

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

**Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona**

**PUNTS FIXOS DE
DIFEOMORFISMES
HAMILTONIANS**

Autor: Bernat Plandolit López

Director: Dr. Ignasi Mundet Riera

Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 29 de juny de 2017

Abstract

Arnold's conjecture asserts that every Hamiltonian diffeomorphism of a compact symplectic manifold has at least as many fixed points as a function on the manifold must have critical points. What's more, if the fixed points are all non degenerate, then the number of fixed points is at least the minimal number of critical points for a Morse function on the manifold. In this project we will give meaning to all the concepts mentioned in the conjecture's statement and we will study a very specific known result: the case in which the manifolds are 2-dimensional tori and the diffeomorphisms are close enough to identity. We will also generalize some results to $2n$ -dimensional tori to study the general case for every Hamiltonian diffeomorphism.

Resum

La conjectura d'Arnold assegura que tot difeomorfisme Hamiltonià d'una varietat simplèctica compacte té com a mínim tants punts fixos com una funció en la varietat té punts crítics. Si, a més, tots els punts fixos són no degenerats, aleshores el nombre de punts fixos és com a mínim el mínim nombre de punts crítics d'una funció de Morse en la varietat. En aquest treball donarem significat a tots els conceptes que pertanyen a l'enunciat de la conjectura i demostrarem un cas molt concret resolt: el cas en què les varietats són torus de dimensió 2 i els difeomorfismes són propers a la identitat. A més, generalitzarem alguns resultats a torus de dimensió $2n$ per estudiar el cas general per a qualsevol difeomorfisme Hamiltonià.

Agraïments

Vull donar les gràcies especialment al tutor del treball, el Dr. Ignasi Mundet Riera, per introduir-me en una nova àrea de la geometria, que sempre ha estat la meva branca preferida de les matemàtiques, amb dedicació i motivació.

També als meus pares, la meva germana, i als meus amics, per donar-me sempre suport incondicional.

Índex

1	Introducció	1
2	De la mecànica clàssica a la geometria simplèctica	3
2.1	Mecànica Hamiltoniana	3
2.2	Acció simplèctica	5
2.3	Fluxos Hamiltonians	5
2.4	Simplectomorfismes	6
3	Fonaments de geometria simplèctica	7
3.1	Geometria simplèctica lineal	7
3.2	Geometria en varietats simplèctiques	8
3.2.1	Conceptes bàsics	8
3.2.2	Fluxos Hamiltonians	10
3.2.3	Isotopies Hamiltonianes	10
3.2.4	Teorema de Darboux	11
4	Teorema de Poincaré-Birkhoff	12
5	Funcions generatrius	18
5.1	Funcions generatrius de tipus S	18
5.2	Problemes variacionals de temps discret	21
5.3	Mecànica Hamiltoniana discreta. Funcions generatrius de tipus V .	21
5.4	Acció simplèctica discreta	26
6	Conjectura d'Arnold	28
6.1	Punts fixos de simplectomorfismes i conjectura d'Arnold	28
6.2	Conjectura d'Arnold per a torus	29
6.3	Relació entre la conjectura d'Arnold per a torus 2-dimensionals i el teorema de Poincaré-Birkhoff	39
7	Conclusions	41

1 Introducció

El projecte

La topologia simplèctica és l'estudi dels fenòmens globals de la geometria simplèctica. L'estructura local d'una varietat simplèctica és, pel teorema de Darboux, equivalent a l'estructura simplèctica estàndard de l'espai euclidià. Aquesta característica ens mostra un important contrast entre la geometria simplèctica i la geometria riemanniana, ja que la curvatura ens ofereix un invariant local de la última.

La geometria simplèctica neix principalment de la formulació amb principis variacionals de la mecànica clàssica. En aquesta visió de la mecànica, les equacions del moviment surten de principis basats en la màximització o minimització de quantitats com el temps que es triga en recórrer un camí entre dos punts (com per exemple el principi de Fermat, que diu que la llum, considerada com un feix de partícules, es mou d'un punt a un altre per el camí que implica el menor temps possible per recórrer-lo) o l'acció, com el principi de mínima acció de Hamilton, del qual surten bàsicament les equacions diferencials de Hamilton. Començada i estudiada per grans matemàtics de la història com Newton, Lagrange, Euler i moltíssims més, la mecànica clàssica aporta una estructura nova a l'espai euclidià que el 1833 formula William R. Hamilton. Aquesta nova visió de la mecànica l'anomenem mecànica Hamiltoniana, i la nova teoria no requereix que els sistemes estudiats sorgeixin de problemes de mecànica clàssica. Aquesta desconexió amb el món físic és el que dóna peu a la seva versió matemàtica moderna que és el que anomenem actualment geometria simplèctica.

Seguint amb el lligam a la mecànica clàssica, les equacions del moviment porten a que les aplicacions simplèctiques siguin una part important de les teories de sistemes dinàmics, com els sistemes descrits per Hamiltonians. Henri Poincaré, en el seu estudi dels sistemes planetaris, va formular el seu famós últim teorema geomètric. Aquest teorema està basat en una aplicació que preserva l'àrea en un anell de dimensió dos, però la visió de Poincaré anava més enllà i la limitació a la segona dimensió només era fruit de la complicada demostració donada per G. D. Birkhoff, i en els posteriors intents de generalitzar el teorema a dimensions superiors ràpidament es va arribar a que la preservació del volum no era suficient, sinó que es requerien les característiques de les aplicacions simplèctiques que, en particular, preserven el volum. Una part molt important també, d'on sorgeix el teorema mencionat, són les aplicacions de Poincaré, de gran importància en sistemes dinàmics, que també es demostra que són aplicacions simplèctiques.

No és fins al segle XX que es dóna nom a tots els conceptes de la topologia simplèctica i neixen moltes noves preguntes i teoremes, com les relatives als punts fixos de les aplicacions entre varietats simplèctiques: els symplectomorfismes. Un dels grans exemples de problema global de punts fixos és la conjectura d'Arnold, formulada per V. I. Arnold la dècada de 1960. Aquesta conjectura dóna un important resultat sobre l'existència de punts fixos de symplectomorfismes Hamiltonians, que són un cas concret d'aplicacions simplèctiques, i en dóna una cota inferior. Aquesta conjectura ha estat demostrada en molts casos particulars i amb petites variacions

del seu enunciat. Un resultat molt concret que ha estat demostrat és el cas en que les varietats involucrades són torus $2n$ -dimensionals, i és aquest cas al voltant del qual s'estructura el nostre treball.

Estructura de la Memòria

Primer de tot fem una breu passada per l'origen de la geometria simplèctica. Plantegem un problema general de mecànica clàssica amb la formulació Lagrangiana i Hamiltoniana i veiem com sorgeixen alguns dels conceptes que, en el segon apartat, es generalitzaran a varietats diferenciables arbitràries i formaran una introducció al que anomenem geometria simplèctica.

En el següent apartat parlem del teorema de Poincaré-Birkhoff, que és una primera versió concreta d'un teorema sobre punts fixos d'aplicacions simplèctiques en una situació específica en dues dimensions i que es pot considerar el primer exemple de resultat global de geometria simplèctica i que té un gran nombre d'aplicacions en sistemes dinàmics.

Tot seguit, per a la generalització de teoremes de punts fixos, dediquem tot un apartat a l'estudi de les funcions generatrius, eina que serà un dels pilars fonamentals per al desenvolupament de l'objectiu del treball: el cas concret de la conjectura d'Arnold que ens parla de punts fixos de difeomorfismes Hamiltonians en torus de dimensió parella arbitrària. Aquest és el contingut de l'últim apartat, en que ens centrem una mica més profundament en l'estudi dels difeomorfismes del torus i mostrem tota una construcció de la demostració del cas concret de la conjectura que estudiem. Donem demostracions explícites del cas dos dimensional amb simplectomorfismes suficientment propers a la identitat, i en tots els casos enunciem el resultat general. Finalment, relacionem el cas concret de la conjectura amb el teorema de Poincaré-Birkhoff i veiem que n'és una conseqüència.

2 De la mecànica clàssica a la geometria simplèctica

2.1 Mecànica Hamiltoniana

Les equacions del moviment en mecànica clàssica surten de solucions de principis variacionals. Per un sistema mecànic general que té energia cinètica i energia potencial minimitzem una quantitat que és el valor mitjà de l'energia cinètica menys la potencial. A aquesta quantitat se l'anomena **acció**, i és la base de tota la teoria simplèctica.

Veiem com trobem aquesta teoria a partir de la minimització de l'acció. Considerem un sistema descrit per punts x en $\mathbb{R}^n$ que es mouen en trajectories $x(t)$. Sigui $L = L(t, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$ una funció C^2 -diferenciable en les $2n + 1$ variables $(t, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$, on $v \in \mathbb{R}^n = T_x \mathbb{R}^n$ és el vector tangent al punt $x \in \mathbb{R}^n$ que representa la velocitat $\dot{x}$. Considerem el problema de minimitzar la **integral d'acció**

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt \quad (2.1)$$

sobre el conjunt de camins $x \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ que satisfan les condicions de contorn

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

A la funció L se l'anomena **Lagrangià** del problema variacional. Un camí C^1 -diferenciable $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diu que és **minimal** si

$$I(x) \leq I(x + \xi)$$

Per a qualsevol variació $\xi \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ amb $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$.

Lema 2.1. *Tot camí minimal $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ és solució de les equacions de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Aquí usem la notació vectorial $\partial L / \partial v = (\partial L / \partial v_1, \dots, \partial L / \partial v_n) \in \mathbb{R}^n$ i similarment per $\partial L / \partial x$.

Demostració. Si x és minimal, totes les derivades direccionals de I a x han de ser 0. Per tant,

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} I(x + \varepsilon \xi) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j}(t, x, \dot{x}) \xi_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_j}(t, x, \dot{x}) \dot{\xi}_j \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_j} \right) \xi_j dt \end{aligned}$$

per a cada ξ . En l'última igualtat hem utilitzat integració per parts i les condicions de contorn. $\square$

Observació 2.2. La forma de les equacions de Euler-Lagrange depèn sensiblement de les condicions de contorn.

Sota la **condició de Legendre**

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial v_k} \right) \neq 0, \quad (2.3)$$

l'equació (2.2) defineix un sistema regular d'equacions diferencials ordinaries de segon ordre en les n variables $x_1, \dots, x_n$. La **transformació de Legendre** produeix un sistema d'equacions diferencials de primer ordre en $2n$ variables. Introduïm les noves variables

$$y_k = \frac{\partial L}{\partial v_k}(x, v), \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Observació 2.3. En la terminologia clàssica, es diu que tenim un problema amb n graus de llibertat. Quan introduïm les noves variables y , parlem de l'**espai de fase** $\mathbb{R}^{2n}$ que està format per $(x_1, \dots, x_n)$ com les n primeres variables i $(y_1, \dots, y_n)$ com les n últimes, encara que en molts casos no tinguin el sentit físic que els donem en aquest apartat.

Aleshores

$$\dot{y}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} = \frac{\partial L}{\partial x_k}$$

Ara, se segueix de la condició (2.3) i del teorema de la funció implícita que v es pot expressar localment com a funció de t , x , i y que denotem per

$$v_k = G_k(t, x, y).$$

Definim el **Hamiltonià**

$$H = \sum_{j=1}^n y_j v_j - L \quad (2.5)$$

i el considerem una funció de t , x , i y . Aleshores

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = -\frac{\partial L}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial y_k} = G_k.$$

Per tant, les equacions de Euler-Lagrange (2.2) es transformen en les **equacions diferencials de Hamilton**

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Això prova el lema següent.

Lema 2.4. *Siguin $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camí C^1 -diferenciable i $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ les noves variables donades per (2.4). Aleshores, x és una solució de les equacions de Euler-Lagrange (2.2) si, i només si, les funcions x i y satisfan el sistema Hamiltonià (2.6).*

□

2.2 Acció simplèctica

Considerem un Lagrangiana L que satisfà la condició de Legendre (2.3) i sigui $H(t, x, y)$ el corresponent Hamiltoniana definit per (2.5). Donada una corba $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^2 -diferenciable, siguin $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ les noves variables donades per (2.4) amb $v = \dot{x}$, i denotem $z(t) = (x(t), y(t))$. Aleshores, la integral $I(x)$ definida per (2.1) coincideix amb la **integral d'acció** $\Phi_H(z)$ definida per

$$\Phi_H(z) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle y, \dot{x} \rangle - H(t, x, y)) dt \quad (2.7)$$

on $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producte escalar habitual. Aquesta expressió coincideix amb la integral $I(x)$ sempre que y vingui donada per (2.4), però $\Phi_H(z)$ està ben definida per a qualsevol camí z en l'espai de fase $\mathbb{R}^{2n}$ i per a qualsevol funció Hamiltoniana H . Podem veure amb un lema que les equacions de Euler-Lagrange de la integral d'acció (2.7) són les equacions de Hamilton (2.6). Per tant, les equacions de Hamilton es poden expressar directament a través del **principi de mínima acció**.

Lema 2.5. *Una corba $z : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ és un punt crític de Φ_H (respecte variacions amb els extrems fixos) si, i només si, satisfà les equacions de Hamilton (2.6).*

Demostració. Siguin $z_s = (x_s, y_s) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ una família 1-paramètrica de corbes i denotem les derivades en $s = 0$ per

$$\xi = \left. \frac{\partial}{\partial s} x_s \right|_{s=0}, \quad \eta = \left. \frac{\partial}{\partial s} y_s \right|_{s=0}, \quad \hat{\Phi}_H = \left. \frac{\partial}{\partial s} \Phi_H(z_s) \right|_{s=0}.$$

Si derivem sota el signe integral i integrem per parts obtenim

$$\hat{\Phi}_H = \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta, \dot{x} - \partial_y H \rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{y} + \partial_x H, \xi \rangle dt + \langle y(t_0), \xi(t_1) \rangle - \langle y(t_0), \xi(t_0) \rangle$$

Com que considerem variacions amb els extrems fixos, tenim $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$ i els dos últims termes desapareixen. Aleshores, les equacions de Euler-Lagrange que asseguruen que les integrals s'anul·len per tot ξ i η són les equacions (2.6). $\square$

2.3 Fluxos Hamiltonians

En les coordenades $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ el sistema Hamiltonià (2.6) es pot escriure com

$$J_0 \dot{z} = \nabla H_t(z),$$

on $H_t(z) = H(t, z)$, ∇H_t denota el gradient de H_t , i J_0 denota la matriu $2n \times 2n$

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

El camp vectorial

$$X_{H_t} = -J_0 \nabla H_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

s'anomena **camp vectorial Hamiltonià** associat a la funció Hamiltoniana H_t o bé **gradient simplèctic** de H_t . Donada una funció Hamiltoniana suau que depèn del temps $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} : (t, x, y) \mapsto H_t(x, y)$, denotem per ϕ_H^{t,t_0} l'operador solució de (2.6). Està definit com $\phi_H^{t,t_0}(z_0) = z(t)$, on $z(t)$ és la única solució de (2.6) amb condició inicial $z(t_0) = z_0$. El domini de definició de ϕ_H^{t,t_0} és el conjunt obert $\Omega_{t_0,t}$ de tots els $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ pels quals la solució existeix en l'interval de temps $[t_0, t]$ (respectivament $[t, t_0]$ quan $t < t_0$). Els difeomorfismes $\phi_H^{t,t_0} : \Omega_{t_0,t} \rightarrow \Omega_{t,t_0}$ satisfan

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_H^{t,t_0} = X_{H_t} \circ \phi_H^{t,t_0}$$

i també

$$\phi_H^{t_2,t_1} \circ \phi_H^{t_1,t_0} = \phi_H^{t_2,t_0}, \quad \phi_H^{t_0,t_0} = id.$$

La família de difeomorfismes ϕ_H^{t,t_0} s'anomena **flux Hamiltonià generat per H_t** .

2.4 Simplectomorfismes

Un difeomorfisme $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ s'anomena **simplectomorfisme** si

$$d\psi(\zeta)^T J_0 d\psi(\zeta) = J_0$$

per tot $\zeta \in \mathbb{R}^{2n}$. Com el nom suggerix, aquests seran els difeomorfismes que preservaran l'estructura simplèctica, però aquí sorgeixen del fet que són els difeomorfismes que preserven les equacions diferencials de Hamilton (2.6).

Lema 2.6. *Segui $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un simplectomorfisme i suposem que $\zeta(t)$ és una solució de l'equació diferencial de Hamilton*

$$\dot{\zeta} = X_{H \circ \psi}(\zeta).$$

Aleshores, $z(t) = \psi(\zeta(t))$ és una solució de (2.6).

En la literatura clàssica de mecànica Hamiltoniana, els simplectomorfismes s'anomenen normalment **transformacions canòniques**. A més, els difeomorfismes generats per sistemes Hamiltonians d'equacions diferencials són simplectomorfismes.

Lema 2.7. *Segui on sigui que es defineixi, ϕ_H^{t,t_0} és un simplectomorfisme.*

Les demostracions d'aquests dos lemes les podem trobar a [4], pàgines 18 i 19.

3 Fonaments de geometria simplèctica

Acabem de veure tots els conceptes que surten dels problemes de mecànica clàssica. Aquests conceptes que hem estudiat a $\mathbb{R}^{2n}$ els podem generalitzar a varietats arbitràries i desenvolupar tota una teoria que s'anomena **geometria simplèctica**.

3.1 Geometria simplèctica lineal

Definició 3.1. *Un espai vectorial simplèctic és una parella (V, ω) que consisteix en un espai vectorial real de dimensió finita V i una forma bilineal antisimètrica no degenerada $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Això vol dir:*

1. (antisimètrica) Per tot $v, w \in V$,

$$\omega(v, w) = -\omega(w, v).$$

2. (no degenerada) Per tot $v \in V$

$$\omega(v, w) = 0, \forall w \in V \Rightarrow v = 0.$$

Observació 3.2. Notem que l'espai vectorial V ha de ser necessàriament de dimensió parell, ja que sinó la forma tindria nucli no trivial.

Exemple 3.3. L'exemple estàndard d'espai vectorial simplèctic és l'espai euclidià $\mathbb{R}^{2n}$ amb la forma bilineal antisimètrica no degenerada

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j.$$

Com a l'apartat 2.3, aquesta forma es pot associar a la matriu (2.8). Si $x = (x_0, x_1), y = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^{2n}$ amb $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ i similarment per x_1, y_0 i y_1 , tenim

$$\omega_0(x, y) = \langle x_0, y_1 \rangle - \langle y_0, x_1 \rangle = - \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = -x^T J_0 y \quad (3.1)$$

Definició 3.4. *Un simplectomorfisme lineal de l'espai vectorial simplèctic (V, ω) és un isomorfisme d'espais vectorials $\Psi : V \rightarrow V$ que preserva l'estructura simplèctica en el sentit*

$$\Psi^* \omega = \omega,$$

on $\Psi^ \omega(v, w) = \omega(\Psi v, \Psi w)$ per $v, w \in V$. Els simplectomorfismes lineals de (V, ω) formen un grup que denotarem per $Sp(V, \omega)$.*

Exemple 3.5. En el cas de l'estructura simplèctica estàndard de l'espai euclidià usem la notació $Sp(2n, \mathbb{R})$.

És convenient veure que tots els espais vectorials simplèctics de la mateixa dimensió són isomorfs, i és suficient, per tant, estudiar el cas euclidià estàndard.

Teorema 3.6. *Sigui (V, ω) un espai vectorial simplèctic de dimensió $2n$. Aleshores, existeix una base $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ tal que*

$$\omega(u_j, u_k) = \omega(v_j, v_k) = 0, \quad \omega(u_j, v_k) = \delta_{jk}.$$

*Tal base s'anomena **base simplèctica**. A més, existeix un isomorfisme d'espais vectorials $\Psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$ tal que*

$$\Psi^* \omega = \omega_0.$$

Demostració. [4], pàgines 39 i 40. □

Un cop vist aquest resultat, podem estudiar el grup de simplectomorfismes lineals, i ens podem centrar en $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. En aquest cas, podem escriure els elements de $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ com matrius Ψ reals $2n \times 2n$ que satisfan

$$\Psi^T J_0 \Psi = J_0,$$

que usant (3.1) podem veure que és equivalent a

$$\Psi^* \omega_0 = \omega_0.$$

A aquestes matrius les anomenarem **matrius simplèctiques**. Prenem la matriu simplèctica del simplectomorfisme lineal Ψ com

$$\Psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$$

escrita per blocs amb $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Aleshores, les condicions perquè Ψ sigui simplectomorfisme lineal són

$$A^T C - C^T A = 0, \tag{3.2}$$

$$A^T D - C^T B = \text{Id}, \tag{3.3}$$

$$B^T D - D^T B = 0. \tag{3.4}$$

Aquestes seran condicions importants per quan estudiem els simplectomorfismes en varietats simplèctiques i les funcions generatrius en el capítol 5.

Lema 3.7. *Tota matriu simplèctica té determinant 1.*

Demostració. [4], pàgina 21. □

3.2 Geometria en varietats simplèctiques

3.2.1 Conceptes bàsics

Sigui M una varietat C^∞ -diferenciable, o suau, que, si no s'especifica el contrari, és sense vora i compacte.

Definició 3.8. Una estructura simplèctica en una varietat C^∞ -diferenciable és una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ tancada i no degenerada.

La no degeneració diu que qualsevol espai tangent $(T_q M, \omega_q)$ és un espai vectorial simplèctic. La varietat M és necessàriament de dimensió parell i orientable.

Exemple 3.9. L'exemple estàndard de varietat simplèctica és $\mathbb{R}^{2n}$ amb la forma simplèctica estàndard

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j.$$

Una forma simplèctica compleix dos requisits: que sigui no degenerada i que sigui tancada. La no degeneració es tradueix en que hi ha un isomorfisme canònic entre els fibrats tangent i cotangent

$$TM \rightarrow T^*M : X \mapsto \iota(X)\omega = \omega(X, \cdot).$$

Definició 3.10. Un **simplectomorfisme** en una varietat simplèctica (M, ω) és un difeomorfisme $\psi \in \text{Dif}(M)$ tal que preserva la forma simplèctica

$$\omega = \psi^* \omega.$$

Denotem el grup de simplectomorfismes per $\text{Symp}(M, \omega)$ o bé $\text{Symp}(M)$.

Com ω és no degenerada, tenim un isomorfisme $T_q M \rightarrow T_q^* M : v \mapsto \iota(v)\omega_q$. Per tant, tenim una correspondència un a un entre camps vectorials i 1-formes via

$$\mathcal{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M) : X \mapsto \iota(X)\omega.$$

Definició 3.11. Un camp vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ es diu que és **simplèctic** si $\iota(X)\omega$ és tancada. Denotarem l'espai de camps vectorials simplèctics per $\mathcal{X}(M, \omega)$.

La següent proposició ens mostra la relació entre els simplectomorfismes i els camps vectorials simplèctics, i la podem trobar demostrada en una versió més extensa a [4], pàgines 83 i 84.

Proposició 3.12. Sigui M una varietat tancada. Si $t \mapsto \psi_t \in \text{Dif}(M)$ és una família suau de difeomorfismes generada per una família de camps vectorials $X_t \in \mathcal{X}(M)$ via

$$\frac{d}{dt} \psi_t = X_t \circ \psi_t, \quad \psi_0 = id,$$

aleshores $\psi_t \in \text{Symp}(M, \omega)$ per a cada t si, i només si, $X_t \in \mathcal{X}(M, \omega)$ per a cada t .

3.2.2 Fluxos Hamiltonians

Per a qualsevol funció suau $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, el camp vectorial $X_H : M \rightarrow TM$ determinat per la identitat

$$\iota(X_H)\omega = dH$$

s'anomena el **camp vectorial Hamiltonià** associat a la **funció Hamiltoniana** H . Si M és tancada, el camp vectorial X_H genera un grup uniparamètric suau de difeomorfismes $\phi_H^t \in \text{Dif}(M)$ que satisfà

$$\frac{d}{dt}\phi_H^t = X_H \circ \phi_H^t, \quad \phi_H^0 = id$$

i se l'anomena **flux Hamiltonià** associat a H . Aquest flux, per la proposició 3.12, és un simplectomorfisme, ja que la 1-forma prové de la diferenciació d'una funció i és, per tant, tancada. La identitat

$$dH(X_H) = (\iota(X_H)\omega)(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$$

ens mostra que el camp vectorial X_H és tangent als nivells $H = \text{constant}$, que anomenem **nivells d'energia**.

3.2.3 Isotopies Hamiltonianes

Considerem una aplicació suau $[0, 1] \times M \rightarrow M : (t, q) \mapsto \psi_t(q)$ tal que $\psi_t \in \text{Symp}(M, \omega)$ és un simplectomorfisme de M i $\psi_0 = id$ és la identitat. A tal família de simplectomorfismes se l'anomena una **isotopia simplèctica** de M . Qualsevol isotopia simplèctica està generada per una única família de camps vectorials $X_t : M \rightarrow TM$ tal que

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t.$$

Com que ψ_t és un simplectomorfisme per a tot t , els camps vectorials X_t són simplèctics i, per la proposició 3.12,

$$d\iota(X_t)\omega = 0.$$

Si totes aquestes 1-formes són exactes, aleshores existeix una família suau de funcions Hamiltonianes $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\iota(X_t)\omega = dH_t.$$

Això vol dir que X_t és el camp vectorial Hamiltonià associat a H_t per a cada t . En aquest cas, la família H_t s'anomena un **Hamiltonià que depèn del temps** i a ψ_t se l'anomena una **isotopia Hamiltoniana**.

A un simplectomorfisme $\psi \in \text{Symp}(M, \omega)$ se l'anomena **simplectomorfisme Hamiltonià** si existeix una isotopia Hamiltoniana $\psi_t \in \text{Symp}(M, \omega)$ de $\psi_0 = id$ a $\psi_1 = \psi$. Denotarem l'espai dels simplectomorfismes Hamiltonians per $\text{Ham}(M, \omega)$ o bé per $\text{Ham}(M)$.

3.2.4 Teorema de Darboux

Teorema 3.13. (Darboux) *Tota forma simplèctica ω en M és localment difeomorfa a la forma simplèctica estàndard ω_0 a $\mathbb{R}^{2n}$.*

Demostració. [4], pàgines 93-95. □

Com totes les varietats simplèctiques es poden relacionar amb $\mathbb{R}^{2n}$ i ω_0 , podem estudiar els symplectomorfismes de $\mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{R}^{2n}$. En aquest cas, la condició perquè ψ sigui symplectomorfisme es pot traduir a

$$d\psi^T J_0 d\psi = J_0,$$

és a dir, $d\psi$ ha de ser una matriu simplèctica, i les condicions que ha de complir el diferencial del symplectomorfisme si l'escriuim com

$$d\psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

són les condicions (3.2), (3.3) i (3.4).

4 Teorema de Poincaré-Birkhoff

En el seu estudi de solucions periòdiques en problemes de mecànica celeste, Henri Poincaré va construir un model molt simple que contenia les dificultats bàsiques del problema. Aquest model consisteix en una aplicació d'un anell pla en si mateix i que preserva l'àrea. Aplicacions d'aquest estil sorgeixen de l'estudi de sistemes dinàmics amb dos graus de llibertat (o espai de fase 4-dimensional).

Gran part del treball inicial en la dinàmica Hamiltoniana va estar motivada per l'intent d'entendre la mecànica celeste com, per exemple, el sistema planetari. Una pregunta important és si un sistema té òrbites periòdiques i també la pròpia dinàmica a prop d'una òrbita periòdica. Poincaré estava interessat en estudiar les solucions més senzilles de les equacions del moviment dels planetes (o altres sistemes) perquè pensava, i encertadament, que conformarien una mena d'esquelet del sistema al voltant del qual s'organitzaria la dinàmica del mateix.

Aquesta dinàmica es pot descriure en termes de simplectomorfismes locals anomenats aplicacions de Poincaré, que són aplicacions de retorn sobre un nivell d'energia, i el problema de trobar òrbites periòdiques passa a ser un problema de trobar punts fixos de simplectomorfismes. Un cas concret és el model de Poincaré i és el que estudiem en aquest capítol.

Sigui $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funció Hamiltoniana en una varietat simplèctica (M, ω) $2n$ -dimensional i considerem l'equació diferencial de Hamilton

$$\dot{p}(t) = X_H(p(t)). \quad (4.1)$$

Denotem per $\phi_H^t : \Omega_t \rightarrow M$ el corresponent flux Hamiltonià i sigui $p(t) = p(t+T) = \phi_H^t(p(t_0))$ una solució periòdica no constant de (4.1) sobre la superfície d'energia $H = 0$. Prenem una funció suau $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ qualsevol tal que

$$G(p_0) = 0, \quad \{G, H\} \neq 0$$

amb $p_0 = p(t_0)$ i

$$\{G, H\} = -(\nabla G)^T J_0 \nabla H$$

el claudàtor de Poisson, que es pot relacionar amb la derivada d'una funció composta amb el flux:

$$\frac{d}{dt} G \circ \phi_H^t = -(\nabla G)^T J_0 \nabla H = \{G, H\}.$$

Considerem el conjunt

$$\Sigma = \{p \in M \mid H(p) = G(p) = 0\}.$$

Si U és un entorn de p_0 suficientment petit, aleshores $\Sigma \cap U$ és una hipersuperfície suau de $H^{-1}(0)$. A més, existeix una única aplicació suau $\tau : \Sigma \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi_H^{\tau(p)}(p) \in \Sigma, \quad \tau(p_0) = T.$$

Per veure-ho, hem de resoldre l'equació $G(\phi_H^t(p)) = 0$ per $t = \tau(p)$ en un entorn de $p = p_0$. Això és possible pel teorema de la funció implícita si

$$\frac{d}{dt} G(\phi_H^t(p)) = \{G, H\}(p) \neq 0.$$

que és una de les condicions que hem imposat a G en p_0 . Ara definim el difeomorfisme local

$$\psi : \Sigma \cap U \rightarrow \Sigma : p \mapsto \phi_H^{\tau(p)}(p).$$

Aquesta és l'**aplicació de Poincaré** i Σ és la **secció de Poincaré**.

Lema 4.1. *La secció de Poincaré $\Sigma \cap U$ és una subvarietat simplèctica de M i l'aplicació de Poincaré $\psi : \Sigma \cap U \rightarrow \Sigma$ és un symplectomorfisme.*

Demostració. [4], pàgines 267 i 268. □

En el cas de 2 graus de llibertat, la secció de Poincaré Σ és una superfície 2-dimensional, i una aplicació simplèctica és equivalent a una aplicació que preserva l'àrea, és a dir, l'aplicació de Poincaré ψ preserva la forma d'àrea ω . L'aplicació de Poincaré sobre la superfície es pot entendre a la secció de Poincaré com a cada punt p de la superfície s'envia al següent punt en el qual la corba de l'espai de fase que s'origina en p interseca de nou la superfície. D'aquesta manera, una corba tancada en l'espai de fase es correspon amb un punt fix de l'aplicació o a una potència d'aquesta. Recíprocament, un punt fix de l'aplicació o d'una potència d'aquesta determina una corba tancada a l'espai de fase.

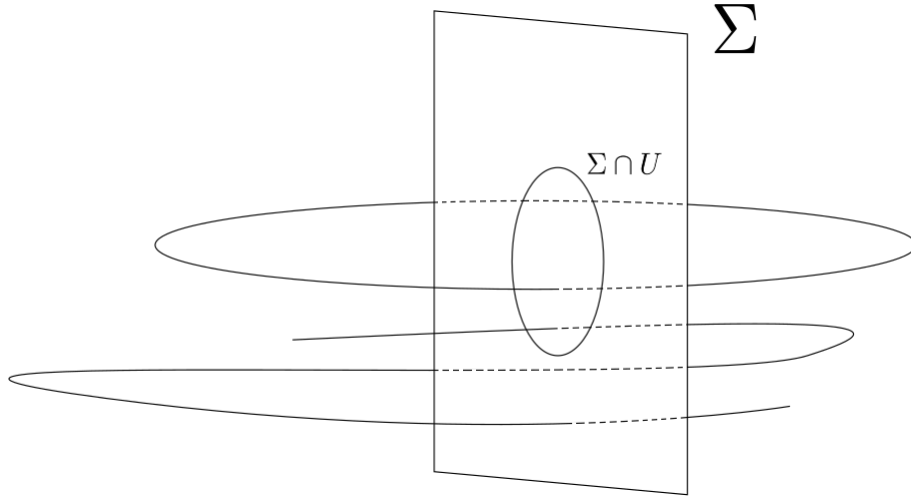


Figura 1: Secció de Poincaré en el cas de dos graus de llibertat.

Pel teorema de Darboux, en qualsevol superfície existeixen coordenades locals tals que la forma d'àrea coincideix amb la forma estàndard $\omega_0 = du \wedge dv$. Per tant, podem identificar un entorn del punt fix p_0 en la superfície Σ amb un entorn obert de 0 en $\mathbb{R}^2$ de manera que la forma d'àrea ω correspongui amb la forma estàndard $\omega_0 = du \wedge dv$.

En aquestes coordenades, l'aplicació de Poincaré és un homeomorfisme que preserva l'àrea d'un entorn obert de $0 \in \mathbb{R}^2$ amb un punt fix en 0. Si existeix un cercle invariant a prop del 0, aleshores aquest talla un disc invariant. Qualsevol dos cercles tallen un anell. Aquesta serà la situació del teorema d'aquest apartat.

Tal anell es pot identificar amb l'anell estàndard

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq u^2 + v^2 \leq b\}$$

a través d'una transformació que preservi l'àrea. **L'últim teorema geomètric de Poincaré** assegura que qualsevol homeomorfisme que preservi l'àrea

$$\psi : A \rightarrow A$$

que preservi les dues components de la vora i les faci girar en direccions oposades ha de tenir mínim dos punts fixos.

És convenient introduir coordenades polars $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i $y > 0$ tal que

$$u = \sqrt{y} \cos(2\pi x), \quad v = \sqrt{y} \sin(2\pi x).$$

Aleshores

$$du \wedge dv = -\pi dx \wedge dy$$

i l'homeomorfisme ψ continua preservant l'àrea en les coordenades x i y . En aquestes coordenades, l'anell és la tira $a \leq y \leq b$ i l'homeomorfisme ψ pren la forma

$$\psi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)),$$

on

$$f(x+1, y) = f(x, y) + 1, \quad g(x+1, y) = g(x, y). \quad (4.2)$$

Assumim que ψ preserva les dues components de la vora de A

$$g(x, a) = a, \quad g(x, b) = b, \quad (4.3)$$

i satisfà la **condició de twist**

$$f(x, a) < x, \quad f(x, b) > x. \quad (4.4)$$

Dos punts (x, y) i (x', y') direm que són **geomètricament diferents** si bé $y' \neq y$ o bé $x - x' \notin \mathbb{Z}$.

Teorema 4.2. (Poincaré-Birkhoff) *Si sigui ψ un homeomorfisme de l'anell $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b\}$ que preserva l'àrea, essent $\psi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ que satisfà les condicions (4.2), (4.3) i (4.4). Aleshores ψ té al menys dos punts fixos geomètricament diferents.*

Demostració. Demostrarem l'existència d'un punt fix. Assumim que ψ no té punts fixos. Per a qualsevol camí $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ amb $\gamma(0) \in \mathbb{R} \times a$ i $\gamma(1) \in \mathbb{R} \times b$ definim l'aplicació

$$\rho_\gamma(t) = \frac{\psi(\gamma(t)) - \gamma(t)}{|\psi(\gamma(t)) - \gamma(t)|} \in S^1.$$

De la condició de twist veiem que

$$\rho_\gamma(0) = -1, \quad \rho_\gamma(1) = +1.$$

Prenem qualsevol aixecament $\alpha_\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\rho_\gamma(t) = e^{i\alpha_\gamma(t)}.$$

Aleshores $\alpha_\gamma(1) - \alpha_\gamma(0) = (2k + 1)\pi$ per algun enter k . Ara bé, qualssevol dos camins γ_0 i γ_1 són homòtops per una homotopia γ_λ , i també ho són els corresponents aixecaments α_{γ_0} i α_{γ_1} . Però l'expressió $\alpha_{\gamma_\lambda}(1) - \alpha_{\gamma_\lambda}(0)$ és independent de λ . Aleshores, o bé $\alpha_\gamma(1) - \alpha_\gamma(0)$ és positiu per qualsevol γ o bé és negatiu per qualsevol γ . Definim aleshores

$$\mu(\psi) = \text{sign}(\alpha_\gamma(1) - \alpha_\gamma(0)) \in \{+1, -1\}$$

Aquesta expressió està ben definida sempre que ψ sigui una aplicació contínua que satisfà la condició de twist (4.4) i no té punts fixes. En el cas que ψ preservi l'àrea, veure que $\mu(\psi)$ ha de ser tant +1 com -1, donant la contradicció buscada.

Extenem ψ a un homeomorfisme de $\mathbb{R}^2$ fent $f(x, y) = f(x, a)$ per $y \leq a$, $f(x, y) = f(x, b)$ per $y \geq b$, i $g(x, y) = y$ en ambdós casos. Notem que ψ preserva l'àrea només a l'anell A . Assumim que ψ no té punts fixos a l'anell i, per tant, tampoc en té a $\mathbb{R}^2$.

Definim ara la translació

$$\tau_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, y + \varepsilon)$$

Aleshores l'aplicació $\psi_\varepsilon = \tau_\varepsilon \circ \psi$ és un homeomorfisme de $\mathbb{R}^2$ que preserva l'àrea a l'anell A i no té punts fixos per $\varepsilon > 0$ suficientment petit. Considerem la tira

$$D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq y \leq a + \varepsilon\}.$$

Com l'homeomorfisme ψ_ε porta $y \geq a$ a $y \geq a + \varepsilon$, tenim que la cinta D_0 no interseca les seves imatges $D_j = \psi_\varepsilon^j(D_0)$ sota els iterats de ψ_ε per qualsevol $j \geq 1$. Per tant, les cintes D_j són disjunctes dos a dos. Notem també que la clausura de D_0 interseca D_1 en $y = a + \varepsilon$. Com ψ_ε preserva l'àrea, cada cinta D_j té àrea ε . Per tant, ha d'existir un enter $k \geq 2$ tal que $D_{k-1} \not\subset A$. Per tant, existeix un punt $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_k \geq b, \quad (x_k, y_k) = \psi_\varepsilon^k(x_0, a).$$

Prenem k el primer enter amb aquesta propietat. Ara definim el camí $\gamma : [0, k+1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ connectant primer el punt (x_0, a) amb la seva imatge sota ψ_ε per una línia recta en D_0

$$\gamma(t) = (1-t)(x_0, a) + t\psi_\varepsilon(x_0, a) \in D_0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

i després iterant aquest camí sota ψ_ε

$$\gamma(j+t) = \psi_\varepsilon^j(\gamma(t)) \in D_j, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Aleshores, $\gamma(t) \in A$ per $0 \leq t \leq k-1$ i $\gamma(k) = (x_k, y_k)$ amb $y_k \geq b$. Sigui $T \in [k-1, k]$ el primer temps tal que $\gamma(t) \in \mathbb{R} \times b$ i definim

$$\rho(t) = \frac{\psi_\varepsilon(\gamma(t)) - \gamma(t)}{|\psi_\varepsilon(\gamma(t)) - \gamma(t)|} = \frac{\gamma(t+1) - \gamma(t)}{|\gamma(t+1) - \gamma(t)|}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

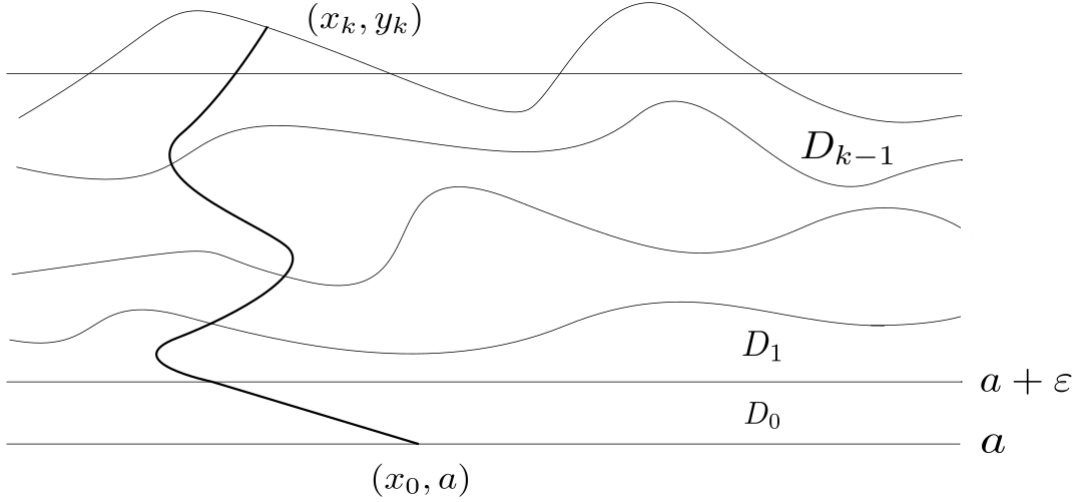


Figura 2: Les cintes D_i i el camí γ .

Com els conjunts D_j són disjunts dos a dos, veiem que $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ per $s \neq t$. Per tant, ρ és homòtop al camí

$$\rho_0(t) = \begin{cases} \frac{\gamma(2t+1)-\gamma(0)}{|\gamma(2t+1)-\gamma(0)|}, & 0 \leq t \leq T/2, \\ \frac{\gamma(T+1)-\gamma(2t-T)}{|\gamma(T+1)-\gamma(2t-T)|}, & T/2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Ara, $\gamma(0) \in \mathbb{R} \times a$, $\gamma(T) \in \mathbb{R} \times b$, i $\gamma(t) \in A$ per $0 \leq t \leq T$ i, per tant, $\rho_0(t)$ està en el semiplà superior per a qualsevol t . Prenem un aixecament $\alpha_0(t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\rho_0(t) = e^{i\alpha(t)}, \quad \pi/2 < \alpha_0(0) < \pi.$$

Aleshores, $0 < \alpha_0(t) < \pi$ per $0 \leq t \leq T$ i, en particular

$$\alpha_0(T) < \pi/2.$$

Notem de fet que $\alpha_0(t)$ decreix des d'aproximadament π cap a aproximadament 0 quan t va de 0 a T . Prenent el límit $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenim $\mu(\psi) = -1$. Un argument similar amb $\tau_{-\varepsilon}$ ens porta a una corba $\gamma(t)$ per a la qual $\rho_0(t)$ queda al semiplà inferior i el corresponent aixecament $\alpha_0(t)$ creix des d'aproximadament $-\pi$ fins a aproximadament 0 quan t va de 0 a T , donant la contradicció $\mu(\psi) = +1$ i, per tant, ψ ha de tenir algun punt fix.

□

Aquest teorema va ser enunciat per Poincaré no gaire abans de la seva mort, i va ser demostrat més tard per G. D. Birkhoff. L'argument de Poincaré per arribar al model del teorema pot ser aplicat a molts altres problemes, però la complicada resolució de Birkhoff no porta a una possible fàcil generalització a dimensions superiors.

Encara que aquest teorema sigui aplicat al cas d'una aplicació de Poincaré en una superfície 2-dimensional i estigui basat per tant en una aplicació que preserva l'àrea,

les aplicacions de Poincaré, com hem vist, són en general aplicacions simplèctiques i, per tant, aquest teorema es pot considerar un dels primers resultats de la geometria simplèctica i motiva l'exploració en la generalització de resultats en aquesta branca de les matemàtiques.

En els següents capítols veurem simplectomorfismes que compleixen certes condicions i que podrem estudiar en dimensions superiors per tal de trobar possibles generalitzacions a problemes de punts fixos i, per tant, aplicacions com per exemple a òrbites periòdiques de sistemes dinàmics amb més graus de llibertat i la dinàmica propera a aquestes.

5 Funcions generatrius

A vegades els symplectomorfismes es poden descriure a través de funcions escalars, que seran les que anomenarem funcions generatrius. Sobretot ens centrarem en dues que són les més clàssiques per a symplectomorfismes de $\mathbb{R}^{2n}$: les de tipus S i les de tipus V . La funció generatriu de tipus S existeix només per a symplectomorfismes que satisfan una certa condició de no degeneració. Per altra banda, les de tipus V existeixen per a qualsevol que sigui suficientment proper a la identitat.

5.1 Funcions generatrius de tipus S

Sigui $\psi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un symplectomorfisme definit en un obert simplement connex $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$. Escrivim l'equació $(x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0)$ com

$$x_1 = u(x_0, y_0), \quad y_1 = v(x_0, y_0).$$

Notem aquí que $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ és un vector, i similarment per x_1, y_0 i y_1 . Denotem per $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ el conjunt de tots els vectors de la forma $(x_0, u(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^{2n}$ amb $(x_0, y_0) \in \Omega$ i assumim que l'aplicació

$$\Omega \rightarrow U : (x_0, y_0) \mapsto (x_0, u(x_0, y_0))$$

és un difeomorfisme amb la seva imatge U . Pel teorema de la funció implícita, un symplectomorfisme $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ satisfà aquesta condició en un entorn d'un punt $z_0 = (x_0, y_0)$ si, i només si,

$$d\psi(z_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \det(B) \neq 0. \quad (5.1)$$

Lema 5.1. *Amb les condicions esmentades, existeix una funció $S : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que per a qualsevol $(x_0, y_0) \in \Omega$ i $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^{2n}$ amb $(x_0, x_1) \in U$ tenim*

$$(x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0) \Leftrightarrow y_0 = -\frac{\partial S}{\partial x_0}(x_0, x_1), y_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}(x_0, x_1).$$

A qualsevol funció S amb aquestes propietats se l'anomena **funció generatriu de tipus S de ψ** .

Demostració. Primer de tot, recordem que per hipòtesi es compleix (5.1) i, per tant, la matriu B és invertible. Considerem el graf

$$\Gamma_\psi = \{(x_0, y_0, x_1, y_1) \mid (x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0)\}$$

i l'aplicació

$$\pi : \Gamma_\psi \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (x_0, x_1).$$

Per hipòtesi, aquesta aplicació és un difeomorfisme amb la seva imatge en U . Per tant, existeixen funcions $F, G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = F(x_0, x_1)$, $G = G(x_0, x_1)$, tals que

$$\Gamma_\psi = \{(x_0, F(x_0, x_1), x_1, G(x_0, x_1))\}.$$

Voldrem escriure els diferencials de F i G en termes de les variables x_0 i y_0 , és a dir, en termes de les matrius A , B , C i D de (5.1). L'espai tangent del graf en un punt és

$$T_{(x_0, F(x_0, x_1), x_1, G(x_0, x_1))} \Gamma_\psi = \{(\dot{x}_0, \dot{y}_0, Du \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}, Dv \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix})\}$$

i, per altra banda, també és

$$T_{(x_0, F(x_0, x_1), x_1, G(x_0, x_1))} \Gamma_\psi = \{(\dot{x}_0, DF \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}, \dot{x}_1, DG \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix})\}$$

Tenim

$$\dot{x}_1 = Du \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = A\dot{x}_0 + B\dot{y}_0 \Rightarrow \dot{y}_0 = B^{-1}\dot{x}_1 - B^{-1}A\dot{x}_0$$

Per tant,

$$T_{(x_0, F(x_0, x_1), x_1, G(x_0, x_1))} \Gamma_\psi = \{(\dot{x}_0, (-B^{-1}A \ B^{-1}) \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}, \dot{x}_1, (C - DB^{-1}A \ DB^{-1}) \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix})\}$$

i aconseguim

$$\begin{cases} DF = \begin{pmatrix} -B^{-1}A & B^{-1} \end{pmatrix} \\ DG = \begin{pmatrix} C - DB^{-1}A & DB^{-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Veiem ara que la 1-forma

$$\langle y_1, dx_1 \rangle - \langle y_0, dx_0 \rangle = \langle G(x_0, x_1), dx_1 \rangle - \langle F(x_0, x_1), dx_0 \rangle$$

és tancada. Si la derivem, ens surten els termes

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial F_j}{\partial x_{1i}}, \quad \frac{\partial G_i}{\partial x_{1j}} - \frac{\partial G_j}{\partial x_{1i}}, i \neq j, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_{0j}} - \frac{\partial F_j}{\partial x_{0i}}, i \neq j.$$

Definim en primer lloc les matrius γ , Φ i M amb les entrades

$$\gamma_{ij} = \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_{1j}} - \frac{\partial G_j}{\partial x_{1i}} \right)_{ij}$$

$$\Phi_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{0j}} - \frac{\partial F_j}{\partial x_{0i}} \right)_{ij}$$

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial F_j}{\partial x_{1i}} \right)_{ij}$$

Veiem que aquestes matrius es poden escriure en funció de les matrius de (5.1) com

$$\gamma = DB^{-1} - (B^{-1})^T D^T$$

$$\Phi = A^T (B^{-1})^T - B^{-1}A$$

$$M = C - DB^{-1}A + (B^{-1})^T$$

Utilitzant les condicions (3.2), (3.3) i (3.4) veiem que totes tres matrius són 0 i, per tant, la 1-forma $\langle y_1, dx_1 \rangle - \langle y_0, dx_0 \rangle$ és tancada. A més, com que U és simplement connex, la forma és exacta. Per tant, existeix una funció $S : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} dS &= \left\langle \frac{\partial S}{\partial x_0}, dx_0 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x_1}, dx_1 \right\rangle = -\langle y_0, dx_0 \rangle + \langle y_1, dx_1 \rangle \\ \Rightarrow y_0 &= -\frac{\partial S}{\partial x_0}(x_0, x_1), \quad y_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}(x_0, x_1). \end{aligned}$$

□

Veiem ara que si un symplectomorfisme $\psi = \phi_H^{t_1, t_0}$ generat per una família de funcions Hamiltonianes que depèn del temps $H_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ admet una funció generatriu de tipus S , aleshores aquesta funció generatriu ve donada per la integral d'acció

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle y, \dot{x} \rangle - H(t, x, y)) dt \quad (5.2)$$

introduïda a la secció 2.2. La nostra assumptió sobre ψ és que per a cada (x_0, x_1) en un domini convenient $U = U_{t_0, t_1}$ hi ha uns únics y_0 i y_1 tals que $\psi(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$. En aquest cas la corba

$$z(t) = (x(t), y(t)) = \phi_H^{t, t_0}(x_0, y_0)$$

és la única solució del sistema Hamiltonià

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.3)$$

amb condicions de contorn $x(t_0) = x_0$, i $x(t_1) = x_1$. Això determina una aplicació suau

$$U \rightarrow C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^{2n}) : (x_0, x_1) \mapsto z.$$

Definim

$$S_H(x_0, x_1) = \Phi_H(z)$$

per $(x_0, x_1) \in U$ on $\Phi_H(z)$ ve donada per (5.2).

Lema 5.2. *La funció S_H és una funció generatriu de $\psi = \phi_H^{t_1, t_0}$.*

Demostració. [4], pàgina 283. □

Una funció generatriu per ψ està determinada llevat d'una constant additiva. Per distingir la funció generatriu del lema 5.2 l'anomenarem la **funció generatriu determinada per H** en l'interval $[t_0, t_1]$. Si fixem $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i sigui $S(t, x)$ la funció generatriu determinada per H en $[t_0, t]$ evaluada en (x_0, x) , aleshores S satisfà l'equació de **Hamilton-Jacobi**

$$\partial_t S + H(t, x, \partial_x S) = 0.$$

Per més informació sobre l'equació de Hamilton-Jacobi veure [4] pàgines 283, 284 o bé [1] pàgines 255-270.

5.2 Problemes variacionals de temps discret

Així com podem pensar en una aplicació com l'anàleg en temps discret d'un flux, podem pensar en un symplectomorfisme com l'anàleg en temps discret d'un flux Hamiltonià. En la secció 2.1 havíem introduït els fluxes Hamiltonians com la solució d'un problema variacional. De manera anàloga, els symplectomorfismes sorgeixen naturalment de problemes variacionals de temps discret. Aquests estan relacionats amb la funció S del lema 5.1. Veiem com.

Assumim que $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ és un symplectomorfisme amb funció generatriu $S : U \rightarrow \mathbb{R}$ i sigui

$$(x_j, y_j) = \psi^j(x_0, y_0), \quad 1 \leq j \leq l,$$

una òrbita sota ψ . Pel lema 5.1 aquesta òrbita està únicament determinada per la seqüència

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_l).$$

Notem que donada una seqüència $\mathbf{x}$ amb $(x_j, x_{j+1}) \in U$ per a tot j aquesta correspon a una òrbita $(x_j, y_j) = \psi^j(x_0, y_0)$ de ψ que comença a $(x_0, y_0) \in \Omega$ i acaba a (x_l, y_l) si, i només si,

$$\partial_2 S(x_{j-1}, x_j) + \partial_1 S(x_j, x_{j+1}) = 0 \quad (5.4)$$

per $j = 1, \dots, l-1$ i on $\partial_1 S$ denota el vector gradient respecte les n primeres variables i $\partial_2 S$ respecte les n últimes. Si $\mathbf{x}$ satisfà (5.4) aleshores la seqüència $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_l)$ pot ser recoberta per $\mathbf{x}$ via

$$y_j = \partial_2 S(x_{j-1}, x_j) = -\partial_1 S(x_j, x_{j+1}).$$

Ara bé, (5.4) són les equacions de Euler-Lagrange per el problema variacional de temps discret

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{l-1} S(x_j, x_{j+1})$$

subjecte a variacions $\mathbf{x} + \xi$, on $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l)$ amb $\xi_0 = \xi_l = 0$.

5.3 Mecànica Hamiltoniana discreta. Funcions generatrius de tipus V

Hem vist que les òrbites d'un symplectomorfisme $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es poden expressar com les solucions d'un problema variacional discret donat que ψ admeti una funció generatriu de tipus S . A més, aquesta condició és anàloga a la condició de Legendre en el cas de temps continu. Ara bé, en el cas de temps continu l'acció simplèctica donava lloc a una formulació variacional alternativa dels sistemes Hamiltonians que no requeria la condició de Legendre. Similarment, en el cas de temps discret, hi ha una formulació variacional per les òrbites de ψ fins i tot quan ψ no admet una funció generatriu de tipus S .

Perquè això funcioni, un ha d'assumir que ψ és C^1 -proper a la identitat. Però qualsevol isotopia simplèctica pot ser descomposada per espais de temps suficientment petits en una seqüència de simplectomorfismes que satisfan aquesta condició. Per tant, en contrast amb la condició (5.1), aquesta no suposa una restricció molt forta. Com a resultat, obtindrem una versió discreta del funcional d'acció simplèctica, que serà una peça important per l'objectiu del treball.

Segui $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un simplectomorfisme global i, com a l'apartat anterior, escrivim l'equació $(x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0)$ com

$$x_1 = u(x_0, y_0), \quad y_1 = v(x_0, y_0).$$

Si les primeres derivades de ψ satisfan

$$\|d\psi(z) - \text{Id}\| \leq \frac{1}{2} \quad (5.5)$$

per tot $z \in \mathbb{R}^{2n}$, aleshores la condició (5.1) no cal que se satisfaci. No obstant, la matriu A en (5.1) ha de ser necessàriament no singular i se segueix que hi haurà un altre tipus de funció generatriu. L'aplicació $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x_0, y_0) \mapsto (u(x_0, y_0), y_0)$ té ara una inversa global i per tant podem utilitzar les coordenades $x_1 = u(x_0, y_0)$ i y_0 com a variables independents substituint x_0 i y_0 .

Lema 5.3. *Si ψ satisfà (5.5), aleshores existeix una funció suau $V = V(x, y)$ en $\mathbb{R}^{2n}$ tal que $(x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0)$ si, i només si,*

$$x_1 - x_0 = \frac{\partial V}{\partial y}(x_1, y_0), \quad y_1 - y_0 = -\frac{\partial V}{\partial x}(x_1, y_0).$$

Recíprocament, si $V : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció C^2 amb segones derivades suficientment petites, aleshores aquestes equacions determinen un simplectomorfisme

$$\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0).$$

*A qualsevol funció amb aquestes propietats se l'anomena **funció generatriu de tipus V**.*

Abans de fer la demostració del lema veiem un lema previ.

Lema 5.4. *Segui $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció diferenciable que compleix*

$$\|df(x) - \text{Id}\| \leq \frac{1}{2}$$

per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, f té una inversa global diferenciable.

Demostració. Veiem que f és exhaustiva. Segui $y \in \mathbb{R}^n$, volem veure si existeix $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = y$. Per veure-ho, escrivim

$$y + x - f(x) = x$$

i plantegem el problema de punt fix següent

$$\varphi(x) = x, \quad \varphi(x) := y + x - f(x).$$

Aquesta funció compleix

$$\|d\varphi\| = \|df(x) - \text{Id}\| \leq \frac{1}{2}.$$

Veiem que φ és contractiva. Conectem dos punts x_0 i x_1 per la funció

$$g(t) = \varphi(x_0 + t(x_1 - x_0)),$$

que compleix

$$g(0) = \varphi(x_0), \quad g(1) = \varphi(x_1).$$

Tenim doncs

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\| = \|g(1) - g(0)\| = \left\| \int_0^1 g'(t) dt \right\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_0\|.$$

Com φ és contractiva, pel teorema del punt fix de Banach [6], existeix un únic punt p tal que $\varphi(p) = p$. És a dir, per a cada $y \in \mathbb{R}^n$ existeix un únic $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = y$. Per tant, hem demostrat que f és tant exhaustiva com injectiva i és, per tant, bijectiva i té una inversa f^{-1} . Hem de veure ara, a més, que f^{-1} és diferenciable i, per tant, és un difeomorfisme. Tenim

$$\|df(x) - \text{Id}\| \leq \frac{1}{2}$$

Per tant,

$$df = \text{Id} + X, \quad \|X\| \leq \frac{1}{2}.$$

Podem escriure la inversa df^{-1} com

$$df^{-1} = \text{Id} - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \dots$$

i convergeix, ja que $\|X^k\| \leq \|X\|^k \leq \frac{1}{2^k}$.

□

Demostració. (Lema 5.3) Com hem anunciat, podem veure per la condició (5.5) que la matriu A de la condició (5.1) és no singular. Suposem que ho és. Si $\det A = 0$, tenim que existeix un vector unitàri $u = (u, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$Au = 0.$$

Per altra banda, tenim

$$\begin{cases} d\psi(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Cu \end{pmatrix} \\ \text{Id} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow (d\psi(u) - \text{Id}) \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ Cu \end{pmatrix}.$$

Però veiem que aconseguim la contradicció

$$\|(d\psi - \text{Id})(u)\| \geq \|u\|.$$

Per tant, A és no singular. A més, la funció $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_0)$ té una inversa global diferenciable, ja que

$$\|df - \text{Id}\| \leq \|d\psi - \text{Id}\| \leq \frac{1}{2}$$

i apliquem el lema 5.4. Anàlogament al lema 5.1, considerem el graf

$$\Gamma_\psi = \{(x_0, y_0, x_1, y_1) \mid (x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0)\}$$

i l'aplicació

$$\pi : \Gamma_\psi \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (x_1, y_0).$$

Hem vist que aquesta aplicació és un difeomorfisme. Per tant, existeixen funcions $F, G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = F(x_1, y_0)$, $G = G(x_1, y_0)$, tals que

$$\Gamma_\psi = \{(F(x_1, y_0), y_0, x_1, G(x_1, y_0))\}.$$

Voldrem escriure els diferencials de F i G en termes de les variables x_0 i y_0 , és a dir, en termes de les matrius A , B , C i D de (5.1). L'espai tangent del graf en un punt és

$$T_{(F(x_1, y_0), y_0, x_1, G(x_1, y_0))} \Gamma_\psi = \{(\dot{x}_0, \dot{y}_0, Du \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}, Dv \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix})\}$$

i, per altra banda, també és

$$T_{(F(x_1, y_0), y_0, x_1, G(x_1, y_0))} \Gamma_\psi = \{(DF \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}, \dot{y}_0, \dot{x}_1, DG \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix})\}$$

Tenim

$$\dot{x}_1 = Du \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = A\dot{x}_0 + B\dot{y}_0 \Rightarrow \dot{x}_0 = A^{-1}\dot{x}_1 - A^{-1}B\dot{y}_0$$

Per tant,

$$T_{(F(x_1, y_0), y_0, x_1, G(x_1, y_0))} \Gamma_\psi = \{((A^{-1} \quad -A^{-1}B) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}, \dot{y}_0, \dot{x}_1, (CA^{-1} \quad -CA^{-1}B + D) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix})\}$$

i aconseguim

$$\begin{cases} DF = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \end{pmatrix} \\ DG = \begin{pmatrix} CA^{-1} & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix} \end{cases}$$

Veiem ara que la 1-forma

$$\langle y_1, dx_1 \rangle + \langle x_0, dy_0 \rangle = \langle G(x_1, y_0), dx_1 \rangle + \langle F(x_1, y_0), dy_0 \rangle$$

és tancada. Si la derivem, ens surten els termes

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_{0j}} - \frac{\partial F_j}{\partial x_{1i}}, \quad \frac{\partial G_i}{\partial x_{1j}} - \frac{\partial G_j}{\partial x_{1i}}, i \neq j, \quad \frac{\partial F_i}{\partial y_{0j}} - \frac{\partial F_j}{\partial y_{0i}}, i \neq j.$$

Definim en primer lloc les matrius γ , Φ i M amb les entrades

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_{1j}} - \frac{\partial G_j}{\partial x_{1i}} \right)_{ij} \\ \Phi_{ij} &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_{0j}} - \frac{\partial F_j}{\partial y_{0i}} \right)_{ij} \\ M_{ij} &= \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_{0j}} - \frac{\partial F_j}{\partial x_{1i}} \right)_{ij} \end{aligned}$$

Veiem que aquestes matrius es poden escriure en funció de les matrius de (5.1) com

$$\begin{aligned} \gamma &= CA^{-1} - (A^{-1})^T C^T \\ \Phi &= B^T (A^{-1})^T - A^{-1} B \\ M &= D - CA^{-1} B - (A^{-1})^T \end{aligned}$$

Utilitzant les condicions (3.2), (3.3) i (3.4) veiem que totes tres matrius són 0 i, per tant, la 1-forma $\langle y_1, dx_1 \rangle + \langle x_0, dy_0 \rangle$ és tancada. A més, com que $\mathbb{R}^{2n}$ és simplement connex, la forma és exacta. Per tant, existeix una funció $W : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} dW &= \left\langle \frac{\partial W}{\partial x_1}, dx_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial W}{\partial y_0}, dy_0 \right\rangle = \langle y_1, dx_1 \rangle + \langle x_0, dy_0 \rangle \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{\partial W}{\partial y_0}(x_1, y_0), \quad y_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}(x_1, y_0). \end{aligned}$$

Aleshores, la funció V definida com

$$V(x_1, y_0) = \langle x_1, y_0 \rangle - W(x_1, y_0)$$

és la funció buscada. □

Observació 5.5. Notem que els punts fixos del simplectomorfisme venen donats pels punts crítics de la funció generatriu V . Els donarem més importància al capítol 6.

És interessant veure com s'assemblen les equacions de diferència del lema 5.3 amb les equacions diferencials de Hamilton (2.6). Tenim les derivades $\dot{x}$ i $\dot{y}$ reemplaçades per les diferències $x_1 - x_0$ i $y_1 - y_0$ respectivament. La funció generatriu V juga un paper similar en la mecànica discreta de Hamilton al que jugaria el Hamiltonià H en el cas continu.

Ara bé, hi ha maneres per relacionar sistemes Hamiltonians de temps continu amb sistemes de temps discret. Sigui $H(t, x, y) = H_t(x, y)$ un Hamiltonià que depèn del temps de classe C^2 tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} (||d^2 H_t(z)||_{\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}} + |dH_t(z)|_{\mathbb{R}^{2n}}) < \infty.$$

Això implica que els operadors solució $\phi_H^{t_1, t_0}$ del sistema Hamiltonià (5.3) estan globalment definits per tot t_0 i t_1 . Fixem $t_0 < t_1$ i un enter N suficientment gran i definim

$$\psi = \phi_H^{t_1, t_0}, \quad \psi_j = \phi_H^{\tau_{j+1}, \tau_j}, \quad \tau_j = t_0 + \frac{j}{N}(t_1 - t_0),$$

per $j = 0, \dots, N-1$. Aleshores

$$\psi = \psi_{N-1} \circ \dots \circ \psi_0$$

i, si N és suficientment gran, cada simplectomorfisme ψ_j satisfà el requisits del lema 5.3. Tenim doncs que per a cada j existeix una funció suau $V_j : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ que genera el simplectomorfisme $(x_{j+1}, y_{j+1}) = \psi_j(x_j, y_j)$ via les **equacions diferència de Hamilton**

$$x_{j+1} - x_j = \frac{\partial V_j}{\partial y}(x_{j+1}, y_j), \quad y_{j+1} - y_j = -\frac{\partial V_j}{\partial x}(x_{j+1}, y_j). \quad (5.6)$$

Recíprocament, pel lema 5.3 se segueix que per a qualsevol funció $V_j : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ amb primeres i segones derivades suficientment petites les equacions (5.6) determinen un simplectomorfisme ψ_j .

5.4 Acció simplèctica discreta

Les solucions de (5.6) poden ser descrites per un problema variacional tal com en el cas de temps continu. Denotem per $\mathcal{P} = \mathbb{R}^{2nN+n}$ el conjunt dels camins discrets $\mathbf{z} = (x_0, \dots, x_N, y_0, \dots, y_{N-1})$ on x_j i y_j són n -vectors reals. Definim l'**acció simplèctica discreta**

$$\Phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

per la fórmula

$$\Phi(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{N-1} (\langle y_j, x_{j+1} - x_j \rangle - V_j(x_{j+1}, y_j)). \quad (5.7)$$

Considerem primer el cas de condicions de contorn fixes amb valors x_0, x_N . Aleshores, pensem en Φ com una funció de $x_1, \dots, x_{N-1}, y_0, \dots, y_{N-1}$. Denotem les variacions per $\zeta = (\xi_0, \dots, \xi_N, \eta_0, \dots, \eta_{N-1})$.

Lema 5.6. *Un punt $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$ és crític per Φ respecte a variacions de la forma $\mathbf{z} + \zeta \in \mathcal{P}$ amb $\xi_0 = \xi_N = 0$ si, i només si, $\mathbf{z}$ satisfà les equacions de diferència de Hamilton (5.6) (la primera equació per $1 \leq j \leq N-1$ i la segona per $0 \leq j \leq N-1$).*

Demostració. Les derivades de Φ són

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = y_{j-1} - y_j - \frac{\partial V_{j-1}}{\partial x}(x_j, y_{j-1}),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = x_{j+1} - x_j - \frac{\partial V_j}{\partial y}(x_{j+1}, y_j)$$

per $1 \leq j \leq N-1$. La segona funciona també per $j = 0$. □

Com en l'observació 5.5, els punts fixos d'un simplectomorfisme que hem partit en N parts estan relacionats amb els punts crítics d'una funció. En aquest cas, la funció és l'acció simplèctica discreta. Considerem ara el cas de condicions de contorn periòdiques $x_0 = x_N$. El subespai dels camins discrets $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$ que satisfan aquesta condició es poden identificar amb el conjunt $\mathcal{P}_{\text{per}}$ de totes les successions periòdiques $\mathbf{z} = \{z_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ que satisfan $z_{j+N} = z_j$ per tot $j \in \mathbb{Z}$. L'acció simplèctica discreta

$$\Phi : \mathcal{P}_{\text{per}} \rightarrow \mathbb{R}$$

encara ve donada per (5.7). En aquest cas, extenem V_j i ψ_j periòdicament per tot $j \in \mathbb{Z}$ via

$$V_{j+N} = V_j, \quad \psi_{j+N} = \psi_j.$$

Lema 5.7. *Una successió periòdica $\mathbf{z}$ és un punt crític de $\Phi : \mathcal{P}_{\text{per}} \rightarrow \mathbb{R}$ si, i només si, $z_0 = (x_0, y_0)$ és un punt fix de ψ i $z_{j+1} = \psi_j(z_j)$ per tot $j \in \mathbb{Z}$. A més, $\mathbf{z}$ és no degenerat com a punt crític de Φ si, i només si, z_0 és no degenerat com a punt fix de ψ .*

Demostració. Les identitats del lema 5.6 segueixen essent vàlides per a tot $j \in \mathbb{Z}$. Per tant, $\mathbf{z} \in \mathcal{P}_{\text{per}}$ és punt crític de Φ si, i només si, $z_{j+1} = \psi_j(z_j)$ per tot $j \in \mathbb{Z}$ i $z_0 = (x_0, y_0)$ és punt fix de ψ .

Per veure ara la relació de degeneració, veiem que el hessià de Φ en $\mathbf{z}$ com a operador lineal $\zeta \mapsto \zeta'$ és

$$\begin{aligned} \xi'_{j+1} &= \eta_j - \eta_{j+1} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} \xi_{j+1} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial x \partial y} \eta_j, \\ \eta'_j &= \xi_{j+1} - \xi_j - \frac{\partial^2 V_j}{\partial y \partial x} \xi_{j+1} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial y^2} \eta_j. \end{aligned}$$

on totes les derivades parcials de V_j estan evaluades a la parella $(x_{j+1}, y_j) \in \mathbb{R}^{2n}$. Per altra banda, podem veure que una successió $\zeta = \{\zeta_j\}_j$ està al nucli del hessià si, i només si,

$$\zeta_{j+1} = d\psi_j(z_j)\zeta_j$$

per a cada j . Per les condicions de contorn periòdiques $\zeta_N = \zeta_0$, trobem

$$\zeta_0 = d\psi(z_0)\zeta_0$$

Per tant, el nucli del hessià en $\mathbf{z}$ és isomorf al nucli de $\text{Id} - d\psi(z_0)$, que són les condicions per a que un punt crític d'una funció i un punt fix d'un difeomorfisme respectivament siguin no degenerats (veure apartat 6.1). $\square$

6 Conjectura d'Arnold

Una generalització natural del teorema de Poincaré-Birkhoff implica l'existència de punts fixes d'un simplectomorfisme en una varietat simplèctica compacte. Aquesta pregunta ja va ser formulada per Birkhoff el 1927, en que va escriure sobre el teorema de Poincaré-Birkhoff *fins ara no s'ha pogut trobar una generalització adequada del teorema a dimensions superiors, i la seva aplicació queda restringida a sistemes dinàmics amb dos graus de llibertat*.

6.1 Punts fixos de simplectomorfismes i conjectura d'Arnold

Quan volem estimar el nombre de punts fixos de difeomorfismes és important distingir els casos de punts fixos degenerats i el cas de punts fixos no degenerats. Un punt fix d'un difeomorfisme $\phi : M \rightarrow M$ es diu que és **no degenerat** si el graf de ϕ interseca la diagonal en $M \times M$ transversalment en (x, x) . Equivalentment,

$$\det(d\phi(x) - \text{Id}) \neq 0,$$

és a dir, cap valor propi de $d\phi(x)$ ha de ser 1. Si la condició no se satisfà, el punt fix es diu que és **degenerat**.

Aquesta distinció correspon a la noció habitual de degeneració de punts crítics d'una funció. Per exemple, si el simplectomorfisme ψ té una funció generatriu F , com hem vist en l'observació 5.5, els punts fixos p de ψ es corresponen amb punts crítics de F i la degeneració de p com a punt fix coincideix amb la de p com a punt crític de F .

Definició 6.1. *Una funció es diu que és una **funció de Morse** si tots els seus punts crítics són no degenerats i són aïllats.*

En general no podem esperar que els simplectomorfismes d'una varietat simplèctica compacte tinguin punts fixos. Per exemple, una rotació en el torus 2-dimensional $\mathbb{T}^2$ és un simplectomorfisme sense cap punt fix. Però, si un simplectomorfisme és suficientment proper a la identitat i si prové d'un flux Hamiltonià, aleshores els punts fixos es corresponen amb els punts crítics de funcions generatrius. Basat en aquesta observació i el teorema de Poincaré-Birkhoff, V. I. Arnold va formular en la dècada de 1960 la seva famosa conjectura:

Conjectura 6.2. (Arnold) *Sigui $\psi : M \rightarrow M$ un simplectomorfisme Hamiltonià d'una varietat simplèctica compacta (M, ω) . Aleshores, ψ ha tenir com a mínim tants punts fixos com una funció en M té punts crítics. Si els punts fixos són tots no degenerats, aleshores el nombre de punts fixos és com a mínim el mínim nombre de punts crítics d'una funció de Morse en M .*

En general és molt difícil estimar el nombre mínim de punts crítics d'una funció en una varietat arbitrària M , encara que un es restringeixi a funcions de Morse.

Tanmateix, aquesta conjectura està demostrada en molts casos particulars i amb petites variacions amb condicions més febles per a varietats simplèctiques compactes arbitràries. Exemples són els treballs de Fukaya-Ono [2] i Liu-Tian [3]. Dos casos concrets més són els difeomorfismes Hamiltonians propers a la identitat ([4], pg. 344) i per al torus $\mathbb{T}^{2n}$ estàndard. En aquest treball estudiarem aquest últim, amb demostracions explícites dels casos en que el simplectomorfisme és suficientment proper a la identitat i del torus 2-dimensional $\mathbb{T}^2$, i amb una construcció final per a la demostració del cas general del torus $\mathbb{T}^{2n}$ estàndard.

6.2 Conjectura d'Arnold per a torus

La prova de la conjectura en el cas del torus $\mathbb{T}^{2n}$ està basada en l'existència de funcions generatrius de simplectomorfismes C^1 -propers a la identitat. Podem identificar el torus $\mathbb{T}^{2n}$ amb l'espai $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ i, gràcies a aquest fet, podem fer una construcció basada en la del lema 5.3. Explícitament, només demostrarem rigorosament el cas $\mathbb{T}^2$, tant en el cas degenerat com el no degenerat, però enunciaré el cas general. Abans però, hem de fer un estudi dels simplectomorfismes del torus.

Proposició 6.3. *Si identifiquem el $2n$ -torus $\mathbb{T}^{2n}$ amb el quocient $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$, qualsevol difeomorfisme ψ del $2n$ -torus que sigui homotòpic a la identitat es pot escriure com*

$$\psi(x, y) = (x + p(x, y), y + q(x, y)),$$

on les funcions p i q són de període 1 en totes les variables $x, y \in \mathbb{R}^n$. A més, si ψ és Hamiltonià,

$$\int_{\mathbb{T}^{2n}} p \, dx dy = \int_{\mathbb{T}^{2n}} q \, dx dy = 0 \quad (6.1)$$

Demostració. Sigui $\psi : \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ un difeomorfisme. Comencem veient que si ψ és homòtop a la identitat, aleshores l'aplicació $f : \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ definida com $f(\theta) = \psi(\theta) - \theta$ és homòtopa a una aplicació constant. Si ψ és homòtop a la identitat, aleshores existeix una homotopia

$$H : I \times \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n},$$

amb $I = [0, 1]$, tal que $H(0, \theta) = \theta$ i $H(1, \theta) = \psi(\theta)$. Definim ara l'homotopia

$$G : I \times \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$$

definida com

$$G(t, \theta) = H(t, \theta) - \theta.$$

És contínua i compleix $G(0, \theta) = 0$ i $G(1, \theta) = f(\theta)$. Per tant, f és homòtopa a una aplicació constant.

Sigui $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ una aplicació tal que cada $\theta \in \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ l'envia a $\alpha \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $[\alpha] = \theta$, on $[\cdot]$ indica $\pi(\cdot)$, amb $\pi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ la projecció. A aquesta aplicació l'anomenarem aixecament. Notem que la definició d'aquesta aplicació

conté una ambigüitat, que és que en general hi ha infinits α que representen un mateix θ a $\mathbb{R}^{2n}$. Distingirem les diferents aplicacions dient que són aixecaments diferents.

Definim aleshores les derivades parcials de f com

$$\frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_i(\theta_1, \dots, \widehat{\theta_j + \varepsilon}, \dots, \theta_n) - f_i(\theta_1, \dots, \widehat{\theta_j}, \dots, \theta_n)}{\varepsilon} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \dots, 2n.$$

Per l'ambigüitat en la tria de l'aixecament, aquesta expressió en general no estaria ben definida i dependria de l'aixecament $\hat{\cdot}$ que prenguessim. Ara bé, fixats f_i , $\theta_1, \dots, \theta_{2n}$, si ε és prou petit i definim

$$g = f_i(\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_{2n}) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

$$g_\varepsilon = f_i(\theta_1, \dots, \theta_j + \varepsilon, \dots, \theta_{2n}) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

podem veure que per a qualsevol aixecament $\hat{g} \in \mathbb{R}^{2n}$ de g existeix un únic aixecament $\hat{g}_\varepsilon$ molt proper a $\hat{g}$ i, a més,

$$\hat{g}_\varepsilon - \hat{g} \in \mathbb{R}$$

és independent de l'aixecament $\hat{g}$. En efecte, com les funcions f_i són contínues, si ε

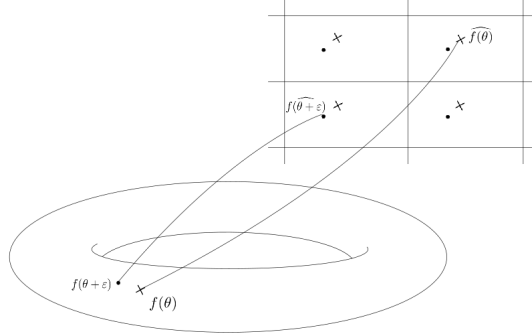


Figura 3: Equema de la proximitat de l'aixecament en dimensió 2.

és prou petit, les imatges g i g_ε són arbitràriament properes. Definim una distància en $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ com

$$d([a], [b]) = \inf_{\lambda \in \mathbb{Z}^{2n}} \|a - b - \lambda\|,$$

on $a, b \in \mathbb{R}^{2n}$ i $[a], [b] \in \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ els representants de a i b respectivament. Si g i g_ε són arbitràriament properes, en particular

$$d(g, g_\varepsilon) < \frac{1}{3}.$$

Sigui $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$ el valor amb qual es calcula la distància entre g i g_ε i sigui $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \neq \lambda_0$. Aleshores, tenim que

$$\|g - g_\varepsilon - \lambda\| \geq \|g - g_\varepsilon - \lambda_0\| + \frac{1}{3},$$

ja que

$$\|g - g_\varepsilon - \lambda\| = \|g - g_\varepsilon - \lambda_0 + \lambda_0 - \lambda\| \geq \|\lambda_0 - \lambda\| - \|g - g_\varepsilon - \lambda_0\| \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Per tant, existeix un únic enter $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$ pel qual s'assoleix la distància. Aleshores, sigui quin sigui l'aixecament $\hat{g}$ de g que prenguem, existirà un únic aixecament $\hat{g}_\varepsilon$ de g_ε prou proper.

Per tant, les derivades parcials estan ben definides i podem definir l'aixecament d'una funció $f : \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ com la funció $\hat{f} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ que en cada component f_i de f es defineix com

$$\hat{f}_i(\alpha) = f_{i_0} + \sum_{j=1}^{2n} \int_{\alpha^{(j-1)}}^{\alpha^{(j)}} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}([s_1], \dots, [s_j], \dots, [s_{2n}]) ds_j$$

amb $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\alpha^{(j)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_j, 0, \dots, 0)$ i $\alpha^{(0)} = (0, \dots, 0)$, f_{i_0} és tal que $\pi(f_{i_0}) = f_i(0)$ (veure figura 6). Veiem que aquest diagrama commuta, és a dir,

$$\begin{array}{ccccc} 0 \in \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R}^{2n} & \ni f_0 & \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ [0] \in \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} & \ni f([0]) & \end{array}$$

Figura 4: Aixecament de l'aplicació f .

es compleix

$$\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi. \quad (6.2)$$

Signi $\alpha \in \mathbb{R}^{2n}$ i $\theta \in \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ tal que $\theta = [\alpha]$. Tenim

$$\begin{aligned} \hat{f}_i(\alpha) &= f_{i_0} + \int_{\alpha^{(0)}}^{\alpha^{(1)}} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_1}([s]) ds_1 + \dots + \int_{\alpha^{(2n-1)}}^{\alpha^{(2n)}} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_{2n}}([s]) ds_{2n} \\ &= f_{i_0} + f_i([\alpha_1], 0, \dots, 0) - f_i(0, 0, \dots, 0) + f_i([\alpha_1], [\alpha_2], 0, \dots, 0) - f_i([\alpha_1], 0, \dots, 0) + \dots \\ &= f_i([\alpha_1], \dots, [\alpha_{2n}]) \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\pi(\hat{f}_i(\alpha)) = f_i(\pi(\alpha)).$$

L'aixecament $\hat{f}$ factoritza a través d'una funció g tal com s'indica al diagrama de la figura 5 si, i només si, $\hat{f}$ és de període 1 en totes les seves variables, és a dir,

$$\hat{f}_i(\alpha + 1) - \hat{f}_i(\alpha) = 0, \quad \forall \alpha, \quad i = 1, \dots, 2n,$$

on $\alpha + 1$ indica que sumem 1 en les components de $\alpha \in \mathbb{R}^{2n}$ que vulguem. Per una

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R}^{2n} \\
\pi \downarrow & \nearrow g & \downarrow \pi \\
\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}
\end{array}$$

Figura 5: Aixecament que factoritza per g .

banda, per la condició (6.2) tenim que

$$\hat{f}_i(\alpha + 1) - \hat{f}_i(\alpha) = k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Com tenim una funció $\hat{f}_i(\alpha + 1) - \hat{f}_i(\alpha)$ que és un enter que depèn contínuament de α , aleshores l'enter k és independent de α . Ens centrem doncs en el valor concret $\alpha = 0$ i tenim el valor

$$\hat{f}_i(1) - \hat{f}_i(0).$$

Prenem una homotopia com la família de funcions $\{\hat{f}_{i,t} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}\}_{t \in [0,1]}$. Pel mateix argument anterior, tenim que $\hat{f}_{i,t}(1) - \hat{f}_{i,t}(0)$ és una funció contínua de t i pren valors enters. Per tant, $\hat{f}_{i,t}(1) - \hat{f}_{i,t}(0)$ no depèn de t . Tenim doncs, que si f és homotòpica a una funció constant, també ho és $\hat{f}$ i, per tant, es compleix

$$\hat{f}_i(\alpha + 1) - \hat{f}_i(\alpha) = 0$$

i $\hat{f}$ factoritza per la funció g , que és de període 1 en totes les seves variables. Tenim doncs que podem escriure el difeomorfisme ψ com

$$\psi(\theta) = [\theta + g(\theta)].$$

Un cop veiem que es pot escriure de la manera enunciada, tenim que ψ és Hamiltonià si, i només si, existeix una homotopia Hamiltoniana ψ_t amb $\psi_0 = id$ i $\psi_1 = \psi$ i que compleix

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t, \quad \iota(X_t)\omega = dH_t$$

amb H la funció Hamiltoniana que la genera, que en aquest cas és de període 1 en les seves variables. Ho podem reescriure en termes de la funció Hamiltoniana com

$$\frac{d}{dt}\psi_t = -J_0 \nabla H_t \circ \psi_t$$

Ara, tenim

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{T}^{2n}} p \, dx dy, \int_{\mathbb{T}^{2n}} q \, dx dy \right) &= \int_{\mathbb{T}^{2n}} (\psi_1(x, y) - (x, y)) \, dx dy = \int_{\mathbb{T}^{2n}} \int_0^1 \frac{d}{dt} \psi_t(x, y) \, dt dx dy \\
&= -J_0 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{T}^{2n}} \nabla H_t \circ \psi_t(x, y) \, dx dy \right) dt = -J_0 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{T}^{2n}} \nabla H_t(x, y) \, dx dy \right) dt = 0,
\end{aligned}$$

on a la segona igualtat hem utilitzat que $(x, y) = \psi_0(x, y)$ i el final és 0 ja que hem fet un canvi de variables i el jacobià era 1, per ser ψ un symplectomorfisme (lema 3.7), i la funció H està definida sobre el torus. $\square$

Observació 6.4. La condició (6.1) es tradueix a vegades com que el difeomorfisme preserva el centre de gravetat.

Definició 6.5. Un symplectomorfisme del torus $(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0)$ es diu que és **exacte** si admet un aixecament $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$\psi(w + k) = \psi(w) + k, \quad \int_{\mathbb{T}^{2n}} (\psi(w) - w) dw = 0,$$

amb $w \in \mathbb{R}^{2n}$, $k \in \mathbb{Z}^{2n}$.

Observació 6.6. Es pot veure que un symplectomorfisme del torus $(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0)$ és Hamiltonià si, i només si, és exacte i isotòpic a la identitat. En molts dels casos que veiem però, l'exactitud és suficient en el cas dels torus.

Demostrem un lema previ que utilitzarem per al següent.

Lema 6.7. Sigui $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funció tal que les seves derivades parcials són periòdiques de període 1. Aleshores podem escriure la funció h com

$$h(x) = \langle a, x \rangle + f(x)$$

amb $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ constant i f és de període 1 en totes les variables.

Demostració. Tenim

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x + 1) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

on $x + 1$ indica que sumem 1 en les variables que vulguem. Per tant, podem deduir

$$h(x + 1) - h(x) = a$$

amb $a \in \mathbb{R}^n$ constant. Escrivim

$$h(x) = \langle a, x \rangle + (h(x) - \langle a, x \rangle) := \langle a, x \rangle + f(x)$$

Veiem ara que f és periòdica de període 1:

$$f(x + 1) - f(x) = h(x + 1) - \langle a, x + 1 \rangle - h(x) + \langle a, x \rangle = h(x + 1) - h(x) - a = 0$$

. $\square$

En els següents resultats ens centrarem en el cas del torus 2-dimensional $\mathbb{T}^2$. Mirarem tant el cas en que els punts fixos poden ser degenerats i el cas en que la funció és de Morse. Tot i no donar una demostració explícita, però, els següents resultats es poden generalitzar al torus $2n$ -dimensional $\mathbb{T}^{2n}$. Al final, mostrem la construcció de la demostració de la conjectura en el cas dels torus $\mathbb{T}^{2n}$, el teorema de Conley-Zehnder, que utilitza els enuncisats generals.

Lema 6.8. *Sigui $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un aixecament d'un simplectomorfisme exacte de $\mathbb{T}^2$ suficientment C^1 -proper a la identitat. Aleshores, existeix una funció suau $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà*

$$V(x+k, y+l) = V(x, y)$$

per $x, y \in \mathbb{R}$ i $k, l \in \mathbb{Z}$ i genera el simplectomorfisme ψ en el sentit $(x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0)$ si, i només si,

$$x_1 - x_0 = \frac{\partial V}{\partial y}(x_1, y_0), \quad y_1 - y_0 = -\frac{\partial V}{\partial x}(x_1, y_0). \quad (6.3)$$

Demostració. Com hem vist a la proposició 6.3, un aixecament d'un difeomorfisme del 2-torus que és homotòpic a la identitat es pot escriure com

$$\psi(x, y) = (x + p(x, y), y + q(x, y)),$$

on les funcions p i q són de període 1 en totes les variables $x, y \in \mathbb{R}$. Com que el difeomorfisme és exacte, tenim

$$\int_{\mathbb{T}^2} p \, dx dy = \int_{\mathbb{T}^2} q \, dx dy = 0.$$

A més, com que ψ és suficientment C^1 -proper a la identitat, pel lema 5.3 tenim que existeix una funció generatriu $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0)$ és equivalent a

$$x_1 - x_0 = \frac{\partial V}{\partial y}(x_1, y_0), \quad y_1 - y_0 = -\frac{\partial V}{\partial x}(x_1, y_0).$$

Per tant, tenim

$$p(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x + p(x, y), y), \quad q(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x + p(x, y), y).$$

Hem de veure que V baixa a una funció del torus. Com que p i q baixen a funcions del torus, tenim que també ho fan $\partial V / \partial x$ i $\partial V / \partial y$. Per tant, pel lema 6.7, tenim que existeixen nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tals que

$$V(x, y) = ax + by + W(x, y),$$

on W és de període 1 en totes les variables. Diferenciem la identitat respecte x i y i obtenim

$$a + \frac{\partial W}{\partial x}(x + p(x, y), y) = -q(x, y), \quad b + \frac{\partial W}{\partial y}(x + p(x, y), y) = p(x, y).$$

Utilitzem que $q(x, y)$ té valor mig zero i obtenim

$$a = - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial W}{\partial x}(x + p(x, y), y) \, dx dy$$

Fem el canvi de variables

$$\begin{cases} x' = x + p(x, y) \\ y' = y \end{cases}$$

i tenim

$$\begin{aligned} a &= - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial W}{\partial x'}(x', y') \frac{\partial x'}{\partial x} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{array} \right|^{-1} dx' dy' \\ &= - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial W}{\partial x'}(x', y') \frac{\partial x'}{\partial x} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^{-1} dx' dy' \\ &= - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial W}{\partial x'}(x', y') dx' dy' = 0, \end{aligned}$$

ja que W és periòdica en les seves variables. De manera semblant, veiem que $b = 0$.

□

Observació 6.9. És possible generalitzar aquest lema al cas $2n$ -dimensional amb $V : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $k, l \in \mathbb{Z}^n$ i les equacions (6.3) formalment iguals, però la dificultat en la demostració és substancialment més gran.

Veiem ara que una funció del torus $\mathbb{T}^2$ té com a mínim 3 punts crítics diferents i com a mínim 4 punts crítics diferents en el cas de ser una funció de Morse.

Teorema 6.10. *Sigui $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funció del torus 2-dimensional. Aleshores, f té com a mínim 3 punts crítics diferents. En el cas que f sigui una funció de Morse, com a mínim té 4 punts crítics diferents.*

Demostració. Mirem primer el cas d'una funció qualsevol. Sigui $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funció del torus 2-dimensional. Com $\mathbb{T}^2$ és un compacte, la funció f tindrà com a mínim un màxim i un mínim, que denotarem x_+ i x_- respectivament. Suposarem que aquests són els dos únics punts crítics.

Per una banda, el grup fonamental del torus 2-dimensional $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ és $\pi(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Com és no trivial, prenem un camí no trivial del torus que passi pel màxim. Per altra banda, prenem el camp vectorial gradient de f , és a dir, ∇f .

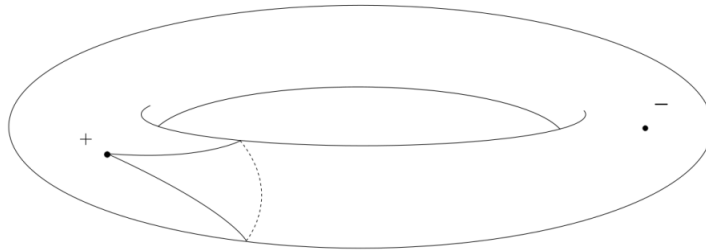


Figura 6: Camí no trivial en el torus $\mathbb{T}^2$ que passa pel màxim.

Sigui Φ_t el flux de ∇f , és a dir,

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} = \nabla f(\Phi_t).$$

Sigui p un punt de $\mathbb{T}^2$. Tenim

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\Phi_t(p)) = \langle \nabla f(\Phi_t(p)), \frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(p) \rangle = \langle \nabla f(\Phi_t(p)), \nabla f(\Phi_t(p)) \rangle = \|\nabla f(\Phi_t(p))\|^2.$$

Tenim doncs que, si no hi ha cap punt crític més, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c > 0$ tal que $\forall q \in \mathbb{T}^2 \setminus (B_\varepsilon(x_+) \cup B_\varepsilon(x_-))$, $\|\nabla f(q)\| \geq c$. Així doncs, el gradient de punts fora d'entorns arbitràriament petits dels extrems està acotat inferiorment i la funció f en els punts del flux originat en q és creixent. Per tant, existeix un τ tal que el flux en aquest τ està dins d'un entorn del punt màxim de radi δ . Pel teorema de Cauchy

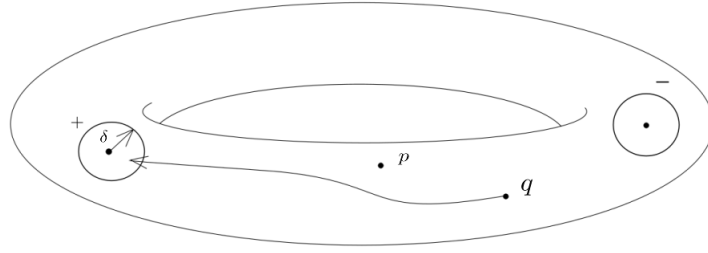


Figura 7: El gradient de f porta tots els punts no crítics en un entorn del màxim en un temps finit.

d'existència i unicitat de solucions d'equacions diferencials i continuïtat respecte condicions inicials [7], tenim que existeix un entorn de q en que existeix un temps en que arriben a l'entorn del màxim x_+ . Si prenem un entorn compacte de q i el recobrim per una col·lecció d'oberts, en podem extreure un recobriment finit $\bigcup_{i=1}^n U_i$ i, si cada obert tenia un temps d'arribada a l'entorn del màxim τ_i , prenem $\tau = \max_{i=1, \dots, n} \{\tau_i\}$. Aleshores, tots els punts del compacte entraran a l'entorn de x_+ .

Recobrim ara amb un compacte el camí no trivial de l'inici. Aplicant aquest raonament, tenim que existeix un temps T tal que tots els punts del camí entraran dins d'un entorn de radi δ arbitràriament petit de x_+ . Però això és una contradicció, ja que si δ és prou petit el camí no trivial no es podria contraure. Per tant, ha d'haver-hi mínim un punt crític més, és a dir, la funció f té com a mínim 3 punts crítics.

Mirem ara el cas en que $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció de Morse del torus 2-dimensional. Acabem de veure que com a mínim una funció del torus $\mathbb{T}^2$ té 3 punts crítics. Suposarem que aquestst són els únics que té. Prenem $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un aixecament de f i el seu gradient $\nabla \hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Seguirem denotant $\hat{f}$ com f . Si $q \in \mathbb{R}^2$ no és un punt crític de f , aleshores tenim $\nabla f(q) \neq 0$ i, per tant,

$$\frac{\nabla f(q)}{\|\nabla f(q)\|} \in S^1.$$

Pel lema de Morse [5], existeixen coordenades locals tals que una funció de Morse a l'entorn d'un punt crític $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ es pot escriure com

$$\begin{aligned} f(p_x + x, p_y + y) &= \pm x^2 \pm y^2 + O(\|(x, y)\|^3) \\ &:= \pm x^2 \pm y^2 + g(x, y). \end{aligned}$$

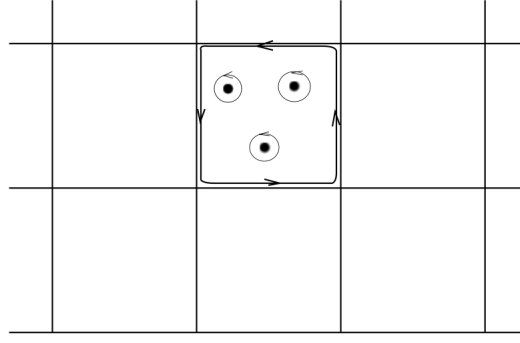


Figura 8: Els tres punts crítics suposats en una cel·la de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ i els camins presos per a calcular els graus.

Tenim $\|g(x, y)\| = O(\|(x, y)\|^3)$, $\|\nabla g(x, y)\| = O(\|(x, y)\|^2)$. Per a cada punt crític $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ ens restringim als valors de la circumferència de centre p i radi ε $S_\varepsilon(p)$ i definim

$$\varphi = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \Big|_{S_\varepsilon(p)} : S_\varepsilon(p) \rightarrow S^1.$$

Prenem ara una homotopia com la família de funcions $\{f_t = \pm x^2 \pm y^2 + t g(x, y)\}_{t \in [0, 1]}$, per la qual tenim

$$f_0 = \pm x^2 \pm y^2, \quad f_1 = f,$$

i definim

$$\varphi_t = \frac{\nabla f_t}{\|\nabla f_t\|} \Big|_{S_\varepsilon(p)}.$$

Si ε és prou petit, per ser f_t funció de Morse $\forall t$, $\nabla f_t|_{S_\varepsilon(p)}$ no s'anul·la enlloc, $\forall t$. Aleshores, el grau de l'aplicació φ_0 respecte p serà el mateix que per l'aplicació φ_1 . Podem calcular doncs, el grau de l'aplicació φ_0 respecte p . En les quatre combinacions possibles dels signes, les úniques possibilitats per al valor dels graus són 1 o -1.

Prenem ara el camí que ressegueix el contorn d'una cel·la de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ que tanca els punts crítics (veure figura 8). El grau d'aquesta aplicació és 0, ja que les contribucions oposades del camí es cancel·len. Ara bé, la suma dels graus de l'interior ha de ser igual al grau del camí exterior, i no pot ser que una combinació de sumes de tres 1 i -1 sumin 0. Trobem una contradicció i, ja que hem vist que com a mínim hi ha 3 punts crítics, tenim que ha d'haver-hi com a mínim un quart punt crític més.

□

Proposició 6.11. *Sigui $\psi : \mathbb{T}^{2n} \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$ un symplectomorfisme exacte suficientment C^1 -proper a la identitat. Aleshores, ψ té com a mínim $2n + 1$ punts fixos. Si els punts fixos de ψ són tots no degenerats, aleshores ψ té com a mínim 2^{2n} punts fixos.*

Demostració. Com hem vist al lema 6.8 (observació 6.9), ψ admet una funció suau $V : \mathbb{T}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ que genera el symplectomorfisme ψ en el sentit $(x_1, y_1) = \psi(x_0, y_0)$ si, i només si, compleix (6.3). Per tant, els punts fixos de ψ són els punts crítics

de V . En el cas $n = 1$, tenim la situació del teorema 6.10 en que la funció V té com a mínim 3 punts crítics diferents i, en el cas que V sigui una funció de Morse, com a mínim té 4 punts crítics diferents, coincidint amb l'enunciat del teorema. Pel resultat $\mathbb{T}^{2n}$, utilitzant teoria de Morse, es pot veure que una funció V té com a mínim $2n + 1$ punts crítics diferents ([4], pàgines 351-353) i, si és una funció de Morse, té com a mínim 2^{2n} punts crítics diferents ([4], pàgina 356), que en ambdós casos es corresponen amb els punts fixos del symplectomorfisme. $\square$

Teorema 6.12. (Conley-Zehnder) *Un symplectomorfisme Hamiltonià del torus estàndard $\mathbb{T}^{2n}$ té com a mínim 2^{2n} punts fixos geomètricament diferents donat que siguin tots no degenerats. En el cas degenerat, el nombre de punts fixos és com a mínim $2n + 1$.*

Demostració. Sigui $\psi_H^{t,t_0} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un aixecament d'un flux Hamiltonià de $\mathbb{T}^{2n}$ que depèn del temps generat per una família suau de funcions Hamiltonianes $H_t = H_{t+1} : \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Veiem que considerem que el Hamiltonià H_t és 1-periòdic en t ([4], pg. 346). Prenem un enter N suficientment gran i denotem

$$\psi = \psi_H^{1,0}, \quad \psi_j = \psi_H^{(j+1)/N, j/N}$$

de manera que

$$\psi = \psi_{N-1} \circ \psi_{N-2} \circ \cdots \circ \psi_0.$$

Per un N suficientment gran, tots els symplectomorfismes ψ_j satisfan els requeriments del lema 6.8. Per tant, per a cada j existeix una funció suau $V_j : \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que genera el symplectomorfisme $(x_{j+1}, y_{j+1}) = \psi_j(x_j, y_j)$ a través de les equacions diferència de Hamilton

$$x_{j+1} - x_j = \frac{\partial V_j}{\partial y}(x_{j+1}, y_j), \quad y_{j+1} - y_j = -\frac{\partial V_j}{\partial x}(x_{j+1}, y_j).$$

Pel lema 5.7, els punts fixos de ψ es corresponen amb els punts crítics del funcional d'acció simplèctica discreta de la manera següent. Denotem per $X \simeq \mathbb{R}^{2nN}$ l'espai de les successions $\mathbf{z} = \{z_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ en $\mathbb{R}^{2n}$ que satisfan

$$z_j = z_{j+N}$$

per a cada $j \in \mathbb{Z}$. La xarxa $\mathbb{Z}^{2n}$ actua en l'espai X fent $\{z_j\}_j \mapsto \{z_j + k\}_j$ per $k \in \mathbb{Z}^{2n}$. Considerem la funció d'acció simplèctica discreta $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$\Phi(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{N-1} (\langle y_j, x_{j+1} - x_j \rangle - V_j(x_{j+1}, y_j)).$$

Aquesta funció és invariant sota l'acció de $\mathbb{Z}^{2n}$ en X , perquè $x_N = x_0$ i V_j és $\mathbb{Z}^{2n}$ invariant. Per tant, baixa al quocient $X/\mathbb{Z}^{2n}$. Pel lema 5.7, una successió $\mathbf{z}$ és un punt crític de Φ si, i només si, $z_{j+1} = \psi_j(z_j)$ per $j = 0, \dots, N-1$. Per tant, hi ha una correspondència d'un a un entre els punts crítics de Φ en $X/\mathbb{Z}^{2n}$ i els punts fixos de ψ . A més, un punt crític $\mathbf{z}$ de Φ és no degenerat si, i només si, el corresponent punt fix z_0 de ψ és no degenerat. Dos punts crítics $\mathbf{z}$ i $\mathbf{z}'$ de

Φ es diuen geomètricament diferents si no estan relacionats per l'acció de $\mathbb{Z}^{2n}$, o equivalentment, z_0 i z'_0 representen diferents punts fixos de ψ en $\mathbb{T}^{2n}$.

Falta veure que si Φ és una funció de Morse ha de tenir com a mínim 2^{2n} punts crítics a $X/\mathbb{Z}^{2n}$ i, en el cas general, la cota és $2n + 1$. Per a la conclusió del teorema referenciem [4], pàgines 346-356, on s'estudia teoria de Morse i l'índex de Conley per al cas en que la funció és de Morse i teoria de Ljusternik-Schnirelmann per a la cota del cas general.

□

6.3 Relació entre la conjectura d'Arnold per a torus 2-dimensionals i el teorema de Poincaré-Birkhoff

De la conjectura d'Arnold aplicada al cas del torus 2-dimensional en podem deduir el teorema de Poincaré-Birkhoff. Podem construir un torus a partir de dues còpies del nostre anell amb les condicions del teorema 4.2 i connectant-les amb dos anells al llarg dels cercles de la frontera que anomenarem anells de connexió.

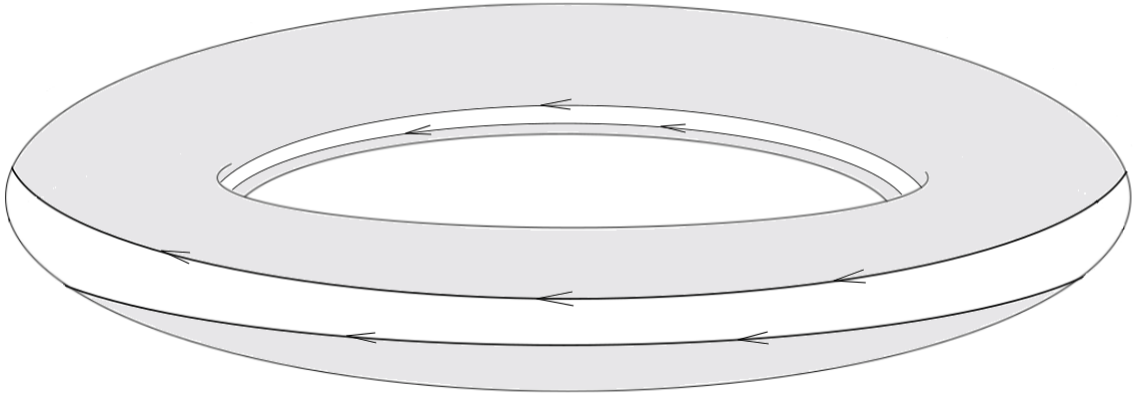


Figura 9: Els dos anells amb les condicions del Teorema de Poincaré-Birkhoff (teorema 4.2) units pels anells de connexió i formant un 2-torus $\mathbb{T}^2$.

Aleshores, podem estendre la nostra aplicació de l'anell a un difeomorfisme simplèctic del torus tal que en els dos anells inicials el difeomorfisme coincideixi amb l'original, en els anells de connexió el difeomorfisme no tingui punts fixos i el centre de gravetat quedi fix (observació 6.4). Per aconseguir totes aquestes condicions, la construcció d'aquest difeomorfisme del torus es basa en la propietat que els cercles de la frontera roten en direccions oposades. En cada anell de connexió tots els punts són traslladats en la mateixa direcció que els dos cercles que tenen com a frontera, aconseguint així que no tinguin punts fixos. A més, com que les translacions en els diferents cercles de connexió són en direccions oposades, modificant l'amplada d'aquests i la intensitat i direcció de les translacions podem aconseguir que el difeomorfisme preservi el centre de gravetat (figura 10).

En aquestes condicions, el difeomorfisme del torus té quatre punts fixos, que s'han

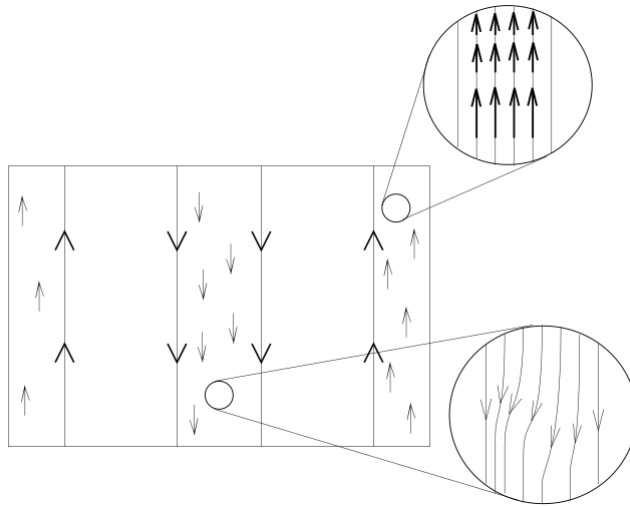


Figura 10: Torus $\mathbb{T}^2$ desplegat amb el difeomorfisme de l'anell extès. Veiem en els dos cercles ampliats com podem modificar la translació en intensitat (ampliació superior) i en direcció (ampliació inferior) per preservar el centre de gravetat del difeomorfisme.

de repartir en dos punts fixos per a cada anell original, obtenint així el resultat del teorema de Poincaré-Birkhoff a partir d'un resultat de la conjectura d'Arnold.

7 Conclusions

Aquest treball està basat en l'estudi del comportament geomètric dels simplectomorfismes i, tot i que no és poc, podriem dir que recull només la demostració d'una petita part d'un cas concret d'una conjectura: la conjectura d'Arnold.

Com hem dit al llarg del treball, localment l'estructura d'una varietat simplèctica és, pel teorema de Darboux, equivalent a la de l'espai euclidià. El més interessant és doncs l'estudi global de les varietats simplèctiques, la topologia simplèctica, i la conjectura d'Arnold és de gran importància perquè és un primer exemple d'aquesta globalització.

Tot i ser una petita part, no li treiem gens de mèrit. Actualment la conjectura està resolta en molts casos particulars, però el cas concret dels torus estàndard va ser un pas molt important. Va ser el segon cas demostrat, després de la demostració de Eliashberg per superfícies de Riemann 2-dimensionals (1979). Les característiques especials del torus fan que es pugui demostrar amb l'útilització de funcions generatrius (Conley-Zehnder, 1983) i de maneres alternatives (Chaperon, pel mètode de les geodèsiques trencades, 1984; Givental, 1987) i va ser una de les primeres i pioneres en el camí a la demostració completa, portant al desenvolupament de noves teories com Floer i la seva nova aproximació a la teoria de Morse de dimensió infinita (homologia de Floer).

En resum, la conjectura d'Arnold neix de la geometria simplèctica i dels sistemes dinàmics i agrupa una gran quantitat de teories matemàtiques com teoria de Morse, homologia i cohomologia (encara que no han estat estudiades per a la realització del treball), geometria diferencial, equacions diferencials i sistemes dinàmics, i ha portat al desenvolupament de noves teories. I és encara actualment una branca de les matemàtiques en constant investigació.

Per al desenvolupament d'aquesta memòria han estat fonamentals les assignatures Geometria Diferencial de Corbes i Superfícies, impartida a l'autor pel tutor del treball, i Topologia i Geometria Global de Superfícies, estudiades al grau de matemàtiques de la Universitat de Barcelona, i el gran interès personal per la geometria i per la mecànica clàssica en la versió Lagrangiana i Hamiltoniana, estudiada al grau de física de la Universitat de Barcelona.

Referències

- [1] Arnold, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics, Graduate Texts in Mathematics: 60*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1978.
- [2] Fukaya, K.; Ono, K: *Arnold Conjecture and Gromov-Witten Invariant*, *Topology* 38 (1999), no. 5, 933-1048.
- [3] Liu, G.; Tian, G: *Floer Homology and Arnold Conjecture*, *J. Differential Geom.* 49 (1998), no. 1, 1-74.
- [4] McDuff, D.; Salamon, D.: *Introduction to Symplectic Topology, Oxford Mathematical Monographs*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [5] Milnor, J.: *Morse Theory. Based on the lecture notes by M. Spivak and R. Wells*, *Annals of Mathematics Studies, Number 51*, Princeton University Press, New Jersey, pg. 6, 1963.
- [6] Sotomayor, J.: *Lições de equações diferenciais ordinárias, Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, Brazil, pg.12, 1979.
- [7] Sotomayor, J.: *Lições de equações diferenciais ordinárias, Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, Brazil, pgs. 33 i 34, 1979.
- [8] Warner, F. W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics: 94*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.