UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

DOBLE GRADO DE
MATEMÁTICAS Y ADMINISTRACIÓN
Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Trabajo final de grado

MODELOS PARA UNA CARTERA DE SEGUROS Y TEORÍA DE LA RUINA

Autor: Eva Ayala Pablo

Director:	Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia
	Dr. David Márquez Carreras
Realizado en:	Departamento
	de Matemáticas e Informática

Barcelona, 15 de enero de 2025

Abstract

The purpose of this undergraduate thesis is to study the dynamics of an insurance portfolio through stochastic processes. To do so, the claim number process and total claim amount process will be studied. We will mainly base the thesis on the Poisson process and the Cramér-Lundberg model. Finally, we will developed the Ruin Theory and we will introduce the concept of probability of ruin for an insurance company. Also, an explicit formula or a bound to approximate it will be given.

Resumen

El objetivo de este trabajo final de grado es estudiar la dinámica de una cartera de seguros a través de procesos estocásticos. Para ello, se analizarán el proceso de número de reclamaciones y el proceso de volumen total de las reclamaciones. Nos basaremos principalmente en el proceso de Poisson y en el modelo de Cramér-Lundberg. Finalmente, estudiaremos la Teoría de la Ruina, introduciendo el concepto de probabilidad de ruina para una compañía de seguros y daremos una fórmula explícita o una cota para aproximarla dependiendo del tamaño de las reclamaciones.

2020 Mathematics Subject Classification. 60G55, 62P05, 91B05, 97M30

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis dos tutores, Josep Vives y David Márquez, por la dedicación en la realización de este trabajo. Gracias por el apoyo y la paciencia.

A mis amigas y a todos los compañeros que me han acompañado durante todos estos años, haciendo el camino más sencillo.

Por último, a mi familia por su apoyo incondicional y por confiar siempre en mí. Sin vosotros esto no hubiera sido posible.

Índice general

1. Introducción 1
2. El modelo básico 2
   2.1. Esperanza condicionada 2
3. Modelos para el Proceso de Número de Reclamaciones 4
   3.1. El proceso de Poisson 4
   3.2. El Proceso de Renovación 9
4. El Volumen Total de las Reclamaciones 14
   4.1. El Orden de Magnitud del Volumen Total de las Reclamaciones . . 14
   4.2. Distribución del Tamaño de las Reclamaciones 17
   4.3. Distribución del Volumen Total de las Reclamaciones 23
   4.4. Reaseguros 25
5. Teoría de la Ruina 27
   5.1. Proceso de Ruina, Probabilidad de Ruina y Condición de Beneficio Neto 27
   5.2. Límites para la Probabilidad de Ruina 29
6. Conclusiones 39

1. Introducción

Todos, en algún momento, hemos tenido o tendremos que lidiar con cuestiones relacionados con los seguros. Por ello, puede afirmarse que las matemáticas centradas en los seguros constituyen un pilar fundamental de la sociedad actual. Las economías actuales dependen en gran medida de instituciones que garanticen la compensación de pérdidas a personas, empresas u organizaciones. Sin estas estructuras, sería difícil imaginar su funcionamiento.

Los seguros son una parte esencial de nuestra vida. Estos están construidos en base a la confianza mutua entre las partes involucradas, es decir, entre el asegurador y el asegurado. Sin embargo, se identificó rápidamente que esta confianza debía fundamentarse en el rigor científico, y no en creencias o especulaciones. Por este motivo, durante el siglo XX, se desarrollaron teorías matemáticas que permitieron abordar estos temas de manera precisa. Entre estas, destacan las teorías de probabilidad, estadística y procesos estocásticos.

Los procesos estocásticos permiten a las compañías de seguros modelar y gestionar la incertidumbre asociada a una cartera de seguros. En otras palabras, permiten analizar fenómenos aleatorios relacionados con el número de las reclamaciones y el volumen asociado a cada una de ellas, aportando las herramientas necesarias para la toma de decisiones.

Teniendo en cuenta esto, en este trabajo se estudiarán el proceso de número de reclamaciones y el proceso de volumen total de las reclamaciones. Además, se analizará la probabilidad de ruina de una compañía de seguros.

De esta manera, en el primer apartado se presenta el modelo básico que permite describir la dinámica esencial de una cartera de seguros. Se definen aquí conceptos clave para el trabajo como el tiempo, el número, el tamaño o el volumen de las reclamaciones.

Seguidamente, se exponen los dos procesos principales para modelar el proceso de número de reclamaciones: el proceso de Poisson y el proceso de Renovación.

A continuación, se incluyen los estudios relativos al volumen total de las reclamaciones, presentando la distribución del tamaño de las reclamaciones y la distribución del volumen total de las reclamaciones. Asimismo, en este punto, se incluyen, de manera breve, los principios clásicos para el cálculo de primas y algunas técnicas de reaseguranza.

Para finalizar, se darán las herramientas necesarias para calcular la probabilidad de ruina de una compañía de seguros. Para ello, se definirán conceptos como el proceso de ruina y la Condición de Beneficio Neto (NPC). Concluiremos presentando estimaciones de la probabilidad de ruina para tamaños de reclamación grandes y pequeños, basándonos en el límite de la ruina de Cramér.

2. El modelo básico

Comenzamos introduciendo un modelo simple con el que podemos describir la dinámica básica de una cartera de seguros homogénea, es decir, una cartera de seguros para riesgos similares.

Tenemos tres supuestos para este modelo:

- Las reclamaciones ocurren en los instantes T_i cumpliendo $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq ...$. Los llamamos *llegadas de reclamación*, *tiempo de reclamación* o, simplemente, *llegadas.*
- La i-ésima reclamación que llega en el instante T_i provoca el *tamaño de la reclamación* X_i . La secuencia (X_i) constituye una secuencia de variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas.
- El proceso de determinación del tamaño de la reclamación (X_i) y el proceso de llegada de la reclamación (T_i) son mutuamente independientes.

Podemos definir ahora el *número de reclamaciones* como

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Es decir, el proceso de conteo $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ representa el número total de reclamaciones que se han producido antes de t.

Sin embargo, desde el punto de vista de una compañía nos interesa conocer el *volumen total de las reclamaciones* o *proceso importe agregado de las reclamaciones.*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbb{1}_{[0,t]}(T_i), \quad t \geq 0.$$

El proceso $S = (S(t))_{t \geq 0}$ es un *proceso de suma parcial aleatoria.*

Una vez introducido el modelo básico, procederemos en los siguientes capítulos a modelar el *proceso de número de reclamaciones* N y estudiaremos las propiedades del *proceso de volumen total de las reclamaciones* S.

2.1. Esperanza condicionada

Antes de estudiar el proceso de conteo N y el volumen total de las reclamaciones, introducimos el concepto de esperanza condicionada, que nos será de gran utilidad en varias demostraciones que se realizarán a lo largo de este trabajo.

Definición 2.1. *(Esperanza condicionada)*
Sea Y una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $E(Y) < \infty$. Sea $\mathcal{D}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. La esperanza condicionada de Y dada $\mathcal{D}$ se define como una variable aleatoria $E(Y \mid \mathcal{D}) : \Omega \to \mathbb{R}$, medible respecto a $\mathcal{D}$ y, tal que, para todo $D \in \mathcal{D}$:

$$\int_D E(Y \mid \mathcal{D})\, dP = \int_D Y\, dP.$$

Enunciamos algunas propiedades básicas de la esperanza condicionada.

1. Ley de la esperanza iterada: $E(Y) = E[E(Y \mid \mathcal{D})]$.
2. Linealidad: $E(a_1Y_1 + a_2 + Y_2 \mid \mathcal{D}) = a_1E(Y_1 \mid \mathcal{D}) + a_2E(Y_2 \mid \mathcal{D})$, para ciertas constantes $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
3. Si Y es medible respecto a $\mathcal{D}$, entonces $E(Y \mid \mathcal{D}) = Y$ c.s.
4. Si $Y > 0$, entonces $E(Y \mid \mathcal{D}) \geq 0$ c.s.
5. Si Y es independiente de $\mathcal{D}$, entonces $E(Y \mid \mathcal{D}) = E(Y)$.

3. Modelos para el Proceso de Número de Reclamaciones

3.1. El proceso de Poisson

En esta sección, estudiaremos el proceso más común para describir el número de llegadas: el *Proceso de Poisson*. Este proceso presenta propiedades matemáticas muy interesantes y juega un papel fundamental en las matemáticas de seguros.

Para poder proporcionar una definición del proceso de Poisson, introducimos la siguiente notación. Para cualquier función de valores reales f en $[0,\infty)$ escribimos,

$$f(s,t] = f(t) - f(s), \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

Además, una variable aleatoria discreta M tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ ($M \sim \text{Poisson}(\lambda)$) si tiene una función de probabilidad dada por

$$\text{P}(M{=}k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Observamos que una variable aleatoria $M = 0$ tiene una distribución Poisson(0).

Definición 3.1. *Un proceso estocástico $N = (N(t))_{t\geq 0}$ se dice que es un proceso de Poisson si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Se inicia en cero: $N(0) = 0$.*
2. *Los incrementos son independientes: para cualquier t_i, $i = 0, , \ldots, n$, y $n \geq 1$ tal que $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, los incrementos $N(t_{i-1}, t_i]$ $i = 1, , \ldots, n$, son mutuamente independientes.*
3. *Existe una función no decreciente continua por la derecha $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ con $\mu(0) = 0$ tal que los incrementos $N(s,t]$ para $0 < s < t < \infty$ tienen una distribución Poisson($\mu(s,t]$), donde $\mu(s,t] = \mu(t) - \mu(s)$ para $s < t$. Se dice que μ es la funcion de valor medio de N.*
4. *Con probabilidad 1, $(N(t,w))_{t\geq 0}$ es continuo por la derecha para $t \geq 0$ y tiene límites por la izquierda para $t > 0$.*

Generalmente, decimos que N tiene *intensidad* o *tasa* λ si μ es absolutamente continua, lo que quiere decir que, para cualquier $s < t$ el incremento $\mu(s,t]$ se escribe de la forma

$$\mu(s,t] = \int_s^t \lambda(y)\, dy, \quad s < t,$$

para alguna función medible positiva λ. Una consecuencia de esto es que μ es una función continua.

Proceso de Poisson Homogéneo

Presentamos ahora el *proceso de Poisson homegéneo*, que se corresponde a un proceso de Poisson donde la función de valor medio es lineal, es decir,

$$\mu(t) = \lambda t, \quad t \geq 0,$$

para algún $\lambda > 0$.

Definición 3.2. *Un proceso de Poisson Homegéneo con intensidad λ es aquel que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Se inicia en cero: $N(0) = 0$.*
2. *Los incrementos son independientes y estacionarios. Que los intervalos sean estacionarios quiere decir que el parámetro de un incremento solo depende de la longitud del intervalo y no de su ubicación: para cualquier $0 \leq s < t$ y $h > 0$, tenemos que*

$$N(s,t] \sim \mathrm{N}(s+h, t+h] \sim \mathrm{Poisson}(\lambda(t-s)).$$

3. *Para todo $t > 0$, $N(t)$ es una variable aleatoria Poisson con parámetro λt.*

Si N es homogéneo, el tiempo evoluciona linealmente: $\mu(s,t] = \mu(s+h, t+h]$ para cualquier $h > 0$ y $0 \leq s < t < \infty$. Esto significa que las reclamaciones llegan de manera uniforme (aproximadamente) a lo largo del tiempo.

Si $\lambda = 1$, N es conocido como *proceso de Poisson homogéneo estándar*.

Ejemplo 3.3. (**Modelo de Cramér-Lundberg**)
Si suponemos el proceso de número de reclamaciones como un proceso de Poisson homogéneo, el modelo resultante que combina los tamaños de las reclamaciones X_i y las llegadas de las reclamaciones T_i es conocido como modelo de Cramér-Lundberg:

- Las reclamaciones se dan en el momento de llegada $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ de un proceso de Poisson homegéneo $N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, t \geq 0$.
- La i-ésima reclamación que llega en el instante T_i provoca el tamaño de la reclamación X_i . La secuencia (X_i) constituye una secuencia de variables aleatorias iid positivas.
- Las secuencias (T_i) y (X_i) son independientes. En particular, N y (X_i) son independientes.

El proceso de coste total de las reclamaciones S en este modelo es llamado también *proceso Poisson Compuesto*.

Relación entre un proceso de Poisson Homogéneo y un proceso de Poisson no Homogéneo

El objetivo de esta sección es ver que un determinado cambio de tiempo t transforma un proceso de Poisson homogéneo en un proceso de Poisson no homogéneo y viceversa.

Sea N un proceso de Poisson en $[0, \infty)$ con función de valor medio μ. Comenzamos con un proceso de Poisson homogéneo estándar $\tilde{N}$ y definimos

$$\hat{N}(t) = \tilde{N}(\mu(t)), \quad t \geq 0.$$

Observamos que $\hat{N}$ es un proceso de Poisson en $[0, \infty)$. También

$$\hat{\mu}(t) = E\hat{N}(t) = E\tilde{N}(\mu(t)) = \mu(t), \quad t \geq 0,$$

y como la distribución del proceso de Poisson $\hat{N}$ está determinada por su función de valor medio $\hat{\mu}$, tenemos que $N = \hat{N}$ en distribución. Esto implica, que desde un punto de vista probabilístico, los procesos N y $\hat{N}$ no son distinguibles.

Por otro lado, si suponemos que N tiene función de valor medio μ continua y creciente, entonces N tiene intensidad λ. En este caso, la inversa de μ, μ^{-1}, existe y tenemos que $\tilde{N}(t) = N(\mu^{-1}(t))$ es un proceso de Poisson homogéneo estándar en $[0, \infty)$ si $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$.

Concretamos estas relaciones en una proposición.

Proposición 3.4. *(El proceso de Poisson bajo un cambio de tiempo)*
Sea μ la función de valor medio de un proceso de Poisson N y $\hat{N}$ un proceso de Poisson homogéneo estándar. Entonces se cumple que:

1. *El proceso $(\tilde{N}(\mu(t)))_{t\geq 0}$ es de Poisson con función de valor medio μ.*
2. *Si μ es continua, creciente y $lim_{t\to\infty}\mu(t) = \infty$ entonces, $(N(\mu^{-1}(t)))_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson homogéneo estándar.*

El Proceso de Poisson Homegéneo como un proceso de renovación

En esta sección estudiaremos la secuencia de los tiempos de llegadas $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ de un proceso homogéneo de Poisson con intensidad $\lambda > 0$. El objetivo es encontrar una manera de determinar la secuencia de llegadas.

Veremos que cualquier proceso de Poisson homegéneo con intensidad $\lambda > 0$ tiene representación

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

donde

$$T_n = W_1 + \cdots + W_n, \quad n \geq 1, \tag{3.2}$$

y W_i es una secuencia de variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas con distribución Exponencial de parámetro $\lambda > 0$ ($\text{Exp}(\lambda)$). En lo que sigue, será conveniente escribir $T_0 = 0$. Como veremos en la sección 3.2. un proceso con esta representación para una secuencia W_i se dice que es un *proceso de renovación.*

Teorema 3.5. *(El proceso de Poisson homegéneo como un proceso de renovación)*

1. *El proceso N descrito por (3.1) y (3.2) con una secuencia (W_i) iid $\text{Exp}(\lambda)$ constituye un proceso de Poisson homegéneo con intensidad $\lambda > 0$.*
2. *Sea N un proceso de Poisson homegéneo con intensidad $\lambda > 0$ y tiempos de llegadas $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$. Entonces N tiene representación (3.1) y (T_i) tiene representación (3.2) para una secuencia (W_i) iid $\text{Exp}(\lambda)$.*

Demostración.

(1) Queremos probar que N constituye un proceso de Poisson homegéneo con intensidad $\lambda > 0$. Para ello debemos probar las propiedades de la definición (3.2).

Tenemos que la secuencia T_n tiene representación $T_n = W_1 + \cdots + W_n$, $n \geq 1$ y por conveniencia $T_0 = 0$. La propiedad $N(0) = 0$ se cumple ya que $W_1 > 0$.

Probamos ahora que $N(t)$ tiene distribución Poisson(λt). Observamos que

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}, \quad n \geq 0. \tag{3.3}$$

Como $T_n = W_1 + \cdots + W_n$ es la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Exp(λ), entonces T_n tiene una distribución gamma $\Gamma(n, \lambda)$ para $n \geq 1$ (también conocida como distribución Erlang):

$$P(T_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad t \geq 0.$$

Esta igualdad la obtenemos mediante inducción.

Por tanto,

$$P(N(t) = n) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Esto prueba la propiedad de Poisson de $N(t)$.

Finalmente, nos queda probar que los incrementos son independientes y estacionarios. Para ello, nos centramos en el caso de dos incrementos ya que el caso general es análogo. Sean $N(t) = N(0, t]$ y $N(t, t + h]$ para $t, h > 0$. Tenemos que ver que para cualquier $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t, t+h) &= P(N(t) = k, N(t, t+h] = l) \\ &= P(N(t) = k) P(N(t, t+h] = l) \\ &= P(N(t) = k) P(N(h) = l) \\ &= e^{-\lambda(t+h)} \frac{(\lambda t)^k (\lambda h)^l}{k! l!}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $q_{k,k+l}(t, t+h)$ representa la probabilidad conjunta de los incrementos disjuntos $N(t)$ y $N(t, t + h]$.

El caso $l = k = 0$ es trivial por lo que empezamos con el caso $l = 0$, $k \geq 1$. Observamos que tenemos que

$$\{N(t) = k, N(t, t+h] = l\} = \{N(t) = k, N(t+h) = k + l\}. \tag{3.5}$$

Entonces, por (3.3) y (3.5),

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t, t+h) &= P(T_k \leq t < T_{k+1}, T_{k+l} \leq t + h < T_{k+l+1}) \\ &= P(T_k \leq t < T_{k+1}, T_k \leq t + h < T_{k+1}) \\ &= P(T_k \leq t, t + h < T_k + W_{k+1}), \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde hemos aplicado que $T_{k+1} = W_1 + \ldots + W_k + W_{k+1} = T_k + W_{k+1}$ y que estamos en el caso donde $l = 0$.

Ahora utilizamos el hecho de que T_k tiene distribución gamma $\Gamma(k, \lambda)$ con densidad $\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}/(k-1)!$, W_{k+1} tiene distribución exponencial Exp(λ) con densidad $\lambda e^{-\lambda x}$

y que son independientes:

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t,t+h) &= \int_0^t e^{-\lambda z}\frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!}\int_{t+h-z}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dxdz \\ &= \int_0^t e^{-\lambda z}\frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda(t+h-z)}\,dz \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda(t+h)}\int_0^t z^{k-1}dz \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda(t+h)}\frac{t^k}{k} \\ &= e^{-\lambda(t+h)}\frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Para $l \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t,t+h) &= P(T_k \leq t < T_{k+1}, T_{k+l} \leq t+h < T_{k+l+1}) \\ &= E[\{\mathbb{1}_{T_k \leq t < T_{k+1} \leq t+h}\} \\ &\quad P(T_{k+l} - T_{k+1} \leq t+h-T_{k+1} < T_{k+l+1} - T_{k+1} \mid T_k, T_{k+1})]. \end{aligned}$$

Como T_{k+1} es independiente de $(T_{k+l} - T_{k+1}, T_{k+l+1} - T_{k+1})$ tenemos que

$$\begin{aligned} q_{k,k+l}(t,t+h) &= \int_0^t e^{-\lambda z}\frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!}\int_{t-z}^{t+h-z}\lambda e^{-\lambda x}P(N(t+h-z-x)=l-1)dxdz \\ &= \int_0^t e^{-\lambda z}\frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!}\int_{t-z}^{t+h-z}\lambda e^{-\lambda x}e^{-\lambda(t+h-z-x)}\frac{(\lambda(t+h-z-x))^{l-1}}{(l-1!)}dxdz \\ &= e^{-\lambda(t+h)}\int_0^t\frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!}dz\int_0^h\frac{\lambda(\lambda x)^{l-1}}{(l-1)!}dx \\ &= e^{-\lambda(t+h)}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\frac{(\lambda h)^l}{l!}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

(2) Consideramos un proceso de Poisson homegéneo con tiempos de llegadas $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ e intensidad $\lambda > 0$. Necesitamos probar que existen variables aleatorias W_i independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda)$ tales que $T_n = W_1 + \ldots + W_n$. Es decir, tenemos que ver que, para cualesquiera $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n, n \geq 1$:

$$\begin{aligned} &P(T_1 \leq x_1, \ldots, T_n \leq x_n) \\ &= P(W_1 \leq x_1, \ldots, W_1 + \ldots + W_n \leq x_n) \\ &= P(W_1 \leq x_1, W_2 \leq x_2 - W_1, \ldots, W_n \leq x_n - W_1 - \ldots - W_{n-1}) \\ &= \int_{w_1=0}^{x_1}\lambda e^{-\lambda w_1}\int_{w_2=0}^{x_2-w_1}\lambda e^{-\lambda w_2}\ldots\int_{w_n=0}^{x_n-w_1-\ldots-w_{n-1}}\lambda e^{-\lambda w_n}dw_n\ldots dw_1. \end{aligned}$$

□

3.2. El Proceso de Renovación

Propiedades básicas

Como se ha visto anteriormente, el proceso de Poisson homogéneo es un proceso de renovación particular. En esta sección estudiaremos este modelo, comenzando por su definición.

Definición 3.6. *Sea (W_i) una secuencia de variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas. Entonces se dice que*

$$T_0 = 0, \quad T_n = W_1 + \cdots + W_n, \quad n \geq 1,$$

es una secuencia de renovación y el proceso de conteo

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

es el correspondiente proceso de conteo de renovación.

También decimos que (T_n) y (W_n) son las secuencias de llegadas y de tiempo entre llegadas del proceso de renovación N, respectivamente.

A continuación, se presentará la Ley Fuerte de los Grandes Números para el proceso de renovación pero para su demostración será necesario el siguiente resultado.

Lema 3.7. *Sea (Z_n) una secuencia de variables aleatorias tal que $Z_n \xrightarrow{c.s.} Z$ cuando $n \to \infty$ para alguna variable aleatoria Z, y sea $(M(t))_{t\leq 0}$ un proceso estocástico de variables aleatorias de valores enteros tal que $M(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$ cuando $t \to \infty$. Si M y (Z_n) están definidos en el mismo espacio de probabilidad, entonces*

$$Z_{M(t)} \to Z \quad c.s. \quad cuando\ t \to \infty.$$

Demostración. Consideramos

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : M(t,\omega) \to \infty\} \quad y \quad \Omega_2 = \{\omega \in \Omega : Z_n(t,\omega) \to Z(\omega)\}.$$

Suponemos que $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = 1$, entonces $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$ por lo tanto

$$P(\{\omega : Z_{M(t,\omega)} \to Z(\omega)\}) \geq P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1.$$

Esto prueba el lema. □

Teorema 3.8. *(La Ley Fuerte de los Grandes Números para el proceso de renovación) Si el valor esperado $EW_1 = \lambda^{-1}$ de los tiempos entre llegadas W_i es finito, N cumple la ley fuerte de los grandes números:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda \quad c.s.$$

Demostración. Sabemos que en un proceso de renovación

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Entonces, las siguientes desigualdades se cumplen:

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}\frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

Por la ley fuerte de los grandes números para (W_n) tenemos que

$$n^{-1}T_n \xrightarrow{c.s.} \lambda^{-1}.$$

Evidentemente, $N(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. En efecto, aplicando el Lema 3.7. con $Z_n = T_n/n$ y $M = N$ obtenemos que

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\lambda}.$$

Combinando esto último y las desigualdades expuestas anteriormente, deducimos el enunciado del teorema. □

Por tanto, la ley fuerte de los grandes números para el proceso de renovación N nos dice que el valor esperado $EN(t)$ es aproximadamente del orden λt. Entonces, vemos que el límite inferior de $EN(t)/t$ viene dado por:

$$\lambda = E \lim_{t\to\infty} \text{ínf} \frac{N(t)}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \text{ínf} \frac{EN(t)}{t}.$$

Esta desigualdad la obtenemos aplicando el Teorema 3.8. y el lema de Fatou.

Enunciamos un lema que necesitaremos para demostrar un resultado que complementa este límite inferior con el correspondiente límite superior.

Lema 3.9. *(Identidad de Wald)*
Sea W_i una secuencia de variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas tal que $E(W_1) < \infty$ y $N = \{N(t) : t \geq 0\}$. Entonces $E(N) < \infty$ y

$$E(T_N) = E\left(\sum_{n=1}^{N} W_n\right) = E(N)E(W_1).$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{X}_n(N) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad N \geq n, \\ 0 & \text{si} \quad N < n. \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que $\sum_{n=1}^{N} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \mathcal{X}_n(N)$ y observamos que W_i y $\mathcal{X}_i(N)$ son independientes. Entonces,

$$\begin{aligned} E(T_N) &= E\left(\sum_{i=1}^{N} W_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(W_i)E(\mathcal{X}_i(N)) \\ &= E(W_1)\sum_{i=1}^{\infty} E(\mathcal{X}_i(N)) = E(W_1)\sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i) \\ &= E(W_1)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} P(N = j) = E(W_1)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} P(N = j) \\ &= E(W_1)\sum_{j=1}^{\infty} jP(N = j) = E(W_1)E(N). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.10. *(Teorema de Renovación Elemental)*
Si el valor esperado $EW_1 = \lambda^{-1}$ de los tiempos entre llegadas es finito, la siguiente relación se cumple:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t} = \lambda.$$

Demostración. Por lo que hemos visto anteriormente, solo nos queda demostrar que

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{EN(t)}{t} \leq \lambda.$$

Para ello, escribimos para cualquier $b > 0$,

$$W_i^{(b)} = \min(W_i, b), \quad T_i^{(b)} = W_1^{(b)} + \ldots + W_i^{(b)}, \quad i \geq 1.$$

Vemos que $(T_n^{(b)})$ es una secuencia de renovación y $T_n \geq T_n^{(b)}$ lo que implica que $N_b(t) \geq N(t)$ para el correspondiente proceso de renovación

$$N_b(t) = \#\{i \geq 1 : T_i^{(b)} \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{EN(t)}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \sup \frac{EN_b(t)}{t}.$$

Observamos que, por definición de N_b,

$$T_{N_b(t)}^{(b)} = W_1^{(b)} + \ldots + W_{N_b(t)}^{(b)} \leq t.$$

Entonces, por la identidad de Wald (Lema 3.9.), se cumple que

$$E(T_{N_b(t)+1}^{(b)}) = E(N_b(t) + 1) E W_1^{(b)}.$$

Esto es debido a que $\{N_{(b)}(t) = n\} = \{T_n^{(b)} \leq t < T_{n+1}^{(b)}\}$.

Por tanto, llegamos a que

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{EN(t)}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \sup \frac{E(T_{N_b(t)+1}^{(b)})}{t E W_1^{(b)}} \leq \lim_{t\to\infty} \sup \frac{t+b}{t E W_1^{(b)}} = (E W_1^{(b)})^{-1}.$$

Dado que por el teorema de convergencia monótona si $b \uparrow \infty$,

$$E W_1^{(b)} = E(\min(b, W_1)) \uparrow E W_1 = \lambda^{-1},$$

se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{EN(t)}{t} \leq \lambda,$$

que era lo que queríamos demostrar. □

Proposición 3.11. *(Comportamiento asintótico de la varianza del proceso de renovación)*
Suponemos que $\mathrm{var}(W_1) < \infty$. *Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{var}(N(t))}{t} = \frac{\mathrm{var}(W_1)}{(EW_1)^3}.$$

Demostración. La demostración de esta proposición la encontramos en el libro de A. Gut [2], Teorema 5.2. □

Teorema 3.12. *(El teorema del límite central para el proceso de renovación) Suponemos que* $\mathrm{var}(W_1) < \infty$*. Entonces se cumple*

$$\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\mathrm{var}(W_1)(EW_1)^{-3}\, t}} \sim \mathrm{N}(0,1)\,.$$

Demostración. Podemos ver la demostración de este teorema en el libro de Embrechts et al. [3], Teorema 2.5.13. □

Función y ecuación de renovación

Los procesos de renovación se utilizan para modelar la ocurrencia de eventos que suceden en instantes aleatorios, donde los tiempos entre llegadas son aproximadamente independientes e idénticamente distribuidos. En el contexto de los seguros no de vida, estos instantes se corresponden con el tiempo de llegada de las reclamaciones.

Uno de los objetos de mayor interés en la teoría de renovación es la *función de renovación*

$$m(t) = EN(t) + 1, \quad t \geq 0.$$

Esta función decribe el comportamiento promedio del proceso de conteo de renovación. En el caso de los seguros, se trata de número esperado de reclamaciones en una cartera.

También es una parte importante de la teoría de renovación la *ecuación de renovación*, que es de la forma

$$U(t) = u(t) + \int_0^t U(t-y)\, dF_{T_1}(y),$$

donde todas las funciones están definidas en $[0, \infty)$. La función U es desconocida, el objetivo principal es encontrarla, u es conocida y $F_{T_1}(y)$ es la función de distribución de T_1.

Observación 3.13. (La función de renovación cumple la ecuación de renovación) Observamos que para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} m(t) = EN(t) + 1 &= 1 + E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_n)\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n \leq t) \\ &= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(y + (T_n - T_1) \leq t) dF_{T_1}(y) \\ &= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} P(T_{n-1} \leq t - y) dF_{T_1}(y) \\ &= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) + \int_0^t m(t-y) dF_{T_1}(y). \end{aligned}$$

Para la cuarta igualdad hemos expresado T_n como $T_n = T_1 + (T_n - T_1)$.

Esto corresponde a la ecuación de renovación con $U(t) = m(t)$ y $u(t) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$.

El teorema de renovación elemental (Teorema 3.10.) es un resultado simple pero no muy preciso sobre el comportamiento medio de las renovaciones $m(t) = \lambda t$ cuando $t \to \infty$, siempre que $EW_1 = \lambda^{-1}$. Con el siguiente teorema, conseguimos información más precisa.

Antes de enunciar el teorema, necesitamos introducir una definición.

Definición 3.14. *Una variable aleatoria X se dice que es lattice si existen $a, d \geq 0$ tales que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X = a + nd) = 1.$$

Teorema 3.15. *(Teorema de Renovación de Blackwell)*

1. *Si u es no lattice, entonces para todo $h > 0$ tenemos que,*

$$\lim_{x \to \infty} (m(t + h) - m(t)) = \lambda h.$$

2. *Si u es lattice con paso máximo d, entonces se mantiene la misma relación límite, siempre que h sea múltiplo de d.*

Demostración. La demostración de este teorema la encontramos en el libro de W. Feller [4], capítulo XI. □

Por lo tanto, para un valor t suficientemente grande, el número esperado de renovaciones en el intervalo $(t, t + h]$ se vuelve independiente de t y es proporcional a la longitud del intervalo. Como m es una función no decreciente en $[0, \infty)$ define una medida m en los conjuntos de Borel de $[0, \infty)$, a la que llamaremos *medida de renovación.*

4. El Volumen Total de las Reclamaciones

En esta sección nos centraremos en estudiar el *proceso de volumen total de las reclamaciones* S, que introducimos en la primera sección:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbb{1}_{[0,t]}(T_i), \quad t \geq 0,$$

donde el *proceso de número de reclamaciones* N es independiente de la secuencia independiente e idénticamente distribuida del *tamaño de la reclamación* (X_i). Asumiremos también que $X_i > 0$ c.s. Dependiendo de la elección del proceso N, tendremos diferentes modelos para el proceso S.

4.1. El Orden de Magnitud del Volumen Total de las Reclamaciones

Dado un modelo particular de S, para las compañías de seguros es importante poder determinar el orden de magnitud de $S(t)$. Esta información es necesaria para poder determinar una *prima* que cubra las *pérdidas* representadas por $S(t)$.

Lo más conveniente sería conocer la distribución de $S(t)$. En general, esto es complicado y, a menudo, se recurre a métodos numéricos o de simulación para aproximar la distribución. En esta sección consideraremos algunos métodos simples que permiten hacerse una idea del tamaño del volumen total de las reclamaciones.

Valor esperado y Varianza

El valor esperado (esperanza) de una variable aleatoria nos proporciona información acerca de su tamaño medio. Para el volumen total de las reclamaciones es fácil de calcular, teniendo en cuenta la independencia de las variables aleatorias X_i y el proceso N, y siempre que $EN(t)$ y EX_1 sean finitas:

$$\begin{aligned} ES(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E[S(t) \mid N(t) = n] P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid N(t) = n] P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nE(X_1) P(N(t) = n) \\ &= E(X_1) E(N(t)). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1. (Valor esperado de $S(t)$ en el modelo de Cramér-Lundberg y modelo de renovación)
En el modelo de Cramér-Lundberg, tenemos que $EN(t) = \lambda t$, donde λ es la intensidad del proceso de Poisson homogéneo N. Entonces,

$$ES(t) = \lambda t EX_1.$$

Por otro lado, para el modelo de renovación dado $EW_1 = \lambda^{-1} < \infty$ sabemos por el teorema de Renovación Elemental que $EN(t)/t \to \lambda$ c.s. cuando $t \to \infty$. En este caso,

$$\frac{ES(t)}{\lambda t EX_1} \to 1, \quad t \to \infty.$$

Esta fórmula es menos precisa, pero nos dice que el volumen total de las reclamaciones crece aproximadamente de manera lineal para t suficientemente grandes.

El valor esperado no nos proporciona mucha información sobre la distribución de $S(t)$. Para poder obtener más datos sobre el orden de magnitud de $S(t)$, debemos combinar la información sobre el valor esperado, $ES(t)$, con la varianza, $\text{var}(S(t))$.

Suponemos que $\text{var}(X_1)$ es finita. Condicionado por $N(t)$ y teniendo en cuenta la independencia de $N(t)$ y (X_i), obtenemos que

$$\begin{aligned}\text{var}(S(t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{var}[S(t) \mid N(t) = n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \text{var}[X_i \mid N(t) = n] \\ &= N(t)\text{var}(X_1).\end{aligned}$$

También sabemos que $ES(t) = EN(t)EX_1$.

Podemos concluir entonces que

$$\begin{aligned}\text{var}(S(t)) &= E[N(t)\text{var}(X_1)] + \text{var}(N(t)EX_1) \\ &= EN(t)\text{var}(X_1) + \text{var}(N(t))(EX_1)^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. (Varianza de $S(t)$ en el modelo de Cramér-Lundberg y modelo de renovación)
En el modelo de Cramér-Lundberg, por la distribución de Poisson de $N(t)$ tenemos que $EN(t) = \text{var}(N(t)) = \lambda t$. Entonces,

$$\text{var}(S(t)) = \lambda t[\text{var}(X_1) + (EX_1)^2] = \lambda t E(X_1^2).$$

En el modelo de renovación, sabemos que $EN(t)/t \to \lambda$ c.s. cuando $t \to \infty$ y que $\text{var}(N(t))/t \to \text{var}(W_1)/(EW_1)^3$ cuando $t \to \infty$, por tanto

$$\frac{\text{var}(S(t))}{\lambda t[\text{var}(X_1) + \text{var}(W_1)\lambda^2 t(EX_1)^2} \to 1.$$

Resuminos en la siguiente proposición lo dicho en este apartado.

Proposición 4.3. *(Valor esperado y varianza del coste total de reclamaciones)*

- *En el modelo de renovación, si $EW_1 = \lambda^{-1}$ y EX_1 son finitas,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{ES(t)}{t} = \lambda EX_1,$$

  y si $\text{var}(W_1)$ y $\text{var}(X_1)$ son finitas,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\text{var}S(t)}{t} = \lambda[\text{var}(X_1) + \text{var}(W_1)\lambda^2 t(EX_1)^2].$$

- *En el modelo de Cramér-Lundberg, tenemos que*

$$ES(t) = \lambda t EX_1 \quad y \quad \text{var}(S(t)) = \lambda t E(X_1^2).$$

Podemos concluir que, en el modelo de renovación, tanto el valor esperado como la varianza del volumen total de las reclamaciones crecen de manera aproximadamente lineal en función de t. Esta información la utilizamos para dar una regla general de la prima que se debe cobrar para cubrir las pérdidas $S(t)$.

El Comportamiento Asintótico en el Modelo de Renovación

En esta sección, estudiaremos el comportamiento asintótico del proceso de volumen total de las reclamaciones. A lo largo de esta, suponemos el modelo de renovación para $S(t)$. De esta manera, tenemos que $S(t)$ cumple la ley fuerte de los grandes números y el teorema del límite central:

Teorema 4.4. *(La ley fuerte de los grandes números y el teorema del límite central para el modelo de renovación)*
Suponemos el modelo de renovación para S.

1. *Si el tiempo entre llegadas W_i y el tamaño de la reclamación X_i tienen valores esperados finitos $(EW_i, EX_i < \infty)$ y son variables positivas, entonces S cumple la ley fuerte de los grandes números:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \lambda EX_1 \quad c.s.$$

2. *Si el tiempo entre llegadas W_i y el tamaño de la reclamación X_i tienen varianzas finitas $(\mathrm{var}(W_i), \mathrm{var}(X_i) < \infty)$, entonces S cumple le teorema del límite central:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S(t) - ES(t)}{\sqrt{\mathrm{var}(S(t))}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \to 0,$$

donde Φ es la función de distribución de la distribución normal $N(0,1)$.

Demostración.

1. Tenemos que

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{S(t)}{N(t)} \frac{N(t)}{t}. \tag{4.1}$$

Escribimos

$$\Omega_1 = \{\omega : N(t)/t \to \lambda\} \quad y \quad \Omega_2 = \{\omega : S(t)/N(t) \to EX_1\}.$$

Por la igualdad (4.1), si demostramos que $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$, tendremos lo que queremos.

Por la ley fuerte de los grandes números (Teorema 3.8) sabemos que $P(\Omega_1) = 1$. Además, dado que $N(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$, aplicando el Lema 3.7, obtenemos que $P(\Omega_2) = 1$. Por tanto, $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$, lo que prueba el teorema.

2. Esta demostración la encontramos en Emberchts et al. [3], Teorema 2.5.16.

□

Gracias a la ley fuerte de los grandes números observamos que las reclamaciones, ya sean grandes o pequeñas, promediadas a lo largo del tiempo convergen a su valor esperado.

Principios Clásicos de Cálculo de Primas

Para las compañías de seguros, ser capaz de elegir una prima que cubra las pérdidas, descritas por el proceso del volumen total de reclamaciones, S a lo largo del tiempo es una de las cuestiones básicas.

Cierto tipo de aproximación para $S(t)$ viene dada por su valor esperado. Por tanto, para el modelo de renovación, se puede esperar que una compañías de seguros pierda en promedio si $p(t) < ES(t)$ y gane si $p(t) > ES(t)$ para t suficientemente grandes. En consecuencia, tiene sentido elegir una prima añadiendo al valor esperado del volumen total de las reclamaciones un número positivo ρ. Llamaremos a ρ recargo de seguridad.

Por los resultado obtenidos en las secciones anteriores, es evidente que las compañías de seguros estarán más seguras cuanto mayor sea ρ. Sin embargo, un valor demasiado grande de ρ haría a una compañía menos competitiva. Para garantizar el equilibrio entre los ingresos por primas y el volumen total de las reclamaciones, se necesita tener gran cantidad de pólizas por la ley fuerte de los grandes números.

A continuación, se exponen brevemente algunos criterios para el cálculo de la prima.

- *Principio neto, de equivalencia o de prima pura.* Este principio determina la prima $p(t)$ en t como el valor esperado del volumen total de las reclamaciones $S(t)$:

$$p_{Net} = ES(t).$$

  En cierto sentido, esta sería la prima "justa"de mercado donde la compañía ni gana ni pierde, pero veremos más adelante como calcular la prima con este principio puede llegar a la compañía a la ruina.

- *Principio del valor esperado.*

$$p_{VE}(t) = (1+\rho)ES(t),$$

  para un recargo de seguridad ρ positivo.

- *Principio de varianza.*

$$p_{Var}(t) = ES(t) + \alpha \text{var}(S(t)), \quad \alpha > 0.$$

- *Principio de desviación típica.*

$$p_{DT}(t) = ES(t) + \alpha\sqrt{\text{var}(S(t))}, \quad \alpha > 0.$$

4.2. Distribución del Tamaño de las Reclamaciones

El objetivo de esta sección es estudiar la bondad de ajuste de los datos del tamaño de reclamaciones a la distribución escogida. Para ello, introduciremos algunas clases de distribución empleadas en las matemáticas de seguros que se ajusten satisfactoriamente a los datos.

Gráficos QQ

Un gráfico QQ es un método que permite la comparación entre funciones de distribución. En el caso, se aplican a datos simulados y reales del tamaño de reclamaciones para poder detectar qué distribuciones se ajustan razonablemente a los datos de la vida real.

Los cuantiles se corresponden a la inversa de la función de dsitribución.

Definición 4.5. *(Función cuantil)*
La inversa generalizada de una función de distribución F, es decir,

$$F^{\leftarrow}(t) = \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1,$$

es llamada función cuantil de la función de distribución F. Además, $x_t = F^{\leftarrow}(t)$ define el t-cuantil de F.

Si F es monótona creciente, observamos que $F^{\leftarrow} = F^{-1}$ en la imagen de F.

Podemos definir ahora la *función empírica de distribución* F_n de una muestra $X_1, \ldots, X_n$ como

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vemos que F_n tiene las propiedades de una función de distribución:

- $\lim_{x \to -\infty} F_n(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F_n(x) = 1$.
- F_n es no decreciente: $F_n(x) \leq F_n(y)$ para $x \leq y$.
- F_n es continua por la derecha: $\lim_{x \to a^+} = F_n(a^+)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Como la función empírica de distribución de una muestra es en sí misma una función de distribución, podemos calcular su función cuantil $F_n^{\leftarrow}$.

Si $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ es una muestra ordenada de $X_1, \ldots, X_n$ variables iid, vemos que

$$F_n(X_{(k)}) = k/n, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Definición 4.6. *Definimos la función cuantil empírica de F_n como*

$$F_n^{\leftarrow}(t) = \begin{cases} X_{(k)} & si \quad t \in ((k-1/n), k/n], \quad k = 1, \ldots, n-1, \\ X_{(n)} & si \quad t \in ((n-1)/n, 1). \end{cases}$$

El lema de *Glivenko-Cantelli* nos dice que si $X_1, X_2, \ldots$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e indénticamente distribuidas con función de distribución F, entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mid F_n(x) - F(x) \mid \xrightarrow{c.s.} 0.$$

En nuestro caso, tenemos que $F_n^{\leftarrow}(t) \xrightarrow{c.s.} F^{\leftarrow}(t)$ cuando $n \to \infty$. Esta es la idea básica de los gráficos QQ: si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra con función de distribución conocida F, se espera que $F_n^{\leftarrow}(t)$ este cerca de $F^{\leftarrow}(t)$ para todo $t \in (0, 1)$ si n es suficientemente grande. De este modo, si graficamos $F_n^{\leftarrow}(t)$ contra $F^{\leftarrow}(t)$ para $t \in (0, 1)$, deberíamos observar aproximadamente una línea recta.

Cola de la distribución del tamaño de reclamaciones

En esta sección introducimos los conceptos de cola ligera y cola pesada.

Una forma común de caracterizar el grosor de las colas es tomar como punto de referencia la distribución exponencial.

Definición 4.7. *Decimos que una función de distribución F tiene una cola ligera si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty, \quad \textit{para algún} \quad \lambda > 0,$$

donde $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

Ejemplo 4.8. Por la definición anterior, podemos afirmar que la distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda)$ es una distribución de cola ligera para cada $\lambda > 0$.

Tenemos que

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - (-e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x},$$

entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 < \infty,$$

que es lo que queríamos ver.

Definición 4.9. *Decimos que una función de distribución F tiene una cola pesada si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty, \quad \textit{para todo} \quad \lambda > 0,$$

donde $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

Por tanto, los tamaño de reclamaciones con distribuciones de colas ligeras son mucho menos peligrosos que las distribuciones con colas pesadas.

Ejemplos 4.10. (Distribuciones con colas pesadas)

1. La distribución de Pareto con parámetro de cola $\alpha > 0$ y escalar $\kappa > 0$ dado por

$$\overline{F}(x) = \frac{\kappa^\alpha}{(\kappa + x)^\alpha}, \quad x > 0.$$

Tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\kappa^\alpha}{(\kappa + x)^\alpha}\, e^{\lambda x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\kappa^\alpha}{x^\alpha} e^{\lambda x} = \lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} = \infty.$$

En la segunda igualdad, hemos utilizado que $\kappa^\alpha/(\kappa + x)^\alpha$ se comporta como κ^α/x^α cuando $x \to \infty$, y en la cuarta, que la tasa de decrecimiento de κ^α/x^α no es suficientemente rápida como para competir con el crecimiento exponencial de $e^{\lambda x}$ si $x \to \infty$.

2. La distribución de Weibull con parámetro $\tau < 1$ y escalar $c > 0$ dada por

$$\overline{F}(x) = e^{-cx^\tau}, \quad x > 0.$$

En este caso,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-cx^\tau}}{e^{-\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-cx^\tau+\lambda x}.$$

Observamos ahora que si $\tau < 1$, que el término dominante de $-cx^\tau + \lambda x$ es λx, por lo que

$$\lim_{x\to\infty} e^{-cx^\tau+\lambda x} = \lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} = \infty.$$

Observación 4.11. Para $\tau \geq 1$, la distribución de Weibull es una distribución de cola ligera ya que el término dominante de $-cx^\tau + \lambda x$ sería $-cx\tau$, por lo que

$$\lim_{x\to\infty} e^{-cx^\tau+\lambda x} = \lim_{x\to\infty} e^{cx^\tau} = \frac{1}{e^\infty} = 0 < \infty.$$

Función de exceso medio

Una herramienta para comparar el grosor de las colas de una distribución en $[0, \infty)$ es la *función de exceso medio.*

Definición 4.12. *(Función de exceso medio)*
Sea Y una variable aleatoria positiva con valor esperado finito, distribución F y $x_l = \text{ínf}\{x : F(x) > 0\}$ y $x_r = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Entonces su función de exceso medio o función de vida residual media viene dada por

$$e_F(u) = E(Y - u \mid Y > u), \quad u \in (x_l, x_r).$$

En el contexto de seguros, $e_{F(u)}$ es conocida como función de exceso de pérdidas media, es decir, representa el déficit esperado de una compañía de seguros.

Si suponemos que F es continua y que $F(x) > 0$ para todo $x > 0$, la función de exceso medio de una función de distribución F puede escribirse de la forma:

$$e_F(u) = \frac{1}{\overline{F}(u)} \int_u^\infty \overline{F}(y)dy, \quad u \in [0, x_r),$$

donde hemos utilizado la definición de esperanza condicionada.

Bajo estas condiciones, tenemos que la cola $\overline{F}$ de una distribución positiva F y su función de exceso medio e_F son en cierto sentido equivalentes.

Ejemplo 4.13. (Distribución exponencial)
Si Y es una variable con distribución exponencial $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ para cierta $\lambda > 0$, entonces

$$e_F(u) = \frac{1}{e^{-\lambda u}} \int_u^\infty e^{-\lambda u} dy = \frac{1}{e^{-\lambda u}} \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda} = \lambda^{-1}.$$

Esta propiedad hace de la distribución exponencial un caso único y nos ofrece otra manera de caracterizar grosor de las colas:

- Decimos que F tiene una cola ligera si para $u \to \infty$ tenemos que $e_F(u) \to C$ para cierta constante C.

  Por ejemplo, para F con distribución exponencial : $e_F(u) \to \lambda^{-1}$ si $u \to \infty$.

- Decimos que F tiene una cola pesada si para $u \to \infty$ tenemos que $e_F(u) \to \infty$.

Ejemplo 4.14. (Distribución Pareto)
Si Y es una variable con distribución Pareto con parámetro de cola $\alpha > 0$ y escalar $\kappa > 0$, entonces

$$e_F(u) = \frac{(k+u)^\alpha}{k^\alpha} \int_u^\infty \frac{k^\alpha}{(k+y)^\alpha} dy = (k+u)^\alpha \frac{(k+u)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{k+u}{1-\alpha} \to \infty \quad \text{si} \quad u \to \infty.$$

Tamaños de reclamaciones que varían regularmente y sus agregados

Definición 4.15. *Decimos que una función es de variación lenta en ∞ si cumple:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(cx)}{L(x)} = 1, \quad \forall c > 0, \tag{4.2}$$

donde $L(x)$ es una función Lebesgue positiva y medible en $(0, \infty)$.

Por defición de función de variación lenta, las distribuciones con colas pesadas se pueden escribir como:

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}, \quad x > 0,$$

para alguna constante $\alpha > 0$.

Ejemplo 4.16. Son funciones de variación lenta las funciones constantes, logaritmos, potencias de logaritmos o logaritmos iterados.

Toda función de variación lenta se puede representar como

$$L(x) = c_0(x) \exp\left\{ \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\}, \quad x \geq x_0 > 0, \tag{4.3}$$

donde $\varepsilon(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $c_0(t)$ es un función positiva tal que $c_0(t) \to c_0$ para alguna constante positiva c_0.

Definición 4.17. *Sea L una función de variación lenta, entonces:*

1. *Para cualquier $\delta > 0$, la función*

$$f(x) = x^\delta L(x), \quad x > 0,$$

se dice que tiene variación regular con índice δ.

2. *Una variable aleatoria X y su función de distribución se dice que tienen variación regular con índice $\alpha \geq 0$, si la cola de la distribución se representa como*

$$P(X > x) = L(x) x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Una manera alternativa de definir una función de variación regular con índice $\delta > 0$ es requerir que cumpla

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{f(cx)}{f(x)} = c^\delta, \quad \forall c > 0.$$

Distribución Subexponencial

Sabemos que las variables aleatorias idd $X_1, X_2, \ldots$ que varían regularmente con índice $\alpha > 0$, la cola de la suma $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ está determinada por la cola del máximo $M_n = \text{máx}_{i=1,\ldots,n} X_i$.

Definición 4.18. *(Distribución subexponencial)*
Decimos que la variable aleatoria positiva X y su distribución son subexponenciales si para la secuencia (X_i) de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la misma distribución X se cumple que:

$$\textit{Para todo} \quad n \geq 2 : \lim_{x\to\infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = 1. \tag{4.4}$$

Denotamos por $\mathcal{S}$ la clase de las distribuciones subexponenciales.

A continuación, veremos algunas propiedades de la distribución subexponencial.

Lema 4.19. *(Propiedades básicas de la distribución subexponencial)*

1. *Si $F \in \mathcal{S}$, entonces para cualquier $y > 0$ se tiene,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1. \tag{4.5}$$

2. *Si se cumple (4.3) para cada $y > 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene,*

$$e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) \to \infty, \quad x \to \infty.$$

Demostración. Demostramos las tres propiedades:

1. Sea $G(x) = P(X_1 + X_2 \leq x)$ la función de distribución de $X_1 + X_2$ absolutamente continua. Para $x \geq y > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \\ &\geq 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)).\end{aligned}$$

   De este modo, si x es suficientemente grande como para que $F(x) - F(y) \neq 0$,

$$1 \leq \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \left(\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y)\right)(F(x) - F(y))^{-1} \to 1, \quad \text{cuando} \quad x \to \infty.$$

   Por tanto, hemos probado que $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1$.

2. Por el apartado anterior, observamos que la función $\overline{F}(\log(y))$ varía lentamente. Entonces,

$$y^{\varepsilon}\overline{F}(\log(y)) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty.$$

   Si, sustituimos $y = e^x$ obtenemos que $e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, que era lo que queríamos probar.

□

4.3. Distribución del Volumen Total de las Reclamaciones

En esta sección, pondremos el foco en estudiar la distribución del volumen total de las reclamaciones $S(t)$.

Método numérico para calcular la distribución del volumen total de las reclamaciones: Recursión de Panjer

La recursión de Panjer es una técnica numérica exacta que se ha vuelto popular en las matemáticas de seguros. Consideramos $S(t)$ para un t fijo, eliminando la dependencia de $S(t)$ y $N(t)$ respecto de t. Escribimos entonces

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

para una variable aleatoria de valor entero N, independiente de la secuencia iid del tamaño de la reclamación (X_i). Escribimos también

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad n \geq 1,$$

para el proceso de suma parcial generado por los tamaños de reclamaciones X_i.

La función de distribución de S viene dada por

$$P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leq x) P(N = n).$$

La recursión de Panjer permite obtener la distribución exacta del volumen total de reclamaciones S.

Empezamos dando los supuesto bajo los cuales el método funciona.

(1) Los tamaños de las reclamaciones X_i toman valores en $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(2) El número de reclamaciones N tiene distribución del tipo

$$q_n = P(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) q_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

para $a, b \in \mathbb{R}$.

Esta segunda condición es conocida como condición (a,b). Las siguientes tres distribuciones son las únicas distribuciones estándar del número de reclamaciones que la cumplen:

(a) Distribución de Poisson: Poisson(λ) con $a = 0, b = \lambda \geq 0$. En este caso se obtiene la región

$$R_{Poisson} = \{(a, b) : a = 0, b \geq 0\}.$$

(b) Distribución Binomial: Bin(n, p) con $a = -p/(1-p) < 0, b = -a(n+1), n \geq 0$. Obteniendo la región

$$R_{Bin} = \{(a, b) : a < 0, b = -a(n+1), n \geq 0\}.$$

(c) Distribución Binomial Negativa con parámetros (p, v): con $0 < a = 1 - p < 1, b = (1-p)(v-1)$ y $a + b > 0$. En este caso se obtiene la región

$$R_{BinNeg} = \{(a, b) : 0 < a < 1, a + b > 0\}.$$

Formulamos ahora el esquema de la recursión de Panjer.

Proposición 4.20. *(Esquema de recursión de Panjer)*
Suponemos las condiciones (1) y (2) sobre las distribuciones de X_i y N. Entonces, las probabilidades $p_n = P(S = n)$ se pueden calcular recursivamente de la siguiente manera:

$$p_0 = \begin{cases} q_0 & si \quad P(X_1 = 0) = 0, \\ E([P(X_1 = 0)]^N) & en\ caso\ contrario. \end{cases}$$

$$p_n = \frac{1}{1 - aP(X_1 = 0)} \sum_{i=1}^{n} \left(a + \frac{bi}{n}\right) P(X_1 = i) p_{n-i}, \quad n \geq 1.$$

Como el parámetro a es necesariamente menor que 1, p_n está bien definido $\forall n \geq 1$.

Demostración. Empezamos con

$$p_0 = P(S = 0) = P(N = 0) + P(S = 0, N > 0).$$

La última igualdad vemos que es igual a q_0 si $P(X_1 = 0) = 0$. Si no,

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} P(X_1 = 0, \ldots, X_i = 0) P(N = i) \\ &= q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [P(X_1 = 0)]^i P(N = i) \\ &= E[P(X_1 = 0)]^N. \end{aligned}$$

Vemos ahora el caso $p_n, n \geq 1$. Aplicando la condición (a,b) tenemos que

$$p_n = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i = n) q_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i = n) \left(a + \frac{b}{i}\right) q_{i-1}. \tag{4.6}$$

Teniendo en cuenta que

$$E\left(a + \frac{bX_1}{n} \middle| S_i = n\right) = E\left(a + \frac{bX_1}{X_1 + \ldots + X_i} \middle| S_i = n\right) = a + \frac{b}{i} \tag{4.7}$$

ya que X_i son idd.

Vemos también que

$$\begin{aligned} E\left(a + \frac{bX_1}{n} \middle| S_i = n\right) &= \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) P(X_1 = k \mid S_i = n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \frac{P(X_1 = k, S_i - X_1 = n - k)}{P(S_i = n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{bk}{n}\right) \frac{P(X_1 = k) P(S_{i-1} = n - k)}{P(S_i = n)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Sustituimos (4.7) y (4.8) en (4.6), e intercambiando el orden de la suma:

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)P(S_{i-1}=n-k)q_{i-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)\left[\sum_{i=1}^{\infty}P(S_{i-1}=n-k)q_{i-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)P(S=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)p_{n-k}. \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos finalmente que

$$p_n = aP(X_1=0)p_n + \sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)p_{n-k},$$

es decir,

$$p_n = \frac{1}{1-aP(X_1=0)}\sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{bi}{n}\right)P(X_1=i)p_{n-i}, \quad n\geq 1.$$

Con esto concluimos la demostración del esqueleto de la recursión de Panjer. □

4.4. Reaseguros

En esta sección introduciremos algunas técnicas de reaseguranza. Suponemos el modelo de Cramér-Lundberg con tamaños de reclamaciones independientes e idénticamente distribuidas X_i e intensidad de Poisson $\lambda > 0$.

Las técnicas de reaseguros son acuerdos entre diferentes compañías de seguros con el objetivo de reducir el riesgo de una cartera de seguros concreta, compartiendo tanto el riesgo derivado de un contrato de seguros como la prima de la cartera. En cierto sentido, el reaseguro es un seguro para las compañías de seguros. La reaseguranza es una necesidad en las carteras que estás sujetas a riesgos catastróficos como terremotos, fallos de centrales nucleares o guerras.

Exponemos ahora algunas de las técnicas más comunes de reaseguranza.

1. *Reaseguranza proporcional.* Una fracción $p \in (0,1)$ de cada reclamación es cubierta por la compañía reaseguradora. Por tanto, el reasegurador paga $R_{Prop} = pS(t)$, independientemente del tamaño de las reclamaciones. Este tipo es común para tamaños de reclamaciones no muy grandes.

2. *Reaseguranza de exceso de siniestralidad.* El reasegurador cubre las pérdidas de una cartera que superen un límite establecido K. Esto significa que el reasegurador cubre $R_{ExS} = (S(t)-K)_+$, donde $x_+ = \max(x,0)$. Es utilizado para proteger a una compañía contra la insolvencia debido a una siniestralidad superior al volumen de primas.

3. *Reaseguranza de exceso de pérdida.* La compañía reaseguradora interviene únicamente si se supera una determinada cuantía económica, pactada previamente, en

un siniestro. Es decir, paga todas las pérdidas que excedan un cierto límte D, por lo tanto, cubre $R_{ExP}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)}(X_i - D)_+$.

En estos tres tipos de reaseguros, se cubre una parte del volumen total de las reclamaciones $S(t)$. En cambio, en los dos tipos que se expondrán ahora, se cubren las reclamaciones con mayor volumen de una cartera.

Consideramos los tamaños de reclamaciones $X_1, \ldots, X_n$ que han ocurrido hasta el momento t y la correspondiente muestra ordenada

$$X_{(1)}, \ldots, X_{(N(t))}.$$

4 *Reaseguranza de las reclamaciones más grandes.* En el momento en el que se suscribe el contrato ($t = 0$), la compañía reaseguradora garantiza que cubrirá las k reclamaciones más grande ocurridas en $[0, t]$. Por ejemplo, cubrirá las mayores 10 reclamaciones anuales durante un periodo de 5 años. Por tanto, cubre

$$R_{LC}(t) = \sum_{i=1}^{k} X_{(N(t)-i+1)}.$$

4 *Reaseguranza ECOMOR: excedente del coste medio relativo.* Se considera un reaseguro de exceso de pérdida, donde el límite D está determinado por la k-ésima reclamación más grande. Es decir, la compañía reaseguradora cubre

$$\begin{aligned} R_{ECOMOR}(t) &= \sum_{i=1}^{N(t)} (X_{(N(t)-i+1)} - X_{(N(t)-k+1)})_+ \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (X_{(N(t)-i+1)} - (k-1)X_{(N(t)-k+1)}), \end{aligned}$$

para $k \geq 2$ fijado.

5. Teoría de la Ruina

5.1. Proceso de Ruina, Probabilidad de Ruina y Condición de Beneficio Neto

A lo largo de esta sección, consideramos el proceso de volumen total de las reclamaciones

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0,$$

en el modelo de renovación.

Suponemos un *ingreso por primas* $p(t)$ continuo en una cartera homogénea. También, suponemos que p es una función determinista y lineal

$$p(t) = ct, \quad c > 0.$$

Llamamos a la constante c *tasa de ingreso por primas.*

Definición 5.1. *Se define el proceso de riesgo de la cartera* $U(t)$ *como*

$$U(t) = u + p(t) - S(t), \quad t \geq 0,$$

donde el valor constante $U(0) = u > 0$ *es el capital inicial, que suponemos que toma un valor grande.*

La cantidad $U(t)$ es el saldo de capital de la compañía aseguradora en un momento dado t, y el proceso $U = (U(t))_{t\geq 0}$ describe el flujo de caja de la compañía. La función $p(t)$ decribe la entrada de capital en el momento t y $S(t)$ la salida de capital debido al pago de las reclamaciones ocurridas en $[0, t]$.

Por tanto, si $U(t)$ es positivo, la compañía ha ganado capital. En cambio, si $U(t)$ es negativo, ha perdido capital.

Definición 5.2. *(Ruina, tiempo de ruina, probabilidad de ruina)*
Se conoce como ruina al evento que provoca que U *tome valores menores que 0:*

$$\textit{Ruina} = \{U(t) < 0, \quad \textit{para algún} \quad t > 0\}.$$

El tiempo T *cuando el proceso toma un valor menor que 0 por primera vez se conoce como tiempo de ruina:*

$$T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}.$$

La probabilidad de ruina se define como:

$$\psi(u) = P(\text{Ruina} \mid U(0) = u) = P(T < \infty \mid U(0) = u), \quad u > 0.$$

Para estas definiciones hemos utilizado la siguiente igualdad,

$$\text{Ruina} = \{\inf_{t\geq 0} U(t) < 0\} = \{T < \infty\}.$$

A continuación, introducimos una definición que permite expresar la ruina en función de los tiempos entre llegadas W_n, el tamaño de las reclamaciones X_n y la tasa de ingreso por primas c.

Definición 5.3. *(Esqueleto de un proceso)*
Por construcción del proceso de riesgo $U(t)$, la ruina solo puede ocurrir en tiempos $t = T_n$ para algún $n \geq 1$, ya que U aumenta en los intervalos $[T_n, T_{n+1})$. La secuencia $(U(T_n))$ se conoce como esqueleto del proceso de riesgo U.

Entonces, tenemos que

$$\text{Ruina} = \left\{ \inf_{t>0} U(t) < 0 \right\} = \left\{ \inf_{n\geq 1} U(T_n) < 0 \right\} = \left\{ \inf_{n\geq 1} [u + p(T_n) - S(T_n)] < 0 \right\}$$

$$= \left\{ \inf_{n\geq 1} \left[u + cT_n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right] < 0 \right\}.$$

Para el último paso hemos usado que,

$$N(T_n) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq T_n\} = n \quad c.s.$$

ya que suponemos que $W_j > 0$ c.s. para todo $j \geq 1$. Así pues, si definimos

$$Z_n = X_n - cW_n, \quad S_n = Z_1 + \ldots + Z_n, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0,$$

se obtiene la siguiente expresión alternativa para la probabilidad de ruina $\psi(u)$ con capital inicial u,

$$\psi(u) = P\left(\inf_{n\geq 1} (-S_n) < -u \right) = P\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u \right).$$

La probabilidad de ruina $\psi(u)$ es una medida del comportamiento global de una cartera de seguros a lo largo del tiempo. El objetivo principal es evitar la ruina con probabilidad 1. Es decir, la probabilidad de que S_n supere el valor de u debería ser tan pequeña que permitiera excluir la ruina de cualquier consideración práctica si el capital inicial u es lo suficientemente grande.

Con todo lo expuesto hasta ahora en esta sección, queremos poder concluir con algunas propiedades elementales de la probabilidad de ruina. Para ello, utilizaremos resultados asintóticos de S_n.

Suponemos que EW_1 y EX_1 son finitas, y sabemos que $EZ_1 = EX_1 - cEW_1$ está bien definida y es finita. Entonces, S_n cumple la ley fuerte de los grandes números:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} EZ_1 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

que implica que $S_n \xrightarrow{c.s.} \pm\infty$ dependiendo de si EZ_1 es positivo o negativo. Por lo tanto, si $EZ_1 > 0$, la ruina es inevitable independientemente de cual sea el capital inicial u.

Definición 5.4. *(Condición de Beneficio Neto)*
Se dice que un modelo de renovación cumple la condición de beneficio neto (NPC) si

$$EZ_1 = EX_1 - cEW_1 < 0.$$

Esta condición nos dice que, en promedio, se pretende que el flujo de caja de una cartera de seguros sea positivo: tener más ingresos por primas que pagos de reclamaciones ($cEW_1 > EX_1$).

A partir de esta definición tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.5. *(Ruina con probabilidad 1)*
Si EW_1 y EX_1 son finitas y la condición

$$EZ_1 = EX_1 - cEW_1 \geq 0,$$

se cumple entonces, para cada $u > 0$, la ruina ocurre con probabilidad 1.

Se puede decir entonces que cualquier compañía de seguros deberá elegir la prima $p(t) = ct$ de tal manera que $EZ_1 < 0$, evitando así que la ruina ocurra con probabilidad 1.

Ejemplo 5.6. (NPC y principios de cálculo de primas)
La relación entre el NPC y los principios de cálculo de primas es directo. Para simplificar, suponemos el modelo de Cramér-Lundberg. Sabemos que

$$ES(t) = EN(t)EX_1 = \lambda t EX_1 = \frac{EX_1}{EW_1}t.$$

Si elegimos la prima como $p(t) = ct$ con $c = EX_1/EW_1$, estamos en el principio neto. En este caso, $EZ_1 = 0$, es decir, la ruina es inevitable con probabilidad 1.

Si aplicamos el principio del valor esperado con un recargo de seguridad ρ positivo,

$$p(t) = (1+\rho)ES(t) = (1+\rho)\frac{EX_1}{EW_1}t.$$

En este caso, la tasa de ingreso por primas es

$$c = (1+\rho)\frac{EX_1}{EW_1},$$

por tanto, $EZ_1 < 0$ y se cumple la condición de beneficio neto.

5.2. Límites para la Probabilidad de Ruina

Desigualdad de Lundberg

En esta sección se presenta una cota superior para la probabilidad de ruina $\psi(u)$.

Primeramente, enunciamos y demostramos la desigualdad de Markov, que la utilizaremos en algunas de las demostraciones de esta sección.

Proposición 5.7. *(Desigualdad de Markov)*
Sea X una variable aleatoria positiva, entonces para cualquier valor $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty xF(dx) = \int_0^a xF(dx) + \int_a^\infty xF(dx) \\ &\geq \int_a^\infty xF(dx) \geq \int_a^\infty aF(dx) = aP(X \geq a), \end{aligned}$$

donde F es la función de distribución de X.

Por tanto, $E(X) \geq aP(X \geq a)$. □

Suponemos el modelo de renovación con la condición de beneficio neto (NPC). También suponemos que tenemos tamaños de reclamación pequeños, es decir, la existencia de la función generatriz de momentos de la distribución del tamaño de la reclamaciones en un entorno del origen

$$m_{X_1}(h) = Ee^{hX_1}, \quad h \in (-h_0, h_0), \quad \text{para algún} \quad h_0 > 0.$$

Por la desigualdad de Markov, para $h \in (0, h_0)$,

$$P(X_1 > x) \leq e^{-hx} m_{X_1}(h), \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Por lo tanto, $P(X_1 > x)$ decrece a 0 exponencialmente rápido.

Introducimos esta condición ya que el trabajo de Lundberg y Cramér fue realizado bajo ella.

Definición 5.8. *(Coeficiente Lundberg)*
Suponemos que la función generatriz de momentos de Z_1 existe en algún entorno $(-h_0, h_0)$ del origen, $h_0 > 0$. Si existe una única solución positiva r de

$$m_{Z_1}(h) = Ee^{h(X_1 - cW_1)} = 1$$

esta es llamada coeficiente de Lundberg o coeficiente de ajuste.

Observamos que la existencia de la función generatriz de momentos $m_{X_1}(h)$ para $h \in [0, h_0)$ implica la existencia de $m_{Z_1}(h) = m_{X_1}(h) m_{cW_1}(-h)$ para $h \in [0, h_0)$ dado que $m_{cW_1}(-h) \leq 1$, $\forall h \geq 0$. Empleando el mismo argumento para $h \in (h_0, 0)$, tenemos que $m_{Z_1}(h)$ exite si $m_{cW_1}(-h)$ es finita. Por tanto, la función generatriz de momentos de Z_1 existe en un entorno del cero si existen las funciones generatrices de momentos de X_1 y cW_1 en un entorno del cero.

En particular, para el modelo de Cramér-Lundberg con intensidad λ para el proceso de reclamaciones N, $m_{cW_1}(h) = \lambda/(\lambda - ch)$ existe para $h < \lambda/c$.

Tras estas definiciones preliminares, enunciamos uno de los resultados clásicos de las matemáticas de seguros.

Teorema 5.9. *(Desigualdad de Lundberg)*
Suponemos el modelo de renovación con la NPC y que el coeficiente de ajuste r existe. Entonces para todo capital inicial $u > 0$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$\psi(u) \leq e^{-ru}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\psi_n(u) = P\left(\max_{1 \leq k \leq n} S_k > u\right) = P(S_k > u \quad \text{para algún} \quad k \in \{1, \ldots, n\})$$

y vemos que $\psi_n(u) \uparrow \psi(u)$ cuando $n \to \infty$ para todo $u > 0$. Por esto, es suficiente probar que

$$\psi_n(u) \leq e^{-ru} \quad \forall n \geq 1, \quad u > 0. \tag{5.1}$$

Lo probamos por inducción.

Empezamos con el caso $n = 1$. Por la desigualdad de Markov y la definición de coeficiente de ajuste tenemos que,

$$\psi_1(u) \leq e^{-ru} m_{Z_1}(r) = e^{-ru}.$$

Esto prueba (5.1) para $n = 1$

Suponemos que (5.1) se cumple para $n = k \geq 1$ y lo probamos para $n = k+1$. Tenemos que

$$\psi_{k+1}(u) = P\left(\max_{1\leq n\leq k+1} S_n > u\right) \leq P(Z_1 > u) + P\left(\max_{2\leq n\leq k+1} (Z_1 + (S_n - Z_1)) > u, Z_1 \leq u\right)$$

$$= \int_{(u,\infty)} dF_{Z_1}(x) + \int_{(-\infty,u]} P\left(\max_{1\leq n\leq k} [x + S_n] > u\right) dF_{Z_1}(x)$$

$$= p_1 + p_2,$$

donde dF_{Z_1} es la función de distribución de Z_1.

Para p_2, usando la hipótesis de inducción $n = k$ tenemos que

$$p_2 = \int_{(-\infty,u]} P\left(\max_{1\leq n\leq k} S_n > u - x\right) dF_{Z_1}(x) = \int_{(-\infty,u]} \psi_k(u-x) dF_{Z_1}(x)$$
$$\leq \int_{(-\infty,u]} e^{r(x-u)} dF_{Z_1}(x).$$

Análogamente, por la desigualdad de Markov, tenemos que

$$p_1 \leq \int_{(u,\infty)} e^{r(x-u)} dF_{Z_1}(x).$$

Por lo tanto, por la definición de coeficiente de ajuste r y juntando lo obtenido de p_1 y p_2,

$$p_1 + p_2 \leq e^{-ru} m_{Z_1}(r) = e^{-ru},$$

que implica que $\psi_{k+1}(u) \leq e^{-ru}$, como queríamos demostrar para $n = k + 1$. □

Ejemplo 5.10. (Desigualdad de Lundberg para reclamaciones exponenciales)
En el modelo de Cramér-Lundberg con tamaños de reclamaciones con distribución Exp(r) y siendo λ la intensidad de Poisson, tenemos que

$$\psi(u) \leq \exp\left\{-r\frac{\rho}{1+\rho}u\right\}, \quad u > 0.$$

Este límite para la probabilidad de ruina asegura que esta probabilidad es muy pequeña si el capital inicial u es grande. Claramente, este límite depende también del coeficiente de ajuste. Cuando más pequeño es r, mayor riesgo presenta la cartera.

Concluimos diciendo que para tamaños de reclamación pequeños con un capital inicial elevado, en principio no hay riesgo de ruina para la cartera de seguros. Más adelante veremos que sucede cuando los tamaños de reclamación son grandes.

Estimaciones para el modelo Cramér-Lundberg: tamaños de reclamaciones pequeños

En la sección anterior, se ha presentado una cota superior para la probablidad de ruina $\psi(u)$ en el modelo de renovación para tamaños de reclamación pequeños. Ahora, nos restringiremos al modelo de Cramér-Lundberg y presentaremos una tanto una cota superior como una cota inferior para $\psi(u)$.

Para poder enunciar y demostrar el teorema que nos proporciona estas cotas, debemos introducir primero algunos conceptos y un lema.

Observamos que si estamos en el modelo de Cramér-Lundberg con NPC,

$$\rho = c\frac{EW_1}{EX_1} - 1 > 0,$$

siendo ρ el recargo de seguridad (ver Ejemplo 5.6).

La probabilidad de no ruina viene dada por

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u).$$

Lema 5.11. *(Ecuación integral fundamental para la probabilidad de no ruina) Suponemos el modelo de Cramér-Lundberg con la NPC y $EX_1 < \infty$. Suponemos también que la función de distribución del tamaño de las reclamaciones F_{X_1} tiene densidad. Entonces la probabilidad de no ruina cumple*

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\rho)EX_1}\int_0^u \overline{F}_{X_1}(y)\varphi(u-y)dy, \tag{5.2}$$

donde $\overline{F}_{X_1} = 1 - F_{X_1}$ representa su cola.

Antes de hacer la demostración del lema, realizamos las siguientes observaciones.

Observación 5.12. Denotamos la función de distribución de cola integrada de X_1 como

$$F_{x_1,I}(y) = \frac{1}{EX_1}\int_0^y \overline{F}_{X_1}(z)dz, \quad y > 0.$$

Como $F_{x_1,I}(y)$ es una función de distribución de una variable aleatoria positiva, $EX_1 = \int_0^\infty \overline{F}_{X_1}(y)dy$. Por tanto, $F_{x_1,I}(y) \uparrow 1$ cuando $y \uparrow \infty$.

Observación 5.13. Por la NPC tenemos que $\varphi(u) \uparrow 1$ cuando $u \to \infty$. Entonces,

$$\varphi(0) = \rho\frac{1}{1+\rho}.$$

Tras estas dos observaciones, podemos reescribir (5.2) como

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^u \varphi(u-y)dF_{X_1,I}(y).$$

Probamos ahora el Lema 5.11.

Demostración. Tenemos que

$$\psi(u) = P\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u\right) = P\left(\sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - cW_k) > u\right) = 1 - \varphi(u),$$

entonces,

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= P\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - cW_k) \leq u, \quad \forall n \geq 1\right)\\ &= P\left(\sum_{k=2}^{n}(X_k - cW_k) \leq u + cW_1 - X_1 \quad \forall n \geq 2, \quad X_1 - cW_1 \leq u\right)\\ &= P(S'(t) - ct \leq u + cW_1 - X_1 \quad \forall t > 0, \quad X_1 - cW_1 \leq u),\end{aligned}$$

donde S' es una copia independiente de S.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= E[P(S'(t) - ct \leq u + cW_1 - X_1 \quad \forall t > 0, \quad X_1 - cW_1 \leq u \mid W_1, X_1]\\ &= \int_{w=0}^{\infty}\int_{x=0}^{u+cw} P(S'(t) - ct \leq u + cw - x \quad \forall t > 0) dF_{X_1}(x)\lambda e^{-\lambda w} dw\\ &= \int_{w=0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda w}\int_{x=0}^{u+cw}\varphi(u + cw - x) dF_{X_1}(x) dw\end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{c}e^{u\lambda/c}\int_{z=u}^{\infty} e^{-\lambda z/c}\int_{x=0}^{z}\varphi(z - x) dF_{X_1}(x) dz,$$

donde para el último paso hemos hecho el cambio $z = u + cw$.

Como hemos supuesto que F_{X_1} tiene densidad, la función

$$g(z) = \int_0^z \varphi(z - x) dF_{X_1}(x)$$

es continua.

Entonces,

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c}e^{u\lambda/c}\int_{z=u}^{\infty} e^{-\lambda z/c} g(z) dz$$

es diferenciable y derivando obtenemos que

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u - x) dF_{X_1}(x).$$

Ahora integrando esta última igualdad y aplicando integración por partes:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(u) dt - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \varphi(u - x) dF_{X_1}(x) du$$

$$= \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(t - u) dt - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\varphi(t - x) dx$$

$$= \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{F}_{X_1}(x)\varphi(t - x) dx.$$

Fijándonos en el Ejemplo 5.6 vemos que

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{EX_1}.$$

Por tanto, uniendo estas dos últimas igualdades, el lema queda probado. □

Tras estos conceptos preliminares, enunciamos y demostramos el teorema principal de esta sección.

Teorema 5.14. *(Límite de la ruina de Cramér)*
Suponemos el modelo de Cramér-Lundberg con la NPC. Suponemos también que la función de distribución del tamaño de las reclamaciones F_{X_1} tiene densidad, que la función generatriz de momentos de X_1 existe en algún entorno $(-h_0, h_0)$ del origen y que el coeficiente de ajuste r existe y se encuentra en $(0, h_0)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\lim_{u\to\infty} e^{ru}\psi(u) = C,$$

donde

$$C = \left[\frac{r}{\rho EX_1}\int_0^\infty xe^{rx}\overline{F}_{X_1}(x)dx\right]^{-1}.$$

Demostración. Por el Lema 5.11. y las Observaciones 5.12. y 5.13. podemos expresar la probabilidad no ruina $\varphi(u)$ como

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^u \varphi(u-y)dF_{X_1,I}(y). \tag{5.3}$$

Sea $q = \frac{1}{1+\rho} < 1$ y como $\psi(u) = 1 - \varphi(u)$, podemos reescribir $\psi(u)$ como

$$\psi(u) = q\overline{F}_{X_1,I}(u) + \int_0^u \psi(u-x)d(qF_{X_1,I}(x)). \tag{5.4}$$

Como $0 < q < 1$, la ecuación (5.4) es llamada ecuación de renovación defectuosa.

Para poder aplicar la Teoría de la Renovación, tenemos que transformar (5.4) a la forma estándar de la ecuación de renovación (vista en la sección 3.2.) para alguna función de distribución F.

Definimos la función de distribución $F^{(r)}$ para $x > 0$:

$$F^{(r)} = \int_0^x e^{ry}d(qF_{X_1,I}(y)) = q\int_0^x e^{ry}dF_{X_1,I}(y)$$

$$= \frac{q}{EX_1}\int_0^x e^{ry}d\overline{F}_{X_1}(y).$$

La distribución generada por $F^{(r)}$ es conocida como la trasformación de Esscher o distribución exponencialmente inclinada de F. Esta distribución es no decreciente y tiene límite cuando $x \to \infty$ dado por

$$\frac{q}{EX_1}\int_0^\infty e^{ry}d\overline{F}_{X_1} = 1.$$

Ahora, multiplicamos ambos lados de (5.4) por e^{ru}, obteniendo la ecuación

$$\begin{aligned} e^{ru}\psi(u) &= qe^{ru}\overline{F}_{X_1,I}(u) + \int_0^u e^{r(u-x)}\psi(u-x)e^{ru}d(qF_{X_1,I}(x)) \\ &= qe^{ru}\overline{F}_{X_1,I}(u) + \int_0^u e^{r(u-x)}\psi(u-x)dF^{(r)}(x), \end{aligned} \tag{5.5}$$

que ya es una ecuación estándar de renovación con $F = F^{(r)}$, $u(t) = qe^{ru}\overline{F}_{X_1,I}(t)$ y $U(t) = e^{ru}\psi(u)$, que es la función desconocida. Entonces, podemos concluir que la ecuación de renovación (5.5) tiene solución:

$$U(t) = e^{ru}\psi(u) = \int_0^t u(t-y)dm^{(r)}(y) = q\int_0^t e^{r(t-y)}\overline{F}_{X_1,I}(t-y)dm^{(r)}(y),$$

donde $m^{(r)}$ es la función de renovación correspondiente proceso de renovación, cuyos intervalos entre llegadas tienen en común la función de distribución $F^{(r)}$. En general, no conocemos la función $m^{(r)}$, si podemos determinar un orden asintótico de la solución para (5.5) cuando $u \to \infty$:

$$C = \lim_{u\to\infty} e^{ru}\psi(u) = \lambda q\int_0^\infty e^{ry}\overline{F}_{X_1,I}(y)dy.$$

Entonces, calculando obtenemos que

$$C = \left[\frac{r}{\rho E X_1}\int_0^\infty xe^{rx}\overline{F}_{X_1}(x)dx\right]^{-1},$$

lo que finaliza la demostración del teorema. □

Representación de la probabilidad de ruina como una probabilidad geométrica compuesta

Suponemos el modelo de Cramér-Lundberg con la NPC, teniendo en cuenta todo lo demostrado en la sección anterior.

Por el Lema 5.11., sabemos que la ecuación para la probabilidad de no ruina se puede escribir como:

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^u \varphi(u-y)dF_{X_1,I}(y), \tag{5.6}$$

siendo valida si los tamaños de reclamación X_i tienen densidad finita con $EX_i < \infty$ y si se mantiene la NPC.

En esta sección, estudiaremos la ecuación (5.6) con mayor detalle, representando $\varphi(u)$ como una función de distribución de la suma geométrica compuesta. Para ello, previamente, necesitamos introducir dos conceptos.

Definición 5.15. *(Suma geométrica compuesta)*
Sea M una variable aleatoria con distribución geométrica con parámetro $p \in (0,1)$ dada por

$$P(M = n) = pq^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \textit{donde} \quad q = 1 - p,$$

entonces, la suma aleatoria

$$S_M = \sum_{i=1}^{M} X_i$$

tiene una distribución geométrica compuesta, dadas M y la secuencia de variables aleatorias iid (X_i). La función de distribución es:

$$P(S_M \leq x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n P(X_1 + \ldots + X_n \leq x)$$

$$= p + p \sum_{n=1}^{\infty} q^n P(X_1 + \ldots + X_n \leq x).$$

Definición 5.16. *Definimos la clase de funciones $\mathcal{G}$ como:*

$\mathcal{G} = \{G : \mathbb{R} \to [0, \infty) \quad$ *es no decreciente, absolutamente continua y* $G(x) = 0$ *para* $x < 0\}$.

Dicho de otra manera, $G \in \mathcal{G}$, si y solo si, $G(x) = 0$ para $x < 0$, y exite c y una función de distribución F de una variable aleatoria positiva tal que $G(x) = cF(x)$ para $x \geq 0$.

Definición 5.17. *(Transformaciones de Laplace-Stieltjes)*
Sea H una función de distribución en $[0, \infty)$, entonces

$$\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

denota la transformación de Laplace-Stieltjes de H.

Proposición 5.18. *Sean H_1 y H_2 funciones de distribución con transformaciones de Laplace-Stieltjes $\hat{h}_1$ y $\hat{h}_2$ respectivamente. Entonces, $\hat{h}_1 = \hat{h}_2$ implica que $H_1 = H_2$.*

Tras estas dos definiciones vemos que la transformación de Laplace-Stieltjes de una función $G \in \mathcal{G}$ viene dada por

$$\hat{g}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x), \quad t \geq 0.$$

Observamos que $\hat{g}(t) = Ee^{-tX}$ donde X es una variable aleatoria positiva con función de distribución G.

Después de estos conceptos preliminares, ya podemos representar la probabilidad de no ruina $\varphi(u)$ como una probabilidad geométrica compuesta.

Teorema 5.19. *(Representacón de la probabilidad de no ruina como una probabilidad compuesta geométrica)*
Suponemos el modelo de Cramér-Lundberg con $EX_1 < \infty$ y la NPC. Suponemos también que los tamaños de reclamación X_i tienen densidad. Sea $(X_{I,n})$ una secuencia de variables aleatorias iid con función de distribución $F_{X_1,I}$. Entonces, la función $\varphi(u)$ dada por

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1+\rho)^{-n} P(X_{I,1} + \ldots + X_{I,n} \leq u) \right], \quad u > 0,$$

cumple la ecuación de probabilidad de no ruina (5.6). Además, es la única solución en la clase $\mathcal{G}$.

Demostración. Demostramos primero que la función $\varphi(u)$ cumple (5.6). Para ello, escribimos $q = (1+\rho)^-1$ y $p = 1 - q = \rho(1+\rho)^{-1}$. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= p + qp\left[F_{X_1,I}(u) + \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1}\int_0^u P(y + X_{I,2} + \ldots + X_{I,n} \leq u) dF_{X_1,I}(y)\right] \\ &= p + q\int_0^u p\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n P(X_{I,1} + \ldots + X_{I,n} \leq u - y)\right] dF_{X_1,I}(y) \\ &= p + q\int_0^u \varphi(u-y) dF_{X_1,I}(y).\end{aligned}$$

Por tanto, $\varphi(u)$ satisface la ecuación de probabilidad de no ruina (5.6).

Nos queda demostrar que es la única solución en $\mathcal{G}$. Para esto, nos basamos en la transformación de Laplace-Stieljtes, Definición 5.17., y la Proposición 5.18., que nos dice que esta transformación en única. Por tanto, es directo que la probabilidad de no ruina es la única solución de (5.6) en $\mathcal{G}$. □

Esta manera de representar la probabilidad de no ruina será útil en algunos casos, como veremos a continuación.

Estimaciones para el modelo Cramér-Lundberg: tamaños de reclamaciones grandes

En esta sección, suponemos también el modelo de Cramér-Lundberg con la NPC.

Hasta ahora, hemos visto que límite de la ruina de Cramér es:

$$\psi(u) = Ce^{-ru}, \quad r \to \infty,$$

cuando estabamos bajo la condición de tamaños de reclamaciones pequeños. El objetivo de esta sección es estudiar el límite de la probabilidad de ruina cuando los tamaños de las reclamaciones son grandes.

Teorema 5.20. *(Probabilidad de ruina cuando la distribución acumulada del tamaño de las reclamaciones es subexponencial)*
Suponemos el modelo de Cramér-Lundberg con $EX_1 < \infty$ y la NPC. Suponemos también que los tamaños de reclamación X_i tienen densidad y que el tamaño de las reclamaciones acumuladas $F_{X_1,I}$ es subexponencial. Entonces, la probabilidad de ruina $\varphi(u)$ cumple que

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)} = \frac{1}{\rho}.$$

Demostración. Por lo visto en el punto anterior, podemos representar la probabilidad de no ruina $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ como una distribución geométrica. Entonces, tenemos que

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)} = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\frac{P(X_{I,1} + \ldots + X_{I,n} > u)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)}.$$

Por la subexponencialidad de $F_{X_1,I}$,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(X_{I,1} + \ldots + X_{I,n} > u)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)} = n, \quad n \geq 1.$$

Por lo tanto, si intercambiamos el límite cuando $u \to \infty$ por la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}$ llegamos a la igualdad deseada:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)} = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=1}^{\infty} (1+\rho)^{-n} n = \frac{1}{\rho}.$$

□

Podemos concluir diciendo que las carteras de seguros con reclamaciones de gran tamaño son peligrosas. Esto es debido a que las reclamaciones más grandes tienen una influencia significativa en el comportamiento general de una cartera en el largo plazo. En este caso, la ruina ocurre de manera espontánea y es causada por una sola reclamación de tamaño muy grande.

6. Conclusiones

El objetivo principal de este proyecto era estudiar la dinámica de una cartera de seguros a partir de procesos estocásticos para, posteriormente, poder estudiar la Teoría de la Ruina. Este estudio ha sido basado principalmente en la primera parte de T. Mikosch [1].

Primeramente, se ha analizado el proceso del número de reclamaciones. Para ello, nos hemos centrado en el estudio del proceso de Poisson, uno de los procesos estocásticos más importantes, y el proceso de Renovación, que constituye una parte importante de la teoría de probabilidad aplicada. También se ha visto como representar un Proceso de Poisson Homogéneo como un proceso de Renovación y se ha introducido el modelo de Cramér-Lundberg.

En cuanto al proceso de volumen total de reclamaciones, se ha calculado el valor esperado y la varianza del coste total de reclamaciones para el modelo de renovación y para el modelo Cramér-Lundberg. Esto nos ha permitido ver que crecen de manera aproximadamente lineal en función del tiempo, y utilizar esta información para dar los principios clásicos para el cálculo de la prima a cobrar con el fin de cubrir las pérdidas. Además, se ha analizado la distribución del tamaño de reclamaciones aportando herramientas para estudiar la bondad de ajuste de los datos a la distribución escogida. Destacamos de la sección el estudio del grosor de las colas de la distribuciones, concluyendo que los tamaños de reclamaciones con distribuciones de colas pesadas son mucho más peligrosos para una compañía de seguros que las distribuciones con colas ligeras.

Finalmente, hemos podido estimar la probabilidad de ruina para tamaños de reclamación grandes y pequeños. Se ha visto como las carteras de seguros con tamaños de reclamación grandes son más peligrosas que las carteras de seguros con tamaños de reclamación pequeños, ya que una sola reclamación de gran tamaño puede causar la ruina. Es decir, desde el punto de vista de una compañía de seguros nos interesa tener reclamaciones que no sean de gran tamaño, porque de esta manera con un capital inicial elevado, en principio, no hay riesgo de ruina.

Bibliografía

[1] Mikosch, Thomas: *Non-Life Insurance Mathematics, An Introduction with the Poisson Process*, 2nd ed. Springer, Heidelberg, 1997.

[2] Gut, Allan: *Stopped Random Walks*. Springer, Berlin, 1988.

[3] Embrechts, Paul; Klüppelberg, Claudia; Mikosch, Thomas: *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Heidelberg, 1997.

[4] Feller, William: *An Introduction to Probability Theory and Its Aplications II*. Wiley, New York, 1971.