



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

# DOBLE GRADO DE MATEMÁTICAS Y ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Trabajo de fin de grado

---

## COMPARACIÓN DE MEDIDAS DE RIESGO: VaR y ES APLICADOS A DISTINTOS ACTIVOS BURSÁTILES

---

Autora: Lina Ye

Director: Dr. Josep Vives

Realizado en: Departamento de Matemática Económica,  
Financiera y Actuarial

Barcelona, 9 de junio de 2026

## Abstract

This project analyses the financial risk of different assets applying two of the most widely used risk measures in finance. To this end, an empirical study is carried out in which VaR and ES of four assets from different sectors are estimated and compared.

Using historical price data of these assets, daily returns are calculated and their main statistical features are examined, including the Jarque-Bera test to study the normality of the return series.

Both risk measures are calculated for different confidence levels and periods, with the aim of comparing risk behaviour across assets, market periods and estimation methods. In addition, backtesting is applied to the VaR estimates in order to evaluate their accuracy.

Finally, the effect of a hedging strategy with European put options is analysed within the Black-Scholes framework.

This empirical analysis is implemented using the software R.

## Resumen

En este trabajo se analiza el riesgo financiero de distintos activos mediante las dos medidas de riesgo más utilizadas en el ámbito financiero. Para ello, se realiza un ejercicio práctico donde se estiman y comparan el VaR y el ES de cuatro activos de sectores diferentes.

A partir de los datos históricos de estos activos se obtienen los rendimientos diarios y se estudian sus principales características estadísticas, incluyendo el test Jarque-Bera para analizar la normalidad de dichos rendimientos.

Posteriormente, se calculan ambas medidas de riesgo para distintos niveles de confianza y subperiodos, con el objetivo de comparar el comportamiento del riesgo entre activos, etapas de mercado y métodos de estimación. Adicionalmente, se realiza un backtesting del VaR para evaluar la precisión de las estimaciones obtenidas.

Por último, se analiza el efecto de una estrategia de cobertura con opciones put europeas siguiendo el modelo Black-Scholes.

Todo este análisis se desarrolla mediante el software R.

## Agradecimientos

A mis padres, por enseñarme el valor del esfuerzo, la constancia y el trabajo. Por demostrarme la importancia de volver a intentarlo las veces que sean necesarias.

A Laia, por estar siempre dispuesta a ayudarme, por todos los momentos compartidos dentro y fuera de clase, y por haber compartido conmigo una de las mejores experiencias de esta etapa, nuestro intercambio a Canadá.

A Raquel, por haber sido mi apoyo a lo largo de estos años, por los incontables cafés entre descansos de estudio, por estar siempre ahí y por haber hecho que Barcelona también se sintiera como en casa.

A mi tutor, por su ayuda y dedicación durante este trabajo. Su orientación y apoyo constante han sido fundamentales para el desarrollo de este proyecto.

Y por último, a todos los amigos, compañeros y profesores que me han acompañado durante estos años, quienes han contribuido a que esta etapa haya sido tan especial.

# Índice

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                                                  | <b>1</b>  |
| <b>2. Conceptos previos</b>                                             | <b>1</b>  |
| 2.1. Riesgo financiero . . . . .                                        | 1         |
| 2.2. Cuantiles . . . . .                                                | 1         |
| <b>3. Value at Risk (VaR)</b>                                           | <b>5</b>  |
| 3.1. Definición y propiedades . . . . .                                 | 5         |
| 3.2. Cálculo del VaR . . . . .                                          | 6         |
| 3.2.1. VaR histórico . . . . .                                          | 6         |
| 3.2.2. VaR paramétrico . . . . .                                        | 7         |
| 3.3. VaR en el modelo Black-Scholes . . . . .                           | 7         |
| 3.4. Backtesting del VaR . . . . .                                      | 13        |
| 3.5. Limitaciones del VaR . . . . .                                     | 14        |
| <b>4. Expected Shortfall (ES)</b>                                       | <b>16</b> |
| 4.1. Definición y propiedades . . . . .                                 | 16        |
| 4.2. Subaditividad del ES . . . . .                                     | 18        |
| 4.3. Cálculo del ES . . . . .                                           | 25        |
| 4.3.1. ES histórico . . . . .                                           | 25        |
| 4.3.2. ES paramétrico . . . . .                                         | 26        |
| 4.4. ES en el modelo Black-Scholes . . . . .                            | 26        |
| <b>5. Aplicación práctica a múltiples activos de distintos sectores</b> | <b>31</b> |
| 5.1. Objetivos . . . . .                                                | 31        |
| 5.2. Procedimiento . . . . .                                            | 31        |
| 5.3. Análisis de los precios . . . . .                                  | 32        |
| 5.4. Cálculo de los rendimientos . . . . .                              | 33        |
| 5.5. Análisis de los rendimientos . . . . .                             | 34        |
| 5.6. Estimación de las medidas de riesgo . . . . .                      | 36        |
| 5.6.1. Método paramétrico . . . . .                                     | 36        |
| 5.6.2. Método histórico . . . . .                                       | 37        |
| 5.7. Backtesting del VaR . . . . .                                      | 38        |
| 5.8. Análisis de los resultados . . . . .                               | 39        |
| 5.8.1. Comparación entre activos . . . . .                              | 39        |
| 5.8.2. Comparación entre periodos . . . . .                             | 39        |

|                                                     |           |
|-----------------------------------------------------|-----------|
| 5.8.3. Comparación entre medidas . . . . .          | 40        |
| 5.8.4. Comparación entre métodos . . . . .          | 40        |
| 5.9. Cobertura mediante opciones europeas . . . . . | 41        |
| <b>6. Conclusiones</b>                              | <b>44</b> |
| <b>Referencias</b>                                  | <b>45</b> |
| <b>A. Anexo: Código en R</b>                        | <b>46</b> |

# 1. Introducción

En los últimos años el interés por los mercados financieros ha crecido de forma considerable. El acceso a plataformas de inversión, la digitalización de servicios financieros y la mayor disponibilidad de información han permitido que cada vez más personas se interesen por la bolsa y otros activos financieros [2]. Sin embargo, esta mayor accesibilidad no siempre va acompañada del conocimiento necesario sobre los riesgos que conlleva dicha inversión.

Durante mis estudios universitarios, al poder combinar matemáticas y administración y dirección de empresas, me ha parecido especialmente interesante ver cómo herramientas matemáticas y estadísticas pueden usarse para analizar el comportamiento de los mercados y medir el riesgo asociado a una inversión. Esta motivación conduce al estudio de dos medidas de riesgo ampliamente conocidas y utilizadas, el *Value at Risk* (VaR) y el *Expected Shortfall* (ES).

El objetivo principal de este proyecto es definir y estudiar las principales propiedades de ambas medidas de riesgo. Una vez desarrollado el marco teórico necesario, estas medidas se aplican a datos reales de mercado para así analizar e interpretar los resultados obtenidos.

La memoria se estructura en dos grandes bloques, uno teórico y otro práctico. En los capítulos 2, 3 y 4 se desarrollan los conceptos necesarios para entender el VaR y el ES. En concreto, en el capítulo 2 se presentan algunos conceptos previos, como riesgo financiero y cuantiles. El capítulo 3 se centra en el *Value at Risk* (VaR), junto con sus propiedades principales, sus limitaciones y el backtesting. Finalmente, en el capítulo 4 se define el *Expected Shortfall* (ES), destacando su propiedad de subaditividad, que el VaR no cumple.

Por último, en el capítulo 5 se desarrolla la parte empírica del proyecto a partir de datos reales de mercado. Se calculan ambas medidas para cuatro activos de distintos sectores, concretamente NVIDIA Corporation, Coca-Cola Company, Banco Santander e Iberdrola. El periodo de análisis comprende desde el 1 de enero de 2018 hasta el 31 de diciembre de 2023 y se divide en los siguientes tres subperiodos, el periodo pre-COVID, la pandemia y el post-COVID. Esta división permite estudiar la variación del riesgo en distintos contextos económicos. Además, se aplica el modelo Black-Scholes mediante opciones put europeas sobre un activo para estudiar su efecto en el VaR y ES.

## Uso de la inteligencia artificial

Durante el desarrollo de este trabajo, se han utilizado puntualmente herramientas de inteligencia artificial con el fin de revisar y mejorar la redacción, así como para resolver dudas técnicas con el código R. En todo caso, su uso ha sido auxiliar, tomando como base las ideas, los desarrollos y las interpretaciones propias de la autora.

## 2. Conceptos previos

### 2.1. Riesgo financiero

Empresas e inversores realizan inversiones en mercados financieros con el objetivo de obtener rendimientos futuros. Sin embargo, el valor futuro de los activos es incierto, es decir, depende de factores que no podemos controlar. Por esta razón, las decisiones de inversión están asociadas a un cierto riesgo. En términos generales, el **riesgo financiero** se entiende como la incertidumbre asociada al resultado futuro de una inversión.

El resultado de una inversión puede representarse mediante una variable aleatoria, ya que depende de factores externos como cambios en el mercado o variaciones en los tipos de interés. Esta **rentabilidad** ( $R_t$ ) suele definirse como la variación relativa de su precio entre dos instantes de tiempo, siendo  $P_t$  el precio del activo en el instante  $t$  y  $P_{t+1}$  su precio en el instante siguiente,

$$R_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}.$$

Para analizar el riesgo y estimar posibles pérdidas o rendimientos asociados a una inversión existen distintas medidas de riesgo que estudiaremos en este proyecto.

Tras varias crisis financieras en la década de 1990, el Value at Risk (VaR) [6] se popularizó como medida de riesgo por su simplicidad y facilidad de interpretación.

### 2.2. Cuantiles

A partir de esta sección se tomará como referencia principal [3].

Para definir formalmente el Value at Risk (VaR), se necesita primero introducir el concepto de cuantil, ya que esta medida de riesgo se basa en los cuantiles de la distribución de pérdidas de una inversión.

En estadística, los **cuantiles** son valores que permiten dividir la distribución de una variable aleatoria en partes ordenadas de menor a mayor que contienen la misma proporción de probabilidad. Los más comunes son los cuartiles, que dividen la distribución en cuatro partes iguales y los percentiles, que la dividen en cien partes. En el ámbito financiero, los cuantiles son útiles para analizar los valores extremos de una distribución. En particular, permiten estudiar posibles pérdidas muy elevadas que aunque poco probables, pueden tener un impacto significativo en una inversión.

Formalmente, los cuantiles se definen a partir de la función distribución acumulada de una variable aleatoria. Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria, su función de distribución se define como

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta función describe la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tome valores menores o iguales que un cierto valor  $x$ .

**Definición 2.1.** Sea  $\alpha \in (0, 1)$ , el  $\alpha$ -**cuantil superior** de  $X$  se define como

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\},$$

y el  $\alpha$ -**cuantil inferior** de  $X$  se define como

$$q_\alpha(X) = \inf\{x : \alpha \leq F_X(x)\}.$$

Entonces cualquier  $q \in [q_\alpha(X), q^\alpha(X)]$  se denomina  $\alpha$ -**cuantil** de  $X$ .

A continuación, se presentan las propiedades básicas de los cuantiles:

**Proposición 2.2.** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias

1.  $X \geq Y$  implica  $q^\alpha(X) \geq q^\alpha(Y)$ .
2. Para cualquier  $b \in \mathbb{R}$ ,  $q^\alpha(X + b) = q^\alpha(X) + b$ .
3. Para  $b > 0$ ,  $q^\alpha(bX) = b q^\alpha(X)$ .
4.  $q^\alpha(-X) = -q_{1-\alpha}(X)$ .

*Demostración.*

1. Supongamos que  $X \geq Y \implies \{X \leq x\} \subseteq \{Y \leq x\}$ . Por lo tanto,

$$F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(Y \leq x) = F_Y(x).$$

Si  $\alpha < F_X(x)$  entonces  $\alpha < F_Y(x)$ . Se obtiene

$$\{x : \alpha < F_X(x)\} \subset \{x : \alpha < F_Y(x)\}.$$

Tomando ínfimos en ambos conjuntos,

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} \geq \inf\{x : \alpha < F_Y(x)\} = q^\alpha(Y).$$

2. Sea  $Y = X + b$ . Entonces

$$F_Y(x + b) = P(X + b \leq x + b) = F_X(x).$$

Por lo tanto,

$$q^\alpha(X + b) = \inf\{x + b : \alpha < F_Y(x + b)\} = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} + b = q^\alpha(X) + b.$$

3. Si  $b > 0$ , se tiene  $P(bX \leq x) = P(X \leq x/b) \implies F_{bX}(x) = F_X(x/b)$ . Entonces

$$q^\alpha(bX) = \inf\{x : \alpha < F_{bX}(x)\} = \inf\{x : \alpha < F_X(x/b)\}.$$

Haciendo el cambio  $x = by$ ,

$$q^\alpha(bX) = \inf\{by : \alpha < F_X(y)\} = b \inf\{y : \alpha < F_X(y)\} = b q^\alpha(X).$$

4. Para demostrar esta propiedad, primero veremos  $\forall b \in \mathbb{R}$  se cumple

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} = \inf\{x : b \leq P(X < x)\}.$$

Como  $P(X < x) \leq P(X \leq x)$ , si  $b \leq P(X < x) \implies b \leq P(X \leq x)$ . Por lo tanto,

$$\{x : b \leq P(X < x)\} \subset \{x : b \leq P(X \leq x)\},$$

lo que implica  $\inf\{x : b \leq P(X < x)\} \geq \inf\{x : b \leq P(X \leq x)\}$ .

Supongamos ahora que esta desigualdad es estricta. Entonces existe  $x^* \in \mathbb{R}$  tal que

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} < x^* < \inf\{x : b \leq P(X < x)\}.$$

De aquí se deduce que  $P(X < x^*) < b$  y como la función  $x \mapsto P(X < x)$  es continua por la izquierda, existe  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  tal que

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} < \hat{x} < x^*$$

y

$$P(X < \hat{x}) < b.$$

Sin embargo, como  $\hat{x} > \inf\{x : b \leq P(X \leq x)\}$ , se tiene  $b \leq P(X \leq \hat{x})$ , lo cual contradice la desigualdad anterior.

Por lo tanto, debe cumplirse la igualdad

$$\inf\{x : b \leq P(X \leq x)\} = x^* = \inf\{x : b \leq P(X < x)\}.$$

Ahora utilizamos  $F_{-X}(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X < -x)$ .

Entonces

$$\begin{aligned} q^\alpha(-X) &= \inf\{x : \alpha < F_{-X}(x)\} \\ &= -\sup\{-x : \alpha < F_{-X}(x)\} \\ &= -\sup\{-x : \alpha < 1 - P(X < -x)\} \\ &= -\sup\{y : \alpha < 1 - P(X < y)\} \\ &\quad (\text{tomando el cambio de variable } y = -x) \\ &= -\sup\{y : P(X < y) < 1 - \alpha\} \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha \leq P(X < y)\} \\ &\quad (\text{ya que } y \mapsto P(X < y) \text{ es no decreciente}) \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha \leq P(X \leq y)\} \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha \leq F_X(y)\} \\ &= -q_{1-\alpha}(X). \end{aligned}$$

□

Estas propiedades se cumplen también para el cuantil inferior  $q_\alpha$ . Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias

1. Si  $X \geq Y$ , entonces  $q_\alpha(X) \geq q_\alpha(Y)$ .
2. Para  $b \in \mathbb{R}$ ,  $q_\alpha(X + b) = q_\alpha(X) + b$ .
3. Para  $b > 0$ ,  $q_\alpha(bX) = b q_\alpha(X)$ .
4.  $q_\alpha(-X) = -q^{1-\alpha}(X)$ .

*Demostración.* Las tres primeras propiedades se demuestran de forma análoga a las del cuantil superior  $q^\alpha$ , sustituyendo  $\alpha < F_X(x)$  por  $\alpha \leq F_X(x)$ .

Ahora demostramos la cuarta propiedad. Por definición,

$$q_\alpha(-X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq F_{-X}(x)\}.$$

Como

$$F_{-X}(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X < -x),$$

se tiene

$$\alpha \leq F_{-X}(x) \iff P(X < -x) \leq 1 - \alpha.$$

Por tanto,

$$q_\alpha(-X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X < -x) \leq 1 - \alpha\}.$$

Haciendo el cambio  $y = -x$ , se obtiene

$$q_\alpha(-X) = \inf\{-y : y \in \mathbb{R}, P(X < y) \leq 1 - \alpha\} = -\sup\{y \in \mathbb{R} : P(X < y) \leq 1 - \alpha\}.$$

Por definición del cuantil superior,

$$q^{1-\alpha}(X) = \inf\{y \in \mathbb{R} : 1 - \alpha < F_X(y)\}.$$

Además se cumple

$$\sup\{y \in \mathbb{R} : P(X < y) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{y \in \mathbb{R} : 1 - \alpha < F_X(y)\}.$$

Finalmente

$$q_\alpha(-X) = -q^{1-\alpha}(X).$$

□

El siguiente lema muestra la relación fundamental entre cuantiles y la función inversa de la función distribución acumulada. Bajo ciertas condiciones de regularidad, el cuantil puede expresarse mediante dicha función inversa.

**Lema 2.3.** *Si  $F_X(x)$  es continua y estrictamente creciente, entonces*

$$q^\alpha(X) = q_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha). \quad (2.1)$$

*Demostración.* Las condiciones impuestas sobre  $F_X$  garantizan que sea invertible y que su inversa  $F_X^{-1}$  sea continua. Además, como  $F_X$  es estrictamente creciente, la desigualdad  $\alpha < F_X(x)$  es equivalente a  $F_X^{-1}(\alpha) < x$ . Todo esto nos da,

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} = \inf\{x : F_X^{-1}(\alpha) < x\} = F_X^{-1}(\alpha).$$

Análogamente para el cuantil inferior se cumple  $\alpha \leq F_X(x) \iff F_X^{-1} \leq x$  se tiene,

$$q_\alpha(X) = \inf\{x : \alpha \leq F_X(x)\} = \inf\{x : F_X^{-1}(\alpha) \leq x\} = F_X^{-1}(\alpha).$$

□

### 3. Value at Risk (VaR)

El Value at Risk (VaR) es una medida de riesgo que estima la pérdida máxima potencial en una inversión para un determinado nivel de confianza  $1 - \alpha$  y periodo de tiempo.

#### 3.1. Definición y propiedades

**Definición 3.1.** Para  $\alpha \in (0, 1)$ , el Value at Risk (VaR) de  $X$  a un nivel de confianza  $1 - \alpha$  se define como

$$VaR^\alpha(X) = -q^\alpha(X) = -\inf\{x : \alpha < F_X(x)\}.$$

Recordando el concepto de cuantil previamente introducido, el VaR puede interpretarse como el valor a partir del cual la probabilidad de observar pérdidas mayores es igual a  $\alpha$ .

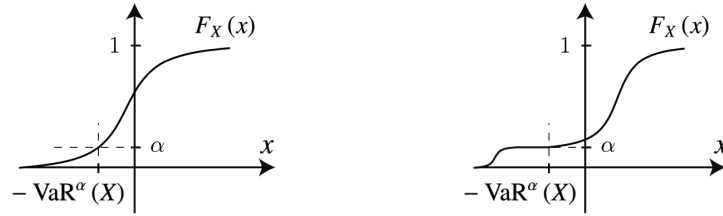


Figura 1: Interpretación gráfica del VaR

Si  $X$  representa la ganancia de una inversión,  $-X$  representa la pérdida. Por esto, el VaR puede expresarse en términos de distribución de pérdidas, lo que explica el signo negativo en su definición.

$$\begin{aligned} VaR^\alpha(X) &= -q^\alpha(X) \\ &= q_{1-\alpha}(-X) \quad (\text{por 4. de la proposición 2.2}) \\ &= \inf\{x : 1 - \alpha \leq P(-X \leq x)\} \\ &= \inf\{x : P(x < -X) \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

**Proposición 3.2.** Sean  $X, Y$  variables aleatorias,

1.  $X \geq Y \implies VaR^\alpha(X) \leq VaR^\alpha(Y)$ .
2.  $\forall a \in \mathbb{R}, VaR^\alpha(X + a) = VaR^\alpha(X) - a$ .
3.  $\forall a \geq 0, VaR^\alpha(aX) = aVaR^\alpha(X)$ .

*Demostración.* Se demuestran inmediatamente aplicando las propiedades de los cuantiles (proposición 2.2).

1. Como  $X \geq Y \implies VaR^\alpha(X) = -q^\alpha(X) \leq -q^\alpha(Y) = VaR^\alpha(Y)$ .
2.  $VaR^\alpha(X + a) = -q^\alpha(X + a) = -q^\alpha(X) - a = VaR^\alpha(X) - a$ .
3.  $VaR^\alpha(aX) = -q^\alpha(aX) = -aq^\alpha(X) = a(-q^\alpha(X)) = aVaR^\alpha(X)$ .

□

### 3.2. Cálculo del VaR

Una vez definido el concepto de VaR, estudiaremos cómo se calcula. En general, puede estimarse a partir del cuantil de la distribución de la variable aleatoria que representa las pérdidas o ganancias de la inversión. Sin embargo, en la práctica esta distribución no suele conocerse con precisión y debe estimarse a partir de datos observados.

En el contexto de la gestión del riesgo financiero, el VaR no solo se calcula para un único activo, sino para una **cartera de activos financieros**. Una cartera es un conjunto de activos financieros en los que un inversor mantiene posiciones simultáneamente. Por ello, el riesgo total depende de cómo evolucionen las variables de mercado que afectan al valor de dichos activos.

Existen diferentes métodos para calcular el VaR a partir de los datos disponibles. En este trabajo se estudiará el VaR mediante dos métodos muy utilizados, el método histórico y el método paramétrico [6].

#### 3.2.1. VaR histórico

El método histórico (*historical simulation*) estima el VaR utilizando datos históricos de mercado sin asumir una distribución concreta de rendimientos. Supone que las variaciones del pasado pueden considerarse como escenarios para estimar la distribución futura.

El primer paso es identificar las variables del mercado que afectan al valor de la cartera, usualmente tipos de cambio, tipos de interés, índices bursátiles, entre otras. (Es habitual considerar un día como horizonte temporal, un nivel de confianza del 99 % y 501 días de datos.)

A continuación, se recopilan datos históricos sobre los cambios diarios de estas variables durante los últimos 501 días, lo que permite crear 500 posibles escenarios sobre su evolución entre hoy y mañana. Cada escenario se genera a partir de cambios porcentuales entre dos días consecutivos del periodo. De esta forma, el primer escenario muestra las variaciones observadas entre el día 0 y día 1, el segundo entre los días 1 y 2, y así sucesivamente.

Finalmente, para cada escenario se calcula la variación del valor entre hoy y mañana obteniendo así una distribución empírica de pérdidas (considerando las ganancias como pérdidas negativas). De forma algebraica, si consideramos hoy día  $n$  y  $v_i$  el valor de una variable de mercado en el día  $i$ , los retornos históricos se calculan como

$$r_i = \frac{v_i}{v_{i-1}} - 1.$$

A partir de estos retornos, se construye una distribución empírica y el VaR es el percentil correspondiente al nivel de confianza elegido, es decir,

$$VaR^\alpha = -q^\alpha(r).$$

Por lo tanto, existe un 99 % de probabilidad de que la pérdida diaria no supere el valor estimado del VaR siempre que las variaciones en las variables de mercado durante dicho periodo sean representativas. En nuestro caso, como el nivel de confianza es del 99 %, el VaR es aproximadamente el quinto peor resultado entre los 500 escenarios.

### 3.2.2. VaR paramétrico

Con el método paramétrico (*parametric approach o variance-covariance method*) se usa una determinada distribución para los rendimientos de los activos, que habitualmente es la distribución normal. Esto permite calcular el VaR a partir de la media y la desviación típica de los rendimientos, conocida como volatilidad.

Para un **activo individual**, sea  $\mu$  la media diaria de sus rendimientos y  $\sigma$  la desviación típica de dichos rendimientos (volatilidad diaria), el VaR con distribución normal para un nivel de confianza  $1 - \alpha$  con un horizonte temporal de  $T$  días viene dado por [8],

$$VaR^\alpha = -(\mu T + \sigma\sqrt{T}z_\alpha), \quad (3.1)$$

siendo  $z_\alpha$  el cuantil correspondiente de la distribución normal estándar.

Para horizontes temporales cortos, es habitual que el rendimiento esperado sea nulo,  $\mu \approx 0$  entonces la fórmula se simplifica

$$VaR^\alpha = -\sigma\sqrt{T}z_\alpha. \quad (3.2)$$

En el caso de una cartera de activos, el riesgo total no depende solo de la volatilidad individual sino también de la relación entre sus rendimientos. Como consecuencia de la **diversificación**, la volatilidad de una cartera puede ser menor que la suma de las volatilidades individuales.

Para tener en cuenta estas dependencias, se usa la matriz de covarianzas de los rendimientos. Siendo  $w_i$  el peso del activo  $i$  en la cartera,  $\sigma_i$  su volatilidad y  $\rho_{ij}$  la correlación entre los rendimientos de los activos  $i$  y  $j$ .

$$\sigma_{cartera} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

Una vez calculada la volatilidad total de la cartera, el VaR se obtiene de forma análoga al del caso de activo individual (3.1).

Cuando se producen **variaciones en las variables de mercado** que afectan al valor de los activos, también afecta al valor de cartera. En muchos casos, este cambio puede aproximarse mediante un modelo lineal respecto dichas variables.

$$\Delta Cartera = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i,$$

donde  $x_i$  es la variable de mercado  $i$ ,  $\alpha_i$  es la sensibilidad de la cartera respecto a esa variable y  $\Delta x_i$  es la variación de dicha variable.

En cambio, en carteras que incluyen instrumentos no lineales, es decir, cuando el cambio en su valor no es proporcional al cambio en la variable de mercado, se introduce el modelo cuadrático.

### 3.3. VaR en el modelo Black-Scholes

El modelo Black-Scholes es uno de los conceptos más importantes en finanzas para la valoración de derivados financieros, en concreto opciones [7]. Una opción financiera es un

contrato que da al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo a un precio fijado previamente en una fecha determinada.

Este modelo considera un activo (*stock*) y un activo libre de riesgo, como bonos o letras del Tesoro. El objetivo es calcular la evolución del precio futuro de los activos y analizar el riesgo asociado a la inversión.

En particular, el modelo se utiliza para calcular el precio teórico de opciones financieras europeas. Estas solo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento a diferencia de las americanas, que se pueden en cualquier tiempo antes del vencimiento.

Sea  $S(0)$  el precio actual del activo y  $S(T)$  su precio en tiempo  $T > 0$ . En el modelo de Black-Scholes se supone que

$$S(T) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad (3.3)$$

donde  $\mu > 0$  es la rentabilidad esperada del activo,  $\sigma > 0$  su volatilidad y  $Z$  es una variable aleatoria con distribución normal estándar es decir,  $Z \sim N(0, 1)$ .

Por otro lado, el activo libre de riesgo evoluciona a un tipo de interés  $r$ . Si  $B(0)$  es el valor inicial invertido en dicho activo, entonces su valor en  $T$  es

$$B(T) = B(0)e^{rT}. \quad (3.4)$$

Una opción put europea con precio de ejercicio  $K$  y vencimiento  $T$ , da a su comprador el derecho a vender el activo por una cantidad  $K$  en la fecha de vencimiento. Este rendimiento (*payoff*) en el vencimiento viene dado por

$$H(T) = (K - S(T))^+ = \max\{K - S(T), 0\}. \quad (3.5)$$

Esto significa que la opción solo genera beneficios cuando el precio del activo al vencimiento es menor que el precio acordado  $K$ .

Respecto al precio inicial de la opción put, es decir  $t=0$ , viene dado por

$$H(0) = P(r, T, K, S(0), \sigma) = Ke^{-rT}N(-d_-) - S(0)N(-d_+), \quad (3.6)$$

donde

$$d_+ = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_- = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (3.7)$$

**Lema 3.3.** Para  $S(T)$  y  $H(T)$  dados por (3.3) y (3.5), se cumplen respectivamente

$$q^\alpha(S(T)) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(\alpha)}, \quad (3.8)$$

$$q^\alpha(-H(T)) = -(K - q^\alpha(S(T)))^+. \quad (3.9)$$

Para demostrar este lema es necesario introducir:

**Lema 3.4.** Sea  $X$  una variable aleatoria. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua por la derecha y no decreciente, entonces

$$q^\alpha(f(X)) = f(q^\alpha(X)).$$

*Demostración.*

$$F_{f(X)}(f(q^\alpha(X))) = \mathbb{P}(f(X) \leq f(q^\alpha(X))).$$

Como  $f$  es no decreciente,

$$X \leq q^\alpha(X) \implies f(X) \leq f(q^\alpha(X)).$$

Es decir,

$$\{X \leq q^\alpha(X)\} \subseteq \{f(X) \leq f(q^\alpha(X))\}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(f(X) \leq f(q^\alpha(X))) \geq \mathbb{P}(X \leq q^\alpha(X)) = F_X(q^\alpha(X)) \geq \alpha.$$

Por la definición de cuantil superior tenemos

$$f(q^\alpha(X)) \geq q^\alpha(f(X)).$$

Para demostrar el otro lado de la desigualdad, basta ver que  $y \geq q^\alpha(f(X))$  siempre que  $y > f(q^\alpha(X))$  entonces  $f(q^\alpha(X))$  es el mayor  $\alpha$ -cuantil de  $f(X)$ .

Sea  $y > f(q^\alpha(X))$ . Como  $f$  es no decreciente y continua por la derecha, el conjunto

$$f^{-1}((-\infty, y)) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < y\}$$

es un intervalo abierto de la forma  $(-\infty, a)$  para cierto  $a \in \mathbb{R}$ .

Además como  $f$  es no decreciente,

$$(-\infty, q^\alpha(X)] \subset \{x : f(x) \leq f(q^\alpha(X))\} \subset \{x : f(x) < y\} = (-\infty, a).$$

De esta inclusión se tiene que  $q^\alpha(X) < a$ . Por lo tanto, existe  $x^*$  tal que

$$q^\alpha(X) < x^* < a.$$

Como  $q^\alpha(X) < x^*$  y por la definición de cuantil superior se cumple  $\alpha < F_X(x^*)$ .

Si ahora definimos  $Y = f(X)$ , obtenemos

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) \geq \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(f(X) < y) = \mathbb{P}(X < a),$$

ya que

$$\{x : f(x) < y\} = (-\infty, a).$$

Como  $x^* < a$ , se tiene

$$\mathbb{P}(X < a) \geq \mathbb{P}(X \leq x^*) = F_X(x^*).$$

Por lo tanto,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) \geq \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X < a) \geq F_X(x^*) > \alpha.$$

La definición de cuantil superior implica que

$$y \geq q^\alpha(Y) = q^\alpha(f(X)).$$

Como se cumple para todo  $y > f(q^\alpha(X))$ ,

$$f(q^\alpha(X)) \leq q^\alpha(f(X)).$$

□

Una vez demostrado el Lema 3.4, se procede a demostrar el Lema 3.3.

*Demostración.* Como  $Z \sim N(0, 1)$ , su función de distribución es  $N$ . Como  $N$  es continua y estrictamente creciente, por el Lema 2.3,

$$q^\alpha(Z) = N^{-1}(\alpha).$$

Se define

$$f(z) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z}.$$

Como  $f$  es continua y creciente, por el Lema 3.4 se tiene que

$$q^\alpha(S(T)) = q^\alpha(f(Z)) = f(q^\alpha(Z)).$$

Sustituyendo el valor de  $q^\alpha(Z)$ ,

$$\begin{aligned} q^\alpha(S(T)) &= f(N^{-1}(\alpha)) \\ &= S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(\alpha)}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$-H(T) = -(K - S(T))^+.$$

Se define

$$g(x) = -(K - x)^+.$$

Entonces  $-H(T) = g(S(T))$ . Además,  $g$  es una función no decreciente y continua entonces, aplicando nuevamente el Lema 3.4 se obtiene,

$$q^\alpha(-H(T)) = q^\alpha(g(S(T))) = g(q^\alpha(S(T))).$$

Finalmente,

$$q^\alpha(-H(T)) = -(K - q^\alpha(S(T)))^+.$$

□

Si se considera una inversión de una única acción, el beneficio en valor actual es decir, actualizado a  $t = 0$ , viene dado por

$$X = e^{-rT}S(T) - S(0).$$

Se define  $f(x) = e^{-rT}x - S(0)$ . Entonces,

$$X = f(S(T)).$$

Antes de calcular el VaR de la inversión, necesitaremos el siguiente resultado.

**Lema 3.5.** *Sea  $X$  una variable aleatoria y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua por la derecha y no decreciente, entonces*

$$VaR^\alpha(f(X)) = -f(q^\alpha(X)).$$

*Demostración.* Por la propia definición,  $VaR^\alpha(f(X)) = -q^\alpha(f(X))$ .

Además,  $f$  es continua por la derecha y no decreciente. Entonces aplicando el Lema 3.4 se obtiene,

$$VaR^\alpha(f(X)) = -f(q^\alpha(X)).$$

□

Como  $f$  es creciente, por el Lema 3.5,

$$VaR^\alpha(X) = VaR^\alpha(f(S(T))) = -f(q^\alpha(S(T))).$$

Se sustituye  $f$  y obtenemos

$$VaR^\alpha(X) = S(0) - e^{-rT} q^\alpha(S(T)). \quad (3.10)$$

El caso anterior puede extenderse a una cartera formada por acciones y activos libres de riesgo. Supongamos que en  $t = 0$  se compran  $x$  acciones y se invierte una cantidad  $y$  en el activo libre de riesgo. Entonces, el valor de la cartera en el tiempo  $t$  es

$$V_{(x,y)}(t) = xS(t) + yB(t).$$

Por otro lado, el beneficio en valor actual es

$$X_{(x,y)} = e^{-rT} V_{(x,y)}(T) - V_{(x,y)}(0).$$

Como  $B(T) = B(0)e^{rT}$ , el beneficio puede escribirse como

$$X_{(x,y)} = xe^{-rT} S(T) + yB(0) - V_{(x,y)}(0).$$

Si  $x \geq 0$ , esta variable es una función no decreciente de  $S(T)$ . Por tanto, aplicando el lema anterior,

$$VaR^\alpha(X_{(x,y)}) = V_{(x,y)}(0) - xe^{-rT} q^\alpha(S(T)) - yB(0).$$

Si tomamos  $x \in (0, 1)$  e  $y = (1 - x)S(0)$ , entonces el valor inicial de la cartera coincide con el precio inicial de una acción,

$$V(x, y)(0) = xS(0) + y = S(0).$$

Sustituyendo en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} VaR^\alpha(X_{(x,y)}) &= S(0) - xe^{-rT} q^\alpha(S(T)) - y. \\ &= xS(0) - xe^{-rT} q^\alpha(S(T)) \quad (\text{ya que } y = (1 - x)S(0)) \\ &= x(S(0) - e^{-rT} q^\alpha(S(T))) \\ &= xVaR^\alpha(X) \quad (\text{por definición de } VaR^\alpha(X)) \\ &< VaR^\alpha(X) \quad (\text{como } x \in (0, 1)). \end{aligned}$$

Esto nos indica que sustituir una parte por activos sin riesgo reduce el VaR de la cartera.

Otra forma de reducir el VaR es mediante la compra de opciones put europeas. Supongamos que en  $t = 0$  se compran  $x$  acciones y  $z$  opciones put europeas con precio de ejercicio  $K$ . Entonces, el valor de la cartera en el tiempo  $t$ ,

$$V_{(x,z)}(t) = xS(t) + zH(t),$$

donde  $H(t)$  representa el valor de una opción put europea en  $t$ .

Por lo tanto, el beneficio en valor actual viene dado por

$$\begin{aligned} X_{(x,z)} &= e^{-rT}V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0) \\ &= e^{-rT}(xS(T) + z(K - S(T))^+) - V_{(x,z)}(0). \end{aligned}$$

**Lema 3.6.** Si  $0 < z \leq x$ , entonces

$$VaR^\alpha(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - e^{-rT}(xq^\alpha(S(T)) + z(K - q^\alpha(S(T)))^+). \quad (3.11)$$

*Demostración.* Como  $0 < z \leq x$ , entonces  $X_{(x,z)}$  puede escribirse como una función no decreciente de  $S(T)$ ,

$$X_{(x,z)} = f(S(T)),$$

donde

$$f(u) = e^{-rT}(xu + z(K - u)^+) - V_{(x,z)}(0).$$

Por el Lema 3.5,

$$\begin{aligned} VaR^\alpha(X_{(x,z)}) &= VaR^\alpha(f(S(T))) \\ &= -f(q^\alpha(S(T))) \\ &= e^{-rT}(-xq^\alpha(S(T)) - z(K - q^\alpha(S(T)))^+) + V_{(x,z)}(0). \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando (3.9) se obtiene (3.11). □

La fórmula del VaR obtenida en el Lema 3.6 muestra que el precio de ejercicio  $K$  influye directamente en el riesgo de la cartera.

El siguiente ejemplo permite estudiar el efecto de distintos precios de ejercicio sobre el VaR.

**Ejemplo 3.7.** Supongamos que un inversor en  $t=0$  tiene un capital inicial  $V_0$  y compra  $x$  acciones. Para tener cobertura mediante opciones put, debe cumplirse  $V_{(x,z)}(0) = V_0$ . Para ello, el número de opciones put que debe comprar será

$$z = z(K) = \frac{V_0 - xS(0)}{P(r, T, K, S(0), \sigma)}.$$

Sustituyendo en (3.11),

$$VaR^\alpha(X_{(x,z(K))}) = V_0 - e^{-rT}(xq^\alpha(S(T)) + z(K)(K - q^\alpha(S(T)))^+).$$

Un precio de ejercicio alto incrementa la protección ofrecida de cada opción, ya que aumenta el término  $(K - q^\alpha(S(T)))^+$ .

Sin embargo, las opciones con precios de ejercicio altos también son más caras, por lo que el número de contratos  $z(K)$  que se puede comprar es menor.

Por el contrario, un precio  $K$  bajo permite comprar más opciones  $z(K)$ , aunque cada una proporciona una menor cobertura, ya que dicho término será más pequeño.

En consecuencia, una elección adecuada del precio de ejercicio  $K$  debe estar entre estos dos extremos, coste de cobertura y nivel de protección.

### 3.4. Backtesting del VaR

Una forma de evaluar si un modelo es adecuado para medir el riesgo es mediante el backtesting [4]. Este consiste en calcular predicciones del VaR usando información *ex ante* y compararlas con lo que realmente ocurrió, es decir, con resultados *ex post*. De esta manera, se utilizan datos históricos para simular cómo habría funcionado el modelo en el pasado.

Si la pérdida observada supera el VaR estimado, se produce una violación del VaR. Por lo tanto, el backtesting ayuda a detectar debilidades del modelo y permite comparar varios modelos, aunque no explica cuál es la causa de los fallos.

Los dos componentes principales del backtesting son la ventana de estimación y la ventana de prueba. La ventana de estimación es el número de observaciones utilizadas para calcular VaR. Su tamaño depende principalmente del modelo y del nivel de confianza considerado. Cuando se comparan distintos enfoques, esta ventana debe ser suficientemente grande para cumplir los requisitos de datos más exigentes. Además, para un mismo método, puede resultar útil comparar distintos tamaños de ventana.

Por otro lado, la ventana de prueba se refiere al conjunto de observaciones sobre las que se evalúan las predicciones realizadas, es decir, los días para los que se ha calculado una estimación del VaR. En general, cuanto mayor es el nivel de confianza, mayor debe ser el tamaño de esta ventana.

Sea  $n$  el número de observaciones de la ventana de prueba y  $1 - \alpha$  el nivel de confianza. La probabilidad esperada de que una pérdida supere el VaR estimado es de  $\alpha$ , mientras que el número esperado de violaciones será  $\alpha \cdot n$ .

Si la frecuencia de violaciones observada se aproxima a dicho valor, el modelo se puede considerar adecuado. En cambio, si las excepciones ocurren con una frecuencia superior a la esperada, el modelo subestima el riesgo. En el caso contrario, el modelo estaría sobreestimando el riesgo.

Uno de los principales instrumentos utilizados en el backtesting son los **ratios de violaciones** (VR), donde el número de violaciones observadas se compara con el número esperado al nivel de confianza considerado.

$$VR = \frac{\text{número de violaciones observadas}}{\text{número de violaciones esperadas}}.$$

Valores de  $VR$  cercanos a 1 indican que el modelo proporciona estimaciones razonables del riesgo.

### 3.5. Limitaciones del VaR

A continuación, estudiaremos los inconvenientes de la aplicación del VaR como gestión del riesgo financiero a través de ejemplos para su mejor comprensión.

**Ejemplo 3.8.** Supongamos que se estima el VaR utilizando datos históricos de un periodo con baja volatilidad. Entonces las variaciones observadas serán pequeñas y por ello el VaR será reducido. Sin embargo, si tras ese periodo le sigue uno de alta volatilidad, las pérdidas reales pueden ser mucho mayores que las estimadas inicialmente.

En este contexto, se muestra que el VaR depende del **periodo** de datos usado, pudiendo subestimar o sobreestimar el riesgo potencial si las condiciones del mercado cambian.

Tras la crisis financiera de 2008 se introdujo el concepto de **stressed Value at Risk**, que consiste en calcular el VaR utilizando datos correspondientes a un periodo histórico de tensión en los mercados con el objetivo de reflejar mejor el riesgo en situaciones adversas.

**Ejemplo 3.9.** Consideremos una variable aleatoria  $X$  que representa pérdidas con la siguiente distribución:

Para un nivel de confianza del 95 %  $\implies \alpha = 0,05$ ,

$$X = \begin{cases} -15 & \text{con probabilidad } 0,03 \\ -5 & \text{con probabilidad } 0,02 \\ 0 & \text{con probabilidad } 0,95 \end{cases}$$

Como el primer valor donde  $F(x) \geq 0,05$  ocurre en  $x = -5$ .

$$VaR^{0,05}(X) = -q^{0,05}(X) = -(-5) = 5$$

Si modificamos la pérdida más extrema i.e  $-15$  y consideramos en su lugar  $-1500$ , el valor del  $VaR^{0,05}$  se mantiene igual.

Esto muestra que el VaR no tiene en cuenta la magnitud de las **pérdidas** de los **eventos poco probables**, porque solo considera el percentil correspondiente de la distribución.

**Ejemplo 3.10.** Consideremos dos inversiones independientes  $X_1$  y  $X_2$  tales que

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } p, \\ 1 & \text{con probabilidad } 1 - p, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Si  $p < \alpha$ , entonces

$$VaR_\alpha(X_1) = VaR_\alpha(X_2) = 0.$$

Consideremos ahora una cartera formada por ambos activos:

$$X = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2.$$

Entonces  $X$  toma los valores

$$X = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } p^2, \\ \frac{1}{2} & \text{con probabilidad } 2p(1-p), \\ 1 & \text{con probabilidad } (1-p)^2. \end{cases}$$

Si elegimos  $\alpha \in (p, p^2 + 2p(1-p))$ , se cumple que  $F_X(\frac{1}{2}) > \alpha$  entonces

$$VaR^\alpha(X) = \frac{1}{2} > 0 = \max\{VaR^\alpha(X_1), VaR^\alpha(X_2)\}.$$

Esto contradice el principio de diversificación, ya que el riesgo de la cartera,  $VaR_\alpha(X)$ , es mayor que el de cada activo individual.

Estas limitaciones han llevado al desarrollo de otras medidas de riesgo que permiten analizar mejor las pérdidas extremas.

## 4. Expected Shortfall (ES)

El Expected Shortfall (ES), también conocido como Average Value at Risk (*AVaR*), es una medida de riesgo que surge como extensión del VaR ya que este sí tiene en cuenta la magnitud de las pérdidas en los peores escenarios.

### 4.1. Definición y propiedades

**Definición 4.1.** Se define Average Value at Risk de  $X$  como

$$ES^\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR^\beta(X) d\beta = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\beta(X) d\beta.$$

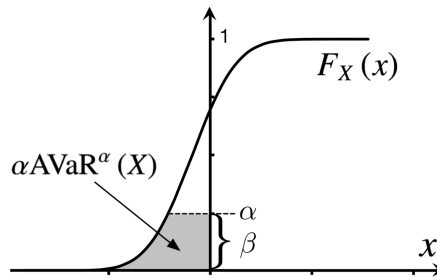


Figura 2: Representación del ES.

Como se observa en la Figura 2, el Expected Shortfall tiene en cuenta todas las pérdidas que se producen en la cola de la distribución es decir, aquellas que ocurren con probabilidad menor o igual que  $\alpha$ . A diferencia del VaR, que se limita a un umbral de pérdida con una determinada probabilidad, el ES también considera la magnitud de las pérdidas una vez superado dicho umbral. En particular, el área sombreada representa las pérdidas de los peores escenarios y cuyo valor medio es precisamente el ES.

Las siguientes figuras permiten visualizar de forma intuitiva la diferencia entre el VaR y el ES.

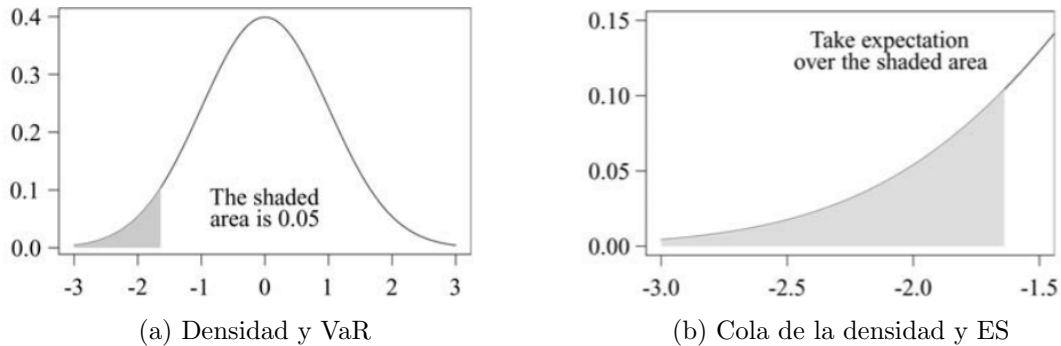


Figura 3: Representación del VaR y el ES.

En el gráfico (a) se observa el VaR como cuantil que deja un área de 0,05 en la cola

izquierda, mientras en (b) se muestra la cola ampliada y el ES se calcula como la media de las pérdidas que supera dicho umbral.

Por otro lado, el ES no depende de la elección del cuantil cuando existen discontinuidades en la distribución, lo que lo convierte en una medida más robusta desde el punto de vista teórico.

Como  $\beta \leq \alpha \implies q^\beta(X) \leq q^\alpha(X)$ , ES domina VaR:

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\beta(X) d\beta \geq -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\alpha(X) d\beta = -q^\alpha(X) = VaR^\alpha(X).$$

Además ES comparte varias propiedades con el VaR, que se desarrollarán a continuación.

**Proposición 4.2.** *Para  $X \leq Y$  y cualquier número real  $m$ , se tiene*

1.  $ES^\alpha(X) \geq ES^\alpha(Y)$ ,
2.  $ES^\alpha(X + m) = ES^\alpha(X) - m$ ,
3. Para  $\lambda \geq 0$ ,  $ES^\alpha(\lambda X) = \lambda ES^\alpha(X)$ .

*Demostración.* Las demostraciones vienen directamente de la propia definición de VaR y se usarán las propiedades de los cuantiles mencionadas en la Proposición 2.2

1. Si  $X \leq Y$ ,

$$ES^\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR^\beta(X) d\beta \geq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR^\beta(Y) d\beta = ES^\alpha(Y).$$

2.  $\forall m \in \mathbb{R}$ ,

$$ES^\alpha(X + m) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR^\beta(X + m) d\beta = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (VaR^\beta(X) - m) d\beta = ES^\alpha(X) - m.$$

3. Para todo  $\lambda \geq 0$ ,

$$ES^\alpha(\lambda X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR^\beta(\lambda X) d\beta = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \lambda VaR^\beta(X) d\beta = \lambda \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR^\beta(X) d\beta = \lambda ES^\alpha(X).$$

□

**Proposición 4.3.** *Para cualquier  $\alpha \in (0, 1)$*

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} [\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}) + q^\alpha(X)(\alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha(X)))]. \quad (4.1)$$

Esta proposición se demostrará en la siguiente sección.

Cabe destacar que bajo hipótesis de continuidad, el ES puede expresarse como esperanza condicional.

**Corolario 4.4.** *Si  $X$  es una variable aleatoria con función de distribución  $F_X$  estrictamente creciente y continua,*

$$ES^\alpha(X) = -\mathbb{E}(X \mid X \leq q^\alpha(X)).$$

*Demostración.* Como  $F_X$  es continua,  $\forall q \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(X = q) = 0.$$

Por el Lema 2.3,

$$q^\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha).$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}(X < q^\alpha(X)) = \mathbb{P}(X \leq q^\alpha(X)) - \mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) = \mathbb{P}(X \leq q^\alpha(X)).$$

Como

$$\mathbb{P}(X \leq q^\alpha(X)) = F_X(q^\alpha(X)) = F_X(F_X^{-1}(\alpha)) = \alpha,$$

obtenemos

$$\mathbb{P}(X < q^\alpha(X)) = \alpha.$$

Sustituyendo ahora en la interpretación alternativa del  $ES$  (4.1),

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \left[ \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}) + q^\alpha(X)(\alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha(X))) \right],$$

Como

$$\alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha(X)) = 0.$$

Por lo tanto,

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}).$$

Además si  $\mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) = 0$ , podemos escribir equivalentemente

$$\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha(X)\}}) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q^\alpha(X)\}}).$$

Por la continuidad de  $F_X$ ,

$$\mathbb{P}(X \leq q^\alpha(X)) = \alpha.$$

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\mathbb{P}(X \leq q^\alpha(X))} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q^\alpha(X)\}}).$$

Finalmente, por la definición de esperanza condicional, obtenemos el resultado deseado

$$ES^\alpha(X) = -\mathbb{E}(X \mid X \leq q^\alpha(X)).$$

□

## 4.2. Subaditividad del ES

Otra de las limitaciones del VaR que se ha comentado previamente es la falta de subaditividad. Este problema se soluciona con el ES, como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 4.5.** *Para dos variables aleatorias  $X, Y$  se cumple*

$$ES^\alpha(X + Y) \leq ES^\alpha(X) + ES^\alpha(Y). \quad (4.2)$$

Para demostrar este teorema de subaditividad, es necesario introducir antes una formulación alternativa.

Empezamos con un lema técnico.

**Lema 4.6.** Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria. Supongamos que  $U$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en  $(0, 1)$ . Entonces la variable aleatoria  $Y$ , definida por  $Y(\omega) = q^{U(\omega)}(X)$ , tiene la misma distribución que  $X$ .

Gracias a este lema, podemos relacionar los cuantiles con la esperanza de una variable aleatoria.

*Demostración.* Definimos  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  para  $g(\alpha) = q^\alpha(X)$ .

Consideremos  $Y = g(U)$  con  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ . Para cualquier conjunto boreliano  $A \subset (0, 1)$  se cumple

$$\mathbb{P}(U \in A) = m(A),$$

donde  $m$  denota la medida de Lebesgue.

Fijado  $y \in \mathbb{R}$ . Existe como máximo un  $\alpha$  tal que

$$g(\alpha) = q^\alpha(X) = y.$$

De hecho, si la función de distribución de  $X$  tiene un tramo horizontal, ese valor  $\alpha$  puede no existir pero en cualquier caso la antiimagen  $g^{-1}(\{y\})$  está formada por solo un punto. Por ello

$$\mathbb{P}(g(U) = y) = \mathbb{P}(U \in g^{-1}(y)) = m(g^{-1}(y)) = 0. \quad (4.3)$$

Ahora vamos a ver que  $Y$  y  $X$  tienen la misma función de distribución. Por definición del cuantil superior,

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\}. \quad (4.4)$$

Como  $\alpha < F_X(x)$  entonces  $q^\alpha(X) \leq x$ . Lo que significa

$$\{\alpha : \alpha < F_X(y)\} \subset \{\alpha : q^\alpha(X) \leq y\} = \{\alpha : g(\alpha) \leq y\}.$$

Así,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(U) \leq y) \geq \mathbb{P}(U < F_X(y)) = F_X(y).$$

Por otro lado, usando la definición de cuantil superior (4.4) si  $q^\alpha(X) < x$  entonces  $\alpha < F_X(x)$ . Tomando  $x = y$ , se obtiene

$$\{\alpha : g(\alpha) < y\} = \{\alpha : q^\alpha(X) < y\} \subset \{\alpha : \alpha < F_X(y)\}. \quad (4.5)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(g(U) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(g(U) < y) + \mathbb{P}(g(U) = y) \\ &= \mathbb{P}(g(U) < y) \quad (\text{aplicando (4.3)}) \\ &\leq \mathbb{P}(U < F_X(y)) \quad (\text{aplicando (4.5)}) \\ &= F_X(y). \end{aligned}$$

□

Sea  $f_U$  una densidad uniforme en  $(0, 1)$  tal que

$$f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} q^s(X) f_U(s) ds = \int_0^1 q^s(X) ds.$$

Por el Lema 4.6 para cualquier variable aleatoria  $X$  tenemos

$$\int_0^1 q^s(X) ds = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) \quad (4.6)$$

ya que  $X$  e  $Y$  tienen la misma distribución.

**Notación 4.7.** Esta igualdad (4.6) también se cumple si hacemos el cambio  $q^s(X)$  por  $q_s(X)$ .

A partir de (4.6) se obtiene una expresión alternativa del ES y ya podemos demostrar la **Proposición 4.3**.

*Demostración de la Proposición 4.3.* Denotemos  $x^- = -\min\{x, 0\}$ , como la parte negativa de  $x$ . Como la función  $f(x) = -x^-$  es no decreciente, por el lema 3.4 para cualquier variable  $Y$  y  $\beta \in (0, 1)$ ,

$$q^\beta(-Y^-) = q^\beta(f(Y)) = f(q^\beta(Y)) = -(q^\beta(Y))^- . \quad (4.7)$$

Para facilitar la notación escribimos  $q^\alpha(X) = q^\alpha$ . Entonces

$$\begin{aligned} ES^\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\beta(X) d\beta \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (q^\beta(X) - q^\alpha) d\beta - q^\alpha \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 -(q^\beta(X) - q^\alpha)^- d\beta - q^\alpha \quad (\text{para } \beta \leq \alpha, q^\beta(X) \leq q^\alpha(X) \implies q^\beta(X) - q^\alpha \leq 0) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 -(q^\beta(X - q^\alpha))^- d\beta - q^\alpha \quad (\text{aplicando propiedades de cuantiles de traslación}) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 q^\beta(-(X - q^\alpha)^-) d\beta - q^\alpha \quad (\text{usando (4.7)}) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(-(X - q^\alpha)^-) - q^\alpha. \quad (\text{usando (4.6)}) \end{aligned}$$

Como

$$-(X - q^\alpha)^- = \begin{cases} X - q^\alpha, & \text{si } X < q^\alpha, \\ 0, & \text{si } X \geq q^\alpha, \end{cases}$$

entonces

$$\mathbb{E}(-(X - q^\alpha)^-) = \int_{\{X < q^\alpha\}} (X - q^\alpha) d\mathbb{P}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} ES^\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha} \int_{\{X < q^\alpha\}} (X - q^\alpha) d\mathbb{P} - q^\alpha \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left[ \int_{\{X < q^\alpha\}} X d\mathbb{P} - \int_{\{X < q^\alpha\}} q^\alpha d\mathbb{P} + \alpha q^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Como  $q^\alpha$  es constante

$$\int_{\{X < q^\alpha\}} q^\alpha d\mathbb{P} = q^\alpha \mathbb{P}(X < q^\alpha).$$

Finalmente

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} [\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}}) + q^\alpha (\alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha))] .$$

□

Para distribuciones generales, puede ocurrir que  $F_X$  tenga un salto en el cuantil de orden  $\alpha$ , es decir que exista probabilidad positiva exactamente en el valor  $q^\alpha(X)$ .

Para tratar esta situación introducimos el siguiente lema.

**Lema 4.8.** Sea  $\alpha \in (0, 1)$  y tomando  $q^\alpha = q^\alpha(X)$ . Definimos

$$\mathbf{1}_X^\alpha = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}}, & \text{si } \mathbb{P}(X = q^\alpha) = 0, \\ \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}} + \kappa \mathbf{1}_{\{X = q^\alpha\}}, & \text{si } \mathbb{P}(X = q^\alpha) > 0, \end{cases}$$

donde

$$\kappa = \frac{\alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha)}{\mathbb{P}(X = q^\alpha)}. \quad (4.8)$$

Entonces se cumplen:

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_X^\alpha) = \alpha \quad (4.9)$$

y para todo  $\omega \in \Omega$

$$\mathbf{1}_X^\alpha(\omega) \in [0, 1]. \quad (4.10)$$

*Demostración.* Para la ecuación (4.9), si  $\mathbb{P}(X = q^\alpha) = 0$ , entonces

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_X^\alpha) = \mathbb{P}(X < q^\alpha) = \mathbb{P}(X \leq q^\alpha) = \alpha.$$

En cambio si  $\mathbb{P}(X = q^\alpha) > 0$ ,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_X^\alpha) = \mathbb{P}(X < q^\alpha) + \kappa \mathbb{P}(X = q^\alpha).$$

Sustituyendo  $\kappa$ ,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_X^\alpha) = \mathbb{P}(X < q^\alpha) + \alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha) = \alpha.$$

Para demostrar la segunda afirmación empezamos viendo que  $\mathbb{P}(X = q^\alpha) = 0$  entonces

$$\mathbf{1}_X^\alpha = \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}} \in \{0, 1\}.$$

Supongamos ahora que  $\mathbb{P}(X = q^\alpha) > 0$ . Si  $\omega \notin \{X = q^\alpha\}$ , entonces de nuevo

$$\mathbf{1}_X^\alpha(\omega) = \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}}(\omega) \in \{0, 1\}.$$

El único caso no trivial es  $\mathbb{P}(X = q^\alpha) > 0$  y  $\omega \in \{X = q^\alpha\}$ . En este caso,

$$\mathbb{P}(X = q^\alpha) = F_X(q^\alpha) - F_X(q_-^\alpha) \quad , \quad \mathbf{1}_X^\alpha(\omega) = \kappa = \frac{\alpha - F_X(q_-^\alpha)}{F_X(q^\alpha) - F_X(q_-^\alpha)}$$

y

$$F_X(q_-^\alpha) = \lim_{y \uparrow q^\alpha} F_X(y).$$

Por definición de  $q^\alpha$ ,

$$q^\alpha = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\},$$

y para todo  $q < q^\alpha$  se tiene  $\alpha \geq F_X(q)$ . Por lo tanto,

$$\alpha \geq F_X(q_-^\alpha).$$

Por otro lado, si  $q > q^\alpha$ ,  $\alpha < F_X(q)$  y por continuidad por la derecha de  $F_X$  tenemos que

$$\alpha \leq F_X(q^\alpha).$$

Finalmente queda demostrado que si  $\alpha \in [F_X(q_-^\alpha), F_X(q^\alpha)]$ , entonces

$$\kappa = \mathbf{1}_X^\alpha(\omega) = \frac{\alpha - F_X(q_-^\alpha)}{F_X(q^\alpha) - F_X(q_-^\alpha)} \in [0, 1].$$

□

Con la siguiente proposición podemos expresar ES como una esperanza gracias a la definición de  $\mathbf{1}_X^\alpha$ .

**Proposición 4.9.** *Para todo  $\alpha \in (0, 1)$ ,*

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_X^\alpha). \quad (4.11)$$

*Demostración.* Escribimos para simplificar  $q^\alpha = q^\alpha(X)$ . Si  $\mathbb{P}(X = q^\alpha) = 0$ , entonces  $\mathbb{P}(X < q^\alpha) = \mathbb{P}(X \leq q^\alpha) = \alpha$ , por lo que el segundo término de la derecha en (4.1) desaparece y nos queda

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}}) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_X^\alpha).$$

Ahora si  $\mathbb{P}(X = q^\alpha) > 0$ . Usando

$$\int_{\{X=q^\alpha\}} X dP = \int_{\{X=q^\alpha\}} q^\alpha dP = q^\alpha \mathbb{P}(X = q^\alpha), \quad (4.12)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_X^\alpha) &= \mathbb{E}\left(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}} + X \frac{\alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha)}{\mathbb{P}(X = q^\alpha)} \mathbf{1}_{\{X = q^\alpha\}}\right) \\ &= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}}) + \int_{\{X=q^\alpha\}} X \frac{\alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha)}{\mathbb{P}(X = q^\alpha)} dP \\ &= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}}) + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha)}{\mathbb{P}(X = q^\alpha)} \int_{\{X=q^\alpha\}} X dP \\ &= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q^\alpha\}}) + q^\alpha (\alpha - \mathbb{P}(X < q^\alpha)) \quad (\text{por (4.12)}) \\ &= -\alpha ES^\alpha(X). \quad (\text{por 4.3}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_X^\alpha).$$

□

Ahora vemos que la variable aleatoria  $Z(\omega) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{1}_X^\alpha(\omega)$  es integrable, acotada superiormente por  $\frac{1}{\alpha}$  y por el Lema 4.8, tiene esperanza igual a 1. Por tanto, podemos definir una nueva medida de probabilidad,

$$Q_X^\alpha(A) = \int_A Z dP.$$

Es decir,  $Z$  actúa como derivada de Radon–Nikodym, y escribiremos  $Z = \frac{dQ_X^\alpha}{dP}$ .

Con esta nueva medida de probabilidad  $Q_X^\alpha$ , la expresión  $ES^\alpha$  se simplifica,

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_X^\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \int_\Omega X \mathbf{1}_X^\alpha dP = -\int_\Omega X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} dP = -\mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X).$$

Antes de demostrar la subaditividad, es necesario conocer el siguiente teorema.

Recordemos que  $Q \ll P$ , es una medida de probabilidad  $Q$  que es absolutamente continua respecto de  $P$ , si  $P(A) = 0$  implica  $Q(A) = 0$ . Por el teorema de Radon–Nikodym para toda medida  $Q$  absolutamente continua respecto de  $P$  existe una derivada tal que

$$Q(A) = \int_A \frac{dQ}{dP} dP.$$

**Teorema 4.10.** Para  $\alpha \in (0, 1)$ ,

$$\mathcal{P}_\alpha = \left\{ Q : Q \text{ es una medida de probabilidad, } Q \ll P, \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

Entonces

$$\sup\{-\mathbb{E}_Q(X) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} = ES^\alpha(X).$$

*Demostración.* Volvemos a escribir  $q^\alpha = q^\alpha(X)$ . Como

$$\frac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{1}_X^\alpha(\omega),$$

por la definición de  $\mathbf{1}_X^\alpha$  tenemos

$$\frac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) = \frac{1}{\alpha} \quad \text{si } \omega \in \{X < q^\alpha\}, \quad (4.13)$$

$$\frac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) = \frac{1}{\alpha} \kappa \quad \text{si } \omega \in \{X = q^\alpha\}, \quad (4.14)$$

$$\frac{dQ_X^\alpha}{dP}(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \in \{X > q^\alpha\}. \quad (4.15)$$

Sea  $Q$  una medida arbitraria de  $\mathcal{P}_\alpha$ , entonces

$$\mathbb{E}_Q(X) = \int_\Omega X \frac{dQ}{dP} dP$$

separando según los conjuntos  $\{X < q^\alpha\}$ ,  $\{X = q^\alpha\}$  y  $\{X > q^\alpha\}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(X) &= \int_{\{X < q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} dP + \int_{\{X = q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} dP + \int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} dP \\ &= \int_{\{X < q^\alpha\}} X \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP + \int_{\{X < q^\alpha\}} X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} dP \\ &\quad + \int_{\{X = q^\alpha\}} X \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \kappa \right) dP + \int_{\{X = q^\alpha\}} X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} dP \\ &\quad + \int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} dP + \int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} dP.\end{aligned}$$

Reagrupando términos se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(X) &= \int_{\{X < q^\alpha\}} X \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP + \int_{\{X = q^\alpha\}} X \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \kappa \right) dP \\ &\quad + \int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} dP + \int_{\Omega} X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} dP.\end{aligned}$$

Ahora estudiamos cada una de las cuatro integrales de esta suma.

Por definición  $\frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\alpha}$  por lo que si  $\{X < q^\alpha\}$  se tiene

$$(X - q^\alpha) \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) \geq 0.$$

Por ello

$$\int_{\{X < q^\alpha\}} X \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP \geq \int_{\{X < q^\alpha\}} q^\alpha \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP. \quad (4.16)$$

En el conjunto  $\{X = q^\alpha\}$ ,

$$\int_{\{X = q^\alpha\}} X \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \kappa \right) dP = \int_{\{X = q^\alpha\}} q^\alpha \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \kappa \right) dP. \quad (4.17)$$

Como  $\frac{dQ}{dP} \geq 0$ , en  $\{X > q^\alpha\}$ :

$$\int_{\{X > q^\alpha\}} X \frac{dQ}{dP} dP \geq \int_{\{X > q^\alpha\}} q^\alpha \frac{dQ}{dP} dP. \quad (4.18)$$

Por último,

$$\int_{\Omega} X \frac{dQ_X^\alpha}{dP} dP = \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X). \quad (4.19)$$

Sustituyendo (4.16)–(4.19) en  $\mathbb{E}_Q(X)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(X) &\geq \int_{\{X < q^\alpha\}} q^\alpha \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP + \int_{\{X = q^\alpha\}} q^\alpha \left( \frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \kappa \right) dP \\ &\quad + \int_{\{X > q^\alpha\}} q^\alpha \frac{dQ}{dP} dP + \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X) \\ &= - \int_{\{X < q^\alpha\}} q^\alpha \frac{1}{\alpha} dP - \int_{\{X = q^\alpha\}} q^\alpha \frac{1}{\alpha} \kappa dP + \int_{\Omega} q^\alpha \frac{dQ}{dP} dP + \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X) \\ &= -q^\alpha \frac{1}{\alpha} P(X < q^\alpha) - q^\alpha \frac{1}{\alpha} \kappa P(X = q^\alpha) + q^\alpha + \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X) \\ &= \mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X). \quad (\text{usando la definición de } \kappa)\end{aligned}$$

Hemos demostrado  $-\mathbb{E}_Q(X) \leq -\mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X)$ . Como  $Q_X^\alpha \in \mathcal{P}_\alpha$  entonces

$$\sup\{-\mathbb{E}_Q(X) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} = -\mathbb{E}_{Q_X^\alpha}(X) = ES^\alpha(X).$$

□

Ahora procedemos a la **demostración del Teorema 4.5** de subaditividad.

*Demostración.* Sea  $U$  un conjunto arbitrario y dadas 2 funciones  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  se cumple

$$\sup_{x \in U} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in U} f(x) + \sup_{x \in U} g(x). \quad (4.20)$$

Fijados  $X$  e  $Y$  y aplicamos (4.20). Tomamos  $U = \mathcal{P}_\alpha$ ,  $f(Q) = -\mathbb{E}_Q(X)$  y  $g(Q) = -\mathbb{E}_Q(Y)$ . Entonces

$$\begin{aligned} ES^\alpha(X + Y) &= \sup\{-\mathbb{E}_Q(X + Y) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} \\ &= \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) + \mathbb{E}_Q(-Y) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} \\ &\leq \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} + \sup\{\mathbb{E}_Q(-Y) : Q \in \mathcal{P}_\alpha\} \quad (\text{por (4.20)}) \\ &= ES^\alpha(X) + ES^\alpha(Y). \end{aligned}$$

□

### 4.3. Cálculo del ES

En la práctica, el cálculo del ES requiere estimar la distribución de los rendimientos o pérdidas de la inversión a partir de datos históricos. Estos datos suelen ser variaciones diarias de precios, tipos de interés, índices bursátiles u otras variables de mercado relevantes.

A diferencia del VaR, que solo identifica el percentil de la distribución de pérdidas, el ES también tiene en cuenta la media de las pérdidas más extremas en la cola de distribución [9].

En este trabajo nos centraremos en dos enfoques habituales, los métodos histórico y paramétrico [4].

#### 4.3.1. ES histórico

El cálculo del ES histórico se basa en la misma distribución de rendimientos utilizada en el VaR histórico, construida a partir de datos históricos de mercado. Una vez calculado el VaR correspondiente, el ES se obtiene como la media de los valores iguales o más desfavorables que dicho umbral.

Una de las principales ventajas del método histórico es que permite capturar dependencias entre los activos y comportamientos no lineales de mercado como asimetrías y colas pesadas.

Si denotamos por  $r_1, r_2, \dots, r_k$  los peores rendimientos observados de la muestra entonces,

$$ES_h^\alpha = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i, \quad (4.21)$$

donde  $k = n \cdot \alpha$  siendo  $n$  el tamaño de la muestra.

Para obtener estimaciones fiables, es necesario un tamaño muestral grande. Se recomienda un mínimo de 10 observaciones en la cola de la distribución, lo que requiere un tamaño muestral de al menos 1000 observaciones para estimar un ES al 1 %. Además todas las observaciones históricas tienen el mismo peso, lo que puede resultar limitante si hay cambios estructurales en la volatilidad.

#### 4.3.2. ES paramétrico

El cálculo del ES mediante el método paramétrico mantiene las mismas hipótesis que en el VaR paramétrico, suponiendo que los rendimientos siguen una distribución normal. Entonces el ES puede calcularse de forma analítica a partir de la media y la desviación típica de los rendimientos [1].

Sea  $R \sim N(\mu, \sigma^2)$  el rendimiento del activo. Para un nivel de confianza  $1 - \alpha$ , el ES paramétrico viene dado por

$$ES_p^\alpha = -\mu + \sigma \frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}, \quad (4.22)$$

donde  $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ ,  $\phi$  es la función de densidad y  $\Phi$  la de distribución de la normal estándar.

Mientras que el VaR representa un umbral de pérdida que se supera con probabilidad  $\alpha$ , el ES representa la pérdida media una vez superado dicho umbral. Por ello, a diferencia del VaR, que depende solo de un cuantil de la distribución, el ES tiene en cuenta toda la cola de pérdidas más allá del cuantil.

Sin embargo, al depender del supuesto de normalidad, el ES paramétrico puede infravalorar el riesgo cuando los rendimientos presentan colas pesadas o desviaciones significativas respecto a la distribución normal.

#### 4.4. ES en el modelo Black-Scholes

Análogamente al caso del VaR, recordemos el precio futuro de la acción del modelo,

$$S(T) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad (4.23)$$

donde  $Z \sim N(0, 1)$ .

Antes de calcular el ES, introducimos el siguiente lema técnico.

**Lema 4.11.** *Para todo  $q \in \mathbb{R}$ ,*

$$\mathbb{E}(S(T) \mid Z \leq q) = \frac{1}{N(q)} S(0) e^{\mu T} N(q - \sigma\sqrt{T}),$$

donde  $N(q)$  es la función de distribución de una normal estándar,

$$N(q) = \int_{-\infty}^q \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

*Demostración.*  $\mathbb{P}(Z \leq q) = N(q) > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S(T) \mid Z \leq q) &= \frac{1}{\mathbb{P}(Z \leq q)} \int_{-\infty}^q S(0) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_{-\infty}^q \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2\sigma\sqrt{T}x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_{-\infty}^q \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2\sigma\sqrt{T}x + \sigma^2 T}{2}} e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} dx \quad (\text{completando cuadrados}) \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0) e^{\mu T} \int_{-\infty}^q \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0) e^{\mu T} \int_{-\infty}^{q - \sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{cambio de variable } u = x - \sigma\sqrt{T}) \\
&= \frac{1}{N(q)} S(0) e^{\mu T} N(q - \sigma\sqrt{T}).
\end{aligned}$$

□

Consideremos una inversión formada por una única acción.

**Lema 4.12.** *El beneficio en valor actual viene dado por*

$$X = e^{-rT} S(T) - S(0).$$

Por otro lado, el ES de la inversión  $X$  es

$$ES^\alpha(X) = S(0) - \frac{1}{\alpha} S(0) e^{(\mu - r)T} N(q^\alpha(Z) - \sigma\sqrt{T}).$$

*Demostración.* Por el Lema 3.3 sabemos que

$$q^\alpha(S(T)) = S(0) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}q^\alpha(Z)}. \quad (4.24)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\{X \leq q^\alpha(X)\} &= \{e^{-rT} S(T) - S(0) \leq q^\alpha(e^{-rT} S(T) - S(0))\} \\
&= \{e^{-rT} S(T) - S(0) \leq e^{-rT} q^\alpha(S(T)) - S(0)\} \quad (\text{por la Proposición 2.2}) \\
&= \{S(T) \leq q^\alpha(S(T))\}.
\end{aligned}$$

Comparando (4.23) con (4.24) y como la función exponencial es estrictamente creciente, se obtiene

$$\{S(T) \leq q^\alpha(S(T))\} = \{Z \leq q^\alpha(Z)\}.$$

Como  $X$  tiene distribución continua, se tiene

$$\begin{aligned}
ES^\alpha(X) &= -\mathbb{E}(X \mid X \leq q^\alpha(X)) \\
&= -\mathbb{E}(e^{-rT} S(T) - S(0) \mid Z \leq q^\alpha(Z)) \\
&= S(0) - e^{-rT} \mathbb{E}(S(T) \mid Z \leq q^\alpha(Z)) \\
&= S(0) - \frac{1}{\alpha} S(0) e^{(\mu - r)T} N(q^\alpha(Z) - \sigma\sqrt{T}). \quad (\text{por el Lema 4.11})
\end{aligned}$$

□

A continuación, se estudia la manera de reducir el riesgo mediante opciones put europeas.

Si en  $t = 0$  compramos  $x$  acciones y  $z$  opciones put europeas con precio de ejercicio  $K$  y fecha de vencimiento  $T$ . El valor de la inversión en  $t$  es

$$V_{(x,z)}(t) = xS(t) + zH(t),$$

donde  $H(T)$  es el payoff de la opción put,

$$H(T) = (K - S(T))^+ = \max\{K - S(T), 0\}$$

y  $H(0)$  su precio inicial,

$$H(0) = P(r, T, K, S(0), \sigma) = Ke^{-rT}N(-d_-) - S(0)N(-d_+), \quad (4.25)$$

con

$$d_+ = d_+(r, T, K, S(0), \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_- = d_-(r, T, K, S(0), \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

El beneficio actualizado de la inversión es

$$X_{(x,z)} = e^{-rT}V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0).$$

Para simplificar notación definimos,

$$d_-^\mu = d_-(\mu, T, K, S(0), \sigma), \quad d_+^\mu = d_-^\mu + \sigma\sqrt{T},$$

$$d_-^{\mu,\alpha} = \max\{d_-^\mu, -q^\alpha(Z)\}, \quad d_+^{\mu,\alpha} = d_-^{\mu,\alpha} + \sigma\sqrt{T},$$

y

$$P^\alpha(K) = Ke^{-\mu T}N(-d_-^{\mu,\alpha}) - S(0)N(-d_+^{\mu,\alpha}). \quad (4.26)$$

**Proposición 4.13.** Si  $z \in [0, x]$ ,

$$ES^\alpha(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - \frac{1}{\alpha}e^{(\mu-r)T}[xS(0)N(q^\alpha(Z) - \sigma\sqrt{T}) + zP^\alpha(K)]. \quad (4.27)$$

*Demostración.* Primero se observa que

$$X_{(x,z)} = e^{-rT}V_{(x,z)}(T) - V_{(x,z)}(0)$$

$$= e^{-rT}(xS(T) + z(K - S(T))^+) - V_{(x,z)}(0). \quad (4.28)$$

Como  $z \leq x$ , la función

$$s \mapsto e^{-rT}(xs + z(K - s)^+) - V_{(x,z)}(0) \quad (4.29)$$

es no decreciente. Además,  $S(T)$  es una función creciente de  $Z$ . Entonces por el Lema 3.4,

$$\{X_{(x,z)} \leq q^\alpha(X_{(x,z)})\} = \{S(T) \leq q^\alpha(S(T))\} = \{Z \leq q^\alpha(Z)\}. \quad (4.30)$$

En el caso  $z < x$ . La función (4.29) es estrictamente creciente y además como  $S(T)$  tiene distribución continua,

$$P(X_{(x,z)} < q^\alpha(X_{(x,z)})) = P(S(T) \leq q^\alpha(S(T))) = \alpha.$$

Por lo tanto, se aplica la representación del ES como esperanza condicional (Proposición 4.7),

$$\begin{aligned} ES^\alpha(X_{(x,z)}) &= -\mathbb{E}(X_{(x,z)} \mid X_{(x,z)} \leq q^\alpha(X_{(x,z)})) \\ &= -\mathbb{E}(X_{(x,z)} \mid Z \leq q^\alpha(Z)) \quad (\text{por 4.30}) \\ &= V_{(x,z)}(0) - e^{-rT} x \mathbb{E}(S(T) \mid Z \leq q^\alpha(Z)) \\ &\quad - e^{-rT} z \mathbb{E}((K - S(T))^+ \mid Z \leq q^\alpha(Z)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Calculamos el último término de (4.31). Por (4.23) se cumple,

$$\{S(T) \leq K\} = \{Z \leq -d_-^\mu\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}((K - S(T))^+ \mid Z \leq q^\alpha(Z)) \\ &= \mathbb{E}((K - S(T)) \mathbf{1}_{\{Z \leq -d_-^\mu\}} \mid Z \leq q^\alpha(Z)) \\ &\quad ((K - S(T))^+ = K - S(T) \text{ si } S(T) \leq K) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\min\{q^\alpha(Z), -d_-^\mu\}} \left( K - S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\quad (\text{por la definición de esperanza condicional}) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-d_-^{\mu,\alpha}} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\min(a, b) = -\max(-a, -b)) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-d_-^{\mu,\alpha}} S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\alpha} K N(-d_-^{\mu,\alpha}) - \frac{1}{\alpha} \mathbb{P}(Z \leq -d_-^{\mu,\alpha}) \mathbb{E}(S(T) \mid Z \leq -d_-^{\mu,\alpha}) \\ &= \frac{1}{\alpha} K N(-d_-^{\mu,\alpha}) - \frac{1}{\alpha} S(0)e^{\mu T} N(-d_-^{\mu,\alpha} - \sigma\sqrt{T}) \quad (\text{por el Lema 4.11}) \\ &= \frac{1}{\alpha} K N(-d_-^{\mu,\alpha}) - \frac{1}{\alpha} S(0)e^{\mu T} N(-d_+^{\mu,\alpha}) \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{\mu T} (K e^{-\mu T} N(-d_-^{\mu,\alpha}) - S(0) N(-d_+^{\mu,\alpha})). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.31) y aplicando el Lema 4.11, se obtiene el resultado deseado:

$$ES^\alpha(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - \frac{1}{\alpha} e^{(\mu-r)T} \left[ x S(0) N(q^\alpha(Z) - \sigma\sqrt{T}) + z P^\alpha(K) \right].$$

Para el caso  $z = x$ , como  $\forall \beta \in (0, 1)$  se tiene

$$\lim_{z \rightarrow x} q^\beta(X_{(x,z)}) = q^\beta(X_{(x,x)}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow x} ES^\alpha(X_{(x,z)}) &= \lim_{z \rightarrow x} \left( -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\beta(X_{(x,z)}) d\beta \right) \\
&= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\beta(X_{(x,x)}) d\beta \\
&= ES^\alpha(X_{(x,x)}).
\end{aligned}$$

Como el resultado obtenido para  $ES^\alpha(X_{(x,z)})$  es continua de  $z$ , el resultado también se cumple para  $z = x$ .  $\square$

El resultado de esta proposición (4.27) muestra que la opción put reduce el valor del ES mediante el término  $zP^\alpha(K)$ . Este término aparece restando al valor inicial de la cartera.

Una vez visto que las opciones put permiten reducir el ES de una cartera, al igual que ocurría con el VaR, el nivel de protección depende del precio de ejercicio  $K$  a través de  $P^\alpha(K)$ . Por ello, la elección de este precio también juega un papel importante.

## 5. Aplicación práctica a múltiples activos de distintos sectores

### 5.1. Objetivos

Una vez definidas y analizadas las medidas de riesgo desde el punto de vista teórico, se procede a su aplicación a datos reales de mercado con el fin de analizar su comportamiento en distintos contextos económicos.

Para ello, se estudian activos de diferentes sectores económicos. En concreto, NVIDIA Corporation (NVDA) del sector tecnológico, Coca-Cola Company (KO) del sector de consumo, Banco Santander (SAN.MC) del sector bancario e Iberdrola (IBE.MC) del sector energético. Esta elección permite analizar perfiles de distinto riesgo, desde empresas con mayor volatilidad como la tecnológica, cuya relevancia se ha acentuado por el auge de la inteligencia artificial, hasta otras más estables como las de consumo. Además se comparan las medidas de VaR y ES con el objetivo de analizar posibles diferencias en la evaluación del riesgo y comprobar si el orden del riesgo de los activos depende de la medida utilizada.

Por otra parte se consideran tres periodos, el periodo previo al COVID-19, el periodo de pandemia, tomando como fecha la declaración de emergencia sanitaria global por parte de la Organización Mundial de la Salud [10] y el periodo posterior, asociado al inicio de subidas de tipos de interés por la Reserva Federal [5] y el impacto de la guerra en Ucrania. De esta forma se puede ver cómo varía el riesgo dependiendo del entorno económico.

Además, se estudia la cobertura mediante opciones put europeas con el modelo Black-Scholes, analizando cómo afecta a las medidas de riesgo.

Cabe destacar que esta aplicación se desarrolla a partir de un conjunto específico de datos, por lo que las conclusiones no son necesariamente generalizables.

### 5.2. Procedimiento

En esta aplicación práctica de medidas de riesgo, utilizando el software estadístico R, se seguirán los siguientes pasos:

1. **Recopilación de datos.** Se obtienen datos históricos de precios ajustados de los activos seleccionados. El periodo de análisis es desde el 1 de enero de 2018 hasta el 31 de diciembre de 2023 y se divide en tres subperiodos, el periodo previo al COVID-19 (01/01/2018–10/03/2020), el periodo de pandemia (11/03/2020–15/03/2022) y el periodo posterior (16/03/2022–31/12/2023).
2. **Cálculo de los rendimientos.** A partir de los precios ajustados, se calculan los rendimientos diarios de los activos, que constituyen la variable de interés para el análisis del riesgo.
3. **Análisis de los rendimientos.** Previamente al cálculo de las medidas de riesgo, se realiza un análisis descriptivo de los rendimientos, incluyendo la media, la desviación típica, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis. Además se aplica el contraste de normalidad de Jarque-Bera para estudiar la distribución de los rendimientos y evaluar si siguen una distribución normal.
4. **Estimación de las medidas de riesgo.** Se estiman el VaR y el ES para cada

activo y subperiodo, al nivel de confianza del 95 % y 99 % y un horizonte temporal de un día, aplicando tanto el enfoque histórico como el paramétrico.

5. **Backtesting.** Se realiza un backtesting del VaR comparando las violaciones observadas con las esperadas para cada activo, periodo y nivel de confianza.
6. **Análisis de los resultados.** Se comparan los resultados obtenidos entre los distintos activos, entre los diferentes periodos y entre las medidas de riesgo utilizadas, con el objetivo de analizar las diferencias en la evaluación del riesgo, estudiar el impacto del entorno macroeconómico y extraer conclusiones.
7. **Cobertura mediante opciones europeas.** A partir de los resultados obtenidos para VaR y ES, se estudia el efecto de incorporar opciones put europeas valoradas mediante el modelo Black-Scholes en uno de los activos.

### 5.3. Análisis de los precios

Para contextualizar este análisis, la siguiente gráfica muestra la evolución de los precios ajustados de los cuatro activos a lo largo del periodo estudiado.

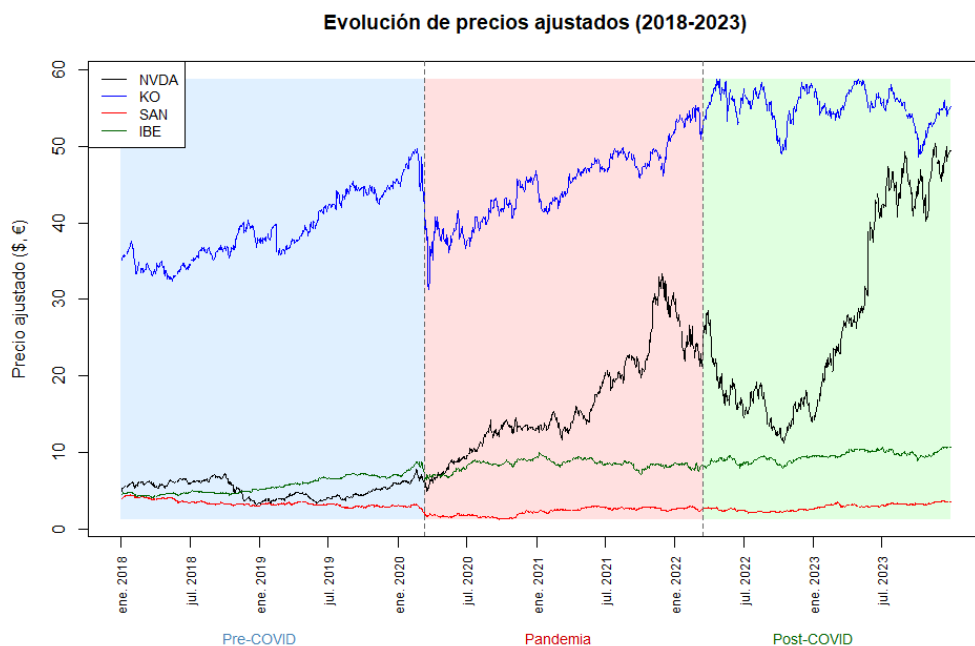


Figura 4: Evolución de los precios ajustados de los activos considerados (2018–2023).

Los activos presentan comportamientos diferenciados a lo largo de los tres subperiodos. Al inicio de la pandemia se ve una caída generalizada de precios y su posterior recuperación. En particular, destaca el crecimiento de NVIDIA durante el periodo de pandemia y en mayor medida en el periodo post-COVID, impulsado por el auge de la inteligencia artificial. Por otro lado, Coca-Cola e Iberdrola muestran una evolución más estable y moderada, mientras que Santander presenta una recuperación más lenta respecto al nivel de precios pre-COVID, en comparación con los otros activos.

## 5.4. Cálculo de los rendimientos

Tal y como se ha mencionado en la parte teórica, para calcular los rendimientos usaremos la fórmula de rentabilidad simple dada por

$$R_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t} - 1,$$

donde  $P_t$  representa el precio de cierre ajustado del activo en el instante  $t$ .

Como los activos cotizan en mercados distintos, existen días en los que alguno de ellos no tiene precio por festivos locales o diferencias en los calendarios. Para mantener la homogeneidad, una vez calculados los rendimientos se eliminan aquellos con valores no disponibles, obteniendo una muestra de 1438 observaciones para todos los activos.

A continuación se representa gráficamente los rendimientos diarios de cada activo para observar su evolución temporal.

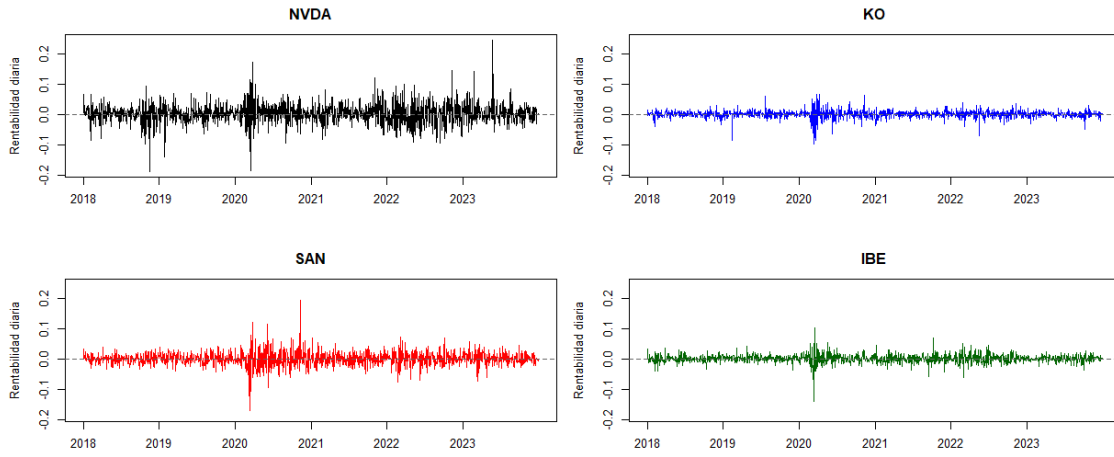


Figura 5: Rendimientos diarios de los activos estudiados

En la Figura 5, se observa que los rendimientos diarios de los cuatro activos se concentran alrededor de cero durante la mayoría del periodo, especialmente en el caso de Coca-Cola e Iberdrola.

Sin embargo, al inicio de pandemia en 2020, aparecen episodios de elevada volatilidad que tienden a agruparse en el tiempo, conocido como *clustering* de volatilidad. Se observa que NVIDIA presenta las mayores oscilaciones durante todo el periodo, superando en algunos momentos variaciones del 20%. Banco Santander también muestra episodios de elevada volatilidad, aunque de forma menos persistente. Por el contrario, Coca-Cola e Iberdrola muestran fluctuaciones más moderadas, generalmente menores al 10%, lo que refleja su comportamiento más estable.

Destaca NVIDIA tras la pandemia, ya que mantiene oscilaciones superiores a las del periodo previo al COVID, lo que confirma el dinamismo y la alta volatilidad típicos del sector tecnológico.

## 5.5. Análisis de los rendimientos

Con el propósito de estudiar el comportamiento de las rentabilidades de estos activos, se calculan la media, la desviación típica, la asimetría y la curtosis. Una vez calculadas sus principales medidas estadísticas, se aplica el contraste de normalidad de Jarque-Bera para evaluar si las rentabilidades siguen una distribución normal, hipótesis en la que se basa el enfoque paramétrico.

| Periodo    | Activo | Media     | Desv. típica | Asimetría | Curtosis |
|------------|--------|-----------|--------------|-----------|----------|
| Pre-COVID  | NVDA   | 0,001049  | 0,029460     | -0,8751   | 4,6584   |
|            | KO     | 0,000451  | 0,011226     | -0,8638   | 10,8962  |
|            | SAN    | -0,000711 | 0,016099     | -0,7021   | 5,4834   |
|            | IBE    | 0,000943  | 0,011858     | -0,5123   | 4,7789   |
| Pandemia   | NVDA   | 0,003185  | 0,033540     | -0,0112   | 3,6503   |
|            | KO     | 0,000647  | 0,016116     | -0,6795   | 7,1031   |
|            | SAN    | 0,000875  | 0,029136     | 0,3815    | 6,6604   |
|            | IBE    | 0,000484  | 0,016911     | -0,6217   | 13,0330  |
| Post-COVID | NVDA   | 0,002084  | 0,035446     | 0,9174    | 5,4166   |
|            | KO     | 0,000239  | 0,010430     | -0,8111   | 5,7420   |
|            | SAN    | 0,001177  | 0,019443     | -0,1636   | 1,4693   |
|            | IBE    | 0,000881  | 0,011733     | 0,2220    | 1,1165   |

Cuadro 1: Estadísticos descriptivos de los rendimientos diarios por activo y periodo

En cuanto a la **media** de los rendimientos se observa que todos mantienen valores cercanos a cero, lo habitual en este tipo de series. Destaca que antes de la pandemia Santander tiene una media negativa y pasa a ser positiva en los siguientes periodos.

Respecto a la **desviación típica**, que mide la volatilidad de los rendimientos, se ve un incremento generalizado aunque más pronunciado en el caso de Santander (de 0,016099 a 0,029136). Tras la pandemia la volatilidad se reduce en la mayoría de los activos sugiriendo cierta normalización de las condiciones del mercado. Sin embargo, la volatilidad de NVIDIA aumenta respecto al periodo de pandemia. Esto podría estar relacionado con el crecimiento del sector y la mayor incertidumbre en los activos tecnológicos confirmando lo observado en el análisis gráfico. Es importante tener en cuenta que una menor volatilidad no implica necesariamente un menor riesgo, ya que puede haber activos con baja volatilidad pero con colas pesadas, lo que implica que pueden observarse valores extremos más pronunciados que en otros activos con mayor volatilidad. Por ello para completar el análisis de la volatilidad es necesario estudiar la asimetría y la curtosis.

Todos los activos presentan **asimetría** negativa en el periodo previo a la pandemia, indicando una mayor probabilidad de caídas fuertes o pérdidas extremas. Durante la pandemia destaca Santander ya que llega a 0,3815 mientras que Iberdrola acentúa su asimetría negativa. Además NVIDIA es el activo más cercano a cero durante este periodo sugiriendo una distribución casi simétrica. En el periodo post-COVID, NVIDIA e Iberdrola tienen una asimetría positiva, lo que sugiere una mayor probabilidad de ganancias extremas. Por otro lado Santander vuelve a valores negativos aunque cercanos a cero.

Finalmente, el coeficiente de **curtosis** muestra que Coca-Cola es el activo con el valor más alto en el periodo pre-COVID, lo que implica una mayor probabilidad de valores extremos en sus rentabilidades. Durante la pandemia, estos valores decrecen, excepto

para Santander e Iberdrola que aumentan, siendo este último el que crece en mayor medida (13,0330). En el periodo posterior los valores disminuyen para la mayoría de los activos, especialmente para Santander e Iberdrola que se aproximan a uno. Sin embargo, la empresa tecnológica aumenta moderadamente respecto a la pandemia. En general un coeficiente de curtosis elevado indica la existencia de colas pesadas cuando el valor es alto en determinados periodos, lo que implica una mayor probabilidad de observar valores extremos en los rendimientos.

A partir de este análisis, podemos decir que los activos no siguen una distribución normal, debido a la asimetría en la mayoría de los periodos y en especial los valores elevados del coeficiente de curtosis. Para confirmar estos resultados, puede realizarse un análisis visual mediante gráficos QQ para cada activo o aplicar un contraste de normalidad ampliamente utilizado, el test de Jarque-Bera.

Los gráficos QQ permiten evaluar visualmente si los rendimientos siguen una distribución normal, comparando los cuantiles empíricos de los rendimientos diarios con los cuantiles teóricos de una distribución normal.

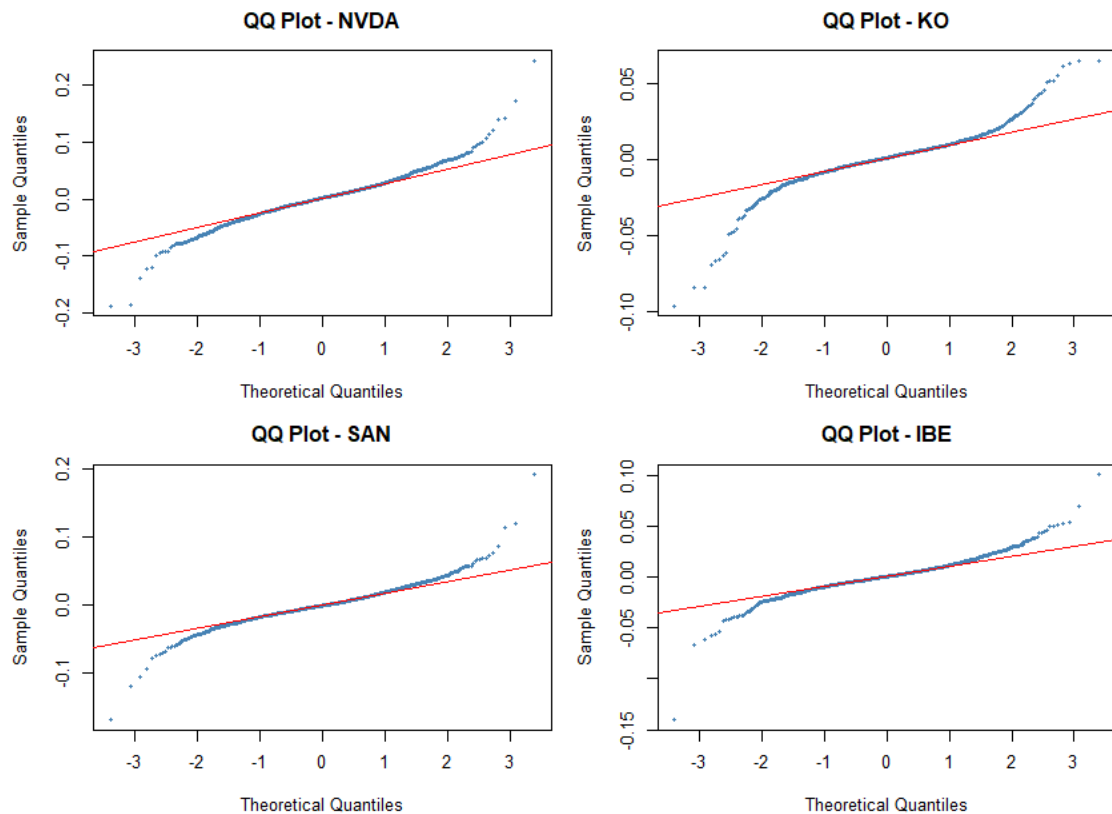


Figura 6: QQ plots de los rendimientos diarios de los cuatro activos.

Como se observa en la Figura 6, los puntos se ajustan a la línea de referencia de la zona central, pero estos se desvían en los extremos, lo que confirma la presencia de colas más pesadas de lo que predice la distribución normal y por lo tanto la existencia de valores extremos en los rendimientos.

En cambio el test de normalidad de Jarque-Bera [4] se basa en la asimetría y la curtosis

de los rendimientos. En particular, bajo normalidad, se cumple

$$\text{Asimetría} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{6}{T}\right), \quad \text{Curtosis} \sim \mathcal{N}\left(3, \frac{24}{T}\right).$$

Por ello en una distribución normal la asimetría es igual a cero y la curtosis es igual a tres. Entonces el test de Jarque-Bera y bajo la hipótesis de normalidad:

$$JB = \frac{T}{6} \text{Asimetría}^2 + \frac{T}{24} (\text{Curtosis} - 3)^2 \sim \chi^2(2).$$

| Activo | Periodo    | JB      | p-valor                |
|--------|------------|---------|------------------------|
| NVDA   | Pre-COVID  | 536,56  | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
|        | Pandemia   | 270,95  | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
|        | Post-COVID | 585,99  | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
| KO     | Pre-COVID  | 2637,10 | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
|        | Pandemia   | 1063,50 | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
|        | Post-COVID | 637,87  | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
| SAN    | Pre-COVID  | 694,18  | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
|        | Pandemia   | 913,86  | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
|        | Post-COVID | 40,597  | $1,529 \cdot 10^{-9}$  |
| IBE    | Pre-COVID  | 517,57  | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
|        | Pandemia   | 3485,20 | $< 2,2 \cdot 10^{-16}$ |
|        | Post-COVID | 25,866  | $2,418 \cdot 10^{-6}$  |

Cuadro 2: Resultados del test Jarque-Bera

Los resultados de JB muestran p-valores inferiores al 1 % en todos los activos y sub-periodos considerados. Por lo tanto se rechaza la hipótesis nula de normalidad de los rendimientos, confirmando lo observado previamente mediante la asimetría y la curtosis.

## 5.6. Estimación de las medidas de riesgo

A continuación se procede a estimar las medidas de riesgo estudiadas en la parte teórica, el Value at Risk (VaR) y el Expected Shortfall (ES).

Como los rendimientos no siguen una distribución normal, el enfoque paramétrico debe interpretarse con precaución. A pesar de ello, se incluye en el análisis con el objetivo de comparar sus resultados con el enfoque histórico.

En ambos enfoques se estiman para niveles de confianza del 95 % y 99 %, considerando un horizonte temporal de un día, para analizar la sensibilidad de los resultados.

### 5.6.1. Método paramétrico

Recordemos que bajo supuesto de normalidad, el VaR y ES se calculan a partir de la media y la desviación típica de los rendimientos.

La siguiente tabla recoge los resultados obtenidos mediante el enfoque paramétrico para niveles de confianza del 95 % y 99 %.

Además para facilitar la interpretación y comparación de los resultados del VaR y ES se presentarán en valor absoluto en todas las tablas.

| Activo | Periodo    | VaR 95 % | VaR 99 % | ES 95 %  | ES 99 %  |
|--------|------------|----------|----------|----------|----------|
| NVDA   | Pre-COVID  | 0,049506 | 0,069583 | 0,059719 | 0,077468 |
|        | Pandemia   | 0,058354 | 0,081212 | 0,065999 | 0,086207 |
|        | Post-COVID | 0,060388 | 0,084544 | 0,071031 | 0,092387 |
| KO     | Pre-COVID  | 0,018916 | 0,026566 | 0,022705 | 0,029469 |
|        | Pandemia   | 0,027156 | 0,038139 | 0,032596 | 0,042306 |
|        | Post-COVID | 0,017395 | 0,024503 | 0,021274 | 0,027558 |
| SAN    | Pre-COVID  | 0,025769 | 0,036741 | 0,033919 | 0,043619 |
|        | Pandemia   | 0,048799 | 0,068655 | 0,059223 | 0,076777 |
|        | Post-COVID | 0,033158 | 0,046409 | 0,038929 | 0,050644 |
| IBE    | Pre-COVID  | 0,020447 | 0,028528 | 0,023516 | 0,030660 |
|        | Pandemia   | 0,028300 | 0,039825 | 0,034400 | 0,044589 |
|        | Post-COVID | 0,020180 | 0,028176 | 0,023322 | 0,030391 |

Cuadro 3: VaR y ES paramétricos

Los resultados muestran que el ES presenta valores superiores al VaR en todos los periodos y activos.

Durante la pandemia se ve un incremento generalizado del riesgo, destacando el notable aumento de Santander. NVIDIA es el activo con mayor riesgo alcanzando los valores más altos en todos los subperiodos. Tras la pandemia, el riesgo se reduce para la mayoría de los activos, excepto para NVIDIA.

### 5.6.2. Método histórico

Este método a diferencia del paramétrico utiliza directamente la distribución empírica de los rendimientos diarios.

| Activo | Periodo    | VaR 95 % | VaR 99 % | ES 95 %  | ES 99 %  |
|--------|------------|----------|----------|----------|----------|
| NVDA   | Pre-COVID  | 0,045301 | 0,078260 | 0,073055 | 0,117839 |
|        | Pandemia   | 0,045116 | 0,075889 | 0,070805 | 0,111945 |
|        | Post-COVID | 0,053919 | 0,077736 | 0,068291 | 0,087566 |
| KO     | Pre-COVID  | 0,014088 | 0,033640 | 0,027025 | 0,050409 |
|        | Pandemia   | 0,021689 | 0,051200 | 0,040257 | 0,075605 |
|        | Post-COVID | 0,015038 | 0,026936 | 0,024063 | 0,041635 |
| SAN    | Pre-COVID  | 0,026661 | 0,038132 | 0,036874 | 0,055877 |
|        | Pandemia   | 0,042016 | 0,062082 | 0,060504 | 0,101347 |
|        | Post-COVID | 0,028174 | 0,055882 | 0,041857 | 0,068206 |
| IBE    | Pre-COVID  | 0,016369 | 0,039478 | 0,028409 | 0,047832 |
|        | Pandemia   | 0,021182 | 0,040198 | 0,037089 | 0,071251 |
|        | Post-COVID | 0,018091 | 0,025856 | 0,023854 | 0,031459 |

Cuadro 4: VaR y ES históricos

Los resultados obtenidos mediante este método son similares a los del enfoque paramétrico. Cabe destacar nuevamente el fuerte incremento del riesgo de Santander du-

rante la pandemia. A pesar de que NVIDIA sigue siendo el activo de mayor riesgo, tanto su VaR como ES se reducen ligeramente durante la pandemia. Por otra parte Coca-cola e Iberdrola presentan en general los valores más bajos.

## 5.7. Backtesting del VaR

Una vez estimados el VaR paramétrico e histórico se realiza un backtesting mediante ratios de violaciones. Recordemos que este ratio se obtiene

$$VR = \frac{\text{número de violaciones observadas}}{\text{número de violaciones esperadas}}.$$

El número de violaciones observadas se calcula contando los días en que la pérdida real, es decir el rendimiento diario negativo, supera el VaR estimado. Por otro lado, el número de violaciones esperadas viene dado por  $n\alpha$ , donde  $1 - \alpha$  es el nivel de confianza considerado y  $n$  el número de observaciones de la ventana de prueba.

En este trabajo, el periodo pre-COVID contiene 520 observaciones, 488 observaciones en pandemia y en el último subperiodo 430 observaciones. Por ello, para un VaR al 95 % se esperan aproximadamente 26, 24,4 y 21,5 violaciones respectivamente. De forma análoga, para un VaR al 99 % se esperan aproximadamente 5,2 , 4,88 y 4,3 violaciones en cada subperiodo.

A continuación se presentan los ratios de violaciones obtenidos para cada caso.

Cuadro 5: Backtesting del VaR mediante ratios de violaciones

| Activo | Periodo    | VaR 95 %         |                 |                  |                 | VaR 99 %         |                 |                  |                 |
|--------|------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|
|        |            | Obs <sub>h</sub> | VR <sub>h</sub> | Obs <sub>p</sub> | VR <sub>p</sub> | Obs <sub>h</sub> | VR <sub>h</sub> | Obs <sub>p</sub> | VR <sub>p</sub> |
| NVDA   | Pre-COVID  | 26               | 1,0000          | 19               | 0,7308          | 6                | 1,1538          | 11               | 2,1154          |
|        | Pandemia   | 25               | 1,0246          | 17               | 0,6967          | 5                | 1,0246          | 4                | 0,8197          |
|        | Post-COVID | 22               | 1,0233          | 14               | 0,6512          | 5                | 1,1628          | 3                | 0,6977          |
| KO     | Pre-COVID  | 26               | 1,0000          | 17               | 0,6538          | 6                | 1,1538          | 8                | 1,5385          |
|        | Pandemia   | 25               | 1,0246          | 16               | 0,6557          | 5                | 1,0246          | 9                | 1,8443          |
|        | Post-COVID | 22               | 1,0233          | 13               | 0,6047          | 5                | 1,1628          | 6                | 1,3953          |
| SAN    | Pre-COVID  | 26               | 1,0000          | 30               | 1,1538          | 6                | 1,1538          | 7                | 1,3462          |
|        | Pandemia   | 25               | 1,0246          | 15               | 0,6148          | 5                | 1,0246          | 4                | 0,8197          |
|        | Post-COVID | 22               | 1,0233          | 11               | 0,5116          | 5                | 1,1628          | 6                | 1,3953          |
| IBE    | Pre-COVID  | 26               | 1,0000          | 17               | 0,6538          | 6                | 1,1538          | 9                | 1,7308          |
|        | Pandemia   | 25               | 1,0246          | 13               | 0,5328          | 5                | 1,0246          | 5                | 1,0246          |
|        | Post-COVID | 22               | 1,0233          | 18               | 0,8372          | 5                | 1,1628          | 4                | 0,9302          |

Como el método histórico estima el VaR a partir de los cuantiles observados del mismo subperiodo, el número de violaciones observadas coincide por construcción. Por lo tanto, no aporta información adicional sobre la capacidad predictiva del modelo. Esta limitación ocurre al evaluarse en el mismo periodo de estimación.

A pesar de que el contraste de Jarque-Bera rechazó la hipótesis de normalidad en todos los activos y periodos, el backtesting de este enfoque permite evaluar en cuánto afecta a la estimación del riesgo.

Para un nivel de confianza del 95 %, la mayoría de los ratios se mantienen por debajo de 1, es decir hay menos violaciones observadas de las esperadas. Por ello, el VaR paramétrico sobreestima el riesgo en estos casos es decir, estima pérdidas mayores de las que ocurren.

Sin embargo, para el nivel de confianza del 99 %, la mayoría de los ratios superan 1. En particular, NVIDIA durante pre-COVID ( $VR = 2,1154$ ), Coca-Cola durante la pandemia ( $VR = 1,8443$ ) o Iberdrola en el periodo pre-COVID ( $VR = 1,7308$ ). Esto quiere decir que hay más violaciones de las esperadas por lo tanto, el enfoque paramétrico subestima la probabilidad de grandes pérdidas, lo cual es coherente a la presencia de colas pesadas observada en los rendimientos.

En conjunto, los resultados sugieren que el supuesto de normalidad no es adecuado para estimar el riesgo de los activos, ya que para un nivel de confianza del 95 % tiende a sobreestimar y al 99 % se infravalora, llegando en algunos casos a duplicar el número de violaciones observadas. Esto refuerza la necesidad de aplicar otros enfoques que no dependan del supuesto de normalidad.

## **5.8. Análisis de los resultados**

A continuación se comparan los resultados obtenidos de las tablas 3 y 4 entre los distintos activos, periodos y medidas de riesgo utilizadas.

### **5.8.1. Comparación entre activos**

Por lo general, el perfil de riesgo entre los activos se mantiene a lo largo de los periodos y de las medidas aplicadas.

NVIDIA es el activo de mayor riesgo, lo cual es coherente por su elevada volatilidad. Seguido de Santander, ya que durante la pandemia alcanzó valores bastante próximos a los de NVIDIA, lo que sugiere que en periodos de inestabilidad el sector bancario posee un perfil de riesgo similar al tecnológico. Por último Iberdrola y Coca-Cola siendo los más estables incluso en periodos de mayor incertidumbre, debido a que presentan los valores más bajos de VaR y ES.

### **5.8.2. Comparación entre periodos**

Destaca el impacto de la pandemia, afectando a todos los activos con un incremento generalizado del riesgo durante este periodo. Sin embargo la magnitud del impacto varía según el sector. Santander es el activo que sufre un crecimiento más notable en el periodo, lo que refleja la sensibilidad del sector bancario a las crisis económicas. En cambio el sector tecnológico presenta una ligera reducción de su VaR histórico en este periodo posiblemente por la aceleración digital durante el confinamiento.

Por otro lado, tras la pandemia el riesgo se reduce para mayoría de los activos ya que se estabilizó el mercado. Este comportamiento no se cumplió para NVIDIA, cuyos valores seguían en aumento, lo que refleja el dinamismo del sector impulsado por el auge de la inteligencia artificial. Sin embargo otros sectores como los de Coca-Cola e Iberdrola no llegaron a alcanzar los niveles de riesgo del subperiodo pre-COVID, lo que sugiere una mayor estabilidad tras la pandemia.

### 5.8.3. Comparación entre medidas

Se observa que en todos los casos los valores de ES superan al VaR, ya que el ES no solo considera el umbral de pérdidas sino también la media esperada de la cola.

### 5.8.4. Comparación entre métodos

Ambos enfoques coinciden en que NVIDIA es el activo de mayor riesgo, mientras que Coca-Cola es el más estable en todos los periodos. Además en general se observa un incremento del riesgo durante la pandemia, así como una disminución posterior para la mayoría de los activos, excepto en el caso de NVIDIA.

En el enfoque paramétrico, el riesgo de NVIDIA sigue aumentando tras la pandemia, mientras que para el resto de activos las medidas se reducen. En particular, Coca-Cola alcanza niveles de riesgo inferiores a los del periodo pre-COVID, Iberdrola llega a valores muy similares a los iniciales y Santander, aunque reduce su riesgo respecto en pandemia, se mantiene por encima de los valores observados antes del COVID.

En cuanto al método histórico aparecen algunas diferencias relevantes. Durante la pandemia, tanto el VaR como el ES de NVIDIA se reducen ligeramente, posiblemente por el crecimiento del sector tecnológico durante el confinamiento. En el siguiente subperiodo su VaR vuelve a aumentar mientras que el ES decrece, lo que sugiere mayor volatilidad general pero pérdidas extremas o colas menos pronunciadas. Por otra parte, Coca-Cola e Iberdrola alcanzan mayoritariamente valores inferiores que en pre-COVID mientras que Santander reduce sus niveles de riesgo tras la pandemia pero estos siguen siendo superiores a los valores iniciales.

Por último, tras aplicar el test de Jarque-Bera se rechaza la hipótesis de normalidad en todos los subperiodos, por lo que en este caso el método histórico representa de forma más realista el comportamiento de los rendimientos y los valores extremos, al basarse directamente en la distribución empírica de los datos sin imponer normalidad.

En conclusión, el orden de perfil de riesgo entre activos se mantiene a lo largo de los subperiodos independientemente del método y medida utilizada. NVIDIA es el activo con mayor nivel de riesgo en todos los subperiodos y Coca-Cola destaca como el activo más estable.

El entorno macroeconómico supone un claro impacto sobre el riesgo, ya que la pandemia provoca un incremento generalizado del riesgo, aunque la magnitud del efecto depende del sector. Tras la pandemia, la mayoría de los activos recuperan niveles de riesgo similares a los observados antes de la pandemia. Sin embargo, Santander mantiene valores superiores a ese periodo, posiblemente relacionado al inicio de la subida de tipos de interés y el impacto de la guerra de Ucrania sobre el sector bancario. Por otra parte el auge de la inteligencia artificial permite mantener el riesgo de NVIDIA elevado e incluso creciente durante el periodo post-COVID. Además los resultados obtenidos para niveles de confianza al 99 % son mayores (en valor absoluto) que al 95 %, ya que a mayor nivel de confianza mayor es la pérdida máxima estimada.

Finalmente, el ES ofrece un análisis más completo del riesgo extremo al considerar el umbral de pérdidas y la media de las pérdidas extremas. Además dado que el contraste de Jarque-Bera se ha rechazado en todos los subperiodos, el enfoque histórico representa en este caso un comportamiento más realista.

## 5.9. Cobertura mediante opciones europeas

Tras estimar las medidas de riesgo de los activos estudiados, se analiza cómo puede reducirse dicho riesgo mediante estrategias de cobertura. Para ello, se protege la cartera mediante opciones put europeas.

Esta aplicación se realiza utilizando el modelo Black-Scholes sobre NVIDIA en post-COVID, ya que fue el activo con mayor volatilidad y presentó los niveles de VaR y ES más altos tras la pandemia.

Los parámetros utilizados son los siguientes. Se considera un vencimiento de un mes, ya que es el plazo habitual en este tipo de contratos. Como en el modelo Black-Scholes el tiempo hasta el vencimiento se expresa en años, se toma

$$T = \frac{21}{252},$$

donde 21 es el número aproximado de días bursátiles de un mes y 252 el número medio de días de negociación en un año.

Por ello, para estimar el tipo libre de riesgo se usan los rendimientos de *U.S. Treasury Bills* [11] a cuatro semanas.

A partir de los datos del periodo tras la pandemia (16/03/2022-29/12/2023), se obtiene una rentabilidad media anual de 3,63% para la serie *4-Week Bank Discount* y 3,70% para la serie *4-Week Coupon Equivalent*. Dado que ambos valores son muy similares, en este trabajo se toma  $r = 3,7\%$ .

Del Cuadro 1 se obtiene una rentabilidad media diaria de 0.2084% y una desviación típica diaria de 3.5446%. Para la aplicación del modelo Black-Scholes es necesario que los parámetros estén en términos anuales. Considerando 252 días bursátiles por año, se obtiene

$$\mu_{\text{anual}} = 252 \cdot 0,002084 = 0,5252 \quad \text{y} \quad \sigma_{\text{anual}} = \sqrt{252} \cdot 0,035446 = 0,5627.$$

Para simplificar la notación, en las fórmulas de esta sección se tomará

$$\sigma = \sigma_{\text{anual}} \quad \text{y} \quad \mu = \mu_{\text{anual}}.$$

En cuanto al precio ajustado de NVIDIA al inicio del periodo estudiado es  $S(0) = 24,45$ .

Para comparar distintos niveles de protección, se consideran tres precios de ejercicio. En concreto, una opción put fuera del dinero (OTM), una opción en el dinero (ATM) y una opción dentro del dinero (ITM) es decir,

$$K_{OTM} = 0,9 \cdot S(0) = 22,01, \quad K_{ATM} = S(0) = 24,45, \quad K_{ITM} = 1,1 \cdot S(0) = 26,90.$$

A continuación se calcula el precio de las tres opciones put europeas. Recordemos la fórmula,

$$H(0) = K e^{-rT} N(-d_-) - S(0) N(-d_+),$$

donde

$$d_- = \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_+ = \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Sustituyendo los valores,

| Tipo de opción | Precio de ejercicio $K$ | Precio opción put $H(0)$ |
|----------------|-------------------------|--------------------------|
| OTM            | 22,01                   | 0,5676                   |
| ATM            | 24,45                   | 1,5422                   |
| ITM            | 26,90                   | 3,1026                   |

Cuadro 6: Opciones put con el modelo Black-Scholes

Se observa que a medida que aumenta el precio  $K$ , el coste de la opción aumenta, por lo que el número de opciones que se pueden comprar con el mismo presupuesto disminuye.

Bajo la hipótesis del modelo Black-Scholes, el precio del activo en tiempo  $T$  es

$$S(T) = S(0)e^{((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z)}.$$

Si se considera una inversión inicial  $V_0 = 1000$  dólares, entonces el número de acciones de NVIDIA adquiridas es

$$x = \frac{V_0}{S(0)} = \frac{1000}{24,45} = 40,90.$$

Ahora se calculan el VaR y ES sin cobertura para una única acción, usando las ecuaciones (3.10) y (4.12) respectivamente. Por lo tanto,

$$VaR^{0,05}(X) = S(0) - e^{-rT}q^{0,05}(S(T)),$$

y

$$ES^{0,05}(X) = S(0) - \frac{1}{0,05}S(0)e^{(\mu-r)T}N(q^{0,05}(Z) - \sigma\sqrt{T}).$$

Como  $Z \sim N(0, 1)$  entonces,

$$q^{0,05}(Z) = N^{-1}(0,05) \approx -1,6449.$$

Por el Lema 3.3

$$q^{0,05}(S(T)) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}q^{0,05}(Z)} \approx 19,30.$$

Para una cartera formada por  $x$  acciones, simplemente VaR y ES se multiplican por  $x$ .

Como  $V_0 = 1000$ , para simplificar la comparación, se toma el mismo número de acciones que de opciones put, es decir

$$z = x.$$

Por ello, la fórmula del valor inicial de la cartera formada por  $x$  acciones y  $z$  opciones put europeas,

$$V_{(x,z)}(t) = xS(t) + zH(t)$$

se simplifica y se obtiene,

$$V_{(x,z)}(0) = x(S(0) + H(0)) = 1000 \iff x = z = \frac{V_0}{S(0) + H(0)}.$$

Para medir el riesgo de la cartera cubierta se aplican los resultados del Lema 3.6 y de la Proposición 4.13 respectivamente,

$$VaR^{0,05}(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - e^{-rT}[xq^{0,05}(S(T)) + z(K - q^{0,05}(S(T)))^+],$$

y

$$ES^{0,05}(X_{(x,z)}) = V_{(x,z)}(0) - \frac{1}{0,05}e^{(\mu-r)T}[xS(0)N(q^{0,05}(Z) - \sigma\sqrt{T}) + zP^{0,05}(K)].$$

En la siguiente tabla se comparan las medidas de riesgo de la inversión con y sin cobertura.

| Estrategia    | $K$   | $x$   | $z$   | VaR 95 % | ES 95 % |
|---------------|-------|-------|-------|----------|---------|
| Sin cobertura | –     | 40,90 | –     | 213,13   | 263,47  |
| Put OTM       | 22,01 | 39,97 | 39,97 | 123,13   | 123,13  |
| Put ATM       | 24,45 | 38,47 | 38,47 | 62,23    | 62,23   |
| Put ITM       | 26,90 | 36,29 | 36,29 | 26,87    | 26,87   |

Cuadro 7: VaR y ES al 95 % con y sin cobertura de opciones put europeas

Los resultados del Cuadro 7 muestran que las opciones put reducen considerablemente tanto el VaR como el ES en todos los casos estudiados. Además, la reducción es mayor cuanto más alto es  $K$ , lo cual es coherente con lo estudiado en la parte teórica. En particular, la opción put OTM reduce el VaR un 42,22 % y el ES un 53,27 % mientras que con la opción put ITM se reducen 87,40 % y 89,80 % respectivamente.

Sin embargo, las opciones ITM son más caras, por lo que reducen el número de contratos de 39,97 a 36,29, aunque cada contrato ofrece mayor cobertura.

Por otro lado, en los tres casos con cobertura, los valores del VaR y ES coinciden. Esto se debe a que  $q^{0,05}(S(T)) \approx 19,30 < K$  en todos los casos de  $K$ . En consecuencia, en los escenarios más desfavorables, la opción put se activa y compensa las caídas del precio de NVIDIA, limitando las pérdidas de la cartera por un valor fijo.

Finalmente, en la cartera sin cobertura el ES supera al VaR, lo que refleja la existencia de pérdidas extremas en la cola de la distribución. Tras introducir las opciones put, esta diferencia desaparece, ya que en este caso la cobertura elimina el riesgo de cola que el ES tiene en cuenta. Por lo general, incorporar opciones put reduce significativamente dicho riesgo de cola.

## 6. Conclusiones

A través de este proyecto se han estudiado las dos medidas de riesgo más utilizadas en el ámbito financiero, el *Value at Risk* (VaR) y el *Expected Shortfall* (ES). Para ello, primero se ha desarrollado la parte teórica para comprender su definición, propiedades y diferencias antes de aplicarlas a datos reales de mercado.

Se ha observado que, a pesar de que el VaR es una medida de riesgo ampliamente conocida y aplicada, presenta ciertas limitaciones. Entre las más destacables se encuentran la falta de información sobre la magnitud de las pérdidas una vez superado el nivel de confianza y el hecho de que no cumple la propiedad de subaditividad. En consecuencia, surge la medida de riesgo ES.

La aplicación a datos de mercado ha permitido estudiar el efecto del tipo de activo y contexto económico sobre el riesgo. Los activos con mayor volatilidad presentan valores más elevados tanto de VaR como ES, lo que refleja una mayor exposición a pérdidas potenciales. Además, la comparación entre distintos periodos ha demostrado que el riesgo aumenta notablemente en etapas de mayor incertidumbre o tensión en los mercados.

Por otra parte, este estudio confirma que el ES alcanza valores superiores al VaR en los casos estudiados, ya que incorpora información sobre las pérdidas más allá del cuantil considerado. Esta diferencia es relevante para aquellos activos o periodos donde la distribución de los rendimientos presenta colas más pronunciadas. En consecuencia, el riesgo asociado a eventos extremos puede quedar infravalorado si solo se considera el VaR, por lo que el ES proporciona una descripción más completa.

En cuanto a los métodos de estimación, tanto el enfoque paramétrico como histórico proporcionan una ordenación del riesgo similar entre los distintos activos y periodos. Sin embargo, la diferencia principal es que, en el enfoque paramétrico, el riesgo de NVIDIA sigue aumentando tras la pandemia, mientras que el método histórico muestra una evolución menos uniforme al basarse directamente en los datos observados. Dado que el test de Jarque-Bera rechaza la hipótesis de normalidad en todos los activos y subperiodos, el método histórico resulta especialmente adecuado en este caso.

Para comprobar la precisión de las estimaciones del VaR se ha aplicado el backtesting mediante ratios de violaciones. En el enfoque histórico, los resultados aportan información limitada, ya que el VaR se estima y evalúa sobre la misma muestra, lo que explica que el número de violaciones observadas y esperadas sea muy similar. En cambio, el paramétrico permite observar el efecto del supuesto de normalidad. Aunque el contraste Jarque-Bera ya rechazaba la normalidad de los rendimientos, el backtesting permite comprobar cómo esta hipótesis afecta a la calidad de las estimaciones obtenidas. En particular, los resultados muestran que al 95 % tiende a sobreestimar el riesgo, mientras que al 99 % puede infravalorar las pérdidas extremas. De esta forma, ambos procedimientos se complementan.

Por último, los resultados obtenidos en el estudio de la cobertura mediante opciones put europeas con el modelo Black-Scholes muestran que este tipo de estrategias reduce considerablemente las posibles pérdidas y confirma su eficacia en la gestión del riesgo financiero.

En definitiva, este análisis muestra la utilidad de estas herramientas para comprender mejor el comportamiento del riesgo y la importancia de una adecuada gestión del mismo en la toma de decisiones financieras.

## Referencias

- [1] Martin Auer. *Hands-On Value-at-Risk and Expected Shortfall*. Springer, 2018.
- [2] Marie Briere and Apostolos Thomadakis. Digital-savvy retail investors: How can the financial industry and regulation help them to prosper? Technical report, European Capital Markets Institute (ECMI), February 2024.
- [3] Maciej J. Capiński and Ekkehard Kopp. *Portfolio Theory and Risk Management*. Cambridge University Press, 2012.
- [4] Jon Danielsson. *Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R and Matlab*. Wiley, 1st edition, 2011.
- [5] Federal Reserve. Federal reserve issues federal open market committee (FOMC) statement, March 16th, 2022.
- [6] John C. Hull. *Risk Management and Financial Institutions*. Wiley, 4 edition, 2018.
- [7] Investopedia. Black-Scholes model, 2025.
- [8] Philippe Jorion. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill, 3rd edition, 2007.
- [9] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, and Paul Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, 2015.
- [10] Organización Mundial de la Salud. Alocución de apertura del director general de la OMS en la rueda de prensa sobre el COVID-19, 11 de marzo 2020.
- [11] U.S. Department of the Treasury. Daily treasury rate archives, 2024.

## A. Anexo: Código en R

En esta sección se encuentran fragmentos del código para desarrollar la parte práctica del proyecto.

Para evitar repeticiones, se escribirá el código para el activo NVIDIA, un subperiodo (pre-COVID) y un nivel de confianza (95 %) concreto. Los otros casos se hace de forma análoga.

```
#PAQUETES Y LIBRERIAS#
#Instalar paquetes#
install.packages("quantmod")
install.packages("moments")
install.packages("xts")
#Cargar librerias#
library(quantmod)
library(moments)
library(xts)

#DESCARGAR PRECIOS AJUSTADOS#
#Para un solo activo NVDA#
getSymbols("NVDA", src = "yahoo", from = "2018-01-01", to = "2023-12-31")
precio <- Ad(NVDA)
#Para los cuatro activos#
activos <- c("NVDA", "KO", "SAN.MC", "IBE.MC")
getSymbols(activos, src = "yahoo", from = "2018-01-01", to = "2023-12-31")
precios <- merge(Ad(NVDA), Ad(KO), Ad(SAN.MC), Ad(IBE.MC))
colnames(precios) <- c("NVDA", "KO", "SAN.MC", "IBE.MC")

#GRAFICA EVOLUCION PRECIOS AJUSTADOS#
precio_df <- data.frame(
  fecha = as.Date(index(precio)),
  NVDA = as.numeric(precio)
)

corte1 <- as.Date("2020-03-10")
corte2 <- as.Date("2022-03-16")

par(mar = c(6, 4, 4, 2))
plot(precio_df$fecha, precio_df$NVDA,
     type = "l", col = "black",
     xlab = "", ylab = "Precio ajustado",
     main = "Evolucion del precio ajustado de NVDA (2018-2023)",
     xaxt = "n")
abline(v = corte1, lty = 2, col = "gray40", lwd = 1.2)
abline(v = corte2, lty = 2, col = "gray40", lwd = 1.2)
axis.Date(1, at = seq(as.Date("2018-01-01"), as.Date("2023-12-31"),
  by = "6-months"), format = "%b-%Y", las = 2, cex.axis = 0.75)
mtext("Pre-COVID", side=1, line=4.5, at=as.Date("2019-01-01"), cex=0.85)
mtext("Pandemia", side=1, line=4.5, at=as.Date("2021-03-01"), cex=0.85)
```

```

mtext("Post-COVID", side=1, line=4.5, at=as.Date("2023-01-01"), cex=0.85)

#RENDIMIENTOS SIMPLES#
#Se eliminan aquellos rendimientos NA (sin datos)#
returnsNVDA <- na.omit(diff(precio) / xts::lag.xts(precio, k = 1))
#Para los 4 activos#
returns <- na.omit(diff(precios) / xts::lag.xts(precios, k = 1))

#GRAFICO RENTABILIDADES DIARIAS#
plot(as.Date(index(returnsNVDA)),
      as.numeric(returnsNVDA),
      type = "l",
      col = "black",
      main = "Rendimientos diarios - NVDA",
      xlab = "",
      ylab = "Rentabilidad diaria",
      lwd = 0.8,
      xaxt = "n")

axis.Date(1, at = seq(as.Date("2018-01-01"),
                      as.Date("2023-12-31"),
                      by = "year"), format = "%Y")

abline(h = 0, col = "gray40", lty = 2)

#IMPONER LOS PERIODOS#
pre_covid <- returnsNVDA["2018-01-01/2020-03-10"]
#Para los otros subperiodos se agregan los siguientes#
pandemia <- returnsNVDA["2020-03-11/2022-03-15"]
post_covid <- returnsNVDA["2022-03-16/2023-12-31"]
#Para los 4 activos juntos#
#Se sustituye returnsNVDA por returns#

#ESTADISTICOS DESCRIPTIVOS#
#Media#
mean(pre_covid)
#Desviacion tipica#
sd(pre_covid)
#Asimetria#
skewness(as.numeric(pre_covid))
#Coeficiente curtosis en exceso#
#Se resta 3 ya que la distribucion normal tiene curtosis = 3#
kurtosis(as.numeric(pre_covid)) - 3

#QQ PLOT#
qqnorm(as.numeric(pre_covid),
        main = "QQ-Plot - NVDA-Pre-COVID",
        col = "steelblue", pch = 16, cex = 0.5)
qqline(as.numeric(pre_covid), col = "red", lwd = 1.5)

```

```

#QQ plot para periodo completo se sustituye pre_covid por returnsNVDA#

#Test Jarque-Bera#
jarque.test(as.numeric(pre_covid))

#Nivel de confianza#
nivel<- 0.95

#VAR y ES PARAMETRICO#
VaR_param <- abs(-mean(pre_covid) -
                 sd(pre_covid) * qnorm(nivel))
ES_param  <- -mean(pre_covid) +
             sd(pre_covid) * dnorm(qnorm(nivel)) / (1 - nivel)

#Imprimir en pantalla con 6 decimales#
cat("VaR-parametrico:", round(VaR_param, 6), "\n")
cat("ES-parametrico:", round(ES_param, 6), "\n")

#VAR Y ES HISTORICO#
VaR_hist <- -quantile(pre_covid, 1 - nivel, na.rm = TRUE)
ES_hist  <- -mean(pre_covid[pre_covid <
                          quantile(pre_covid, 1 - nivel,
                                    na.rm = TRUE)
], na.rm = TRUE)

#Imprimir en pantalla con 6 decimales#
cat("VaR-historico:", round(VaR_hist, 6), "\n")
cat("ES-historico:", round(ES_hist, 6), "\n")

#BACKTESTING DEL VAR#
#Numero de observaciones (n)#
n <- length(pre_covid)
# Violaciones esperadas
esperadas <- n * (1 - nivel)
cat("Violaciones-esperadas-al-95%:", esperadas, "\n")

#Metodo Parametrico#
#Violaciones observadas#
obs_param <- sum(pre_covid < -VaR_param)
cat("Violaciones-observadas-parametrico:", obs_param, "\n")
#Ratio de violaciones parametrico#
VR_param <- obs_param / esperadas
cat("VR-parametrico:", round(VR_param, 4), "\n")

#Metodo Historico#
#Violaciones observadas#
obs_hist <- sum(pre_covid < -VaR_hist)
cat("Violaciones-observadas-historico:", obs_hist, "\n")
#Ratio de violaciones historico#

```

```

VR_hist <- obs_hist / esperadas
cat("VR-historico:", round(VR_hist, 4), "\n")

#MODELO BLACK-SCHOLES#
#En este apartado se ha usado R principalmente para el calculo de
las funciones de distribucion normal#
#Nivel de confiaza es 1-alpha= 95% entonces alpha= 0,05#
alpha <- 0.05
#Parametros#
S0 <- 24.45
mu <- 0.5252
sigma <- 0.5627
r <- 0.037
T <- 21/252
#Cuantil de la normal  $q^{\alpha}(Z)=N^{-1}(\alpha)$ #
qZ <- qnorm(alpha)
#Cuantil de  $S(T)$ #
qS <- S0 * exp((mu - sigma^2/2)*T + sigma*sqrt(T)*qZ)
#K#
K <- c(OTM = 22.01, ATM = 24.45, ITM = 26.90)
#d_- y d_+#
d_menos <- (log(S0/K) + (r - sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
d_mas <- (log(S0/K) + (r + sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
#Funciones de distribucion normal para el precio de la put#
N_menos_d_menos <- pnorm(-d_menos)
N_menos_d_mas <- pnorm(-d_mas)
#Termino normal que aparece en el ES sin cobertura#
N_ES <- pnorm(qZ - sigma*sqrt(T))
#Para calcular  $\{K-qS, 0\}^{+}$ #
termino <- pmax(K-qS, 0)

```