

Grado en Economía

Título: Competencia de la localización espacial en el Modelo de Hotelling

Autora: Natalia Paravati Lucán

Tutor: Eduard Buscà Hernández

Departamento: Teoría Económica

Curso académico: 2024-2025



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat d'Economia
i Empresa

Agradecimientos

A punto de finalizar la carrera, echo la vista atrás y me doy cuenta de todo lo que han significado estos cuatro años: una etapa bonita y dura, en la que he aprendido lo que es realmente la Economía. Han sido años de mucho sacrificio, pero al final todo ha salido bien. Quién me lo iba a decir cuando empecé, sabiendo que las matemáticas no eran lo mío... Y ahora estoy aquí, finalizando esta etapa con un trabajo de fin de grado en Microeconomía.

Este grado me ha enseñado que no hay dificultades imposibles si pones todo tu esfuerzo. Si das lo mejor de ti, los resultados acaban llegando.

Quiero hacer una mención especial a todas las personas que me han acompañado durante estos años, especialmente a mi familia, que siempre ha estado ahí cuando más los he necesitado. Y a mi abuela Feliciana, que tristemente falleció el año pasado y no podrá verme graduarme. Estoy segura de que, desde el cielo, se siente muy orgullosa de mí.

También quiero nombrar a mis dos gatos, Sigmund y Riku, que me han acompañado tantas veces durante los estudios. Verlos encima de mis apuntes, en silencio, transmitiéndome con sus miradas un simple “tú puedes”, ha sido siempre un consuelo.

Agradezco profundamente a Eduard Buscà, mi tutor de Trabajo de Final de Grado y profesor de Microeconomía I y III. Gracias por tu paciencia durante todo este tiempo y por demostrarme que la microeconomía no es tan terrible como parecía. Siempre has estado ahí, y eso lo valoro mucho.

Por último, gracias a mis dos equipos de hockey de estos últimos años: el Real Club de Polo y, actualmente, el FC Barcelona. Vuestra confianza en mí y vuestros ánimos me han impulsado a seguir adelante y a creer más en mí misma.

Resumen

Harold Hotelling (1895-1973) fue un reconocido economista y estadístico estadounidense, que desarrolló en el año 1929, en su artículo *Stability of Competition*, lo que se conoce hoy en día como el modelo de Hotelling (o modelo de la ciudad lineal).

En este modelo, se introdujeron nociones de equilibrio de localización en un duopolio. En concreto, se trata de un juego no-cooperativo de dos etapas, en la primera etapa, ambas empresas eligen simultáneamente sus ubicaciones a lo largo del segmento. En la segunda etapa, una vez fijadas sus ubicaciones, cada empresa decide el precio que cobrará por su producto, también de manera simultánea. Los consumidores, por su parte, deciden a qué empresa comprar en función del precio del producto y la distancia a recorrer para adquirirlo, ya que el modelo asume que los consumidores incurren en un "coste de transporte" proporcional a dicha distancia. El análisis de este modelo permite estudiar fenómenos como la competencia espacial, la diferenciación de productos y la tendencia a la concentración de las empresas en el centro del mercado, lo que se conoce como el "principio de mínima diferenciación".

Palabras clave: Equilibrio de localización, coste de transporte, principio de mínima diferenciación

Abstract

Harold Hotelling (1895–1973) was a renowned American economist and statistician who, in 1929, developed what is now known as the Hotelling model (or linear city model) in his article *Stability of Competition*. This model introduced the concept of location equilibrium in a duopoly. Specifically, it is a two-stage non-cooperative game. In the first stage, both firms simultaneously choose their locations along a line segment. In the second stage, once their locations are fixed, each firm simultaneously decides the price it will charge for its product. Consumers, in turn, decide which firm to buy from based on the product's price and the distance they must travel to acquire it, since the model assumes that consumers incur a "transportation cost" proportional to that distance. The analysis of this model allows for the study of phenomena such as spatial competition, product differentiation, and the tendency of firms to concentrate in the center of the market known as the "principle of minimum differentiation."

Keywords: Location equilibrium, transportation cost, principle of minimum differentiation

ÍNDICE

<i>Introducción</i>	<i>7</i>
1.1 Objetivos del trabajo.....	7
1.2 Relevancia del estudio	8
1.3 Metodología empleada	8
2.1 Competencia espacial y localización de empresas	10
2.2 Juegos no cooperativos y equilibrio de Nash	11
2.3. Diferenciación de productos y precios	14
<i>El Modelo de Hotelling</i>	<i>17</i>
3.1 Introducción al modelo de Hotelling.....	17
3.2 Modelo de Hotelling con costes lineales.....	18
3.3 Modelo de Hotelling con costes (de transporte) cuadráticos	32
<i>Conclusiones.....</i>	<i>47</i>
<i>Bibliografía.....</i>	<i>50</i>

Capítulo I

Introducción

1.1 Objetivos del trabajo

Los principales objetivos de este trabajo se centran en una investigación bibliográfica de los diferentes elementos teóricos y prácticos relacionados con el modelo de Hotelling, que es uno de los pilares fundamentales dentro de lo que es la economía espacial y de la competencia en localización de productos.

La finalidad es analizar en profundidad tanto los fundamentos del modelo original como sus diferentes extensiones y críticas, para poder presentar una visión completa y detallada de su evolución y de los problemas que se derivan de su formulación inicial.

Entre los principios que plantearé, incluiré una explicación clara y detallada de cada uno de los problemas y limitaciones asociados al modelo original de Hotelling, poniendo especial importancia en aquellos supuestos que han sido objeto de debate y revisión por parte de otros economistas. Asimismo, estudiaré cómo la introducción de costes de transporte de tipo cuadrático permite precisar más que algunos de los resultados obtenidos en el modelo básico, y cómo esta modificación ha contribuido a resolver o, al menos, suavizar algunas de las críticas más reiteradas.

Este trabajo tiene como propósito una introducción preliminar a los conceptos fundamentales de la teoría de juegos, un área de estudio que resulta esencial para comprender los mecanismos estratégicos que subyacen en los modelos de competencia espacial. En particular, se presentará el concepto de equilibrio de Nash, con el objetivo de facilitar la comprensión de los resultados y predicciones que se derivan de los modelos analizados, así como de proporcionar al lector una base sólida para el estudio de interacciones estratégicas en distintos contextos económicos.

1.2 Relevancia del estudio

¿Por qué fueron tan importantes estos modelos?

La relevancia del modelo de Hotelling, así como también de sus posteriores revisiones y extensiones, consiste en explicar de manera sencilla cómo interactúan las empresas a través de la localización y precios dentro de un mercado.

Este modelo fue el primero en introducir el concepto de competencia espacial, es decir, no solamente centrarse en las decisiones estratégicas de las empresas relacionadas con la limitación del precio, sino que también incluir la preferencia del lugar donde trabajar y de la diferenciación en características del producto. Esto supuso un avance muy importante ya que, respecto a los modelos tradicionales, estos asumían mercados sin dimensión espacial o sin diferenciación.

Además, gracias al modelo de Hotelling contribuyó al desarrollo de la teoría de juegos aplicada a la economía, al introducir un juego no cooperativo de dos etapas en el que las empresas eligen tanto su ubicación como sobre los precios que van a cobrar. Esto ha sido fundamental para entender conceptos como el equilibrio de Nash, y ha servido de base para muchos modelos posteriores que analizan la competencia en mercados reales.

También lo destacable del modelo original es su predicción de la denominada mínima diferenciación (o "Principio de Hotelling"), que explica que las empresas tienden a ubicarse lo más cerca posible entre sí para captar al mayor número posible de consumidores. Esta conclusión ha tenido un gran impacto, ya que ayuda a explicar la concentración de negocios similares en ciertas zonas (por ejemplo, tiendas o restaurantes en la misma calle), y ha generado un gran debate sobre sus implicaciones para el bienestar del consumidor y la eficiencia del mercado.

1.3 Metodología empleada

Como he dicho anteriormente el trabajo se desarrollará gracias a una profunda investigación bibliográfica de las principales contribuciones teóricas relacionadas con los modelos de competencia espacial, centrándome especialmente en el modelo de Hotelling, sus críticas y extensiones, así como en el modelo alternativo propuesto por Salop. Para poder realizar este trabajo, recopilaré y analizaré tanto fuentes clásicas como aportaciones

más recientes, con el objetivo de poder dar una visión completa y estructurada de la evolución de estos modelos.

Voy a usar una metodología teórico-descriptiva, basada en leer, analizar y resumir literatura especializada. Me enfocaré en artículos científicos y económicos, libros de texto y documentos técnicos que sean relevantes.

Asimismo, incorporaré elementos básicos de teoría de juegos, que permitirán comprender los fundamentos estratégicos de los modelos analizados, especialmente en lo que respecta al equilibrio de Nash y su aplicación en contextos de competencia en localización y precios.

El trabajo se organizará en cuatro secciones, para ir desarrollando de manera ordenada los distintos temas que forman parte del análisis.

1. Conceptos preliminares: Presentaré una introducción teórica a los conceptos fundamentales de la teoría de juegos, incluyendo definiciones y ejemplos que permitan comprender las herramientas analíticas utilizadas en los modelos posteriores.

2. Modelo de Hotelling: Expondré en detalle la formulación original del modelo desarrollado por Harold Hotelling en 1929, analizando su estructura, supuestos, resultados y principales conclusiones.

3. Críticas al modelo de Hotelling: Esta sección estará dedicada al análisis de las limitaciones del modelo original, así como a las revisiones propuestas por D'Aspremont, Gabszewicz y Thisse, prestando especial atención a la incorporación de costes de transporte cuadráticos y a sus implicaciones teóricas.

A lo largo del trabajo, buscaré no solo exponer el modelo y sus críticas, sino también facilitar su comprensión mediante ejemplos gráficos y explicaciones intuitivas, con el fin de ofrecer una visión accesible pero rigurosa de los conceptos analizados.

Capítulo II

Conceptos básicos

2.1 Competencia espacial y localización de empresas

En el contexto económico actual, entender cómo las empresas eligen su ubicación y cómo compiten en el espacio geográfico resulta fundamental para comprender muchos fenómenos del mercado. Durante estas primeras páginas se ha hecho referencia al concepto de competencia espacial, un término que hace alusión a la forma en que las empresas no solo compiten por ofrecer mejores productos o servicios, sino también por ubicarse estratégicamente en el territorio. Es decir, la dimensión espacial influye directamente en las decisiones empresariales y puede determinar el éxito o fracaso de un negocio.

La competencia espacial implica que la localización geográfica de una empresa puede otorgarle ciertas ventajas competitivas sobre otras. Por ejemplo, una tienda que se encuentra más cerca del cliente final o en una zona de alto tránsito peatonal puede atraer más compradores simplemente por estar en un lugar más accesible o visible, incluso si su producto no es necesariamente mejor que el de sus competidores. Asimismo, una empresa que se localiza cerca de sus proveedores puede reducir los costes de transporte y logística, lo cual le permite ofrecer precios más competitivos.

Por otro lado, el estudio de la localización de empresas se centra en analizar y determinar cuál es el mejor emplazamiento posible para la instalación de una empresa o establecimiento económico. Esta elección no es aleatoria ni intuitiva, sino que responde a un análisis detallado de diversos factores clave. Entre los elementos más relevantes que influyen en la decisión de localización se encuentran:

- La cercanía a los consumidores: cuanto más cerca se esté del público objetivo, mayores serán las posibilidades de captar demanda y generar ventas.
- Los costes de transporte: tanto para la distribución del producto como para el abastecimiento de insumos o materias primas. Minimizar estas distancias puede significar un ahorro importante para la empresa.

- La competencia existente en la zona: si hay muchas empresas similares cerca, puede ser más difícil destacarse, aunque en algunos casos, estar en una zona con alta concentración de actividad comercial también puede resultar beneficioso por el efecto de atracción de clientes (como ocurre en centros comerciales o clústeres industriales).
- El acceso a materias primas o proveedores: localizarse cerca de las fuentes de suministro puede mejorar la eficiencia operativa y reducir riesgos logísticos.
- Las políticas locales y los incentivos económicos: gobiernos y municipios a menudo ofrecen ventajas fiscales, subsidios o facilidades burocráticas para atraer empresas a determinadas zonas, lo cual puede ser un factor decisivo en la elección.

En definitiva, las empresas buscan posicionarse estratégicamente en el territorio con el objetivo de maximizar su rentabilidad, captar mayor cuota de mercado, reducir sus costes operativos y mantener una ventaja competitiva frente a sus rivales. Este análisis de localización tiene un carácter multidimensional y requiere considerar tanto variables económicas como logísticas, sociales y políticas.

Por tanto, la elección del lugar donde instalarse constituye una de las decisiones más importantes en la planificación empresarial y está estrechamente ligada a la dinámica de la competencia espacial. Lejos de ser una decisión puntual, esta elección forma parte de una estrategia más amplia que conecta el espacio físico con el comportamiento de los mercados y el desempeño económico de las empresas.

2.2 Juegos no cooperativos y equilibrio de Nash

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas y la economía que estudia cómo toman decisiones las personas cuando sus resultados dependen no solo de lo que ellas hagan, sino también de lo que hagan los demás. Dentro de esta teoría, hay dos tipos principales de juegos: cooperativos y no cooperativos, me centraré más en esta última ya que es la que se encuentra en los modelos que analizaré más tarde.

En los juegos cooperativos se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones va a tomar cada uno,

En los juegos no cooperativos, cada jugador actúa por su cuenta, sin poder hacer acuerdos con los demás participantes. No hay comunicación ni pactos entre ellos, por lo que cada uno debe decidir su estrategia pensando únicamente en lo que más le conviene, teniendo

en cuenta que los demás también van a hacer lo mismo. Este tipo de juegos es muy común en situaciones reales como la competencia entre empresas, las elecciones políticas, o incluso decisiones cotidianas donde cada persona busca su mejor resultado, aunque los intereses choquen.

En este tipo de juegos, los jugadores deben anticipar lo que harán los demás, ya que sus resultados dependen de las decisiones de todos. Por eso, no solo importa lo que uno quiere hacer, sino también lo que cree que harán los demás.

Aquí entra en juego el concepto de equilibrio de Nash, que es uno de los pilares más importantes de la teoría de juegos no cooperativos. Este equilibrio ocurre cuando cada jugador ha elegido su mejor estrategia, teniendo en cuenta las decisiones de los demás, y ninguno tiene incentivos para cambiar su elección. En otras palabras, si todos los jugadores están en equilibrio de Nash, nadie puede mejorar su resultado cambiando su estrategia de forma individual.¹

Un ejemplo clásico de esto es el dilema del prisionero, donde dos personas tienen que decidir si confiesan o no un crimen. Aunque sería mejor para ambos no confesar, la estrategia individual de cada uno los lleva a confesar para evitar el peor castigo. Al final, el equilibrio de Nash se alcanza cuando ambos confiesan, aunque no sea el resultado ideal conjunto.

Pondré un ejercicio numérico para entenderlo mejor; en la siguiente matriz de pagos que representa los beneficios que obtienen ambos jugadores, medidos en términos de años de condena evitados (es decir, cuanto mayor es el número, mejor es el resultado para el jugador):

	Prisionero B: Callar	Prisionero B: Confesar
Prisionero A: Callar	(3,3)	(0,5)
Prisionero A: Confesar	(5,0)	(1,1)

Fuente: Elaboración propia

En este caso, se observa que la estrategia dominante para ambos jugadores es confesar. Es decir, confesar proporciona un mejor resultado individual independientemente de lo que haga el otro jugador. Si el otro calla, confesar proporciona el máximo beneficio (5 en

¹ Pérez, J., Jimeno, J. L., & Cerdà, E. (2013). *Teoría de juegos* (2ª ed.).

lugar de 3); si el otro confiesa, confesar sigue siendo mejor (1 en lugar de 0). Por tanto, ambos jugadores elegirán confesar racionalmente.

El resultado de este comportamiento estratégico es el perfil (Confesar, Confesar), que lleva a un pago de (1, 1). Para comprobar que se trata de un equilibrio de Nash, se analiza si alguno de los jugadores puede mejorar su resultado cambiando unilateralmente de estrategia:

- Si Prisionero A cambia su estrategia a "callar", mientras B mantiene "confesar", su pago pasaría de 1 a 0, lo cual representa una pérdida. Por tanto, A no tiene incentivos para cambiar.
- Lo mismo ocurre con B: si cambia a "callar" mientras A mantiene "confesar", su pago pasaría también de 1 a 0. Tampoco tiene incentivos para cambiar.

Dado que ninguno de los jugadores mejora su situación al cambiar unilateralmente su estrategia, se concluye que (Confesar, Confesar) es un equilibrio de Nash.

Sin embargo, es importante destacar la paradoja del dilema: si ambos jugadores optaran por callar, el resultado conjunto sería (3, 3), lo que representa una mejora para ambos. No obstante, este perfil no constituye un equilibrio de Nash, ya que cualquiera de los jugadores podría mejorar su resultado individual traicionando al otro (es decir, confesando), lo cual rompe la condición de estabilidad necesaria para un equilibrio de Nash.

Este análisis muestra cómo el equilibrio de Nash puede conducir a resultados socialmente ineficientes cuando los jugadores actúan de forma puramente racional e individual, lo cual tiene importantes implicaciones en contextos como la cooperación. Este concepto se puede aplicar en muchos campos: en economía (por ejemplo, cuando empresas deciden precios sin colaborar), en política (decisiones estratégicas entre países), e incluso en biología (comportamientos de animales que buscan maximizar su supervivencia).

Además, el equilibrio de Nash no siempre garantiza el mejor resultado posible para todos los jugadores, simplemente señala un punto donde ninguno puede mejorar individualmente. Por eso, es una herramienta muy útil para analizar situaciones reales donde las personas o empresas no colaboran, pero aun así deben tomar decisiones estratégicas.

2.3. Diferenciación de productos y precios

La diferenciación de productos constituye una de las estrategias fundamentales que emplean las empresas para obtener ventaja competitiva en mercados donde la competencia directa puede ser intensa. Esta estrategia se basa en hacer que un producto se perciba como diferente o único respecto a los ofrecidos por otros competidores. Dicha diferenciación puede tomar múltiples formas: diseño innovador, mayor calidad, servicios posventa, imagen de marca, personalización, sostenibilidad, entre otros elementos que aporten valor añadido desde la perspectiva del consumidor (Perloff, 2021).²

Gracias a estas características distintivas, los consumidores no evalúan únicamente el producto por su precio, sino también por cuánto se ajusta a sus preferencias, necesidades o valores personales. Así, están dispuestos a pagar un precio más elevado si perciben que ese producto específico satisface mejor lo que buscan. Esto confiere a las empresas un cierto grado de poder de mercado, ya que sus productos dejan de ser perfectamente sustituibles por los de la competencia. En este sentido, la diferenciación permite a las empresas alejarse de una competencia basada exclusivamente en precios, donde los márgenes de beneficio tienden a reducirse significativamente (Tirole, 1988).³

Además, la diferenciación de productos está estrechamente vinculada con otra estrategia clave en el comportamiento empresarial: la diferenciación o discriminación de precios. Esta consiste en cobrar precios distintos a diferentes grupos de consumidores o en distintos contextos, aunque el coste de producción del bien sea el mismo. La diferenciación de productos crea las condiciones ideales para aplicar esta estrategia, ya que, al segmentar el mercado mediante versiones del producto o atributos diferenciadores, la empresa puede identificar consumidores con distintas disposiciones a pagar (Varian, 2010).⁴

² Perloff, J. M. (2021). *Microeconomics* (8th ed.). Pearson.

³ Tirole, J. (1988). *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press.

⁴ Varian, H. R. (2010). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach* (8th ed.). W.W. Norton & Company.

Existen diversas formas de discriminación de precios:

1. Discriminación de primer grado: consiste en cobrar a cada consumidor el precio máximo que está dispuesto a pagar, algo difícil de implementar en la práctica.
2. Discriminación de segundo grado: se basa en ofrecer distintas versiones del producto (por ejemplo, tamaños, calidades, funciones adicionales), de forma que los consumidores se “auto segmenten” eligiendo la opción que mejor se adapta a sus preferencias y presupuesto.
3. Discriminación de tercer grado: se dirige a distintos grupos de consumidores con precios distintos, como descuentos para estudiantes, precios especiales por edad o tarifas diferenciadas según regiones geográficas (Pindyck & Rubinfeld, 2018).⁵

La diferenciación de productos facilita especialmente la segunda forma de discriminación, ya que permite crear gamas y líneas de producto adaptadas a diferentes segmentos del mercado. Así, una empresa puede atender a públicos diversos —desde consumidores altamente sensibles al precio hasta aquellos que buscan exclusividad o calidad superior maximizando sus ingresos sin necesidad de competir con un único precio uniforme.

Para comprender cómo se relacionan estas estrategias con la estructura del mercado, resulta útil recurrir a modelos teóricos como el modelo de localización espacial, también conocido como modelo de Hotelling. Este modelo representa el mercado como una línea recta una calle, por ejemplo, en la que los consumidores están distribuidos a lo largo y las empresas deben decidir tanto su ubicación en la línea (es decir, su grado de diferenciación respecto a la competencia) como el precio que desean cobrar (Hotelling, 1929).⁶

En este contexto, la “distancia” entre el consumidor y la empresa no es solo física, sino también simbólica: refleja cuán bien se adapta el producto a las preferencias del consumidor. Cuanto más cerca esté una empresa en este “espacio de características”, mayor será la probabilidad de que ese consumidor elija su producto. Las empresas, por tanto, compiten tanto en localización (diferenciación) como en precio, y deben encontrar

⁵ Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2018). *Microeconomía* (9.ª ed.). Pearson.

⁶ Eaton, B. C., & Lipsey, R. G. (1975). The principle of minimum differentiation reconsidered. *Review of Economic Studies*, 42(1), 27–49

un equilibrio estratégico que les permita atraer clientes sin erosionar sus márgenes (Belleflamme & Peitz, 2015).⁷

El modelo demuestra que, en ausencia de diferenciación, la competencia en precios es intensa y los beneficios tienden a desaparecer. Sin embargo, cuando existe diferenciación, las empresas pueden establecer precios por encima del coste marginal, capturando así parte del excedente del consumidor. Si además implementan una estrategia de precios diferenciados según el segmento, pueden extraer aún más valor del mercado.

Este enfoque permite explicar una gran cantidad de fenómenos observables en la práctica. Por ejemplo, los supermercados o las cadenas de comida rápida rara vez se ubican todos en la misma esquina; prefieren repartirse para captar a diferentes segmentos de clientes según su ubicación o perfil. Asimismo, las empresas tecnológicas lanzan modelos “estándar”, “premium” y “pro” de un mismo producto, no solo para ofrecer variedad, sino para capturar diferentes niveles de disposición a pagar. Incluso dentro de un mismo establecimiento, como un cine, se puede observar discriminación de precios en la forma de tarifas reducidas para ciertos colectivos, o suplementos por butacas preferentes o servicios adicionales.

En conclusión, la diferenciación de productos y la diferenciación de precios son estrategias complementarias que permiten a las empresas competir de manera más eficaz en mercados caracterizados por la heterogeneidad de gustos y preferencias. Mediante la diferenciación, las empresas consiguen fidelizar a sus clientes y reducir la presión competitiva basada en el precio. A su vez, al identificar distintos segmentos de consumidores, pueden aplicar políticas de precios que maximicen los ingresos. El modelo de Hotelling proporciona una base teórica sólida para entender cómo estas estrategias se relacionan entre sí y con la estructura del mercado, aportando herramientas valiosas para el análisis de la competencia en la economía real.

⁷ Belleflamme, P., & Peitz, M. (2015). *Industrial Organization: Markets and Strategies* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Capítulo III

El Modelo de Hotelling

3.1 Introducción al modelo de Hotelling

Situémonos en el año 1929, que es cuando Harold Hotelling publicó su ensayo sobre un modelo de mercado consistente en la competencia entre dos empresas en un espacio de una dimensión, que podría representar el espacio que conecta a los actores del modelo⁸. Adelantándonos a las conclusiones de su publicación, el autor proponía una tendencia por parte de las empresas a acercarse tanto como les fuera posible a lo largo del espacio (la calle) y este fenómeno lo catalogó como *Principio de Mínima Diferenciación*. Años después, en 1979, Claude d'Aspremont, J.J Gabszewicz y J.F. Thisse revisaron el modelo propuesto por Hotelling y corrigieron el error en sus conclusiones⁹.

Aunque la conclusión de Hotelling, sobre el principio de mínima diferenciación, fuera errónea, el modelo inspiró muchos otros trabajos que se realizaron posteriormente, debido a su sencillez y flexibilidad. Un factor que contribuyó al interés por su modelo fue la interpretación de la distancia entre el comprador y la empresa como un coste añadido para el comprador. Así pues, aparece una forma de diferenciar los bienes además del propio precio determinado por la empresa; esto fomenta nuevas interpretaciones. Por ejemplo, en lugar de tratar la distancia de forma literal, se podría entender que el bien tiene una cierta característica que afecta a la decisión del comprador. Entonces, las posiciones de las empresas podrían representar una característica fundamental para definir las preferencias del comprador según donde se sitúe.

A mediados del siglo XX, con las contribuciones de John F. Nash sobre la teoría de juegos, se revisaron y ampliaron los trabajos clásicos de economía, como el modelo de Hotelling. En este trabajo también revisaremos en qué condiciones existe un equilibrio de Nash y cuál es el equilibrio cuando éste existe.

⁸ Hotelling, Harold (1929): "Stability in competition" *Economic Journal*, 39, pp. 41-57.

⁹ d'Aspremont, C. , Gabszewicz, J.J. & Thisse, J.F. (1979): "Stability in Competition", *Econometrica*, 47, pp. 1145-1150.

3.2 Modelo de Hotelling con costes lineales

La elección óptima de un consumidor sobre un determinado producto (a igualdad de precios entre empresas) depende de cada consumidor concreto. Un ejemplo podría ser la localización. Es probable que los consumidores que residan en Barcelona prefieran bienes que están disponibles en Barcelona a bienes físicamente idénticos pero que sólo están disponibles en Tarragona. El componente importante es el coste del transporte, es decir, la distancia (y su coste) que tiene que recorrer el consumidor para comprar un producto idéntico, que se vende por dos empresas al mismo precio, pero diferenciado por el lugar donde se sitúa geográficamente la empresa para ir a comprarlo. La diferenciación reside simplemente en la localización no en el propio producto. Analicemos con un poco más de detalle este modelo, suponiendo lo siguiente:

- Existen dos empresas: la empresa 1 (E1) y la empresa 2 (E2).
- Los consumidores se encuentran distribuidos uniformemente a lo largo de un segmento de longitud L . (es por ello que a este modelo se le conoce también como el modelo de la <<ciudad lineal>> ya que supone que solo existen consumidores y empresas distribuidas de lo largo de una calle única).
- Las empresas venden un producto idéntico excepto por la localización de la empresa (diferenciado en localización).
- Cada consumidor elige si comprar 1 o ninguna unidad de producto (tienen demandas unitarias).
- Supongamos que las empresas se sitúan a lo largo del segmento, cumpliéndose que: $a + b \leq L$; siendo $a \geq 0$ y $b \geq 0$.
- El coste unitario de producción es idéntico para las dos empresas e igual a c . ($c_1 = c_2 = c$). Por simplicidad, vamos a suponer que es nulo.
- La utilidad que un consumidor i localizado en un punto x obtiene de la compra del bien en la empresa j es:

$$U_{ij} = v - p_j - tx_{ij}$$

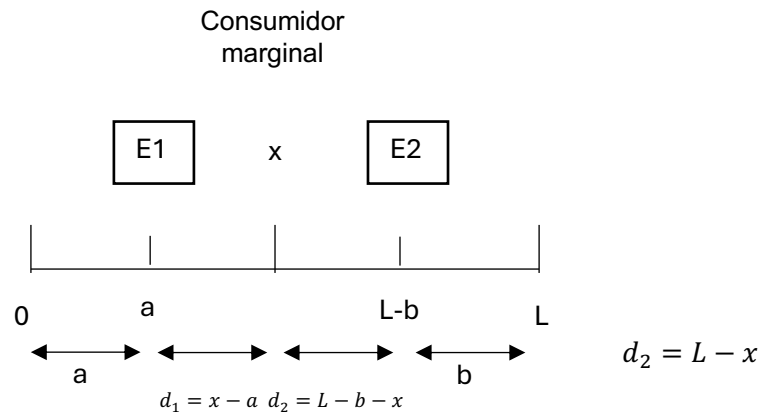
Donde:

v : representa el precio de reserva del consumidor (máxima disposición a pagar).

x_{ij} : representa la distancia entre la localización del consumidor i y la localización de la empresa j en el segmento.

t : representa el coste de transporte por unidad de distancia (por ahora suponemos que el coste es lineal).

- Para determinar la demanda de las empresas E1 (d_1) y de la empresa E2 (d_2) utilizamos la condición de consumidor marginal (que es aquel que es indiferente) entre comprar el producto a la empresa E1 o E2. Éste se situará en la localización “x”. La distancia entre el consumidor y la empresa constituye la demanda.



Aquellos consumidores localizados a la izquierda de x obtienen una mayor utilidad comprando a la empresa E1 y los consumidores localizados a la derecha de x obtienen una mayor utilidad comprando a la empresa E2. La causa de ello reside en que, para unos precios determinados (p_1, p_2) y dado que el coste de transporte aumenta con la distancia, la utilidad del consumidor será superior cuanto menor sea la distancia entre el consumidor y la empresa.

El consumidor marginal es aquel que se muestra indiferente entre comprar en una empresa u otra (ya que obtiene el mismo nivel de utilidad). A través de esta condición podemos encontrar las demandas de cada empresa mediante una sencilla igualación:

$$\begin{aligned}
 U_{x,1} &= U_{x,2} \\
 v - p_1 - t(x - a) &= v - p_2 - t(L - b - x) \\
 p_1 + t(x - a) &= p_2 + t(L - b - x) \\
 x &= \frac{p_2 - p_1}{2t} - \frac{1}{2}(b - a - L)
 \end{aligned}$$

Para definir las funciones de demanda de la E1 y E2, distinguimos 3 casos:

- Si $p_1 + t(L - a - b) < p_2$, la E1 se quedará con todo el mercado.

- Si $p_2 + t(L - a - b) < p_1$, la E2 se quedará con todo el mercado.
 - Si $|p_2 - p_1| \leq t(L - a - b)$, las dos empresas se repartirán el mercado, de forma que la demanda de la E1 será: $d_1 = x$ y la de la E2 será: $d_2 = L - x$.
- Las elasticidades de demanda propia y cruzada son iguales cuando se cumple el equilibrio simétrico, es decir, cuando $p_1 = p_2$ y este requiere que los costes marginales de las empresas sean iguales $c_1 = c_2$ (tal y como hemos supuesto nosotros). Por tanto, el consumidor indiferente siempre debe cumplir:

$$|\varepsilon_{1,1}| = |\varepsilon_{1,2}|$$

$$|\varepsilon_{2,2}| = |\varepsilon_{2,1}|$$

Comprobemos en uno de los casos que se cumple tal condición (la otra requerirá del mismo análisis).

$$|\varepsilon_{1,1}| = \left| \frac{\partial d_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{d_1} \right| = \left| \left(-\frac{1}{2t} \right) \cdot \left(\frac{p_1}{\frac{p_2 - p_1}{2t} - \frac{1}{2}(b - a - L)} \right) \right|$$

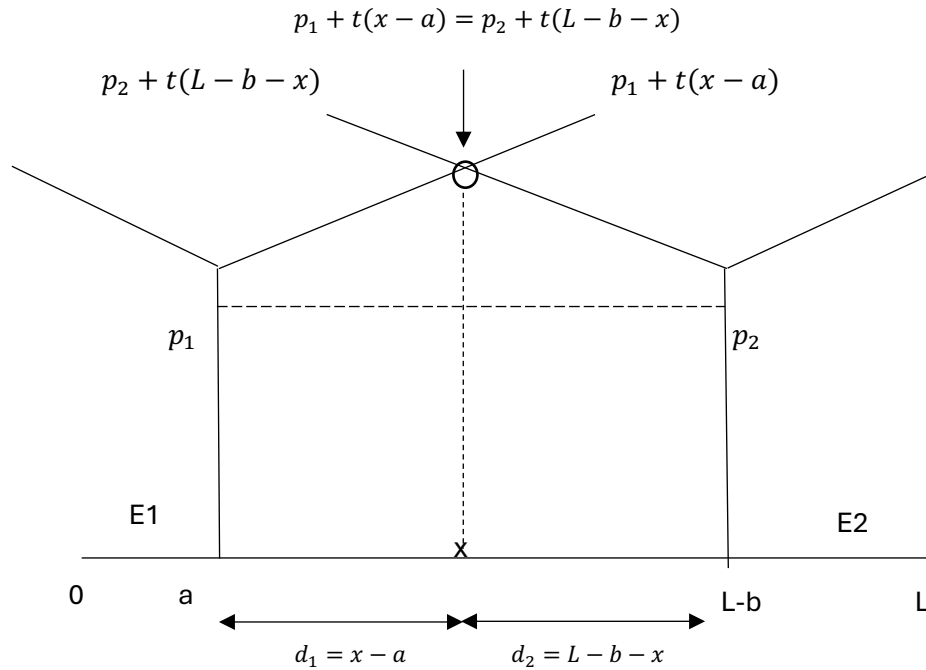
$$= \frac{p_1}{p_2 - p_1 - (b - a - L)}$$

$$|\varepsilon_{1,2}| = \left| \frac{\partial d_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{d_1} \right| = \left| \left(+\frac{1}{2t} \right) \cdot \left(\frac{p_2}{\frac{p_2 - p_1}{2t} - \frac{1}{2}(b - a - L)} \right) \right|$$

$$= \frac{p_2}{p_2 - p_1 - (b - a - L)}$$

Si $p_1 = p_2$ entonces se cumple que $|\varepsilon_{1,1}| = |\varepsilon_{1,2}|$ (y la otra condición también se puede verificar fácilmente).

Podemos representar gráficamente lo que hemos obtenido hasta ahora:



Fuente: Elaboración propia

El coste total de compra es la suma entre el precio y el coste de transporte. Los consumidores compararán el coste de compra en la empresa 1 con el coste de compra en la empresa 2 y comprarán en aquella donde el coste sea menor. En el gráfico anterior se ha representado el coste total en forma de "sombriilla" (para entendernos), la altura viene dada por el precio del producto y el tramo diagonal superior corresponde al coste de transporte por unidad de distancia (t), cuanto mayor sea t menor será la diagonal. La localización del consumidor marginal viene dada por la intersección de las sombrillas desplegadas por las empresas $E1$ y $E2$.

Problema de maximización de la empresa 1:

$$\begin{aligned} \max \pi_1 &= p_1 d_1 = p_1 \left(\frac{p_2 - p_1}{2t} - \frac{1}{2}(b - a - L) \right) \\ &= ap_1 + \frac{1}{2}(L - a - b)p_1 + \frac{p_1 p_2}{2t} - \frac{p_1^2}{2t} \end{aligned}$$

Condición de primer orden (C.P.O):

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = a + \frac{1}{2}(L - a - b) + \frac{p_2}{2t} - \frac{p_1}{t} = 0 \rightarrow p_1 = \psi_1(p_2) = \frac{2ta + t(L - a - b) + p_2}{2}$$

Y con esto encontramos la función de reacción de la empresa 1.

Podemos hacer un análisis más sobre la función de beneficios de la empresa 1:

$$\pi_1 = \begin{cases} ap_1 + \frac{1}{2}(L - a - b)p_1 + \frac{p_1 p_2}{2t} - \frac{p_1^2}{2t} & \text{si } |p_2 - p_1| \leq t(L - a - b) \\ Lp_1 & \text{si } p_1 + t(L - a - b) < p_2 \\ 0 & \text{si } p_2 + t(L - a - b) < p_1 \end{cases}$$

Problema de maximización de la empresa 2:

$$\begin{aligned} \max \pi_2 &= p_2 d_2 = p_2 \left[1 - \left(\frac{p_2 - p_1}{2t} - \frac{1}{2}(b - a - L) \right) \right] \\ &= bp_2 + \frac{1}{2}(L - a - b)p_2 + \frac{p_1 p_2}{2t} - \frac{p_2^2}{2t} \end{aligned}$$

Condición de primer orden (C.P.O):

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = b + \frac{1}{2}(L - a - b) + \frac{p_1}{2t} - \frac{p_2}{t} = 0 \rightarrow p_2 = \psi_2(p_1) = \frac{2tb + t(L - a - b) + p_1}{2}$$

Y con esto encontramos la función de reacción de la empresa 2.

Podemos hacer un análisis más sobre la función de beneficios de la empresa 1:

$$\pi_1 = \begin{cases} bp_2 + \frac{1}{2}(L - a - b)p_2 + \frac{p_1 p_2}{2t} - \frac{p_2^2}{2t} & \text{si } |p_2 - p_1| \leq t(L - a - b) \\ Lp_1 & \text{si } p_2 + t(L - a - b) < p_1 \\ 0 & \text{si } p_1 + t(L - a - b) < p_2 \end{cases}$$

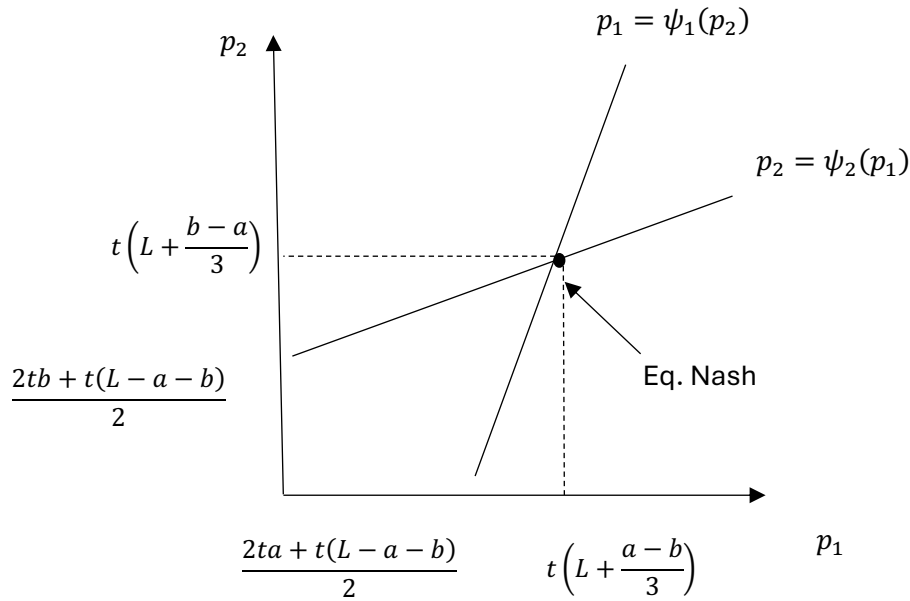
Ambas funciones de reacción presentan pendientes positivas debido a que los bienes producidos por las empresas son competidores estratégicos en precios. Así, cuanto mayor sea el precio que una de las empresas mayor será el precio que fije la otra y, la respuesta de cada una de las empresas será disminuir el precio cuando la rival disminuya el suyo.

Resolvemos el sistema de ecuaciones para obtener el equilibrio de Nash en precios (dadas las localizaciones):

$$p_1^* = \frac{2ta + t(L - a - b) + \frac{2tb + t(L - a - b) + p_1}{2}}{2} \rightarrow p_1^* = t \left(L + \frac{a - b}{3} \right)$$

$$p_2^* = \frac{2tb + t(L - a - b) + \frac{2ta + t(L - a - b) + p_2}{2}}{2} \rightarrow p_2^* = t \left(L + \frac{b - a}{3} \right)$$

La representación gráfica del equilibrio de Nash en precios es la siguiente:



Fuente: Elaboración propia

Observamos que los resultados obtenidos son máximos, ya que el signo de sus derivadas segundas, nos dan resultados negativos:

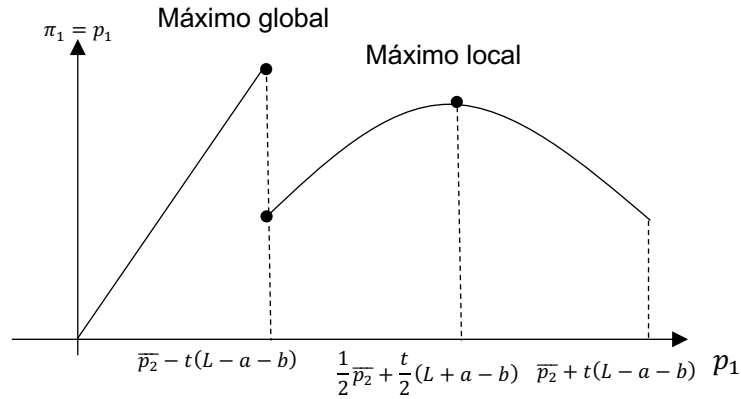
$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial p_1^2} = \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial p_2^2} = -\frac{1}{t}$$

Las funciones de beneficio se pueden representar gráficamente, para representar π_1 supongamos un valor fijo de p_2 que denotamos por $\bar{p}_2$ y tratamos las otras variables como parámetros.

La función de beneficios que se deriva en esta situación es la siguiente¹⁰:

¹⁰ Basado en d'Aspremont et al "On Hotelling's Stability in competition" (1979) p.1145, donde el beneficio tiene la siguiente expresión: $\pi_1(p_1, p_2) = ap_1 + \frac{1}{2}p_1(L - a - b) + \frac{p_1 p_2}{2t} - \frac{p_1^2}{2t}$ si $|p_1 - p_2| \leq t(L - a - b)$; $\pi_1(p_1, p_2) = Lp_1$ si $p_1 < p_2 - t(L - a - b)$; $\pi_1(p_1, p_2) = 0$ si $p_1 > p_2 + t(L - a - b)$.

$$\pi_1(p_1, \bar{p}_2)$$



Fuente: Elaboración propia

Se observa como la función de beneficios no es continua y que, aunque tiene un máximo local en el segundo tramo, dependiendo de los parámetros resultará ser un máximo local o se verá sobrepasado por un punto del primer tramo.

Si suponemos que la combinación (p_1^*, p_2^*) es un equilibrio, entonces $\pi_1^*(p_1^*, p_2^*)$ es un máximo de la función de beneficio de la empresa. Pero sabemos que hay punto en el que se rompe la continuidad de la función de beneficio y, por lo tanto, tenemos que ver que este máximo local sea el máximo absoluto de la función. La función de beneficios presenta una discontinuidad cuando: $|p_2 - p_1| = t(L - a - b)$, que puede parecer que queda fuera de las condiciones que habíamos considerado hasta ahora, ya que habíamos visto que: $|p_2 - p_1| \leq t(L - a - b)$ es necesario para la existencia del equilibrio. Tenemos que recordar, entonces, que la demostración no sigue el mismo orden que las etapas del modelo y que puede ser que, dadas unas posiciones de las empresas, se calcule un equilibrio erróneo ya que una empresa podría obtener un beneficio mayor fijando un precio en que obtendría el dominio del mercado, por ejemplo: $p_2 + t(L - a - b) < p_1$ o $p_1 + t(L - a - b) < p_2$.

Para evitar estos casos se tendría que plantear dos condiciones más de existencia del equilibrio que garantizaran que el beneficio en el equilibrio sea mayor al beneficio en el caso del dominio del mercado. Entonces, la ecuación que planteamos es la siguiente:

$$\pi_1^*(p_1^*, p_2^*) > \pi_1^*(p_2^* - t(L - a - b) - \varepsilon, p_2^*)$$

Donde en la parte de la izquierda encontramos la función de beneficio de los precios que forman un equilibrio de Nash y en la parte de la derecha encontramos la función de

beneficio con un precio p_1 un poco más pequeño que $p_2^* - t(L - a - b)$, de forma que nos encontramos en una situación en la que la E1 domina el mercado.

Al fin y al cabo, todo lo que está sucediendo se puede resumir como un juego de dos etapas entre la E1 y la E2. En la primera etapa escogen simultáneamente las localizaciones (a lo largo del segmento) y en la segunda etapa los precios.

Resolviendo este juego por inducción hacia atrás, encontramos primero un equilibrio del juego de la segunda etapa para cada posible elección de a y b . Es decir, determinamos un equilibrio en la segunda etapa en función de a y b .

Cuando $a + b = L$ las dos empresas están situadas en el mismo punto del segmento, por lo tanto, estas competirán en precios hasta que el precio sea igual al coste marginal (en este caso nulo para ambas). En concreto, el equilibrio será: $p_1^* = p_2^* = 0$.

Cuando $a + b < L$ podemos suponer el contrario a lo que queremos ver: (p_1^*, p_2^*) es un equilibrio, pero $|p_2^* - p_1^*| > t(L - a - b)$. En este caso, la empresa que tiene el mayor precio tiene un beneficio nulo, pero si lo reduce, como mínimo, hasta igualarlo con el de la otra empresa, obtendrá una ganancia; contradiciéndose así el hecho de que (p_1^*, p_2^*) sea un equilibrio. Supongamos ahora que $|p_2^* - p_1^*| = t(L - a - b)$, por lo tanto $p_1^* = p_2^* - t(L - a - b)$. Si $p_1^* = 0$ entonces su beneficio será nulo, pero podría obtener un beneficio positivo subiendo el precio por debajo de $p_2^* + t(L - a - b)$. Pero en cambio si $p_1^* > 0$ tendremos dos casos: o bien E1 se apodera de todo el mercado y por lo tanto la E2 obtiene beneficio nulo (y tiene incentivos a reducir un poco el precio y obtener beneficios positivos, lo que contradice la defin

ición de equilibrio) o bien E1 se lleva una fracción del mercado (por ejemplo, $d_1 < L$) y con una pequeña reducción del precio es capaz de capturar todo el mercado y aumentar su beneficio. De hecho, para $0 < \varepsilon < (L - d_1) \frac{p_1^*}{L}$ obtiene: $\pi_1^*(p_1^* - \varepsilon, p_2^*) = L(p_1^* - \varepsilon) > d_1 p_1^* = \pi_1^*(p_1^*, p_2^*)$.

En cualquiera de los casos que hemos analizado, obtenemos una contradicción, por lo tanto, podemos afirmar que si existe un equilibrio (p_1^*, p_2^*) ha de ser dentro del intervalo definido por $|p_2^* - p_1^*| < t(L - a - b)$.

Para cualquier equilibrio (p_1^*, p_2^*) , p_1^* ha de maximizar $\pi_1^*(p_1^*, p_2^*)$ no solo en el intervalo:

$$]p_2^* - t(L - a - b), p_2^* + t(L - a - b)[$$

Sino a lo largo de todo el dominio S . Podemos afirmar que esto es únicamente posible en el caso de que, para cualquier $\varepsilon > 0$:

$$\pi_1^*(p_1^*, p_2^*) = \frac{t}{2} \left(L + \frac{a-b}{3} \right)^2 \geq L(p_2^* - t(L-a-b) - \varepsilon)$$

Es decir, el beneficio en el equilibrio dentro del intervalo: $]p_2^* - t(L-a-b), p_2^* + t(L-a-b)[$ tiene que superar el máximo beneficio obtenido si reducimos un poco el precio y nos llevamos todo el mercado.

Entonces (y si hacemos la suposición del límite de ε tiende hacia cero)

$$\frac{t}{2} \left(L + \frac{a-b}{3} \right)^2 \geq L \left(t \left(L + \frac{a-b}{3} \right) - t(L-a-b) \right) \rightarrow \left(L + \frac{a-b}{3} \right)^2 \geq \frac{4}{3} L(a+2b)$$

De forma simétrica para la E2:

$$\left(L + \frac{b-a}{3} \right)^2 \geq \frac{4}{3} L(b+2a)$$

Con esto, hemos demostrado que existe un equilibrio de Nash cuando se cumplen ambas condiciones. Y ese equilibrio de Nash es el par de precios que maximiza los beneficios de las empresas. Ahora tocaría contrastar el principio de mínima diferenciación que Hotelling concluyó. Derivando las funciones de beneficio en el equilibrio respecto de la posición de cada empresa obtenemos lo siguiente:

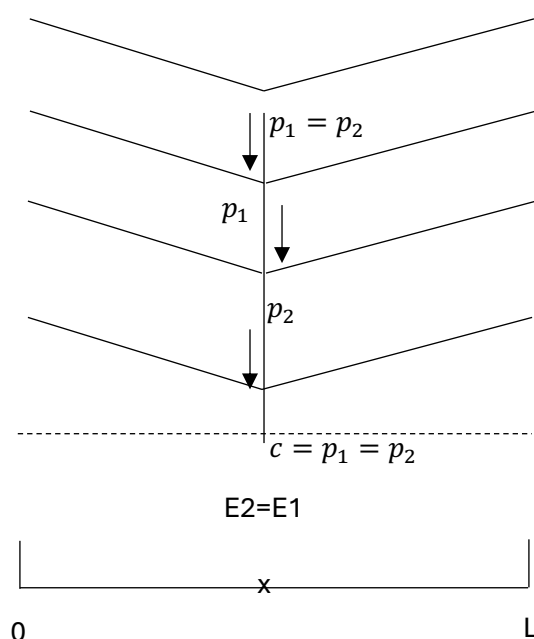
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = \frac{t}{3} \left(L + \frac{a-b}{3} \right) \text{ y } \frac{\partial \pi_2}{\partial b} = \frac{t}{3} \left(L + \frac{b-a}{3} \right)$$

Las dos expresiones son estrictamente positivas (ya que $a+b < L$ nos permite asumir que $\frac{a-b}{3} < L$ y que $\frac{b-a}{3} < L$) y, por lo tanto, los beneficios aumentan a medida que incrementamos a y b , respectivamente. La tendencia de las empresas, entonces, es distanciarse de los extremos, es decir, acercarse al centro del segmento: $a = b = \frac{L}{2}$, teniendo en cuenta que a no puede sobrepasar $L-b$. Este razonamiento lo hacemos siguiendo los pasos de Hotelling que no se dio cuenta que para los casos en que las localizaciones son muy cercanas, pero no coincidentes, no se satisfacen las inecuaciones que se determinan en el modelo. Entonces no se puede hablar de consistencia en $a = b = \frac{L}{2}$ como equilibrio perfecto en subjugos.

Algunas de las conclusiones que podemos extraer hasta este punto son las siguientes:

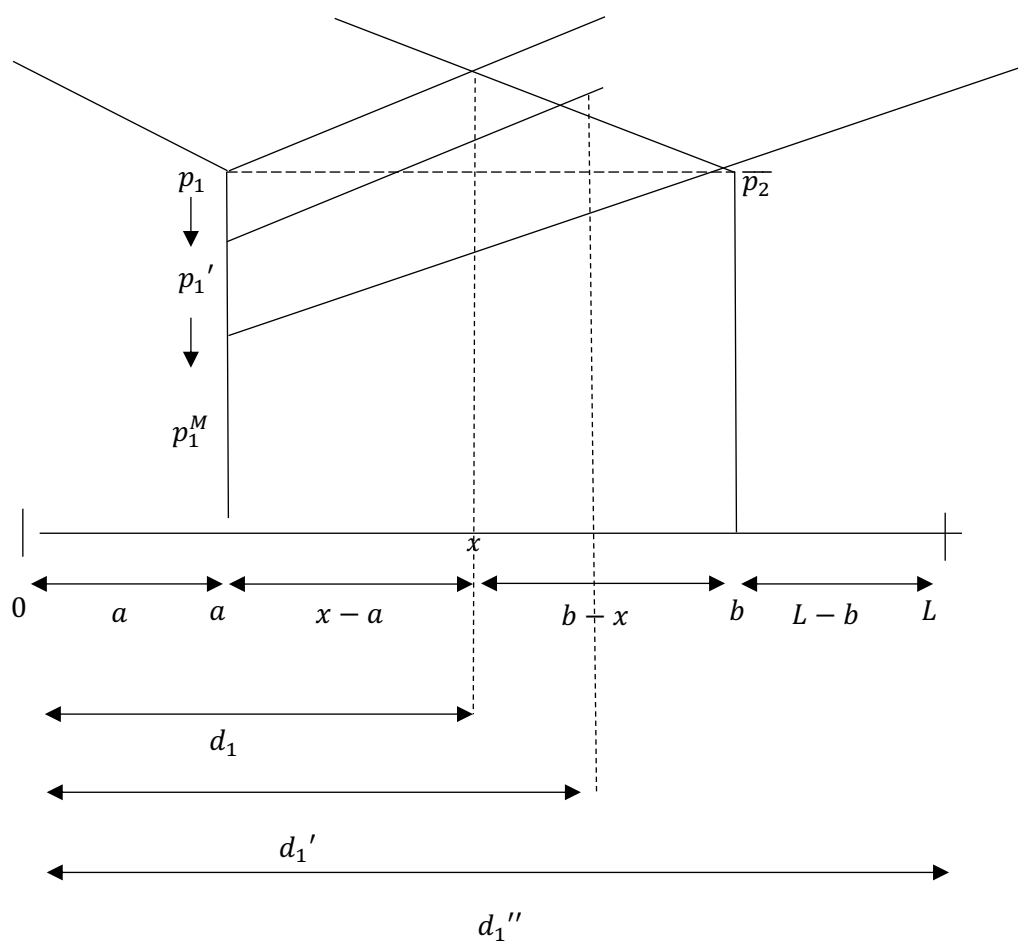
- a) Aunque ambas empresas venden el mismo producto, en la medida en que el coste de transporte por unidad de distancia (t) sea superior a 0 el precio será mayor que el coste marginal (y se resuelve la paradoja de Bertrand). Las empresas obtienen beneficios positivos.
- b) La diferencia entre el precio y el coste marginal aumenta con el coste de transporte. Cuanto mayor es el coste de transporte más diferenciados están los productos desde la óptima del consumidor. Cuanto mayor sea t mayor será el coste de comprar en aquella tienda más alejada a la localización del consumidor. En algunos modelos se considera t como la intensidad de la preferencia de los consumidores por una determinada marca.
- c) Para aquellos consumidores localizados más cerca de cada una de las empresas se incrementa el coste de comprar en el rival, lo que confiere a las empresas cierto “poder de monopolio” y les permite incrementar precios.
- d) Cuando el coste de transporte por unidad de distancia es exactamente 0, las dos empresas están situadas en la misma localización que el consumidor. El consumidor no incurre en ningún coste de transporte para adquirir el producto. En este caso los consumidores comprarán en aquella empresa que fije un menor precio. Es decir, cuando $t=0$ se produce la paradoja de Bertrand, ambas empresas fijan $p=CMg$. Se dice que en este caso existe mínima diferenciación.

Gráficamente lo que está ocurriendo en el apartado d) es lo siguiente:



No obstante, el modelo de Hotelling ha sido objeto de **varias críticas**, principalmente las señaladas por C. d'Aspremont, J. Gabszewicz y J. Thisse (1979)¹¹

1. Vamos a suponer que la empresa 1 se sitúa en la localización “a” y la empresa 2 se sitúa en la localización “b”. También suponemos que el precio de la empresa 2 no reacciona ante los cambios de precio de la empresa 1.



Fuente: Elaboración propia

A medida que la empresa 1 reduce p_1 vende a más consumidores situados entre ambas empresas ($d_1'' > d_1' > d_1$), hasta que fijando p_1^M atrae a todos los consumidores entre ambas empresas (incluso a los que están localizados a la derecha de la empresa 2), lo que

¹¹ Para un análisis más detallado ver d'Aspremont, C. et al “On Hotelling’s Stability in competition” (1979) *Econometrica.*, Vol. 47, N°5, pp. 1145-1150.

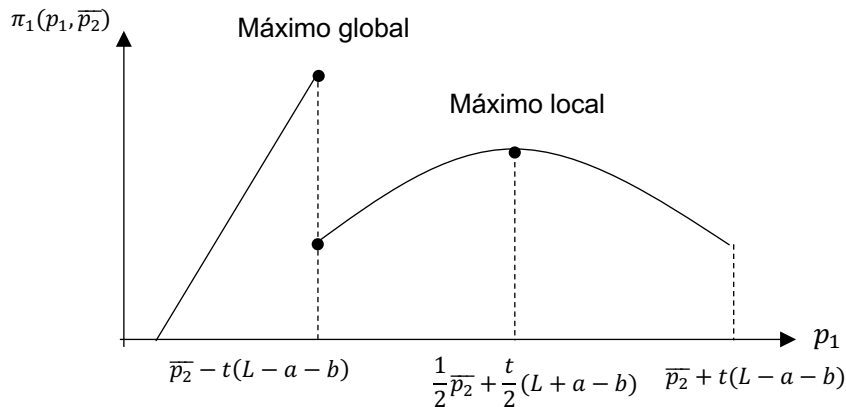
provoca un salto discreto en la función de demanda (por lo tanto, las funciones de demanda no son continuas), las funciones de beneficio no son continuas y no podemos resolver el problema de maximización para cada empresa. La empresa 2 no venderá nada si la empresa 1 baja infinitesimalmente el precio.

Tal y como podemos deducir a partir del gráfico, el fallo viene provocado por la distancia entre las empresas (cercanía o lejanía):

a) Si las empresas tienen una localización cercana entre sí:

Tal y como hemos visto, es fácil para una de las empresas (la 1, por ejemplo) bajar el precio lo suficiente para además de captar su parte del mercado captar la de la empresa 2, lo que se conoce como “el patio trasero” de la empresa competidora (es decir, los consumidores localizados desde la posición de la empresa 2 hasta el final de la calle) y con ello hacerse con todo el mercado.

La función de beneficios que se deriva en esta situación es la siguiente¹²:



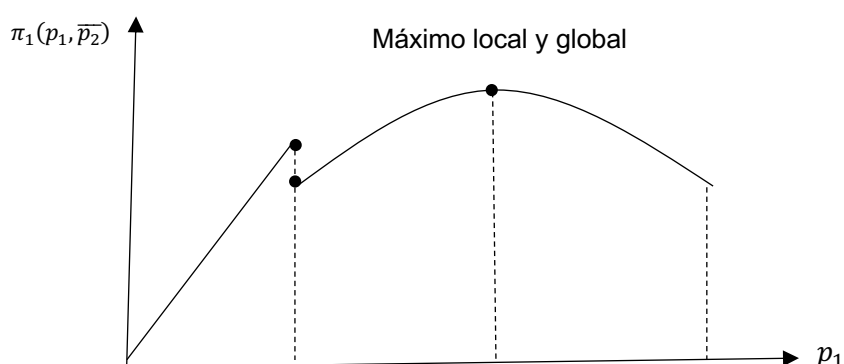
Fuente: Elaboración propia

La función de beneficios del gráfico viene diferenciada en dos zonas, cuando el modelo básico de Hotelling solo tiene en cuenta el tramo que forma la zona curva y con ello se incurre en el error de considerar lo que es solamente un máximo local, también como máximo global. De esta manera se obvia el incremento brusco de beneficio que sufre la función al cambiar de tramo.

¹² Basado en d'Aspremont et al "On Hotelling's Stability in competition" (1979) p.1145, donde el beneficio tiene la siguiente expresión: $\pi_1(p_1, p_2) = ap_1 + \frac{1}{2}p_1(L - a - b) + \frac{p_1 p_2}{2t} - \frac{p_1^2}{2t}$ si $|p_1 - p_2| \leq t(L - a - b)$; $\pi_1(p_1, p_2) = Lp_1$ si $p_1 < p_2 - t(L - a - b)$; $\pi_1(p_1, p_2) = 0$ si $p_1 > p_2 + t(L - a - b)$.

b) Si las empresas tienen una localización alejada entre sí:

El modelo de Hotelling se considera correcto cuando las empresas están lo suficientemente separadas ya que el problema de la confusión entre máximo local y global desaparece. En efecto, si las empresas están lo suficientemente separadas si una de las empresas quiere captar el “patio trasero” de la otra tiene que disminuir mucho el precio, tanto que podría ser inviable (llegar a estar por debajo de coste marginal) o positivo, pero demasiado bajo, siendo el potencial beneficio a obtener por la empresa que baja el precio inferior al que obtendría si el precio se mantuviese, así pues, la función de beneficio tendría la siguiente forma:



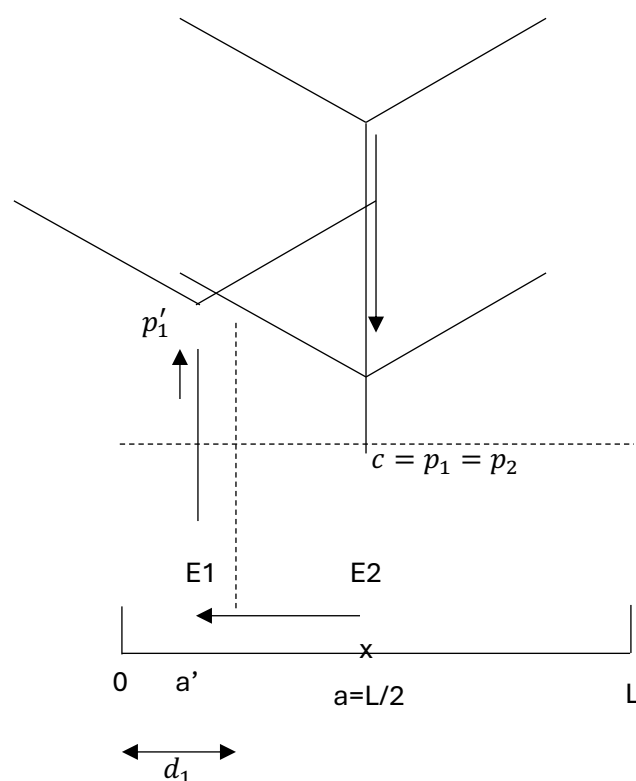
Fuente: Elaboración propia

En el gráfico podemos apreciar como en este caso el máximo local presente en el segundo tramo del gráfico también es máximo global esto es debido a que el aumento repentino que experimenta el beneficio de la empresa 1 (en este caso, por ejemplo) cuando se reduce el precio, y por tanto conquista el 100% de los consumidores del mercado, es menor y por ello se da la coincidencia de máximo global y local.

La distancia entre empresas es una variable que define la existencia o no de un problema de equilibrio en el modelo y es por ello que se trató de buscar una solución total al problema mediante modificaciones sobre el modelo original, que veremos más adelante.

2. Si suponemos que las empresas están localizadas justo en el centro del segmento (es decir, en $L/2$), en este caso no existe diferenciación de producto y cada empresa tiene incentivos a recortar el precio de la rival hasta que $p_1 = p_2 = c$. La crítica reside en que no se trata de un equilibrio en localizaciones ya que las empresas tienen incentivos individuales a desviarse de $L/2$ y fijar un precio

superior al coste marginal y obtener beneficios positivos. Antes de nada, ilustremos la situación gráficamente:



Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar en el gráfico anterior si ambas empresas se localizan justo en el centro, el consumidor no percibe diferenciación del producto, por lo tanto, ambas empresas compiten en un producto homogéneo y la propia competencia lleva a precios iguales a coste marginal y beneficios nulos. La empresa 1, por ejemplo, tiene incentivos a desviarse y localizarse en “ a' ” (siendo $a' < a$) y fijar un precio superior $p'_1 > p_1$ lo que la permite obtener beneficios positivos. Por ello, no existe equilibrio de Nash en localizaciones (ya que ambas empresas no tienen por qué necesariamente situarse en el mismo lugar) pero sí que existe equilibrio de Nash en precios ya que cada empresa tratará de maximizar su beneficio individualmente.

3.3 Modelo de Hotelling con costes (de transporte) cuadráticos

Para resolver el problema de la no-existencia de un equilibrio en localizaciones en el modelo con costes de transporte lineales, se debe considerar un modelo con costes de transporte cuadráticos. Las diferencias entre el modelo desarrollado en el apartado anterior y el que aquí se desarrolla es la localización de las empresas y la forma de la función de utilidad. En la sección anterior para derivar el equilibrio de Nash en precios (dadas las localizaciones) consideramos exógenamente máxima diferenciación. En este modelo permitimos que las empresas se localicen en el interior del segmento, así la empresa 1 se localizará en “a” y la empresa 2 se localizará en “b”. Por lo que respecta a la función de utilidad será:

$$U_{ij} = v - p_j - t(x_{ij})^2$$

Donde:

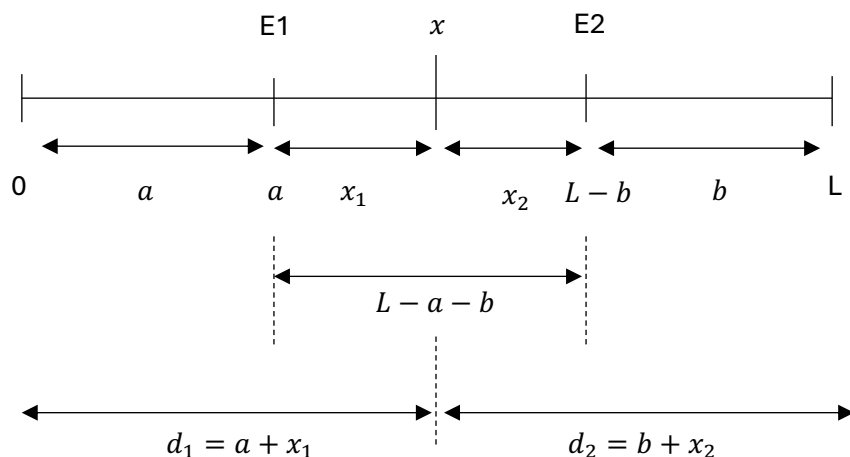
v : representa el precio de reserva del consumidor (máxima disposición a pagar)

p_j : precio del bien vendido por la empresa j

x_{ij} : distancia entre la localización del consumidor i y la localización de la empresa j en el segmento.

t : coste de transporte por unidad de distancia (en este caso cuadráticos).

A partir de ahora ya no vamos a suponer que las localizaciones son exógenas, sino que vamos a suponerlas endógenas. Como consecuencia de ello vamos a suponer que existen dos periodos: un primer periodo donde las empresas seleccionan la localización y un segundo periodo donde las empresas compiten en precios dada su localización. Para resolver el modelo hemos de hacerlo a través de inducción hacia atrás empezando por el segundo periodo.



Fuente: Elaboración propia

$$U_{x,1} = U_{x,2}$$

$$v - p_1 - t(x_1)^2 = v - p_2 - t(x_2)^2$$

$$p_1 - p_2 = t(x_2^2 - x_1^2) = t(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = t(L - a - b)(x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{p_1 - p_2}{t(L - a - b)}$$

$$x_1 + x_2 = L - a - b \rightarrow x_1 = L - a - b - x_2$$

$$x_2 - (L - a - b - x_2) = \frac{p_1 - p_2}{t(L - a - b)} \rightarrow 2x_2 = \frac{p_1 - p_2}{t(L - a - b)} + (L - a - b)$$

$$x_2 = \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t(L - a - b)}$$

$$x_1 = L - a - b - \left[\frac{L - a - b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t(L - a - b)} \right] = \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(L - a - b)}$$

$$d_1 = a + x_1 = a + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(L - a - b)}$$

$$d_2 = b + x_2 = b + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t(L - a - b)}$$

Interpretación de las funciones de demanda:

- Si $p_1 = p_2$

$$d_1(p_1, p_2) = a + \frac{L - a - b}{2}$$

Consumidores cautivos, a su izquierda

Mitad de los consumidores entre a y L-b

$$d_2(p_1, p_2) = b + \frac{L - a - b}{2}$$

Consumidores cautivos, a su derecha

Mitad de los consumidores entre a y L-b

- Si $p_1 \neq p_2$

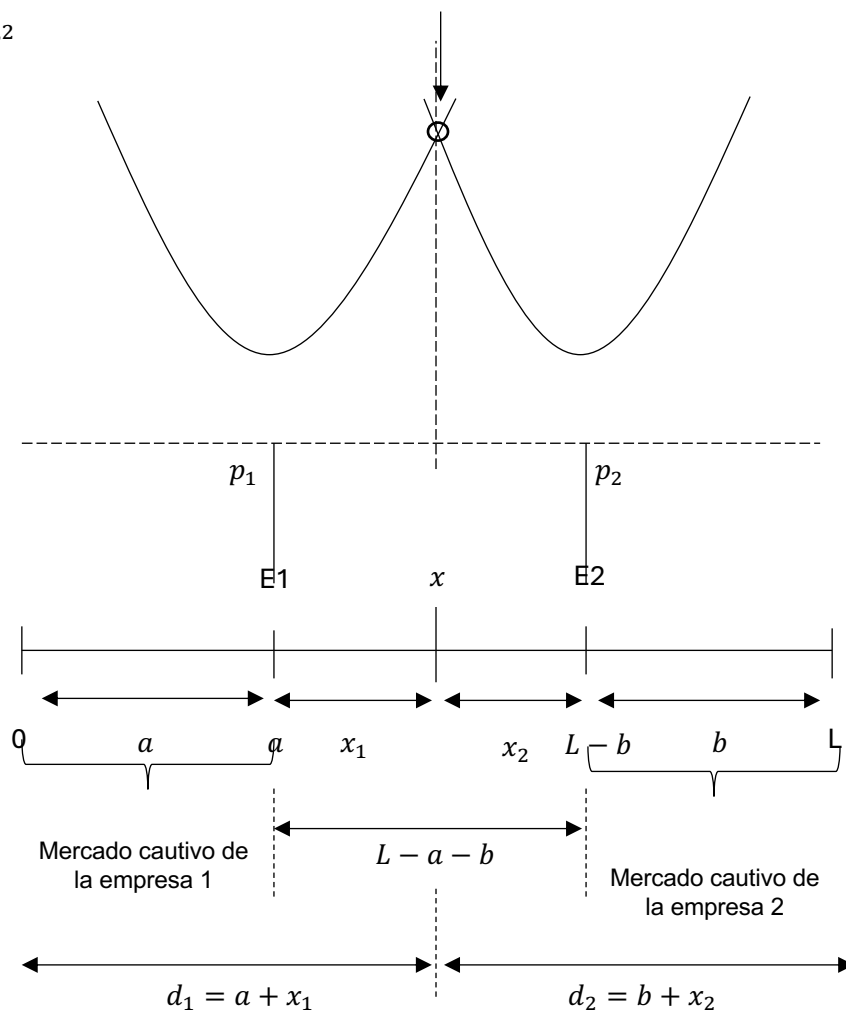
$$d_1 = a + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(L - a - b)}$$

$$d_2 = b + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t(L - a - b)}$$

Sensibilidad de la demanda frente a la diferencia de precios

Gráficamente:

$$U_{x,1} = U_{x,2}$$



Fuente: Elaboración propia

Encontramos las funciones de reacción:

Empresa 1

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= d_1(p_1 - c) = \left[a + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(L - a - b)} \right] \cdot (p_1 - c) = \\
 &= ap_1 + \frac{p_1(L - a - b)}{2} + \frac{p_1 p_2 - p_1^2}{2t(L - a - b)} - ca - \frac{c(L - a - b)}{2} - \frac{cp_2 - cp_1}{2t(L - a - b)} \\
 \frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} &= 0 \rightarrow a + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_2 - 2p_1}{2t(L - a - b)} + \frac{c}{2t(L - a - b)} \\
 &= a + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_2 - 2p_1 + c}{2t(L - a - b)} = 0 \\
 \frac{(2a + L - a - b)t(L - a - b)}{2t(L - a - b)} + \frac{p_2 - 2p_1 + c}{2t(L - a - b)} &= 0 \\
 \rightarrow (a + L - b)t(L - a - b) + p_2 - 2p_1 + c &= 0 \\
 p_1 &= \frac{(a + L - b)t(L - a - b) + p_2 + c}{2} \quad p_1 = \Psi_1(p_2)
 \end{aligned}$$

Empresa 2

$$\begin{aligned}
 \pi_2 &= d_2(p_2 - c) = \left[b + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t(L - a - b)} \right] \cdot (p_2 - c) = \\
 &= bp_2 + \frac{p_2(L - a - b)}{2} + \frac{p_1 p_2 - p_2^2}{2t(L - a - b)} - cb - \frac{c(L - a - b)}{2} - \frac{cp_1 - cp_2}{2t(L - a - b)} \\
 \frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} &= 0 \rightarrow b + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_1 - 2p_2}{2t(L - a - b)} + \frac{c}{2t(L - a - b)} \\
 &= b + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_1 - 2p_2 + c}{2t(L - a - b)} = 0 \\
 \frac{(2b + L - a - b)t(L - a - b)}{2t(L - a - b)} + \frac{p_1 - 2p_2 + c}{2t(L - a - b)} &= 0 \\
 \rightarrow (b + L - a)t(L - a - b) + p_1 - 2p_2 + c &= 0
 \end{aligned}$$

$$p_2 = \frac{(b + L - a)t(L - a - b) + p_1 + c}{2} \quad p_2 = \Psi_2(p_1)$$

(p_1^*, p_2^*)

$$p_1 = \frac{(a + L - b)t(L - a - b) + c}{2} + \frac{(b + L - a)t(L - a - b) + p_1 + c}{4} =$$

$$= \frac{t(L - a - b)}{2} \cdot \left[(a + L - b) + \frac{(b + L - a)}{2} \right] + \frac{p_1 + 3c}{4}$$

$$p_1 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = t(L - a - b) \cdot \left[\frac{2a + 2L - 2b + b + L - a}{4} \right] + \frac{3c}{4}$$

$$\frac{3}{4}p_1 = t(L - a - b) \cdot \left[\frac{a + 3L - b}{4} \right] + \frac{3c}{4} \rightarrow p_1 = t(L - a - b) \cdot \left[\frac{a + 3L - b}{3} \right] + c$$

$$p_1^* = t(L - a - b) \cdot \left[L + \frac{a - b}{3} \right] + c$$

$$p_2^* = \frac{(b + L - a)t(L - a - b) + \left[t(L - a - b) \cdot \left[L + \frac{a - b}{3} \right] + c \right] + c}{2} =$$

$$= t(L - a - b) \cdot \left[L + \frac{b - a}{3} \right] + c$$

Propiedades del equilibrio en precios:

- Si $a=b$, es decir, si las empresas están localizadas simétricamente entonces: $p^* = p_1^* = p_2^* = c + tL(L - 2a)$. Cuanto mayor es a menor es el precio de equilibrio. La intuición detrás de este resultado es que cuanto más cerca esté una empresa de la otra, menor es la diferenciación de producto, más intensa es la competencia y menores los precios de equilibrio.
- Si $a \neq b$, el equilibrio es asimétrico, los precios de las dos empresas son distintos. Aquella empresa con una localización más cercana al centro del segmento tiene un precio mayor. Dado que,

$$p_1^* - p_2^* = c + t(L - a - b) \left[L + \frac{a - b}{3} \right] - \left[c + t(L - a - b) \left[L + \frac{b - a}{3} \right] \right] =$$

$$= t(L - a - b) \left[\left(L + \frac{a - b}{3} \right) - \left(L + \frac{b - a}{3} \right) \right] = \frac{2}{3} t(L - a - b)(a - b)$$

Si la localización de la empresa 1 es más cercana al centro del segmento ($a > b$) $p_1 > p_2$. Por el contrario, si es la empresa 2 la que está localizada más cercana al centro del segmento ($a < b$) $p_1 < p_2$. La intuición es que para una localización dada del rival cuanto más centrada sea la localización de una empresa mayor es el número de consumidores que deben incurrir en un mayor coste de transporte para comprar al rival.

Obtención del equilibrio en localizaciones en el primer periodo (elección del producto por parte de las empresas):

Las formas reducidas de las funciones de beneficios de las empresas muestran que la decisión de localización de una empresa afecta tanto a la demanda como a los precios de las empresas:

$$\pi_1(a, b) = [p_1^*(a, b) - c]d_1[a, b, p_1^*(a, b), p_2^*(a, b)]$$

$$\pi_2(a, b) = [p_2^*(a, b) - c]d_2[a, b, p_1^*(a, b), p_2^*(a, b)]$$

En un equilibrio en localizaciones cada una de las empresas elige la localización que maximiza sus beneficios tomando como dada la localización del rival. Así la empresa 1 maximiza sus beneficios con respecto a “a”, tomando “b” como dada, y de la misma forma la empresa 2 maximiza su beneficio con respecto a “b” tomando “a” como dada.

Obtenemos el beneficio de cada empresa:

Empresa 1:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (p_1 - c)d_1 \\ &= \left[\left(t(L - a - b) \cdot \left[L + \frac{a - b}{3} \right] + c \right) - c \right] \\ &\quad \cdot \left(a + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(L - a - b)} \right)\end{aligned}$$

Pero dado que:

$$p_2 - p_1 = 2t(L - a - b) \left(\frac{b - a}{3} \right)$$

Si sustituimos, nos queda:

$$\pi_1 = \left[t(L - a - b) \cdot \left(L + \frac{a - b}{3} \right) \right] \left[a + \frac{L - a - b}{2} + \frac{\left(2t(L - a - b) \left(\frac{b - a}{3} \right) \right)}{2t(L - a - b)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[t(L - a - b) \cdot \left(L + \frac{a - b}{3} \right) \right] \left[\left(\frac{b - a}{3} \right) + \left(\frac{L - b + a}{2} \right) \right] = \\
&= \left[t(L - a - b) \cdot \left(\frac{3L + a - b}{3} \right) \right] \left[\frac{3L - b + a}{6} \right] = t(L - a - b) \frac{(3L - b + a)^2}{18}
\end{aligned}$$

Condición de primer orden (C.P.O):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = 0 &\rightarrow -t \frac{(3L - b + a)^2}{18} + t(L - a - b) \frac{2(3L - b + a)}{18} = \\
&= -\frac{t}{18} (3L - b + a) [(3L - b + a) - 2(L - a - b)] = \\
&= -\frac{t}{18} (3L - b + a)(L + b + 3a) < 0 \rightarrow \mathbf{a^* = 0}
\end{aligned}$$

Empresa 2:

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= \left[t(L - a - b) \cdot \left(L + \frac{b - a}{3} \right) \right] \left[b + \frac{L - a - b}{2} + \frac{\left(2t(L - a - b) \left(\frac{b - a}{3} \right) \right)}{2t(L - a - b)} \right] = \\
&= \left[t(L - a - b) \cdot \left(L + \frac{b - a}{3} \right) \right] \left[\left(\frac{b - a}{3} \right) + \left(\frac{L + b - a}{2} \right) \right] = \\
&= \left[t(L - a - b) \cdot \left(\frac{3L + b - a}{3} \right) \right] \left[\frac{3L + b - a}{6} \right] = t(L - a - b) \frac{(3L + b - a)^2}{18}
\end{aligned}$$

Condición de primer orden (C.P.O):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_2}{\partial a} = 0 &\rightarrow -t \frac{(3L + b - a)^2}{18} + t(L - a - b) \frac{2(3L + b - a)}{18} = \\
&= -\frac{t}{18} (3L + b - a) [(3L + b - a) - 2(L - a - b)] = \\
&= -\frac{t}{18} (3L + b - a)(L + 3b + a) < 0 \rightarrow \mathbf{b^* = 0} \Leftrightarrow \mathbf{L - b^* = L - 0 = L}
\end{aligned}$$

En el equilibrio de Nash existe máxima diferenciación, es decir ($a^* = 0, b^* = L$)

D'Aspremont et al (1979) muestran que, para costes de transporte cuadráticos, el equilibrio es tal que las dos empresas se sitúan en los dos extremos de la calle (máxima diferenciación). Cada empresa se sitúa lejos de su rival para no inducirla a fijar un precio bajo, y de este modo la competencia en precios se suaviza. Para demostrarlo, se puede hacer de tres formas: la forma algebraica (quizá un poco más compleja, que es la que hemos visto justo antes), una simplificación de la forma algebraica y la forma intuitiva. Veamos ahora la forma algebraica sintetizada: (todas las formas llevan a la misma solución, pero es instructivo ver cómo llegar a ella a través de diferentes métodos).

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que en equilibrio:

$$0 \leq a \leq L - b \leq L$$

A partir del teorema de la envolvente la empresa 1 maximiza con respecto al precio en el segundo periodo, por tanto: $\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0$. De esta forma, no tenemos más que atender al efecto directo de a sobre los beneficios (el efecto demanda) y el efecto indirecto a través del cambio en el precio de la empresa 2 (el efecto estratégico). Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial a} &= d_1 \frac{\partial p_1}{\partial a} (p_1^* - c) \left(\frac{\partial d_1}{\partial a} + \frac{\partial d_1}{\partial p_1} \frac{\partial p_1^*}{\partial a} + \frac{\partial d_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2^*}{\partial a} \right) = \\ &= \left[d_1 + (p_1 - c) \frac{\partial d_1}{\partial p_1} \right] \frac{\partial p_1}{\partial a} + (p_1^* - c) \left(\frac{\partial d_1}{\partial a} + \frac{\partial d_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2^*}{\partial a} \right) \\ &= (p_1^* - c) \left(\frac{\partial d_1}{\partial a} + \frac{\partial d_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2^*}{\partial a} \right) \end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial a} &= \frac{1}{2} + \frac{p_2^* - p_1^*}{2t(L - a - b)^2} = \frac{1}{2} + \frac{b - a}{3(L - a - b)} = \underbrace{\frac{3 - 5a - b}{6(L - a - b)}}_{> 0 \text{ si } a \leq 1/2} \text{ (efecto directo)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2^*}{\partial a} &= \underbrace{\left(\frac{1}{2t(L - a - b)} \right)}_{> 0} \underbrace{\left[t \left(-\frac{4}{3} + \frac{2a}{3} \right) \right]}_{< 0} = \underbrace{\frac{-2 + a}{3(L - a - b)}}_{< 0} \text{ (efecto estratégico)} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = (p_1^* - c) \left[\frac{3 - 5a - b}{6(L - a - b)} + \frac{-2 + a}{3(L - a - b)} \right] = (p_1^* - c) \left[\frac{-1 - b - 3a}{6(L - a - b)} \right]$$

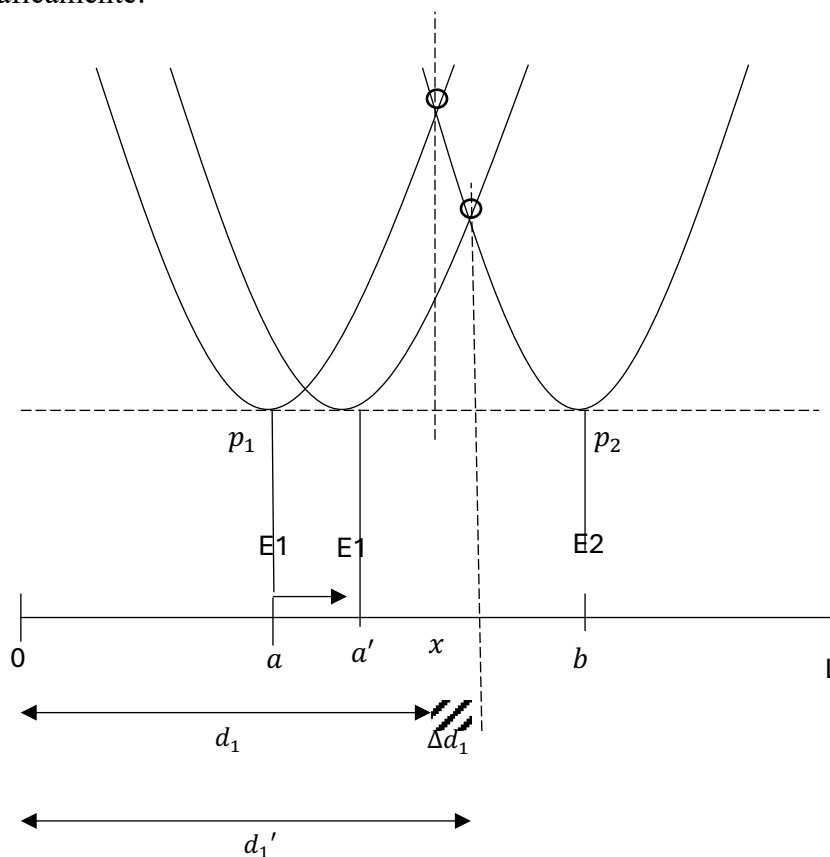
Si el margen $(p_1^* - c) > 0$ y $\frac{-1-b-3a}{6(L-a-b)} < 0$ entonces $\frac{\partial \pi_1}{\partial a} < 0$. Por lo tanto, la empresa 1 desea siempre moverse hacia la izquierda si es que está a la izquierda de la empresa 2, y la empresa 2 actuará de forma similar, es decir, deseará moverse hacia la derecha si es que está a la derecha de la empresa 1. Así pues, el equilibrio en localizaciones presenta diferenciación máxima. El uso del teorema de la envolvente pone de manifiesto el conflicto entre dos efectos: en primer lugar, el efecto directo que muestra que si “ a ” no es demasiado grande (en particular, no supera $1/2$), la empresa 1 querrá moverse hacia el centro para incrementar su cuota de mercado dada la estructura de precios. Esto es parte del resultado más general según el cual para unos precios dados, las dos empresas quieren

situarse en o cerca del centro. Sin embargo, la empresa 1 también sabe que el descenso en diferenciación de producto (en localización) como consecuencia de moverse hacia el centro fuerza a la empresa 2 a bajar su precio. Tal y como podemos apreciar a partir de los cálculos realizados, el efecto estratégico domina (es superior) al efecto directo es por ello que lo mejor que pueden hacer las empresas es alejarse lo más posible la una de la otra. Como conclusión podríamos decir que confirme “a” decrece, los beneficios se incrementan por ello el equilibrio de Nash en localizaciones es aquel en que ($a^*=0, b^*=L$) es decir, cuando se produce máxima diferenciación.

Analicemos ahora estos efectos de forma intuitiva:

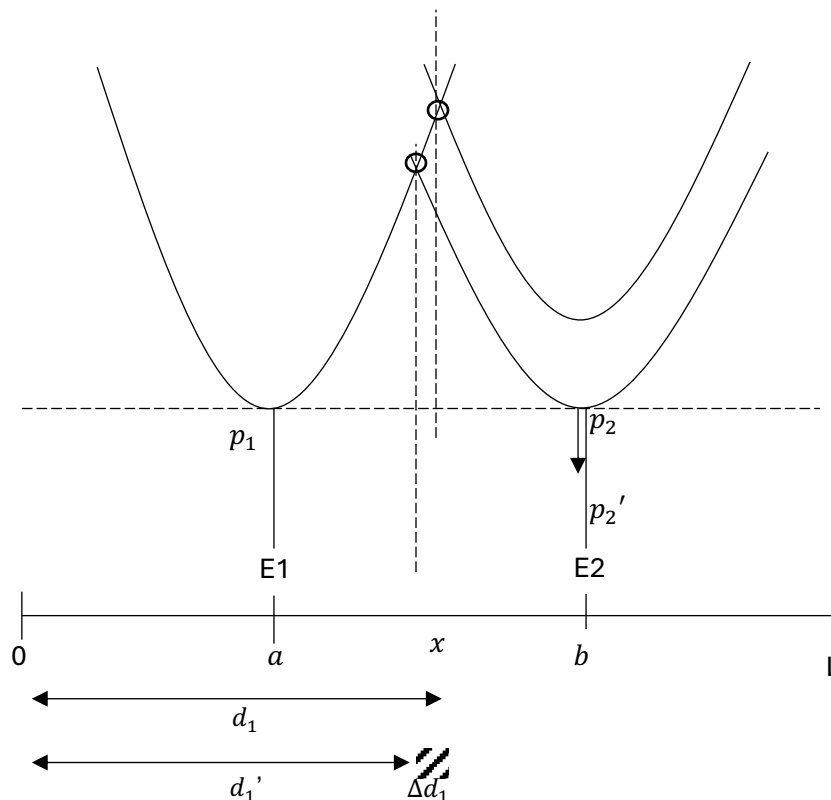
- a) Efecto directo (también llamado efecto demanda): para unos precios p_1 y p_2 y una localización de la empresa 2 dada, la empresa 1 tiene incentivos a moverse hacia el centro del segmento (de a hacia a') pues de este modo aumenta su demanda, a costa de la demanda de la 2 que se verá reducida. Mientras que cuando la empresa 1 está localizada en “a” su demanda es d_1 cuando se localiza en “a’” su demanda es $d'_1 > d_1$ y por tanto, dados los precios, obtiene mayores beneficios.

Gráficamente:

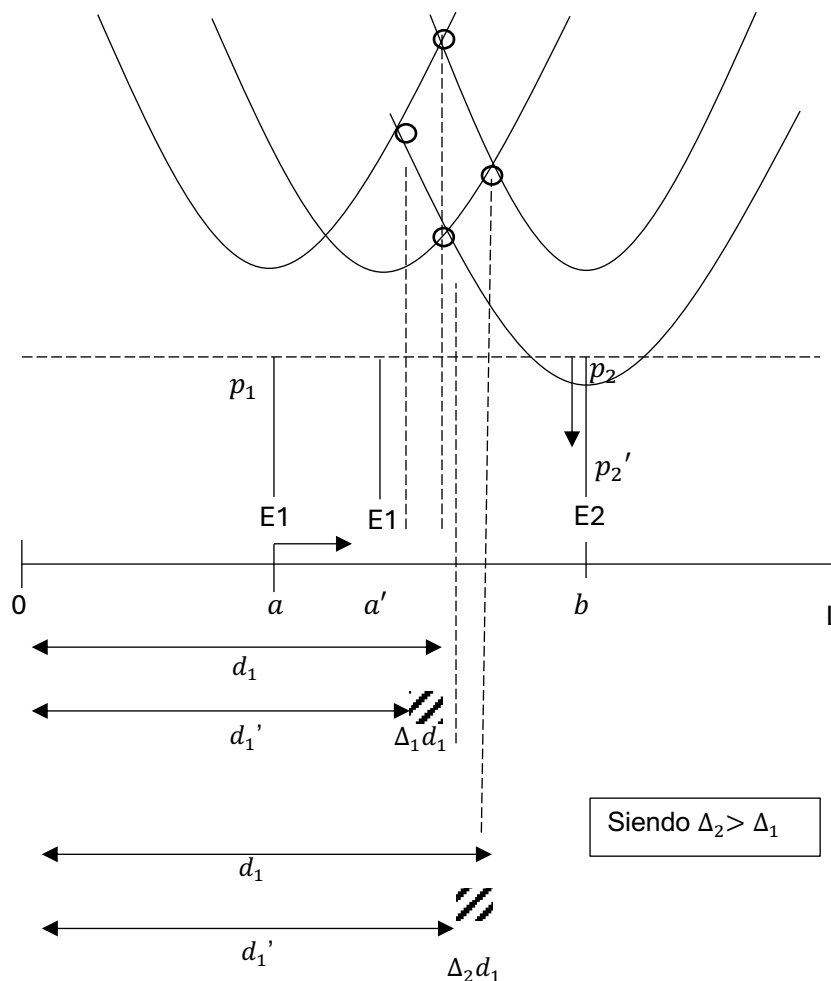


La respuesta de la empresa 2 será moverse a la izquierda del gráfico para conquistar mayor cuota de mercado, y así sucesivamente, hasta llegar a la situación de equilibrio para ambas en el centro del intervalo $[0, L]$. Por lo tanto, según este efecto, las empresas tenderán a juntarse entre sí, reduciendo de esta forma la diferenciación entre ellas y llevando a las empresas a una diferenciación mínima en sus productos sea la opción más beneficiosa para ellas.

- b) Efecto estratégico (también llamado efecto competencia o efecto precio): En este caso los precios de las empresas no vienen dados, sino que se determinan en función de las localizaciones de la primera etapa del juego (localización). Así, para cierta localización dada de la empresa 2, cuánto más se acerca una a su rival menor es la diferenciación, lo que produce un aumento de la competencia en precios.



Este aumento de competencia en precios se traduce directamente en la reducción de este para ser más competitivo, lo que tiene un efecto negativo sobre los beneficios de las dos empresas. Esta situación obligaría a las dos empresas a bajar los precios, por lo que la decisión a tomar será la de alejarse entre sí, para diferenciar sus productos y no basar toda su competencia en el precio. Es por ello, que el efecto estratégico lleva la máxima diferenciación entre las empresas, llevando a estas a localizarse en los extremos del intervalo $[0, L]$, en la situación en la que la competencia en precios sería más reducida, y en el punto en el que se daba el equilibrio de la solución con costes cuadráticos. Con costes de transporte cuadráticos el efecto que domina es el efecto estratégico. Podríamos representar la comparativa gráficamente:



Fuente: Elaboración propia

En este punto habría que destacar la importancia del bienestar social, que es la suma del excedente de los consumidores (EC) y el excedente de las empresas (EP) participantes en el mercado. En este mercado se presupone que cada consumidor adquiere únicamente una

unidad del bien, que el número de consumidores está normalizado a 1 y el valor máximo que un potencial consumidor está dispuesto a pagar se mide por su valor de reserva (v), donde v se supone que es lo suficientemente grande como para que a todos los consumidores les interese adquirir el bien sea cual sea su localización y por tanto sean cuales sean los costes de transporte y precios que deban asumir. Podemos definir el excedente del consumidor “ x ” (marginal) como:

$$v - t(x - a)^2 - p_1 \text{ si compra en la empresa 1}$$

$$v - t[x - (1 - b)]^2 - p_2 \text{ si compra en la empresa 2}$$

Por cada consumidor el vendedor gana:

$$p_1 - c \text{ empresa A}$$

$$p_2 - c \text{ empresa B}$$

De esta forma obtenemos el bienestar social que definirá este mercado (los precios son pura transferencia entre consumidores y productores):

$$v - t(x - a)^2 - p_1 + p_1 - c = v - t(x - a)^2 - c \text{ si compra en la empresa 1}$$

$$v - t[x - (1 - b)]^2 - p_2 + p_2 - c = v - t[x - (1 - b)]^2 - c \text{ si compra en la empresa 2}$$

Para encontrar el máximo social tenemos que derivar el consumidor indiferente:

$$v - t(x - a)^2 - c = v - t[x - (1 - b)]^2 - c$$

$$t(x - a)^2 = [x - (1 - b)]^2$$

$$x^2 + a^2 - 2ax = x^2 + (1 - b)^2 - 2(1 - b)x$$

$$a^2 - 2ax = (1 - b)^2 - 2(1 - b)x$$

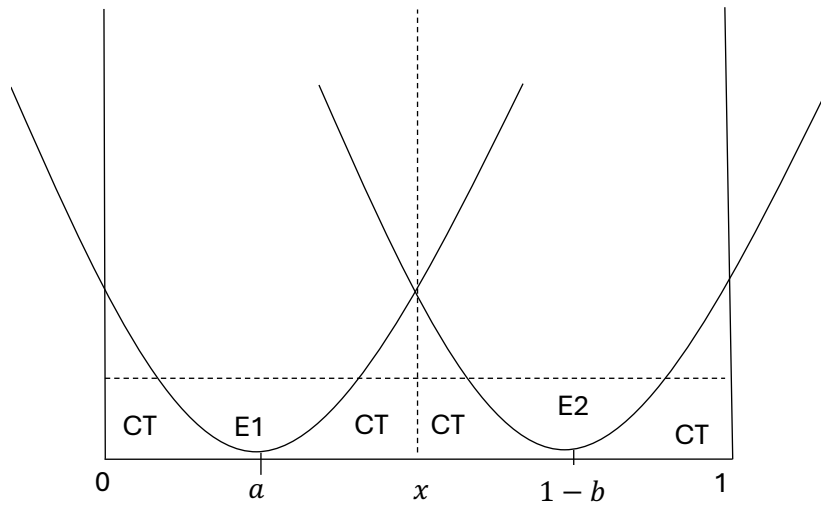
$$2x(1 - b - a) = (1 - b)^2 - a^2$$

$$x = \frac{(1 - b - a)(1 - b + a)}{2(1 - b - a)} = \frac{(1 - b + a)}{2}$$

La única manera de maximizar el bienestar social en este caso sería minimizando el coste en el que incurren los consumidores a la hora de trasladar el producto desde el punto de venta sus domicilios. Por tanto, el papel de un regular que desea maximizar el bienestar

social sería encontrar las localizaciones que minimicen los costes de transporte, ya que como hemos comprobado es la única variable cuya modificación afecta directamente al bienestar social

Para simplificar cálculos, vamos a suponer que $L=1$ y la ciudad lineal está descrita de la siguiente forma gráfica:



Fuente: Elaboración propia

Donde CT representa los costes de transporte.

$$\begin{aligned}
 & \min_{a,b} \int_0^a t(a-z)^2 dz + \int_a^{x=\frac{1-b+a}{2}} t(z-a)^2 dz + \int_{x=\frac{1-b+a}{2}}^{1-b} t[(1-b)-z]^2 \\
 & \quad + \int_{1-b}^1 t[z-(1-b)]^2 dz = \\
 & = -\frac{(a-z)^3}{3} \Big|_0^a + \frac{(z-a)^3}{3} \Big|_a^{\frac{1-b+a}{2}} - \frac{(1-b-z)^3}{3} \Big|_{\frac{1-b+a}{2}}^{1-b} + \frac{(z-(1-b))^3}{3} \Big|_{1-b}^1 = \\
 & = \frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1-b-a}{2} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{1-b-a}{2} \right)^3 + \frac{b^3}{3}
 \end{aligned}$$

Condición de primer orden (C.P.O):

$$\frac{\partial}{\partial a} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{a^3}{3} + \frac{(1-b-a)^3}{12} + \frac{b^3}{3} \right] = 4a^2 - (1-a-b)^2 = 0 \quad (A)$$

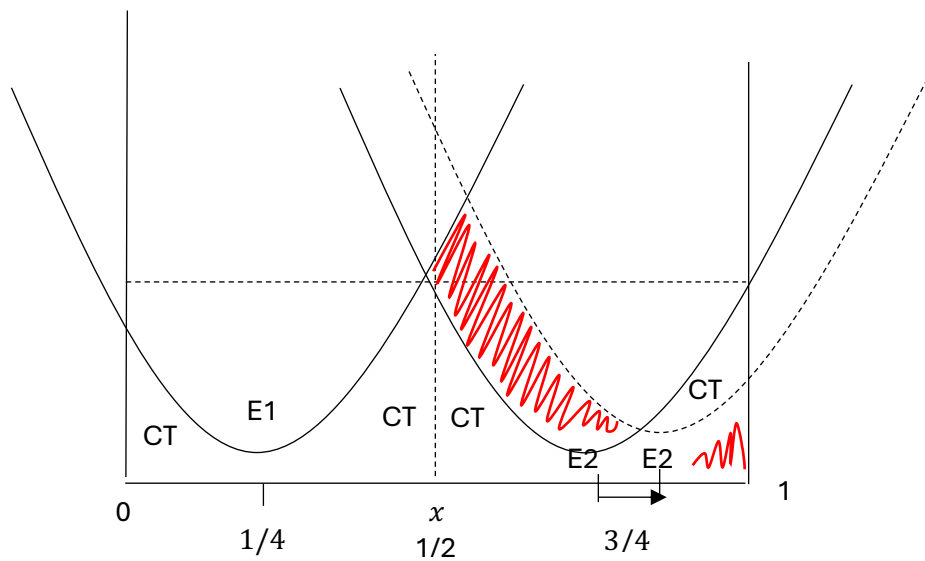
$$\frac{\partial}{\partial b} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{b^3}{3} + \frac{(1-b-a)^3}{12} + \frac{a^3}{3} \right] = 4b^2 - (1-a-b)^2 = 0 \quad (B)$$

$$(A) - (B) = 4a^2 - 4b^2 = 0 \rightarrow a = b$$

$$4a^2 - (1-a-a)^2 = 0 \rightarrow a^* = \frac{1}{4}; (1-b)^* = \frac{3}{4}$$

Dada la simetría del problema, el planificador social elige situar las dos empresas equidistantes a cada lado del centro del segmento, de forma que, para precios iguales, una empresa sirva bien a la mitad derecha o bien a la mitad izquierda del mercado. De esta forma, la localización que minimiza el coste de transporte en un segmento del mercado es el centro de este segmento cuando la densidad de los consumidores es uniforme. Así, las localizaciones socialmente óptimas son 1/4 y 3/4. En este ejemplo, el resultado de mercado (privado) lleva, socialmente, a demasiada diferenciación de productos.

Como podemos comprobar en el siguiente gráfico, cualquier localización distinta a la que maximiza el bienestar social genera aumentos considerables de los costes de transporte para los consumidores, y por tanto no maximiza el bienestar social. Para ilustrar esto en el siguiente gráfico se ha desplazado una de las localizaciones elegidas por el regulador.



Fuente: Elaboración propia

La zona sombreada supondría los nuevos costes de transporte a asumir por los ciudadanos de la ciudad lineal, que son claramente superiores a los que se dan en la situación de equilibrio para lograr el bienestar social.

Del cálculo que hemos realizado hemos determinado que solo existen unas localizaciones específicas que maximizan el bienestar para cada uno de los mercados. Podemos establecer una regla general que sirva para encontrar de manera sistemática las localizaciones que maximizan el bienestar desde el punto de vista del regulador para mercados con “n” empresas. La regla es la siguiente: una de las empresas siempre está localizada en el punto $\frac{1}{2n}$, donde “n” es el número de empresas que operan en el mercado, de forma que el total de empresas se localizarán en los puntos: $\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2n} + \frac{2}{n}, \dots$ sucesivamente. Para ver un ejemplo supongamos que un mercado está formado por 5 empresas (n=5). Las localizaciones eficientes (desde el punto de vista del regulador) serán:

$$\frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}; \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}; \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10}; \frac{5}{10} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}; \frac{7}{10} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$$

Es importante, no obstante, ver la diferencia que existe entre las localizaciones de equilibrio y las localizaciones eficientes desde el punto de vista del bienestar social. Mientras que en las primeras se buscan localizaciones que aporten a las empresas que operan en el mercado una mayor demanda y mayor beneficio (sin que ninguna de ellas tenga incentivos a localizarse en otro lugar) en el caso del regular se busca que el bienestar social sea el mayor posible, es decir, lo que quiere el regulador es hallar unas localizaciones que supongan unos menores costes de transporte a los individuos.

Capítulo IV

Conclusiones

"El hecho de haber estudiado Economía, con el paso del tiempo, me he podido dar cuenta que la microeconomía está muy vinculada no sólo con el uso del álgebra y el cálculo, sino también por la búsqueda de los puntos de equilibrio en el mercado o la exploración del comportamiento de los diferentes agentes económicos.

A lo largo de la carrera, me di cuenta de que, por temas de tiempo, algunos modelos se quedaban en la superficie y no podíamos entrar en demasiado detalle sobre ellos. Entonces fue cuando me fijé en un modelo que me pareció interesante, el de Hotelling. No obstante, algunas de las principales dificultades con las que me he encontrado durante la realización del TFG han sido: entender cómo los autores de varios teoremas gestionan las hipótesis con las cuales trabajan y saber trasladar de forma clara y entendedora la idea de este modelo mostrando detalles más técnicos"

He analizado en profundidad el modelo de Hotelling, desde su formulación original hasta sus principales críticas y extensiones. Esta exploración ha permitido comprender de forma detallada cómo la localización espacial influye en la competencia entre empresas y cómo las decisiones estratégicas sobre precios y posicionamiento geográfico configuran el comportamiento del mercado.

En primer lugar, el modelo básico con costes de transporte lineales revela una importante paradoja: el principio de mínima diferenciación. Según este principio, las empresas tienden a concentrarse en el centro del mercado para captar al mayor número de consumidores. Esta aglomeración maximiza la cercanía al consumidor promedio, pero reduce la diferenciación del producto, lo que puede derivar en una competencia de precios intensa que reduzca los beneficios a cero. Esto muestra cómo las fuerzas competitivas pueden conducir a configuraciones de equilibrio que no necesariamente son eficientes desde el punto de vista del bienestar social.

Sin embargo, esta conclusión fue posteriormente corregida por autores como d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse, quienes demostraron que, debido a la

discontinuidad de las funciones de beneficio, no siempre existe un equilibrio en localización bajo los supuestos del modelo lineal.

En segundo lugar, al introducir costes de transporte cuadráticos, el modelo muestra la existencia de un equilibrio en localización lo que corrige en parte la ineficiencia observada en el caso lineal, generando una mayor dispersión espacial y la diferenciación del producto.

Bajo esta formulación, las empresas tienden a diferenciarse al máximo ubicándose en los extremos del mercado para suavizar la competencia en precios. Este resultado pone de manifiesto la tensión entre dos efectos contrapuestos: el efecto directo (las empresas desean acercarse al centro para captar más demanda) y el efecto estratégico (alejarse para evitar una guerra de precios). En este contexto, el efecto estratégico termina prevaleciendo, dando lugar a la máxima diferenciación como equilibrio de Nash. Así, la forma específica de los costes de transporte cuadráticos no solo cambia los equilibrios, sino que también transforma la naturaleza de la competencia, afectando tanto los incentivos de las empresas como el resultado para los consumidores.

Por otra parte, el análisis del bienestar social ha mostrado que las localizaciones que maximizan los beneficios privados no coinciden con aquellas que optimizan el bienestar colectivo. Desde la perspectiva de un regulador, las posiciones eficientes son aquellas que minimizan los costes de transporte para los consumidores, lo que lleva a una configuración de localizaciones intermedias, equidistantes entre sí y del centro del mercado. Esta divergencia entre el equilibrio de mercado y el óptimo social subraya la importancia del diseño de políticas públicas que puedan corregir los fallos de mercado derivados de la competencia espacial.

Un breve resumen para finalizar es que el modelo de Hotelling, a pesar de sus limitaciones, en particular, suponer una única dimensión espacial y una distribución uniforme de los consumidores, puede alejarse de los contextos reales donde existen múltiples factores que condicionan la localización, como la geografía, la tecnología o la regulación y que no solo compiten en localización, sino también en múltiples atributos del producto y canales de distribución.

Este modelo en sus diversas variantes proporciona una herramienta fundamental para comprender los fundamentos de la competencia en localización y diferenciación de productos.

Sigue siendo una referencia clave en la teoría económica y una base sólida para el estudio de mercados reales en los que el espacio, el precio y las preferencias del consumidor interactúan de forma compleja y estratégica.

Lo que he aprendido a lo largo de este trabajo es que este análisis no solo me ha permitido comprender un modelo esencial en teoría microeconómica, sino también valorar la importancia de incorporar dimensiones espaciales en el estudio de mercados reales.

Líneas futuras de investigación:

Como posible ampliación de este trabajo, una línea natural sería el estudio del modelo de Salop, una extensión del modelo de Hotelling que introduce una disposición circular del mercado. Esta variante muestra superar algunas limitaciones del modelo lineal, como los efectos de borde, y permite analizar situaciones más realistas con múltiples empresas en competencia y decisiones simultáneas de localización y precios.

Capítulo V

Bibliografía

Pérez, J., Jimeno, J. L., & Cerdà, E. (2013). *Teoría de juegos* (2ª ed.).

Hotelling, H. (1929). Stability in competition. *The Economic Journal*, 39(153), 41–57.

Eaton, B. C., & Tweedle, J. (2012). A Hotelling style model of spatial competition for a convenience good. *The Annals of Regional Science*, 49(2), 447–469.

Osborne, M. J., & Pitchik, C. (1987). Equilibrium in Hotelling's model of spatial competition. *Econometrica*, 55(4), 911–922

Eaton, B. C., & Lipsey, R. G. (1975). The principle of minimum differentiation reconsidered. *Review of Economic Studies*, 42(1), 27–49

Birkin, M., & Wilson, A. G. (1986). Industrial location models 2: Weber, Palander, Hotelling, and extensions within a new framework. *Environment and Planning A*, 18(3), 293–313.

Williams, H. C. W. L., & Senior, M. L. (1977). A retail location model with overlapping market areas: Hotelling's problem revisited. *Urban Studies*, 14(2), 177–183

Webers, H. M. (1996). The location model with reservation prices. FEW Research Memorandum, 718, Tilburg University

Hayashi, S., & Tsuge, N. (2019). Necessary and sufficient condition for equilibrium of the Hotelling model.

Pinto, A. A., & Parreira, T. (2014). Optimal localization of firms in Hotelling networks. In Springer Proceedings in Mathematics & Statistics (pp. 17–22)

Belleflamme, P., & Peitz, M. (2015). *Industrial Organization: Markets and Strategies* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Perloff, J. M. (2021). *Microeconomics* (8th ed.). Pearson.

Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2018). *Microeconomía* (9.^a ed.). Pearson.

Tirole, J. (1988). *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press.

Varian, H. R. (2010). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach* (8th ed.). W.W. Norton & Company.

“On Hotelling’s Stability in competition” (1979) *Econometrica.*, Vol. 47, N°5, pp. 1145-1150.