

Trabajo final de grado
GRADO DE MATEMÁTICAS

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

**INTRODUCCIÓN A LA
DIMENSIÓN DE HAUSDORFF**

Autora: Alba Juventeny

Directora: Dr. María Jesús Carro Rossell
Realizado en: Departament de
Matemàtica Aplicada i Anàlisi

Barcelona, 27 de junio de 2016

Abstract

In the early-to-mid 20th century, several notions of dimension appeared to deal with some mathematical objects considered until that moment as “pathological” and not worthy of study. The aim of this project is to explore the notions of Hausdorff, Minkowski and *box-counting* dimension and their basic features. We show that Minkowski and *box-counting* dimensions are equivalent and that the Hausdorff dimension of a set does not exceed its Minkowski dimension. We also introduce self-similar sets, where the theory mentioned before becomes elegant and simple and where both dimensions match. Finally we construct a space-filling curve, namely, the Hilbert’s curve.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi pareja y a mis padres el apoyo recibido, el esfuerzo y la inversión de tiempo que han hecho para que yo pudiera realizar este trabajo. A Joana le agradezco la paciencia y la alegría. Y a mi tía los canguros.

Quiero agradecer también a mi tutora, Dr. María Jesús Carro, su esfuerzo y dedicación, así como los consejos para inculcar en mi un sentido del rigor académico sin el cual no podría tener una formación completa como matemática.

No puedo terminar esta sección sin dar las gracias a Marc y a todas las personas que escriben en foros de \LaTeX por el apoyo técnico.

Índice general

Introducción	1
Conceptos previos	3
1. La dimensión de Minkowski y la dimensión <i>box-counting</i>	5
1.1. La dimensión de Minkowski	5
1.2. La dimensión <i>box-counting</i>	8
1.3. Definición equivalente de la dimensión superior de Minkowski	10
1.4. Ejemplos de cálculo	11
1.4.1. La dimensión de Minkowski del conjunto cuaternario de Cantor	11
1.4.2. La dimensión <i>box-counting</i> del conjunto ternario de Cantor	14
2. La medida y la dimensión de Hausdorff	16
2.1. La medida de Hausdorff	16
2.2. La dimensión de Hausdorff	20
2.2.1. Definiciones equivalentes de dimensión de Hausdorff	20
2.3. Relación entre dimensión de Hausdorff y <i>box-counting</i>	21
2.4. Cálculo de la dimensión de Hausdorff. Ejemplos	23
2.4.1. El conjunto ternario de Cantor	23
2.4.2. El triángulo de Sierpinski	29
3. Autosemejanza	33
4. Curvas que llenan el espacio	41
4.1. Intervalos cuárticos y cuadrados diádicos	42
4.2. Correspondencia diádica	44
4.3. Construcción de una aplicación de Peano. La curva de Hilbert	48
Conclusiones	56

Introducción

Una característica fundamental de muchos espacios matemáticos es su dimensión, que mide la “complejidad” o los “grados de libertad” inherentes al espacio. Sin embargo no hay una sola noción de dimensión sino que hay una gran variedad de ellas, cada una apropiada para ciertas clases de espacios matemáticos. Definiciones aparentemente parecidas pueden tener propiedades diferentes y no toman necesariamente el mismo valor sobre un mismo conjunto.

La aparición, entre finales del siglo XIX y principios del XX, de unos objetos matemáticos llamados en ese momento *monstruos geométricos*, que amenazaban con hacer tambalearse los pilares sobre los que se habían construido muchas propiedades matemáticas, propició la introducción de nuevos conceptos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Entre ellos están las nociones de dimensión de Hausdorff, de Minkowski y *box-counting* que, en líneas generales, reflejan propiedades de escalado y autosemejanza y dan una idea de cómo un objeto llena el espacio.

En este trabajo se pretendía explorar la definición y propiedades básicas de la dimensión de Hausdorff así como sus usos y aplicaciones. En las primeras referencias consultadas ya aparecieron la dimensión de Minkowski y la dimensión *box-counting* como conceptos ampliamente relacionados con el objeto de estudio, así que el primero de los 4 capítulos que componen el presente trabajo está dedicado a estas dos nociones de dimensión. Se definen y se demuestra que son equivalentes, a partir de resultados y ejercicios propuestos en [3, 10].

En el segundo capítulo se introducen las definiciones de medida y dimensión de Hausdorff, algunas de sus propiedades, y la obligada comparación con las nociones de dimensión del capítulo anterior. Se presentan también dos ejemplos de cálculo de la dimensión de Hausdorff de dos conjuntos. Éstos pertenecen a una clase de conjuntos llamados autosemejantes, que se describen en el Capítulo 3, donde también se demuestra que la dimensión de Hausdorff y la dimensión *box-counting* coinciden sobre estos conjuntos, y que una vez conocida la estructura autosemejante del conjunto, su cálculo es inmediato. Los Capítulos 2 y 3 se han escrito siguiendo [2, 3, 9, 10].

Finalmente en el Capítulo 4 se construye una curva que llena el espacio, esto es, una aplicación continua y exhaustiva de $[0, 1]$ en $[0, 1] \times [0, 1]$. Además la curva construida, llamada la curva de Hilbert, conserva la medida. Esta construcción, que podríamos denominar autorreplicante, no sólo tiene interés en ella misma sino que, teniendo dimensión de Hausdorff y dimensión *box-counting* igual a dos, ilustra la

idea de que dichas dimensiones dan noción del espacio que el conjunto rellena. La construcción de la curva de Hilbert se ha hecho a partir de [9].

Conceptos previos

En este pequeño apéndice se presentan definiciones y resultados básicos de teoría de la medida que se manejarán a lo largo del trabajo. No se incluyen demostraciones puesto que en su mayoría fueron estudiadas en el curso *Anàlisi real i funcional*, asignatura del grado de Matemáticas. Sin embargo éstas pueden encontrarse en [1].

Breve repaso de teoría de la medida

Sea X un conjunto no vacío.

Definición 0.0.1. Sea Σ una σ -álgebra sobre X . Una medida μ sobre (X, Σ) es una función

$$\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$$

tal que

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$,
- 2) $\mu(\biguplus_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

A la terna (X, Σ, μ) se le llama espacio de medida. En un tal espacio, se dice que E es nulo si $E \in \Sigma$ y $\mu(E) = 0$. Un espacio de medida se dice que es completo si todo subconjunto de un nulo es de Σ (y por tanto nulo).

Definición 0.0.2. Se llama medida exterior sobre X a toda función

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

que cumpla las siguientes propiedades

- 1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- 2) $\mu^*(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$,
- 3) Si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Definición 0.0.3. Sea $\Phi \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \in \Phi$. Se llama función elemental a toda función $\beta : \Phi \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\beta(\emptyset) = 0$.

Proposición 0.0.4. *Toda función elemental define una medida exterior por medio de*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta(E_k) : A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k, E_k \in \Phi \right\}.$$

Fijada una medida exterior μ^* sobre X , se define la familia $\Sigma(\mu^*)$ de conjuntos μ^* -medibles como la constituida por los $C \subset X$ tales que para todo $E \subset X$ satisfacen

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \cap C^c). \quad (0.1)$$

Teorema 0.0.5. *Sea μ^* una medida exterior sobre X . Entonces $(X, \Sigma(\mu^*), \mu)$ es un espacio de medida completo, donde $\mu = \mu^*|_{\Sigma(\mu^*)}$.*

Sea ahora X un espacio métrico. Denotamos por $d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$ y por $d(x, B) = \inf\{|x - y| : y \in B\}$, donde $|\cdot|$ denota la distancia en X .

Definición 0.0.6. *Se dice que una medida exterior μ^* sobre X es métrica si cumple*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad \text{si } d(A, B) > 0.$$

Teorema 0.0.7. (Carathéodory) *Si μ^* es una medida exterior métrica sobre X , todo cerrado F (y todo boreliano) de X es μ^* -medible.*

La medida de Lebesgue

Consideremos la siguiente construcción de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d . Dado

$$\Delta := \left\{ \prod_{i=1}^d [a_i, b_i) : [a_i, b_i) \subset \mathbb{R} \right\}, \quad \text{la función} \quad \beta : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\prod_{i=1}^d [a_i, b_i) \longmapsto \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

es una función elemental a partir de la cual, en virtud de la Proposición 0.0.4, podemos definir la medida exterior de Lebesgue de un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ mediante la expresión

$$m^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \beta(C_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k, C_k \in \Delta \right\}.$$

Esta medida exterior nos permite definir el conjunto Σ de los elementos m^* -medibles que satisfacen (0.1).

Si consideramos en \mathbb{R}^d la métrica euclídea, se satisface

Teorema 0.0.8. *m^* es una medida exterior métrica*

Observación 0.0.9. Se llega al mismo valor de medida exterior de Lebesgue si en su construcción se usan cajas abiertas o cajas cerradas en lugar de cajas semiabiertas. También se pueden reemplazar los recubrimientos de E por cajas por recubrimientos por bolas.

Proposición 0.0.10. $m^*(C_k) = \beta(C_k)$.

Capítulo 1

La dimensión de Minkowski y la dimensión *box-counting*

Para las definiciones de dimensión que se introducen en este capítulo, es fundamental la idea de “medida a escala δ ”. Para cada δ , medimos un conjunto de modo que se ignoren las irregularidades de tamaño menor que δ , y vemos cómo se comportan estas medidas cuando $\delta \rightarrow 0$. Un uso de estas nociones de dimensión es crear distinciones más finas entre varios tipos de subconjuntos “pequeños” de espacios como \mathbb{R}^d , más allá de lo que se consigue con la medida de Lebesgue.

A partir de ahora y para el resto del trabajo, nos ceñiremos a \mathbb{R}^d como espacio métrico de estudio, dotado de la distancia euclídea. Si no se indica lo contrario, dado $E \subset \mathbb{R}^d$, $m(E)$ denotará la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d de E .

Para cada $\delta > 0$ denotamos por $E_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, E) < \delta\}$.

En el primer apartado de este capítulo se introduce la definición de dimensión de Minkowski así como algunas propiedades. En el segundo se da la definición de dimensión *box-counting* y se demuestra que es equivalente a la de Minkowski. En el tercer apartado se define una dimensión equivalente a la dimensión superior de Minkowski que relaciona a ésta última con la cota superior asintótica de $m(E_\delta)$. Finalmente en el último apartado se trata el cálculo de las dimensiones desarrolladas a lo largo del capítulo a través de dos ejemplos sencillos.

1.1. La dimensión de Minkowski

Definición 1.1.1. *Sea E un subconjunto acotado de \mathbb{R}^d . Se define la **dimensión superior de Minkowski***

$$\overline{\dim}_M(E) := \limsup_{\delta \rightarrow 0} d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta}$$

*y la **dimensión inferior de Minkowski***

$$\underline{\dim}_M(E) := \liminf_{\delta \rightarrow 0} d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta}.$$

Si las dimensiones superior e inferior de Minkowski coinciden, se define la **dimensión de Minkowski**

$$\dim_M(E) := \overline{\dim}_M(E) = \underline{\dim}_M(E).$$

Proposición 1.1.2. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es no vacío y acotado, $0 \leq \underline{\dim}_M(E) \leq \overline{\dim}_M(E) \leq d$.

Demostración. Si $E \neq \emptyset$, existe $x \in E$, y para todo $\delta > 0$, $B(x, \delta) \subset E_\delta$, de donde $C\delta^d \leq m(E_\delta)$. Luego para todo $0 < \delta < 1$,

$$-\frac{\log C}{\log \delta} \leq d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta},$$

así que tomando en ambos lados $\liminf_{\delta \rightarrow 0}$ obtenemos $0 \leq \underline{\dim}_M(E)$.

Por ser E acotado, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que para cada $0 < \delta < 1$, $m(E_\delta) \leq K$, luego

$$d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta} \leq d - \frac{\log K}{\log \delta}$$

y tomando en ambos lados el límite superior cuando $\delta \rightarrow 0$ obtenemos $\overline{\dim}_M(E) \leq d$. \square

Observación 1.1.3. Sean $E \subset F \subset \mathbb{R}^d$ subconjuntos acotados. Claramente

$$\underline{\dim}_M(E) \leq \underline{\dim}_M(F) \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_M(E) \leq \overline{\dim}_M(F).$$

Definición 1.1.4. Podemos extender las definiciones de dimensión superior e inferior de Minkowski a subconjuntos E no acotados de la siguiente forma,

$$\underline{\dim}_M(E) := \sup_{F \subset E, \text{ acotado}} \underline{\dim}_M(F) \tag{1.1}$$

y

$$\overline{\dim}_M(E) := \sup_{F \subset E, \text{ acotado}} \overline{\dim}_M(F). \tag{1.2}$$

Proposición 1.1.5. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\underline{\dim}_M(E) < d$. Entonces $m(E) = 0$. En particular, para cualquier $F \subset \mathbb{R}^d$ con $m(F) > 0$, se tiene $\underline{\dim}_M(F) = d$.

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\underline{\dim}_M(E) < d$. Entonces para todo $F \subset E$ acotado, $\underline{\dim}_M(F) < d$. Esto implica que existe una sucesión $\{\delta_k\}_k \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} d - \frac{\log m(F_{\delta_k})}{\log \delta_k} < d,$$

o equivalentemente a este último límite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log m(F_{\delta_k})}{\log \delta_k} = a > 0.$$

Luego tomando $\epsilon = a/2$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$,

$$\frac{\log m(F_{\delta_k})}{\log \delta_k} > a - a/2.$$

Así que para todo $k > k_0$,

$$m^*(F) \leq m^*(F_{\delta_k}) = m(F_{\delta_k}) < \delta_k^{a/2},$$

y haciendo $k \rightarrow \infty$ obtenemos $m^*(F) = 0$. Esto vale para cualquier subconjunto acotado de E .

En estas condiciones, como $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap B(0, i))$, donde $B(0, i)$ es la bola de centro 0 y radio i de \mathbb{R}^d , se tiene, por la subaditividad de la medida exterior, que

$$m^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E \cap B(0, i)) = 0,$$

de donde $m^*(E) = 0$.

Igual que en la demostración del apartado c) de del Teorema 0.0.5, se tiene que E satisface (0.1) para $\mu^* = m^*$, así que E es medible y $m(E) = 0$.

Sirviéndonos del contrarrecíproco, tenemos que si $F \subset \mathbb{R}^d$ es tal que $m(F) > 0$, entonces $\underline{\dim}_M(F) \geq d$. De esto y de la Proposición 1.1.2, obtenemos

$$\underline{\dim}_M(F) = \overline{\dim}_M(F) = \dim_M(F) = d.$$

□

Observación 1.1.6. Sea $0 \leq k \leq d$, y consideremos un subconjunto acotado de un subespacio k -dimensional (en el sentido de dimensión de espacio vectorial) de \mathbb{R}^d . Por ejemplo sea $E = B^k(0, 1) \times \{0\}^{d-k}$, donde $B^k(0, 1) \subset \mathbb{R}^k$ es la bola unidad en \mathbb{R}^k y identificamos \mathbb{R}^d con $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$ de la manera habitual. Entonces se tiene

$$B^k(0, 1) \times B^{d-k}(0, \delta) \subset E_\delta \subset B^k(0, 2) \times B^{d-k}(0, \delta)$$

para todo $0 < \delta < 1$, lo que implica

$$c\delta^{d-k} \leq m(E_\delta) \leq C\delta^{d-k}$$

para constantes c, C que dependen sólo de d, k . En particular, se tiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta} = k.$$

Se verifica fácilmente que los subespacios k -dimensionales de \mathbb{R}^d tienen dimensión de Minkowski k .

1.2. La dimensión *box-counting*

Definición 1.2.1. Sean $E \subset \mathbb{R}^d$ acotado y $\delta > 0$. Se denota por

- (i) $\mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)$ el menor número de bolas abiertas de radio δ con centros en \mathbb{R}^d necesarias para recubrir E .
- (ii) $\mathcal{N}_\delta^{\text{int}}(E)$ el menor número de bolas abiertas de radio δ con centros en E necesarias para recubrir E .
- (iii) $\mathcal{N}_\delta^{\text{net}}(E)$ el cardinal de la mayor δ -net de E , es decir, del mayor conjunto $\{x_1, \dots, x_k\} \subset E$ tal que $|x_i - x_j| \geq \delta$ para cada $1 \leq i, j \leq k$.
- (iv) $\mathcal{N}_\delta^{\text{pack}}(E)$ el mayor número de bolas disjuntas que se pueden encontrar con radio δ y centro en E .
- (v) $\mathcal{N}_\delta^{\text{box}}(E)$ el siguiente número. Consideremos la colección de cubos en la malla de δ -coordenadas de \mathbb{R}^d , es decir los cubos de la forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_d\delta, (m_d + 1)\delta]$$

donde m_1, \dots, m_d son enteros. $\mathcal{N}_\delta^{\text{box}}(E)$ denota el número de cubos de la δ -malla que intersecan con E .

Proposición 1.2.2. Sean $E \subset \mathbb{R}^d$ acotado y $\delta > 0$. Entonces se satisface

$$\mathcal{N}_{2\delta}^{\text{net}}(E) = \mathcal{N}_\delta^{\text{pack}}(E) \leq \frac{m(E_\delta)}{m(B(0, \delta))} \leq 2^d \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E), \quad (1.3)$$

$$\mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) \leq \mathcal{N}_\delta^{\text{int}}(E) \leq \mathcal{N}_\delta^{\text{net}}(E) \quad (1.4)$$

y

$$\mathcal{N}_{\delta\sqrt{d}}^{\text{ext}}(E) \leq \mathcal{N}_\delta^{\text{box}}(E) \leq 3^d \mathcal{N}_{\delta/2}^{\text{ext}}(E) \quad (1.5)$$

Demostración. Para ver la primera igualdad de (1.3), observemos que dada una 2δ -net $\{x_1, \dots, x_n\}$, las bolas $B(x_i, \delta)$ son disjuntas dos a dos con centro en E . Recíprocamente, dada una colección de bolas disjuntas de radio δ con centros en E , estos centros forman una 2δ -net de E .

Pasemos a la siguiente desigualdad. Como cualquier colección disjunta de bolas abiertas de radio δ con centro en E está contenido en E_δ , se tiene

$$\mathcal{N}_\delta^{\text{pack}}(E) m(B(0, \delta)) \leq m(E_\delta).$$

Consideremos ahora un recubrimiento de E por bolas abiertas de radio δ con exactamente $\mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)$ bolas. Las bolas concéntricas pero con radio 2δ recubren E_δ , así que

$$m(E_\delta) \leq 2^d \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) m(B(0, \delta)).$$

La primera desigualdad de (1.4) se debe a que cualquier recubrimiento interior es exterior. La segunda se deduce del siguiente razonamiento. Sea $\{x_1, \dots, x_k\}$ una δ -net de E tal que $k = \mathcal{N}_\delta^{\text{net}}(E)$. Dado $x \in E$, tiene que existir $1 \leq i \leq k$ tal que $x \in B(x_i, \delta)$, puesto que en caso contrario se tendría para todo i que $|x - x_i| \geq \delta$, con lo que $\mathcal{N}_\delta^{\text{net}}(E)$ no sería el mayor número de elementos de una δ -net de E .

La primera desigualdad de (1.5) es consecuencia del siguiente hecho. Los cubos de la δ -malla que intersecan con E lo recubren, y para cada uno de ellos hay una bola de radio $\delta\sqrt{d}$ que lo contiene. Para ver la segunda observemos que cualquier bola de diámetro δ está contenida en 3^d cubos de la malla de lado δ (eligiendo un cubo que contenga algún punto de la bola junto con los cubos colindantes). \square

Teorema 1.2.3. *En las condiciones de la proposición anterior, se satisface*

$$\overline{\dim}_M(E) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_\delta^*(E)}{\log 1/\delta} \quad (1.6)$$

y

$$\underline{\dim}_M(E) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_\delta^*(E)}{\log 1/\delta}, \quad (1.7)$$

donde $*$ es cualquiera entre ext, int, net, pack, box.

Demostración. Por la Proposición 1.2.2, se satisfacen

$$\mathcal{N}_{2\delta}^{\text{ext}}(E) \leq \mathcal{N}_{2\delta}^{\text{int}}(E) \leq \mathcal{N}_{2\delta}^{\text{net}}(E) \leq \frac{m(E_\delta)}{m(B(0, \delta))}, \quad (1.8)$$

$$\frac{m(E_\delta)}{m(B(0, \delta))} \leq 2^d \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) \leq 2^d \mathcal{N}_\delta^{\text{int}}(E) \leq 2^d \mathcal{N}_\delta^{\text{net}}(E), \quad (1.9)$$

$$\mathcal{N}_\delta^{\text{pack}}(E) \leq \frac{m(E_\delta)}{m(B(0, \delta))} \leq 2^d \mathcal{N}_{\delta/2}^{\text{pack}}(E) \quad y \quad (1.5).$$

Considerando por ejemplo $\mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)$, de (1.8) se sigue que si $\delta < 1/2$ entonces

$$d - \frac{\log m(B(0, \delta))}{\log 2 + \log \delta} + \frac{\log \mathcal{N}_{2\delta}^{\text{ext}}(E)}{-\log 2\delta} \leq d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log 2 + \log \delta}$$

y tomando límites cuando $\delta \rightarrow 0$

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)}{\log 1/\delta} \leq \underline{\dim}_M(E)$$

y

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)}{\log 1/\delta} \leq \overline{\dim}_M(E).$$

Por otro lado, de (1.9)

$$d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta} \leq d - \frac{\log m(B(0, \delta))}{\log \delta} + \frac{d \log 2}{-\log \delta} + \frac{\log \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)}{\log 1/\delta},$$

que conduce a

$$\underline{\dim}_M(E) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)}{\log 1/\delta}$$

y

$$\overline{\dim}_M(E) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)}{\log 1/\delta}.$$

Procediendo de manera análoga se demuestran las otras equivalencias. \square

Definición 1.2.4. Denotaremos por

$$\overline{\dim}_B(E) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_\delta^*(E)}{\log 1/\delta}$$

y por

$$\underline{\dim}_B(E) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_\delta^*(E)}{\log 1/\delta},$$

donde $*$ es cualquiera entre ext, int, net, pack, box. A estos límites se les llama respectivamente **dimensión box-counting superior e inferior** de E .

Las definiciones de dimensiones *box-counting* superior e inferior se pueden extender a conjuntos no acotados como se ha hecho en (1.1) y (1.2) en el caso de la dimensión de Minkowski.

Hay varias definiciones equivalentes de *box-dimension*, hemos puesto aquí sólo algunas. En la práctica uno adopta la definición más conveniente para cada aplicación. Estas dimensiones son relativamente fáciles de calcular y de estimar empíricamente. Por ejemplo para encontrar la *box-dimension* de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$, podemos dibujar la δ -malla de cuadrados y contar cuántos se superponen con E para varios δ pequeños (de ahí el nombre *box-counting*) y hacer la razón logarítmica. De hecho la definición de *box-dimension* a partir de $\mathcal{N}_\delta^{\text{box}}$ da una interpretación del significado de *box-dimension*. El número de cubos de la δ -malla que intersecan con E es un indicador de lo disperso o irregular que es el conjunto cuando se examina a escala δ . La dimensión refleja cuán rápido las irregularidades se desarrollan cuando $\delta \rightarrow 0$.

1.3. Definición equivalente de la dimensión superior de Minkowski

Definición 1.3.1. Sea E un subconjunto compacto de \mathbb{R}^d . Se define $d_M(E)$ como

$$d_M(E) := \inf\{\beta : m(E_\delta) = O(\delta^{d-\beta}), \delta \rightarrow 0\}.$$

Proposición 1.3.2. Sea E un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{R}^d . Entonces $\overline{\dim}_M(E) = d_M(E)$.

Demostración. Observemos que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es compacto, $\{\beta : m(E_\delta) = O(\delta^{d-\beta}), \delta \rightarrow 0\}$ es no vacío, puesto que por ser E acotado, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que para cada

$0 < \delta < 1$, $m(E_\delta) \leq K$, de donde $m(E_\delta) = O(1) = O(\delta^{d-d})$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Sea entonces $\beta \in \{\beta : m(E_\delta) = O(\delta^{d-\beta}), \delta \rightarrow 0\}$. Por definición, existen $\delta_0 > 0$ y C tales que para todo $\delta < \delta_0$, $m(E_\delta) \leq C\delta^{d-\beta}$, de donde

$$d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta} \leq \beta - \frac{\log C}{\log \delta},$$

esto implica

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \beta - \frac{\log C}{\log \delta} = \beta.$$

En consecuencia $\overline{\dim}_M(E) \leq d_M(E)$.

Veamos ahora la otra desigualdad. Desarrollando la definición de límite superior, para cada $\epsilon > 0$, existe $\gamma_\epsilon > 0$ tal que si $\gamma < \gamma_\epsilon$,

$$\sup_{\delta \in (0, \gamma)} d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta} + \epsilon.$$

Luego para cada $\delta < \gamma_\epsilon$,

$$d - \frac{\log m(E_\delta)}{\log \delta} \leq \overline{\dim}_M(E) + \epsilon,$$

de donde

$$m(E_\delta) \leq \delta^{d - (\overline{\dim}_M(E) + \epsilon)}.$$

Así pues, para cada $\epsilon > 0$, $m(E_\delta) = O\left(\delta^{d - (\overline{\dim}_M(E) + \epsilon)}\right)$ cuando $\delta \rightarrow 0$, por lo que $d_M(E) \leq \overline{\dim}_M(E) + \epsilon$, y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ se termina. \square

1.4. Ejemplos de cálculo

1.4.1. La dimensión de Minkowski del conjunto cuaternario de Cantor

Sea $C_0 := [0, 1]$. Dado $C_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} [a_i^n, b_i^n]$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define

$$G_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{2^n} \left(a_i^n + \frac{b_i^n - a_i^n}{4}, b_i^n - \frac{b_i^n - a_i^n}{4} \right).$$

Sea $C_{n+1} := C_n \setminus G_{n+1}$. Claramente, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todo $1 \leq i \leq 2^n$, $b_i^n - a_i^n = \frac{1}{4^n}$, así que podemos poner

$$G_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{2^n} \left(a_i^n + \frac{1}{4^{n+1}}, b_i^n - \frac{1}{4^{n+1}} \right),$$

$$C_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{2^n} \left[a_i^n, a_i^n + \frac{1}{4^{n+1}} \right] \cup \left[b_i^n - \frac{1}{4^{n+1}}, b_i^n \right] = \bigcup_{i=1}^{2^{n+1}} [a_i^{n+1}, b_i^{n+1}],$$

donde $a_{2i-1}^{n+1} := a_i^n$, $b_{2i-1}^{n+1} := a_i^n + \frac{1}{4^{n+1}}$, $a_{2i}^{n+1} := b_i^n - \frac{1}{4^{n+1}}$ y $b_{2i}^{n+1} := b_i^n$.

Definición 1.4.1. Se define el **conjunto cuaternario de Cantor**

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Observemos que para cada n , los 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{4^n}$ que forman C_n son disjuntos. Además, se demuestra fácilmente (análogamente a la demostración que veremos más adelante para el conjunto ternario de Cantor) que los extremos de estos intervalos pertenecen a C .

Lema 1.4.2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para todo $1 \leq i < j \leq 2^n$,

$$d([a_i^n, b_i^n], [a_j^n, b_j^n]) \geq \frac{2}{4^n}.$$

Demostración. Por inducción sobre n . Para $n = 1$, $d([a_1^1, b_1^1], [a_2^1, b_2^1]) = \frac{2}{4}$. Supongamos que $d([a_i^n, b_i^n], [a_j^n, b_j^n]) \geq \frac{2}{4^n}$ para cada $1 \leq i < j \leq 2^n$. Entonces sean $1 \leq i' \leq j' \leq 2^{n+1}$. Si existe $1 \leq i \leq 2^n$ tal que $i' = 2i - 1$ y $j' = 2i$, por construcción

$$d([a_{i'}^{n+1}, b_{i'}^{n+1}], [a_{j'}^{n+1}, b_{j'}^{n+1}]) = \frac{2}{4^{n+1}}.$$

En caso contrario, existen $1 \leq i < j \leq 2^n$ tales que $[a_{i'}^{n+1}, b_{i'}^{n+1}] \subset [a_i^n, b_i^n]$ y $[a_{j'}^{n+1}, b_{j'}^{n+1}] \subset [a_j^n, b_j^n]$, así que aplicando la hipótesis de inducción se obtiene

$$d([a_{i'}^{n+1}, b_{i'}^{n+1}], [a_{j'}^{n+1}, b_{j'}^{n+1}]) \geq \frac{2}{4^n} > \frac{2}{4^{n+1}}.$$

□

Proposición 1.4.3. La dimensión de Minkowski del conjunto cuaternario de Cantor es $1/2$.

Demostración. Sea $\delta > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_\delta \subset (C_n)_\delta$.

Por otro lado, sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, C_n) < \delta$. Distinguimos dos casos.

(i) Si $x \in C_n$, entonces $d(x, C) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{4^n} < \frac{1}{4^n}$.

(ii) Si $x \notin C_n$, entonces $d(x, C) < \delta$.

Ambas conclusiones son consecuencia del hecho que para todo $1 \leq i \leq 2^n$, $a_i, b_i \in C$. De este modo tenemos que

$$\text{si } d(x, C_n) < \delta, \text{ entonces } d(x, C) < \max\left\{\delta, \frac{1}{4^n}\right\}. \quad (1.10)$$

Para todo $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$ existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{4^{n'+1}} < \delta \leq \frac{1}{4^{n'}}$. En estas condiciones,

$$(C_{n'+1})_{4^{-(n'+1)}} \subset (C_{n'+1})_\delta \subset C_\delta \subset (C_{n'})_\delta \subset (C_{n'})_{4^{-n'}}$$

donde la segunda inclusión se obtiene de (1.10) y de $\max\{\delta, \frac{1}{4^{n'+1}}\} = \delta$. Luego

$$m((C_{n'+1})_{4^{-(n'+1)}}) \leq m(C_\delta) \leq m((C_{n'})_{4^{-n'}}).$$

Observemos que por la Proposición 1.4.2, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_{n_{4^{-n}}}$ está formado por 2^n intervalos disjuntos de longitud $3\frac{1}{4^n}$, así que sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$\frac{3}{2^{n'+1}} \leq m(C_\delta) \leq \frac{3}{2^{n'}}$$

de donde

$$1 - \frac{\log 3}{\log \delta} + \frac{(n'+1)\log 2}{\log \delta} \leq 1 - \frac{\log m(C_\delta)}{\log \delta} \leq 1 - \frac{\log 3}{\log \delta} + \frac{n'\log 2}{\log \delta}. \quad (1.11)$$

Además, al calcular n' en función de δ obtenemos $n' = \left\lfloor \frac{-\log \delta}{\log 4} \right\rfloor$, donde $\left\lfloor \frac{-\log \delta}{\log 4} \right\rfloor$ denota la parte entera de $\frac{-\log \delta}{\log 4}$, lo que nos permite poner

$$n'+1 \leq \frac{-\log \delta}{\log 4} + 1 \quad \text{y} \quad \frac{-\log \delta}{\log 4} - 1 < n'.$$

Así pues, usando estas cotas en la expresión (1.11),

$$1 - \frac{\log 3}{\log \delta} + \frac{\left(\frac{-\log \delta}{\log 4} + 1\right)\log 2}{\log \delta} \leq 1 - \frac{\log m(C_\delta)}{\log \delta} \leq 1 - \frac{\log 3}{\log \delta} + \frac{\left(\frac{-\log \delta}{\log 4} - 1\right)\log 2}{\log \delta},$$

es decir,

$$1 - \frac{\log 3}{\log \delta} - \frac{\log 2}{\log 4} + \frac{\log 2}{\log \delta} \leq 1 - \frac{\log m(C_\delta)}{\log \delta} \leq 1 - \frac{\log 3}{\log \delta} - \frac{\log 2}{\log 4} - \frac{\log 2}{\log \delta}.$$

Tenemos entonces que $1 - \frac{\log m(C_\delta)}{\log \delta}$ está encajada entre dos funciones cuyo límite cuando $\delta \rightarrow 0$ es $1 - \frac{\log 2}{\log 4}$, así que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} 1 - \frac{\log m(C_\delta)}{\log \delta} = 1 - \frac{\log 2}{\log 4} = \frac{1}{2} = \dim_M C.$$

□

1.4.2. La dimensión *box-counting* del conjunto ternario de Cantor

Análogamente a la construcción del conjunto cuaternario de Cantor que hemos hecho en el subapartado anterior, se construye el ternario como sigue.

Sea $C_0 := [0, 1]$. Dado $C_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} [a_i^n, b_i^n]$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define

$$G_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{2^n} \left(a_i^n + \frac{b_i^n - a_i^n}{3}, b_i^n - \frac{b_i^n - a_i^n}{3} \right).$$

Sea $C_{n+1} := C_n \setminus G_{n+1}$. Claramente, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todo $1 \leq i \leq 2^n$, $b_i^n - a_i^n = \frac{1}{3^n}$, así que podemos poner

$$G_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{2^n} \left(a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}}, b_i^n - \frac{1}{3^{n+1}} \right),$$

$$C_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{2^n} \left[a_i^n, a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}} \right] \cup \left[b_i^n - \frac{1}{3^{n+1}}, b_i^n \right] = \bigcup_{i=1}^{2^{n+1}} [a_i^{n+1}, b_i^{n+1}],$$

donde $a_{2i-1}^{n+1} := a_i^n$, $b_{2i-1}^{n+1} := a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}}$, $a_{2i}^{n+1} := b_i^n - \frac{1}{3^{n+1}}$ y $b_{2i}^{n+1} := b_i^n$.

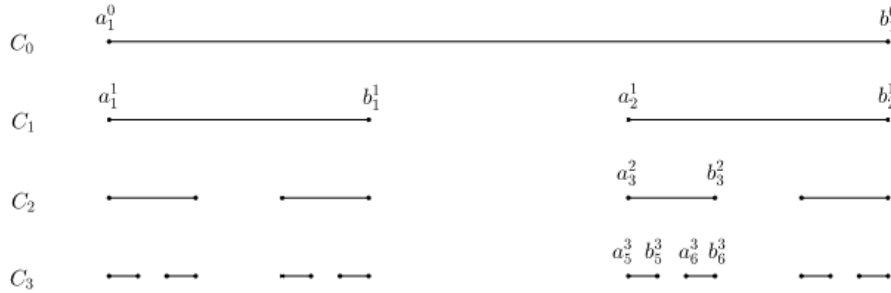


Figura 1.1: Primeros pasos en la construcción del conjunto de Cantor.

Definición 1.4.4. Se define el *conjunto ternario de Cantor*

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Observación 1.4.5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{G_1 \cup \dots \cup G_n, C_n\}$ forman una partición de $[0, 1]$.

Definición 1.4.6. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define

$$E_n := \{a_i^n, b_i^n : 1 \leq i \leq 2^n\}$$

como el conjunto de los extremos de los intervalos que forman C_n .

Observación 1.4.7. Por construcción, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $E_n \subset E_{n+1}$.

Proposición 1.4.8. Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $a \in E_n$, entonces $a \in C$.

Demostración. Sea $a \in E_n$. Por la observación anterior, para cada $m \geq n$, $a \in E_m \subset C_m$. Y como $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n$, $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. □

Proposición 1.4.9. La dimensión box-counting del conjunto ternario de Cantor es $\log 2 / \log 3$.

Demostración. Sea $\delta > 0$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/3^k < \delta \leq 1/3^{k-1}$. Como C_k recubre C , claramente $\mathcal{N}_{\delta/2}^{\text{ext}}(C) \leq 2^k$. Entonces

$$\overline{\dim}_B(C) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_{\delta/2}^{\text{ext}}(C)}{-\log \delta/2} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log(2 \cdot 3^{k-1})} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por otro lado, si $1/3^{k+1} \leq \delta < 1/3^k$, cualquier intervalo de longitud δ interseca como mucho a uno de los 2^k intervalos que forman C_k . Como todos los extremos de dichos intervalos deben ser recubiertos, se tiene $2^k \leq \mathcal{N}_{\delta/2}^{\text{ext}}(C)$, que conduce a

$$\frac{\log 2}{\log 3} \leq \underline{\dim}_B(C).$$

□

Capítulo 2

La medida y la dimensión de Hausdorff

Muchas maneras de estimar el “tamaño” o la “dimensión” de conjuntos “finos” o “altamente irregulares” han sido propuestas para generalizar la idea de que puntos, curvas (de clase \mathcal{C}^∞) y superficies tienen dimensiones 0, 1 y 2 respectivamente. Entre todas ellas, la dimensión de Hausdorff, definida en términos de la medida de Hausdorff, es la más antigua y ampliamente estudiada.

Carathéodory (1914) introdujo, partiendo de construcciones anteriores de Borel y Lebesgue, las más generales “medidas exteriores de Carathéodory”. En particular definió la medida “1-dimensional” o “lineal” en el espacio euclídeo n -dimensional, indicando que medidas s -dimensionales podían ser definidas de forma parecida para otros enteros s . Hausdorff (1919) señaló que la definición de Carathéodory también era válida para s no entero. Ilustró esto mostrando que el famoso conjunto ternario de Cantor tenía medida s -dimensional positiva pero finita si $s = \log 2 / \log 3 = 0,6309\dots$. De este modo nació el concepto de conjuntos de dimensión fraccionaria.

En el primer apartado de este capítulo se define la medida de Hausdorff y se demuestran varias propiedades, algunas de las cuales conducen al segundo apartado, donde se define la dimensión de Hausdorff y se muestran definiciones equivalentes. En el tercer apartado se usa una de estas definiciones equivalentes para relacionarla con la dimensión *box-counting*. Finalmente en el último apartado se calculan las dimensiones de Hausdorff del conjunto ternario de Cantor y del triángulo de Sierpinski, poniendo de manifiesto que calcular la dimensión de Hausdorff de un conjunto puede no ser tarea fácil.

2.1. La medida de Hausdorff

Sea $E \subset \mathbb{R}^d$. Se denota por $\text{diam}(E) = \sup\{|x - y| : x, y \in E\}$. Un recubrimiento $\{F_k\}$ de E se llama δ -recubrimiento si para todo k , $\text{diam} F_k \leq \delta$.

Definición 2.1.1. *Se define*

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) := \inf \left\{ \sum_k (\text{diam} F_k)^\alpha : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam} F_k \leq \delta \ \forall k \right\}. \quad (2.1)$$

Proposición 2.1.2. $\mathcal{H}_\alpha^\delta$ es una medida exterior.

Demostración. Para ver la monotonía, basta observar que si $E_1 \subset E_2$, cualquier recubrimiento de E_2 lo es también de E_1 .

Veamos ahora la subaditividad. Sea $\{E_j\}$ una familia numerable de subconjuntos de \mathbb{R}^d , y sea $E = \bigcup_j E_j$. Fijado $\delta > 0$, para cada j existe un δ -recubrimiento $\{F_{j,k}\}_k$ de E_j tal que $\sum_k (\text{diam}(F_{j,k}))^\alpha \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \epsilon/2^j$. Como $\bigcup_{j,k} F_{j,k}$ es un δ -recubrimiento de E , forzosamente

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \sum_{j,k} (\text{diam}(F_{j,k}))^\alpha \leq \sum_j \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \epsilon,$$

y como ϵ es arbitrario, obtenemos la subaditividad de $\mathcal{H}_\alpha^\delta$. \square

Observemos que $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$ crece cuando δ decrece, pues se reducen los recubrimientos permitidos.

Definición 2.1.3. *Se define la medida exterior de Hausdorff de dimensión α de E como*

$$m_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E).$$

Por la observación anterior este límite existe (aunque podría ser infinito), y para cada δ se satisface $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq m_\alpha^*(E)$. Además, se comprueba con facilidad que por ser m_α^* límite de medidas exteriores es una medida exterior.

Por el Teorema 0.0.5, $(\mathbb{R}^d, \Sigma(m_\alpha^*), m_\alpha)$ forman un espacio de medida completo. Llamamos a m_α la medida de Hausdorff de dimensión α .

Observación 2.1.4. Cuando se define la medida exterior $m_\alpha^*(E)$ es importante imponer que los recubrimientos sean de conjuntos con diámetro arbitrariamente pequeño. Este es el sentido de la definición $m_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$. Este requisito, que no es relevante para la medida de Lebesgue, es necesario para asegurar la aditividad numerable de m_α .

Proposición 2.1.5. m_α^* es una medida exterior métrica sobre \mathbb{R}^d .

Demostración. Sean $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^d$ tales que $d(E_1, E_2) > 0$. Como ya hemos visto que m_α^* es una medida exterior, bastará demostrar $m_\alpha^*(E_1 \cup E_2) \geq m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2)$.

Sea $0 < \delta < d(E_1, E_2)$ y sea $\{F_j\}$ un δ -recubrimiento de $E_1 \cup E_2$. Consideremos

$$F'_j = F_j \cap E_1 \quad y \quad F''_j = F_j \cap E_2.$$

Entonces $\{F'_j\}$ y $\{F''_j\}$ son δ -recubrimientos de E_1 y E_2 respectivamente. Además, observemos que para cada j , o bien $F'_j = \emptyset$ o bien $F''_j = \emptyset$, puesto que en caso

contrario habría dos elementos $x, y \in F_j$ con $|x - y| > \delta$, que implicaría $\text{diam}F_j > \delta$. En consecuencia,

$$\sum_j (\text{diam}F'_j)^\alpha + \sum_j (\text{diam}F''_j)^\alpha \leq \sum_j (\text{diam}F_j)^\alpha.$$

Tomando ínfimos obtenemos $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E_1) + \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_2) \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_1 \cup E_2)$ y haciendo δ tender a cero se termina. \square

Llegados a este punto estamos bajos las condiciones del Teorema 0.0.7, que nos permite decir que los borelianos son m_α -medibles.

De ahora en adelante nos restringiremos pues a los borelianos y escribiremos $m_\alpha(E)$ en lugar de $m_\alpha^*(E)$.

Veamos unas cuantas propiedades de la medida de Hausdorff

Propiedad 2.1.6. *La medida de Hausdorff es invariante por traslaciones*

$$m_\alpha(E + h) = m_\alpha(E) \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^d,$$

y por rotaciones

$$m_\alpha(rE) = m_\alpha(E),$$

donde r es una rotación en \mathbb{R}^d .

Es más, si escalamos E por un factor $\lambda > 0$, se satisface

$$m_\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha m_\alpha(E).$$

Demostración. Se deduce del hecho que el diámetro de un conjunto S es invariante por traslaciones y rotaciones, y cumple $\text{diam}(\lambda S) = \lambda \text{diam}(S)$ para $\lambda > 0$. \square

Propiedad 2.1.7. *Se satisfacen las siguientes relaciones entre medidas de Hausdorff y otras medidas*

- a) Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es un boreliano, la cantidad $m_0(E)$ cuenta el número de puntos en E .
- b) Si E es un boreliano de \mathbb{R} , $m_1(E) = m(E)$. (Aquí m denota la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R})
- c) Si E es un boreliano de \mathbb{R}^d , entonces

$$c_d m_d(E) \leq m(E) \leq 2^d c_d m_d(E).$$

Demostración. a) Sea $x \in \mathbb{R}^d$. Observemos que para todo $\delta > 0$, $\mathcal{H}_0^\delta(\{x\}) = 1$ de donde $m_0(\{x\}) = 1$. Del hecho que m_0 sea una medida (con aditividad numerable) se deduce que cuenta el número de puntos.

b) Sea ahora $E \subset \mathbb{R}$. Si consideramos la construcción de la medida de Lebesgue a partir de intervalos cerrados, el enunciado es consecuencia del hecho que cualquier

δ -recubrimiento por intervalos cerrados es en particular un δ -recubrimiento y que cualquier subconjunto de diámetro δ está contenido en un intervalo de longitud δ .

c) Se puede poner la medida de Lebesgue de E como

$$m(E) = \inf \left\{ \sum_j m(B_j) : \{B_j\} \text{ } \delta\text{-recubrimiento de } E \text{ por bolas} \right\},$$

así que para cada $\epsilon, \delta > 0$, existe un δ -recubrimiento $\{B_j\}$ tal que $\sum_j m(B_j) \leq m(E) + \epsilon$. Entonces,

$$\mathcal{H}_d^\delta(E) \leq \sum_j (\text{diam} B_j)^d = \frac{1}{c_d} \sum_j m(B_j) \leq 1/c_d(m(E) + \epsilon).$$

Haciendo tender δ y ϵ a cero, obtenemos $m_d(E) \leq \frac{1}{c_d} m(E)$.

Para la otra desigualdad, consideremos para cada $\epsilon > 0$ un δ -recubrimiento $\{F_j\}$ de E tal que $\sum_j (\text{diam} F_j)^d \leq m_d(E) + \epsilon$. Podemos encontrar una colección de bolas $\{B_j\}$ tales que $B_j \supset F_j$ y con $\text{diam} B_j = 2 \text{diam} F_j$. Entonces

$$m(E) \leq \sum_j m(B_j) = \sum_j c_d (\text{diam} B_j)^d = 2^d c_d \sum_j (\text{diam} F_j)^d \leq 2^d c_d (m_d(E) + \epsilon).$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene el resultado. \square

Propiedad 2.1.8. Si $m_\alpha^*(E) < \infty$ y $\beta > \alpha$, entonces $m_\beta^*(E) = 0$. También si $m_\alpha^*(E) > 0$ y $\beta < \alpha$, entonces $m_\beta^*(E) = \infty$.

Demostración. Si $\text{diam}(F) \leq \delta$ y $\beta > \alpha$, entonces

$$(\text{diam} F)^\beta = (\text{diam} F)^{\beta-\alpha} (\text{diam} F)^\alpha \leq \delta^{\beta-\alpha} (\text{diam} F)^\alpha.$$

En consecuencia

$$\mathcal{H}_\beta^\delta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha} \mathcal{H}_\alpha^\delta \leq \delta^{\beta-\alpha} m_\alpha^*(E).$$

Como $m_\alpha^*(E) < \infty$ y $\beta - \alpha > 0$, encontramos en el límite cuando δ tiende a cero, que $m_\beta^*(E) = 0$.

El contrarrecíproco da $m_\beta^*(E) = \infty$ siempre que $m_\alpha^*(E) > 0$ y $\beta < \alpha$. \square

Observación 2.1.9. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un boreliano. Para cualquier $\alpha > d$, se tiene $m_\alpha(E) = 0$. Esto es debido a que $m_\alpha(B(0, n)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $B(0, n)$ es la bola de centro 0 y radio n en \mathbb{R}^d .

Veámoslo. Por el apartado c) de la Propiedad 2.1.7,

$$c_d m_d(B(0, n)) \leq m(B(0, n)) < \infty,$$

así que

$$m_d(B(0, n)) < \infty$$

y por la Propiedad 2.1.8,

$$\text{para todo } \alpha > d, \quad m_\alpha(B(0, n)) = 0.$$

Entonces, como $\mathbb{R}^d = \bigcup_n B(0, n)$, se tiene que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es un boreliano y $\alpha > d$, $0 \leq m_\alpha(E) \leq m_\alpha(\mathbb{R}^d) \leq \sum_n m_\alpha(B(0, n)) = 0$.

2.2. La dimensión de Hausdorff

Proposición 2.2.1. *Dado un boreliano no vacío $E \subset \mathbb{R}^d$, existe un único α tal que*

$$m_\beta(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{si } \beta > \alpha \end{cases}.$$

O dicho de otro modo, existe un único α tal que

$$\alpha = \sup\{\beta : m_\beta(E) = \infty\} = \inf\{\beta : m_\beta(E) = 0\}.$$

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un boreliano no vacío. Distinguimos dos casos.

(1) Si E tiene un número finito de puntos, por el apartado a) de la Propiedad 2.1.7, $0 < m_0(E) < \infty$. Entonces por la Propiedad 2.1.8, para todo $\beta > 0$, $m_\beta(E) = 0$; y para todo $\beta < 0$, $m_\beta(E) = \infty$. Así que en este caso $\alpha = 0$.

(2) Si E tiene infinitos puntos, $m_0(E) = \infty$. Por otro lado si $\alpha > d$, por la Observación 2.1.9, $m_\alpha(E) = 0$. Así que $B_1 := \{\beta : m_\beta(E) = \infty\} \neq \emptyset$ y $B_2 := \{\beta : m_\beta(E) = 0\} \neq \emptyset$. Sean $\beta_1 \in B_1$ y $\beta_2 \in B_2$. Por la Propiedad 2.1.8, $\beta_1 \leq \beta_2$. Así que $\sup B_1 \leq \inf B_2$.

Veamos ahora que $\sup B_1 \geq \inf B_2$. Supongamos lo contrario, $\sup B_1 < \inf B_2$. Tendríamos que el intervalo abierto $(\sup B_1, \inf B_2) \neq \emptyset$ y para cualquier $\beta \in (\sup B_1, \inf B_2)$, $0 < m_\beta(E) < \infty$. Tomando dos β distintos en este intervalo, llegaríamos a contradicción con la Propiedad 2.1.8.

Por lo tanto, $\sup B_1 = \inf B_2$, y en este caso α existe y es único por la existencia y unicidad del supremo (o del ínfimo). \square

Definición 2.2.2. *Dado un boreliano no vacío $E \subset \mathbb{R}^d$, sea*

$$\alpha := \sup\{\beta : m_\beta(E) = \infty\} = \inf\{\beta : m_\beta(E) = 0\}.$$

*Diremos que E tiene **dimensión de Hausdorff** α , y escribiremos $\alpha = \dim E$. Si además E es acotado y se cumple $0 < m_\alpha(E) < \infty$, diremos que E tiene **dimensión estricta de Hausdorff** α .*

En general, calcular la medida de Hausdorff de un conjunto no es un problema sencillo. Aun así, en algunos casos se puede acotar superior e inferiormente esta medida y determinar la dimensión del conjunto.

2.2.1. Definiciones equivalentes de dimensión de Hausdorff

Es fácil comprobar, de manera análoga a como se hace para las definiciones equivalentes de la medida de Lebesgue, que obtenemos los mismos valores para la medida y la dimensión de Hausdorff si en (2.1) usamos δ -recubrimientos sólo de abiertos, o sólo de cerrados.

Hay otras clases de recubrimientos que definen medidas que aunque no coincidan necesariamente con la medida de Hausdorff, conducen a la dimensión de Hausdorff. Por ejemplo, podríamos usar recubrimientos por bolas abiertas. Sea

$$\mathcal{B}_\alpha^\delta(A) = \inf \left\{ \sum_i (\text{diam} B_i)^\alpha : A \subset \bigcup_i B_i, B_i \text{ bolas abiertas con } \text{diam} B_i \leq \delta \right\}.$$

Tomando $\bar{m}_\alpha^*(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{B}_\alpha^\delta(A)$, obtenemos para cada boreliano E una medida $\bar{m}_\alpha(E)$ y una "dimensión" α en la que $\bar{m}_\alpha(E)$ salta de ∞ a 0. Claramente $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \mathcal{B}_\alpha^\delta(E)$, puesto que cualquier δ -recubrimiento de E por bolas es un recubrimiento permitido en la definición de $\mathcal{H}_\alpha^\delta$. Por otro lado si $\{U_i\}$ es un δ -recubrimiento de E , para cada i existe una bola abierta B_i de diámetro igual a $2\text{diam} U_i \leq 2\delta$ tal que $U_i \subset B_i$. Luego

$$\sum_i (\text{diam} B_i)^\alpha = \sum_i (2\text{diam} U_i)^\alpha = 2^\alpha \sum_i (\text{diam} U_i)^\alpha,$$

y tomando ínfimos obtenemos

$$\mathcal{B}_\alpha^{2\delta}(E) \leq 2^\alpha \mathcal{H}_\alpha^\delta(E).$$

Haciendo $\delta \rightarrow 0$ se satisface

$$m_\alpha(E) \leq \bar{m}_\alpha(E) \leq 2^\alpha m_\alpha(E). \quad (2.2)$$

En particular esto implica que los valores de α para los que $m_\alpha(E)$ y $\bar{m}_\alpha(E)$ saltan de ∞ a 0 son iguales, así que las dimensiones definidas por las dos medidas son iguales. Es más, si F es un compacto, entonces llegamos al mismo valor de $\bar{m}_\alpha(E)$ si sólo consideramos δ -recubrimientos finitos de bolas abiertas.

Análogamente se demuestra que si se define

$$\mathcal{M}_\alpha^\delta(A) = \inf \left\{ \sum_i (r_i)^\alpha : A \subset \bigcup_i B(x, r_i), r_i \leq \delta \right\} \quad (2.3)$$

y se toma $M_\alpha^*(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{M}_\alpha^\delta(A)$, esta medida conduce también a la dimensión de Hausdorff.

2.3. Relación entre dimensión de Hausdorff y *box-counting*

Es importante entender la relación entre dimensión *box-counting* y dimensión de Hausdorff. Sea E un boreliano. Si E puede ser recubierto por $\mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)$ bolas de radio δ , entonces de la definición (2.3)

$$\mathcal{M}_\alpha^\delta(E) \leq \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) \delta^\alpha.$$

Sea $s = \dim_H(E)$. Para cada $\alpha < s$, $M_\alpha(E) = \infty$, así que $1 < M_\alpha(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{M}_\alpha^\delta(E)$, de donde se sigue que para δ suficientemente pequeño

$$0 < \log \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) + \alpha \log \delta.$$

En consecuencia

$$\alpha \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)}{-\log \delta},$$

luego

$$\dim_H(E) \leq \underline{\dim}_B(E) \leq \overline{\dim}_B(E). \quad (2.4)$$

En general, no se tiene la igualdad entre estas dimensiones. Aunque la dimensión *box-counting* y la de Hausdorff coinciden para muchos conjuntos “razonablemente regulares” (como veremos en el Capítulo 3), hay bastantes ejemplos en los que esta desigualdad es estricta.

Supongamos ahora que existe $\dim_B(E) = s'$. En líneas generales, la relación

$$s' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E)}{-\log \delta}$$

hace intuir que $\mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) \simeq \delta^{-s'}$ para δ pequeños. Más concretamente, esta igualdad implica que si $\alpha < s'$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) \delta^\alpha = \infty,$$

y que si $\alpha > s'$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) \delta^\alpha = 0.$$

Observemos que, de hecho, para cada α

$$\mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) \delta^\alpha = \inf \left\{ \sum_i \delta^\alpha : \{B_i\} \text{ es un } 2\delta\text{-recubrimiento (finito) de bolas de } E \right\}$$

que podríamos comparar con

$$\mathcal{M}_\alpha^\delta(E) = \inf \left\{ \sum_i (r_i)^\alpha : \{B(x, r_i)\} \text{ es un } 2\delta\text{-recubrimiento de } E \right\},$$

expresión que, recordemos, conduce a la dimensión de Hausdorff. Cuando calculamos la dimensión de Hausdorff, asignamos pesos diferentes $(r_i)^\alpha$ a cada conjunto $B(x, r_i)$ del recubrimiento, mientras que para las dimensiones *box-counting* usamos el mismo peso δ^α para cada conjunto del recubrimiento. Las dimensiones *box-counting* se pueden pensar como un indicador de la eficiencia con la que un conjunto puede ser recubierto por pequeños conjuntos de igual medida, mientras que en la dimensión de Hausdorff intervienen recubrimientos por conjuntos pequeños pero de medida variable. Esta diferencia es análoga a la que se hace cuando se aborda el cálculo de volúmenes de conjuntos a partir de la integral de Riemann o de la de Lebesgue: en el enfoque Lebesgue/Hausdorff se permiten recubrimientos numerables por bolas o cajas de medida variable, mientras que en el abordaje Riemann/Minkowski los recubrimientos son finitos y de medida uniforme.

Uno podría estar tentado de introducir la cantidad $\nu(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{N}_\delta^{\text{ext}}(E) \delta^\alpha$, pero esto no da una medida para los borelianos. Como consecuencia, las dimensiones *box-counting* tienen numerosas propiedades desafortunadas que pueden ser difíciles de manejar.

De todas formas, como las dimensiones *box-counting* están determinadas por recubrimientos de medida uniforme, tienden a ser más fáciles de calcular que la dimensión de Hausdorff.

2.4. Cálculo de la dimensión de Hausdorff. Ejemplos

2.4.1. El conjunto ternario de Cantor

Consideremos la construcción del conjunto ternario de Cantor del subapartado 1.4.2. Introduciremos a continuación una función ligada a dicha construcción y algunas de sus propiedades que nos permitirán calcular la dimensión $\dim_H C$.

La función de Cantor-Lebesgue

Sea $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la siguiente función definida por partes:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in G_1 \\ \frac{3}{2}x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Observemos que f_1 es continua, $f_1(0) = 0$ y $f_1(1) = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define por recurrencia f_{n+1} de la siguiente forma:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in G_1 \cup \dots \cup G_n \\ \frac{f_n(a_i^n) + f_n(b_i^n)}{2} & \text{si } x \in \left(a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}}, b_i^n - \frac{1}{3^{n+1}} \right), 1 \leq i \leq 2^n \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} x + q_{2i-1}^{n+1} & \text{si } x \in \left[a_i^n, a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}} \right], 1 \leq i \leq 2^n \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} x + q_{2i}^{n+1} & \text{si } x \in \left[b_i^n - \frac{1}{3^{n+1}}, b_i^n \right], 1 \leq i \leq 2^n \end{cases}$$

donde $q_{2i-1}^{n+1} = f_n(a_i^n) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} a_i^n$ y $q_{2i}^{n+1} = f_n(b_i^n) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} b_i^n$.

Observación 2.4.1. Definida de esta forma, $f_{n+1}(a_i^n) = f_n(a_i^n)$, $f_{n+1}(b_i^n) = f_n(b_i^n)$,
 $f_{n+1}\left(a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}}\right) = f_n(a_i^n) + \frac{1}{2^{n+1}}$, $f_{n+1}\left(b_i^n - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = f_n(b_i^n) - \frac{1}{2^{n+1}}$.

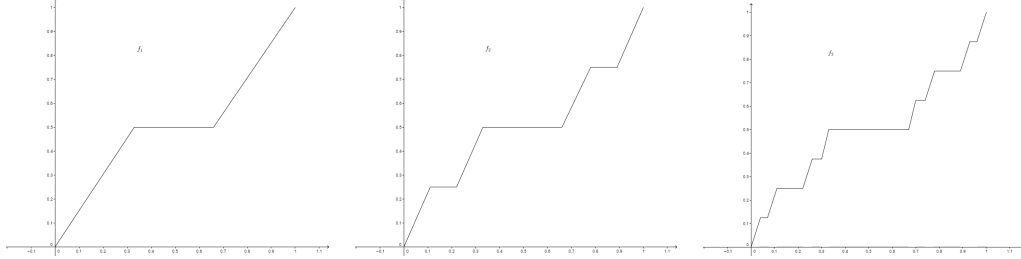


Figura 2.1: Primeros pasos en la construcción de la función de Cantor-Lebesgue.

Proposición 2.4.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple

- $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$. En general, si $a \in E_n$, para todo $m \geq n$ $f_m(a) = f_n(a)$.
- Para todo $1 \leq i \leq 2^n$, $f_n(b_i^n) - f_n(a_i^n) = \frac{1}{2^n}$.
- f_n es continua
- $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, para todo $x \in [0, 1]$.
- Para cada $x, y \in [0, 1]$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y|$.

Demostración. a) Por inducción sobre m . Para $m = n$ la hipótesis es cierta. Supongamos que $f_m(a) = f_n(a)$, con $m \geq n$. Por la Observación 1.4.7, $a \in E_m$, así que por la Observación 2.4.1, $f_{m+1}(a) = f_m(a) = f_n(a)$.

b) Se deduce de la Observación 2.4.1 para cada $n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, y se comprueba para $n = 1$.

c) Usando el apartado anterior se comprueba fácilmente que

$$f_{n+1}\left(a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{f_n(a_i^n) + f_n(b_i^n)}{2} = f_{n+1}\left(b_i^n - \frac{1}{3^{n+1}}\right),$$

así que f_{n+1} es continua en (a_i^n, b_i^n) para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq i \leq 2^n$. Razonando por inducción y usando que para cada $x \in G_1 \cup \dots \cup G_n$, $f_{n+1}(x) = f_n(x)$, que $f_{n+1}(a_i^n) = f_n(a_i^n)$, $f_{n+1}(b_i^n) = f_n(b_i^n)$, y que f_{n+1} es lineal en $\left[a_i^n, a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}}\right]$ y en $\left[b_i^n - \frac{1}{3^{n+1}}, b_i^n\right]$ se obtiene el resultado.

d) Sea $n \in \mathbb{N}$. Bastará ver que esto es cierto para todo $x \in C_n$, puesto que para $x \in G_1 \cup \dots \cup G_n$, $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ por definición. Sea entonces $x \in [a_i^n, b_i^n]$ para algún $1 \leq i \leq 2^n$. Distinguiamos 2 casos:

(i) Si $x \in \left[a_i^n, \frac{a_i^n + b_i^n}{2} \right]$, como f_n es lineal y creciente en $[a_i^n, b_i^n]$, tenemos

$$f_n(a_i^n) \leq f_n(x) \leq \frac{f_n(a_i^n) + f_n(b_i^n)}{2}.$$

Por otro lado, como f_{n+1} es continua, es lineal creciente en $\left[a_i^n, a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}} \right]$ y constante igual a $\frac{f_n(a_i^n) + f_n(b_i^n)}{2}$ en $\left[a_i^n + \frac{1}{3^{n+1}}, b_i^n - \frac{1}{3^{n+1}} \right]$, tenemos

$$f_n(a_i^n) = f_{n+1}(a_i^n) \leq f_{n+1}(x) \leq \frac{f_n(a_i^n) + f_n(b_i^n)}{2}.$$

(ii) Si $x \in \left(\frac{a_i^n + b_i^n}{2}, b_i^n \right]$, procediendo de forma análoga al caso anterior, se obtiene

$$\frac{f_n(a_i^n) + f_n(b_i^n)}{2} \leq f_n(x) \leq f_n(b_i^n) \quad \text{y} \quad \frac{f_n(a_i^n) + f_n(b_i^n)}{2} \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(b_i^n).$$

En ambos casos, las imágenes de x por f_n y por f_{n+1} están en un intervalo de longitud $\frac{f_n(b_i^n) - f_n(a_i^n)}{2}$, y por lo tanto en ambos casos

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{f_n(b_i^n) - f_n(a_i^n)}{2} \stackrel{\text{b)}}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

e) Consideremos los intervalos abiertos determinados por los puntos en E_n , esto es, (a_1^n, b_1^n) , (b_1^n, a_2^n) , \dots , $(a_{2^n}^n, b_{2^n}^n)$. La continuidad de f_n y el hecho de que en cada uno de estos intervalos f tenga pendiente menor o igual que $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ garantizan que el resultado es cierto para todo $s, t \in [a_i^n, b_i^n]$, con $1 \leq i \leq 2^n$ y para todo $s', t' \in [b_i^n, a_{i+1}^n]$, con $1 \leq i \leq 2^n - 1$. Luego lo es para todo $s, t \in [0, 1]$. \square

Proposición 2.4.3. *La sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en $\mathcal{C}[0, 1]$.*

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos $n < m$. Por el apartado d) de la proposición anterior se tiene, para cada $x \in [0, 1]$, que

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + |f_{m-1}(x) - f_{m-2}(x)| + \dots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Como $\forall \epsilon > 0 \exists n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n'_\epsilon, \frac{1}{2^n} < \epsilon$, tenemos que dado $\epsilon > 0$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n \geq n'_\epsilon$, se cumple $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [0, 1]$. \square

En particular, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy para cada $x \in [0, 1]$. Por ser \mathbb{R} completo, para todo $x \in [0, 1]$, existe $y_x \in \mathbb{R}$ tal que $y_x = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Definición 2.4.4. *Se define*

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y_x = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \end{aligned}$$

Esta función se llama la función de Cantor Lebesgue.

Por ser f límite puntual de funciones crecientes, es creciente. Y como de hecho $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f , y para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua, entonces f es continua. Además $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, así que $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es exhaustiva.

Proposición 2.4.5. *La función f de Cantor-Lebesgue cumple las siguientes propiedades:*

- a) *Para cada $x \in [0, 1]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.*
- b) *$f(C) = [0, 1]$, donde C es el conjunto ternario de Cantor.*

Demostración.

a) En la demostración de la Proposición 2.4.3 hemos visto que si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m > n$, entonces para todo $x \in [0, 1]$, $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. Haciendo $m \rightarrow \infty$ se prueba el enunciado.

b) Bastará ver esta inclusión $f(C) \supset [0, 1]$. Sea $u \in [0, 1]$. Por ser f exhaustiva, existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = u$. Distinguiamos dos casos:

(i) Si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, entonces $u \in f(C)$.

(ii) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin C_n$, por la Observación 1.4.5, $x \in G_1 \cup \dots \cup G_n$. Luego existen $s \in \{0, \dots, n-1\}$ y $i \in \{1, \dots, 2^s\}$ tales que

$$x \in \left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}, b_i^s - \frac{1}{3^{s+1}} \right) \subset G_{s+1}.$$

Por construcción, para todo $m \geq s+1$, $f_m(x) = f_{s+1}(x)$, por consiguiente

$$u = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_{s+1}(x).$$

Por otro lado, f_{s+1} es continua, y toma valor constante en $\left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}, b_i^s - \frac{1}{3^{s+1}}\right)$.

En consecuencia, como $x \in \left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}, b_i^s - \frac{1}{3^{s+1}}\right)$,

$$f_{s+1}(x) = f_{s+1}\left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}\right)$$

Pero $\left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}\right) \in E_{n+1}$, así que por el apartado a) de la Proposición 2.4.2,

$$f_{s+1}\left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}\right) = f\left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}\right).$$

Juntando lo anterior,

$$u = f(x) = f_{s+1}(x) = f_{s+1}\left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}\right) = f\left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}\right).$$

Finalmente, por la Proposición 1.4.8, $\left(a_i^s + \frac{1}{3^{s+1}}\right) \in C$, de donde se sigue el enunciado. \square

La dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor

Definición 2.4.6. Se dice que una función g definida en un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ satisface la condición de Lipschitz con exponente γ si existe $M > 0$ tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|^\gamma \text{ para todo } x, y \in E.$$

Lema 2.4.7. Sea g una función definida en un compacto E tal que satisface la condición de Lipschitz con exponente γ , siendo $0 < \gamma \leq 1$. Entonces

- a) $m_{\alpha/\gamma}(g(E)) \leq M^{\alpha/\gamma} m_\alpha(E)$, para todo $\alpha \geq 0$.
- b) $\dim g(E) \leq \frac{1}{\gamma} \dim E$.

Demostración. a) Si $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ recubre E , entonces $\{g(E \cap F_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ recubre $g(E)$. Además, si $x, y \in E \cap F_k$, $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|^\gamma \leq M(\text{diam } F_k)^\gamma$, luego $\text{diam } g(E \cap F_k) \leq M(\text{diam } F_k)^\gamma$. En consecuencia,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (\text{diam } g(E \cap F_k))^{\alpha/\gamma} \leq M^{\alpha/\gamma} \sum_{k \in \mathbb{N}} (\text{diam } F_k)^\alpha$$

de donde

$$\mathcal{H}_{\alpha/\gamma}^{M\delta^\gamma}(g(E)) \leq M^{\alpha/\gamma} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \text{ para todo } \delta > 0,$$

y tomando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ se obtiene a).

b) Sea $\beta := \dim E$. Por definición, para todo $\sigma > \beta$, $m_\sigma(E) = 0$. Esto implica por a) que $m_{\sigma/\gamma}(g(E)) = 0$, es decir, $\dim g(E) \leq \sigma/\gamma$ para todo $\sigma > \beta$, de donde $\dim g(E) \leq \beta/\gamma$. \square

Lema 2.4.8. *La función f de Cantor-Lebesgue en $[0, 1]$ satisface la condición de Lipschitz con exponente $\gamma = \log 2 / \log 3$.*

Demostración. Por el apartado e) de la Proposición 2.4.2 y el apartado a) de la Proposición 2.4.5, usando la desigualdad triangular se tiene, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f(x) - f_n(x)| + |f(y) - f_n(y)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| + \frac{2}{2^n}.$$

Fijados x e y , elegimos n tal que $1 \leq 3^n |x - y| \leq 3$. Entonces se tiene

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{5}{2^n} = \frac{5}{(3^n)^\gamma} \leq 5|x - y|^\gamma,$$

puesto que $3^\gamma = 2$ y $\frac{1}{3^n} \leq |x - y|$. □

Teorema 2.4.9. *El conjunto ternario de Cantor C tiene dimensión estricta de Hausdorff $\alpha = \log 2 / \log 3$.*

Demostración. Por definición C es $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, donde C_n es unión finita de 2^n intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$. Observemos que $C \in \mathcal{B}$.

Vamos a ver primero $m_\alpha(C) \leq 1$. Dado $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \delta$. Como $C \subset C_n$, y los intervalos que forman C_n miden $\frac{1}{3^n} < \delta$, se tiene

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(C) \leq 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^\alpha.$$

Como α satisface $3^\alpha = 2$, entonces $2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^\alpha = 1$ y se tiene $\mathcal{H}_\alpha^\delta(C) \leq 1$ para todo $\delta > 0$, de donde $m_\alpha(C) \leq 1$.

Vamos a probar ahora que $0 < m_\alpha(C)$. Recordemos que en la proposición 2.0.0.3 hemos visto que la función f de Cantor-Lebesgue cumple $f(C) = [0, 1]$. Tomando $\alpha = \gamma = \log 3 / \log 2$ y aplicando el lema 3.0.0.1 a la función de Cantor-Lebesgue, se tiene

$$1 = m_1([0, 1]) = m_1(f(C)) \leq M m_\alpha(C),$$

de donde $0 < m_\alpha(C)$.

Así pues, $\dim C = \log 2 / \log 3$. □

2.4.2. El triángulo de Sierpinski

De forma parecida a la construcción del conjunto de Cantor, podemos construir el siguiente conjunto en el plano. Sea S_0 un triángulo equilátero (sólido) cerrado de lado unidad. El primer paso consiste en representar en S_0 un nuevo triángulo (invertido) cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo S_0 , y eliminar este nuevo triángulo equilátero abierto, tal como se muestra en la Figura 2.2.

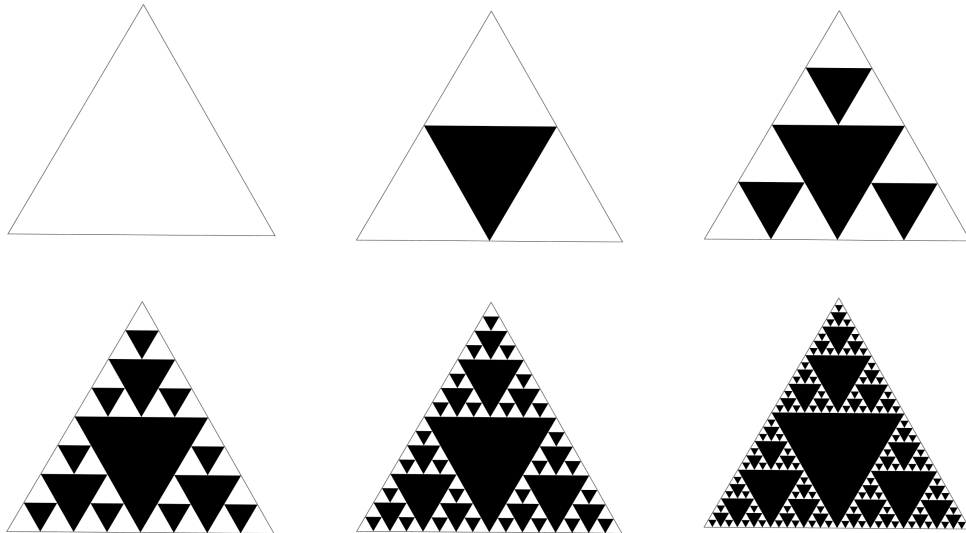


Figura 2.2: Primeros pasos en la construcción del triángulo de Sierpinski.

Esto deja tres triángulos equiláteros cerrados cuya unión denotamos por S_1 . El lado de cada uno de estos triángulos mide la mitad que el de S_0 , y se dice que son triángulos de la primera generación.

En el segundo paso, repetimos el proceso en cada triángulo de la primera generación. Cada triángulo de S_1 da lugar a tres triángulos de segunda generación. Denotamos por S_2 la unión de los nueve triángulos de segunda generación. Iterando este proceso, obtenemos una sucesión de compactos S_k que cumplen

- a) Para cada $k \in \mathbb{N}$, S_k es la unión de 3^k triángulos equiláteros cerrados de lado $\frac{1}{2^k}$.
- b) Para todo $k \geq 0$, $S_{k+1} \subset S_k$.

Definición 2.4.10. *El triángulo de Sierpinski es el conjunto compacto definido por*

$$S := \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k.$$

Antes de continuar, necesitamos fijar un punto especial en cada triángulo que aparece en la construcción de S . A partir de ahora llamaremos al vértice inferior

derecho de un triángulo *el* vértice de este triángulo. Con esta elección, hay 3^k vértices de la k -ésima generación. Observemos que cada uno de estos vértices es también vértice de la $k + 1$ -ésima generación. Esto junto con el hecho de que $\{S_k\}$ es decreciente, implica que todos estos vértices pertenecen a S .

Lema 2.4.11. *Sea \mathcal{B} un recubrimiento de S formado por bolas abiertas de diámetro menor que 1. Supongamos que B es una bola de \mathcal{B} que satisface*

$$\frac{1}{2^l} \leq \text{diam}B < \frac{1}{2^{l-1}} \quad \text{para un } l \leq k.$$

Entonces B contiene como máximo $q3^{k-l}$ vértices de la k -ésima generación, donde $q > 0$ es una constante que no depende de \mathcal{B} .

Demostración. Sea B como en el enunciado. Podemos poner $B = B(x, r)$, con $\frac{1}{2^{l+1}} \leq r < \frac{1}{2^l}$. Sea $B^* = B(x, 3r)$, y sea Δ_k un triángulo de la k -ésima generación cuyo vértice v está en B . Si Δ_l denota el triángulo de l -ésima generación que contiene a Δ_k , se tiene $\Delta_l \subset B^*$, tal como se muestra en la Figura 2.3, puesto que si $y \in \Delta_l$,

$$|y - x| \leq |y - v| + |v - x| < \frac{1}{2^l} + r \leq \text{diam}B + r = 3r.$$

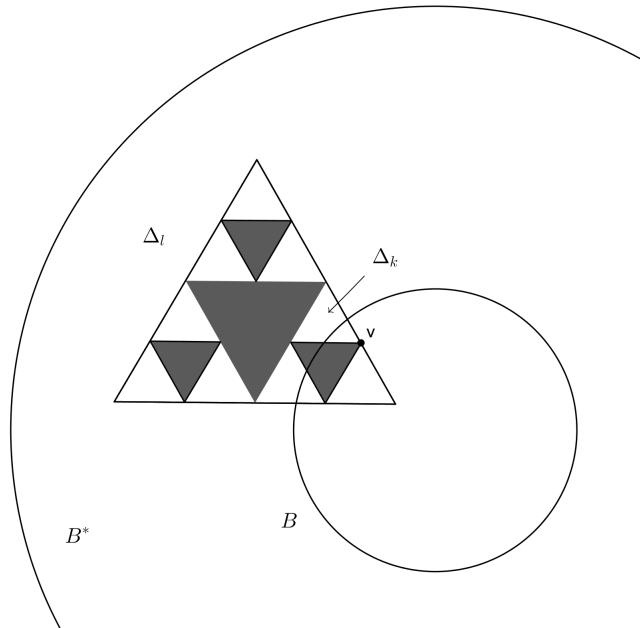


Figura 2.3: Escenario del Lema 2.4.11.

Veamos ahora que existe una constante q tal que B^* puede contener como máximo q triángulos distintos de la l -ésima generación. Los triángulos de l -ésima generación tienen los interiores disjuntos, y cada uno tiene área $\frac{\sqrt{3}}{4}4^{-l}$, mientras que

área $B^* < \pi \left(\frac{3}{2^l}\right)^2 = 9\pi 4^{-l}$ por ser $r < \frac{1}{2^l}$, así que $\frac{\text{área} B^*}{\text{área} \Delta_l} \leq \frac{9\pi 4}{\sqrt{3}}$ y $q := \left\lceil \frac{9\pi 4}{\sqrt{3}} \right\rceil + 1$ es la constante que buscamos, donde $[z]$ denota la parte entera de z .

Para terminar, cada Δ_l contiene 3^{k-l} triángulos de la k -ésima generación, luego B puede contener como mucho $q 3^{k-l}$ vértices de triángulos de la k -ésima generación. \square

Teorema 2.4.12. *El triángulo de Sierpinski S tiene dimensión estricta de Hausdorff $\alpha = \log 3 / \log 2$.*

Demostración. La desigualdad $m_\alpha(S) \leq 1$ es consecuencia de la construcción de S . Dado $\delta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k_0}} < \delta$. Como $S \subset S_{k_0}$, y S_{k_0} es unión de 3^{k_0} triángulos de diámetro $\frac{1}{2^{k_0}} < \delta$, forzosamente

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(S) \leq 3^{k_0} \left(\frac{1}{2^{k_0}}\right)^\alpha.$$

Pero como $2^\alpha = 3$, $\mathcal{H}_\alpha^\delta(S) \leq 1$, y esto vale para cada $\delta > 0$, así que $m_\alpha(S) \leq 1$.

Veamos ahora la desigualdad $0 < m_\alpha(S)$. Queremos ver que hay algún $\delta > 0$ para el que existe una constante $c > 0$ tal que para cualquier recubrimiento de S , $\{F_j\}_j$, con $\text{diam} F_j \leq \delta$, $c \leq \sum_j (\text{diam} F_j)^\alpha$. Si vemos esto tendremos

$$0 < c \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(S) \leq m_\alpha(S).$$

Por (2.2) y el razonamiento inmediatamente posterior, bastará demostrar que hay algún δ' para el que existe una constante $c' > 0$ tal que para cualquier recubrimiento finito de S , $\{B_j\}_{j=1}^N$, formado por bolas abiertas con $\text{diam} B_j \leq \delta'$,

$$c' \leq \sum_{j=1}^N (\text{diam} B_j)^\alpha,$$

Sea pues $0 < \delta < 1$ y sea $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^N$ un recubrimiento de S formado por bolas abiertas con $\text{diam} B_j \leq \delta$. Consideremos el mínimo diámetro de estas bolas, y tomemos k tal que

$$\frac{1}{2^k} \leq \min_{1 \leq j \leq N} \text{diam} B_j < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Podemos clasificar las bolas de \mathcal{B} según entre qué dos potencias negativas de 2 se encuentre su diámetro. Así pues, si N_l es el número de bolas de \mathcal{B} tales que $\frac{1}{2^l} \leq \text{diam} B_j < \frac{1}{2^{l-1}}$, tenemos

$$\sum_{l=1}^k N_l \frac{1}{3^l} = \sum_{l=1}^k N_l \left(\frac{1}{2^l}\right)^\alpha \leq \sum_{j=1}^N (\text{diam} B_j)^\alpha, \quad (2.5)$$

donde la primera igualdad es consecuencia de $2^\alpha = 3$. Por el Lema 2.4.11 vemos que el número total de vértices de la k -ésima generación que pueden ser recubiertos por \mathcal{B} es menor o igual que $q \sum_{l=1}^k N_l 3^{k-l}$. Pero los 3^k vértices de la k -ésima generación pertenecen a S , luego deben ser recubiertos. Así que necesariamente $3^k \leq q \sum_{l=1}^k N_l 3^{k-l}$, de donde se obtiene

$$\frac{1}{q} \leq \sum_{l=1}^k N_l \frac{1}{3^l},$$

que junto con (2.5) termina la prueba. □

Capítulo 3

Autosemejanza

Probablemente la ilustración más simple y elegante de la teoría desarrollada en el capítulo anterior puede ser vista en términos de su aplicación a una clase general de conjuntos llamados autosemejantes. Se trata de una construcción de la que el conjunto de Cantor y el triángulo de Sierpinski son casos particulares, pues están compuestos por partes que son, de alguna forma, semejantes al total.

Se desarrollan en este capítulo una serie de resultados que permiten calcular de forma inmediata la dimensión de Hausdorff de conjuntos autosemejantes. Además, se demuestra que para estos conjuntos la dimensión *box-counting* y la de Hausdorff coinciden. Los dos últimos resultados dan cuenta de la posibilidad de aproximar cualquier compacto por un compacto autosemejante de forma arbitrariamente cercana (respecto de la distancia de Hausdorff, que se define al inicio del presente capítulo). Esto tiene aplicaciones en la compresión de datos.

Definición 3.0.1. Se dice que una aplicación $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una **semejanza de razón** $r > 0$ si para cada $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|S(x) - S(y)| = r|x - y|.$$

Definición 3.0.2. Dada una colección finita de semejanzas S_1, \dots, S_m todas de razón r , se dice que el conjunto $F \subset \mathbb{R}^d$ es **autosemejante** si

$$F = S_1(F) \cup \dots \cup S_m(F).$$

Lema 3.0.3. Sean S_1, \dots, S_m m semejanzas de razón r , con $0 < r < 1$. Existe una bola cerrada B tal que $S_j(B) \subset B$ para todo $j = 1, \dots, m$.

Demostración. En efecto, si S es una semejanza de razón r , se tiene

$$|S(x)| \leq |S(x) - S(0)| + |S(0)| \leq r|x| + |S(0)|.$$

Si queremos que $|x| \leq R$ implique $|S(x)| \leq R$, basta elegir R tal que $rR + |S(0)| \leq R$, es decir, $R \geq |S(0)|/1 - r$. De este modo obtenemos, para cada S_j , una bola B_j centrada en el origen que satisface $S_j(B_j) \subset B_j$. Si B es la bola con mayor radio de entre las B_j , el razonamiento anterior muestra que $S_j(B) \subset B$ para todo j . \square

Dadas S_1, \dots, S_m una colección finita de semejanzas, para cada $A \subset \mathbb{R}^d$, $\tilde{S}(A)$ denota el conjunto dado por

$$\tilde{S}(A) = S_1(A) \cup \dots \cup S_m(A).$$

Observemos que si $A \subset A'$, entonces $\tilde{S}(A) \subset \tilde{S}(A')$. Observemos también que cada S_j es una aplicación continua e inyectiva de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^d , mientras que \tilde{S} es una aplicación que envía subconjuntos de \mathbb{R}^d a subconjuntos de \mathbb{R}^d .

Definición 3.0.4. Sean A, B compactos. Se define la **distancia de Hausdorff** entre A y B como

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{\delta : B \subset A_\delta \text{ y } A \subset B_\delta\}.$$

Observemos que si $A = B = \emptyset$, entonces $\text{dist}(A, B) = 0$, y que si $A = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces $\text{dist}(A, B) = \infty$.

Lema 3.0.5. La función distancia dist definida sobre subconjuntos compactos de \mathbb{R}^d satisface

- (i) $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A)$.
- (ii) $\text{dist}(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$.
- (iii) $\text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B)$.
- (iv) $\text{dist}(A \cup A', B \cup B') \leq \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(A', B')\}$.

Si S_1, \dots, S_m son semejanzas de radio r , entonces

- (v) $\text{dist}(\tilde{S}(A), \tilde{S}(B)) \leq r \text{dist}(A, B)$.

Demostración. (ii) \Rightarrow] Sean A, B compactos tales que $\text{dist}(A, B) = 0$, y supongamos que $A, B \neq \emptyset$. Se tiene que, para cada $\delta > 0$, $B \subset A_\delta$ y $A \subset B_\delta$. Supongamos que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Por ser B cerrado, B^c es abierto y existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset B^c$. Luego $d(x, B) \geq r$, así que $x \notin B_r$, de forma que $A \not\subset B_r$ y llegamos a contradicción. En consecuencia $A = B$.

\Leftarrow] El recíproco es trivial.

(iii) Sea $\epsilon > 0$. Para facilitar la escritura, vamos a llamar $\beta = \text{dist}(A, C) + \epsilon/2$ y $\gamma = \text{dist}(C, B) + \epsilon/2$. Se tiene $A \subset C_\beta$, $C \subset A_\beta$, $C \subset B_\gamma$ y $B \subset C_\gamma$, y en consecuencia

$$B \subset C_\gamma \subset A_{\beta\gamma} \subset A_{\beta+\gamma},$$

donde la última inclusión se demuestra a continuación. Sea $x \in A_{\beta\gamma}$. Entonces $d(x, A_\beta) < \gamma$, luego existe $y_0 \in A_\beta$ tal que $|x - y_0| < \gamma$. Pero $d(y_0, A) < \beta$ implica que existe algún $z_0 \in A$ tal que $|y_0 - z_0| < \beta$. Por lo tanto

$$d(x, A) \leq |x - z_0| \leq |x - y_0| + |y_0 - z_0| < \gamma + \beta.$$

Análogamente, se tiene

$$A \subset C_\beta \subset B_{\gamma\beta} \subset B_{\gamma+\beta}.$$

Así que $\beta + \gamma \in \{\delta : B \subset A_\delta \text{ y } A \subset B_\delta\}$, luego

$$\text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B) + \epsilon,$$

y como podemos repetir este argumento para cualquier $\epsilon > 0$, se sigue el enunciado.

(iv) Si $d_1 = \text{dist}(A, B)$ y $d_2 = \text{dist}(A', B')$, sea $d = \max\{d_1, d_2\}$. Para cada $\epsilon > 0$ se tiene $A \subset B_{d+\epsilon}$ y $A' \subset B'_{d+\epsilon}$, luego

$$A \cup A' \subset B_{d+\epsilon} \cup B'_{d+\epsilon} \subset (B \cup B')_{d+\epsilon}.$$

Análogamente,

$$B \cup B' \subset (A \cup A')_{d+\epsilon}$$

y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene

$$\text{dist}(A \cup A', B \cup B') \leq d.$$

(v) Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta' = \text{dist}(A, B) + \epsilon$. Se tiene $A \subset B_{\delta'}$ y $B \subset A_{\delta'}$, que implica, para todo $j = 1, \dots, m$,

$$S_j(A) \subset S_j(B_{\delta'}) \subset (S_j(B))_{r\delta'}.$$

Veamos esta última inclusión. Sea $y \in S_j(B_{\delta'})$. Existe $x \in B_{\delta'}$ tal que $S_j(x) = y$. Entonces $d(x, B) < \delta'$, de donde existe $z \in B$ tal que $|x - z| < \delta'$, así que

$$d(y, S_j(B)) \leq |y - S_j(z)| = |S_j(x) - S_j(z)| = r|x - z| < r\delta',$$

luego $y \in (S_j(B))_{r\delta'}$. De forma análoga se demuestra $S_j(B) \subset (S_j(A))_{r\delta'}$. En consecuencia, para todo $\epsilon > 0$, $\text{dist}(S_j(A), S_j(B)) \leq r(\text{dist}(A, B) + \epsilon)$, luego

$$\text{dist}(S_j(A), S_j(B)) \leq r(\text{dist}(A, B)).$$

Por el apartado anterior,

$$\text{dist}(\tilde{S}(A), \tilde{S}(B)) \leq r(\text{dist}(A, B)).$$

□

Teorema 3.0.6. *Supongamos que S_1, \dots, S_m son m semejanzas, todas de razón r , con $0 < r < 1$. Entonces existe un único compacto no vacío F tal que*

$$F = S_1(F) \cup \dots \cup S_m(F).$$

Demostración. Sea B como en el Lema 3.0.3, y para cada k , sea $F_k = \tilde{S}^k(B)$, donde \tilde{S}^k denota la k -ésima composición de \tilde{S} , esto es, $\tilde{S}^{k+1} = \tilde{S} \circ \tilde{S}^k$ y $\tilde{S}^1 = \tilde{S}$. Cada F_k es compacto, no vacío, y $F_k \subset F_{k-1}$, puesto que $\tilde{S}(B) \subset B$. Si ponemos

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k,$$

entonces F es compacto, no vacío, y se tiene $\tilde{S}(F) = F$. Veamos esta última afirmación. Claramente

$$\tilde{S}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{S}(F_n) = \bigcap_{n=2}^{\infty} F_n = F.$$

Para ver la otra inclusión, fijamos un punto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{S}(F_n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $j_n \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in S_{j_n}(F_n)$. Consideremos la sucesión $\{j_n\}_n$. Forzosamente tiene que existir $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que para cada n , exista $n' \geq n$ tal que $j_{n'} = j$, puesto que si no, la sucesión $\{j_n\}_n$ sería finita. Entonces para cada n ,

$$x \in S_j(F_{n'}) \subset S_j(F_n).$$

Luego por ser S_j inyectiva,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_j(F_n) = S_j\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \subset \tilde{S}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$

La unicidad de F se demuestra de la siguiente forma. Supongamos que G es otro compacto tal que $\tilde{S}(G) = G$. Entonces, por el apartado (v) del Lema 3.0.5, $\text{dist}(F, G) \leq r \text{dist}(F, G)$. Pero como $r < 1$, necesariamente $\text{dist}(F, G) = 0$, así que $F = G$. \square

Introduciremos ahora una condición técnica adicional que nos permitirá calcular exactamente la dimensión de Hausdorff del conjunto autosemejante F .

Definición 3.0.7. Se dice que las semejanzas S_1, \dots, S_m son **separadas** si existe un abierto acotado \mathcal{O} tal que

$$\mathcal{O} \supset S_1(\mathcal{O}) \cup \dots \cup S_m(\mathcal{O}),$$

y tal que los $S_j(\mathcal{O})$ son disjuntos dos a dos.

Nótese que F no tiene por qué estar contenido en \mathcal{O} .

Sean S_1, \dots, S_m semejanzas separadas, todas de razón r , con $0 \leq r \leq 1$. Fijado un punto $\bar{x} \in F$, se definen los “vértices” de la k -ésima generación como los m^k puntos de F dados por

$$S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_k}(\bar{x}), \quad \text{donde para todo } 1 \leq i \leq k, 1 \leq n_i \leq m.$$

Cada uno de estos vértices se etiqueta por (n_1, \dots, n_k) .

De manera parecida, fijamos \mathcal{O} tal que satisfaga la condición de separación y definimos los “abiertos” de la k -ésima generación como los m^k conjuntos dados por

$$S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_k}(\mathcal{O}) \quad \text{donde } 1 \leq n_1 \leq m, \dots, 1 \leq n_k \leq m.$$

De nuevo se etiqueta a cada uno de estos abiertos por (n_1, \dots, n_k) .

Para todo k y para cada n_1, \dots, n_k con $1 \leq n_i \leq m$, se tiene

$$S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_k} \circ S_{n_{k+1}}(\mathcal{O}) \subset S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_k}(\mathcal{O}).$$

Por inducción sobre k se prueba que los abiertos de la k -ésima generación son disjuntos dos a dos. Puesto que cada abierto (n_1, \dots, n_k) de la k -ésima generación contiene a los m abiertos de la $(k+1)$ -ésima generación $(n_1, \dots, n_k, 1), \dots, (n_1, \dots, n_k, m)$, bastará ver que éstos últimos son disjuntos. Pero lo son por ser $S_1(\mathcal{O}), \dots, S_m(\mathcal{O})$ disjuntos y $S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_k}$ inyectiva. De la inclusión anterior también se sigue que si $k \geq \ell$, cada abierto de la ℓ -ésima generación contiene a $m^{k-\ell}$ abiertos de la k -ésima generación.

Sea v un vértice de la k -ésima generación, y sea $\mathcal{O}(v)$ el abierto de la k -ésima generación asociado a v , esto es, v y $\mathcal{O}(v)$ llevan la misma etiqueta (n_1, \dots, n_k) . Se satisface

- (a) $d(v, \mathcal{O}(v)) \leq r^k d(\bar{x}, \mathcal{O})$.
- (b) $\text{diam}\mathcal{O}(v) = r^k \text{diam}\mathcal{O}$.

Lema 3.0.8. Sean S_1, \dots, S_m semejanzas separadas de razón $0 \leq r \leq 1$, y F el correspondiente compacto autosemejante. Sea $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^N$ un recubrimiento finito de F dado por bolas abiertas. Tomamos k tal que

$$r^k \leq \min_{1 \leq j \leq N} \text{diam}B_j < r^{k-1}.$$

Supongamos que B es una bola de \mathcal{B} que satisface

$$r^\ell \leq \text{diam}B < r^{\ell-1}, \quad \text{con } 0 < \ell \leq k.$$

Entonces B contiene como mucho $cm^{k-\ell}$ vértices de la k -ésima generación, donde $c > 0$ es una constante que no depende de \mathcal{B} .

Demostración. Sean \mathcal{B} y $B = B(x, t)$ como en el enunciado. Existe una dilatación fija B^* de B que satisface que si v es un vértice de la k -ésima generación tal que $v \in B$, pongamos $v = S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_\ell} \circ \dots \circ S_{n_k}(\bar{x})$, $\mathcal{O}(v)$ es el correspondiente abierto de la k -ésima generación, y $\mathcal{O}_\ell(v) = S_{n_1} \circ \dots \circ S_{n_\ell}(\mathcal{O})$ es el abierto de ℓ -ésima generación que contiene a $\mathcal{O}(v)$, entonces $B^* \supset \mathcal{O}_\ell(v) \supset \mathcal{O}(v)$. En efecto, sea $a \in \mathcal{O}_\ell(v)$. Como para cada $\epsilon > 0$ existe $y_\epsilon \in \mathcal{O}(v)$ tal que $|v - y_\epsilon| < d(v, \mathcal{O}(v)) + \epsilon$, se tiene para todo ϵ que

$$|x - a| \leq |x - v| + |v - y_\epsilon| + |y_\epsilon - a| < \frac{\text{diam}B}{2} + d(v, \mathcal{O}(v)) + \epsilon + \text{diam}\mathcal{O}_\ell(v),$$

y por las propiedades (a) y (b),

$$|x - a| \leq \frac{\text{diam}B}{2} + r^k d(\bar{x}, \mathcal{O}) + r^\ell \text{diam}\mathcal{O} \leq \text{diam}B \left(\frac{1}{2} + d(\bar{x}, \mathcal{O}) + \text{diam}\mathcal{O} \right).$$

Así que podemos poner $B^* = B(x, qt)$, con $q > 0$. Como $qt < q\frac{r^{\ell-1}}{2}$, el volumen de B^* es menor que $c_d \left(\frac{q}{2r}\right)^d r^{\ell d}$, donde c_d es una constante que depende sólo de d . Por otro lado, por la propiedad (b) de más arriba, cualquier abierto de ℓ -ésima generación tiene volumen $c'_d r^{\ell d}$. En consecuencia existe una constante $c > 0$ que depende sólo de \bar{x}, \mathcal{O}, r y d , tal que B^* puede contener como máximo c abiertos de la ℓ -ésima generación. Luego B^* contiene como mucho $cm^{k-\ell}$ abiertos de la k -ésima generación, de donde se sigue que B puede contener como mucho $cm^{k-\ell}$ vértices de la k -ésima generación. \square

Teorema 3.0.9. *Supongamos que S_1, \dots, S_m son m semejanzas separadas, todas de razón $0 \leq r \leq 1$, y sea F el correspondiente compacto autosemejante. Entonces F tiene dimensión de Hausdorff igual a $\log m / \log(1/r)$.*

Demostración. La demostración de este teorema, así como la del lema anterior, siguen el mismo enfoque usado en el caso del triángulo de Sierpinski.

Sea $\alpha = \log m / \log(1/r)$. Veamos primero que $m_\alpha(F) < \infty$. Como $F_k = \tilde{S}^k(B)$, donde B satisface el Lema 3.0.3, y $\tilde{S}^k(B)$ es la unión de m^k conjuntos de diámetro igual a $r^k \text{diam} B$, dado $\delta > 0$, tomando k tal que $r^k \text{diam} B \leq \delta$ se satisface

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(F) \leq m^k (r^k \text{diam} B)^\alpha = (\text{diam} B)^\alpha,$$

puesto que si $\alpha = \log m / \log(1/r)$, entonces $mr^\alpha = 1$. Como $(\text{diam} B)^\alpha$ no depende de δ , se tiene $m_\alpha(F) \leq (\text{diam} B)^\alpha < \infty$.

Para ver $m_\alpha(F) > 0$, usaremos el lema anterior que a su vez usa la condición de separación. Como en el caso del triángulo de Sierpinski, bastará ver que hay algún δ para el que existe una constante $c > 0$ tal que para cualquier recubrimiento finito de F , $\{B_j\}_{j=1}^N$, formado por bolas abiertas con $\text{diam} B_j \leq \delta$, se satisface

$$c \leq \sum_{j=1}^N (\text{diam} B_j)^\alpha.$$

Sea \mathcal{B} un tal recubrimiento para un $\delta < 1$, y sea k tal que

$$r^k \leq \min_{1 \leq j \leq N} \text{diam} B_j < r^{k-1}.$$

Si N_ℓ denota el número de bolas B_j de \mathcal{B} tales que

$$r^\ell \leq \text{diam} B_j < r^{\ell-1},$$

por el Lema 3.0.8 vemos que el número total de vértices de la k -ésima generación que pueden estar recubiertos por \mathcal{B} es menor o igual que

$$c \sum_{\ell=1}^k N_\ell m^{k-\ell}.$$

Como los m^k vértices de la k -ésima generación pertenecen a F , forzosamente $m^k \leq c \sum_{\ell=1}^k N_\ell m^{k-\ell}$, de donde

$$\frac{1}{c} \leq \sum_{\ell=1}^k N_\ell m^{-\ell}$$

pero como consecuencia de la definición de α , $r^{\ell\alpha} = m^{-\ell}$, así que

$$\frac{1}{c} \leq \sum_{\ell=1}^k N_{\ell} r^{\ell\alpha} \leq \sum_{j=1}^N (\text{diam} B_j)^{\alpha}.$$

□

Corolario 3.0.10. *En las condiciones del teorema anterior, $\dim_B(F) = \dim_H(F)$.*

Demostración. Como por construcción $F \subset \tilde{S}^k(B)$, donde B satisface el Lema 3.0.3, y $\tilde{S}^k(B)$ es la unión de m^k bolas de diámetro igual a $r^k \text{diam} B$, se tiene que para cada k ,

$$\mathcal{N}_{r^k \text{diam} B/2}^{\text{ext}}(F) \leq m^k,$$

así que para todo k suficientemente grande se satisface

$$\frac{\log \mathcal{N}_{r^k \text{diam} B/2}^{\text{ext}}(F)}{-\log(r^k \text{diam} B/2)} \leq \frac{\log m^k}{-\log(r^k \text{diam} B/2)},$$

y tomando límites superiores cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\overline{\dim}_B \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log m^k}{-\log(r^k \text{diam} B/2)} = \frac{\log m}{\log(1/r)}.$$

Del teorema anterior y de (2.4) se deduce el resultado. □

El siguiente teorema, a veces conocido como el teorema del *collage*, da una idea de cuán buena es la aproximación de un compacto a un conjunto autosemejante para una cierta colección de semejanzas.

Teorema 3.0.11. *Sean S_1, \dots, S_m semejanzas en \mathbb{R}^d , todas ellas de razón $0 < r < 1$. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un compacto no vacío. Entonces*

$$\text{dist}(E, F) \leq \text{dist}(E, \tilde{S}(E)) \frac{1}{1-r},$$

donde $\tilde{S}(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$ y F es el conjunto invariante para \tilde{S} .

Demostración. Usando la desigualdad triangular para la distancia de Hausdorff, seguida de la invariancia de F , y del apartado (v) del Lema 3.0.5,

$$\begin{aligned} \text{dist}(E, F) &\leq \text{dist}(E, \tilde{S}(E)) + \text{dist}(\tilde{S}(E), F) \\ &= \text{dist}(E, \tilde{S}(E)) + \text{dist}(\tilde{S}(E), \tilde{S}(F)) \leq \text{dist}(E, \tilde{S}(E)) + r \text{dist}(E, F). \end{aligned}$$

□

Una consecuencia del Teorema 3.0.11 es que cualquier compacto de \mathbb{R}^d se puede aproximar de forma arbitrariamente cercana por un conjunto autosemejante.

Corolario 3.0.12. *Sea E un compacto no vacío de \mathbb{R}^d . Dado $\delta > 0$, existe $0 < r < 1/2$ y existen un número finito de semejanzas S_1, \dots, S_m de razón r tales que el correspondiente compacto invariante F satisface $\text{dist}(E, F) < \delta$.*

Demostración. Sean B_1, \dots, B_m una colección de bolas con centro en E que recubren E y cuyos radios son menores o iguales que $\delta/4$. Entonces

$$E \subset \bigcup_{i=1}^m B_i \subset E_{\delta/4}.$$

Para cada i existe una semejanza S_i de razón $r < 1/2$ tal que $S_i(E) \subset B_i$. Entonces

$$S_i(E) \subset B_i \subset (S_i(E))_{\delta/2}.$$

Así que

$$\bigcup_{i=1}^m S_i(E) \subset E_{\delta/4} \quad \text{y} \quad E \subset \bigcup_{i=1}^m (S_i(E))_{\delta/2} \subset \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(E) \right)_{\delta/2}.$$

Por definición de distancia de Hausdorff, $\text{dist}(E, \bigcup_{i=1}^m S_i(E)) \leq \delta/2$. Y del Teorema, $\text{dist}(E, F) \leq \text{dist}(E, \bigcup_{i=1}^m S_i(E)) \frac{1}{1-r} < \delta$. \square

Aproximar conjuntos por conjuntos autosemejantes tiene relación con la compresión de datos en el sentido que los conjuntos autosemejantes pueden ser codificados con una pequeña cantidad de información, así que se pueden transmitir o almacenar de forma muy eficiente. Es conveniente, pues, saber qué objetos se pueden aproximar por conjuntos autosemejantes, pero también cómo encontrar funciones cuyo invariante proporcione una buena representación de un objeto dado. Lamentablemente el método de aproximación por conjuntos invariantes de la demostración anterior es bastante tosco y hace falta un enfoque más sutil para obtener imágenes convincentes con un número pequeño de aproximaciones. Es aquí donde pueden entrar en juego las nociones de dimensión estudiadas: se puede estimar la dimensión *box-counting* del objeto a aproximar. El supuesto de que las semejanzas buscadas deben proporcionar un conjunto invariante de esta dimensión da, al menos a nivel teórico, restricciones en el posible conjunto de transformaciones, usando resultados como el Teorema 3.0.9. De todas formas en la práctica, esta información es bastante difícil de utilizar.

Capítulo 4

Curvas que llenan el espacio

Una línea recta es la total negación del plano, mientras que una línea curva es potencialmente el plano, en el sentido que contiene la esencia del plano en ella misma.

W. Kandinsky, *Punkt und linie zu fläche*, 1926

En 1890, Peano construyó una curva continua, hoy en día llamada la curva de Peano, que pasaba por todos los puntos del cuadrado unidad. Su propósito era construir una aplicación continua y exhaustiva del intervalo unidad en el cuadrado unidad. El problema que resolvió Peano es si tal aplicación podía ser continua, es decir, una curva que llena el espacio.

Desde entonces, han surgido muchas variantes de su construcción, a las que también se llama de forma genérica aplicaciones de Peano. Describiremos en este capítulo una que tiene la característica de conservar la medida y que satisface la condición de Lipschitz de exponente $1/2$. Se construye a partir de un proceso iterativo que describió Hilbert en 1891, cuyos tres primeros pasos se ilustran, superpuestos, en la Figura 4.1.

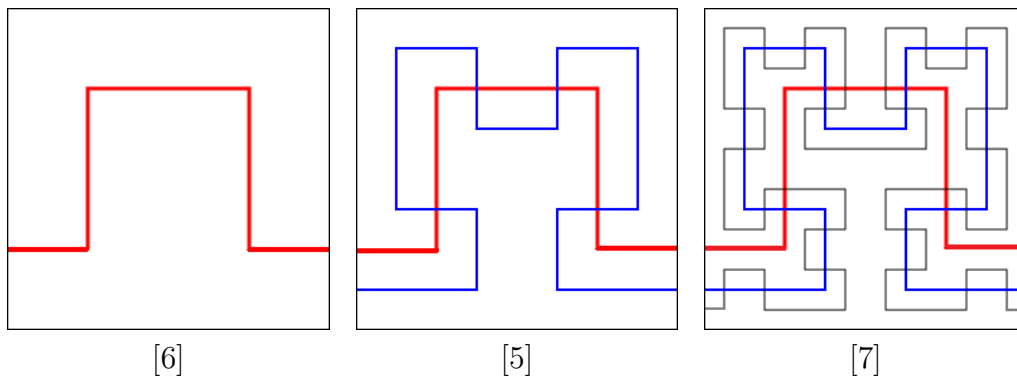


Figura 4.1: Construcción de una curva de Peano.

Varias observaciones ayudarán a aclarar la naturaleza de esta construcción. Supongamos que $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ es continua y exhaustiva. Entonces:

(a) F no puede ser Lipschitz de exponente $\gamma > 1/2$, puesto que si lo fuera, por el Lema 2.4.7, se tendría

$$2 = \dim F([0, 1]) \leq \frac{1}{\gamma} \dim[0, 1] < 2.$$

(b) F no puede ser inyectiva. En efecto, si lo fuera, entonces la inversa G de F existiría y sería continua. Dados dos puntos $a \neq b$ de $[0, 1]$, y considerando dos curvas distintas en el cuadrado que unieran $F(a)$ y $F(b)$, se tendría que las imágenes de estas curvas por G contendrían forzosamente el intervalo $[a, b]$, con lo que se llegaría a contradicción. De hecho, dado cualquier disco abierto D en el cuadrado unidad, existe $x \in D$ tal que $F(t) = F(s) = x$ pero $t \neq s$.

Estudiaremos primero un tipo de aplicaciones que asocian subcuadrados de $[0, 1] \times [0, 1]$ a subintervalos de $[0, 1]$.

4.1. Intervalos cuárticos y cuadrados diádicos

Los **intervalos cuárticos** surgen cuando el intervalo $[0, 1]$ es sucesivamente subdividido por potencias de 4. Así, la primera generación de intervalos cuárticos son los intervalos cerrados

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad I_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad I_4 = \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

La segunda generación se obtiene dividiendo cada intervalos de la primera generación en 4. Luego hay $4^2 = 16$ intervalos cuárticos de la segunda generación. En general, hay 4^k intervalos cuárticos de la k -ésima generación, cada uno de longitud $\frac{1}{4^k}$ y de la forma $\left[\frac{\ell}{4^k}, \frac{\ell+1}{4^k}\right]$, donde ℓ es entero y $0 \leq \ell < 4^k$.

Una **cadena** de intervalos cuárticos es una sucesión decreciente de intervalos

$$I^1 \supset I^2 \supset \dots \supset I^k \supset \dots,$$

donde cada I^k es un intervalo cuártico de la k -ésima generación.

Proposición 4.1.1. *Las cadenas de intervalos cuárticos satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) Si $\{I^k\}$ es una cadena de intervalos cuárticos, entonces existe un único $t \in [0, 1]$ tal que $t \in \bigcap_k I^k$.

(ii) Dado $t \in [0, 1]$, existe una cadena $\{I^k\}$ de intervalos cuárticos tal que $t \in \bigcap_k I^k$.

(iii) El conjunto de puntos t para los que la cadena del apartado (ii) no es única, tiene medida de Lebesgue en \mathbb{R} igual a cero (de hecho, es un conjunto numerable).

Demostración. El apartado (i) se sigue del hecho que $\{I^k\}$ es una sucesión decreciente de compactos cuyos diámetros tienden a cero.

Para ver los apartados (ii) y (iii), fijado t observamos que para cada k existe al menos un intervalo cuártico I^k tal que $t \in I^k$. Si para algún k , t es de la forma $\frac{\ell}{4^k}$, con $0 < \ell < 4^k$, entonces hay exactamente 2 intervalos cuárticos de la k -ésima generación que contienen a t . En caso contrario, la cadena es única. Luego el conjunto de puntos para los que la cadena no es única es precisamente el conjunto de **racionales diádicos**

$$\frac{\ell}{4^k}, \quad \text{donde } 1 \leq k, \text{ y } 0 < \ell < 4^k.$$

Observemos que estas fracciones se pueden poner como $\frac{\ell}{2^{2k}}$. Este conjunto es numerable, luego tiene medida 0. \square

Observación 4.1.2. Sea t de la forma $\frac{\ell}{4^k}$ para algún k y con $0 < \ell < 4^k$. Para cada uno de los dos intervalos cuárticos de k -ésima generación que contienen a t , $I^k = \left[\frac{\ell-1}{4^k}, \frac{\ell}{4^k} \right]$ y $J^k = \left[\frac{\ell}{4^k}, \frac{\ell+1}{4^k} \right]$, y para cada n , existe un único intervalo cuártico de $(k+n)$ -ésima generación, respectivamente $I^{k+n} = \left[\frac{\ell 4^n - 1}{4^{k+n}}, \frac{\ell 4^n}{4^{k+n}} \right]$ y $J^{k+n} = \left[\frac{\ell 4^n}{4^{k+n}}, \frac{\ell 4^n + 1}{4^{k+n}} \right]$, tal que $t \in I^{k+n} \subset I^k$ y $t \in J^{k+n} \subset J^k$. Luego para cada punto t del apartado (iii) de la proposición anterior, hay exactamente dos cadenas de intervalos cuárticos $\{I^k\}$, $\{J^k\}$ tales que $t \in \bigcap_k I^k$ y $t \in \bigcap_k J^k$.

Los **cuadrados diádicos** se obtienen subdividiendo el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$ en el plano a partir de dividir sus lados sucesivamente por la mitad. Así, los cuadrados diádicos de la primera generación surgen cuando dividimos los lados del cuadrado unidad por la mitad. Se obtienen cuatro cuadrados cerrados S_1, S_2, S_3 y S_4 , cada uno de lado $1/2$ y área $1/4$.

Los cuadrados diádicos de la segunda generación se obtienen dividiendo por la mitad cada lado de cada cuadrado diádico de la primera generación, y así sucesivamente. En general, hay 4^k cuadrados diádicos de la k -ésima generación, cada uno de lado $1/2^k$ y área $1/4^k$.

Una **cadena** de cuadrados diádicos es una sucesión decreciente de cuadrados

$$S^1 \supset S^2 \supset \dots \supset S^k \supset \dots,$$

donde cada S^k es un cuadrado diádico de la k -ésima generación.

Proposición 4.1.3. *Las cadenas de cuadrados diádicos tienen las siguientes propiedades:*

- (i) *Si $\{S^k\}$ es una cadena de cuadrados diádicos, entonces existe un único $x \in [0, 1] \times [0, 1]$ tal que $x \in \bigcap_k S^k$.*
- (ii) *Dado $x \in [0, 1] \times [0, 1]$, existe una cadena $\{S^k\}$ de cuadrados diádicos tal que $x \in \bigcap_k S^k$.*
- (iii) *El conjunto de x para los que la cadena del apartado (ii) no es única, tiene medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 igual a cero.*

Demostración. La demostración de (i) y (ii) es análoga a la de la Proposición 4.1.1.

Para probar (iii), observemos que en este caso el conjunto de puntos que no tienen representación única está formado por todos los puntos (x_1, x_2) donde una de las coordenadas es un racional diádico. Geométricamente, este conjunto es la unión (numerable) de segmentos horizontales y verticales en $[0, 1] \times [0, 1]$ determinados por la cuadrícula de racionales diádicos. Este conjunto tiene medida cero. \square

Observación 4.1.4. De forma análoga a la Observación 4.1.2, dado $x \in [0, 1] \times [0, 1]$ se prueba que hay como mucho cuatro cadenas de cuadrados diádicos $\{S^k\}$ tales que $x \in \bigcap_k S^k$.

4.2. Correspondencia diádica

Introducimos primero un resultado que vamos a necesitar para demostrar el teorema central de este apartado.

Teorema 4.2.1. *Cualquier abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, se puede escribir como unión numerable de cubos cerrados cuyos interiores son disjuntos.*

Demostración. Como primer paso, consideramos la malla en \mathbb{R}^d formada por todos los cubos cerrados de lado 1 cuyos vértices tienen coordenadas enteras. En otras palabras, consideramos la malla generada por la red \mathbb{Z}^d . Usaremos también las mallas formadas por los cubos de lado $1/2^N$ obtenidos dividiendo sucesivamente los lados de los cubos de la malla original por la mitad.

Aceptaremos o rechazaremos a los cubos de la malla inicial como parte de \mathcal{Q} de acuerdo con la siguiente regla: si Q está completamente contenido en \mathcal{O} , entonces aceptamos a Q . Si Q interseca a \mathcal{O} y a \mathcal{O}^c , entonces aceptamos provisionalmente a Q . Si Q está completamente contenido en \mathcal{O}^c , entonces le rechazamos.

El segundo paso consiste en dividir por la mitad cada lado de los cubos provisionalmente aceptados en el paso anterior obteniendo para cada uno 2^d cubos de lado

1/2. Repetimos entonces el procedimiento, aceptando los pequeños cubos si están completamente contenidos en \mathcal{O} , aceptándolos provisionalmente si intersecan a \mathcal{O} y a \mathcal{O}^c , y rechazándolos si están contenidos en \mathcal{O}^c . La Figura 4.2 ilustra estos pasos para un abierto de \mathbb{R}^2 .

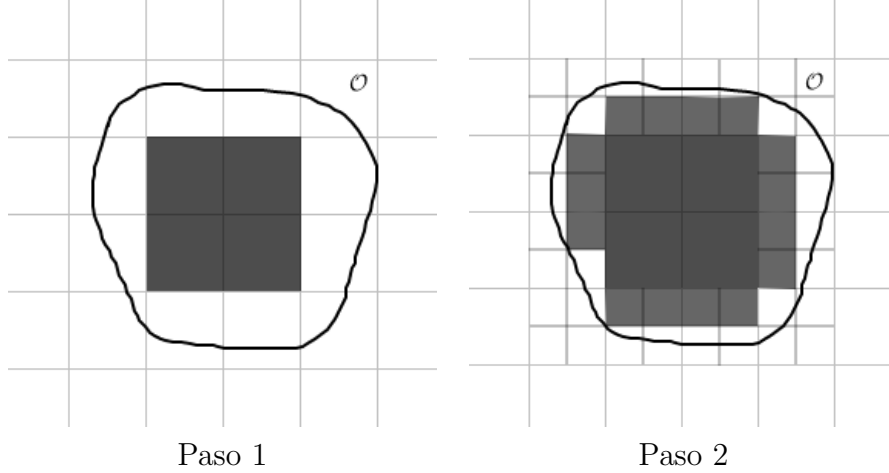


Figura 4.2: Descomposición de \mathcal{O} en cubos de interiores disjuntos.

Este procedimiento se repite indefinidamente y, por construcción, la colección \mathcal{Q} que resulta es numerable y está formada por cubos de interiores disjuntos. Para probar que $\mathcal{O} = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$, bastará ver que \mathcal{Q} es un recubrimiento de \mathcal{O} . Observemos que si $x \in \mathcal{O}$, existe un cubo S suficientemente pequeño (obtenido a partir de dividir sucesivamente la malla original por la mitad) tal que $x \in S \subset \mathcal{O}$. Así que, o bien $S \in \mathcal{Q}$, o bien $S \subset S'$, con $S' \in \mathcal{Q}$. \square

Una **correspondencia diádica** es una aplicación Φ de los intervalos cuárticos en los cuadrados diádicos que satisface:

- (1) Φ es biyectiva.
- (2) Φ respeta las generaciones.
- (3) Φ respeta las inclusiones.

Por (2), nos referimos a que si I es un intervalo cuártico de la k -ésima generación, entonces $\Phi(I)$ es un cuadrado diádico de la k -ésima generación. Por (3), nos referimos a que si $I \subset J$, entonces $\Phi(I) \subset \Phi(J)$.

Sea $D = \left\{ \frac{\ell}{4^k} : 1 \leq k, 0 < \ell < 4^k \right\}$ el conjunto de puntos representados por más de una cadena cuártica. Dada una correspondencia diádica Φ , la **correspondencia inducida** Φ^* hace corresponder a cada punto de $[0, 1] \setminus D$ un punto de $[0, 1] \times [0, 1]$, de la siguiente manera. Si $\{t\} = \bigcap I^k$ donde $\{I^k\}$ es una cadena de intervalos cuárticos, entonces, como $\{\Phi(I^k)\}$ es una cadena de cuadrados diádicos, parece natural definir

$$\Phi^*(t) = x = \bigcap \Phi(I^k).$$

Observemos que $\Phi^* : [0, 1] \setminus D \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ está bien definida.

Denotaremos de ahora en adelante por m_1 y m_2 las medidas de Lebesgue en \mathbb{R} y en \mathbb{R}^2 respectivamente.

Teorema 4.2.2. *Dada una correspondencia diádica Φ , existen conjuntos $Z_1 \subset [0, 1]$ y $Z_2 \subset [0, 1] \times [0, 1]$, ambos de medida cero, tales que:*

- (i) Φ^* es una biyección de $[0, 1] \setminus Z_1$ en $[0, 1] \times [0, 1] \setminus Z_2$.
- (ii) $E \subset [0, 1] \setminus Z_1$ es medible si y sólo si $\Phi^*(E) \subset [0, 1] \times [0, 1] \setminus Z_2$ es medible (respecto de la medida de Lebesgue en una y dos dimensiones respectivamente).
- (iii) $m_1(E) = m_2(\Phi^*(E))$.

Demostración. Denotamos por \mathcal{N}_1 la colección de cadenas de intervalos cuárticos tales que los puntos de $I = [0, 1]$ que representan no tiene representación única, es decir, tales que corresponden a un punto de D . Análogamente, denotamos por \mathcal{N}_2 la colección de cadenas de cuadrados diádicos para las que los puntos correspondientes del cuadrado $I \times I$ no tienen representación única.

Como Φ es una biyección de cadenas de intervalos cuárticos en cadenas de cuadrados diádicos, es también una biyección de $\mathcal{N}_1 \cup \Phi^{-1}(\mathcal{N}_2)$ en $\Phi(\mathcal{N}_1) \cup \mathcal{N}_2$, y en consecuencia también es una biyección entre sus complementarios. Sea Z_1 el conjunto de puntos de I representados por las cadenas de $\mathcal{N}_1 \cup \Phi^{-1}(\mathcal{N}_2)$, y sea Z_2 el conjunto de puntos de $I \times I$ representados por cadenas de cuadrados diádicos de $\Phi(\mathcal{N}_1) \cup \mathcal{N}_2$. Observemos que $D \subset Z_1$. Entonces Φ^* , la correspondencia inducida, está bien definida en $I \setminus Z_1$ y da una biyección entre $I \setminus Z_1$ y $I \times I \setminus Z_2$.

Veamos ahora que Z_1 y Z_2 tienen medida cero. Por el apartado (iii) de la Proposición 4.1.3, el conjunto de puntos representados por las cadenas de \mathcal{N}_2 es numerable. Para cada uno de ellos, por la Observación 4.1.4, hay como mucho cuatro cadenas diferentes de cuadrados diádicos que lo representan. Así que \mathcal{N}_2 es numerable y $\Phi^{-1}(\mathcal{N}_2)$ también. Luego el conjunto D' de los puntos representados por cadenas de $\Phi^{-1}(\mathcal{N}_2)$ es también numerable. Como por la Proposición 4.1.1, D es también numerable, se satisface que $Z_1 = D \cup D'$ tiene medida cero. Análogamente se obtiene que Z_2 tiene también medida cero.

Queremos probar ahora que Φ^* conserva la medida. Veamos primero que si I' es un intervalo cuártico de k -ésima generación, entonces $\Phi^*(I' \setminus Z_1)$ es medible y

$$m_2(\Phi^*(I' \setminus Z_1)) = m_1(I'). \quad (4.1)$$

Sea $x \in \Phi^*(I' \setminus Z_1)$. Existe $t \in I' \setminus Z_1$ tal que $\Phi^*(t) = x$. Observemos que t corresponde a una sola cadena $\{I^j\} \notin \mathcal{N}_1 \cup \Phi^{-1}(\mathcal{N}_2)$, con $I^k = I'$, de donde $x = \bigcap_j \Phi(I^j) \in \Phi(I') \setminus Z_2$.

Sea ahora $x \in \Phi(I') \setminus Z_2$. Existe una cadena $\{S^j\} \notin \Phi(\mathcal{N}_1) \cup \mathcal{N}_2$ de cuadrados diádicos con $S^k = \Phi(I')$ tal que $x = \bigcap_j S^j$. Luego existe una cadena $\{I^j\} \notin \mathcal{N}_1 \cup$

$\Phi^{-1}(\mathcal{N}_2)$ de intervalos cuárticos con $I^k = I'$ tal que $S^j = \Phi(I^j)$ para todo j . Consideremos $t = \bigcap I^j$. Se satisface que $t \notin Z_1$, $t \in I'$, y $\Phi^*(t) = x$. Así que $x \in \Phi^*(I' \setminus Z_1)$. Acabamos de ver

$$\Phi^*(I' \setminus Z_1) = \Phi(I') \setminus Z_2, \quad (4.2)$$

y como $m_2(\Phi(I')) = m_1(I')$, queda demostrada la relación (4.1) entre la medida de un intervalo cuártico y la de su imagen por Φ^* .

Para continuar con la demostración, usaremos el Teorema 4.2.1, según el cual cualquier abierto \mathcal{O} en el intervalo unidad I se puede poner como unión numerable $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ de intervalos cerrados con interiores disjuntos. Es más, un análisis de la demostración muestra que los intervalos I_j se pueden tomar diádicos, esto es, de la forma $[\ell/2^i, (\ell+1)/2^i]$ para enteros i, ℓ apropiados. Observemos que si i es par, $i = 2k$, un tal intervalo es de hecho un intervalo cuártico, mientras que si $i = 2k - 1$ es impar, es unión de dos intervalos cuárticos, $[(2\ell)/2^{2k}, (2\ell+1)/2^{2k}]$ y $[(2\ell+1)/2^{2k}, (2\ell+2)/2^{2k}]$. En consecuencia, cualquier abierto de I se puede poner como unión de intervalos cuárticos con interiores disjuntos. Análogamente, cualquier abierto del cuadrado $I \times I$ es unión numerable de cuadrados diádicos cuyos interiores son disjuntos.

Sea $E \subset I \setminus Z_1$ un conjunto de medida cero, y sea $\epsilon > 0$. Podemos recubrir $E \subset \bigcup_j I_j$ por intervalos cuárticos I_j tales que $\sum_j m_1(I_j) < \epsilon$. De hecho $E \subset \bigcup_j (I_j \setminus Z_1)$, así que $\Phi^*(E) \subset \bigcup_j \Phi^*(I_j \setminus Z_1)$, luego por (4.1),

$$m_2(\Phi^*(E)) \leq \sum m_2(\Phi^*(I_j \setminus Z_1)) = \sum m_1(I_j) < \epsilon. \quad (4.3)$$

Así que $\Phi^*(E)$ es medible y $m_2(\Phi^*(E)) = 0$. Análogamente, $(\Phi^*)^{-1}$ envía conjuntos de medida cero en $I \times I \setminus Z_2$ a conjuntos de medida cero en I .

Sea ahora $\mathcal{O} \subset I$ un abierto. Por el argumento anterior, $\mathcal{O} = \bigcup_j I_j$ con I_j intervalos cuárticos de interiores disjuntos, de donde $\Phi^*(\mathcal{O} \setminus Z_1) = \bigcup_j \Phi^*(I_j \setminus Z_1)$ es medible. Además, usando (4.2) y observando que como Φ es una biyección que respeta generaciones e inclusiones, los cuadrados $\Phi(I_j)$ también tienen interiores disjuntos, se tiene

$$\begin{aligned} m_2(\Phi^*(\mathcal{O} \setminus Z_1)) &= m_2\left(\bigcup_j \Phi(I_j) \setminus Z_2\right) = \\ &= \sum_j m_2(\Phi(I_j) \setminus Z_2) = \sum_j m_1(I_j) = m_1(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esta identidad se extiende a los conjuntos $G \in G_\delta$ (conjuntos que son intersección numerable de abiertos) tales que $G \subset (0, 1)$. Dado un tal G , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $G = \bigcap_j \mathcal{O}_j$, con $\mathcal{O}_j \subset I$ abiertos. $G \setminus Z_1 = \bigcap_j (\mathcal{O}_j \setminus Z_1)$,

y (4.4) garantiza que $\Phi^*(G \setminus Z_1) = \bigcap_j \Phi^*(\mathcal{O}_j \setminus Z_1)$ es medible, y que se satisface

$$\begin{aligned} m_2(\Phi^*(G \setminus Z_1)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} m_2\left(\bigcap_{j=1}^N \Phi^*(\mathcal{O}_j \setminus Z_1)\right) = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} m_2(\Phi^*(\left(\bigcap_{j=1}^N \mathcal{O}_j\right) \setminus Z_1)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} m_1\left(\bigcap_{j=1}^N \mathcal{O}_j\right) = m_1(G). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para terminar, sea $E \subset I \setminus Z_1$ un conjunto medible. Consideremos $E' = E \setminus \{0, 1\} \subset (0, 1) \setminus Z_1$, también medible. Entonces existe $G \subset (0, 1)$, $G \in G_\delta$, tal que $G = E' \uplus Z$, donde $m_1(Z) = 0$. Luego $G \setminus Z_1 = E' \uplus (Z \setminus Z_1)$. En consecuencia, (4.3) y (4.5) aseguran que $\Phi^*(E')$ es medible y que

$$m_2(\Phi^*(E')) = m_2(\Phi^*(G \setminus Z_1)) = m_1(G) = m_1(E').$$

Luego $\Phi^*(E)$ también es medible y $m_2(\Phi^*(E)) = m_1(E)$.

Argumentos análogos se pueden aplicar a $(\Phi^*)^{-1}$, y esto completa la demostración del teorema. \square

La variante de la aplicación de Peano que describiremos en el siguiente subapartado, la obtendremos como Φ^* para una correspondencia diádica particular Φ .

4.3. Construcción de una aplicación de Peano. La curva de Hilbert

La correspondencia diádica que presentamos a continuación proporciona los pasos a seguir para trazar las aproximaciones de nuestra curva de Peano. La idea principal que hay tras su construcción es que cuando vamos de un intervalo cuártico de la k -ésima generación al siguiente intervalo cuártico de la misma generación, avanzamos de un cuadrado diádico de la k -ésima generación a otro cuadrado de la k -ésima generación con el que tenga un lado en común.

Más concretamente, decimos que dos intervalos cuárticos de la misma generación son **adyacentes** si tienen un punto en común. De la misma forma, dos cuadrados de la misma generación son **adyacentes** si comparten un lado.

Lema 4.3.1. *Hay una única correspondencia diádica Φ que satisface:*

- (i) *Si I y J son dos intervalos adyacentes de la misma generación, entonces $\Phi(I)$ y $\Phi(J)$ son dos cuadrados adyacentes de la misma generación.*
- (ii) *En la generación k , si I_- es el intervalo que está más a la izquierda y I_+ el que está más a la derecha, entonces $\Phi(I_-)$ es el cuadrado que está más abajo y a la izquierda mientras que $\Phi(I_+)$ es el que está más abajo y a la derecha.*

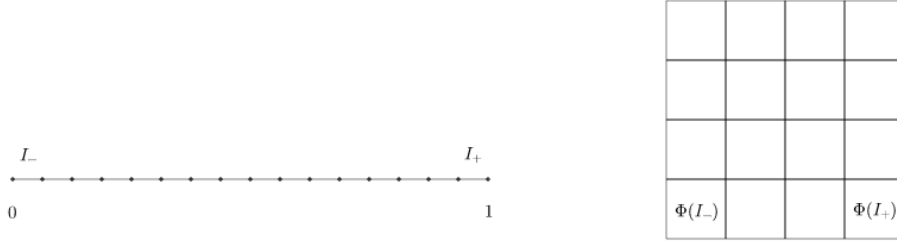


Figura 4.3: Correspondencia diádica particular.

La parte (ii) del lema se ilustra en la Figura 4.3.

Demostración. Dado un cuadrado diádico S y sus cuatro subcuadrados inmediatos, una **travesía** aceptable es una ordenación de los subcuadrados S_1, S_2, S_3 y S_4 tal que S_j y S_{j+1} son adyacentes para $j = 1, 2, 3$. Con una ordenación tal, observemos que si pintamos S_1 de color blanco y luego alternadamente negro y blanco, el cuadrado S_3 es también blanco, mientras que S_2 y S_4 son negros. Lo que es importante recordar es que si el primer cuadrado de una travesía es blanco, entonces el último es negro. Es más, los dos cuadrados de una travesía adyacentes al primero son negros.

La observación clave es la siguiente. Dado un cuadrado S y un lado σ de S . Si S_1 es cualquiera de los subcuadrados inmediatos de S , existe una única travesía S_1, S_2, S_3, S_4 tal que el último cuadrado S_4 tiene un lado en σ . Con el cuadrado inicial S_1 en la esquina inferior izquierda de S , las cuatro posibilidades que corresponden a las 4 elecciones de σ , se ilustran en la Figura 4.4.

Ya tenemos todo lo que necesitamos para comenzar la descripción inductiva de la correspondencia diádica Φ que satisface las condiciones del lema. A los intervalos cuárticos de la primera generación les asignamos los cuadrados $S_j = \Phi(I_j)$ de la forma en que está representado en la Figura 4.5.

Supongamos que Φ está definida para todos los intervalos cuárticos de generación menor o igual que k . Escribimos los intervalos de k -ésima generación en orden creciente como I_1, \dots, I_{4^k} , y ponemos $S_j = \Phi(I_j)$. Entonces dividimos I_1 en cuatro intervalos cuárticos de generación $k + 1$ y los denotamos por $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}$ y $I_{1,4}$, donde los intervalos están tomados en orden creciente.

Ahora asignamos a cada intervalo $I_{1,j}$ un cuadrado diádico $\Phi(I_{1,j}) = S_{1,j}$ de generación $k + 1$ contenido en S_1 de forma que:

- (a) $S_{1,1}$ es el subcuadrado inferior izquierdo de S_1 .
- (b) $S_{1,4}$ tiene un lado sobre el lado que S_1 comparte con S_2 .
- (c) $S_{1,1}, S_{1,2}, S_{1,3}$ y $S_{1,4}$ es una travesía.

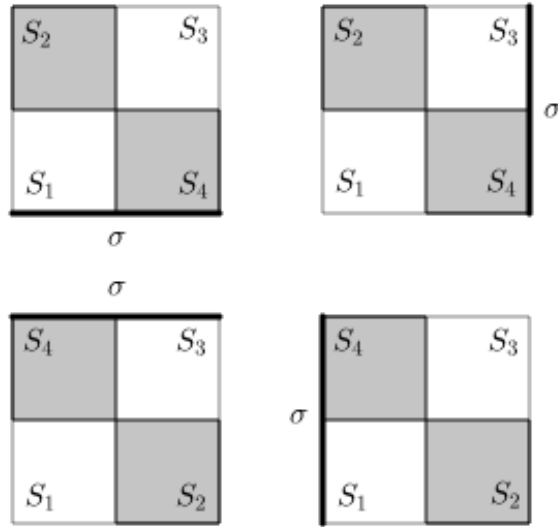


Figura 4.4: Travesías.

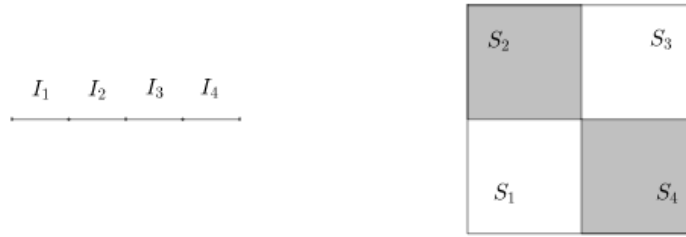


Figura 4.5: Etapa inicial de la correspondencia.

Esto es posible, puesto que la hipótesis de inducción garantiza que S_2 es adyacente a S_1 . Como hay una única travesía que satisface (a), (b) y (c), las asignaciones para los subintervalos de I_1 quedan fijadas.

Sean $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}$ y $I_{2,4}$ los intervalos cuárticos de generación $k+1$ en I_2 , escritos en orden creciente. Primero tomamos como $S_{2,1} = \Phi(I_{2,1})$ al subcuadrado de S_2 que es adyacente a $S_{1,4}$. Como S_3 es adyacente a S_2 , podemos encontrar una travesía $S_{2,1}, S_{2,2}, S_{2,3}, S_{2,4}$ en los subcuadrados de S_2 tal que $S_{2,4}$ tiene un lado tocando a S_3 .

Observemos que salimos de S_1 desde un cuadrado negro ($S_{1,4}$, adyacente a $S_{1,1}$) y entramos en S_2 en un cuadrado blanco ($S_{2,1}$, adyacente a $S_{1,4}$). Así que en S_2 los subcuadrados blancos y negros estarán dispuestos como en S_1 .

Podemos repetir este proceso en cada intervalo I_j y cuadrado S_j , $j = 3, \dots, 4^k - 1$. Observemos que en cada paso el cuadrado $S_{j,1}$ es blanco mientras que $S_{j,4}$ es negro. Además, para $j = 1, \dots, 4^k - 2$, si en S_j los subcuadrados blancos y negros están

dispuestos como en el cuadrado central de la Figura 4.6, entonces en S_{j+1} , que por

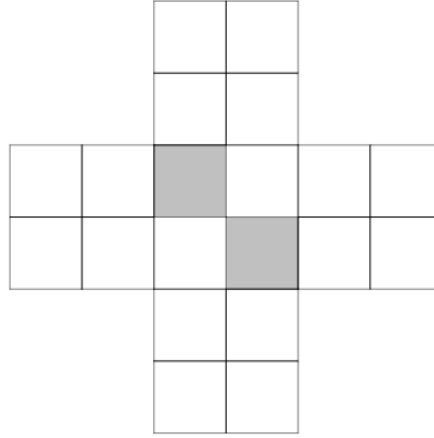


Figura 4.6: Disposición de subcuadrados blancos y negros.

la hipótesis de inducción es adyacente a S_j , forzosamente deberán estar dispuestos del mismo modo.

Para el último paso, de nuevo la hipótesis de inducción asegura que S_{4^k} es el cuadrado de generación k situado en la esquina inferior derecha y que $S_{4^{k-1}}$ está justo encima de él o justo a su izquierda. Como, por el razonamiento anterior, la disposición de cuadrados blancos y negros en $S_{4^{k-1}}$ es también como la de la Figura 4.6, $S_{4^{k-1},4}$ es el subcuadrado inferior derecho de $S_{4^{k-1}}$. Tomando $S_{4^k,1}$ el subcuadrado de S_{4^k} adyacente a $S_{4^{k-1},4}$, existe una única travesía $S_{4^k,1}, S_{4^k,2}, S_{4^k,3}, S_{4^k,4}$ tal que $S_{4^k,4}$ es el subcuadrado inferior derecho. Así que para las asignaciones de la generación $k+1$ que acabamos de construir también se cumplen las hipótesis del lema. \square

Empezaremos ahora propiamente la descripción de la curva de Peano que queríamos presentar. Para cada generación k , construimos una línea poligonal que consiste en segmentos horizontales y verticales conectando los centros de cuadrados consecutivos. Más concretamente, sea Φ la correspondencia diádica del Lema 4.3.1, y sean S_1, \dots, S_{4^k} los cuadrados de la k -ésima generación ordenados según Φ , es decir, $\Phi(I_j) = S_j$. Sea t_j el punto medio de I_j ,

$$t_j = \frac{j - \frac{1}{2}}{4^k}, \quad \text{para } j = 1, \dots, 4^k.$$

Y sea x_j el centro del cuadrado S_j . Definimos

$$\mathcal{P}_k(t_j) = x_j.$$

Asignamos también

$$\mathcal{P}_k(0) = (0, 1/2^{k+1}) = x_0 \quad \text{donde } t_0 = 0,$$

y

$$\mathcal{P}_k(1) = (1, 1/2^{k+1}) = x_{4^k+1} \quad \text{donde } t_{4^k+1} = 1.$$

Extendemos entonces $\mathcal{P}_k(t)$ al intervalo unidad $0 \leq t \leq 1$ por linealidad entre los subintervalos determinados por los punto de división t_0, \dots, t_{4^k+1} .

Observemos que para $1 \leq j \leq 4^k$, la distancia $|x_j - x_{j+1}| = 1/2^k$ mientras que $|t_j - t_{j+1}| = 1/4^k$. También

$$|x_1 - x_0| = |x_{4^k} - x_{4^k+1}| = \frac{1}{2 \cdot 2^k},$$

mientras que

$$|t_1 - t_0| = |t_{4^k} - t_{4^k+1}| = \frac{1}{2 \cdot 4^k}.$$

En consecuencia $\mathcal{P}'_k(t) = 4^k/2^k = 2^k$ salvo cuando $t = t_j$. De forma análoga a la demostración del apartado e) de la Proposición 2.4.2 se prueba que para cualquier $t, s \in [0, 1]$,

$$|\mathcal{P}_k(t) - \mathcal{P}_k(s)| \leq 2^k |t - s|. \quad (4.6)$$

Por otro lado,

$$|\mathcal{P}_{k+1}(t) - \mathcal{P}_k(t)| \leq \sqrt{2}/2^k, \quad (4.7)$$

puesto que cuando $\ell/4^k \leq t \leq (\ell + 1)/4^k$, entonces $\mathcal{P}_{k+1}(t)$ y $\mathcal{P}_k(t)$ pertenecen al mismo cuadrado diádico de generación k .

En consecuencia, el límite

$$\mathcal{P}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}_k(t) = \mathcal{P}_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (\mathcal{P}_{j+1}(t) - \mathcal{P}_j(t))$$

existe, y define una función continua por ser $\mathcal{P}_k(t)$ continua para todo k y converger uniformemente a \mathcal{P} .

Observación 4.3.2. Directamente de nuestra construcción se tiene que si $t \in I^k$, con I^k un intervalo de generación k , entonces para cada $j \geq k$, $\mathcal{P}_j(t) \in \Phi(I_k)$, y como $\Phi(I_k)$ es cerrado, $\mathcal{P}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{P}_j(t) \in \Phi(I_k)$.

El siguiente lema es, de hecho, una generalización del Lema 2.4.8.

Lema 4.3.3. *Supongamos que $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que satisface*

$$|f_j(t) - f_j(s)| \leq A^j |t - s| \quad \text{para algún } A > 1,$$

y

$$|f_j(t) - f_{j+1}(t)| \leq B^{-j} \quad \text{para algún } B > 1.$$

Entonces el límite $f(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(t)$ existe y satisface

$$|f(t) - f(s)| \leq M |t - s|^\gamma,$$

donde $\gamma = \log B / \log(AB)$.

Demostración. La función límite f , que es continua, viene dada por las series uniformemente convergentes

$$f(t) = f_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(t) - f_k(t)),$$

así que

$$|f(t) - f_j(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} |f_{k+1}(t) - f_k(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} B^{-k} \leq cB^{-j}, \quad \text{con } c > 1.$$

Por la desigualdad triangular, junto con la desigualdad que acabamos de obtener y la que está en el enunciado del lema, se tiene

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq |f_j(t) - f_j(s)| + |f(t) - f_j(t)| + |f(s) - f_j(s)| \\ &\leq A^j|t - s| + 2cB^{-j} \leq 2c(A^j|t - s| + B^{-j}), \quad \text{para cada } j \geq 1. \end{aligned}$$

Fijados $t, s \in [0, 1]$, $t \neq s$, elegimos j de manera que minimice la expresión $A^j|t - s| + B^{-j}$. Esto se consigue tomando j de manera que los dos términos $A^j|t - s|$ y B^{-j} sean comparables. Más concretamente, elegimos j tal que satisfaga

$$1 \leq (AB)^j|t - s| \leq AB. \quad (4.8)$$

Basta tomar $j = \left\lceil 1 - \frac{\log|t - s|}{\log AB} \right\rceil$, donde $[x]$ denota la parte entera de x . Como $|t - s| \leq 1$ y $AB > 1$, entonces $1 \leq j$, así que un tal j debe existir.

De la segunda desigualdad de (4.8) se sigue que

$$A^j|t - s| \leq \frac{AB}{B^j},$$

mientras que elevando a γ la primera desigualdad y usando el hecho de que $(AB)^\gamma = B$, se obtiene

$$1 \leq B^j|t - s|^\gamma, \quad \text{es decir } \frac{1}{B^j} \leq |t - s|^\gamma.$$

En consecuencia,

$$|f(s) - f(t)| \leq 2c(A^j|t - s| + B^{-j}) \leq 2c\left(\frac{AB + 1}{B^j}\right) \leq 2c(AB + 1)|t - s|^\gamma.$$

□

Teorema 4.3.4. *Existe una curva $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ del intervalo unidad en el cuadrado unidad con las siguientes propiedades:*

- (i) $\mathcal{P} : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ es continua y exhaustiva
- (ii) \mathcal{P} satisface la condición de Lipschitz de exponente $1/2$, es decir,

$$|\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(s)| \leq M|t - s|^{1/2}.$$

(iii) La imagen por \mathcal{P} de cualquier subintervalo $[a, b]$ es un compacto de del cuadrado con medida de Lebesgue (en \mathbb{R}^2) igual a $b - a$.

La tercera conclusión se puede desarrollar más a fondo.

Corolario 4.3.5. *Existen subconjuntos $Z_1 \subset [0, 1]$ y $Z_2 \subset [0, 1] \times [0, 1]$, ambos de medida cero, tales que \mathcal{P} es biyectiva de*

$$[0, 1] \setminus Z_1 \quad \text{en} \quad [0, 1] \times [0, 1] \setminus Z_2$$

y conserva la medida. En otras palabras, E es medible si y sólo si $\mathcal{P}(E)$ es medible, y

$$m_1(E) = m_2(\mathcal{P}(E)).$$

Demostración Teorema. Consideremos la función $\mathcal{P}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}_k(t)$ definida recientemente. Como se satisfacen (4.6) y (4.7), estamos bajo las hipótesis del Lema 4.3.3 (notemos que el hecho de que en (4.7) $\sqrt{2}$ esté multiplicando a 2^{-k} no afecta al resultado). Luego concluimos que

$$|\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(s)| \leq M|t - s|^{1/2}.$$

Además, dado un cuadrado S^k de generación k , $S^k = \Phi(I^k)$ para algún intervalo I^k y tomando $t \in I^k$, por la Observación 4.3.2, $\mathcal{P}(t) \in S^k$. Así que para cada k , $\mathcal{P}(t)$ pasa por todos los cuadrados de generación k cuando t recorre el intervalo $[0, 1]$. Luego \mathcal{P} es densa en el cuadrado unidad, puesto que si $x \in [0, 1] \times [0, 1]$, para todo $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon) \cap \mathcal{P}([0, 1]) \neq \emptyset$. Por continuidad $\mathcal{P}([0, 1])$ es cerrado, así que $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ es exhaustiva.

Finalmente, para demostrar que \mathcal{P} conserva la medida, basta probar que para todo $0 \leq t \leq 1$, $\mathcal{P}(t) = \Phi^*(t)$, donde Φ^* es la correspondencia inducida de la correspondencia diádica Φ del Lema 4.3.1 extendida al intervalo $[0, 1]$.

Primero observemos que podemos extender naturalmente Φ^* a todo el intervalo unidad. Sea $D = \{\ell/4^k : 1 \leq k, 0 < \ell < 4^k\}$ es el conjunto de puntos representados por más de una cadena de intervalos. Entonces Φ^* está unívocamente determinada para cada $t \in D$. En efecto, supongamos que $t \in \bigcap_k I^k$ y $t \in \bigcap_k J^k$ son dos cadenas diferentes de intervalos cuárticos. Entonces I^k y J^k serán adyacentes a partir de un cierto k . Luego $\Phi(I^k)$ y $\Phi(J^k)$ también lo serán, así que

$$\bigcap_k \Phi(I^k) = \bigcap_k \Phi(J^k).$$

Sea $t \in [0, 1]$, $t \in \bigcap_k I^k$. Por la Observación 4.3.2,

$$\mathcal{P}(t) \in \bigcap_k \Phi(I^k)$$

y se demuestra $\mathcal{P}(t) = \Phi^*(t)$.

Sea I' un intervalo cuártico de la generación k . De la Observación 4.3.2 también se deduce $\mathcal{P}(I') \subset \Phi(I')$. La otra inclusión $\Phi(I') \subset \mathcal{P}(I')$ se demuestra igual que

se ha hecho para (4.2) pero ahora sin restricciones, puesto que \mathcal{P} está definida en todo el intervalo unidad. Así que

$$\mathcal{P}(I') = \Phi(I').$$

Recordemos ahora que cualquier intervalo (a, b) puede ser escrito como $\bigcup_j I_j$, donde I_j son intervalos cuárticos con los interiores disjuntos. Luego los $\mathcal{P}(I_j) = \Phi(I_j)$ son cuadrados diádicos con los interiores disjuntos. Como $\mathcal{P}((a, b)) = \bigcup_j \mathcal{P}(I_j)$, se tiene

$$m_2(\mathcal{P}((a, b))) = \sum_{j=1}^{\infty} m_2(\mathcal{P}(I_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} m_2(\Phi(I_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} m_1(I_j) = m_1((a, b)).$$

Esto prueba la conclusión (iii) del teorema. \square

Demostración Corolario. Basta considerar el Teorema 4.2.2, teniendo en cuenta que Z_1 y Z_2 tienen medida cero. \square

Como resultado concluimos que $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ es una aplicación de $[0, 1]$ en $[0, 1] \times [0, 1]$ que conserva la medida.

Claramente, como $\mathcal{P}([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$ tiene medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 positiva y finita, por el apartado c) de la Propiedad 2.1.7, $m_2(\mathcal{P}([0, 1]))$ es también positiva y finita, así que

$$\dim_H(\mathcal{P}([0, 1])) = 2.$$

En consecuencia, usando la Proposición 1.1.2 junto con (2.4) se deduce que

$$\dim_H(\mathcal{P}([0, 1])) = \dim_B(\mathcal{P}([0, 1])).$$

No cuesta imaginar que esta construcción se puede generalizar a curvas que llenen un cubo en \mathbb{R}^d .

Conclusiones

Este trabajo me ha aportado conocimientos no sólo relativos a las matemáticas sino también relacionados con la documentación y la edición de artículos científicos. Los conocimientos previos que he necesitado fueron estudiados en la asignatura *Anàlisi real i funcional*, optativa del Grado de Matemáticas. Otros conceptos los he aprendido a lo largo del desarrollo del proyecto. He hecho un esfuerzo por tratar de completar o mejorar las demostraciones tomadas de las referencias.

Durante el proceso de realización, por ejemplo mirando los comentarios publicados en [10], he podido constatar que las diferentes ramas de las matemáticas no son campos excluyentes sino que se solapan, se complementan e incluso se necesitan. A otro nivel, he comprendido que la dimensión de Hausdorff y la dimensión *box-counting* también se complementan, especialmente si se trabaja con conjuntos sobre los que éstas dimensiones coinciden, puesto que la primera es matemáticamente más sólida al estar definida a partir de medidas, mientras que la segunda es más fácil de estimar empíricamente.

Un aspecto interesante que se podría haber incluido en las referencias sería un ejemplo de un conjunto cuyas dimensiones de Hausdorff y Minkowski no coincidan.

En relación con los usos y aplicaciones de estas dimensiones, la mayoría los he encontrado en el ámbito de las matemáticas puras. Por ejemplo en la conjetura de *Keakeya*, que se enuncia como sigue:

Sea B un conjunto de Besicovitch en \mathbb{R}^n (es decir que B contiene un segmento unidad en cada dirección). Entonces la dimensión de Hausdorff y la dimensión de Minkowski de B son iguales a n .

Aunque también hay aplicaciones en la compresión de imágenes, comentadas en el Capítulo 3, o incluso en el campo de la ingeniería, ver [4].

Como futuras líneas de trabajo, se podrían estudiar los conjuntos de Besicovitch y el problema de *Keakeya*. También podría resultar interesante trabajar con el resultado de este artículo [8], que sostiene que si I_n denota un cubo de \mathbb{R}^n y $F : I_1 \rightarrow I_d$ es una curva que llena el espacio, entonces si $X \subset I_d$ es tal que existe $\dim_B(X)$, se satisface que $\dim_B(F^{-1}(X))$ también existe y $\dim_B(X) = d \dim_B(F^{-1}(X))$. Este resultado permite estimar la dimensión *box-counting* de objetos multidimensionales a partir de procesos unidimensionales.

Bibliografía

- [1] J. Ll. Cerdà Martín. *Análisis real*. Edicions Universitat de Barcelona, Barcelona, 2000.
- [2] K. J. Falconer. *The Geometry of fractal sets*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [3] K. J. Falconer. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. Wiley, Chichester, 1990.
- [4] R. L. Mora. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch en el diseño de la banda de rodadura de neumáticos. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 18(1), 2002.
- [5] G. Richards. First and second order Hilbert Curves overlaid. [Figura]. Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hilbert_curve_2.svg, 2008.
- [6] G. Richards. First order Hilbert curve. [Figura]. Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hilbert_curve_1.svg, 2008.
- [7] G. Richards. First, second, and third order Hilbert Curves overlaid, with the lines getting thinner and darker as the order increases. [Figura]. Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hilbert_curve_3.svg, 2008.
- [8] E. Skubalska-Rafajłowicz. A new method of estimation of the box-counting dimension of multivariate objects using space-filling curves. In *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, volume 63, pages e1281–e1287, 2005.
- [9] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Real analysis : measure theory, integration, and hilbert spaces*. Princeton University Press, London, 2005.
- [10] T. Tao. What's new, 245C, Notes 5: Hausdorff dimension (optional). <https://terrytao.wordpress.com/2009/05/19/245c-notes-5-hausdorff-dimension-optional/>, 2009.