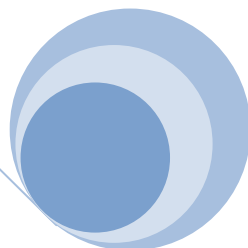




UNIVERSITAT DE BARCELONA



Estadística Inferencial aplicada a l'educació

**Ormazábal, F.J. (Coord.) Vilà, R.; Mateo, M. ; Torrado, M.;
Berlanga, V.; del Barrio, J.; Ruiz, A.**

*Departament de Mètodes d'Investigació i Diagnòstic en
Educació (MIDE)
Facultat de Pedagogia
Universitat de Barcelona*



Aquesta publicació compta amb la següent llicència de Creative Commons:



Estadística inferencial aplicada a l'educació està subjecte a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)

Para citar la obra:

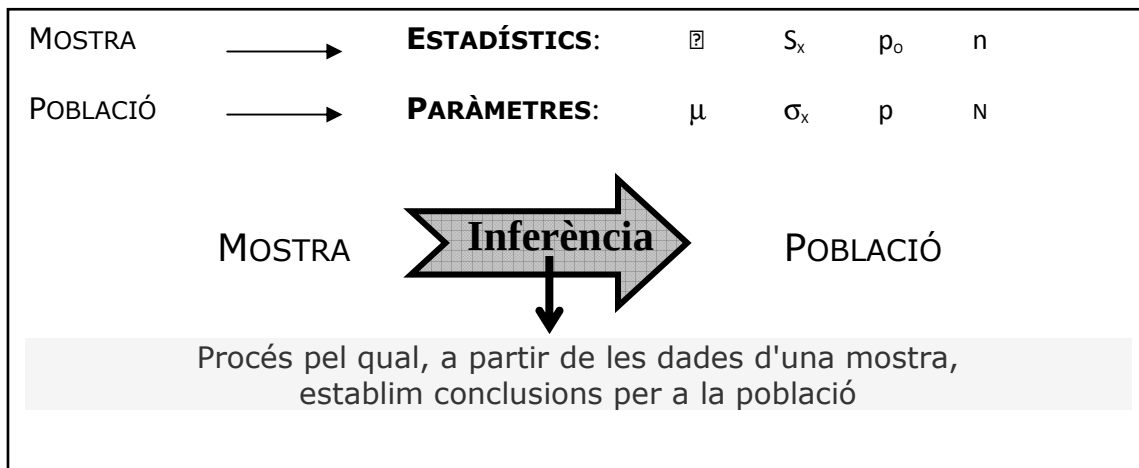
Ormazábal, F.J. (coord.) Vila, R.; Mateo, M.; Torrado, M.; Berlanga, V.; Del Barrio, J.; Ruiz, A. (2012) *Estadística inferencial aplicada a l'educació*. Barcelona: Universitat de Barcelona. Dipòsit Digital <http://hdl.handle.net/2445/21383>

INDEX

Estadística Inferencial	
1.1 Conceptes bàsics	4
1.1.1 Distribució mostral de mitjanes	6
1.1.2 Distribució mostral de proporcions	7
1.1.3 Altres distribucions mostrals	7
1.2 Teoria de l'estimació estadística	8
1.2.1 Interval de probabilitat	8
1.2.2 Interval de confiança	11
1.3 Teoria de la decisió estadística	17
1.3.1 Errors i riscos	18
1.3.2 Potència d'un contrast	19
1.3.3 Grau de significació	20
1.3.4 Contrasts unilaterals i bilaterals	21

1.1 Conceptes Bàsics

L'Estadística Inferencial es basa en la inferència estadística. No es limita a l'estudi purament descriptiu d'unes dades, sinó que, a partir de les dades observades en una mostra (d'on obtenim els estadístics), s'infereix (es generalitza) l'estudi a la població d'aquesta mostra (paràmetres).



La inferència estadística és correcta sempre que la mostra sigui representativa. Una **mostra és representativa** quan:

- ... És un subconjunt de la població.
- ... Té una mida suficient (depèn de la precisió que es desitgi i del risc d'error).
- ... La tècnica de selecció de la mostra és correcta (mostreig).

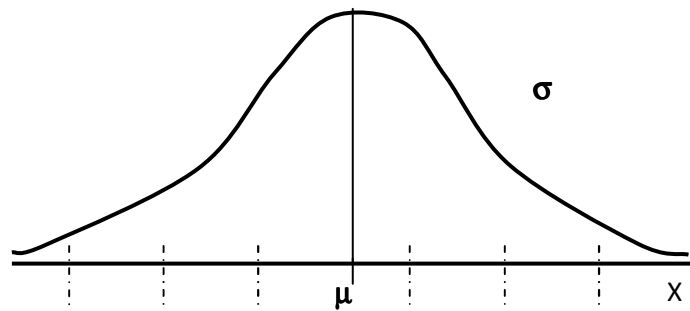
Error mostral: És la diferència entre un estadístic (mostra) i el seu paràmetre (població). Pot ser de dos tipus:

- **Aleatori:** És el degut a l'atzar, es produeix quan fem un mostreig probabilístic o aleatori. Es pot calcular i controlar si es coneix quina llei de probabilitat segueix.
- **De biaix:** Es deu a altres causes, a més de l'atzar, i es produeix (entre altres motius) quan utilitzem un mostreig no probabilístic. El problema no és que el biaix sigui gran o petit, sinó que no el podem calcular, ja que no coneixem quina llei segueix.

Distribució mostral i error típic: Es distingeix entre distribució poblacional, distribució d'una mostra i la distribució mostral.

DISTRIBUCIÓ POBLACIONAL (és la distribució d'una variable en la població)

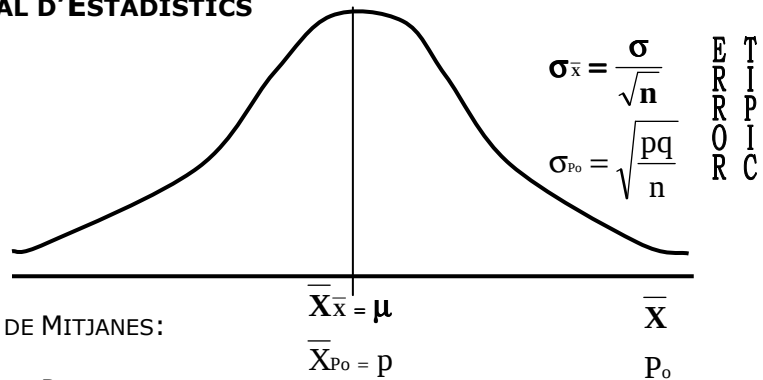
N
μ
σ²
σ
p
q



Distribució de X
en diverses mostres:

$\underline{n_1}$	$\underline{n_2}$	$\underline{n_3}$	$\underline{n_4}$	$\underline{n_5}$	$\underline{n_i}$
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_i
S^2_1	S^2_2	S^2_3	S^2_4	S^2_5	S^2_i
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_i

DISTRIBUCIÓ MOSTRAL D'ESTADÍSTICS



DISTRIBUCIÓ MOSTRAL DE MITJANES:

DISTRIBUCIÓ MOSTRAL DE PROPORCIONS:

Error típic (o error estàndard) és la desviació típica de la distribució mostral:

... de mitjanes

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

... de proporcions

$$\sigma_{p_0} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Teorema del Límit Central:

- Els estadístics obtinguts en les mostres tendeixen a agrupar-se al voltant del paràmetre.
- Quan "n" augmenta els estadístics estan més agrupats.
- Si les mostres són grans ($n \geq 30$) i la població d'origen segueix la Llei Normal, la gràfica de la distribució mostral és simètrica i té forma de campana, és a dir, segueix la Llei Normal. També pot seguir altres models: t de Student, χ^2 (khi Quadrat), F de Snedecor.
- Poden definir distribucions mostrals per diferències i sumes d'estadístics.

1.1.1 Distribució mostral de mitjanes

- Segueix la Llei Normal.
- La mitjana $\bar{X}$ és el paràmetre (o sigui, la mitjana de la població: μ).
- La desviació típica (o error típic):
 - * Si la població és infinita o el mostreig és amb reemplaçament (no exhaustiu):

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- * Si la població és finita i el mostreig és sense reemplaçament (exhaustiu):

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

..on

N = Mida de la població

n = Mida de la mostra

Exemple: Què passa amb l'error típic quan augmenta la mida de la mostra?

$\mu = 10$ i $\sigma = 2$

$$\begin{array}{l} \text{Si } n = 25 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{X} = \mu = 10 \\ \sigma_{\bar{X}} = \frac{2}{\sqrt{25}} = 0'4 \end{array} \right. \\ \text{Si } n = 100 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{X} = \mu = 10 \\ \sigma_{\bar{X}} = \frac{2}{\sqrt{100}} = 0'2 \end{array} \right. \\ \text{Si } n = 400 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{X} = \mu = 10 \\ \sigma_{\bar{X}} = \frac{2}{\sqrt{400}} = 0'1 \end{array} \right. \end{array}$$

Observem:

- En tots els casos, $\bar{X} = \mu$ (és el paràmetre)

- L'error típic disminueix a mesura que augmenta n, perquè influeix menys l'atzar.

1.1.2 Distribució mostral de proporcions

- Segueix la Llei Normal.
- La mitjana de les proporcions observades (p_o) és el paràmetre ($\bar{X}_{p_o} = p$)
- La desviació típica (error típic):

* Si la població és infinita o el mostreig amb reemplaçament (no exhaustiu):

$$\sigma_{p_o} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

* Si la població és finita o el mostreig sense reemplaçament (exhaustiu):

$$\sigma_{p_o} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

Exemple: Què passa amb l'error típic quan augmenta la mida de la mostra?

$p = 0'6$

$$n = 25 \rightarrow \begin{cases} \bar{X}_{p_o} = p = 0'6 \\ \sigma_{p_o} = \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{25}} = 0'0979 \end{cases}$$

$$n = 100 \rightarrow \begin{cases} \bar{X}_{p_o} = p = 0'6 \\ \sigma_{p_o} = \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{100}} = 0'0489 \end{cases}$$

$$n = 400 \rightarrow \begin{cases} \bar{X}_{p_o} = p = 0'6 \\ \sigma_{p_o} = \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{400}} = 0'0245 \end{cases}$$

Observem:

- En tots els casos, $\bar{X}_{p_o} = p$ (és el paràmetre)
- L'error típic disminueix a mesura que augmenta n , perquè influeix menys l'atzar.

1.1.3 Altres distribucions mostrals

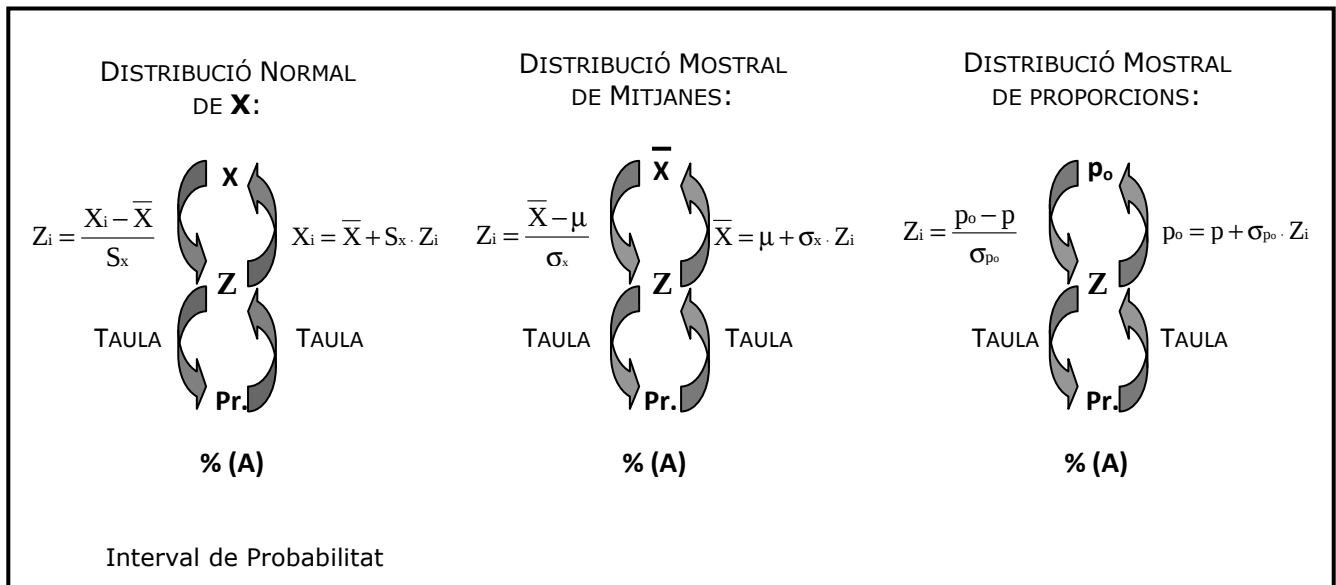
D'una manera similar, hi ha distribucions mostrals d'altres estadístics, com els que segueixen: la mitjana, quartils, desviació semintercuartílica, coeficient de variació, decils, etc.

1.2 Teoria de l'Estimació Estadística

Els dos pilars bàsics de l'Estadística Inferencial són:

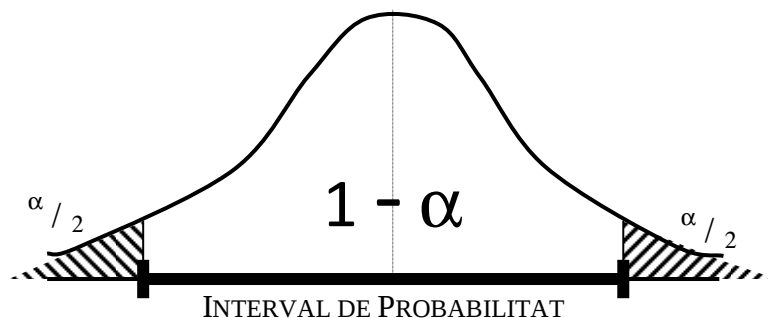
- La Teoria de l'estimació estadística
- La Teoria de la decisió estadística

La Teoria de l'estimació Estadística tracta de l'estimació de paràmetres a partir dels estadístics. Es basa en els conceptes de: distribució mostral i error típic o error estàndard. Com moltes de les distribucions mostrals segueixen una llei Normal, de la qual coneixem la mitjana (el paràmetre) i la desviació típica (error típic o estàndard), podem resoldre qualsevol problema de probabilitat sense necessitat de resoldre integrals, simplement utilitzant la taula de la Llei Normal Estàndard (centrada i reduïda: $\mu_z = 0$, $\sigma_z = 1$), com fem per a qualsevol distribució X que segueix la Llei Normal. L'algorisme és el mateix, però utilitzant en cada cas la mitjana i la desviació típica corresponent.



1.2.1 Interval de probabilitat

És un interval (simètric) al voltant d'un paràmetre que conté una proporció $1 - \alpha$ dels estadístics de la distribució mostral.



Per conveni en Ciències Humanes i Socials el α sol valer:

$$\alpha = 0'05 \text{ (5\%)}$$

$$\alpha = 0'01 \text{ (1\%)}$$

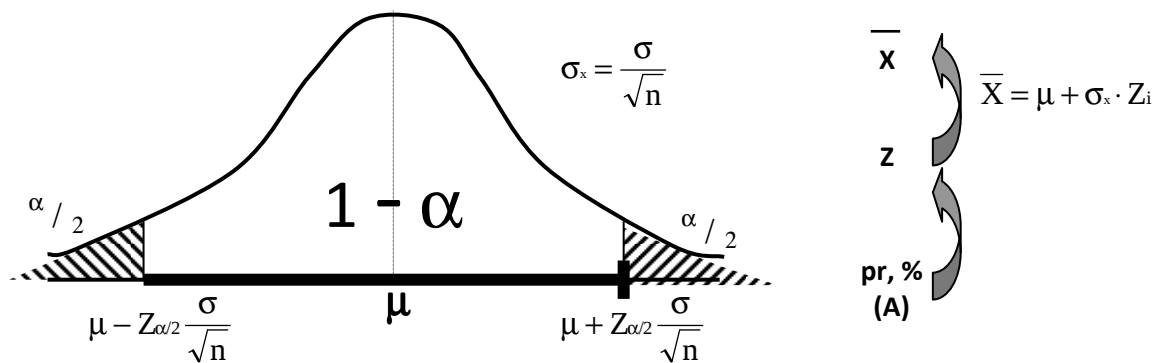
Així doncs,

$$1 - \alpha \begin{cases} \text{Si } \alpha = 0'05 & 1 - \alpha = 0'95 \text{ (95\%)} \\ \text{Si } \alpha = 0'01 & 1 - \alpha = 0'99 \text{ (99\%)} \end{cases}$$

L'interval de probabilitat permet predir amb un risc α (0'05 o 0'01) d'equivocar-se, els límits dins dels quals es trobaran, partint d'un paràmetre poblacional, els $1 - \alpha$ (0'95 o 0'99, 95% o 99%) dels estadístics observats en mostres de grandària n extretes a l'atzar de la població. Dit en altres paraules, l'interval de probabilitat conté dins dels seus límits $1 - \alpha$ (0'95 o 0'99, 95% o 99%) de la distribució mostral.

A) Interval de probabilitat de mitjanes (o d'una mitjana)

És un interval simètric al voltant de la mitjana de la població μ que conté una proporció igual a $1 - \alpha$ de les mitjanes observades en mostres de grandària n extretes a l'atzar de la població.



$$\bar{X} \in \mu \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{x}} = \mu \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Exemple. S'accepta que els CI es distribueixen en la població segons una llei normal $\bar{C}_i = 100$ i $\sigma_{C_i} = 15$. Calcular entre quins valors estaran els CI mitjans (95%, 99%) de mostres a l'atzar de:

- a) 100 subjectes
- b) 50 subjectes
- c) 25 subjectes

a) $n = 100$

$$\begin{aligned} a_1. \quad (\alpha = 0'05), 1 - \alpha = 0'95 \text{ CI} &\in 100 \pm 1'96 \frac{15}{\sqrt{100}} = 100 \pm 2'94 \begin{cases} 102'94(\text{máx.}) \\ 97'06(\text{mín.}) \end{cases} \\ a_2. \quad (\alpha = 0'01), 1 - \alpha = 0'99 \text{ CI} &\in 100 \pm 2'58 \frac{15}{\sqrt{100}} = 100 \pm 3'87 \begin{cases} 103'87(\text{máx.}) \\ 96'13(\text{mín.}) \end{cases} \end{aligned}$$

b) $n = 50$

$$\begin{aligned} b_1. \quad (\alpha = 0'05), 1 - \alpha = 0'95 \text{ CI} &\in 100 \pm 1'96 \frac{15}{\sqrt{50}} = 100 \pm 4'16 \begin{cases} 104'16(\text{máx.}) \\ 95'84(\text{mín.}) \end{cases} \\ b_2. \quad (\alpha = 0'01), 1 - \alpha = 0'99 \text{ CI} &\in 100 \pm 2'58 \frac{15}{\sqrt{50}} = 100 \pm 5'47 \begin{cases} 105'47(\text{máx.}) \\ 94'53(\text{mín.}) \end{cases} \end{aligned}$$

c) $n = 25$

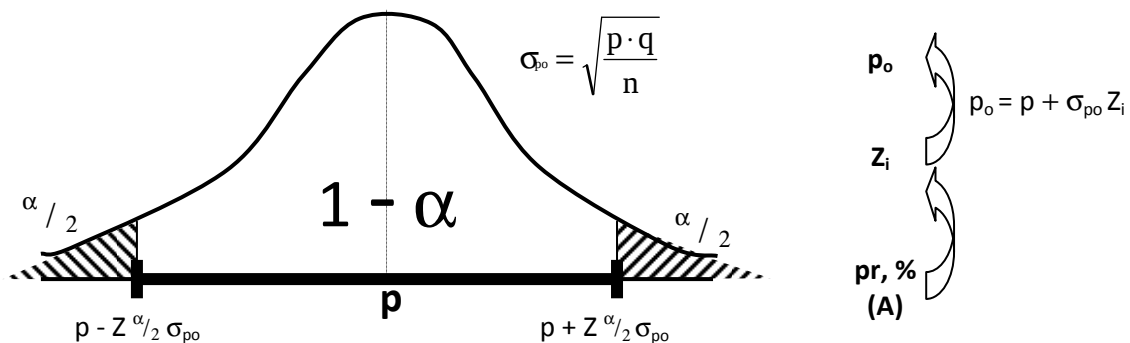
$$\begin{aligned} c_1. \quad (\alpha = 0'05), 1 - \alpha = 0'95 \text{ CI} &\in 100 \pm 1'96 \frac{15}{\sqrt{25}} = 100 \pm 5'88 \begin{cases} 105'88(\text{máx.}) \\ 94'12(\text{mín.}) \end{cases} \\ c_2. \quad (\alpha = 0'01), 1 - \alpha = 0'99 \text{ CI} &\in 100 \pm 2'58 \frac{15}{\sqrt{25}} = 100 \pm 7'74 \begin{cases} 107'74(\text{máx.}) \\ 92'26(\text{mín.}) \end{cases} \end{aligned}$$

Observem:

- En els tres casos el interval $1 - \alpha = 0'99$ és més ampli que $1 - \alpha = 0'95$, ja que ha de contenir una proporció més gran (99% > 95%) d'estadístics.
- A mesura que disminuïm n (mida de les mostres) l'interval de probabilitat es va ampliant o, el que és el mateix, la dispersió dels estadístics és més gran com menor és n . Això és així, perquè, com més petit és n , més influeix l'atzar.

B) Interval de probabilitat de proporcions (o d'una proporció)

És un interval simètric al voltant de la proporció de la població (p) que conté una proporció $1 - \alpha$ de les proporcions observades (p_o) en mostres de grandària n extretes a l'atzar de la població origen.



$$\sigma_{p_0} \in p \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{p_0} = p \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

Exemple. Sabem que una determinada assignatura és suspesa pel 30% de l'alumnat. Calcular entre quins valors oscil·laran els percentatges de suspesos ($\alpha=0,05$) en mostres a l'atzar de: a) 100 alumnes b) 400 alumnes

a) $n = 100$

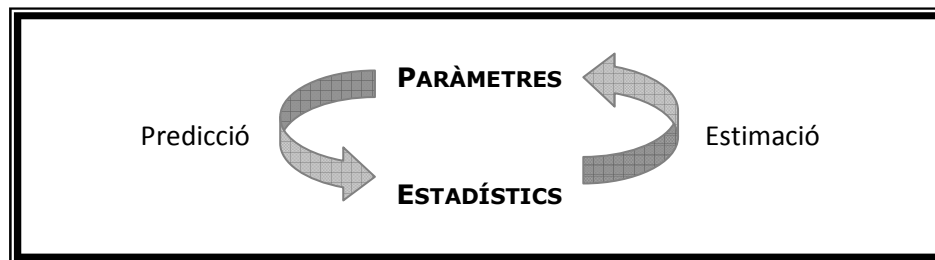
a. ($\alpha = 0'05$), $1 - \alpha = 0'95$ $p_0 \in 0'3 \pm 1'96 \sqrt{\frac{0'3 \cdot 0'7}{100}} = 0'3 \pm 0'0898 \begin{cases} 0'3898 \rightarrow 38'98\% \\ 0'2102 \rightarrow 21'02\% \end{cases}$

b) $n = 400$

b. ($\alpha = 0'05$), $1 - \alpha = 0'95$ $p_0 \in 0'3 \pm 1'96 \sqrt{\frac{0'3 \cdot 0'7}{400}} = 0'3 \pm 0'0449 \begin{cases} 0'3449 \rightarrow 34'49\% \\ 0'2551 \rightarrow 25'51\% \end{cases}$

1.2.2 Interval de confiança

L'interval de Probabilitat serveix per resoldre una qüestió de simple predicció (dels estadístics a partir del paràmetre), però no per a l'estimació estadística pròpiament dita (estimar paràmetres a partir dels estadístics).



Dos tipus d'estimació estadística:

- **Estimació puntual:** a partir d'un estadístic hem de donar un sol i únic valor per al paràmetre.

Es demostra matemàticament que, en general, la millor estimació puntual d'un paràmetre (μ , σ^2 , σ , p) és el seu estadístic corresponent ($\bar{x}$, S^2 , S , p_0), especialment si treballem amb mostres grans ($n \geq 30$).

Aquest tipus d'estimació té l'inconvenient que no indica quina és la precisió d'aquesta estimació. És per aquest motiu que s'utilitza l'estimació per interval.

- **Estimació per interval:** permet estimar els paràmetres a partir del seu estadístic corresponent, amb un risc d'error conegut (i petit).

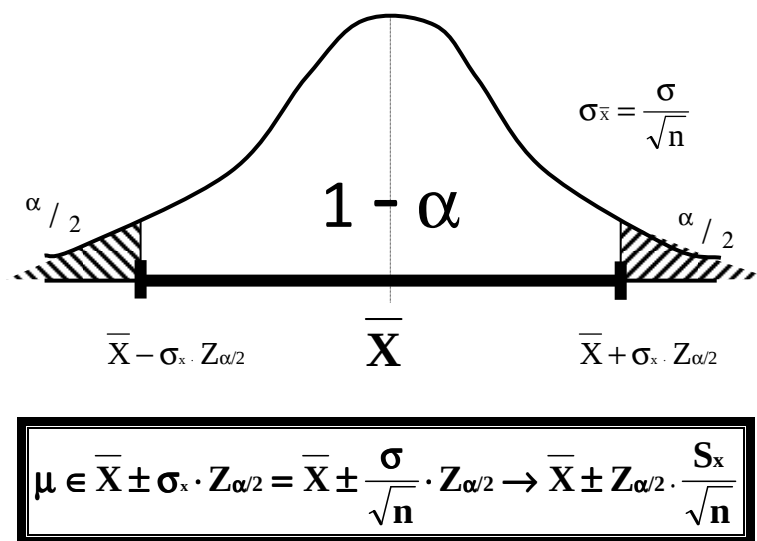
Interval de Confiança: és un interval (simètric) al voltant d'un estadístic que té una probabilitat $1 - \alpha$ (generalment 0'95 o 0'99) de contenir el paràmetre. Un interval és un valor lineal que queda definit pels seus dos límits (superior i inferior). Els límits de l'interval de confiança van ser denominats per R.A. Fisher, límits de confiança o límits fiducials.

També es basa en els conceptes de distribució mostral i error típic. Com aquesta segueix la llei normal (per a mostres grans) el:

$$\left. \begin{array}{l} 95\% = (1 - \alpha = 0'95) \text{ està comprès entre } + 1'96 Z \\ 99\% = (1 - \alpha = 0'99) \text{ està comprès entre } + 2'58 Z \end{array} \right\} \text{ En general, } \pm Z_{\alpha/2}$$

A) Interval de confiança d'una mitjana

És un interval simètric al voltant de la mitjana observada que té una probabilitat $1 - \alpha$ de contenir la mitjana de la població (μ).



Grandària de la Mostra (mitjana)

Podem calcular la mida de la mostra que ha de fer com a mínim per poder realitzar l'estimació del paràmetre. Aquest mida dependrà de la precisió (error màxim = e) i aquest per la seva banda, dependrà del risc α que estiguem disposats a admetre.

- Per poblacions infinites o mostreig no exhaustiu:

$$e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\alpha/2} \Rightarrow n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{e^2} \Rightarrow n = \left| \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e} \right|^2$$

- Per poblacions finites o mostreig exhaustiu:

$$e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \cdot Z_{\alpha/2} \Rightarrow n = \frac{N \cdot Z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{Z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2 + e^2 (N-1)}$$

Exemple. Un grup de 100 alumnes d'Estadística ha obtingut en una prova una mitjana de 5'8 punts i una desviació típica de 1'2. Estimar la mitjana de la població origen d'aquest grup:

- a) Quina és l'estimació puntual de la mitjana de la població?
- b) Quina és l'estimació de la mitjana de la població, amb un nivell de confiança del 95%?
- c) I amb un nivell de confiança del 99%?

$$1a) \quad \mu = \bar{X} = 5'8$$

$$1b) \quad \mu \in 5'8 \pm 1'96 \cdot \frac{1'2}{\sqrt{100}} = 5'8 \pm 0'2352 \begin{matrix} 6'0352 \\ 5'5648 \end{matrix}$$

$$1c) \quad \mu \in 5'8 \pm 2'58 \cdot \frac{1'2}{\sqrt{100}} = 5'8 \pm 0'3096 \begin{matrix} 6'1096 \\ 5'4904 \end{matrix}$$

Exemple. El mateix però en un grup de 36 alumnes.

$$2a) \quad \mu = \bar{X} = 5'8$$

$$2b) \quad \mu \in 5'8 \pm 1'96 \cdot \frac{1'2}{\sqrt{36}} = 5'8 \pm 0'392 \begin{matrix} 6'192 \\ 5'408 \end{matrix}$$

$$2c) \quad \mu \in 5'8 \pm 2'58 \cdot \frac{1'2}{\sqrt{36}} = 5'8 \pm 0'516 \begin{matrix} 6'316 \\ 5'284 \end{matrix}$$

Exemple. Es vol estimar la mitjana de l'alumnat d'una determinada assignatura. S'accepta que la seva desviació típica és 0'8. Calcular la mida mínima necessària de la mostra.

- a) $\alpha = 0'01$ i $e = 0'2$

$$n = \left\lceil \frac{2'58 \cdot 0'8}{0'2} \right\rceil^2 = 106'5024 \rightarrow 107$$

- b) $\alpha = 0'05$ i $e = 0'2$

$$n = \left\lceil \frac{1'96 \cdot 0'8}{0'2} \right\rceil^2 = 61'4656 \rightarrow 62$$

- c) $\alpha = 0'01$ i $e = 0'1$

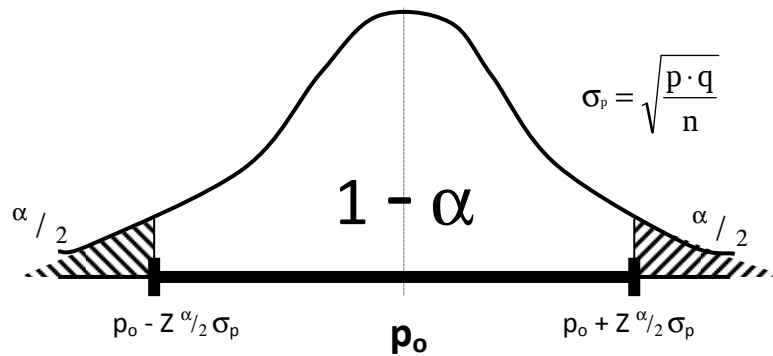
$$n = \left\lceil \frac{2'58 \cdot 0'8^2}{0'1} \right\rceil = 426'0096 \rightarrow 427$$

d) El mateix que al c, però sabent que $N = 512$

$$n = \frac{512 \cdot 2'58^2 \cdot 0'8^2}{2'58^2 \cdot 0'8^2 + 0'1^2 (511)} = \frac{2181'1692}{9'3701} = 232'7797 \rightarrow 233$$

B) Interval de Confiança de Proporcions (mostres grans)

És un interval simètric al voltant de la proporció observada (p_o) que té una probabilitat $1 - \alpha$ de contenir la proporció de la població (p).



- Per poblacions infinites o mostreig no exhaustiu:

$$p \in p_o \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_p = p_o \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

- Per poblacions finites i mostreig exhaustiu:

$$p \in p_o \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_p = p_o \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Si es desconeixen p i q (que és lògic):

a) S'estimen a partir de dades obtingudes en estudis anteriors.

b) Es realitza un sondeig previ (estudi pilot).

c) S'agafa el cas més desfavorable $p = q = 0,5$ (perquè el producte $p \cdot q$ és màxim: $p \cdot q = 0'25$).

d) S'utilitzen els valors observats (p_o i q_o):

$$p \in p_0 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}$$

Hi ha condicions d'aplicació: mostres grans, és a dir, tots els productes $n \cdot p$, $n \cdot q$, $n \cdot p_0$ han de valer com a mínim 5.

Grandària de la Mostra (proporcions)

De manera similar al cas de la mitjana, podem calcular la mida mínima de la mostra que necessitem per estimar el paràmetre (p), en funció del risc α i la precisió o error màxim (e).

- Per poblacions infinites o mostreig no exhaustiu:

$$e = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \rightarrow n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}{e^2} \rightarrow n = p \cdot q \left| \frac{Z_{\alpha/2}}{e} \right|^2$$

- Per poblacions finites i mostreig exhaustiu:

$$e = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \rightarrow n = \frac{N \cdot Z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}{e^2 (N-1) + (Z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q)}$$

Exemple. En un grup de 30 alumnes d'Estadística han aprovat 18. Quina serà la p d'aprovats de l'assignatura?

- E. puntual:

$$p_0 \rightarrow p = \frac{18}{30} = 0'6 \quad p = p_0 = 0'6$$

- E. interval ($\alpha = 0'01$):

$$p \in 0'6 \pm \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{30}} \cdot 2'58 = 0'6 \pm 0'2308 \begin{matrix} 0'8308 \\ 0'3692 \end{matrix}$$

Exemple. Com a l'anterior ($p_0 = 0,6$) però en un grup de 100 alumnes.

- E. puntual: $p = p_0 = 0'6$

- E. interval ($\alpha = 0'01$):

$$p \in 0'6 \pm \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{100}} \cdot 2'58 = 0'6 \pm 0'1264 \begin{matrix} 0'7264 \\ 0'4736 \end{matrix}$$

Exemple. En un estudi d'opinió en el qual només s'ha de contestar sí / no, es desconeix la tendència de la població. Es vol saber quants individus serà necessari enquestar per estimar la proporció de resposta amb un error màxim del 4% i una probabilitat de 0'95.

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}{e^2} = \frac{1'96^2 \cdot 0'5 \cdot 0'5}{0'04^2} = 600'25 \rightarrow 601$$

Exemple. Igual que en el problema anterior, però en el cas que hàgim estimat que el percentatge de respostes a favor està entre el 60% i el 70%.

$$n = \frac{1'96^2 \cdot 0'6 \cdot 0'4}{0'04^2} = 576'24 \rightarrow 577$$

Exemple. Si el 75% de l'alumnat aprova una determinada assignatura Quants alumnes aprovarien en un grup de 200? ($\alpha = 0,05$)

$$p_o \in p \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0'75 \pm 1'96 \sqrt{\frac{0'75 \cdot 0'25}{200}} = 0'75 \pm 0'06 \begin{cases} 0'81 \cdot 200 = 162 \\ 0'69 \cdot 200 = 138 \end{cases}$$

Exemple. Igual que en l'anterior, però en un grup de 64 alumnes.

$$p_o \in 0'75 \pm 1'96 \sqrt{\frac{0'75 \cdot 0'25}{64}} = 0'75 \pm 0'1061 \begin{cases} 0'8561 \cdot 64 = 55 \\ 0'6439 \cdot 64 = 41 \end{cases}$$

1.3 Teoria de la Decisió Estadística

Tracta de la presa de decisions en Estadística. També es basa en els conceptes de distribució mostral i error típic.

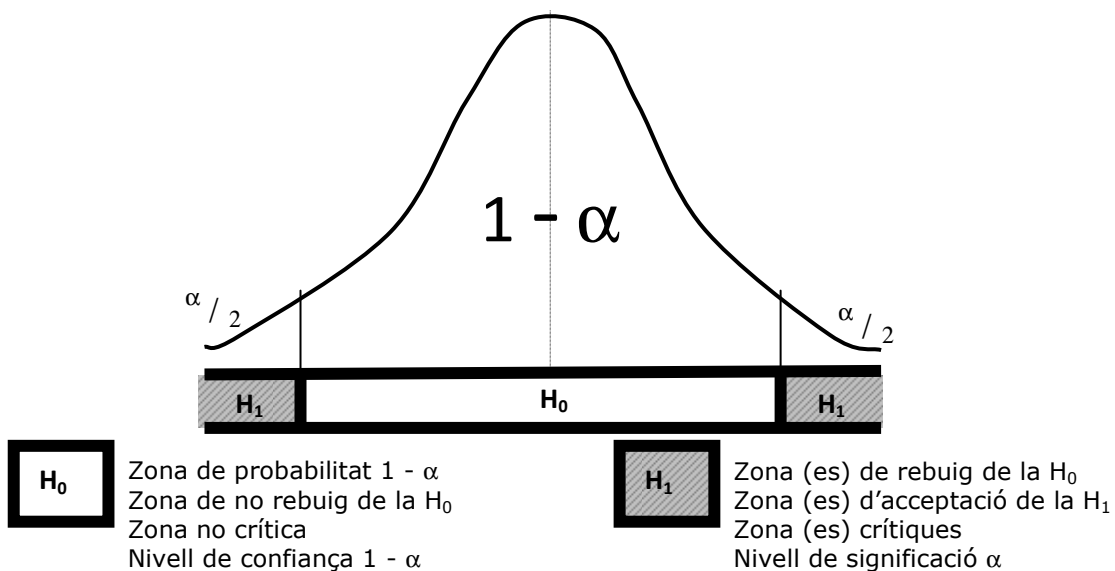
Es diu prova d'hipòtesis o **contrast d'hipòtesis** al procediment mitjançant el qual s'arriba a la decisió de rebutjar o no una determinada hipòtesi.

Hipòtesi: És una proposició o afirmació, que relaciona de forma concreta variables, que la naturalesa de la qual no coneixem amb absoluta certesa i que, justament per això, es planteja en termes de conjectura, una cosa que possiblement és certa, alguna cosa a verificar.

Dos tipus de Hipòtesis estadístiques:

- **Hipòtesi Nul·la (H_0):** la que ens plantejem a priori a verificar i que "acceptem" o rebutgem després de l'anàlisi estadística de les dades (diferència estadísticament nul·la o no significativa, prou petita com per poder ser explicada per l'atzar).
- **Hipòtesi Alternativa (H_1):** és la complementària (no només la contrària) de la H_0 (diferència estadísticament diferent de zero o significativa: massa gran o diferent de zero com per no ser explicada només per l'atzar).

La teoria de la decisió també es basa en els conceptes de distribució mostral i error típic:



Dos tipus de **decisions**:

- Rebutjar la H_0 : "Rebutgem la H_0 amb un risc α i acceptem la H_1 " (diferència significativa).
- No rebutjar ("acceptar") la H_0 : "Res s'oposa a acceptar la H_0 " (diferència no significativa).

1.3.1 Errors i riscos

Dos tipus d'errors (o riscos d'error):

α : de primera espècie o error típic

β : de segona espècie o error típic II

DECISIÓ	REALITAT	
	H_0 VERDADERA	H_0 FALSA
Rebutjar la H_0	α : error típic I o de 1ª espècie	Decisió correcta (potència d'un contrast $1 - \beta$)
No rebutjar la H_0 (acceptar)	Decisió correcta	β : Error típic II o de 2ª espècie

α : risc d'error conegut (fixat a priori) i petit, habitualment 0'05 (5%) o 0'01 (1%).

β : risc d'error desconegut, perquè depèn de la diferència entre el paràmetre real i el paràmetre teòric i generalment el paràmetre real el desconexim.

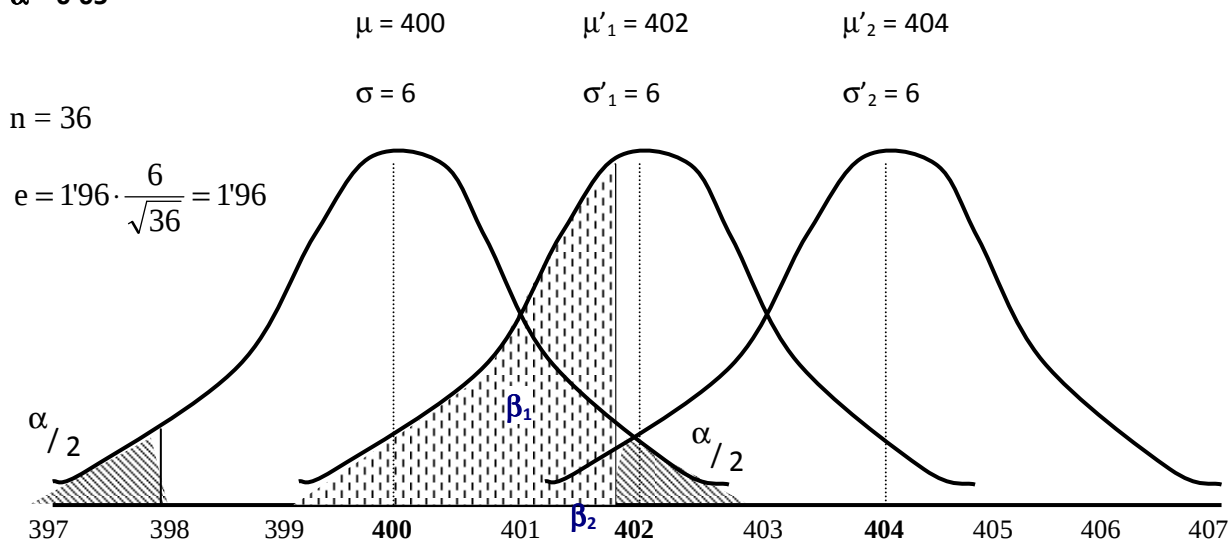
Anomenarem (en el cas de les mitjanes):

μ : paràmetre teòric.

μ' : paràmetre real (desconegut).

X: estadístic observat.

$\alpha = 0'05$



Cas 1: $\mu'_1 = 402$, $\sigma_1 = 6$

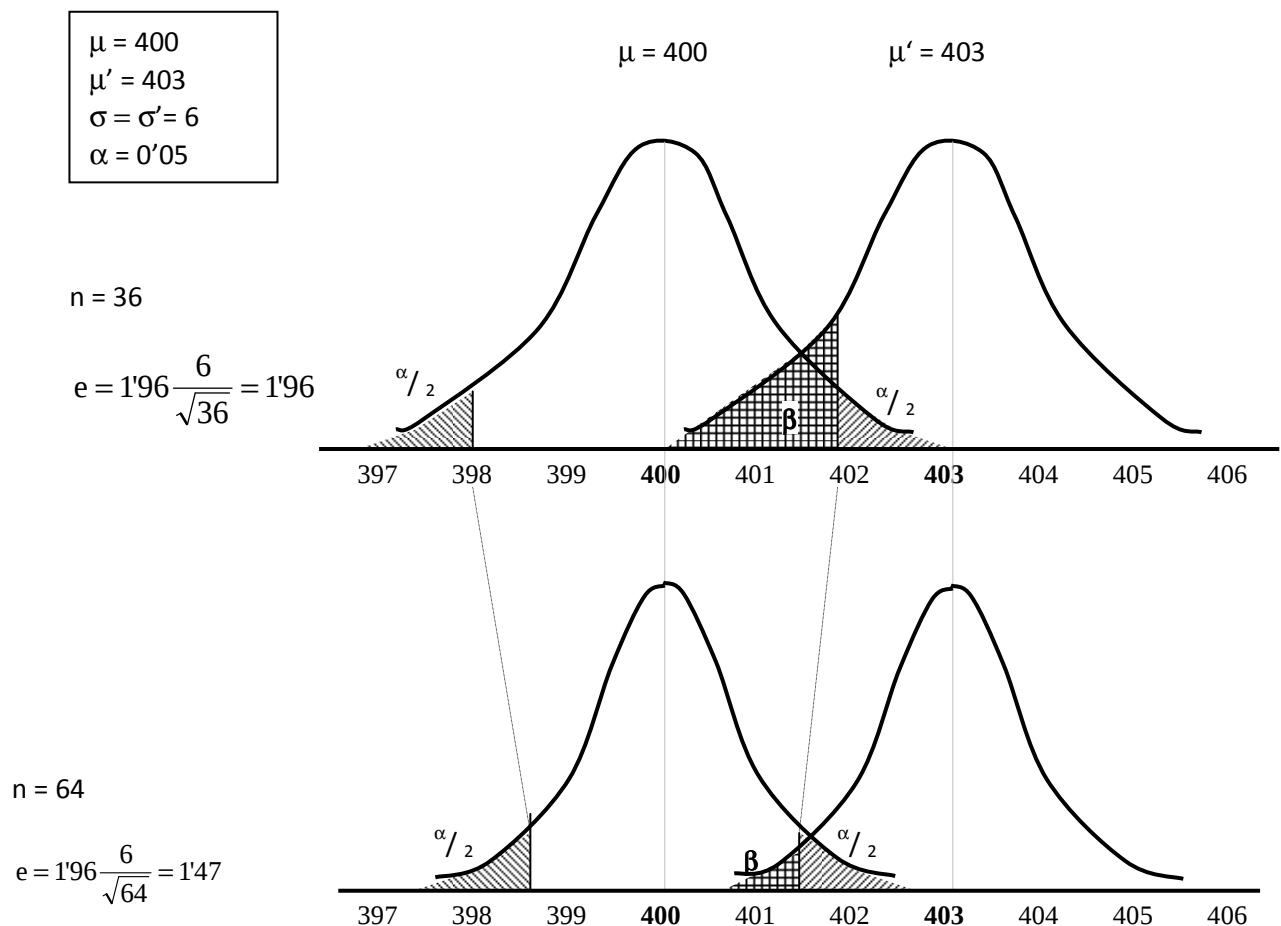
Cas 2: $\mu'_2 = 404, \sigma_2 = 6$

En el cas 1 (diferència $\mu'_1 - \mu = 402 - 400 = 2$) el risc β (intersecció) és $\cong 40\%$. En canvi, en el cas 2 ($\mu'_2 - \mu = 404 - 400 = 4$), la diferència és major i el risc β és menor que en el cas 1.

1.3.2 Potència d'un contrast (funció de potència) ($1 - \beta$)

Capacitat que té un contrast per detectar que la H_0 és falsa i rebutjar-la. Com augmentar la potència ($1 - \beta$) d'un contrast? (disminuir β):

- Augmentar α (mala solució).
- Augmentar n : la distribució mostral té menys desviació i l'interval de probabilitat es redueix i també β (sense augmentar α).



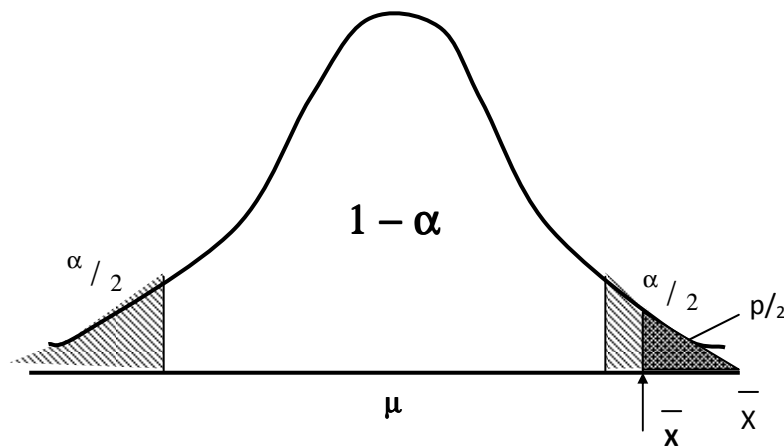
En augmentar n (de 36 a 64) els intervals són més estrets i, per tant, el risc β (intersecció) disminueix.

1.3.3 Grau de significació (P)

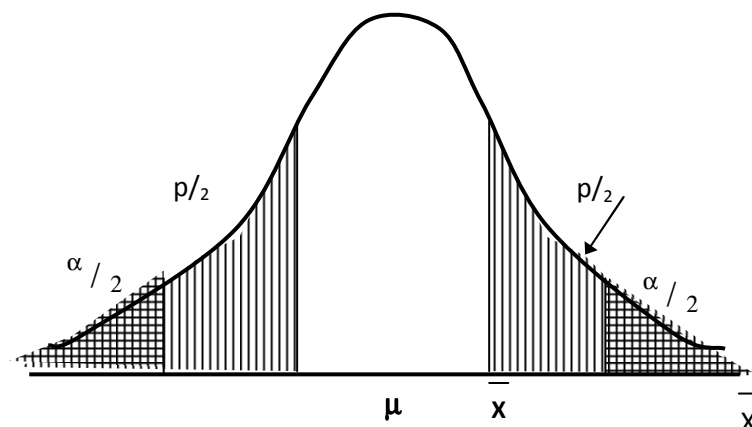
És la probabilitat d'observar un valor igual o major al estadístic (quan la H_0 és verdadera) o la probabilitat associada a l'estadístic de contrast.

En els outputs de programes informàtics figura la dada **p**, i serveix per a la presa de decisió estadística.

Exemple. La X està a la zona crítica, el valor p ($p/2$) és menor que α ($\alpha/2$), per tant, la decisió és rebutjar la Hipòtesi nul·la (H_0) $\rightarrow H_1$



Exemple. La X està a la zona no crítica, el valor p és més gran que α , per tant, la decisió és que res no s'oposa a acceptar la Hipòtesi nul·la (H_0).



Si p és major o igual a α "s'accepta" la H_0 ,
en canvi si p és menor a α "s'accepta" la H_1

1.3.4 Contrasts unilaterals i bilaterals

- C. Bilateral
- C. de dues cues
- C. no direccional (bidireccional)

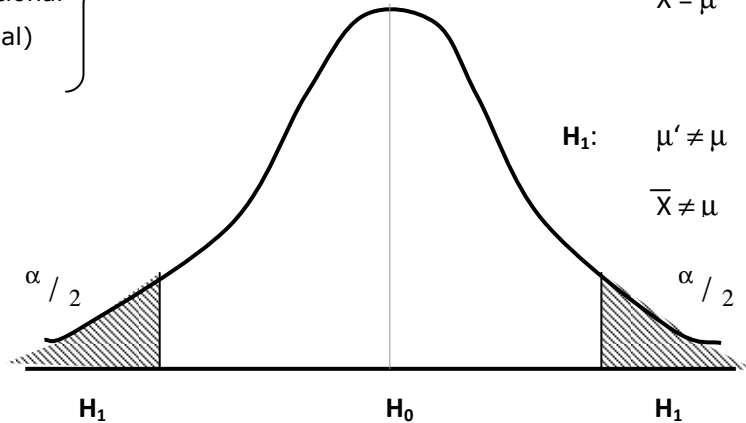
És aquell contrast on l' α està situat en ambdós extrems de la distribució.

$$H_0: \mu' = \mu$$

$$\bar{X} = \mu$$

$$H_1: \mu' \neq \mu$$

$$\bar{X} \neq \mu$$



- C. Unilateral
- C. d'una cua
- C. direccional (unidireccional)

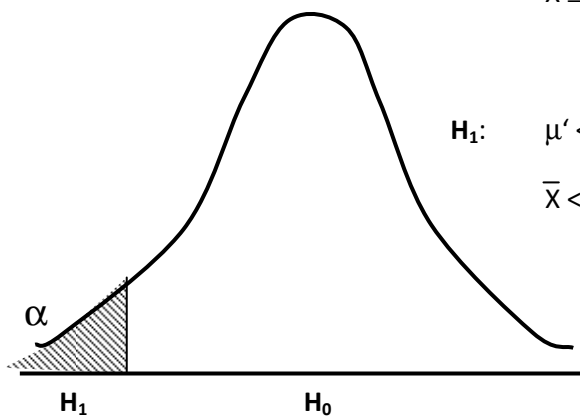
Aquell contrast on l' α està situat en un dels extrems (inferior o esquerre; superior o dret) de la distribució.

$$H_0: \mu' \geq \mu$$

$$\bar{X} \geq \mu$$

$$H_1: \mu' < \mu$$

$$\bar{X} < \mu$$

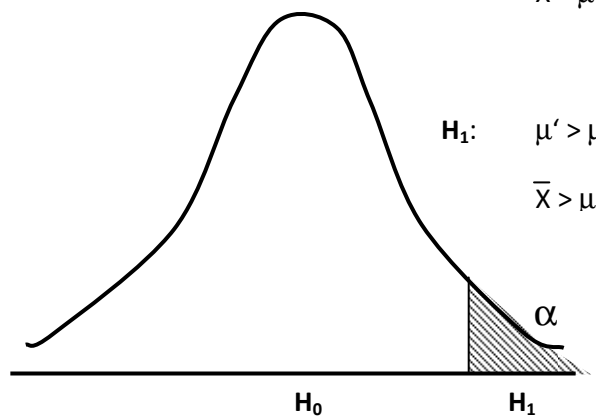


$$H_0: \mu' \leq \mu$$

$$\bar{X} \leq \mu$$

$$H_1: \mu' > \mu$$

$$\bar{X} > \mu$$



Avui en dia els contrastos unilaterals estan força qüestionats perquè:

- Són menys exigents que els bilaterals.
- Amb els bilaterals també podem saber si és inferior o superior.

En principi i sempre que no tinguem un criteri explícit (si és superior o inferior, ha millorat o empitjorat, etc) els contrastos els plantejarem com a bilaterals.

Risc α	10% 0'10	5% 0'05	2% 0'02	1% 0'01
Bilateral $ z_{\alpha/2} $	1'645	1'96	2'33	2'58
Unilateral $ z_{\alpha} $	1'28	1'645	2'05	2'33