



Treball final de grau  
GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques  
Universitat de Barcelona

---

MODELS DISCRETS I  
CONTINUS DE MERCATS  
FINANCERS

---

Arnau Moro Lozano

Director: Dr. Josep Vives

Realitzat a: Departament de Probabilitat,  
Lògica i Estadística

Barcelona, 17 de gener de 2016

## **Abstract**

I decided to do this project after attending the subjects of Modelling and Stochastic Processes; the main objective was to relate the two subjects and deep into them. I have reached it dealing with the issue of Financial Mathematics. On the one hand, I have introduced the topic of financial market in discrete time using previous concepts such as that of martingale and be able to develop the model of Cox-Ross-Rubinstein. On the other hand, to deal with the financial market in continuous time and relate the two subjects, I have introduced the stochastic processes and I have achieved to detail the Black-Scholes model.

## **Resum**

Vaig decidir fer aquest treball després d'haver cursat les assignatures de Modelització i Processos Estocàstics; m'interessava sobretot relacionar les dues assignatures i aprofundir més en elles. Per aconseguir-ho he tractat el tema de la Matemàtica Financera. Primerament, he introduït el tema del mercat financer a temps discret a partir de conceptes previs com el de martingala i aconseguir així desenvolupar el model Cox-Ross-Rubinstein. En segon lloc, per poder tractar el tema del mercat financer a temps continu i relacionar les dues assignatures, he introduït els processos estocàstics i he aconseguit detallar el model Black-Scholes.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Introducció als mercats financers</b>	<b>6</b>
2.1	Introducció d'alguns conceptes previs . . . . .	6
2.1.1	Acció . . . . .	6
2.1.2	Futur . . . . .	6
2.1.3	Opció . . . . .	6
2.2	Història dels mercats de futurs . . . . .	9
2.3	Història dels mercats d'opcions . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Mercats financers a temps discret</b>	<b>11</b>
3.1	Martingales . . . . .	11
3.2	Principi de no arbitratge . . . . .	15
3.3	Viabilitat i completesa d'un mercat financer . . . . .	20
3.3.1	Primer teorema fonamental de les finances . . . . .	20
3.3.2	Segon teorema fonamental de les finances . . . . .	24
3.4	Fórmula paritat Call-Put . . . . .	28
3.5	El model de Cox-Ross-Rubinstein . . . . .	30
3.5.1	Viabilitat del model CRR . . . . .	31
3.5.2	Completesa del model CRR . . . . .	32
3.5.3	Valoració d'opcions europees . . . . .	33
3.5.4	Cobertura d'opcions europees . . . . .	35
3.5.5	Exemple del model CRR . . . . .	35
3.5.6	Programa en Mathematica per calcular el Call i Put d'un model Cox-Ross-Rubinstein . . . . .	38

<b>4</b>	<b>Mercats financers a temps continu</b>	<b>39</b>
4.1	Processos estocàstics . . . . .	39
4.2	Moviment Brownià o procés de Wiener . . . . .	40
4.3	Integració estocàstica . . . . .	41
4.4	La fórmula d'Itô . . . . .	44
4.5	El teorema de Girsanov . . . . .	45
4.6	Equacions diferencials estocàstiques en el sentit d'Itô . . . . .	47
4.7	Fórmula de Black-Scholes . . . . .	48
4.7.1	Estratègies autofinançades . . . . .	49
4.7.2	Valoració i cobertura en el model Black-Scholes . . . . .	50
4.7.3	Preu i cobertura d'una opció de compra. Fórmula de Black-Scholes . . . . .	52
4.7.4	Exemple del model Black-Scholes . . . . .	55
4.7.5	Programa en C per calcular el Call en un model Black-Scholes	55
<b>5</b>	<b>El model Black-Scholes com a pas al límit de CRR</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>60</b>

# 1 Introducció

Un dels temes que més ha interessat a la majoria de la gent han sigut els diners. Per això va començar un ascens de l'estudi de la teoria econòmica i es va implantar la teoria matemàtica dins la teoria econòmica. Així en les últimes dècades va aparèixer i es va desenvolupar el que anomenem "Matemàtica Financera".

El terme "Matemàtica Financera" té diferents significats per a diferents persones, però generalment es relaciona la Matemàtica Financera exclusivament amb la tècnica de càlculs financers com, per exemple, el càlcul d'interessos d'inversió i els crèdits. Però, la aplicació de la Matemàtica en la esfera de les Finances és molt més amplia que això.

En aquest context de la Matemàtica Financera cal recordar les teories de I. Fisher (1930) i de F. Modigliani - M. Miller (1958-1961) que estudien com invertir de manera òptima. Gran part de les teories clàssiques van ser creades sota la influència de:

- CAPM (Capital Asset Price Model) - el model de la formació de preus dels actius bàsics de W. Sharpe (1964)
- APM (Arbitrage Pricing Model) - la teoria d'arbitratge de S. Ross (1976).

Aquestes teories descriuen la rendibilitat dels actius depenent de l'estat del mercat.

A principis del segle XX existien models per calcular el valor dels derivats financers, però no eran molt precisos i això provocava un enorme error entre el valor calculat pel model i el valor real negociat en el mercat. L'equació de Black-Scholes va ser una gran innovació financera. El 1969 Black-Scholes ja havien creat la fórmula del preu "sense arbitratge" que s'ha de pagar pel dret de compra o venda d'un derivat financer depenent del temps pactat prèviament.

Primerament l'objectiu principal que tenim és treballar temes relacionats amb les assignatures de Modelització i de Processos Estocàstics, ja que són dos de les que he trobat més profitoses i interessants. El que buscarem sera relacionar-les i poder profunditzar en els diversos temes.

En aquest treball el que veurem i el que seran els nostres objectius és tenir una visió amplia de la Matemàtica Financera, en concret del mercat financer a temps discret, començant per conceptes previs de martingales per poder arribar a desenvolupar el model Cox-Ross-Rubinstein, i del mercat financer a temps continu començant per conceptes previs de processos estocàstics per acabar explicant el model de Black-Scholes.

## **2 Introducció als mercats financers**

### **2.1 Introducció d'alguns conceptes previs**

#### **2.1.1 Acció**

Una acció és un títol de propietat d'una part del capital d'una empresa. El tipus d'empreses que tenen el seu capital representat per accions s'anomenen Societats Anònimes.

La possessió d'una acció dóna drets polítics i econòmics. Els drets polítics són aquells que permeten influir en l'empresa. Els drets econòmics són bàsicament la percepció de dividends i el dret a rebre part del patrimoni de la societat.

#### **2.1.2 Futur**

Un contracte de futur és un contracte estàndard entre dues parts per negociar en una data futura un actiu financer, però especificant-ne en la data present el preu al qual serà negociat. Al seu torn, els contractes de futur són negociats en un mercat de futurs mitjançant una cambra de compensació. La part que es compromet a comprar l'actiu subjacent en el futur se li diu que té una posició llarga, i la part que es compromet a vendre l'actiu en el futur se li diu que té una posició curta. El comprador espera que el preu de l'actiu augmenti, mentre que el venedor espera que el preu baixi. S'ha de tenir en compte que el contracte no costa res en el moment de la seva contractació.

#### **2.1.3 Opció**

Una opció és un contracte que dóna dret a vendre o a comprar un actiu subjacent, com poden ser accions, bons..., a un preu determinat, que anomenarem preu d'exercici, en una data prèviament establerta, que els economistes anomenen venciment i pel qual s'ha de pagar una quantitat o prima en el moment de la seva adquisició. El comprador d'una opció adquirirà o vendrà l'actiu subjacent només si el beneficia,

ja que té el dret a fer-ho però no està obligat, així que si no l'exerceix tan sols perdrà la prima que va pagar per comprar el dret. De forma contrària, el venedor de l'opció a canvi de rebre la prima, està obligat a realitzar allò que decideixi el comprador. Hi ha dos tipus d'opcions:

- Opció de compra (CALL)

- Comprador d'una opció de compra.

Té el dret, mai l'obligació, de comprar un actiu financer al preu d'exercici en una data de venciment, a canvi del pagament d'una prima, que és el preu de l'opció. Aquest preu d'exercici estarà al voltant del preu de l'acció més les perspectives de creixement, però sempre agafant com a referència el preu actual del valor subjacent. Especulativament, el comprador d'una opció de compra té una perspectiva alcista. A més el comprador de la CALL només exercirà el seu dret quan el preu de l'actiu subjacent sigui superior al preu d'exercici.

- Venedor d'una opció de compra.

Està obligat a vendre l'actiu subjacent al preu d'exercici establert quan ho decideixi el comprador, a canvi del cobrament de la prima. El venedor d'una opció de compra té la perspectiva no alcista, espera que el valor de l'actiu subjacent disminueixi però no molt, perquè si no compraria una opció de venda.

- Opció de venda (PUT)

- Comprador d'una opció de venda.

Té el dret, mai l'obligació, de vendre un actiu financer al preu d'exercici en la data de venciment, a canvi del pagament d'una prima. A nivell especulatiu, és una estratègia baixista, espera que els preus baixin perquè així guanyarà.

- Venedor d'una opció de venda.

Està obligat a comprar l'actiu subjacent al preu d'exercici establert quan ho decideixi el comprador de la PUT, a canvi del cobrament de la prima.

Té una estratègia no baixista, pensa que el preu augmetarà però no gaire, perque sino seria millor comprar una CALL.

## 2.2 Història dels mercats de futurs

Els orígens dels mercats de futurs es remonten a l'Edad Mitjana. Van ser creats per satisfer les demandes dels agricultors i comerciants. Considerem la posició d'un agricultor en el mes d'abril de un cert any. Conrearà al juny i desconeix el preu al que se li pagarà la collita. En èpoques de poca collita obtindrà un preu força alt, en canvi en anys de abundància, l'agricultor vendrà a preus baixos. Així l'agricultor i la seva família estaran exposats a una situació d'alt risc.

Considerem ara un empresari que necessiti comprar cereal de manera habitual, també estarà exposat al ric del preu del cereal. Alguns anys, pot ser que l'exces de oferta aportí preus favorables, en canvi la falta pot generar preus desorbitats.

Per tant, veiem que és normal que l'empresa i el agricultor és trobin al abril per parlar dels preus, és a dir, que negociïn un contracte de futurs, així eliminar el possible risc que puguin tenir les dues bandes.

Els mercats apareixen al segle XIX als Estats Units.

El Chicago Board of Trade (CBQT) va ser fundat al 1848 per servir de pont entre agricultors i comerciants. La seva feina va ser principalment estandarditzar les quantitats i qualitats dels cereals que es comercialitzaven. Als pocs anys es va fer el primer contracte de futurs. Els especuladors ràpidament es van interessar en aquest contracte i van descobrir que la seva negociació era una alternativa atractiva. El CBQT ofereix avui en dia contractes de futurs per a molts actius diversos.

## 2.3 Història dels mercats d'opcions

Al segle XVII a Holanda es varen començar a negociar opcions (de compra i venda) de bulbs de tulipa, amb la diferència respecte els futurs que el comprador de l'opció té un dret però no pas un deure. El 1636 es van establir mercats per a la venda de tulipes a la borsa d'Amsterdam entre d'altres ciutats. També va començar als Estats Units una mica més tard cap al segle XVIII. Als seus inicis no van tenir una bona reputació degut a pràctiques fraudulentas. Una d'elles consistia en regalar a agents opcions sobre accions de diverses empreses, d'aquesta manera se'ls va incentivar a recomanar la compra d'aquestes accions als seus clients.

Un salt qualitatiu absolutament fonamental en el mercat d'opcions financeres va ser quan els americans F. Black i M. Scholes van proposar el 1973 un mètode racional per a calcular la prima de les opcions. Scholes va rebre, juntament amb Merton, el 1997 el premi Nobel d'Economia per aquest descobriment. Black va morir al 1995. La conclusió d'aquest mètode és l'anomenada fórmula de Black-Scholes, d'ús constant als mercats d'opcions, als bancs, etc.

## 3 Mercats financers a temps discret

### 3.1 Martingales

Sigui  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espai de probabilitats finit on

- $\Omega$  és l'espai d'estats amb  $\text{Card}(\Omega) < \infty$ .
- $\mathcal{F}$  és una  $\sigma$ -àlgebra.
- $\mathbb{P}$  una probabilitat tal que  $\forall \omega \in \Omega, P(\omega) > 0$ .

Així podem definir el que és una filtració.

**Definició 3.1** Una filtració associada a un espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  és una successió de  $\sigma$ -àlgebres  $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{T}\}$ , on  $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, N\}$  tals que

- $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{T}$

Un espai de probabilitat amb una filtració associada  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  s'anomena espai de probabilitat filtrat.

**Definició 3.2** Es diu que un procés estocàstic  $X$  definit sobre un espai de probabilitat filtrat és adaptat si per a cada  $n \in \mathbb{T}$ ,  $X_n$  és  $\mathcal{F}_n$ -mesurable.

**Definició 3.3** Un procés  $X$  es diu que és previsible si  $X_0$  és  $\mathcal{F}_0$ -mesurable i  $X_n$  és  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable  $\forall n \in \mathbb{T}^*$ , on  $\mathbb{T}^* = \mathbb{T} - \{0\}$ .

**Definició 3.4** Es diu que un procés  $M := \{M_n, n \in \mathbb{T}\}$  és una martingala respecte una filtració  $\mathbb{F}$  si

- i)  $M$  és un procés adaptat a  $\mathbb{F}$ .
- ii)  $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$  per a tot  $n \in \mathbb{T}$ .

iii)  $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$ , q.s.,  $\forall n \in \mathbb{T}^*$ .

**Observació 3.5** La tercera propietat es pot escriure com

$$\mathbb{E}[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0, \text{ q.s., } \forall n \in \mathbb{T}^*.$$

**Definició 3.6** Es diu que un procés  $M$  és una supermartingala si es compleixen les propietats (i) i (ii) de la definició anterior i

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] \leq M_{n-1}, \text{ q.s., } \forall n \in \mathbb{T}^*.$$

**Definició 3.7** Es diu que un procés  $M$  és una submartingala si es compleixen les propietats (i) i (ii) de la definició anterior i

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq M_{n-1}, \text{ q.s., } \forall n \in \mathbb{T}^*.$$

**Propietats:**

1. *Propietat de la torre:* Donades dues  $\sigma$ -àlgebres  $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+m}$  tenim que:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_u|\mathcal{F}_{n+m})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_u|\mathcal{F}_n).$$

2.  $M$  és una martingala si i només si per a tot  $j \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}(M_{n+j}|\mathcal{F}_n) = M_n.$$

*Demostració:* Aixó es veu immediatament aplicant recursivament la igualtat

$$\mathbb{E}(M_{n+j}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+j}|\mathcal{F}_{n+j-1})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+j-1}|\mathcal{F}_n).$$

3. Si  $M$  és una martingala,  $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0)$ ,  $\forall n \in \mathbb{T}$ . En el cas de supermartingales es té  $\mathbb{E}(M_n) \leq \mathbb{E}(M_{n-1})$  i en el cas de submartingales  $\mathbb{E}(M_n) \geq \mathbb{E}(M_{n-1})$ . És a dir, una martingala és un procés amb esperança constant, una supermartingala és un procés amb esperança decreixent i una submartingala, un procés amb esperança creixent.

*Demostració:* Notem que en el cas d'una martingala,

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(M_{n+1}).$$

La primera igualtat és deguda a la definició de martingala i la segona a una propietat bàsica del concepte d'esperança condicionada.

La prova en el cas de supermartingales i submartingales és anàloga.

**Definició 3.8** Donada una martingala  $M$ , un procés previsible i afitat  $H$  i una constant  $x_0$ , respecte una filtració donada  $\mathbb{F}$ , es defineix la transformació de la martingala  $M$  pel procés previsible  $H$  com el procés  $X := \{X_n, n \in \mathbb{T}\}$  tal que

$$X_n := x_0 + \sum_{k=1}^n H_k(M_k - M_{k-1}), n \in \mathbb{T}.$$

**Proposició 3.9** La transformació d'una martingala és una martingala.

*Demostració:* Està clar que  $X$  és adaptat. L'afitació del procés  $H$  en garanteix la integrabilitat. Finalment, com que  $H$  és previsible,

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n] = H_{n+1} \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n] = 0.$$

**Proposició 3.10** Si  $H$  és un procés previsible, afitat i positiu, i  $M$  és una supermartingala o una submartingala, la transformació de  $M$  per  $H$ , conserva el caràcter de supermartingala o submartingala.

*Demostració:* Sigui  $Y$  la transformació de  $M$ . Tenim que

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n] = H_{n+1} \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n]$$

i si  $H$  és positiu, l'altre terme del producte de la dreta manté el caràcter de submartingala o supermartingala.

**Proposició 3.11** Sigui  $M := \{M_n, n \geq 0\}$  un procés adaptat i integrable.

Aleshores  $M$  és una martingala si i només si per a tot procés previsible i afitat  $H$  i per a tot  $n \geq 1$ , tenim

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n H_i(M_i - M_{i-1})) = 0.$$

*Demostració:*

$\Rightarrow$ ) Suposem primer que  $M$  és una martingala. Sigui  $H$  un procés previsible i afitat qualsevol. Podem definir  $X_0 := 0$  i  $X_n := \sum_{i=1}^n H_i(M_i - M_{i-1})$ . Això és una transformació d'una martingala i per tant és també una martingala, com acabem de veure.

$\Leftarrow$ ) Fixem un  $m \geq 1$  qualsevol. Sigui  $A \in \mathcal{F}_{m-1}$ . Podem definir el procés previsible  $H$  tal que  $H_n = 0$  per a tot  $n \neq m$  i  $H_m := \mathbb{I}_A$ . Aleshores, si  $n \geq m$ , d'acord amb la hipòtesi,

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n H_i(M_i - M_{i-1})) = \mathbb{E}(H_m(M_m - M_{m-1})) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(M_m - M_{m-1})) = 0.$$

Per tant,  $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A(M_m - M_{m-1})) = 0$  per a tot  $A \in \mathcal{F}_{m-1}$ . I això implica

$$\mathbb{E}[M_m - M_{m-1} | \mathcal{F}_{m-1}] = 0$$

i per tant  $M$  és una martingala.

## 3.2 Principi de no arbitratge

L'objectiu d'aquest apartat és introduir-nos en un model de mercat discret i definit en un espai de probabilitat finit. La principal finalitat és veure com conceptes purament financers i econòmics es poden traduir a un llenguatge matemàtic a partir de la utilització de les martigales definides en l'apartat anterior, per tal d'arribar al model binomial de Cox-Ross-Rubinstein, per resoldre el problema de valoració i cobertura de derivats financers.

**Definició 3.12** Un model finit de mercat ve donat pels elements següents:

1. Un espai de probabilitat finit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .
2. Una filtració  $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{T}\}$ . En aquest cas suposarem que  $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$  i que  $\mathcal{F}_N := \mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}_n$  representa la informació disponible a l'instant  $n$ .
3. Un conjunt d'instantos de temps  $\mathbb{T} := \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , on  $N$  és un horitzó de temps fixat. Notarem  $\mathbb{T}^* := \mathbb{T} - \{0\}$ .
4. Un procés determinista  $S^0 := \{S_n^0, n \in \mathbb{T}\}$  que representa el nostre unitat monetària que evoluciona segons un tipus d'interès fixat  $r \geq 0$ . Per tant  $S_0^0 = 1$  i  $S_n^0 = (1 + r)^n$ .
5. Un nombre finit  $d$  d'actius amb risc. Modelitzem els seus preus mitjançant els processos  $S^i$ ,  $1 \leq i \leq d$  amb  $S^i := \{S_n^i, n \in \mathbb{T}\}$ , que suposem adaptats a la filtració del model. Una elecció natural de la filtració és

$$\mathcal{F}_n := \{S_k^i, 0 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq d\}.$$

**Notació 3.13** Els preus descomptats o actualitzats els denotarem per

$$\tilde{S}_n^i := \frac{S_n^i}{S_n^0}$$

Notem que  $\tilde{S}_n^i$  és el preu de l'actiu  $i$ -èssim a l'instant  $n$  valorat amb el valor actual de la moneda. En el nostre cas tenim  $\tilde{S}_n^i := (1 + r)^{-n} S_n^i$ . Notem que  $\tilde{S}_n^0 = 1$  per a tot  $n \in \mathbb{T}$ .

**Definició 3.14** Una cartera és un conjunt d'actius amb risc i un actiu sense risc.

**Definició 3.15** Una estratègia d'inversió és una successió de vectors aleatoris

$$\phi_n := \{(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d) \in \mathbb{R}^{d+1}, n \in \mathbb{T}^*\}$$

previsibles. És a dir, estem suposant que tot  $\phi_n^i$  és  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable.

**Definició 3.16** El valor de la nostra cartera al final del dia  $n$  és

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n$$

on  $S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d)$  i el producte és el producte escalar a  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

**Definició 3.17** El valor descomptat de la cartera és

$$\tilde{V}_n(\phi) = (1+r)^{-r} \phi_n \cdot S_n = \phi_n \cdot \tilde{S}_n.$$

**Definició 3.18** Una estratègia autofinançada és una estratègia d'inversió tal que

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n.$$

**Proposició 3.19**

$$\Delta V_{n+1}(\phi) = \phi_{n+1} \cdot \Delta S_n$$

on en general, denotem  $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$ .

*Demostració:* Notem que si  $\phi$  és una estratègia autofinançada, tenim

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_{n+1} \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot \Delta S_{n+1}$$

Les dues proposicions següents ajuden a clarificar el concepte d'autofinançament:

**Proposició 3.20**  $\phi$  és autofinançada si i només si per a tot  $n$ ,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta S_j.$$

*Demostració:* Per demostrar la proposició utilitzarem el principi d'inducció: Suposem que  $\phi$  és autofinançada.

Per  $n = 1$ :

$$V_1(\phi) = \phi_1 \cdot S_1 = \phi_0 \cdot S_0 + \phi_1 \cdot \Delta S_1 = V_0(\phi) + \phi_1 \cdot \Delta S_1.$$

Per  $n - 1 \Rightarrow n$ :

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n = \phi_{n-1} \cdot S_{n-1} + \phi_n \cdot \Delta S_n = V_{n-1}(\phi) + \phi_n \cdot \Delta S_n.$$

i suposant que el resultat és cert per a  $n - 1$  deduïm que és cert per a  $n$ . D'altra banda, suposant  $V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta S_j$ . podem provar que per a tot  $n \in \mathbb{T}^*$  tenim

$$V_n(\phi) - V_{n-1}(\phi) = \phi_n \cdot \Delta S_n.$$

Per tant,

$$\phi_n \cdot S_n - \phi_{n-1} \cdot S_{n-1} = \phi_n \cdot S_n - \phi_n \cdot S_{n-1},$$

i simplificant obtenim la condició d'autofinançament.

**Proposició 3.21**  $\phi$  és autofinançada si i només si per a tot  $n$ ,

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j.$$

*Demostració:* La demostració és anàloga a l'anterior utilitzant  $\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$ .

La proposició següent mostra que les estratègies autofinançades estan completament determinades pel seu valor inicial i per les quantitats d'actius en risc a cada instant.

**Proposició 3.22** Donat un procés previsible  $\widehat{\phi} = \{(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d), 0 \leq n \leq N\}$  a valors a  $\mathbb{R}^d$  i una constant  $V_0 \geq 0$ , existeix un únic procés previsible  $\phi^0$  tal que

$$\phi = \{(\phi_n^0, \dots, \phi_n^d), 0 \leq n \leq N\}$$

és una estratègia autofinançada amb valor inicial  $V_0(\phi) = V_0$ .

*Demostració:* Si  $\phi$  és autofinançada tenim per la proposició anterior

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{l=1}^n \sum_{i=0}^d \phi_l^i \cdot \Delta \tilde{S}_l^i.$$

Usant que  $\Delta \tilde{S}_l^0$  per a tot  $l$  tenim

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^d \phi_l^i \cdot \Delta \tilde{S}_l^i.$$

D'altra banda, per definició

$$\tilde{V}_n(\phi) = \phi_n^0 + \sum_{i=1}^d \phi_n^i \cdot \tilde{S}_n^i.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \phi_n^0 &= V_0(\phi) + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^d \phi_l^i \cdot \Delta \tilde{S}_l^i - \sum_{i=1}^d \phi_n^i \cdot \tilde{S}_n^i \\ &= V_0(\phi) + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^d \phi_l^i \cdot \tilde{S}_l^i - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^d \phi_l^i \cdot \tilde{S}_{l-1}^i \\ &= V_0(\phi) + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^d \phi_l^i \cdot \Delta \tilde{S}_l^i - \sum_{i=1}^d \phi_n^i \cdot \tilde{S}_{n-1}^i \end{aligned}$$

que evidentment és un procés previsible.

**Definició 3.23** Es diu que una estratègia d'inversió  $\phi$  és admissible si  $V_n(\phi) \geq 0$  per a tot  $n \in \mathbb{T}$ .

**Definició 3.24** Una estratègia autofinançada i admissible  $\phi$  és una estratègia d'arbitratge si  $V_0 \equiv 0$  i  $V_N(\phi) > 0$  amb probabilitat estrictament positiva.

Una estratègia d'arbitratge és una estratègia d'inversió que ens dona la possibilitat de guanyar diners sense risc. Les finances modernes es basen en el principi de que això no és possible. Això es basa en la idea que en mercats oberts i líquids les oportunitats de fer arbitratge desapareixen ràpidament. L'exemple més senzill és el cas en que un producte financer cotitza en dos mercats en divises diferents. La fluctuació dels canvis de divises poden crear una situació en que els preus siguin diferents. L'estratègia de comprar a preu barat i vendre a preu car seria un arbitratge, però si molta gent ho fa immediatament el preu barat puja, s'equilibra amb l'alt i desapareix la possibilitat d'arbitratges. I en base a aquest principi es pot desenvolupar tota una teoria de valoració de productes financers.

### 3.3 Viabilitat i completesa d'un mercat financer

#### 3.3.1 Primer teorema fonamental de les finances

Primer donarem dues definicions:

**Definició 3.25** Es diu que un mercat és viable si no hi ha oportunitats d'arbitratge.

**Definició 3.26** Es diu que una mesura de probabilitat  $\mathbb{P}^*$  és equivalent a  $\mathbb{P}$  si per a tot  $A \in \mathcal{F}$  es té

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^*(A) = 0.$$

S'escriu  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ .

Notem que en un espai de probabilitat finit això significa simplement que  $\mathbb{P}^*$  satisfi  $\mathbb{P}^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$ .

Ara presentarem dos teoremes d'anàlisi matemàtica que només enunciarem, ja que no són pròpiament del tema que tractem.

**Teorema 3.27 (Teorema de l'hiperplà separador)** Sigui  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunt convex i tancat tal que  $0 \notin C$ . Aleshores existeixen  $\alpha > 0$  i una aplicació lineal  $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tals que

$$\xi(x) \geq \alpha > 0, \forall x \in C.$$

**Teorema 3.28 (Teorema de separació de convexos)** Sigui  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunt convex i compacte. Sigui  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  un espai lineal. Suposem  $K \cap V = \emptyset$ . Aleshores, existeix una aplicació lineal  $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\xi(x) > 0$  per a tot  $x \in K$  i  $\xi(x) = 0$  per a tot  $x \in V$ .

Aquests teoremes estableixen la idea intuïtiva que si tenim un conjunt tancat i convex  $C$  que no inclou el zero, existeix un hiperplà  $\xi(x) = 0$  que inclou el 0 i que no toca  $C$ .

Ara podem exposar el primer teorema fonamental de les finances que serveix per relacionar el concepte purament econòmic de mercat viable, amb el concepte matemàtic de martingala.

Abans del teorema exposarem un lema previ per tal de poder demostrar-lo tot seguit.

**Lema 3.29** Si un mercat finit és viable aleshores

$$L \cap S = \emptyset$$

on  $L$  és l'espai lineal de variables aleatòries sobre  $\Omega$ .

*Demostració:* Per demostrar que  $L \cap S = \emptyset$  demostrarem un resultat més fort que és el següent  $L \cap \Gamma = \emptyset$ , ja que  $S \subset \Gamma$  on  $\Gamma$  és el conjunt de les variables estrictament positives, és a dir, tals que  $X \geq 0$  per a tot  $\omega$  i que per alguns  $\omega$ ,  $X > 0$ . Per tant, si no fos cert, existiria una estratègia autofinançada  $\varphi$  de valor inicial  $V_0(\varphi) = 0$  tal que  $\tilde{V}_N(\varphi) \in \Gamma$ . Notem que aleshores podríem construir un arbitratge basat en  $\varphi$  contradient la hipòtesi de que el mercat és viable.

En efecte, sigui  $n := \sup\{k : \tilde{V}_k(\varphi) < 0 \text{ per a certs } \omega\}$ . Evidentment  $n \leq N - 1$  ja que  $\tilde{V}_N(\varphi) \geq 0$  pel fet de que pertant a  $\Gamma$ . Així,

$$A := \{\tilde{V}_n(\varphi) < 0\} \subset \Omega.$$

Podem definir l'estratègia autofinançada  $\theta$  nul·la per a  $l \leq n$  i tal que

$$\theta_l^i = \mathbb{I}_A \varphi_l^i$$

per a tot  $l \geq n + 1$  i  $i = 1, \dots, d$ . Evidentment  $\tilde{V}_k(\theta) = 0$  per a  $k \leq n$ .

I per a  $k > n$  tenim

$$\tilde{V}_k(\theta) = \sum_{l=n+1}^k \mathbb{I}_A \varphi_l^i \Delta \tilde{S}_l = \mathbb{I}_A (\tilde{V}_k(\varphi) - \tilde{V}_n(\varphi)).$$

Aquesta quantitat és estrictament positiva perquè  $\tilde{V}_k(\varphi) \geq 0$  per a tot  $k > n$  per definició de  $n$  i  $\tilde{V}_n(\varphi) > 0$  sobre  $A$ .

Per tant  $\theta$  és admissible i

$$\mathbb{I}_A(\tilde{V}_N(\varphi) - \tilde{V}_n(\varphi)) > 0.$$

Aleshores  $\theta$  és un arbitratge.

**Teorema 3.30 (Primer teorema fonamental de les finances)** Un mercat finit és viable si i només si existeix una probabilitat  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$  tal que els preus descomptats dels actius amb risc  $\tilde{S}^i$ ,  $i = 1, \dots, d$  són martingales.

*Demostració:*

$\Leftarrow$ ) Suposem primer que existeix una probabilitat  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ , anomenada probabilitat neutral al risc, tal que sota  $\mathbb{P}^*$  els processos  $\tilde{S}^i$  són martingales. Considerem una estratègia autofinançada i admissible  $\phi$  tal que  $V_0(\phi) = 0$ . Aleshores tenim

$$\tilde{V}_n(\phi) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^d \phi_l^i \Delta \tilde{S}_l^i.$$

Això és una suma de transformacions de martingales i per tant una martingala sota  $\mathbb{P}^*$ . Per tant,

$$\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_0(\phi)) = \tilde{V}_0(\phi) = 0$$

on  $\mathbb{E}^*$  denota l'esperança sota  $\mathbb{P}^*$ . Com que  $\phi$  és admissible, això implica que  $\tilde{V}_N(\phi) = 0 \forall \omega \in \Omega$ .

I per tant, no hi ha oportunitats d'arbitratge, és a dir, el mercat és viable.

$\Rightarrow$ ) Suposem ara que el mercat és viable. Utilitzant la proposició 3.11 és suficient contruir  $\mathbb{P}^*$  tal que fixats  $N \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, d$  i un procés previsible  $\phi^i$ , qualsevol,

$$\mathbb{E}^*(\sum_{l=1}^N \phi_l^i \Delta \tilde{S}_l^i) = 0.$$

Recordem que  $\Omega$  és finit. Suposem que té per exemple  $M$  elements. Això ens permet identificar les variables aleatòries  $X$  sobre  $\Omega$  com a punts de  $\mathbb{R}^M$ . Sigui  $\Gamma$  el conjunt de les variables estrictament positives, és a dir, tals que  $X \geq 0$  per a tot  $\omega$  i que per alguns  $\omega$ ,  $X > 0$ . Per tant estem parlant dels punts del quadrant positiu de  $\mathbb{R}^M$ , excloent el 0. Sigui  $S \subset \Gamma$  el subconjunt de les variables tals que  $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = 1$ . Notem que  $S$  és convex i compacte. D'altra banda considerem el conjunt

$$L := \{\tilde{V}_N(\varphi) : \varphi \text{ autofinançada i } V_0(\varphi) = 0\}.$$

Notem que  $L$  és un espai lineal de variables aleatòries sobre  $\Omega$ .

Suposem que  $L \cap S = \emptyset$ , gràcies al lema anterior. Aplicant el Teorema de separació de convexos existeix una aplicació lineal  $\xi$  tal que  $\xi(X) > 0 \forall X \in S$  i  $\xi(X) = 0 \forall X \in L$ . Aleshores, per qualsevol  $X \in S$  tenim

$$\xi(X) = \sum_{\omega} \lambda(\omega) X(\omega)$$

i tots els  $\lambda(\omega) > 0$  ja que  $\xi$  en particular ha de ser estrictament positiva sobre tota  $X$  nul·la tal que sobre tots els  $\omega$  excepte un  $\omega_0$  en el que val  $X(\omega_0) = 1$ . Aleshores podem definir

$$\mathbb{P}^*(\omega) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'} \lambda(\omega')}.$$

Fixem qualsevol del processos  $S^i$ . Considerem un procés previsible  $\phi^i$ . Considerem l'estratègia d'inversió que consisteix en tenir en cada instant  $l$ ,  $\phi_l^i$  accions de  $S^i$  i al cap de les altres. Podem associar a aquest procés previsible  $\phi^i$  una única estratègia autofinançada amb valor inicial  $V_0 = 0$ . Aleshores tenim

$$\tilde{V}_N(\phi^i) = \sum_{l=1}^N \phi_l^i \Delta \tilde{S}_l^i \in L$$

I per tant,

$$\mathbb{E}^*(\sum_{l=1}^N \phi_l^i \Delta \tilde{S}_l^i) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N) = \frac{\xi(\tilde{V}_N)}{\sum_{\omega'} \lambda(\omega')} = 0.$$

Finalment, per la proposició 3.11, tenim que  $\tilde{S}^i$  és martingala, i el mateix per als altres preus del mercat.

### 3.3.2 Segon teorema fonamental de les finances

**Definició 3.31** Des d'un punt de vista abstracte, un derivat financer de tipus europeu és un contracte que em dona dret a rebre en una data futura  $N$  un perfil de beneficis  $G$ , on  $G$  és una variable aleatòria no negativa i  $\mathcal{F}_N$ -mesurable. El seu valor depèn de l'evolució del mercat dels del moment de contracte  $n = 0$  fins la del moment del venciment  $n = N$ .

**Definició 3.32** Es diu que un derivat amb perfil de beneficis  $G$  és replicable si existeix una constant  $V_0$  i una estratègia autofinançada i admissible  $\phi$  tal que  $V_N(\phi) = G$ .

**Definició 3.33** Un mercat és complet si tot derivat és replicable.

Considerar que tot mercat és complet no és tan clar com el principi de no arbitratge. En qualsevol cas és una hipotesi financera que el segon teorema fonamental de les finances traduirà en hipotesi matemàtica.

**Teorema 3.34 (Segon teorema fonamental de les finances)** Un mercat viable és complet si i només si existeix una única mesura neutral al risc  $\mathbb{P}^*$ .

*Demostració:*

$\Rightarrow$ ) Si un mercat és viable i complet hem de demostrar que  $\mathbb{P}^*$  és única. Siguin  $\mathbb{P}_1^*$  i  $\mathbb{P}_2^*$  dues probabilitats neutrals al risc. Sigui  $G$  un perfil de beneficis. Com que el mercat és complet existeix  $V_0 \geq 0$  i una estratègia autofinançada i admissible  $\phi$  tal que

$$G = V_0 + \sum_{l=1}^N \phi_l \cdot \Delta S_l$$

Notem que aquí el producte és el producte escalar a  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Evidentment  $G$  és el valor final d'una martingala respecte les dues probabilitats i per tant

$$\mathbb{E}_1^*(\tilde{V}_N(\varphi)) = \mathbb{E}_2^*(\tilde{V}_N(\varphi)) = V_0$$

Per tant,

$$\mathbb{E}_1^*(G) = \mathbb{E}_2^*(G)$$

Si això és cert per a qualsevol variable positiva i  $\mathcal{F}_N$ -mesurable, ho és per a  $G := \mathbb{I}_A$  amb  $A \in \mathcal{F}_N$  i per tant  $\mathbb{P}_1^*$  i  $\mathbb{P}_2^*$  coincideixen sobre  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$  i per tant, són iguals.

$\Leftarrow$ ) Sigui ara  $\mathbb{P}^*$  la única probabilitat neutral al risc. Sabem que el mercat és viable. Volem demostrar que és complet. Si suposem que no és complet veurem que podem construir una altra mesura de probabilitat neutral al risc, contradictòriament. Per tant, el mercat ha de ser complet. Suposem que  $H$  és un perfil de beneficis no replicable. Sigui  $\bar{\nu}$  el conjunt de tots els perfils de beneficis replicables descomptats. És a dir, estem suposant que  $\frac{H}{S_N^0} \notin \bar{\nu}$  i que per tant  $\bar{\nu}$  és un subespai propi de  $L^2(\mathbb{P}^*)$ . Fixem una variable aleatòria  $X \neq 0$ , ortogonal a  $\bar{\nu}$ . Definim

$$c := \sup |X(\omega)|$$

i

$$\mathbb{P}^{**}(\omega) := \left(1 + \frac{X(\omega)}{2c}\right) \mathbb{P}^*(\omega).$$

Aleshores per definició,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}^{**}(\omega) = \mathbb{E}^*\left(1 + \frac{X(\omega)}{2c}\right) = 1 + \frac{\mathbb{E}^*(X(\omega))}{2c} = 1.$$

perquè les constants estan evidentment a  $\bar{\nu}$  i  $\mathbb{E}^*(X) = \mathbb{E}^*(X \cdot 1) = 0$ . D'altra banda és evident que per contrucció  $\mathbb{P}^{**} \sim \mathbb{P}^*$ . Finalment, comprovem que  $\mathbb{P}^{**}$  és neutral al risc. Donat un procés previsible  $\phi$  tenim

$$\mathbb{E}^{**}(\sum_{n=1}^N \phi_n \cdot \Delta \tilde{S}_n) = \mathbb{E}^*(\sum_{n=1}^N \phi_n \cdot \Delta \tilde{S}_n) + \frac{1}{2c} \mathbb{E}^*(X \cdot \sum_{n=1}^N \phi_n \cdot \Delta \tilde{S}_n)$$

i això és nul. El primer terme és nul perquè els processos  $\tilde{S}^i$  són martingales respecte  $\mathbb{P}^*$ . El segon és nul perquè

$$\sum_{n=1}^N \phi_n \cdot \Delta \tilde{S}_n \in \bar{\nu}.$$

Per acabar presentarem la caracterització de completesa.

**Proposició 3.35** Un mercat finit i viable és complet si i només si tota martingala  $M$  es pot representar de manera única com

$$M_n = M_0 + \sum_{l=1}^n \gamma_l \cdot \Delta \tilde{S}_l$$

per a un cert procés previsible  $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^d)$ .

*Demostració:*

$\Rightarrow$ ) Suposem que el model és complet. Sigui  $\mathbb{P}^*$  la única probabilitat neutral al risc. Considerem una martingala qualsevol  $M$  respecte  $\mathbb{P}^*$ . Utilitzant que tota martingala afitada és la diferència de dues martingales afitades i no negatives, podem suposar que  $M_n \geq 0$  per a tot  $n \in \mathbb{T}$ . Sigui  $C := M_N S_N^0$  i  $\theta$  l'estratègia autofinançada que replica  $C$ . Aleshores

$$\tilde{V}_n(\theta) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_N(\theta) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^*[M_n | \mathcal{F}_n] = M_n, \forall n \in \mathbb{T}.$$

Per tant,

$$M_n = \tilde{V}_n(\theta) = V_0 + \sum_{l=1}^n \theta_l \cdot \Delta \tilde{S}_l = M_0 + \sum_{l=1}^n \theta_l \cdot \Delta \tilde{S}_l.$$

$\Leftarrow$ ) Considerem una variable  $\mathcal{F}_N$ -mesurable  $C$ . Definim la martingala

$$M_n := \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\right]$$

on  $\mathbb{P}^*$  és una martingala neutral al risc que podem escollir perquè el mercat és viable. Per hipòtesi aquesta martingala admet una representació

$$M_n = M_0 + \sum_{l=1}^n \gamma_l \cdot \Delta \tilde{S}_l.$$

Definim l'estratègia  $\theta_l^i := \gamma_l^i$  per  $i = 1, \dots, d$ , i  $\theta_l^0 := M_l - \sum_{i=1}^d \gamma_l^i \tilde{S}_l^i$ . Notem que

$$V_n(\phi) = \theta_n \cdot S_n = M_n S_n^0$$

i

$$V_N(\phi) = M_N S_N^0 = C.$$

Per tant, només falta comprovar que  $\theta$  és autofinançada. Tenim

$$\begin{aligned} \Delta \theta_n \cdot S_{n-1} &= \sum_{i=1}^d \Delta \gamma_n^i S_{n-1}^i + \Delta M_n S_{n-1}^0 - \Delta (\sum_{i=1}^d \gamma_n^i \tilde{S}_n^i) S_{n-1}^0 \\ &= \sum_{i=1}^d [\Delta \gamma_n^i S_{n-1}^i + \gamma_n^i \Delta \tilde{S}_n^i S_{n-1}^0 - \Delta (\gamma_n^i \tilde{S}_n^i) S_{n-1}^0] = \sum_{i=1}^d [\gamma_n^i S_{n-1}^i - \\ &\gamma_{n-1}^i S_{n-1}^i + \gamma_n^i \tilde{S}_n^i S_{n-1}^0 - \gamma_n^i \tilde{S}_{n-1}^i S_{n-1}^0 - \gamma_n^i \tilde{S}_n^i S_{n-1}^0 + \gamma_{n-1}^i \tilde{S}_{n-1}^i) S_{n-1}^0] = 0. \end{aligned}$$

### 3.4 Fórmula paritat Call-Put

Després de veure els dos teoremes fonamentals i com a conseqüència del principi de no arbitratge, enunciamer el principi econòmic de paritat entre opció de compra i venda, que es coneix amb el nom de paritat call-put, que utilitzarem després per a construir el model binomial.

**Proposició 3.36 (Paritat call-put)** Considerem un procés de preus  $S$ . Sigui  $C$  el preu d'un call europeu sobre  $S$  amb preu d'exercici  $K$  i data de venciment  $N$ . Sigui  $P$  el preu del corresponent put. Sigui  $r$  el tipus d'interès que suposem fix. Aleshores tenim

$$C_0 - P_0 = S_0 - K(1 + r)^{-N}$$

*Demostració:*

- Suposem que  $C_0 - P_0 > S_0 - K(1 + r)^{-N}$ . Aleshores podem comprar una acció i un put i vendre un call. Això ens dona un benefici o té un cost de  $C_0 - P_0 - S_0$  en funció de si aquesta quantitat és positiva o negativa. Si aquesta quantitat és positiva la podem posar en un compte bancari. Si és negativa podem demanar en préstec la quantitat al banc. Tot al tipus d'interés  $r > 0$ .

- A la data de venciment, si  $S_N > K$  donem l'acció al propietari del call i rebem  $K$ . El put no val res. El balanç és

$$K + (1 + r)^N(C_0 - P_0 - S_0)$$

en el cas que  $C_0 - P_0 - S_0 > 0$ , que ara serà encara una quantitat més gran. En el cas de  $C_0 - P_0 - S_0 < 0$  el balanç és

$$K - (P_0 + S_0 - C_0)(1 + r)^N$$

que és una quantitat positiva per hipòtesi.

- Si a la data de venciment  $S_N < K$  exercim el put i rebem  $K$ . El call no val res. El balanç acaba sent anàleg al cas anterior.

- Suposem ara que  $C_0 - P_0 < S_0 - K(1+r)^{-N}$ . En aquest cas venem al descobert un put i una acció i comprem un call. El benefici  $P_0 + S_0 - C_0 > 0$  el posem al compte bancari. Aleshores

- Si en la data de venciment  $S_N > K$  comprem i paguem  $K$  i tornem l'acció. El put no té valor. El balanç és

$$(P_0 + S_0 - C_0)(1+r)^N - K > 0$$

- Si en la data de venciment tenim  $S_N < K$  el call no té valor. Paguem  $K$  per l'acció al propietari del put i tornem l'acció. Per tant, el balanç final és el mateix.

Hem demostrat que si la paritat call-put no és certa podem construir arbitratges. Per tant, en un mercat viable, és certa.

### 3.5 El model de Cox-Ross-Rubinstein

Suposem ara un model de mercat finit simplificat, amb només dos actius. Un amb risc, de preu  $S$  i un compte bancari de valor  $S^0$ . Suposem un tipus d'interès constant  $r > 0$ . Per tant,  $S_n^0 = (1+r)^n$ . Suposem que en cada període, cada dia per exemple, el preu de l'actiu amb risc puja un factor  $1 + u$  o baixa un factor  $1 + d$ , és a dir, suposem que  $S_n$  pren valors en el conjunt  $\{(1 + d)S_{n-1}, (1 + u)S_{n-1}\}$ . Suposem  $S_0$  constant,  $-1 < d < u$  i  $\mathbb{T} := \{0, 1, \dots, N\}$ . En aquesta situació podem definir les variables aleatòries  $\{T_n, n \in \mathbb{T}\}$  tal que

$$T_n := \frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

Notem que aleshores podem escriure

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^n T_i, n \in \mathbb{T}.$$

I podem plantejar el model de mercat següent:

$$(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

tal que:

- $\Omega = \{1 + d, 1 + u\}^N$ .
- $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{T}\}$  amb  $\mathcal{F}_n := \sigma\{S_0, T_1, \dots, T_N\} = \sigma\{S_0, S_1, \dots, S_N\}$ .
- $\mathcal{F} := \mathcal{F}_N$ .
- $\mathbb{P}$  és una probabilitat sobre  $\Omega$  tal que

$$\mathbb{P}(T_1 = x_1, \dots, T_N = x_N) > 0$$

per a tot  $(x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ .

Aquest model anomenat binomial o CRR va ser desenvolupat per Cox, Ross i Rubinstein al voltant de 1980 i és molt utilitzat a la pràctica com a model fàcilment programable, prenent períodes molt curs.

### 3.5.1 Viabilitat del model CRR

Primerament veurem un lema previ.

**Lema 3.37**  $\tilde{S}$  és una  $\mathbb{P}$ -martingala si i només si  $\mathbb{E}[T_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 1 + r$  per a tot  $n \in \mathbb{T}^*$ .

*Demostració* Efectivament,  $\tilde{S}$  és una martingala si i només si

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \tilde{S}_{n-1} \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\frac{\tilde{S}_n}{\tilde{S}_{n-1}} | \mathcal{F}_{n-1}\right] = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\frac{T_n}{1+r} | \mathcal{F}_{n-1}\right] = 1.$$

En la següent proposició veure la viabilitat del model.

**Proposició 3.38** El model CRR és viable si i només si  $d < r < u$ .

*Demostració:*

$\Rightarrow$ ) Per provar que la viabilitat implica  $d < r < u$  és suficient veure que si  $r \leq d$  o  $r \geq u$  podem construir un arbitratge. Si  $r \leq d$  podem demanar  $S_0$  en préstec i comprar l'actiu. A la data de venciment tenim

$$V_N = S_N - S_0(1+r)^N \geq [(1+d)^N - (1+r)^N] S_0 \geq 0$$

i

$$[(1+u)^N - (1+r)^N] S_0 > 0$$

Si  $r \geq u$  venem al descobert l'actiu i posem els guanys al compte bancari. A la data de venciment tenim

$$S_0(1+r)^N - S_0(1+u)^N \geq 0$$

i

$$S_0(1+r)^N - S_0(1+d)^N > 0$$

⇐) Ara si  $r \in (d, u)$  podem construir  $\mathbb{P}^*$  com la probabilitat que fa que les variables  $T_1, \dots, T_N$  siguin independents i idènticament distribuïdes amb llei de Bernoulli sobre  $\{1 + d, 1 + u\}$  i tal que

$$p^* := \mathbb{P}^*(T_n = 1 + u) = \frac{r - d}{u - d}$$

i

$$1 - p^* := \mathbb{P}^*(T_n = 1 + d) = \frac{u - r}{u - d}$$

Notem que sota  $\mathbb{P}^*$

$$\mathbb{E}^*[T_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}^*(T_n) = (1 + d)(1 - p^*) + (1 + u)p^* = 1 + r$$

i per tant, utilitzant el lema anterior,  $\mathbb{P}^*$  és una mesura neutral al risc i el model de mercat CRR és viable.

### 3.5.2 Completesa del model CRR

Per veure la completesa del model CRR ho farem amb la següent proposició, que mostra en particular que viabilitat implica completesa.

**Proposició 3.39** Suposem  $r \in (d, u)$ . Si  $\tilde{S}$  és una martingala respecte  $\mathbb{P} \Rightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}^*$  on  $\mathbb{P}^*$  és una probabilitat neutral al risc  $\Rightarrow$  el model CRR amb  $r \in (d, u)$  és complet.

*Demostració:* Si  $\tilde{S}$  és una martingala respecte  $\mathbb{P}$ , pel lema anterior tenim

$$\mathbb{E}[T_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 1 + r$$

Per tant,

$$(1 + d)\mathbb{P}(T_n = 1 + d | \mathcal{F}_{n-1}) + (1 + u)\mathbb{P}(T_n = 1 + u | \mathcal{F}_{n-1}) = 1 + r$$

i evidentment

$$\mathbb{P}(T_n = 1 + d | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{P}(T_n = 1 + u | \mathcal{F}_{n-1}) = 1$$

Resolent el sistema obtenim

$$\mathbb{P}(T_n = 1 + u | \mathcal{F}_n) = \frac{r - d}{u - d} = p^*$$

i

$$\mathbb{P}(T_n = 1 + f | \mathcal{F}_n) = \frac{u - r}{u - d} = 1 - p^*$$

Utilitzant la definició d'esperança condicionada tenim, per al cas  $1 + u$ ,

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{T_n=1+u} \mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(p^* \mathbb{I}_A), \forall A \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

I escollint  $A = \{T_1 = x_1, \dots, T_{n-1} = x_{n-1}\}$  per a qualsevol configuració fixada  $x_1, \dots, x_{n-1}$  obtenim

$$\mathbb{P}(T_1 = x_1, \dots, T_n = 1 + u) = p^* \mathbb{P}(T_1 = x_1, \dots, T_{n-1} = x_{n-1}).$$

Usant aquesta fórmula, el resultat es dedueix immediatament per inducció.

### 3.5.3 Valoració d'opcions europees

Sigui  $\mathbb{P}$  la única probabilitat neutral al risc trobada a la secció anterior, és a dir, la única probabilitat sota la qual els preus dels actius són martingala. Segons la fórmula enunciada anteriorment  $V_n(\phi) = \frac{S_n^0}{S_N^0} \mathbb{E}^*(G | \mathcal{F}_n)$ , si  $C_n$  és el preu en  $n$  d'un call europeu amb preu d'exercici  $K$  i data de venciment  $N$  tenim

$$C_n = (1 + r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^*[(S_N - K)^+ | \mathcal{F}_n] = \frac{S_n^0}{S_N^0} \mathbb{E}^*[(S_n \prod_{i=n+1}^N T_i - K)^+ | \mathcal{F}_n] = c(n, S_n)$$

amb

$$\begin{aligned} c(n, x) &= (1 + r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^*((x \prod_{i=n+1}^N T_i - K)^+) \\ &= (1 + r)^{-(N-n)} \sum_{j=0}^{N-n} (x(1+d)^{N-n-j}(1+u)^j - K)^+ \binom{N-n}{j} \left(\frac{u-r}{u-d}\right)^{N-n-j} \left(\frac{r-d}{u-d}\right)^j \\ &= (1 + r)^{-(N-n)} \sum_{j=j^*(x)}^{N-n} x(1+d)^{N-n-j}(1+u)^j \binom{N-n}{j} \left(\frac{u-r}{u-d}\right)^{N-n-j} \left(\frac{r-d}{u-d}\right)^j - \\ &\quad - (1 + r)^{-(N-n)} \sum_{j^*(x)}^{N-n} K \binom{N-n}{j} \left(\frac{u-r}{u-d}\right)^{N-n-j} \left(\frac{r-d}{u-d}\right)^j \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} j^*(x) &:= \inf\{j : x(1+d)^{N-n-j}(1+u)^j > k\} \\ &= \inf\{j : j > \frac{\log \frac{K}{x} - (N-n)\log(1+d)}{\log(\frac{1+u}{1+d})}\}. \end{aligned}$$

Observem que

$$\frac{(u-r)(1+d)}{(u-d)(1+r)} + \frac{(r-d)(1+u)}{(u-d)(1+r)} = 1.$$

Aleshores, definint

$$\bar{p} = \frac{p^*(1+u)}{1+r} = \frac{(r-d)(1+u)}{(u-d)(1+r)}$$

podem reescriure la fórmula anterior com

$$\begin{aligned} c(n, x) &= x \sum_{j=j^*(x)}^{N-n} \binom{N-n}{j} \bar{p}^j (1-\bar{p})^{N-n-j} \\ &\quad - \frac{K}{(1+r)^{N-n}} \sum_{j=j^*(x)}^{N-n} \binom{N-n}{j} (p^*)^j (1-p^*)^{N-n-j}. \end{aligned}$$

A la pràctica,  $n = 0$ , i per tant

$$C_0 = S_0 \sum_{j=j^*(x)}^N \bar{p}^j (1-\bar{p})^{N-j} - \frac{K}{(1+r)^N} \sum_{j=j^*(x)}^N \binom{N}{j} (p^*)^j (1-p^*)^{N-j}.$$

Notem que podem escriure

$$C_0 = S_0 \mathbb{P}^*(\text{Bin}(N, \bar{p}) \geq j^*(x)) - \frac{K}{(1+r)^N} \mathbb{P}^*(\text{Bin}(N, p^*) \geq j^*(x)).$$

Utilitzant la paritat call-put tenim

$$\begin{aligned} P_0 &= C_0 - S_0 + \frac{K}{(1+r)^N} \\ &= \frac{K}{(1+r)^N} \mathbb{P}^*(\text{Bin}(N, p^*) \leq j^*(x) - 1) - S_0 \mathbb{P}^*(\text{Bin}(N, \bar{p}) \leq j^*(x) - 1). \end{aligned}$$

### 3.5.4 Cobertura d'opcions europees

Per trobar l'estratègia de cobertura  $\phi$ , imposem que

$$\phi_n^0(1+r)^n + \phi_n S_n = c(n, S_n)$$

i per tant

$$\phi_n^0(1+r)^n + \phi_n(1+d)S_{n-1} = c(n, (1+d)S_{n-1})$$

i

$$\phi_n^0(1+r)^n + \phi_n(1+u)S_{n-1} = c(n, (1+u)S_{n-1}).$$

Resolent el sistema obtenim  $\phi_n = \Delta_n(n, S_{n-1})$  on

$$\Delta(n, x) = \frac{c(n, (1+u)x) - c(n, (1+d)x)}{x(u-d)}.$$

I utilitzant la propietat d'autofinançament, tenim

$$\phi_n^0 = C_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \phi_l(\tilde{S}_l - \tilde{S}_{n-1}) - \phi_n \tilde{S}_{n-1} = \tilde{V}_{n-1}(\phi) - \phi_n \tilde{S}_{n-1}$$

que obviament és  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable.

Notem que  $\Delta_n(n, S_{n-1})$  és la quantitat d'actius amb risc que el venedor de l'opció ha de tenir en cartera a l'inici del dia o període  $n$ . Podem escriure també

$$\Delta_n(n, S_{n-1}) = \frac{C_n^u - C_n^d}{S_n^u - S_n^d}$$

on denotem per  $C^u$  el valor del derivat en  $n$  en l'escenari alcista i anàlogament per als altres termes. Aquesta estratègia s'anomena delta-neutral.

### 3.5.5 Exemple del model CRR

Considerem un mercat financer amb dos períodes d'un mes. El tipus d'interès és del 3% anual. Tenim un actiu amb risc que val inicialment 60 i en cada passa puja o baixa un 10%.

Troba el preu d'un put europeu amb preu d'exercici 62 i determina l'estratègia de cobertura.

*Solució:* 2 períodes d'un més amb  $u = 0.1$  i  $d = -0.1 \Rightarrow r = \frac{0.03}{12} = 0.0025$

Calculem primer  $S_1^u$  i  $S_1^d$  a partir de  $S_0$ :

$$S_1^u = S_0(1 + u) = 66$$

$$S_1^d = S_0(1 + d) = 54$$

Ara calculem  $S_2^{uu}$ ,  $S_2^{ud}$  i  $S_2^{dd}$ :

$$S_2^{uu} = S_0(1 + u)^2 = 72.6$$

$$S_2^{ud} = S_0(1 + u)(1 + d) = 59.4$$

$$S_2^{dd} = S_0(1 + d)^2 = 48.6$$

La llei neutral al risc és una Bernoulli de paràmetres

$$p = \frac{r - d}{u - d} = \frac{0.1025}{0.2} = 0.5125, \quad 1 - p = 0.4875$$

El put europeu amb  $K = 62$  i venciment a 2 mesos és

$$f_{uu} = (K - S_2^{uu})^+ = (62 - 72.6)^+ = 0$$

$$f_{ud} = f_{du} = (K - S_2^{ud})^+ = (62 - 59.4)^+ = 2.6$$

$$f_{dd} = (K - S_2^{dd})^+ = (62 - 48.6)^+ = 13.4$$

Aleshores,

$$f_u = \frac{pf_{uu} + (1 - p)f_{ud}}{1 + r} = \frac{0.5125(0) + (0.4875)(2.6)}{1 + 0.0025} = 1.2643$$

$$f_d = \frac{pf_{ud} + (1 - p)f_{dd}}{1 + r} = \frac{0.5125(2.6) + (0.4875)(13.4)}{1 + 0.0025} = 7.8453$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{f_u p + (1 - p)f_d}{1 + r} = \frac{0.5125(1.2643) + (0.4875)(7.8453)}{1 + 0.0025} = 4.46$$

Estratègia de cobertura:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{s_1^u - S_1^d} = \frac{1.2643 - 7.8453}{66 - 54} = -0.55$$

$\Rightarrow$  Hem de vendre al descobert 0.55 accions a un preu de  $0.55 \cdot 60 = 33$  euros. Per tant,  $H = -0.55$ ,  $H_0 = 33 + 4.46 = 37.46$  Al primer període, tenim

$$\Delta_0 S_1 + H_0(1 + r)$$

- Si  $S_1 = 66$  tenim:

$$-0.55 \cdot 66 + 37.46(1 + 0.0025) = 1.2536$$

- Si  $S_1 = 54$  tenim:

$$-0.55 \cdot 54 + 37.46(1 + 0.0025) = 7.8536$$

Ara tenim,

- Escenari alcista:

$$\Delta_u = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_2^{uu} - S_2^{ud}} = \frac{0 - 2.6}{72.6 - 59.4} = -0.19$$

Hem de comprar 0.36 accions a un preu de  $0.36 \cdot 66 = 23.75$  euros.

Per tant,  $H = -0.19$  i  $H_1^u = 37.46(1 + r) - 23.76 = 13.79$  En el segon període, tenim  $\Delta_u S_2 + H_1^u(1 + r)$

- Si  $S_2 = 72.6$  tenim:

$$-0.19 \cdot 72.6 + 13.79(1 + 0.0025) = 0.030 \approx 0$$

- Si  $S_2 = 59.4$  tenim:

$$-0.19 \cdot 59.4 + 13.79(1 + 0.0025) = 2.538$$

- Escenari baixista:

$$\Delta_d = \frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_2^{ud} - S_2^{dd}} = \frac{2.6 - 13.4}{59.4 - 48.6} = -1$$

Hem de comprar 0.45 accions a un preu de  $0.45 \cdot 54 = 24.3$  euros.

Per tant,  $H = -1$  i  $H_1^d = 37.46(1 + r) - 24.3 = 61.85$  En el segon període, tenim  $\Delta_d S_2 + H_1^d(1 + r)$

- Si  $S_2 = 59.4$  tenim:

$$-1 \cdot 59.4 + 61.85(1 + 0.0025) = 2.6046$$

- Si  $S_2 = 48.6$  tenim:

$$-1 \cdot 48.6 + 61.85(1 + 0.0025) = 13.4$$

### 3.5.6 Programa en Mathematica per calcular el Call i Put d'un model Cox-Ross-Rubinstein

En aquest apartat presentem un programa en Mathematica per calcular el preu del call i el put sota el model Cox-Ross-Rubinstein. En aquest cas usarem les dades de l'exemple anterior:

```
Clear[s, call, pu];
s[0] = Table[60, {1}];
a = -0.1; b = 0.1; r = 0.0025; n = 2;
p = (r - a)/(b - a);
s[x_] := s[x] = Prepend[(1 + a)*s[x - 1], (1 + b)*s[x - 1][[1]]];
ColumnForm[Table[s[i], {i, 0, n}], Center]
pp[x_] := Max[x, 0]
call[n] = Map[pp, s[n] - 62]; pu[n] = Map[pp, 62 - s[n]];
call[x_] := call[x] =
Drop[p*call[x + 1]/(1 + r) + (1 - p)*RotateLeft[call[x +
1], 1]/(1 + r), -1]
ColumnForm[Table[call[i], {i, 0, n}], Center]
pu[x_] := pu[x] = Drop[p*pu[x + 1]/(1 +
r) + (1 - p)*RotateLeft[pu[x + 1], 1]/(1 + r), -1]
ColumnForm[Table[pu[i], {i, 0, n}], Center]
```

## 4 Mercats financers a temps continu

### 4.1 Processos estocàstics

**Definició 4.1** Un procés estocàstic  $\{X(t), t \in T\}$  és una família de variables aleatòries definides en el mateix espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ,  $T \subseteq \mathbb{R}$ .

$X(t) = X(t, \omega) = X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  variable aleatòria fixat  $t$ ,  $X(\cdot, \omega) : T \rightarrow \mathbb{R}^T$  fixat  $\omega$  (realització, trajectories del procés estocàstic).

Si  $T = \mathbb{N}$  direm que el procés estocàstic té paràmetre discret.

Si  $T$  és un interval de  $\mathbb{R}$  l'anomenarem procés estocàstic amb paràmetre continu.

Donat  $\{X(t), t \in T\}$  un procés estocàstic i  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$ , podem considerar les distribucions marginals en dimensió finita.

$$F(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

**Definició 4.2** Direm que un procés estocàstic és conegut si coneixem les distribucions marginals en dimensió finita  $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$  obtingudes per qualsevol subconjunt finit  $\{t_1, \dots, t_n\}$ .

**Definició 4.3** Sigui  $\{X(t), t \in T\}$  i  $\{Y(t), t \in T\}$  dos processos estocàstics definits en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ .

(i) Direm que  $X$  i  $Y$  són equivalents, si per a tot  $t \in T$

$$P(X(t) = Y(t)) = P(\omega \in \Omega, X(t, \omega) = Y(t, \omega)) = 1.$$

(ii) Direm que  $X$  i  $Y$  indistingibles si  $P(X(t) = Y(t), \forall t \in T) = 1$ .

## 4.2 Moviment Brownià o procés de Wiener

Un procés clau per el nostre anàlisi de derivats financers és el moviment brownià, que porta el nom del botànic escocès Robert Brown, que va observar el 1828 que els grans de polen suspesos en un líquid seguïen un moviment irregular. El moviment va ser utilitzat per explicar les colisions aleatòries amb les molècules del líquid. Per modelar aquest comportament s'utilitza el concepte de procés estocàstic. La primera explicació d'aquest moviment la va donar Albert Einstein al 1905, que va demostrar matemàticament que el moviment brownià podia ser explicat suposant que les partícules de polen estiguin continuament bombardejades per les molècules del medi. Una definició i una serie de propietats d'aquest procés van ser desenvolupades pel matemàtic americà Norbert Wiener a partir del 1918.

**Definició 4.4** Un moviment Brownià estàndard (o procés de Wiener) és un procés estocàstic  $\{W_t, t \geq 0\}$  definit en un espai de probabilitat  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  tal que

- (i)  $W_0 = 0$  quasi segurament.
- (ii)  $W_t$  té increments independents, és a dir, si  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  aleshores  $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  són variables aleatòries independents.
- (iii)  $\forall 0 \leq s \leq t, \mathcal{L}(W_t - W_s) \sim N(0, t - s)$ .

### Propietats:

- (1)  $\mathbb{E}(W_u W_v) = \min(u, v)$ .
- (2) Fixats  $0 < t_1 < \dots < t_n$  el vector  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  té densitat

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \dots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})$$

$$\text{on } f_t(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right).$$

- (3) Les trajectòries del moviment brownià són contínues quasi segurament.

### 4.3 Integració estocàstica

En aquesta secció donarem les idees bàsiques utilitzades per construir la integral estocàstica en el sentit d'Itô. Sigui  $T > 0$ . Suposarem que  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  és un espai de probabilitat on està definit un moviment brownià  $W = \{W_t, \mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ . Sigui  $g$  un procés estocàtic amb trajectories contínues. En un principi, podríem definir la integral estocàstica com:

$$\int_0^T g_s dW_s$$

trajectoria per trajectoria. Així, per cada  $\omega \in \Omega$ , considerem a la integral anterior com el límit de les sumes de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^n g(t_i)(W_{t_{s_i}} - W_{t_{s_{i-1}}})$$

amb  $0 = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n = T$ ,  $t_i = (1-a)s_{i-1} + as_i$  i  $0 \leq a \leq 1$ . Malauradament el primer problema que tenim és el següent.

Sigui  $a = 0$  i  $\omega \in \Omega$  tal que  $S_n(\omega)$  convergeix per qualsevol funció contínua  $g$ . Llavors  $t \mapsto W_t(\omega)$  és una funció de variació acotada en  $[0, T]$ .

Com sabem que les trajectòries del moviment brownià no són de variació acotada implica que  $S_n$  no convergeix en probabilitat quan  $n \rightarrow \infty$ . El problema que es té aquí és que  $g_t$  depen d'esdeveniments que ocorren després de  $t$ . El segon problema que apareix al definir  $\int_0^T g_s dW_s$  com el límit en probabilitat de  $S_n = \sum_{i=1}^n g(t_i)(W_{t_{s_i}} - W_{t_{s_{i-1}}})$  és el següent.

Suposem que  $g = W$  en  $S_n = \sum_{i=1}^n g(t_i)(W_{t_{s_i}} - W_{t_{s_{i-1}}})$ , llavors  $S_n$  convergeix en probabilitat a  $\frac{W_T^2}{2} + (a - \frac{1}{2})T$ .

Això implica que el límit de  $S_n$  pot dependre del punt  $a$ .

Ara donarem la idea que va utilitzar Itô per definir la integral estocàstica.

**Definició 4.5**  $g_s$  és un procés simple adaptat si és de la forma

$$g_s = \sum_{k=0}^n g_{t_k} \mathbb{I}_{(t_k, t_{k+1}]}(s)$$

amb  $0 = t_0 < \dots < t_{n+1} = T$ .

**Definició 4.6** La integral estocàstica d'un procés simple adaptat de la forma  $g_s = \sum_{k=0}^n g_{t_k} \mathbb{I}_{(t_k, t_{k+1}]}(s)$  respecte  $B$  es defineix com

$$\int_0^T g_s dB_s := \sum_{k=0}^n g_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

**Proposició 4.7** Suposo que  $\mathbb{E} \int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$ , on  $g$  ve donat per  $g_s = \sum_{k=0}^n g_{t_k} \mathbb{I}_{(t_k, t_{k+1}]}(s)$ . Aleshores

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T g_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \int_0^T (g_s)^2 ds.$$

*Demostració:* La definició de la integral estocàstica implica

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T g_s dB_s \right)^2 \right] = \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E} [(g_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}))^2] + 2 \sum_{j < k} \mathbb{E} [g_{t_k} g_{t_j} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] = \\ &= \mathbb{E} \int_0^T (g_s)^2 ds \end{aligned}$$

on utilitzem que  $W$  i  $\{W_t^2 - t : t \in [0, T]\}$  són martingales per demostrar que

$$\mathbb{E} [(g_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}))^2] = \mathbb{E} [(g_{t_k})^2] (t_{k+1} - t_k), \quad k \in 0, 1, \dots, n.$$

**Proposició 4.8** Sigui  $g_s = \sum_{k=0}^n g_{t_k} \mathbb{I}_{(t_k, t_{k+1}]}(s)$ . Llavors per  $N, c > 0$ , tenim

$$P \left[ \left| \int_0^T g_s dW_s \right| > c \right] \leq \frac{N}{c^2} + P \left[ \int_0^T (g_s)^2 ds > N \right]$$

*Demostració:* Aquesta demostració la podem trobar al llibre *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, de Lamberton, D. i Lapeyre, B.

El pas següent per construir la integral estocàstica  $\int_0^T g_s dW_s$  es veure que els processos simples adaptats s'aproximen als processos mesurables i adaptats en algun sentit.

**Proposició 4.9** Sigui  $g$  un procés adaptat tal que

$$\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty \text{ amb probabilitat } 1.$$

Llavors existeix una successió  $\{g^{(n)} : n \geq 1\}$  de processos simples adaptats tal que

$$\int_0^T (g_s^{(n)} - g_s)^2 ds \longrightarrow 0 \text{ en probabilitat quan } n \longrightarrow \infty.$$

A més, si  $\mathbb{E} \int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$  es pot trobar una successió  $\{g^{(n)} : n \geq 1\}$  de processos adaptats tal que

$$\mathbb{E} \int_0^T (g_s^{(n)} - g_s)^2 ds \longrightarrow 0 \text{ quan } n \longrightarrow \infty.$$

*Demostració:* Aquesta demostració la podem trobar al llibre *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, de Lamberton, D. i Lapeyre, B.

**Definició 4.10** Sigui  $g$  un procés mesurable i adaptat tal que  $\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$  es compleix i  $\{g^{(n)} : n \geq 1\}$  una successió de processos simples adaptats com en  $\int_0^T (g_s^{(n)} - g_s)^2 ds \longrightarrow 0$  en probabilitat quan  $n \longrightarrow \infty$ . Definim la integral estocàstica de  $g$  respecte a  $W$  com el límit en probabilitat de la successió  $\{\int_0^T g_s^{(n)} dW_s : n \geq 1\}$ .

**Propietats:** Siguin  $g, g^{(1)}, g^{(2)}$  processos mesurables i adaptats i  $\{h^{(n)} : n \geq 1\}$  una successió de procesos simples adaptats i acotats. Tenim les següents propietats:

(i)  $\int_0^T (ag_s^{(1)} + bg_s^{(2)}) dW_s = a \int_0^T g_s^{(1)} dW_s + b \int_0^T g_s^{(2)} dW_s, a, b \in \mathbb{R}.$

(ii) El procés  $\{\int_0^t g_s dW_s := \int_0^t \mathbb{I}_{[0,t]}(s) g_s dW_s : t \in [0, T]\}$  té trajectòries contínues.

(iii)  $\mathbb{E}(\int_0^T g_s dW_s) = 0$  i  $\mathbb{E}(\int_0^T g_s dW_s)^2 = \mathbb{E}(\int_0^T (g_s)^2 dW_s).$

(iv) El procés  $\{\int_0^t g_s dW_s : t \in [0, T]\}$  és una  $\mathcal{F}_t$ -martingala.

## 4.4 La fórmula d'Itô

**Teorema 4.11 (Fórmula d'Itô)** Sigui  $f \in \mathcal{C}^2$  i sigui

$$X_t = X_0 + \int_0^t h_s ds + \int_0^t g_s dW_s, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

on  $X_0$  és  $\mathcal{F}_0$ -mesurable i adaptat amb trajectòries integrables i  $g$  és un procés mesurable i adaptat que compleix  $\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$  amb probabilitat 1.

Aleshores,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) dX_s dX_s = \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) (h_s ds + g_s dW_s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(x_s) (g_s)^2 ds. \end{aligned}$$

Els processos de tipus (1) s'anomenen processos d'Itô.

*Demostració:* Aquesta demostració la podem trobar al llibre *Mathematics of Financial Markets* de Elliot, R. J. i Kopp, P. Ekkehard.

## 4.5 El teorema de Girsanov

Aquest teorema utilitzat en probabilitats i molt útil en les matemàtiques financeres ens explica com canvia la dinàmica dels processos estocàstics quan canviem la probabilitat inicial per una probabilitat equivalent.

Comencem veient que són les probabilitats equivalents.

**Definició 4.12** Sigui  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espai de probabilitats. Direm que una probabilitat  $\mathbb{Q}$  és absolutament contínua respecte a  $\mathbb{P}$  si

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

**Teorema 4.13** Una probabilitat  $\mathbb{Q}$  és absolutament contínua respecte a  $\mathbb{P} \Leftrightarrow$  existeix una variable aleatòria  $X$  positiva anomenada densitat i que denotarem per  $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ , tal que

$$\forall A \in \mathcal{F}, \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

**Definició 4.14** Les probabilitats  $\mathbb{Q}$  i  $\mathbb{P}$  són equivalents si són absolutaments contínues l'una de l'altre.

Com  $\mathbb{Q}$  és absolutament contínua respecte  $\mathbb{P}$ , podem dir que  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{Q}$  són equivalents  $\Leftrightarrow \mathbb{P}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0) = 1$ .

**Teorema 4.15 (Girsanov)** Sigui  $X(t)$  un procés adaptat i mesurable tal que  $\int_0^T X(s)^2 ds < \infty$ . Sigui

$$\xi(t) = \exp\left(-\int_0^t X(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t X(s)^2 ds\right), t \in [0, T],$$

una martingala en  $\mathbb{P}$ . Definim una nova mesura  $\mathbb{Q}$  de forma que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \xi(t)$$

Lavors, el procés

$$\tilde{W}_t := W_t + \int_0^t g_s ds, \quad t \in [0, T]$$

és un moviment Brownià sobre  $\mathbb{Q}$ .

*Demostració:* Podem trobar la demostració en els apunts de Corcuera, J.M.: *Introducción a la finanzas cuantitativas*.

## 4.6 Equacions diferencials estocàstiques en el sentit d'Itô

Ara considerem la equació diferencial estocàstica (EDE):

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad X_0 = \xi$$

on  $b$  y  $\sigma$  són funcions  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurables i  $\xi$  és una variable aleatòria  $\mathcal{F}_0$ -mesurable. Una solució de la EDE és un procés  $X$  adaptat amb trajectòries contínues tal que:

- $P[X_0 = \xi] = 1$ ,
- $P\left[\int_0^t \{|b(s, X_s)| + (\sigma(s, X_s))^2\}ds < \infty\right] = 1$ ,
- $X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$  amb probabilitat 1 para cada  $t \in [0, T]$ .

**Teorema 4.16 (d'Itô)** Si  $b$  i  $\sigma$  són funcions contínues i existeix un constant  $K$  tal que

- Condició de Lipschitz:  $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$ ,
- Creixement lineal:  $|b(t, x) + \sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$ ,
- $\mathbb{E}[X_0^2] < +\infty$ .

Aleshores admet solució única.

*Demostració:* Podem trobar la demostració en els apunts de Leon, J.: *Integración estocástica con respecto al movimiento browniano*.

## 4.7 Fórmula de Black-Scholes

El model de Samuelson, més conegut com model de Black-Scholes, consisteix en un mercat de dos actius. Un actiu sense risc,  $S^0$  que evoluciona com:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, t \geq 0,$$

on  $r$  és una constant no negativa, això és

$$S_t^0 = e^{rt}, t \geq 0,$$

i amb un actiu amb risc  $S$  que evoluciona com

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), t \geq 0,$$

on  $W_t$  és un moviment brownià. Com hem vist això implica que

$$S_t = S_0 \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right\}.$$

Llavors  $\log(S_t)$  és un moviment brownià, no necessàriament estàndar, i per les propietats del moviment brownià tenim que  $S_t$ :

- té trajectòries contínues.
- els increments relatius  $\frac{S_t - S_u}{S_u}$  són independents de  $\sigma(S_s, 0 \leq s \leq u)$ :

$$\frac{S_t - S_u}{S_u} = \frac{S_t}{S_u} - 1$$

i

$$\frac{S_t}{S_u} = \exp\left\{\mu(t-u) - \frac{\sigma^2}{2}(t-u) + \sigma(W_t - W_u)\right\}$$

que és independent de  $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq u) = \sigma(S_s, 0 \leq s \leq u)$ .

- els increments relatius són estacionaris:

$$\frac{S_t - S_u}{S_u} \sim \frac{S_{t-u} - S_0}{S_0}.$$

De fet podríem formular el model en termes d'aquestes tres hipòtesis.

### 4.7.1 Estratègies autofinançades

Una estratègia de cobertura és un procés  $\phi = (\phi)_{0 \leq t \leq T} = ((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$  a valors en  $\mathbb{R}^2$  adaptat a la filtració natural del moviment brownià,  $B_t$ , ( que coincideix amb la de  $S_t$ ). El valor de la cartera és

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

Per donar sentit a aquesta igualtat imposem la condició:  $\int_0^T (|H_t^0| + (H_t)^2) ds < \infty$  q.s. llavors les integrals estan ben definides:

$$\begin{aligned} \int_0^T H_t^0 dS_t^0 &= \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt \\ \int_0^T H_t dS_t &= \int_0^T H_t S_t \mu dt + \int_0^T \sigma H_t S_t dB_t \end{aligned}$$

Llavors tenim la definició següent:

**Definició 4.17** Una estratègia autofinançada,  $\phi$ , és una parella de processos adaptats  $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  que satisfan

- $\int_0^T (|H_t^0| + (H_t)^2) ds < \infty$  q.s
- $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_t^0 S_0 + \int_0^t H_s^0 r e^{rs} ds + \int_0^t H_s dS_s$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Indiquem  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ , de forma que  $\tilde{S}_t$  l'utilitzarem per indicar qualsevol valor actualitzat.

**Proposició 4.18**  $\phi$  és autofinançada si i només si:

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s.$$

*Demostració:* Suposem que  $\phi$  és autofinançada, llavors com  $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$ , resultarà que

$$\begin{aligned}
d\tilde{V}_t &= -re^{-rt}V_t dt + e^{-rt}dV_t \\
&= -re^{-rt}(H_t^0 S_t^0 + H_t S_t)dt + e^{-rt}(H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t) \\
&= -re^{-rt}(H_t^0 S_t^0 + H_t S_t)dt + e^{-rt}(H_t^0 r S_t^0 dt + H_t dS_t) \\
&= -re^{-rt}H_t S_t dt + e^{-rt}H_t dS_t = H_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \\
&= H_t d\tilde{S}_t.
\end{aligned}$$

Anàlogament si  $d\tilde{V}_t = H_t d\tilde{S}_t$  tenim que  $dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$ .

#### 4.7.2 Valoració i cobertura en el model Black-Scholes

Busquem una probabilitat en la qual els preus actualitzats siguin martingala. Sabem que

$$\begin{aligned}
d\tilde{S}_t &= d(e^{-rt}S_t) = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = \\
&= e^{-rt}S_t(-r dt + \mu dt + \sigma dB_t) = \\
&= \sigma \tilde{S}_t d\left(-\frac{r-\mu}{\sigma}t + B_t\right) = \\
&= \sigma \tilde{S}_t dW_t
\end{aligned}$$

amb  $W_t = B_t - \frac{r-\mu}{\sigma}t$ .

Llavors per el teorema de Girsanov amb  $\theta_t = \frac{r-\mu}{\sigma}$  resulta que  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  és un brownià estàndar respecte a la probabilitat  $P^*$

$$dP^* = \exp\left\{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T\right\}dP.$$

Amb el que hem anunciant anteriorment deduem que

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right\}$$

i que  $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$  és una  $P^*$ -martingala. També tenim que

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left\{rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right\}.$$

**Definició 4.19** Una estratègia  $\phi$  és admissible si és autofinançada i el seu valor descomptat  $\tilde{V}_t = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t \geq 0, \forall t$ .

**Definició 4.20** Direm que una opció és replicable si el seu payoff és igual al valor final d'una estratègia admissible.

**Proposició 4.21** En el model de Black-Scholes qualsevol opció amb payoff de la forma  $h = f(S_T)$ , de quadrat integrable respecte a  $P^*$ , amb  $\mathbb{E}_{P^*}(h|\mathcal{F}_t)$  una funció  $C^{1,2}$  del temps i de  $S_t$ , es replicable, el seu preu ve donat per  $C(t, S_t) = \mathbb{E}_{P^*}(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t)$  i la estrategia que replica  $h$  ve donada per  $(H_t^0, H_t)$  amb

$$H_t = \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t},$$

$$H_t^0 e^{rt} = C(t, S_t) - H_t S_t.$$

*Demostració:* En primer lloc, per la independència dels increments relatius

$$\mathbb{E}_{P^*}(e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{P^*}(e^{-r(T-t)}f(\frac{S_T}{S_t}S_t)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{P^*}(e^{-r(T-t)}f(\frac{S_T}{S_t}x))_{x=S_t} = C(t, S_t)$$

de forma que el que anomenarem preu del derivat en  $t$  depen únicament de  $S_t$  i  $t$ .

Si apliquem la fórmula d'Itô a  $\tilde{C}(t, S_t) = e^{-rt}C(t, \tilde{S}_t e^{rt})$ , tindrem

$$\tilde{C}(t, S_t) = C(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial s} ds + \int_0^t \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s} d\tilde{S}_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s^2} \sigma^2 \tilde{S}_s^2 ds$$

i com

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

tindrem

$$\tilde{C}(t, S_t) = C(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s} \sigma \tilde{S}_s dW_s + \int_0^t \left( \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s^2} \sigma^2 \tilde{S}_s^2 \right) ds$$

com sabem que  $\tilde{C}(t, S_t)$  és una martingala de quadrat integrable:

$$\tilde{C}(t, S_t) = \mathbb{E}_P^*(e^{rT}f(S_T)|\mathcal{F}_t)$$

i com la descomposició de un procés d'Itô és única tindrem:

$$\tilde{C}(t, S_t) = C(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s} d\tilde{S}_s$$

$$\frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s^2} \sigma^2 \tilde{S}_s^2 = 0.$$

Així tenim

$$\frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s} = e^{-rt} \frac{\partial C(s, S_s)}{\partial S_s} \frac{\partial S_s}{\partial \tilde{S}_s} = \frac{\partial C(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s^2} = \frac{\partial^2 C(s, S_s)}{\partial S_s^2} \frac{\partial S_s}{\partial \tilde{S}_s} = e^{rt} \frac{\partial C(s, S_s)}{\partial S_s^2}$$

podem escriure

$$\tilde{C}(t, S_t) = C(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial C(s, S_s)}{\partial S_s} dS_s$$

$$\frac{\partial C(s, S_s)}{\partial s} + rS_s \frac{\partial C(s, S_s)}{\partial S_s} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_s^2 \frac{\partial^2 C(s, S_s)}{\partial S_s^2} = rC(s, S_s).$$

Llavors tenim una estratègia autofinançada amb valor final  $f(S_T)$  i tal que  $(H_t^0, H_t)$  venen donats per

$$H_t = \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t}$$

i

$$e^{rt} H_t^0 = C(t, S_t) - \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t} S_t.$$

### 4.7.3 Preu i cobertura d'una opció de compra. Fórmula de Black-Scholes

Si prenem  $h = (S_T - K)_+$ , tenim la anomenada fórmula de Black-Scholes que és

$$C(t, S_t) = S_t \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-).$$

Amb  $\Phi(x)$  la funció de distribució d'una normal estàndar i on

$$d_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

De fet

$$\begin{aligned} C(t, S_t) &= \mathbb{E}_{p^*}(e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{p^*}(S_T \mathbb{I}_{\{S_T > K\}} | \mathcal{F}_t) - K e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{p^*}(\mathbb{I}_{\{S_T > K\}} | \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E}_{p^*}\left(\frac{S_T}{S_t} \mathbb{I}_{\left\{\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{S_t}\right\}}\right)_{x=S_t} - K e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E}_{p^*}\left(\mathbb{I}_{\left\{\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{S_t}\right\}}\right)_{x=S_t}. \end{aligned}$$

Com tenim

$$\frac{S_T}{S_t} = \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right\} = \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_{T-t})\right\}$$

llavors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p^*}\left(\mathbb{I}_{\left\{\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{x}\right\}}\right) &= P^*\left\{\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{x}\right\} \\ &= P^*\left\{\log\frac{S_T}{S_t} > \log\frac{K}{x}\right\} \\ &= P^*\left(\frac{W_{T-t}}{\sqrt{(T-t)}} > \frac{\log\frac{K}{x} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\log\frac{K}{x} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\log\frac{K}{x} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)_{x=S_t} \\ &= \Phi(d_-). \end{aligned}$$

Per altre banda si escribim  $Y$  per indicar una variable normal estàndar tenim

$$\begin{aligned} &e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E}_{p^*}\left(\frac{S_T}{S_t} \mathbb{I}_{\left\{\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{x}\right\}}\right) \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{p^*} \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_{T-t})\right\} \mathbb{I}_{\{\sigma W_{T-t} > \log\frac{K}{x} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\}} \\ &= \mathbb{E}_{p^*} \left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma(W_{T-t})\right\} \mathbb{I}_{\{\sigma W_{T-t} > \log\frac{K}{x} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\}}\right) \\ &= \mathbb{E}_{p^*} \left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \sigma\sqrt{(T-t)}Y\right\} \mathbb{I}_{\left\{Y < \frac{\log\frac{K}{x} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log\frac{K}{x} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \sigma\sqrt{(T-t)}y - \frac{1}{2}y^2\right\} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log \frac{K}{x} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{(T-t)} + y)^2\right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log \frac{K}{x} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} dy \\
&= \Phi(d_+) \text{ (després de substituir } x \text{ per } S_t).
\end{aligned}$$

D'aquí

$$\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t} = \Phi(d_+) := \Delta.$$

De fet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t} &= \Phi(d_+) + \frac{\partial \Phi(d_+)}{\partial S_t} - Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(d_-)}{\partial S_t} \\
&= \Phi(d_+) + S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_+^2}{2}} \frac{\partial d_+}{\partial S_t} - Ke^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_-^2}{2}} \frac{\partial d_-}{\partial S_t}.
\end{aligned}$$

Ara bé

$$\frac{\partial d_+}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}}.$$

Per tant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t} &= \Phi(d_+) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial d_+}{\partial S_t} (S_t e^{-\frac{d_+^2}{2}} - Ke^{-r(T-t)} e^{-\frac{d_-^2}{2}}) \\
&= \Phi(d_+) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial d_+}{\partial S_t} S_t e^{-\frac{d_+^2}{2}} \left(1 - \frac{K}{S_t} e^{-r(T-t)} e^{\frac{d_+^2}{2} - \frac{d_-^2}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Per últim

$$d_+ = d_- + \sigma\sqrt{T-t}$$

de forma que

$$d_+^2 - d_-^2 = (d_- + \sigma\sqrt{T-t})^2 - d_-^2 = 2d_- \sigma\sqrt{(T-t)} + \sigma^2(T-t) = 2\log \frac{S_t}{K} + 2r(T-t)$$

i per tant

$$1 - \frac{K}{S_t} e^{-r(T-t)} e^{\frac{d_+^2}{2} - \frac{d_-^2}{2}} = 0.$$

Com a punt final de l'apartat podem dir que en el cas de Put, és a dir, per una opció de venda la fórmula seria:

$$P(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_-) + S_t\Phi(-d_+)$$

on tot el procés de deducció és anàleg al cas d'una opció de compra (Call).

Això també es pot fer usant la fórmula paritat Call-Put.

#### 4.7.4 Exemple del model Black-Scholes

Suposem que el preu inicial d'un actiu financer és de 50 euros. La volatilitat del actiu és de un 10%. El tipus d'interès anual és del 5%. Calcula la prima d'un Call europeu de sis mesos i preu d'exercici 40 euros.

*Solució:* Tenim  $S = 50$ ,  $K = 40$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $r = 0.05$ ,  $T = 0.5$ ,  $t = 0$  i volem trobar  $C(t, S_t) = S_t\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-)$

Calculem

$$d_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{50}{40}\right) + (0.05 \pm \frac{1}{2}0.1^2)(0.5 - 0)}{0.1\sqrt{(0.5 - 0)}}$$

i dona  $d_+ = 3.544635096$  i  $d_- = 3.473924418$ , ara calculem  $\Phi(d_+)$  i  $\Phi(d_-)$  que son una distribució normal estàndar i dona  $\Phi(d_+) = 0.9998034215$  i  $\Phi(d_-) = 0.9997435472$ .

Així tenim

$$C(t, S_t) = 50(0.9998034215) - 40e^{-0.05(0.5-0)}(0.9997435472) = 10.98754534$$

#### 4.7.5 Programa en C per calcular el Call en un model Black-Scholes

En aquest apartat hem creat un programa en llenguatge C per tal de trobar el preu d'un call sota un model Black-Scholes, el codi seria el següent:

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
int main(int argc, char *argv[]){
    double param1,param2,d1,d2,S,K,r,s,T,t,N1,N2,C;
    printf("Introdueix el preu de l'actiu S:\n");
    scanf("%lf",&S);
    printf("Introdueix el strike K:\n");
    scanf("%lf",&K);
    printf("Introdueix la taxa d'interes anual r:\n");
    scanf("%lf",&r);
    printf("Introdueix el temps o data inicial en anys t:\n");
    scanf("%lf",&t);
    printf("Introdueix la data de venciment T:\n");
    scanf("%lf",&T);
    printf("Introdueix la volatilitat s:\n");
    scanf("%lf",&s);
    d1=(log(S/K)+(r+(0.5)*(s*s))*(T-t))/(s*(sqrt(T-t)));
    d2=(log(S/K)+(r-(0.5)*(s*s))*(T-t))/(s*(sqrt(T-t)));
    param1 = d1/sqrt(2);
    param2 = d2/sqrt(2);
    N1 = (0.5)*(1+erf (param1));
    N2 = (0.5)*(1+erf (param2));
    C=S*N1-K*exp(-r*(T-t))*N2;
    printf ("El call es %lf\n", C);

    system("PAUSE");
    return 0;
}

```

## 5 El model Black-Scholes com a pas al límit de CRR

En aquest apartat veurem com relacionar el model Cox-Ross-Rubinstein amb el model Black-Scholes, això ho farem veient que el model Black-Scholes és sobtè portant al límit el model CRR.

Considerem el procés de preus  $S = (S_t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , un put i un call amb perfil de benefici  $P_T = (K - S_T)^+$ ,  $C_T = (S_T - K)^+$  respectivament. Agafem un partició de  $[0, T]$  de mida  $\frac{T}{N}$  tal que  $t_i^{(N)} = i \cdot \frac{T}{N}$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, N\}$  i posem ara el procés de la següent forma

$$S_i = S_{t_i}.$$

Prenem  $r_N = r \frac{T}{N}$  com la taxa d'interès lliure de risc i que el preu de l'actiu variarà de la següent manera:

$$\begin{aligned} S_0 &= S_0 u, \text{ amb } u = (1 + r_N) e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \\ &\quad \text{ó} \\ S_0 &= S_0 d, \text{ amb } d = (1 + r_N) e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \end{aligned}$$

amb  $d < (1 + r_N) < u$ .

També, resulta el següent:

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^n T_i^N, \text{ on } T_i \in \{u, d\}.$$

També sabem que el paràmetre  $p_N$  és

$$p_N = P(T_i^N) = \frac{1 + r_N - d}{u - d} = \frac{1 - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}.$$

Si considerem ara  $X_i^N := \log \frac{T_i^N}{1+r_N}$  de manera que  $X_i^N$  és una Bernoulli sobre  $\left\{ \frac{-\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right\}$  amb el paràmetre  $p_N$ . Per tant podem reescriure

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 \prod_{i=1}^n (1 + r_N) e^{X_i^N} \\ \Rightarrow \log(S_N) &= \log(S_0) + \log(1 + r_N)^N + \sum_{i=1}^N X_i^N. \end{aligned}$$

Ara veurem que passa quan tendim  $N \rightarrow \infty$  i deixem  $T$  fixada.

Ho mirem per cada part del sumand de l'expressió, sense entrar molt en detalls

- $\log(1 + r_N)^N \rightarrow rT$  quan  $N \rightarrow \infty$ , ja que  $(1 + r_N)^N = (1 + r\frac{T}{N}) \rightarrow e^{rT}$ .
- Ara explicarem que passa amb el sumand  $\sum_{i=1}^N X_i^N$ .

Veiem que

$$\begin{aligned}\mu &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\sum_{i=1}^N X_i^N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma \sqrt{N} (2p_N - 1), \\ \nu &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Var}(\sum_{i=1}^N X_i^N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} 4\sigma^2 p_N (p_N - 1).\end{aligned}$$

Utilitzant el desenvolupament de Taylor de l'exponencial quan  $x \approx 0$  tenim

$$p_N = \frac{1 + r_N - d}{u - d} = \frac{1 - e^{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}}} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \frac{1}{2}(\frac{\sigma}{\sqrt{N}})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\sigma}{\sqrt{N}})^3 \dots}{2\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{2}{3!}(\frac{\sigma}{\sqrt{N}})^3 + \frac{2}{5!}(\frac{\sigma}{\sqrt{N}})^5 \dots} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2};$$

quan  $N \rightarrow +\infty$ .

Així és evident que podem conèixer els valors de  $\mu$  que és l'esperança i de  $\nu$  que és la variància i són:

$$\begin{aligned}\mu &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma \sqrt{N} (2p_N - 1) \rightarrow \frac{-\sigma^2}{2}; N \rightarrow +\infty, \\ \nu &= \lim_{N \rightarrow +\infty} 4\sigma^2 p_N (p_N - 1) \rightarrow \sigma^2; N \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Aleshores  $\sum_{i=1}^N X_i^N \rightarrow N(\frac{-\sigma^2}{2}, \sigma^2)$ .

Ara desferent el canvi de variable, tenim

$$S_T = \log(S_N) \rightarrow N(\log(S_0) + rT, \sigma^2).$$

Amb la llei que regula el procés de preus  $(S_t)_{t \geq 0}$  coneguda ara podem afrontar el problema de la valoració de qualsevol derivat.

Considerem ara el preu d'un Put. Tenim

$$P_0^N = \mathbb{E}((1 + \frac{rT}{N})^{-N} K - S_0 e^{\sum_{j=i}^N X_j^N})^+.$$

Definim  $\varphi(y) := (Ke^{-rT} - S_0e^y)^+$ . Hem de fer notar que no és del tot equivalent per al Call, ja que la  $\varphi$  anàloga no es acotada. Aquesta és la raó per la qual nosaltres fem la demostració a partir del opció de venda Put.

Així tenim

$$P_0^{(N)} - \mathbb{E}(\varphi(\sum_{j=i}^N X_j^N)) \rightarrow 0,$$

quan  $N \rightarrow +\infty$ .

perquè

$$|P_0^{(N)} - \mathbb{E}[\varphi(\sum_{j=i}^N X_j^N)]| \leq K|(1 + r\frac{T}{N})^{-N} - e^{-rT}| \rightarrow 0$$

quan  $N \rightarrow +\infty$ .

Per tant,

$$\mathbb{E}[\varphi(\sum_{j=i}^N X_j^N)] \rightarrow \mathbb{E}[\varphi(Z)]; Z \sim N(\mu, v).$$

Ara ja podem donar la fórmula de valoració de Black-Scholes:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{Ke^{-rT} \geq S_0e^y} (Ke^{-rT} - S_0)e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Simplificant i arreglant la fórmula anterior tenim

$$P_0 = Ke^{-rT}\Phi(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}) - S_0\Phi(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}).$$

amb  $\alpha = \frac{1}{\sigma} \log(\frac{K}{S_0}) - \frac{rT}{\sigma}$ .

Finalment com a conclusió tenim,

$$P_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} P_0^{(N)} \rightarrow Ke^{-rT}\Phi(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}) - S_0\Phi(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}).$$

Després, per calcular el preu d'un Call, utilitzariem la fórmula de paritat Call-Put.

## 6 Conclusions

En aquest treball hem pogut veure com ha sigut possible relacionar les assignatures de Modelització i de Processos Estocàstics del Grau de Matemàtiques mitjançant la Matemàtica Financera, una eina que ha sigut imprescindible per la realització del nostre treball.

Per començar hem vist un llistat de conceptes previs per introduir-nos en el tema i posar-nos en situació, com també una mica d'història dels mercats financers.

Així seguidament hem començat a tractar els mercats financers a temps discret, parlant primer de les martingales, seguit del principi de no arbitratge, per arribar als teoremes fonamentals de les finances i acabar presentant el model de Cox-Ross-Rubinstein. Finalment hem implementat un programa amb el software Mathematica per trobar el preu d'un Call i el Preu d'un put sota el model Cox-Ross-Rubinstein.

En el segon apartat expliquem els mercats financers a temps continu, presentant primer el que són els processos estocàstics i en particular el moviment Brownià, passant per la integració estocàstica i el teorema d'Itô i amb el teorema de Girsanov arribem al model de Black-Scholes, per trobar els preus del Call i el Put. En aquest cas, hem programat en llenguatge C un algoritme per calcular el preu del Call sota el model Black-Scholes.

Com a conclusió important volem destacar la importància de l'equació de Black-Scholes en el món financer ja que ha impulsat molt les finances i ha permès facilitar la feina dels inversors perquè permet protegir-se i seguir invertint.

## Referències

- [1] Elliot, R. J.; Kopp, P. Ekkehard : *Mathematics of Financial Markets*, Springer, 1999.
- [2] Lamberton, D.; Lapeyre, B.: *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [3] Ratanov, N.: *Modelos estocásticos de mercados financieros*, Universidad de Rosario, Colección Lecciones Facultad de Economía, 2009.
- [4] Yor, M.: *Aspects of Mathematical Finance*, Springer, 2006.
- [5] Bouleau, N.: *Martingales et marchés financiers*, Editions Odile Jacob, 1998.
- [6] Gasull, A.: *Fes Matemàtiques!*, Universitat Autònoma de Barcelona, 2000.
- [7] Hull, J. C.: *Introducción a los mercados de futuros y opciones*, Prentice Hall, 2008.
- [8] Corcuera, J.M.: *Introducción a la finanzas cuantitativas*,  
**[diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/9042/1/ifqf11.pdf](http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/9042/1/ifqf11.pdf)**.
- [9] Leon, J.: *Integración estocástica con respecto al movimiento browniano*,  
**<http://revistaerm.univalle.edu.co/VolXIV2/autor5.pdf>**.
- [10] Mordecki, E.: *Modelos matemáticos en finanzas: Valuación de opciones*,  
**<http://www.cmat.edu.uy/mordecki/courses/upae/upae-curso.pdf>**.
- [11] Vives, J.: *Apunts Modelització*, Campus Virtual, 2015.
- [12] Rovira, C.: *Apunts Processos estocàstics*, 2015.