة إنّما هو أربع وعشرون دقيقة بالتقريب بالمقدار المذكور

[33] وليكن مركز تدوير القمر على نقطة الطاء من خارجه ونصل طاء زاي وطاء هاء بخطي زاي طاء وهاء طاء فتكون زاوية ألف هاء طاء على ما تقدم تحيط بمسير القمر المعدل في الطول عن أوج الشمس وتكون زاوية ألف زاي [طاء] تحيط بمسير القمر الوسط في الطول من أوج الشمس فتكون [إذاً] زاوية [...] طاء زاوية [...] الف باء // [٤٣ظ] جزء فأقول إنّها معلومة.

[34] فلنخرج من نقطة الهاء عموداً على [خط] زاي طاء وهو عمود هاء قاف فبيّن أنّه إذا كانت زاوية هاء باء زاي الّتي هي زاوية الاختلاف الكلّي أربعاً وعشرين دقيقة بالتقريب إنّ الاختلاف الّذي يقع بين خط هاء زاي إذا أخذنا

جيباً لقوس زاوية الباء وبين زاوية الباء إنّما يبلغ نحواً من دقيقة واحدة على التقريب.

[35] ولأنّ قاف هاء أقصر من هاء زاي يكون الاختلاف الّذي يقع أيضاً بينه وبين قوس زاوية الطاء إذا أخذنا جيباً لها لا يبلغ ولا أقلّ[2] من دقيقة واحدة بتقريبٍ وما كان هذا مقداره من الاختلاف بين القسيّ وجيوبها فليس له عند الحس قدر بصر به فمقادير زاويا هذه الاختلافات الجزئيّة إذاً هي مقادير الخطوط المستقيمة الموتّرة لها بالتقريب.

[36] فكلّ واحد إذاً من خطّي هاء زاي وهاء قاف مساويان أو يتران به الموتّرة له من زاوية الباء والطاء ولأنّ مثلّثة هاء قاف زاي زاوية الزاي منه معلومة لأنّها البعد من الأوج والوسط في الطول المخرّج من الجداول وزاوية القاف قائمة وموتّر هاء زاي معلوم يكون ضلع هاء قاف منه معلوماً بالمقدار الّذي به موتّر هاء زاي ستّون فهو معلوم بالمقدار الّذي به هاء زاي أربع وعشرون دقيقة بالتقريب على ما قد تبيّن فيكون ذلك مقدار زاوية الطاء على التقريب فزاوية الطاء معلومة وذلك ما أردنا بيانه و باللّه التوفيق.

## [المقالة 4 الباب 2.(50 و-51 و)] في معرفة عرض القمر في ناحيتي الشمال والجنوب عن منطقة فلك البروج وحصّة العرض وتحقيقه

[37] إذا أردت ذلك فخذ الفضل الذي بين موضع القمر المقوّم وأقرب عقدتي الجوزهر إليه // [٥٠ظ] متقدّما كان القمر لها أو تالياً فما كان فهي الحصّة الأولى وهي أيضاً الفضلة فاحفظها واعلم لأيّهما هي

[38] ثمّ ادخل بها في جدول تفاضل حصص عرض القمر وخذ [ما] بحيالها من دقائق التفاضل وثوانيها فما كان فاجملها على الفضلة أبداً فما اجتمع فهي حصّة العرض الحقيقيّة

[39] فادخل بها في جدول عرض القمر وخذ ما بحيالها من عرض القمر وعدّل الدقائق على ما تقدّم فما كان فهو عرض القمر عن منطقة فلك البروج فاحفظه

[40] ثمّ انظر فإن كان البعد الّذي أخذت إنّما هو بين موضعي القمر وعقدة

[2]كذا في م، ولعلّ الصواب أكثر

الرأس ثمّ [إن] كانت الفضلة لعقدة الرأس فالعرض جنوبي والقمر صاعد في الجنوب وإن كانت الفضلة لموضع القمر فالعرض شمالي والقمر صاعد في الشمال

[41] وإن كان البعد الّذي أخذت إنّما هو بين موضعي القمر وعقدة الذنب ثمّ [إن] كانت الفضلة لعقدة الذنب فالعرض شمالي والقمر هابط في الشمال وإن كانت الفضلة لموضع القمر فالعرض جنوبي والقمر هابط في الجنوب فاعلمه وباللّه التوفيق.

[42] والعلّة في ذلك ليكن الفلك المائل دائرة ألف جيم دال والفلك الموافق دائرة ألف باء دال وليكن نقطة الألف عقدة الرأس ونقطة الدال عقدة الذنب وليكن القمر فيما يليه أمّا من جهة [الشمال] فعلى نقطة الجيم وأمّا من جهة الجنوب فعلى نقطة الزاي

[43] ونخرج عمود[ي] زاي لام جيم باء على سطح فلك البروج فيكون كلّ واحد من نقطتي الباء واللام موضع القمر من فلك البروج في الطول

[44] فلأن كلّ واحدة من زاويتي الباء واللام قائمة تكون قوس ألف زاي من المائل أطول من قوس ألف لام من فلك البروج وكذلك قوس ألف جيم منه أطول من قوس ألف باء من فلك البروج ووجدنا أكثر ما يبلغ التفاضل بينها نحو من سبع دقائق وإن كانت مقادير العروض المرئيّة في الجداول إنّما هي بحسب قسي الفلك المائل أعني أنّ قوس زاي لام الّتي هي العرض إنّما نعلم من قبل قوس ألف زاي من المائل فإذا أخذت من قبل قوس ألف لام من فلك البروج أمكن أن يقع التقريب من قبل ذلك [في مقادير عرض القمر]

[45] أمّا في أوقات الكسوفات فنحو من ثلاث دقائق على التقريب وأمّا في غيرها فأكثر من [...] إلى ما في مقادير العرض أنفسها التي [...] [...] مقادير [...] فإن لم [.........] // [٥١و] أغفل في مقدار العرض هذا بما وقع منه من بعض الأوقات من الخلل في مقادير الكسوفات ما يحسّ به عند الاعتبار بالرصد على ما يتبيّن في موضعه من هذا الكتاب إن شاء اللّه

[46] ويتبيّن أيضاً من هذا الشكل أنّه متى كان موضع القمر أكثر من موضع الرأس بأقلّ من تسعين درجة فالقمر في الشمال صاعد ومتى كان أقلّ منه بذلك المقدار فهو في الجنوب صاعد وكذلك متى كان موضع القمر المذكور أكثر من موضع الذنب بذلك المقدار المذكور فالقمر في الجنوب هابط ومتى كان أقلّ منه بذلك المقدار أيضاً فهو في الشمال هابط وذلك ما أردنا بيانه.

## [المقالة 7 الباب 6 (84 و-84 ظ)] في معرفة ميول أجزاء فلك القمر المائل عن فلك البروج وتفاضل حصص العرض

[47] أمّا عمل ميول فلك القمر المائل عن فلك البروج فعلى ما تقدّم من ميول أجزاء فلك البروج عن معدّل النهار إلاّ أنّ هاهنا معان توجب إعادة القول في ذلك.

[48] إذا أردت معرفة ميل جزء من أجزاء فلك القمر المائل عن فلك البروج فضع في الفلك المائل بعداً من العقدة وليكن مبلغ أجزائه دون تسعين أبداً فما كانت أجزاؤه فهي حصّة العرض الحقيقيّة فخذ جيبها فاضربه في جيب خمسة أجزاء أبداً وهي الميل الكلّي فما اجتمع فاقسمه على ستّين فما خرج فقوسه تقويس الجيوب فما كانت القوس فهي الميل المطلوب وهي عرض القمر الحقيقي عن فلك البروج .

[49] فإن أردت مقدار تفاضل حصص العرض فاضرب جيب الحصّة الحقيقيّة في جيب تمام الميل كلّه واقسم ما اجتمع على جيب تمام العرض فما خرج فقوسه تقويس الجيوب فما كانت القوس فهي حصّة الطول فأسقطها من الحصّة الحقيقيّة فما بقي فهو فضل ما بين الحصّتين فاعلمه وباللّه التوفيق.

[50] والعلّة في ذلك لتكن قطعة من الفلك المائل عليها ألف جيم وقطعة من فلك البروج عليها ألف باء [...] فعلى نقطة الألف // [٨٤ظ] و نخرج من نقطة الجيم قوس جيم باء عموداً على قوس ألف باء من فلك البروج فيكون قوس باء جيم مقدار ميل نقطة الجيم من المائل عن نقطة الباء من فلك البروج وهي التي نسمّي عرضاً و تكون قوس ألف جيم من المائل بعد نقطة الجيم الحقيقي من العقدة وهي الحصّة الحقيقيّة لعرض باء جيم.

[51] فلأنّ قوسي ألف باء وألف جيم من دوائر عظام وقد تقاطعتا على نقطة الألف وقوس جيم باء عمود على إحديهما وهي قوس ألف باء تكون نسبة جيب قوس ألف جيم إلى جيب ربع الدائرة كنسبة [جيب] قوس باء جيم إلى [جيب] قوس الميل كلّه وجيب قوس ألف جيم معلوم لأنّها مفروضة وجيب ربع الدائرة معلوم وجيب قوس الميل كلّه معلوم لأنّها خمسة أجزاء فجيب قوس باء جيم معلوم وهي ميل نقطة الجيم من المائل عن نقطة الباء من فلك البروج.

[52] وأيضاً فلأنّ مثلّث ألف باء جيم من قسيّ دوائر عظام وزاوية الباء منه

قائمة تكون نسبة جيب قوس ألف جيم إلى جيب قوس ألف باء كنسبة جيب تمام قوس باء جيم إلى جيب تمام الميل كلّه وجيب قوس ألف جيم معلوم على ما تقدم وكذلك جيب تمام قوس باء جيم معلوم أيضاً لأنّها معلومة وجيب تمام الميل كلّه معلوم فجيب قوس ألف باء معلوم فقوس ألف باء معلومة وهي بعد موضع القمر في الطول من العقدة متى كان في نقطة الجيم من مائله فالفضل بينها وبين قوس ألف جيم وهي الحصّة الحقيقيّة معلوم وذلك ما أردنا بيانه.

## APPENDIX II

Ibn al-Raqqām. *Shāmil Zīj*. MS. Kandilli 249, fol. 73r
**Table of the difference between the two arguments**
(*Jadwal faḍl mā bayn al-ḥiṣṣatayn*)

[Entries are in minutes. The differences in seconds between Ibn al-Raqqām's values and the recomputed values of the table appear in brackets]

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0;14 | 31 | 5;49 (+2) | 61 | 5;36 (+2) |
| 2 | 0;28 (+1) | 32 | 5;55 (+2) | 62 | 5;28 (+2) |
| 3 | 0;42 (+1) | 33 | 6;00 (+1) | 63 | 5;20 (+2) |
| 4 | 0;56 (+1) | 34 | 6;05 (+1) | 64 | 5;12 (+2) |
| 5 | 1;10 (+2) | 35 | 6;10 (+1) | 65 | 5;03 (+1) |
| 6 | 1;23 (+1) | 36 | 6;15 (+1) | 66 | 4;54 (+1) |
| 7 | 1;36 (+1) | 37 | 6;18 | 67 | 4;44 (+1) |
| 8 | 1;49 (+1) | 38 | 6;21 | 68 | 4;34 |
| 9 | 2;00 (-1) | 39 | 6;24 | 69 | 4;23 |
| 10 | 2;15 (+1) | 40 | 6;27 | 70 | 4;12 (-1) |
| 11 | 2;28 (+1) | 41 | 6;29 | 71 | 4;01 (-1) |
| 12 | 2;41 (+1) | 42 | 6;31 | 72 | 3;50 (-1) |
| 13 | 2;53 (+1) | 43 | 6;33 (+1) | 73 | 3;39 (-1) |
| 14 | 3;05 (+1) | 44 | 6;34 (+1) | 74 | 3;27 (-2) |
| 15 | 3;16 | 45 | 6;35 (+2) | 75 | 3;16 (-1) |
| 16 | 3;27 (-1) | 46 | 6;34 (+1) | 76 | 3;05 |
| 17 | 3;39 (-1) | 47 | 6;33 (+1) | 77 | 2;53 (+1) |
| 18 | 3;50 (-1) | 48 | 6;31 | 78 | 2;41 (+1) |
| 19 | 4;01 (-1) | 49 | 6;29 | 79 | 2;28 |
| 20 | 4;12 | 50 | 6;27 | 80 | 2;15 |
| 21 | 4;23 | 51 | 6;24 (-1) | 81 | 2;02 |
| 22 | 4;34 (+1) | 52 | 6;21 (-1) | 82 | 1;49 |
| 23 | 4;44 (+2) | 53 | 6;18 | 83 | 1;36 |
| 24 | 4;54 (+2) | 54 | 6;15 (+1) | 84 | 1;23 (+1) |
| 25 | 5;03 (+2) | 55 | 6;10 | 85 | 1;10 (+1) |
| 26 | 5;12 (+3) | 56 | 6;05 | 86 | 0;56 (+1) |
| 27 | 5;20 (+2) | 57 | 6;00 | 87 | 0;42 |
| 28 | 5;28 (+2) | 58 | 5;55 (+1) | 88 | 0;28 (+1) |
| 29 | 5;36 (+3) | 59 | 5;49 (+2) | 89 | 0;14 (-1) |
| 30 | 5;43 (+3) | 60 | 5;43 (+2) | 90 | 0;00 |

## Bibliography


Abdulrahman, M. (1996a): "Ibn al-Hā'im's Zīj did have Numerical Tables" (In Arabic, with a summary in English). In: J. Casulleras and J. Samsó (eds.), *From Baghdad to Barcelona. Studies in the Islamic Exact Sciences in Honour of Prof. Juan Vernet*, Barcelona, vol. I, 365-381.

Abdulrahman, M. (1996b): *Ḥisāb aṭwāl al-kawākib fī-l-Zīj al-shāmil fī tahdhīb al-kāmil li-Ibn al-Raqqām*, doctoral dissertation, unpublished, University of Barcelona (September 1996).

Calvo, E. (1998): "Astronomical Theories Related to the Sun in Ibn al-Hā'im's *al-Zīj al-Kāmil fī-l-Taʿālīm*", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch- Islamischen Wissenschaften*, 12, 51-111.

Chabás, J.; Goldstein, B.R. (1994): "Andalusian Astronomy: al-Zīj al-Muqtabis of Ibn al-Kammād", *Archive for the History of Exact Sciences*, 48, 1-41.

Kennedy, E. S. (1983): *Studies in Islamic Exact Sciences*, Beirut.

Kennedy, E. S. (1997): "The Astronomical Tables of Ibn al-Raqqām a Scientist of Granada", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 11, 35-72.

Lorch, R. (1975): "The Astronomy of Jābir ibn Aflaḥ", *Centaurus*, 19, 85-107. Reprinted in Lorch (1995a) item VI.

Lorch, R. (1995a): *Arabic Mathematical Sciences*, Variorum, Aldershot

Lorch, R. (1995b): "Jābir ibn Aflaḥ and the Establishment of Trigonometry in the West". In: R. Lorch, (1995a), item VIII.

Mancha, J. L. (1998): "The Provençal Version of Levi ben Gerson's Tables for Eclipses", Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 48, 269-352.

Mestres, À. (1996): "Maghribi Astronomy in the 13th Century: a Description of Manuscript Hyderabad Andra Pradesh State Library 298". In: J. Casulleras and J. Samsó (eds.), *From Baghdad to Barcelona. Studies in the Islamic Exact Sciences in Honour of Prof. Juan Vernet*, Barcelona, vol. I, 383-443.

Neugebauer, O. (1969): *The Exact Sciences in Antiquity*, New York.

Pedersen, O. (1974): *A Survey of the Almagest*, Odense.

Puig, R. (1992): "Le calcul de la longitude de la lune dans le zīj d'Ibn al-Ha'im, *V Simposio Internacional de Historia de la Ciencia Árabe*, Granada, 1992, unpublished.

Salam, H.; Kennedy, E.S. (1967): "Solar and Lunar Tables in Early Islamic Astronomy", *Journal of the American Oriental Society*, 87, 492-497. Reprinted in: E.S. Kennedy, (1983) 109-113.

Saliba, G. (1994): "Arabic Planetary Theories after the Eleventh Century AD". In:

*Encyclopedia of the History of Arabic Science*, vol. I, New York and London, 58-128.

Saliba, G. (1999): "Critiques of Ptolemaic Astronomy in Islamic Spain", *Al-Qanṭara*, 3-25.

Samsó, J. (1980): "Notas sobre la trigonometría esférica de Ibn Muᶜaḏ", *Awrāq*, 3, 60-68. Reprinted in: J. Samsó, (1994) item VIII.

Samsó, J. (1992): *Las ciencias de los antiguos en al-Andalus*, Madrid.

Samsó, J. (1994): *Islamic Astronomy and Medieval Spain*, Variorum, Aldershot.

Samsó, J.; Millás, E. (1994): "Ibn al-Bannā', Ibn Isḥāq and Ibn al-Zarqālluh's Solar Theory". In: J. Samsó (1994), item X.

Samsó, J.; Millás, E. (1998): "The Computation of Planetary Longitudes in the *Zīj* of Ibn al-Bannā'", *Arabic Sciences and Philosophy*, 8, 259-286.

Toomer, G.J. (1969): "The Solar Theory of az-Zarqāl: A History of Errors", *Centaurus*, 14, 306-366.

Toomer, G.J. (1984): *Ptolemy's Almagest*, London 1984.

Toomer, G.J. (1987): "The Solar Theory of az-Zarqāl: An Epilogue". In: D.A. King and G. Saliba (eds.), *From Deferent to Equant. A Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E.S. Kennedy*, New York, 513-519.

Vernet, J. (1952): *Contribución al estudio de la labor astronómica de Ibn al-Bannā'*, Tetuán.